T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA WEAKLY θ-PRE-I SÜREKLİ FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Zehra GÜZEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA, 2009

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA
WEAKLY θ-PRE-I SÜREKLİ FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Zehra GÜZEL

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2009, 67 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

Doç. Dr. Kemal AYDIN

Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin giriş bölümü bulunmaktadır. Bu bölümde, tezde kullanılan kavramların kısaca literatür bilgilerini verdik.

İkinci bölümde, [4]'de verilen weakly θ-pre sürekli fonksiyonlar konulu makaleyi çalışıp örnekleri ile inceledik.

Üçüncü bölümde, bu çalışma için gerekli olan ideal topolojik uzayların temel kavramlarını verdik. Ayrıca lokal fonksiyon kavramı ([16], Kuratowski) ve bu fonksiyonun ([14], Jankovic ve Hamlet)'de sağladığı özellikleri ayrıntılı bir şekilde yorumladık.

Dördüncü bölümde ise, ideal topolojik uzaylarda yeni bir süreklilik sınıfı olan weakly θ-pre-I sürekli fonksiyon kavramını verdik. Bazı karakterizasyonlarını ve

temel özelliklerini elde ettik. Aynı zamanda weakly θ-pre-I sürekli fonksiyon kavramınının diğer bazı fonksiyon türleriyle arasındaki bağlantıyı inceledik.

Anahtar Kelimeler: Weakly θ-pre-I sürekli fonksiyon, almost weakly I-sürekli fonksiyon, contra θ -pre-I sürekli fonksiyon, pre θ -I kapalı fonksiyon

ABSTRACT

MS Thesis

ON WEAKLY θ -PRE-I CONTINUOUS FUNCTIONS IN IDEAL TOPOLOGICAL SPACES

Zehra GÜZEL

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2009, 67 Pages

Jury

Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

Doç. Dr. Kemal AYDIN

Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN

This study consists of four sections.

In the first section; an introduction and some brief literature knowledge for some parameters have been given.

In second section; we have examined the paper is related with weakly θ-pre continuous functions is given ([4], Baker) with its examples.

In the third section; we have given the basic concepts of ideal topological spaces required for this study. Besides, local function concept ([16], Kuratowski) and the characteristics of this function provided in ([14], Jankovic ve Hamlet) are given unproved have been presented in detail in a proved state by us.

In the fourth section; we give a new class of functions called weakly θ-pre-I-continuous in ideal topological space. Some characterizations and several fundamental properties of this class of functions are obtained. Also, it's relationship with other types of functions is investigated.

Key Words: Weakly θ-pre-I-continuous functions, almost weakly I-continuous functions, contra θ -pre-I continuous functions, pre θ -I closed functions.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarımı büyük bir titizlik ve sabırla takip ederek daima bana yol gösteren ve bu süreç boyunca karşılaştığım tüm güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam, Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL 'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunar, ayrıca çalışmalarımda bana her zaman destek olan, bilgi ve deneyimini benden esirgemeyen sevgili hocam, Yrd. Doç. Dr. Ahu AÇIKGÖZ' e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Zehra GÜZEL

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT iii
ÖNSÖZ v
İÇİNDEKİLER vi
GÖSTERİMLER vii
1. GİRİŞ 1
2. WEAKLY θ-PRE SÜREKLİ FONKSİYONLAR 3
2.1. Ön Bilgiler 3
2.2. Tanım ve Bazı Karakterizasyonlar 6
2.3. Diğer Bazı Sürekli Fonksiyonlarla Karşılaştırılmalar 10
2.4. Bazı Özellikler. 18
3. İDEAL TOPOLOJİK UZAY 23
3.1.Temel Kavramlar 23
3.2. Lokal fonksiyon 26
4. WEAKLY θ-PRE-I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR 35
4.1. Ön Bilgiler 35
4.2. Tanım ve Karakterizasyonlar 39
4.3. Weakly θ-Pre-I Sürekli Fonksiyonların Diğer Bazı Sürekli Fonksiyonlarla Karşılaştırılması 43
4.4. Bazı Özellikler 59
SONUÇ VE ÖNERİLER 64
KAYNAKLAR 65

GÖSTERİMLER

$\forall$	: Her
$\in$	: Ait
$\notin$	: Ait değil
$=$	: Eşit
$\neq$	: Eşit değil
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$\Leftarrow$	: Yeter şart
$\varnothing$	: Boş küme
X	: Evrensel küme
$P(X)$	: Güç kümesi
$A \subset B$	: B kümesi, A kümesini kapsar
$A \not\subset B$	: B kümesi, A kümesini kapsamaz
$A \cap B$	: A kesişim B
$A \cup B$	: A birleşim B
A^t	: A kümesinin tümleyeni
$A - B$	: A fark B
I	: X kümesi üzerindeki herhangi bir ideal
I_c	: X kümesinin sayılabilir alt kümelerinden oluşan ideal
I_f	: X kümesinin sonlu alt kümelerinden oluşan ideal
τ	: Topolojik yapı
(X, τ)	: Topolojik uzay

$G_{(X)}$: (X,τ) topolojik uzayında x noktasının açık komşuluklar ailesi

$\vartheta_{(X)}$: (X,τ) topolojik uzayında x noktasının komşuluklar ailesi

(A,τ_A) : Alt topolojik uzay

(X,τ,I) : İdeal topolojik uzay

$\widetilde{A}$: (X,τ) topolojik uzayındaki $A \subset X$ alt kümesinin yığılma noktaları kümesi

$yo\breve{g}(A)$: (X,τ) topolojik uzayındaki $A \subset X$ alt kümesinin yoğunlaşma noktaları kümesi

1. GİRİŞ

İlk defa 1933 yılında Kuratowski [17] bir topolojik uzayda ideal kavramını kullanarak kümenin lokal fonksiyonu kavramını tanımladı ve bu fonksiyonun sağladığı özellikleri inceledi. Daha sonra Vaidyanathaswamy [32] lokal fonksiyon kavramı yardımıyla bir kapanış işlemi tanımladı, bu işlemden yeni bir topoloji oluşturdu ve bu topolojinin tabanını elde etti.

1964 yılında Hayashi [11], kendi adını verdiği Hayashi uzayını tanımladı. Daha sonra 1975 yılında Samuels [29] lokal fonksiyon kavramının ideallerin değiştirilmesiyle genel topolojide de bilinen kapanış noktası, yığılma noktası, yoğunlaşma noktası ve ikinci kategoriden nokta kavramına eşit olduğunu gösterdi. Böylece lokal fonksiyon kavramının bu nokta kavramının bir genellemesi olduğu sonucuna vardı.

Ardından 1990 yılında D. Janković ve T. R. Hamlet [15] lokal fonksiyon kavramı ile ilgili o zamana kadar yapılan tüm çalışmaları ayrıntılı şekilde incelediler ve bu kavramla ilgili yeni özellikler elde ettiler.

İlk defa 1933 yılında tanımlanmış olan lokal fonksiyon kavramı ile ilgili zamanımıza kadar çeşitli araştırmalar yapılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Halen günümüzde de araştırmacılar için önemli bir çalışma konusu olmuştur.

Biz tezimizde, 2003 yılında Baker [4] tarafından tanımlanmış weakly θ-pre sürekli fonksiyonları inceledik. Konumuzla ilgili literatür taraması yaptık ve Baker [4] tarafından verilen weakly θ-pre sürekli fonksiyonların diğer bazı bilinen süreklilik çeşitleri ile karşılaştırılmasını yorumladık. İdeal topolojik uzaylarda yeni bir süreklilik sınıfı olan weakly θ-pre-I sürekli fonksiyon kavramını verdik. Bazı karakterizasyonlarını ve temel özelliklerini elde ettik. Aynı zamanda weakly θ-pre-I sürekli fonksiyon kavramınının diğer bazı fonksiyon türleriyle arasındaki bağlantıyı inceledik.

Tezimizde (X,τ) topolojik uzayı ve (X,τ,I) ideal topolojik uzayı, üzerinde hiçbir ayırma aksiyomu olmayan uzay olarak alınacaktır. (X,τ) ve (Y,υ) topolojik uzayları kısaca X ve Y ile gösterilecektir. (X,τ) veya (X,τ,I) uzaylarından alınan herhangi bir A alt kümesinin içini ve kapanışını sırasıyla $Int(A)$ ve $Cl(A)$ ile göstereceğiz. Ayrıca (X,τ,I) uzayındaki herhangi bir A alt kümesinin lokal fonksiyonunu kısaca A^* olarak ve yıldız kapanışını da $Cl^*(A)$ olarak göstereceğiz.

2. WEAKLY- θ-PRE SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Strongly θ-pre sürekli fonksiyon kavramı Noiri tarafından verilmiştir [22]. Weakly θ-pre sürekli fonksiyon kavramını 2003 yılında Baker verdi. Weakly θ-pre sürekliliğin, strongly θ-pre süreklilikten daha zayıf olduğu ayrıca almost weakly süreklilik ile süreklilik arasında olduğu da Baker tarafından gösterildi [4]. Ayrıca weakly θ-pre sürekliliğin, weakly süreklilikten bağımsız olduğu, weakly θ-pre süreklilik ve weakly sürekliliğin hangi şartlar altında birbirini gerektirdiği incelenmiştir [4]. Örneğin; tanım uzayı p-regular uzay ise, weakly süreklilik tarafından weakly θ-pre süreklilik gerektirilir. Weakly θ-pre sürekli fonksiyonların grafikleri ile ilgili özellikleri araştırılmıştır [4]. Değer uzayı Hausdorff olan bir weakly θ-pre sürekli fonksiyonun grafiği, strongly pre-kapalıdır, bu ise Noiri' nin makalesinin bir sonucuna dayanır [22]. Bu kesimin amacı [20] de verilen weakly θ-pre sürekli fonksiyon olarak adlandırılan, strongly θ-pre sürekliliğin zayıf bir şeklini incelemek ve yorumlamaktır.

2.1.Ön Bilgiler

Bu çalışmanın tamamında (X,τ) (X,τ) ve (Y,ν) (Y,ϑ)aksi ifade edilmediği sürece hiçbir ayırma aksiyomunu sağlamayan topolojik uzaylar olarak alınacaktır. A kümesi (X,τ) uzayının bir alt kümesi olsun. A kümesinin içini ve kapanışını $Int(A)$ ve $Cl(A)$ olarak göstereceğiz.

Bir A kümesi için, eğer $A \subset Int(Cl(A))$ ($A \subset Cl(Int(A))$, $A \subset Int(Cl(Int(A)))$) ise A kümesine **pre-açık küme (**[19], Mashhour ve ark.) (**semi-açık küme** ([19], Levine), α**-açık küme** ([23], Njastad)) denir. Pre-açık bir kümenin tümleyeni pre-kapalı kümedir (semi-kapalı küme, α-kapalı küme). (X,τ) uzayının tüm pre-açık kümelerinin ailesi $PO(X,x) = \{ U : x \in U$ ve $U \in PO(X)\}$ ile tanımlanıp, $PO(X)$ sembolü ile gösterilir. Yani $PO(X,x)$ ailesi, (X,τ) uzayında

sabit bir x noktasını içeren bütün pre-açık kümelerin ailesidir. A kümesini kapsayan tüm pre-kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin **pre-kapanışı** ([9], El-Deeb ve ark.) denir ve $pCl(A)$ ile gösterilir. $pCl(A) = A \cup Cl(Int(A))$ ile ifade edilir. A kümesinin **pre-içi** ([22], Mashhour), A kümesinde kapsanan tüm pre-açık kümelerin birleşimi olarak tanımlanır ve $pInt(A)$ ile gösterilir.

(X,τ) uzayının bir x noktasını içeren her açık U kümesi için, $Cl(U) \cap A \neq \varnothing$ oluyorsa bu x noktasına A kümesinin **θ-kapanış noktası** ([31], Velicko) denir. A kümesinin bütün θ-kapanış noktalarının kümesi A kümesinin θ-kapanışı olarak adlandırılır ve $Cl_\theta(A)$ ile gösterilir. Eğer bir A alt kümesi için, $A = Cl_\theta(A)$ oluyorsa A kümesine **θ-kapalı küme** ([31], Velicko) denir. θ-kapalı bir kümenin tümleyenine θ-açık küme denir. (X,τ) uzayının bir x noktasını alalım, eğer bu x noktasını içeren her pre-açık U kümesi için , $pCl(U) \cap A \neq \varnothing$ oluyorsa bu x noktasına A kümesinin **pre θ-kapanış noktası** ([6], Dontchev ve ark.) denir. A kümesinin bütün pre θ-kapanış noktalarının kümesine A kümesinin pre θ-kapanışı denir ve $pCl_\theta(A)$ ile gösterilir. Eğer bir A alt kümesi için, $A = pCl_\theta(A)$ oluyorsa A kümesine **pre θ-kapalı küme** ([6], Dontchev ve ark.) denir. Bir pre θ-kapalı kümenin tümleyeni pre θ-açık kümedir. (X,τ) uzayında bir $x \in A$ noktası için, $pCl(U) \subset A$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \in PO(X,x)$ kümesi varsa, bu x noktasına A kümesinin **pre-θ iç noktası** denir**.** A kümesinin bütün pre-θ iç noktalarının oluşturduğu kümeye, A alt kümesinin pre-θ içi denir ve $pInt_\theta(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.1. $f:(X,\tau) \to (Y,\nu)$ fonksiyon olsun. Her $x \in X$ noktası ve Y uzayının $f(x)$ noktasını içeren her V komşuluğu için, $f(U) \subset Cl(V)$ olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğu varsa, bu fonksiyona **weakly sürekli fonksiyon** denir ([14], Levine).

Tanım 2.2.2. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Y uzayının her V açık kümesi için, $f^{-1}(V)\subset Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$ oluyorsa, bu fonksiyona **almost weakly sürekli fonksiyon** denir ([10], Jankovic).

Tanım 2.2.3. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in X$ noktası ve Y uzayının $f(x)$ noktasını içeren her V açık kümesi için, $f(pCl(U))\subset V$ olacak şekilde bir $U\in PO(X,x)$ kümesi varsa, bu fonksiyona **strongly θ-pre sürekli fonksiyon** denir ([22], Noiri).

Tanım 2.2.4. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in X$ ve Y uzayının $f(x)$ noktasını içeren her V açık kümesi için, $f(Cl(U))\subset V$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu varsa, bu fonksiyona **strongly θ-sürekli fonksiyon** denir ([20], Long ve Herrington).

Tanım 2.2.5. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in X$ noktası ve Y uzayının $f(x)$ noktasını içeren her V açık kümesi için, $f(U)\subset V$ olacak şekilde $U\in PO(X,x)$ kümesi varsa, bu fonksiyona **pre-sürekli fonksiyon** denir ([19], Mashhour ve ark.).

Tanım 2.2.6. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in X$ noktası ve Y uzayının $f(x)$ noktasını içeren her V açık kümesi için, $f(U)\subset Cl(V)$ olacak şekilde bir $U\in PO(X,x)$ kümesi varsa f fonksiyonuna **weakly pre-sürekli** denir ([25], Popa ve Noiri).

2.2. Tanım ve Bazı Karakterizasyonlar

Aşağıdaki Teorem Noiri tarafından tanımlanan strongly θ-pre sürekli fonksiyonun bir karakterizasyonunu verir.

Teorem 2.2.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonunun strongly θ-pre sürekli olması için gerek ve yeter şart Y uzayının her B alt kümesi için, $pCl_\theta\left(f^{-1}(B)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(B)\right)$ olmasıdır ([22], Noiri).

Bu karakterizasyonla birlikte aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 2.2.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Y uzayının her V açık alt kümesi için, $pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$ oluyorsa fonksiyona weakly θ-pre sürekli fonksiyon denir ([4], Baker).

Uyarı 2.2.1 Strongly θ-pre sürekli fonksiyon, weakly θ-pre süreklidir. Ancak karşıtının doğru olmadığı ([4], Baker) gösterilmiştir:

Örnek 2.2.1. $X=\{a,b\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ **Sierpinski topolojisi** verilsin. Bir $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ fonksiyonu $f(a)=b$ ve $f(b)=a$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu weakly θ-pre süreklidir fakat strongly θ-pre sürekli değildir ([4], Baker).

([4], Baker) da weakly θ-pre sürekli fonksiyonların bazı karakterizasyonları aşağıdaki gibi ispatsız olarak verilmiştir. Bu teorem tarafımızca ispat edilmiştir.

Teorem 2.2.2. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(a) f fonksiyonu weakly θ-pre süreklidir;

(b) Y uzayının her B alt kümesi için, $pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(B\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(B)\right)$;

(c) Y uzayının her V pre-açık kümesi için, $pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$;

(d) Y uzayının her V açık kümesi için, $pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(V\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$;

(e) Y uzayının her F kapalı kümesi için, $pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(F\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(F\right)$;

(f) Y uzayının her B alt kümesi için, $f^{-1}\left(Int\left(B\right)\right)\subset pInt_\theta\left(f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(B\right)\right)\right)\right)$;

(g) Y uzayının her F pre-kapalı kümesi için, $f^{-1}\left(Int\left(F\right)\right)\subset pInt_\theta\left(f^{-1}\left(F\right)\right)$;

(h) Y uzayının her V açık kümesi için, $f^{-1}\left(V\right)\subset pInt_\theta\left(f^{-1}\left(Cl\left(V\right)\right)\right)$ dır.

İspat. (a)⇒(b): Y uzayının bir B alt kümesi için, $Int(Cl(B))$ kümesi açık olduğundan (a) ifadesi gereği,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(B\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(Cl\left(B\right)\right)\right)\right)$$

yazılır.

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(B\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(Cl\left(B\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(Cl\left(B\right)\right)\right)=f^{-1}\left(Cl\left(B\right)\right)$$

olduğundan,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(B\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(B\right)\right)$$

ifadesini elde ederiz.

(b)⇒(c): Y uzayının bir V pre-açık kümesi için, $V\subset Int\left(Cl\left(V\right)\right)$ olup,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(V\right)\right)\subset pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(V\right)\right)\right)\right)$$

olur ve (b) ifadesi gereği,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(V\right)\right)\subset pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(V\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(V\right)\right)$$

bulunur. Buradan,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(V\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(V\right)\right)$$

elde edilir.

(c)⇒(d): Y uzayının bir V açık kümesi için, $Int\left(Cl\left(V\right)\right)\subset Y$ kümesi açık olup, her açık küme pre-açık olduğundan, (c) ifadesi gereği,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(V\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(Cl\left(V\right)\right)\right)\right)$$

olur.

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(V\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(Cl\left(V\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(Cl\left(V\right)\right)\right)\right)= f^{-1}\left(Cl\left(V\right)\right)$$

olup,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(V\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(V\right)\right)$$

bulunur.

(d)⇒(e): Y uzayının bir F kapalı kümesi için, $Int\left(F\right)$ kümesi açık olup, (d) ifadesi gereği,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(Int\left(F\right)\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(F\right)\right)\right)$$

yazılır. Buradan,

$$pCl_\theta f^{-1}\left(Int\left(F\right)\right)\subset pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(Int\left(F\right)\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(F\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(F\right)\right)= f^{-1}\left(F\right)$$

olup,

$$pCl_\theta f^{-1}\left(Int\left(F\right)\right)\subset f^{-1}\left(F\right)$$

elde edilir.

(e)⇒(f): Y uzayının bir B alt kümesi için, $Cl\left(Y-B\right)$ kümesi kapalı olup, (e) ifadesi gereği,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(Y-B\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(Y-B\right)\right)$$

olur.

$$X-pInt_\theta\left(f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(B\right)\right)\right)\right)\subset X-f^{-1}\left(Int\left(B\right)\right)$$

olup, buradan her iki tarafın tümleyeni alınırsa,

$$f^{-1}\left(Int\left(B\right)\right)\subset pInt_\theta\left(f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(B\right)\right)\right)\right)$$

elde edilir.

(f) ⇒(g): Y uzayının bir F pre-kapalı kümesi için, (f) ifadesi gereği,

$$f^{-1}\left(Int\left(F\right)\right)\subset pInt_\theta\left(f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(F\right)\right)\right)\right)$$

yazılır. F kümesi pre-kapalı olduğundan $Cl\left(Int\left(F\right)\right)\subset F$ dir. Dolayısıyla,

$$f^{-1}\left(Int\left(F\right)\right)\subset pInt_\theta\left(f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(F\right)\right)\right)\right)\subset pInt_\theta\left(f^{-1}\left(F\right)\right)$$

olup,

$$f^{-1}(Int(F)) \subset pInt_{\theta}(f^{-1}(F))$$

elde edilir.

(g)⇒(h): Y uzayının bir V açık kümesi için, $Cl(V)$ kümesi kapalı olup, her kapalı küme de pre-kapalı olduğundan, (g) ifadesinden,

$$f^{-1}(Int(Cl(V))) \subset pInt_{\theta}(f^{-1}(Cl(V)))$$

olur. Hipotez gereği, V kümesi açık olduğundan,

$$f^{-1}(V) \subset f^{-1}(Int(Cl(V))) \subset pInt_{\theta}(f^{-1}(Cl(V)))$$

olur. Buradan

$$f^{-1}(V) \subset pInt_{\theta}(f^{-1}(Cl(V)))$$

elde edilir.

(h)⇒(a): Y uzayının bir V açık kümesi için, $Int(Y-V)$ kümesi açık olup, (h) ifadesi gereği,

$$f^{-1}(Int(Y-V)) \subset pInt_{\theta}(f^{-1}(Cl(Int(Y-V))))$$

yazılır. Buradan,

$$X - f^{-1}(Cl(V)) \subset X - pCl_{\theta}(f^{-1}(Int(Cl(V))))$$

olur. Her iki tarafın tümleyeni alınırsa,

$$pCl_{\theta}f^{-1}(V) = pCl_{\theta}f^{-1}(Int(V)) \subset pCl_{\theta}(f^{-1}(Int(Cl(V)))) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

ve

$$pCl_{\theta}f^{-1}(V) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

olup, bu da f fonksiyonunun weak θ-pre sürekli olduğunu gösterir.

2.3 Diğer Bazı Sürekli Fonksiyonlarla Karşılaştırmalar

Strongly θ-pre süreklilik, süreklilikten bağımsızdır ([22], Noiri). Ancak aşağıdaki sonuçlardan görüldüğü gibi weak θ-pre süreklilik sürekliliğin zayıf bir formudur ([4], Baker).

Aşağıdaki teoremin ispatında geçen, ispatsız olarak verilen, ifade tarafımızca ispat edilmiştir:

Lemma 2.3.1. Eğer bir A kümesi X uzayında açık ise, $Cl(A) = pCl_\theta(A)$ olmasıdır.

İspat: X uzayının bir A açık kümesini alalım. A kümesi X uzayında açık küme ise, $pCl_\theta(A) \subset Cl(A)$ olduğunu göstermeliyiz. Varsayalım ki $x \notin Cl(A)$ olsun. Kapanışın tanımından bir $U \in \vartheta_{(x)}$ açık kümesi için $U \cap A = \varnothing$ olur. Buradan $U \subset (X - A)$ olup, X - A kapalı bir küme olup ve her kapalı küme pre-kapalı olduğundan, her iki tarafın pre- kapanışı alınırsa, $pCl(U) \subset pCl(X - A) = X - A$ olup, $pCl(U) \cap A = \varnothing$ olacağından, pre θ-kapanış noktası tanımından $x \notin pCl_\theta(A)$ bulunur, yani; $pCl_\theta(A) \subset Cl(A)$ dir.

Şimdi A kümesi X uzayında açıksa $Cl(A) \subset pCl_\theta(A)$ olduğunu gösterelim. $x \in Cl(A)$ ve $x \in V \in PO(X)$ olsun. Bu takdirde $x \in V \subset Int(Cl(V))$ olup, $A \cap Int(Cl(V)) \neq \varnothing$ dır. A kümesi açık olduğundan,

$$A \cap Int(Cl(V)) = Int(A) \cap Int(Cl(V)) = Int(A \cap Cl(V)) \subset Int(Cl(A \cap V)) \subset Cl(A \cap V)$$

olur. Böylece $Cl(A \cap V) \neq \varnothing$ ve $A \cap V \neq \varnothing$ olduğunu elde ederiz.

$(A \cap V) \cup (A \cap Cl(Int(V))) = A \cap (V \cup Cl(Int(V))) = A \cap pCl(V)$ olup $A \cap V \neq \varnothing$ olduğundan , $A \cap pCl(V) \neq \varnothing$ olur, pre θ-kapanış tanımından $x \in pCl_\theta(A)$ bulunur. Sonuç olarak A açık kümesi için, $Cl(A) = pCl_\theta(A)$ olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2.3.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu sürekli ise, f fonksiyonu weakly θ -pre süreklidir ([4], Baker).

İspat : $V\subset Y$ açık küme olsun. O zaman $f^{-1}(V)$ kümesi açık olduğundan,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right)=Cl\left(f^{-1}(V)\right)$$

dir. Ayrıca f fonksiyonu sürekli olduğundan,

$$Cl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}(Cl(V))$$

dir. Buradan,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right)=Cl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

sağlanır. Bu da f fonksiyonunun weakly θ-pre sürekli olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.1 in karşıtı genelde doğru değildir. Noiri'nin [24] makalesinde Örnek 2.1 de verilen fonksiyon weakly θ-pre süreklidir fakat sürekli değildir.

Jankovic [13] de almost-weak-sürekliliği pre-sürekliliğin zayıf bir hali olarak tanımlamıştır. Popa ve Noiri [24] weak-pre-sürekliliği tanımlamış ve almost-weak-sürekliliğin weak-pre-sürekliliğe denk olduğunu göstermişlerdir.

Popa ve Noiri [25]' de weakly pre-sürekliliğin bir karakterizasyonunu aşağıdaki gibi vermişlerdir.

Teorem 2.3.2. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonunun weakly pre-sürekli olması için gerek ve yeter şart her açık $V\subset Y$ kümesi için, $pCl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$ olmasıdır ([25], Popa ve Noiri).

([4], Baker) de her A alt kümesi için, $pCl(A)\subset pCl_\theta(A)$ olduğunu ispatsız olarak vermiştir.

Yukarıda verilen ifade tarafımızca aşağıdaki gibi ispat edilmiştir.

Lemma 2.3.2. Her A alt kümesi için, $pCl(A) \subset pCl_\theta(A)$ dır.

İspat: $x \in pCl(A)$ ve $x \in U \in PO(X)$ olsun. $x \in pCl(A)$ olduğundan, pre-kapanış noktası tanımı gereği $U \cap A \neq \varnothing$ dır. Her zaman $U \subset pCl(U)$ olduğundan, $pCl(U) \cap A \neq \varnothing$ olup, pre-θ kapanış noktası tanımı gereği, $x \in pCl_\theta(A)$ dır. Böylece $pCl(A) \subset pCl_\theta(A)$ elde edilir.

Teorem 2.3.3. Eğer $f:(X,\tau) \to (Y,\nu)$ fonksiyonu weakly θ-pre sürekli ise, f fonksiyonu weakly pre-süreklidir ([4], Baker).

Örnek 2.3.1. de weakly sürekliliğin, weakly θ-pre sürekliliği gerektirmediği ve ayrıca weakly pre-sürekliliğin de, weak θ-pre sürekliliği gerektirmediği gösterilmiştir ([4], Baker):

Örnek 2.3.1: X kümesi en az üç elemanlı herhangi bir küme ve $a \in X$ olsun. Bu küme üzerinde

$$\tau = \{ U \subset X : a \in U \text{ veya } U = \varnothing \}$$

ve

$$\sigma = \{ U \subset X : a \notin U \text{ veya } U = X \}$$

topolojileri verilsin. Bu takdirde $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ birim fonksiyonu weakly süreklidir, fakat weakly θ-pre sürekli değildir. f fonksiyonunun weakly sürekli olduğu ancak weakly θ-pre sürekli olmadığı, (X,τ) uzayının boş olmayan her V alt kümesi için, $pCl_\theta(V) = X$ olduğundan, görülür ([4], Baker).

Böylece weak θ-pre süreklilik, süreklilik ve weak pre-süreklilik arasındadır.

Tanım 2.3.1. Bir X uzayı eğer F kapalı (pre-kapalı) alt kümesi ve $x \in X - F$ noktası için, $x \in U$ ve $F \subset V$ olacak şekilde U ve V gibi iki ayrık pre-açık kümeye

sahipse bu uzaya **p-regular** ([9], El-Deeb ve ark.), (**pre-regular** ([22], Noiri)) uzay denir.

Aşağıda Baker [4] tarafından ispatsız olarak verilen lemma tarafımızca ispat edilmiştir:

Lemma 2.3.3. X uzayının pre-regular olması için gerek ve yeter şart her $A \subset X$ için, $pCl_\theta(A) = pCl(A)$ olmasıdır ([4], Baker).

İspat: Varsayalım ki X uzayı pre-regular uzay olsun. $A \subset X$ ve $x \in pCl_\theta(A)$ olsun. U kümesi, X uzayında bir pre-açık küme ve $x \in U$ olsun. O zaman en az bir $W \in PO(X,x)$ vardır öyle ki $x \in W \subset pCl(W) \subset U$ dır. $x \in pCl_\theta(A)$ olduğundan, pre-θ kapanış noktası tanımı gereği $pCl(W) \cap A \neq \varnothing$ olup, $U \cap A \neq \varnothing$ dır. Böylece $x \in pCl(A)$ dir. Her A alt kümesi için de $pCl(A) \subset pCl_\theta(A)$ olduğundan, $pCl_\theta(A) = pCl(A)$ bulunur.

Varsayalım ki her $A \subset X$ için $pCl_\theta(A) = pCl(A)$ olsun. $x \in X$ ve $x \notin F$, F pre-kapalı küme olsun. O zaman $x \notin pCl(F)$ ve hipotez gereği $x \notin pCl_\theta(F)$ dır. Bu yüzden en az bir $U \in PO(X,x)$ kümesi vardır, öyle ki $pCl(U) \cap F = \varnothing$ dır. Böylece $x \in U$ ve $F \subset X - pCl(U)$ olur. Buradan X uzayının pre-regular uzay olduğu ispatlanır.

Aşağıdaki teorem, Teorem 2.3.2. ve Lemma 2.3.3. in direk sonucudur:

Teorem 2.3.4. X uzayı pre-regular uzay ise, bu takdirde $f:(X,\tau) \to (Y,\nu)$ fonksiyonunun weakly θ-pre sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun weakly pre-sürekli olmasıdır ([4], Baker).

Weak θ-pre sürekliliğin, weak süreklilikten bağımsız olduğu aşağıdaki örnekte gösterilmiştir:

Örnek 2.3.2. $X=\{a,b,c\}$ kümesi olsun. X kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\}\}$ ve $\sigma=\{X,\varnothing,\{c\},\{a,b\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ birim fonksiyonu weakly θ-pre süreklidir, fakat weakly sürekli değildir ([4], Baker).

Weak θ-pre sürekliliğin weak süreklilikle hangi koşullar altında birbirini gerektirdiği [4]' de gösterilmiştir.

Rose weak sürekliliğin bir karakterizasyonunu aşağıdaki biçimde vermiştir [26]:

Teorem 2.3.5. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonunun weakly sürekli olması için gerek ve yeter şart her açık $V\subset Y$ için, $Cl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$ olmasıdır ([26], Rose).

p-regular lığın bir karakterizasyonu ([9], El-Deeb ve ark.) de verilmiştir.

Teorem 2.3.6. Bir X uzayının p-regular uzay olması için, gerek ve yeter şart her $x\in X$ noktası ve x noktasının her U açık komşuluğu için, $x\in W\subset pCl(W)\subset U$ olacak şekilde en az bir $W\in PO(X,x)$ kümesinin olmasıdır ([9], El-Deeb ve ark.).

Aşağıdaki Lemma da p-regular lığın bir başka karakterizasyonu verilmiştir ([4], Baker).

Lemma 2.3.4. Bir X uzayının p-regular olması için gerek ve yeter şart her $A\subset X$ için $pCl_\theta(A)\subset Cl(A)$ olmasıdır ([4], Baker).

İspat: Varsayalım ki X uzayı p-regular uzay olsun. $A\subset X$ ve $x\in pCl_\theta(A)$ olsun. U kümesi, X uzayının bir açık kümesi ve $x\in U$ olsun. O zaman en az bir

$W \in PO(X,x)$ vardır öyle ki $x \in W \subset pCl(W) \subset U$ dır. $x \in pCl_\theta(A)$ olduğundan, pre-θ kapanış noktası tanımı gereği $pCl(W) \cap A \neq \varnothing$ olup, $U \cap A \neq \varnothing$ dır. Böylece $x \in Cl(A)$ dir.

Varsayalım ki her $A \subset X$ için, $pCl_\theta(A) \subset Cl(A)$ olsun. $x \in X$ ve $x \notin F$, F kapalı küme olsun. O zaman $x \notin Cl(F)$ ve hipotez gereği $x \notin pCl_\theta(F)$ dır. Bu yüzden en az bir $U \in PO(X,x)$ kümesi vardır, öyle ki $pCl(U) \cap F = \varnothing$ dır. Böylece $x \in U$ ve $F \subset X - pCl(U)$ olur. Buradan X uzayının p-regular uzay olduğu ispatlanır.

Teorem 2.3.7. Eğer X uzayı bir p-regular uzay ve $f:(X,\tau) \to (Y,\nu)$ weakly sürekli fonksiyon ise, bu takdirde f fonksiyonu weakly θ-pre süreklidir ([4], Baker).

İspat : $V \subset Y$ kümesi açık olsun. Lemma 2.3.4. gereği X uzayı p-regular uzay olduğundan,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) \subset Cl\left(f^{-1}(V)\right)$$

dır. f fonksiyonu weakly sürekli olduğundan,

$$Cl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

olur. Böylece

$$pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

olup, bu yüzden f fonksiyonu weakly θ-pre süreklidir.

Lemma 2.3.5. Eğer X uzayının her pre-açık alt kümesi, α-açık küme ise (yani pre-açık kümeler, α-açık kümelerle çakışsın.), bu takdirde her $A \subset X$ için, $Cl(A) \subset pCl_\theta(A)$ dır ([4], Baker).

İspat : $A \subset X$ ve $x \in Cl(A)$ olsun. $x \in U$ pre-açık küme olsun. O zaman U kümesi α-açık kümedir ve

$x \in U \subset Int\left(Cl\left(Int(U)\right)\right) \subset Int\left(U \cup Cl\left(Int(U)\right)\right) = Int\left(pCl(U)\right)$ dır.

$x \in Cl(A)$ olduğundan, $Int(pCl(U)) \cap A \neq \varnothing$ ve bu yüzden $pCl(U) \cap A \neq \varnothing$ dır. Buradan $x \in pCl_\theta(A)$ dır. Dolayısıyla $Cl(A) \subset pCl_\theta(A)$ elde edilir.

Teorem 2.3.8. Eğer X uzayının her pre-açık alt kümesi, α-açık küme ve $f:(X,\tau) \to (Y,\nu)$ fonksiyonu weakly θ- pre-sürekli ise, bu takdirde f fonksiyonu weakly süreklidir ([4], Baker).

İspat : $V \subset Y$ açık küme olsun. f fonksiyonu weakly θ- pre sürekli olduğundan,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

dır. Lemma 2.3.5. gereği,

$$Cl\left(f^{-1}(V)\right) \subset pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right)$$

dır. Bu yüzden,

$$Cl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

olur ki, bu f fonksiyonun weakly sürekli olduğunu gösterir.

Tanım 2.3.2. $f:(X,\tau) \to (Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Y uzayının her V açık kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi pre-θ- kapalı ise, bu fonksiyona **contra θ-pre sürekli fonksiyon** denir ([4], Baker).

Teorem 2.3.9. $f:(X,\tau) \to (Y,\nu)$ fonksiyonu contra θ-pre sürekli ise, bu takdirde f fonksiyonu weakly -θ- pre-süreklidir ([4], Baker).

İspat : Y uzayının bir V açık kümesi olsun. O zaman $f^{-1}(V)$ pre-θ kapalı olduğundan,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) = f^{-1}(V) \subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

elde edilir.

Aşağıdaki örnek weak θ-pre sürekliliğin contra θ-pre sürekliliğe eşit olmadığı gösterilmiştir ([4], Baker).

Örnek 2.3.3. $X=\{a,b\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ **Sierpinski topolojisi** verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ birim fonksiyonu süreklidir ve bu yüzden weakly θ-pre-süreklidir fakat contra θ-pre sürekli değildir ([4], Baker).

2.4. Bazı Özellikler

$f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu için, $X\times Y$ uzayının $\{(x,f(x)):x\in X\}$ alt kümesi f fonksiyonunun grafiği olarak adlandırılır ve $G(f)$ ile gösterilir. Her $(x,y)\in(X\times Y)-G(f)$ noktası için, $(U\times V)\cap G(f)=\phi$ olacak şekilde Y uzayında x,y noktalarını içeren sırasıyla U,V açık kümeleri varsa $f:X\to Y$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiğine kapalı grafik denir ([36], Genel topoloji).

Tanım 2.4.1. Her $(x,y)\in(X\times Y)-G(f)$ noktası için $(x,y)\in pCl(U)xV\subset XxY-G(f)$ olacak şekilde Y uzayında y noktasını içeren bir V açık kümesi ve $U\in PO(X,x)$ kümesi varsa $f:X\to Y$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiğine strongly pre-kapalı denir ([22], Noiri).

Teorem 2.4.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu weakly θ- pre-sürekli ve Y uzayı Hausdorff ise o zaman f fonksiyonunun grafiği strongly pre-kapalıdır ([4], Baker).

İspat: $(x,y)\in(X\times Y)-G(f)$ olsun. Hipotez gereği Y nin içinde V ve W ayrık açık kümeleri vardır ki $y\in V$ ve $f(x)\in W$ dir. Böylece $f(x)\notin Cl(V)$ olur ve bu yüzden $x\notin f^{-1}(Cl(V))$ dir. f fonksiyonu weakly θ- pre-sürekli olduğundan $x\notin pCl_\theta(f^{-1}(V))$ dir. Bu yüzden $pCl(U)\cap f^{-1}(V)=\varnothing$ olacak şekilde bir $U\in PO(X,x)$ vardır. Bu yüzden $(x,y)\in pCl(U)xV\subset XxY-G(f)$ olur ki bu $G(f)$ grafiğinin strongly pre-kapalı oluşunu ispatlar.

Sonuç 2.4.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu strongly θ- pre-sürekli fonksiyon ve Y uzayı Hausdorff ise $G(f)$ $X\times Y$ uzayında strongly pre-kapalıdır ([22], Noiri).

Herhangi bir X uzayında eğer her yoğun küme açıksa ya da X uzayındaki her pre-açık küme açıksa bu uzaya submaximal uzay denir ([27], Reilly ve Vamanamurthy).

Teorem 2.4.2. X submaximal uzay olsun. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonunun strongly pre-kapalı bir grafiği varsa Y uzayının her kompakt K kümesi için, $f^{-1}(K)$ alt kümesi X uzayında θ-kapalıdır ([22], Noiri).

Aşağıdaki teorem Teorem 2.4.1. ve 2.4.2. nin direk sonucudur.

Teorem 2.4.3. X uzayı bir submaximal uzay ve Y uzayı Hausdorff olsun. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu weakly θ- pre-sürekli ise Y uzayının her kompakt K kümesi için, $f^{-1}(K)$ alt kümesi X uzayında θ-kapalıdır ([4], Baker).

Teorem 2.4.1 ve 2.4.2 ayrıca aşağıdaki sonuçları gerektirir. Noiri [22] nin makalesindeki Sonuç 6.2 ye (b) sonucu eklenerek yeniden düzenlenir.

Teorem 2.4.4. ([4], Baker) X bir submaximal uzay ve Y kompakt bir Hausdorff uzayı olsun. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(a) f fonksiyonu strong θ-pre sürekli dir.
(b) f fonksiyonu weakly θ- pre-süreklidir.
(c) $G(f)$, $X\times Y$ uzayında strongly pre-kapalıdır.
(d) f fonksiyonu strongly θ-süreklidir.
(e) f fonksiyonu süreklidir.
(f) f fonksiyonu pre-süreklidir.
(g) f fonksiyonu weakly pre-süreklidir

Lemma 2.4.1. $A\subset X$ olsun. $U\in PO(X)$ ve X uzayında A semi-açık ise $U\cap A\in PO(A)$ dır ([5], Csaszar).

Lemma 2.4.2. $B \subset A \subset X$ olacak şekilde bir X uzayının A ve B alt kümeleri olsun. X uzayında A semi-açık ise, $pCl_A(B) \subset pCl(B)$ dır ([6], Dontchev ve ark.).

$B \subset A \subset X$ ise, o zaman B nin pre-θ kapanışını A alt uzayıyla bağlantılı olarak $pCl_{A\theta}(B)$ ile gösterilebiliriz ([4], Baker)..

Lemma 2.4.3. $B \subset A \subset X$ olacak şekilde bir X uzayının A ve B alt kümeleri olsun. A kümesi semi-açık ise, $pCl_{A\theta}(B) \subset pCl_\theta(B)$ dır ([4], Baker).

İspat: $x \in pCl_{A\theta}(B)$ ve $U \in PO(X,x)$ olsun. O zaman $x \in U \cap A$ ve Lemma 2.4.1. den $U \cap A \in PO(A)$ dır. $x \in pCl_{A\theta}(B)$ olduğundan, $pCl_A(U \cap A) \cap B \neq \varnothing$ dır. Lemma 2.4.2. den $pCl_A(U \cap A) \subset pCl(U \cap A)$ dır. Böylece $pCl(U \cap A) \cap B \neq \varnothing$ olup ve bu yüzden $pCl(U) \cap B \neq \varnothing$ dır. Böylece $x \in pCl_\theta(B)$ dır.

Teorem 2.4.5. $f:(X,\tau) \to (Y,\nu)$ weakly θ-pre sürekli fonksiyon ve A kümesi X uzayının semi açık bir alt kümesi ise $f|_A : (A,\tau_A) \to (Y,\nu)$ kısıtlanmış fonksiyonu da weakly θ-pre süreklidir ([4], Baker).

İspat: $V \subset Y$ açık olsun. Lemma 2.4.3. kullanılarak görebiliriz ki,

$$pCl_{A\theta}\left(f/_A^{-1}(V)\right) = pCl_{A\theta}\left(f^{-1}(V) \cap A\right) \subset pCl_\theta\left(f^{-1}(V) \cap A\right) \cap A$$

$$\subset pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) \cap A \subset f^{-1}\left(Cl(V)\right) \cap A = f/_A^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

dir. Bu yüzden $f/_A : (A,\tau_A) \to (Y,\nu)$ weakly θ-pre süreklidir.

Son olarak da ([4], Baker) tarafından, fonksiyonların çeşitli tipleri ile weakly θ-pre sürekli fonksiyonların bir araya gelmesiyle oluşan bazı özellikler incelenmiştir.

Teorem 2.4.6. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu weakly θ-pre sürekli ve $g:(Y,\nu)\to(Z,\sigma)$ fonksiyonu sürekli ise $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu weakly θ-pre süreklidir ([4], Baker).

İspat: Z uzayında V bir açık alt küme olsun. O zaman,

$$pCl_\theta\left((g\circ f)^{-1}(V)\right)=pCl_\theta\left(f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(g^{-1}(V)\right)\right)$$
$$\subset f^{-1}\left(g^{-1}\left(Cl(V)\right)\right)=(g\circ f)^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

olup, $g\circ f$ bileşke fonksiyonu weakly θ-pre süreklidir.

Teorem 2.4.7. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ ve $g:(Y,\nu)\to(Z,\sigma)$ fonksiyonları verilsin. $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu weakly θ-pre sürekli ve f fonksiyonu örten ve her $A\subset X$ için, $f\left(pCl_\theta(A)\right)$' nın pre θ-kapalı olması şartını sağlıyorsa o zaman g weakly θ-pre süreklidir ([4], Baker).

İspat: Z uzayında V bir açık alt küme olsun. O zaman $g\circ f$ bileşke fonksiyonu weakly θ-pre sürekli olduğundan,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)\right)\subset f^{-1}\left(g^{-1}\left(Cl(V)\right)\right)$$

dır. Ve bu yüzden,

$$f\left(pCl_\theta\left(f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)\right)\right)\subset g^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

Elde edilir. $f\left(pCl_\theta\left(f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)\right)\right)$, pre θ-kapalı olduğundan,

$$pCl_\theta\left(f\left(f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)\right)\right)\subset f\left(pCl_\theta\left(f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)\right)\right)$$

dır. Ve bu yüzden,

$$pCl_\theta\left(f\left(f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)\right)\right)\subset g^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

dir. Son olarak f örten olduğundan,

$$pCl_\theta\left(g^{-1}(V)\right)\subset g^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

olur ki buda ispatı tamamlar. g weakly θ -pre süreklidir.

Teorem 2.4.8. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ ve $g:(Y,\nu)\to(Z,\sigma)$ fonksiyon olsun. $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu weakly θ-pre sürekli ve g fonksiyonu birebir clopen ise o zaman f weakly θ -pre süreklidir ([4], Baker).

İspat: Y uzayında V bir açık alt küme olsun. g açık ve $g\circ f$ bileşke fonksiyonu weakly θ-pre sürekli olduğundan,

$$pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right)\subset pCl_\theta\left(f^{-1}\left(g^{-1}\left(g(V)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(g^{-1}\left(Cl\left(g(V)\right)\right)\right)$$

dir. Dahası g kapalı ve birebir olduğundan,

$$f^{-1}\left(g^{-1}\left(Cl\left(g(V)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(g^{-1}\left(g\left(Cl(V)\right)\right)\right)=f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

olur ve

$$pCl_\theta\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. f weakly θ -pre süreklidir.

3.İDEAL TOPOLOJİK UZAY

Kümenin lokal fonksiyonu ve bu fonksiyonun sağladığı özellikler ilk defa 1933 yılında Kuratowski [17] tarafından verilmiş ve daha sonra bu kavram üzerinde çalışmalar yapılmış ve araştırmalar için önemli bir çalışma konusu haline gelmiştir.

3.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde konunun temelini oluşturan, kümenin lokal fonksiyonu tanımına geçmeden önce gerekli olan bazı tanımları verelim:

Tanım 3.1.1. Boş olmayan bir X kümesi ve $P(X)$ güç kümesi olmak üzere boş olmayan bir $I \subset P(X)$ ailesi verilsin. Eğer I ailesi,

a) Her $A, B \in I$ kümeleri için $A \cup B \in I$ (sonlu toplamsallık)

b) Her $A \in I$ kümesi ve $B \subset A$ alt kümesi için $B \in I$ (kalıtsallık)

özelliklerini sağlarsa bu takdirde I ailesine ***X* kümesi üzerinde bir ideal** denir ([17], Kuratowski).

Tanım 3.1.2. $P(X)$, X kümesinin güç kümesi olmak üzere, $\alpha : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu,

I. $\alpha(\varnothing) = \varnothing$

II. $A \in P(X) \Rightarrow A \subset \alpha(A)$

III. $A, B \in P(X) \Rightarrow \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$

IV. $A \in P(X) \Rightarrow \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$

şartlarını sağlarsa bu takdirde α fonksiyonuna **Kuratowski kapanış işlemi**

denir ([17], Kuratowski). $K = \{A \in P(X) |\ A = \alpha(A)\}$ ailesine, X kümesi üzerindeki topolojiye göre **Kapalı kümeler ailesi** denir ([17], Kuratowski).

Uyarı 3.1.1 $P(X)$, X kümesinin güç kümesi olmak üzere, $d : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu,

I. $d(\varnothing) = \varnothing$

II. $d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$

III. $d(d(A)) \subset d(A)$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde; $\alpha(A) = A \cup d(A)$ şeklinde tanımlanan $\alpha :\ P(X) \to P(X)$ fonksiyonu $P(X)$ güç kümesi üzerinde bir Kuratowski kapanış işlemidir ([14], Jankovic ve Hamlet).

İspat: (1) $\alpha(A) = A \cup d(A)$ ifadesinde $A = \varnothing$ alırsak $\alpha(\varnothing) = \varnothing \cup d(\varnothing)$ olur. Uyarı 3.1.1 (ı) gereği, $d(\varnothing) = \varnothing$ olup böylece $\alpha(\varnothing) = \varnothing$ bulunur.

(2) Herhangi bir $A \in P(X)$ alt kümesi için, α küme fonksiyonu tanımından $\alpha(A) = A \cup d(A)$ bağıntısı bulunur. Birleşim işlemi gereği, $A \subset A \cup d(A) = \alpha(A)$ ifadesi elde edilir. Böylece $A \subset \alpha(A)$ olur.

(3) Herhangi bir $A, B \in P(X)$ alt kümeleri için, α küme fonksiyonu tanımı ve Uyarı 3.1.1 (ıı) gereği,

$$\begin{aligned} \alpha(A \cup B) &= (A \cup B) \cup d(A \cup B) \\ &= (A \cup B) \cup (d(A) \cup d(B)) \\ &= (A \cup d(A)) \cup (B \cup d(B)) \\ &= \alpha(A) \cup \alpha(B) \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Böylece $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$ olduğu elde edilir.

(4) Herhangi bir $A \in P(X)$ alt kümesi için, α küme fonksiyonu tanımından $\alpha(A) = A \cup d(A)$ olur. Buradan Uyarı 3.1.1 (ıı) ifadesi gereğince,

$$\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A \cup d(A)) = \alpha(A) \cup \alpha(d(A)) = (A \cup d(A)) \cup (d(A) \cup d(d(A)))$$

bağıntısı bulunur. Tanım 3.1.2 (ıii) gereğince $d(d(A)) \subset d(A)$ olur. Böylece $\alpha(\alpha(A)) = A \cup d(A) = \alpha(A)$ olduğu görülür.

Sonuç olarak, $\alpha : P(X) \to P(X)$ küme fonksiyonu Tanım 3.1.2 'de verilen Kuratowski kapanış işlemi şartlarını sağlar.

Tanım 3.1.3. X kümesi üzerinde $\varphi = \{\varnothing, X\}$ şeklinde tanımlanan φ topolojisine **ayrık olmayan topoloji,** (X, φ) ikilisine de **ayrık olmayan uzay** denir ([3], Bourbaki).

Tanım 3.1.4. X kümesi üzerinde tanımlanan $P(X)$ topolojisine **ayrık topoloji**, $(X, P(X))$ ikilisine de **ayrık uzay** denir ([3], Bourbaki).

Tanım 3.1.5. (X, τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \vartheta_{(x)}$ komşuluğu için $A \cap V \neq \varnothing$ ise $x \in X$ noktasına A kümesinin bir **kapanış noktası** denir ([17], Kurotowski).

Tanım 3.1.6. (X, τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \vartheta_{(x)}$ komşuluğu için $A \cap (V - \{x\}) \neq \varnothing$ ise $x \in X$ noktasına A kümesinin bir **yığılma noktası** denir ([17], Kurotowski).

Tanım 3.1.7. (X, τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \vartheta_{(x)}$ komşuluğu için $A \cap V$ kümesinde sonsuz sayıda eleman varsa, $x \in X$ noktasına A kümesinin bir **yoğunlaşma noktası** denir ([17], Kurotowski).

3.2. Lokal Fonksiyon

Tanım 3.2.1. ([30], Sten ve Seebach) (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. I ailesi X kümesi üzerinde bir ideal olsun. Bu takdirde;

$$A^*(I,\tau) = \{x \in X |\ \forall U \in G_{(x)}\ için, U \cap A \notin I\}$$

kümesine, A kümesinin I ideali ve τ topolojisi ile ilgili **lokal fonksiyonu** denir. $A^*(I,\tau)$ gösterimi için [14]' de gösterildiği gibi $A^*(I)$ veya kısaca A^* sembolünü kullanacağız ve buna A kümesinin lokal fonksiyonu diyeceğiz.

$X \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere X kümesindeki en basit idealler minimal ideal $(I = \{\varnothing\})$ ve maksimal ideal $(I = P(X))$ olup A^* kümesi bu ideallere göre ([14], Jankoviç ve Hamlet) aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$A^*(\{\varnothing\},\tau) = \{x \in X | \forall U \in G_{(x)} için, (U \cap A) \notin \{\varnothing\}\}$$

$$= \{x \in X |\ \forall U \in G_{(x)}\ için, (U \cap A) \neq \varnothing\}$$

$$= Cl(A)$$

buradan,

$$A^*(\{\varnothing\},\tau) = Cl(A)$$

olarak bulunur.

$$A^*(P(X),\tau) = \{x \in X | \forall U \in G_{(x)}\ için, (U \cap A) \notin P(X)\} = \varnothing$$

buradan,

$$A^*(P(X),\tau) = \varnothing$$

olarak bulunur.

(X,τ) uzayında I_f (sonlu alt kümeler ideali), I_c (sayılabilir alt kümeler

ideali) idealleri için ([14], Jankoviç ve Hamlet)' de A^* kümesi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$A^*\left(I_f,\tau\right) = \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için, \left(U \cap A\right) \notin I_f\right\}$$

$$= \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için, \left(U \cap A\right) sonsuz\right\}$$

$$= \widetilde{A}$$

buradan,

$$A^*\left(I_f,\tau\right) = \widetilde{A}$$

sonucu elde edilir.

$$A^*\left(I_c,\tau\right) = \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için, \left(U \cap A\right) \notin I_c\right\}$$

$$= \{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için, \left(U \cap A\right) \text{ kümesi sayılamaz}\}$$

$$= yoğ\left(A\right)$$

buradan,

$$A^*\left(I_c,\tau\right) = yoğ\left(A\right)$$

olarak bulunur.

([29], Samuels)'de, $A^*\left(I,\tau\right)$ lokal fonksiyonunun, A kümesinin kapanış noktası, yığılma noktası ve yoğunlaşma noktasının bir genelleştirilmesi olduğu verilmiştir.

Şimdi ([14], Jankoviç ve Hamlet)' de ispatsız olarak verilen, lokal fonksiyonun özellikleriyle ilgili teoremi ispatlarıyla aşağıdaki gibi verelim.

Teorem 3.2.1. $\left(X,\tau\right)$ uzayı X kümesi üzerinde $S_1, S_2,$ idealleri ile birlikte verilen bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

(a) $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$

(b) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow A^*(S_2) \subseteq A^*(S_1)$

(c) $A^* = Cl(A^*) \subseteq Cl(A)$(A^* kümesi kapalı bir kümedir)

(d) $(A^*)^* \subseteq A^*$

(e) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$

(f) $(A \cap B)^* \subseteq A^* \cap B^*$

(g) $A^* - B^* = (A - B)^* - B^* \subseteq (A - B)^*$

(h) $U \in \tau \Rightarrow U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subseteq (U \cap A)^*$

(k) $I \in S \Rightarrow (A \cup I)^* = A^* = (A - I)^*$

İspat (a): Herhangi bir $x \in A^*$ noktasını alalım. Tanım 3.2.1'den her $U \in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $A \cap U \notin S$ olur. $A \subset B$ ise, $A \cap U \subset B \cap U$ olup $B \cap U \notin S$ elde edilir. Eğer $B \cap U \in S$ olsaydı S idealinin kalıtımsallık özelliğinden $A \cap U \in S$ olurdu. Bu ise, bir çelişkidir. O halde her $U \in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $B \cap U \notin S$ ise Tanım 3.2.1 gereği, $x \in B^*$ olur. Böylece alt küme tanımı gereği $A^* \subseteq B^*$ bağıntısı bulunur.

(b) $S_1 \subseteq S_2$ ise $S_2{}^t \subset S_1{}^t$ olur (1)

$$A^*(S_2) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için}, (U \cap A) \notin S_2\}$$

$$A^*(S_2) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için}, (U \cap A) \in S_2{}^t\} \quad (2)$$

(1), (2) ifadeleri ve Tanım 3.2.1 kullanılarak,

$$A^*(S_2) \subseteq \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için}, (U \cap A) \in S_1{}^t\}$$

$$= \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)} \text{ için}, (U \cap A) \notin S_1\}$$

$$= A^*(S_1)$$

elde edilir. Buradan, $A^*(S_2) \subseteq A^*(S_1)$ olduğu görülür.

(c) Öncelikle $A^* = Cl(A^*)$ eşitliğini gösterelim. Her $A \subset X$ alt kümesi için, $A \subset Cl(A)$ bağıntısı her zaman sağlanır. Bu ifade $A^* \subset X$ alt kümesi için de gerçekleşeceğinden

$$A^* \subset Cl(A^*) \tag{3}$$

$A^*(\{\varnothing\},\tau) = Cl(A)$, $A^*(P(X),\tau) = \varnothing$ olduğu ([14], Jankovic ve Hamlet)' de gösterilmiştir. Teorem 3.2.1 (b) gereğince kümenin lokal fonksiyonu en büyük değerini $S = \{\varnothing\}$ minimal ideali için, en küçük değerini de $S = P(X)$maksimal ideali için alır. O halde (X,τ) uzayındaki her S ideali için $\varnothing \subseteq S \subseteq P(X)$ifadesi sağlandığından,

$$\varnothing \subseteq A^*(S,\tau) \subseteq Cl(A\ ) \tag{4}$$

olur.

Şimdi de $Cl(A^*) \subset A^*$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \in Cl(A^*)$ noktasını alalım. Varsayalım ki $x \notin A^*$ olsun. $Cl(A^*) = \cap\{F \subset X \mid F \text{ kapalı küme ve } A^* \subset F\}$ ifadesinden ve $x \in Cl(A^*)$ olduğundan $A^* \subset F$ olan her F kapalı kümesi için, $x \in F$ olur. $A^* \subset F$ ve F kapalı küme ise $X - F \subset X - A^*$ olup $X - F$ açık kümedir. Buradan $(X - F) \cap A^* \neq \varnothing$ bulunur. $x \notin A^*$ ifadesinden $x \in (X - A^*)$ elde edilir ve $x \in F$ olduğundan $F \cap (X - A^*) \neq \varnothing$ olur. $(X - F) \cap A^* = \varnothing$ ve $F \cap (X - A^*) \neq \varnothing$ olması $F \subset A^*$ olduğunu gösterir. Bu ise bir çelişkidir. O halde

$$Cl(A^*) \subset A \tag{5}$$

bulunur. (3), (4) ve (5) ifadelerinden $A^* = Cl(A^*) \subseteq Cl(A)$ bağıntısı elde edilir.

(d) Herhangi bir $x \in \left(A^*(S)\right)^*(S)$ noktasını alalım. Varsayalım ki $x \notin A^*(S)$ olsun. Tanım 3.2.1 gereğince, $\left(A^*(S)\right)^*(S) = \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için\ \left(U \cap A^*\right) \notin S\right\}$ olur. Her $U \in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $U \cap A^* \notin S$ ifadesi ve idealin kalıtımsallık özelliği gereğince, $U \cap A^* \neq \varnothing$ olduğu bulunur. Kapanış noktası tanımından $x \in Cl\left(A^*\right)$elde edilir. (e) şıkkı gereğince, $Cl\left(A^*\right) = A^*$ olması $x \in A^*$ olduğunu gösterir. Bu ise, bir çelişkidir. O halde $x \in \left(A^*\right)^*$ noktası için, $x \in A^*$ olduğundan $\left(A^*\right)^* \subseteq A^*$ bağıntısı elde edilir.

(e) Tanım 3.2.1 gereğince A ve B kümelerinin lokal fonksiyonları,

$$A^*(S) = \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için\ (U \cap A) \notin S\right\} \tag{6}$$

$$B^*(S) = \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için\ (U \cap B) \notin S\right\} \tag{7}$$

olur. (6) ve (7) ifadelerinde birleşim işlemi alırsak,

$$A^*(S) \cup B^*(S) = \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için\ (U \cap A) \notin S\ veya\ (U \cap B \notin S)\right\}$$

$$A^*(S) \cup B^*(S) = \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için\ \left[(U \cap A) \cup (U \cap B)\right] \notin S\right\}$$

$$A^*(S) \cup B^*(S) = \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için\ \left[U \cap (A \cup B)\right] \notin S\right\}$$

elde edilir. Tanım 3.2.1 ’den,

$$A^*(S) \cup B^*(S) = (A \cup B)^*(S)$$

bulunur.

(f) $$(A \cap B)^*(S) = \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için\ \left[(A \cap B) \cap U\right] \notin S\right\}$$

$$(A \cap B)^*(S) = \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için\ \left[(A \cap U) \cap (B \cap U)\right] \notin S\right\}$$

$$(A \cap B)^*(S) = \left\{x \in X \middle|\ \forall U \in G_{(x)}\ için\ (A \cap U) \notin S\ ve\ (B \cap U) \notin S\right\} \tag{8}$$

(8) ifadesi gereği,

$$(A\cap B)^*(S)\subseteq\{x\in X|\ \forall U\in G_{(x)}\ için\ (A\cap U)\notin S\} \tag{9}$$

$$(A\cap B)^*(S)\subseteq\{x\in X|\ \forall U\in G_{(x)}\ için\ (B\cap U)\notin S\} \tag{10}$$

elde edilir. (9) ve (10) ifadelerinin kesişimlerini alırsak,

$$(A\cap B)^*(S)\subseteq A^*(S)\cap B^*(S)$$

olduğu bulunur.

(g) $A\cup B=(A-B)\cup B$ eşitliği her zaman doğrudur. Bu eşitlikte $(^*)$ işlemi uygulanırsa, Teorem 3.2.1 (e) gereğince,

$$(A\cup B)^*=[(A-B)\cup B]^*=(A-B)^*\cup B^*$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının $B^{*\,t}$ kümesi ile kesişim alınırsa,

$$(A\cup B)^*\cap B^{*\,t}=[(A-B)^*\cup B^*]\cap B^{*\,t}$$

$$(A^*\cup B^*)\cap B^{*\,t}=[(A-B)^*\cup B^*]\cap B^{*\,t}$$

$$(A^*\cup B^{*\,t})\cup(B^*\cap B^{*\,t})=[(A-B)^*\cap B^*]\cup(B^*\cap B^{*\,t})$$

olur. $B^*\cap B^{*\,t}=\varnothing$ olduğundan,

$$A^*\cap B^{*\,t}=(A-B)^*\cap B^{*\,t}$$

eşitliği elde edilir. Fark işlemi tanımı gereği, $A^*-B^*=(A-B)^*-B^*$ eşitliği yazılır. Bu son eşitlikten,

$$A^*-B^*=(A-B)^*-B^*\subseteq(A-B)^*$$

bulunur.

(h) Herhangi bir $x\in U\cap A^*$ noktasını alalım. Kesişim işlemi tanımından $x\in U$ ve $x\in A^*$ dır. Tanım 3.2.1 gereği her $V\in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $V\cap A\notin S$ olur. $x\in U$ ve $U\in\tau$ olduğundan komşuluk tanımı gereği $U\in G_{(x)}$ olur.

Bir noktanın komşulukları kesişimi yine o noktanın komşuluğu olduğundan $V \cap U \in G_{(x)}$ olur. $x \in A^*$ olup, $[(V \cap U) \cap A] = [V \cap (U \cap A)] \not\in S$ ifadesi elde edilir. Tanım 3.2.1 gereği, $x \in (U \cap A)^*$ bulunur. $x \in U \cap A^*$ noktası için, $x \in (U \cap A)^*$ olduğundan

$$U \cap A^* \subseteq (U \cap A)^* \tag{11}$$

bulunur. (11) ifadesinde her iki tarafın U kümesi ile kesişimini alırsak,

$$[U \cap (U \cap A^*)] \subseteq [U \cap (U \cap A)^*]$$

$$(U \cap A^*) \subseteq [U \cap (U \cap A)^*] \tag{12}$$

$U \cap A \subseteq A$ bağıntısı ve Teorem 3.2.1 (a) gereğince

$$(U \cap A)^* \subseteq A^* \tag{13}$$

olur. (13) ifadesinin her iki tarafının U kümesi ile kesişimi alınırsa,

$$[U \cap (U \cap A)^*] \subseteq U \cap A^* \tag{14}$$

bulunur. (12) ve (14) ifadelerinden,

$$U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \tag{15}$$

eşitliği yazılır. O halde (11) ve (15) ifadeleri gereği,

$$U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subseteq (U \cap A)^*$$

bulunur.

(k) $A \cup S = (A - S) \cup S$ eşitliği her zaman doğrudur. Bu eşitlikte her iki tarafın $(^*)$ işlemi alınırsa,

$$(A \cup S)^* = [(A - S) \cup S]^*$$

olur. Teorem 3.2.1 (e) gereğince,

$$(A \cup S)^* = A^* \cup S^* = (A - S)^* \cup S^* \tag{16}$$

elde edilir. Tanım 3.2.1 ve $I \in S$ olduğundan
$I^* = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)}\ için, (U \cap I) \in S\} = \varnothing$ olur. (16) ifadesinde $I^* = \varnothing$ yazılırsa $(A \cup I)^* = A^* = (A - I)^*$ elde edilir.

([14], Jankoviç ve Hamlet)' de, bir Cl^* işlemi tanımlanmış ve bu işlemin aslında bir Kuratowski kapanış işlemi olduğu aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

Lokal fonksiyon olarak tanımlanan $(^*): P(X) \to P(X)$ fonksiyonu Teorem 3.2.1'in (d) ve (e) şıkları ile,

$$\varnothing^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)}\ için\ (U \cap \varnothing) \notin I\}$$

$$\varnothing^*(I) = \{x \in X \mid \forall U \in G_{(x)}\ için\ \varnothing \notin I\}$$

bulunur. Bu ise, I ideal olduğundan kalıtımsallık özelliği gereği imkansızdır. Dolayısıyla $\varnothing \in I$ olur. Dolayısıyla $\varnothing^*(I) = \varnothing$, $(^*): P(X) \to P(X)$ lokal fonksiyonu, Uyarı 3.1.1'de verilen $d: P(X) \to P(X)$ fonksiyonu ile çakışır. Her $A \subseteq X$ alt kümesi için, $Cl^*(A) = A \cup A^*$ şeklinde tanımlanan $Cl^*: P(X) \to P(X)$ fonksiyonu Kuratowski Kapanış işlemidir.

([14], Jankoviç ve Hamlet)' de, X kümesindeki minimal ideal olan $I = \{\varnothing\}$ ve maksimal ideal olan $I = P(X)$ idealleri için $Cl^* A$ kümesi aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$I = \{\varnothing\}$ minimal ideali için, $A^*(\{\varnothing\}) = Cl(A)$ olup bu ifade $Cl^*(A) = A \cup Cl(A)$ eşitliğinde yazılırsa $Cl^*(A) = A \cup Cl(A)$ olur. Kapanış işleminin $A \subset Cl(A)$ özelliğinden, $Cl^*(A) = Cl(A)$ olur.

$I = P(X)$ maksimal ideali için, $A^*(P(X)) = \varnothing$ olup $Cl^*(A) = A \cup A^*$ eşitliğinde yazılırsa, $Cl^*(A) = A$ olur.

Cl^* fonksiyonu yardımıyla üretilen τ^* topolojisi ([14], Jankoviç ve Hamlet) 'de aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.2. τ, X üzerinde bir topoloji olmak üzere, Cl^* fonksiyonu tarafından üretilen topoloji $\tau^*(I,\tau)$ ya da $\tau^*(I)$, kısaca (τ^*) ile gösterilir. Yani bu topoloji,

$$\tau^*(I) = \{U \subset X \mid C1^*(X-U) = X-U\}$$

şeklindedir.

İki uç durum için yani $I = \{\varnothing\}$ ideali için $\tau^*(I) = \tau$ ve $I = P(X)$ ideali için de $\tau^*(I) = P(X)$ olup dolayısıyla X kümesi üzerindeki her I ideali için, $\{\varnothing\} \subseteq I \subseteq P(X)$ olduğundan $\tau \subseteq \tau^*(I) \subseteq P(X)$ bağıntısı Teorem 3.2.1 b) den elde edilir.

4. WEAKLY θ-PRE-I SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde, ideal topolojik uzaylarda yeni bir fonksiyon sınıfı olan weakly θ-pre-I sürekli fonksiyon kavramını verdik. Weakly θ-pre-I sürekli fonksiyonların bazı karekterizasyonlarını ve temel özelliklerini elde ettik. Aynı zamanda weakly θ-pre-I sürekli fonksiyon kavramının, daha önce tanımlanmış olan bazı süreklilik çeşitleri ile olan bağlantılarını inceleyip yerini tespit ettik.

4.1.Ön Bilgiler

Bu bölümde (X,τ) topolojik uzayı ve (X,τ,I) ideal topolojik uzayı üzerinde hiçbir ayırma aksiyomu olmayan uzay olarak alınacaktır.(X,τ) veya (X,τ,I) uzaylarından alınan herhangi bir A alt kümesinin içini ve kapanışını sırasıyla $Int(A)$ ve $Cl(A)$ ile göstereceğiz. Ayrıca (X,τ,I) uzayındaki herhangi bir A alt kümesinin lokal fonksiyonunu kısaca A^* olarak ve yıldız kapanışını da $Cl^*(A)$ olarak göstereceğiz.

(X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi için, $A\subset Int(Cl^*(A))$ ise, A kümesine **pre-I-açık küme** ([6], Dontchev), $A\subset Cl^*(Int(A))$ ise, A kümesine **semi-I-açık küme** ([12], Hatır ve Noiri), $A\subset Int(Cl^*(Int(A)))$ ise, A kümesine **α-I-açık küme** ([12], Hatır ve Noiri) denir. A kümesi pre-I-açık (semi-I-açık, α-I-açık) küme ise $X-A$ pre-I-kapalı (semi-I-kapalı,α-I-kapalı) kümedir.A kümesini kapsayan tüm pre-I-kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin **pre-I-kapanışı** ([34], Yüksel ve ark.) denir ve ${}_{PI}Cl(A)$ ile gösterilir. A kümesinin kapsadığı tüm pre-I-açık kümelerin birleşimine A kümesinin **pre-I-içi (**[34], Yüksel ve ark.) denir ve ${}_{PI}Int(A)$ ile gösterilir**.** X uzayının bir x noktasını içeren tüm pre-I-açık kümelerin ailesi $PIO(X,x)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.1. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Her $x\in X$ noktası ve x noktasını içeren her $U\in PIO(X)$ kümesi için, $U\cap A\neq\phi$ ise x noktasına A

kümesinin **pre-I-kapanış noktası** denir. A kümesinin bütün pre-I-kapanış noktalarının kümesine A kümesinin **pre-I-kapanışı** denir ve ${}_{PI}Cl(A)$ ile gösterilir. A kümesi pre-I-kapalı küme ise ${}_{PI}Cl(A)=A$ dır. Pre-I-kapalı kümenin tümleyeni ise pre-I-açıktır ([34], Yüksel ve ark.).

Tanım 4.1.2. (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Her $x\in X$ noktası ve x noktasını içeren her $U\in PIO(X)$ kümesi için, ${}_{PI}Cl(U)\cap A\neq\varnothing$ ise x noktasına A kümesinin **pre-θ-I-kapanış noktası** denir. A kümesinin bütün pre-θ-I-kapanış noktalarının kümesine A kümesinin **pre-θ-I-kapanışı** denir ve ${}_{PI}Cl_{\theta}(A)$ ile gösterilir. A kümesi pre-θ-I-kapalı küme ise ${}_{PI}Cl_{\theta}(A)=A$ dır. Pre-θ-I-kapalı kümenin tümleyeni ise pre-θ-I-açıktır ([2], Açıkgöz ve ark.).

Tanım 4.1.3. (X,τ,I) ideal topolojik uzayında bir $x\in A$ noktası için, $x\in{}_{PI}Cl(U)\subset A$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U\in PIO(X)$ kümesi varsa, bu x noktasına A kümesinin **pre-θ-I iç noktası** denir**.** A kümesinin bütün pre-θ-I iç noktalarının oluşturduğu kümeye, A kümesinin **pre-θ-I içi** denir ve ${}_{PI}Int_{\theta}(A)$ ile gösterilir ([2], Açıkgöz ve ark.).

Tanım 4.1.4. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu,I)$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in X$ noktası ve Y uzayının $f(x)$ noktasını içeren her V açık komşuluğu için, $f(U)\subset Cl^{*}(V)$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu varsa, bu fonksiyona **weakly I-sürekli fonksiyon** denir ([1], Açıkgöz ve ark.).

Tanım 4.1.5. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu,I)$ bir fonksiyon olsun. Y uzayının her V açık kümesi için, $f^{-1}(V)\subset Int(Cl(f^{-1}(Cl^{*}(V))))$ oluyorsa, bu fonksiyona **almost weakly I-sürekli fonksiyon** denir.

Tanım 4.1.6. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in X$ noktası ve Y uzayının $f(x)$ noktasını içeren her V açık kümesi için, $f({}_{PI}Cl(U))\subset V$ olacak

şekilde bir $U \in PIO(X,x)$ kümesi varsa, bu fonksiyona **strongly θ-pre-I sürekli fonksiyon** denir ([31], Şimşekler).

Tanım 4.1.7. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu,I_1)$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in X$ noktası ve Y uzayının $f(x)$ noktasını içeren her V açık kümesi için, $f(Cl^*(U))\subset V$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu varsa, bu fonksiyona **strongly θ-I-sürekli fonksiyon** denir ([34],Yüksel ve ark.).

Tanım 4.1.8. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in X$ noktası ve Y uzayının $f(x)$ noktasını içeren her V açık kümesi için, $f(U)\subset V$ olacak şekilde $U \in PIO(X,x)$ kümesi varsa, bu fonksiyona **pre-I sürekli fonksiyon** denir ([6], Dontchev).

Teorem 4.1.1. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve bir $A, B\subset X$ kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) ${}_{PI}Cl_\theta({}_{PI}Cl_\theta(A))={}_{PI}Cl_\theta(A)$

(ii) $A\subset B\Rightarrow {}_{PI}Cl_\theta(A)\subset {}_{PI}Cl_\theta(B)$

(iii) ${}_{PI}Int_\theta(X-A)=(X-{}_{PI}Cl_\theta(A))$

(iv) ${}_{PI}Cl_\theta(X-A)=(X-{}_{PI}Int_\theta(A))$

İspat (i): ${}_{PI}Cl_\theta(A)=B$ diyelim. ${}_{PI}Cl_\theta(A)$ kümesi pre-θ-I kapalı küme olup, B kümesi pre-θ-I kapalı kümedir. Tanım 4.1.2 gereği ${}_{PI}Cl_\theta(B)=B$ ve ${}_{PI}Cl_\theta({}_{PI}Cl_\theta(A))={}_{PI}Cl_\theta(A)$ olur.

(ii): $A\subset B$ olsun. $x\in {}_{PI}Cl_\theta(A)$ noktasını alalım. Pre-θ-I kapanış noktası tanımı gereğince, x noktasını içeren her $U\in PIO(X)$ kümesi için, ${}_{PI}Cl(U)\cap A\neq\varnothing$ olur. $A\subset B$ olduğundan, ${}_{PI}Cl(U)\cap B\neq\varnothing$ olup, pre-θ-I kapanış noktası tanımından, $x\in {}_{PI}Cl_\theta(B)$ dır. Sonuç olarak ${}_{PI}Cl_\theta(A)\subset {}_{PI}Cl_\theta(B)$ elde edilir.

(iii): $x \in \left(X -_{PI} Cl_\theta(A)\right)$ olsun. Buradan $x \notin_{PI} Cl_\theta(A)$ ve pre-θ-I kapanış noktası tanımından ${}_{PI}Cl(U) \cap A = \varnothing$ olacak şekilde $U \in PIO(X,x)$ kümesi vardır. Dolayısıyla $x \in_{PI} Cl(U) \subset (X - A)$ olur ve pre-θ-I iç nokta tanımı gereğince $x \in_{PI} Int_\theta(X - A)$ bulunur.

$$\left(X -_{PI} Cl_\theta(A)\right) \subset_{PI} Int_\theta(X - A) \qquad (1)$$

elde edilir.

$x \in_{PI} Int_\theta(X - A)$ olsun. Pre-θ-I iç nokta tanımı gereği, $x \in_{PI} Cl(U) \subset (X - A)$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \in PIO(X)$ kümesi vardır. $x \in_{PI} Cl(U) \subset (X - A)$ olduğundan ${}_{PI}Cl(U) \cap A = \varnothing$ olur. Buradan $x \notin_{PI} Cl_\theta(A)$ ve $x \in \left(X -_{PI} Cl_\theta(A)\right)$ bulunur.

$${}_{PI}Int_\theta(X - A) \subset \left(X -_{PI} Cl_\theta(A)\right) \qquad (2)$$

elde edilir.

(1) ve (2) ifadelerinden ${}_{PI}Int_\theta(X - A) = \left(X -_{PI} Cl_\theta(A)\right)$ bulunur.

(iv): $B = (X - A)$ diyelim. (iii) ifadesi gereği her $B \subset X$ kümesi için,

$${}_{PI}Int_\theta(X - B) = \left(X -_{PI} Cl_\theta(B)\right)$$

olur. $B = (X - A)$ olduğundan, $(X - B) = A$ olup,

$${}_{PI}Int_\theta(A) = {}_{PI}Int_\theta(X - B) = \left(X -_{PI} Cl_\theta(B)\right)$$

olur.

$${}_{PI}Int_\theta(A) = \left(X -_{PI} Cl_\theta(B)\right)$$

olup, tümleme işleminden

$$\left(X -_{PI} Int_\theta(A)\right) = {}_{PI}Cl_\theta(B)$$

bulunur ve

$$\left(X -_{PI} Int_\theta(A)\right) = {}_{PI}Cl_\theta(X - A)$$

elde edilir.

4.2. Tanım ve Karakterizasyonlar

Tanım 4.2.1. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Y uzayının her V açık alt kümesi için, ${}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}(Cl(V))$ oluyorsa, bu fonksiyona **weakly θ-pre-I sürekli fonksiyon** denir. Kısaca w.θ.pre.I.c fonksiyon olarak gösterilir.

Weakly θ-pre-I sürekli fonksiyonların bir karakterizasyonunu aşağıdaki gibi verelim.

Teorem 4.2.1 $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir.

(a) f fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir;

(b) Y uzayının her B alt kümesi için, ${}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(B)))\right)\subset f^{-1}(Cl(B))$;

(c) Y uzayının her V pre-I-açık kümesi için, ${}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}(Cl(V))$;

(d) Y uzayının her V açık kümesi için, ${}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(V)))\right)\subset f^{-1}(Cl(V))$;

(e) Y uzayının her F kapalı kümesi için, ${}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(F))\right)\subset f^{-1}(F)$;

(f) Y uzayının her B alt kümesi için, $f^{-1}(Int(B))\subset {}_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}(Cl(Int(B)))\right)$;

(g) Y uzayının her F pre-I-kapalı kümesi için, $f^{-1}(Int(F))\subset {}_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}(F)\right)$;

(h) Y uzayının her V açık kümesi için, $f^{-1}(V)\subset {}_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$ dır.

İspat (a)⇒(b): Y uzayının bir B alt kümesi için, $Int(Cl(B))$ kümesi açık olduğundan (a) ifadesi gereği,

$$ {}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(B)))\right)\subset f^{-1}(Cl(Int(Cl(B))))$$

yazılır.

$$ {}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(B)))\right)\subset f^{-1}(Cl(Int(Cl(B))))\subset f^{-1}(Cl(Cl(B)))=f^{-1}(Cl(B))$$

olduğundan,

$$ {}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(B)))\right)\subset f^{-1}(Cl(B))$$

ifadesini elde ederiz.

(b)⇒(c): Y uzayının bir V pre-I-açık kümesi için, $V \subset Int\left(Cl^{*}(V)\right) \subset Int(Cl(V))$ olup, Teorem 4.1.1 gereği,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right) \subset {}_{PI}\ Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(V)))\right)$$

olur ve (b) ifadesi gereği,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right) \subset {}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(V)))\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

bulunur. Buradan

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

elde edilir.

(c)⇒(d): Y uzayının bir V açık kümesi için, $Int(Cl(V)) \subset Y$ kümesi açık olup, her açık küme pre-I-açık olduğundan, (c) ifadesi gereği,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(V)))\right) \subset f^{-1}(Cl(Int(Cl(V))))$$

olur.

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(V)))\right) \subset f^{-1}\left(Cl(Int(Cl(V))) \subset f^{-1}(Cl(Cl(V)))\right) = f^{-1}(Cl(V))$$

olup,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(V)))\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

bulunur.

(d)⇒(e): Y uzayının bir F kapalı kümesi için, $Int(F)$ kümesi açık olup, (d) ifadesi gereği,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(Int(F))))\right) \subset f^{-1}(Cl(Int(F)))$$

yazılır. Buradan,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(F))\right) \subset {}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(Cl(Int(F))))\right) \subset f^{-1}(Cl(Int(F))) \subset f^{-1}(Cl(F)) = f^{-1}(F)$$

olup,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(Int(F))\right) \subset f^{-1}(F)$$

elde edilir.

(e)⇒(f): Y uzayının bir B alt kümesi için, $Cl(Y - B)$ kümesi kapalı olup, (e) ifadesi gereği,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(Y-B\right)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(Y-B\right)\right)$$

olur. Ve Teorem 4.1.1 gereği,

$$X-_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(B\right)\right)\right)\right)\subset X-f^{-1}\left(Int\left(B\right)\right)$$

olup, Buradan her iki tarafın tümleyeni alınırsa,

$$f^{-1}\left(Int\left(B\right)\right)\supset_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(B\right)\right)\right)\right)$$

elde edilir.

(f)⇒(g): Y uzayının bir F pre-I-kapalı kümesi için, (f) ifadesi gereği,

$$f^{-1}\left(Int\left(F\right)\right)\supset_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(F\right)\right)\right)\right)$$

yazılır. F kümesi pre-I-kapalı ve her pre-I kapalı küme de pre kapalı olduğundan $Cl\left(Int\left(F\right)\right)\subset F$ dir. Dolayısıyla,

$$f^{-1}\left(Int\left(F\right)\right)\supset_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(F\right)\right)\right)\right)\supset_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}\left(F\right)\right)$$

olup,

$$f^{-1}\left(Int\left(F\right)\right)\supset_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}\left(F\right)\right)$$

elde edilir.

(g) ⇒(h): Y uzayının bir V açık kümesi için, $Cl\left(V\right)$ kümesi kapalı olup, her kapalı küme de pre-I-kapalı olduğundan, (g) ifadesinden,

$$f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(V\right)\right)\right)\supset_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}\left(Cl\left(V\right)\right)\right)$$

olur. Hipotez gereği, V kümesi açık olduğundan,

$$f^{-1}\left(V\right)\subset f^{-1}\left(Int\left(Cl\left(V\right)\right)\right)\supset_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}\left(Cl\left(V\right)\right)\right)$$

olur. Buradan,

$$f^{-1}\left(V\right)\supset_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}\left(Cl\left(V\right)\right)\right)$$

bulunur.

(h) ⇒(a): Y uzayının bir V açık kümesi için, $Int\left(Y-V\right)$ kümesi açık olup, (h) ifadesi gereği,

$$f^{-1}\left(Int\left(Y-V\right)\right)\supset_{PI}Int_{\theta}\left(f^{-1}\left(Cl\left(Int\left(Y-V\right)\right)\right)\right)$$

yazılır. Buradan Teorem 4.1.1 gereği,

$$X - f^{-1}(Cl(V)) \subset X -_{PI} Cl_\theta\left(f^{-1}(Int(Cl(V)))\right)$$

olur. Buradan her iki tarafın tümleyeni alınırsa,

$$_{PI} Cl_\theta\left(f^{-1}(Int(Cl(V)))\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

olup,

$$_{PI} Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) =_{PI} Cl_\theta\left(f^{-1}(Int(V))\right) \subset_{PI} Cl_\theta\left(f^{-1}(Int(Cl(V)))\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

ve

$$_{PI} Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

olup, bu da f fonksiyonunun weakly θ-pre-I sürekli olduğunu gösterir.

4. 3. Weakly θ-Pre-I Sürekli Fonksiyonların Diğer Bazı Sürekli Fonksiyonlarla Karşılaştırılması

Bir ideal topolojik uzaydaki weakly θ-pre-I sürekli fonksiyonu, weakly θ-pre sürekli fonksiyonlarla karşılaştırabilmek için gerekli olan lemmayı verelim.

Lemma 4.3.1. Her $A \subset X$ kümesi için $pCl_\theta(A) \subset_{PI} Cl_\theta(A)$ dır.

İspat: $x \in pCl_\theta(A)$ olsun. $x \in U \subset X$ pre-I-açık kümesi verilsin. Her pre-I-açık küme pre açık olduğundan, pre-θ kapanış noktası tanımı gereğince, $pCl(U) \cap A \neq \varnothing$ ve her zaman $pCl(U) \subset_{PI} Cl(U)$ olduğundan, ${}_{PI}Cl(U) \cap A \neq \varnothing$ olup, pre-θ-I kapanış noktası tanımından $x \in_{PI} Cl_\theta(A)$ elde edilir.

Lemma 4.3.1 den görüldüğü gibi bir ideal topolojik uzaydaki her weakly θ-pre-I sürekli fonksiyon weakly θ-pre süreklidir fakat karşıtı aşağıdaki örnekten de görüldüğü gibi doğru değildir.

Örnek 4.3.1. $X = \{a,b,c\}$ kümesi $\tau = \{\varnothing, X, \{a,b\}\}$ üzerinde $\nu = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\varnothing, \{b\}\}$ ideali verilsin. Bir $f : (X,\tau,I) \to (X,\nu)$ birim fonksiyonu weakly θ-pre süreklidir fakat weakly θ-pre-I sürekli değildir.

Teorem 4.3.1. $f : (X,\tau,I) \to (Y,\nu)$ fonksiyonunun strongly θ-pre-I sürekli olması için gerek ve yeter Y uzayının her B alt kümesi için, ${}_{PI}Cl_\theta\left(f^{-1}(B)\right) \subset f^{-1}(Cl(B))$ olmasıdır ([31], Şimşekler).

Açıktır ki strongly θ-pre-I süreklilik, weakly θ-pre-I sürekliliği gerektirir. Fakat tersinin doğru olmadığını aşağıdaki Örnek 4.3.2 ile gösterdik:

Örnek 4.3.2. $X=\{a,b\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi ve $I=\{\varnothing,\{b\}\}$ ideali verilsin. Bir $f:(X,\tau,I)\to(X,\tau)$ fonksiyonu $f(a)=b$ ve $f(b)=a$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, f fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir fakat strongly θ-pre-I sürekli değildir.

Aşağıdaki sonuçlardan görüldüğü gibi weak θ-pre-I süreklilik, sürekliliğin zayıf bir formudur.

Bunu gösterebilmek için öncelikle ispatımız için gerekli olan lemmayı verelim.

Lemma 4.3.2. A kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında açık ise, bu takdirde $Cl(A)=_{PI}Cl_{\theta}(A)$ dır.

İspat: (X,τ,I) ideal topolojik uzayında bir A açık kümesini alalım. A kümesi X uzayında açık küme ise, $_{PI}Cl_{\theta}(A)\subset Cl(A)$ olduğunu göstermeliyiz. Varsayalım ki $x\notin Cl(A)$ olsun. Kapanış noktası tanımından bir $U\in\vartheta_{(x)}$ açık kümesi için, $U\cap A=\varnothing$ olur. Buradan $U\subset(X-A)$ olup, X - A kümesi kapalı bir küme olup her kapalı küme de pre-I-kapalı olduğundan her iki tarafın pre-I-kapanışı alınırsa, $_{PI}Cl(U)\subset_{PI}Cl(X-A)=X-A$ olur. Buradan $_{PI}Cl(U)\cap A=\varnothing$ olacağından, pre-θ-I kapanış noktası tanımını gereği $x\notin_{PI}Cl_{\theta}(A)$ bulunur, yani; $_{PI}Cl_{\theta}(A)\subset Cl(A)$ dir.

Şimdi A kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında açıksa $Cl(A)\subset_{PI}Cl_{\theta}(A)$ olduğunu gösterelim. $x\in Cl(A)$ ve $x\in V\in PIO(X)$ olsun. Bu takdirde, $x\in V\subset Int(Cl^{*}(V))$ olup, $A\cap Int(Cl^{*}(V))\neq\varnothing$ dır. A kümesi açık olduğundan

$$A\cap Int(Cl^{*}(V))\subset A\cap Int(Cl(V))=Int(A)\cap Int(Cl(V))$$

$$=Int(A\cap Cl(V))\subset Int(Cl(A\cap V))\subset Cl(A\cap V)$$

olur. Böylece $Cl(A\cap V)\neq\varnothing$ ve $A\cap V\neq\varnothing$ olduğunu elde ederiz.

$$(A \cap V) \cup (A \cap Cl(Int(V))) = A \cap (V \cup Cl(Int(V))) = A \cap_P Cl(V)$$

olup, $A \cap V \neq \varnothing$ olduğundan, $A \cap pCl(V) \neq \varnothing$ olur, pre-θ –kapanış noktası tanımından $x \in pCl_\theta(A)$ bulunur. Her zaman $pCl_\theta(A) \subset_{PI} Cl_\theta(A)$ olduğundan, $x \in_{PI} Cl_\theta(A)$ dır. Sonuç olarak A açık kümesi için, $Cl(A) =_{PI} Cl_\theta(A)$ olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 4.3.2. $f:(X,\tau,I) \to (Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu sürekli ise, bu takdirde f fonksiyonu weakly θ -pre-I süreklidir.

İspat : $V \subset Y$ açık küme olsun. O zaman $f^{-1}(V)$ kümesi açık olduğundan,

$$_{PI}Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) = Cl\left(f^{-1}(V)\right)$$

dir. Ayrıca f fonksiyonu sürekli olduğundan,

$$Cl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

olur. Buradan,

$$_{PI}Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) = Cl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

sağlanır. Bu da, f fonksiyonunun weakly θ-pre-I sürekli olduğunu gösterir.

Örnek 4.3.3. Örnek 4.3.2 de verdiğimiz fonksiyon weakly θ-pre-I süreklidir fakat sürekli değildir.

Bu yüzden weak θ -pre-I süreklilik süreklilikten daha zayıftır.

Popa ve Noiri [25] de almost weakly sürekliliğin bir karakterizasyonunu aşağıdaki gibi vermişlerdir.

Teorem 4.3.3. $f:(X,\tau) \to (Y,\nu)$ fonksiyonunun almost weakly sürekli olması için gerek ve yeter şart her açık $V \subset Y$ kümesi için, $pCl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$ olmasıdır ([25], Popa ve Noiri).

Lemma 4.3.3. (X,τ,I) ideal topolojik uzayında her A alt kümesi için, $pCl(A)\subset_{PI} Cl_\theta(A)$ sağlanır.

İspat: $x\in pCl(A)$ ve $x\in U\in PIO(X,x)$ olsun. $x\in pCl(A)$ olduğundan, pre kapanış noktası tanımı gereği ve her pre-I-açık küme pre-açık olduğundan $U\cap A\neq\varnothing$ dır. Her zaman $U\subset_{PI} Cl(U)$ sağlandığından, $_{PI}Cl(U)\cap A\neq\varnothing$ olup, pre-θ-I kapanış noktası tanımı gereği $x\in_{PI} Cl_\theta(A)$ dır.

Teorem 4.3.4. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu weakly θ-pre-I sürekli ise, bu takdirde f fonksiyonu almost weakly süreklidir.

İspat: Y uzayında bir $V\subset Y$ açık kümesini alalım. Her A kümesi için, Lemma 4.3.3 den $pCl(A)\subset_{PI} Cl_\theta(A)$ olup,

$$pCl\left(f^{-1}(V)\right)\subset_{PI} Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right)$$

ve f fonksiyonu weakly θ-pre-I sürekli olduğundan,

$$pCl\left(f^{-1}(V)\right)\subset_{PI} Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}(Cl(V))$$

olup,

$$pCl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}(Cl(V))$$

bulunur . Buradan, f fonksiyonu almost weakly sürekli olur.

Uyarı 4.3.1. Aşağıdaki örnekte almost weakly sürekliliğin, weakly θ-pre-I sürekliliği gerektirmediğini gösterdik.

Örnek 4.3.4. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde, $\tau=\{\varnothing,X,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ ve $\nu=\{\varnothing,X,\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$ topolojileri ile $I=\{\varnothing,\{b\}\}$ ideali verilsin. f birim fonksiyonu $f:(X,\tau,I)\to(X,\nu)$ almost weakly süreklidir, fakat weakly θ-pre-I sürekli değildir.

Böylece weak θ-pre-I süreklilik, süreklilik ve almost weak süreklilik arasındadır.

Teorem 4.3.4 ün karşıtının sağlanması için öncelikle gerekli olan ifadeleri verelim.

Tanım 4.3.1 (X,τ,I) ideal topolojik uzay olsun. $F \subset X$ pre-I-kapalı kümesi ve $x \in X - F$ noktası için , $x \in U$ ve $F \subset V$ olacak şekilde ayrık, pre-I-açık U ve V komşulukları varsa (X,τ,I) ideal topolojik uzayına **pre-I-regular uzay** denir ([2], Açıkgöz ve ark.).

Lemma 4.3.4. (X,τ,I) ideal topolojik uzayının pre-I-regular uzay olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ noktası ve x noktasının her $U \in PIO(X)$ komşuluğu için $x \in V \subset_{PI} Cl(V) \subset U$ olacak şekilde $V \in PIO(X,x)$ kümesinin olmasıdır ([2], Açıkgöz ve ark.).

Teorem 4.3.5. I_n ideali, (X,τ) topololojik uzayında hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin ideali olsun.(X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ kümesi için, $I = I_n$ ise A kümesinin pre-I-açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin pre açık olmasıdır ([6], Dontchev).

Lemma 4.3.5. $(X,\tau,I = I_n)$ ideal topolojik uzayının pre-I-regular uzay olması için gerek ve yeter şart her $A \subset X$ kümesi için, ${}_{PI}Cl_\theta(A) = pCl(A)$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ Varsayalım ki (X,τ,I_n) ideal topolojik uzayı pre-I-regular uzay olsun. $A \subset X$ ve $x \in_{PI} Cl_\theta(A)$ noktası verilsin. U kümesi, X uzayında pre-I-açık küme ve $x \in U$ olduğunu kabul edelim. O zaman en az bir $W \in PIO(X,x)$ kümesi vardır öyle ki $x \in W \subset_{PI} Cl(W) \subset U$ dır. $x \in_{PI} Cl_\theta(A)$ olduğundan, pre-θ-I kapanış noktası tanımı gereği ${}_{PI}Cl(W) \cap A \neq \varnothing$ olup, $U \cap A \neq \varnothing$ dır. Teorem 4.3.5 gereği

$x \in pCl(A)$ dir. Bir (X,τ,I) ideal topolojik uzayında her A alt kümesi için $pCl(A) \subset {}_{PI}Cl_{\theta}(A)$ olduğundan, ${}_{PI}Cl_{\theta}(A) = pCl(A)$ elde edilir.

$\Leftarrow$ Varsayalım ki her $A \subset X$ kümesi için ${}_{PI}Cl_{\theta}(A) = pCl(A)$ olsun. $x \in X$ ve $x \notin F$ pre-I-kapalı küme olsun. F kümesi pre-I-kapalı küme ise, $F = {}_{PI}Cl(F)$ dır. Her zaman $pCl(F) \subset {}_{PI}Cl(F)$ olduğundan, $x \notin pCl(F)$ ve hipotez gereği $x \notin {}_{PI}Cl_{\theta}(F)$ dır. Bu yüzden en az bir $U \in PIO(X,x)$ kümesi vardır, öyle ki ${}_{PI}Cl(U) \cap F = \varnothing$ dır. Böylece $x \in U$ ve $F \subset X - {}_{PI}Cl(U)$ olur. Buradan (X,τ,I_n) ideal topolojik uzayının pre-I-regular uzay olduğunu ispatlamış oluruz.

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.3.4 ve Lemma 4.3.5 ün direk sonucudur.

Teorem 4.3.6. (X,τ,I_n) ideal topolojik uzayı pre-I-regular uzay ise, bu takdirde $f:(X,\tau,I_n) \to (Y,\nu)$ fonksiyonunun weakly θ-pre-I sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun almost weakly sürekli olmasıdır.

Uyarı 4.3.2. Weakly θ-pre-I sürekli fonksiyonları, almost weakly I- sürekli fonksiyonlarla karşılaştırabilmek için Tanım 4.1.5 ifadesini aşağıda tekrar verdik. Ayrıca karşılaştırma yapabilmek için, almost weakly I- sürekli fonksiyonlar için bazı karakterizasyonları da inceledik ve elde ettik.

$f:(X,\tau) \to (Y,\nu,I)$ bir fonksiyon olsun. Y uzayının her V açık kümesi için, $f^{-1}(V) \subset Int(Cl(f^{-1}(Cl^{*}(V))))$ oluyorsa, bu fonksiyona **almost weakly I-sürekli fonksiyon** denir.

Tanım 4.3.2. (X,τ) topololojik uzayı üzerindeki bir I ideali için, eğer $\tau \cap I = \{\varnothing\}$ oluyorsa, I idealine **codense** denir ([7] Dontchev ve ark.).

Lemma 4.3.6. (X,τ,I) ideal topolojik uzay olsun. I idealinin codense olması için gerek yeter şart X uzayının her A açık kümesi için, $A \subset A^*$ olmasıdır ([15], Jankovic ve Hamlet).

Lemma 4.3.7. (X,τ,I) ideal topolojik uzayında $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer $A \subset A^*$ ise, bu takdirde $A^* = Cl(A^*) = Cl(A) = Cl^*(A)$ dır ([28], Renuka Devi ve ark.).

Teorem 4.3.7. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu,I)$ bir fonksiyon ve (Y,ν,I) ideal topolojik uzayında I ideali codense olsun. f fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir:

(a) f fonksiyonu almost weakly I-süreklidir;

(b) Y uzayının her V açık kümesi için, $Cl(Int(f^{-1}(V))) \subset f^{-1}(Cl^*(V))$;

(c) Her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her V açık kümesi için, $Cl(f^{-1}(Cl^*(V)))$ kümesi x noktasının bir komşuluğudur.

İspat: (a)$\Rightarrow$(b): V açık kümesi Y uzayının bir alt kümesi olsun. $Y - Cl(V)$ kümesi Y uzayında açıktır ve f fonksiyonu almost weakly I-sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned} X - f^{-1}(Cl(V)) = f^{-1}(Y - Cl(V)) &\subset Int(Cl(f^{-1}(Cl^*(Y - Cl(V))))) \\ &\subset Int(Cl(f^{-1}(Cl(Y - Cl(V))))) \subset Int(Cl(f^{-1}(Y - V))) \\ &\subset X - Cl(Int(f^{-1}(V))) \end{aligned}$$

olur ve

$$Cl(Int(f^{-1}(V))) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

olup, (Y,ν,I) ideal topolojik uzayında I ideali codense olduğundan $Cl(V) = Cl^*(V)$ olur. Buradan,

$$Cl(Int(f^{-1}(V))) \subset f^{-1}(Cl(V)) = f^{-1}(Cl^*(V))$$

elde edilir. Böylece

$$Cl(Int(f^{-1}(V))) \subset f^{-1}(Cl^*(V))$$

bulunur.

(b)$\Rightarrow$(c): $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren bir V açık kümesi verilsin. $Y - Cl(V)$ kümesi Y uzayında açık olup, (Y,ν,I) ideal topolojik uzayında I ideali codense olduğundan, $Cl(V) = Cl^*(V)$ dır.

$$X - Int\left(Cl\left(f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)\right)\right) = X - Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$$

olup, (b) ifadesi gereği,

$$X - Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right) = Cl\left(Int\left(f^{-1}(Y - Cl(V))\right)\right) \subset f^{-1}\left(Cl^*(Y - Cl(V))\right) \text{ olup,}$$

$$\subset f^{-1}\left(Cl(Y - Cl(V))\right) = f^{-1}\left(Y - Int(Cl(V))\right)$$

$$\subset f^{-1}(Y - V) = X - f^{-1}(V)$$

dır. Buradan,

$$f^{-1}(V) \subset Int\left(Cl\left(f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)\right)\right)$$

elde edilir ki $x \in f^{-1}(V)$ ile birlikte düşünüldüğünde

$$x \in f^{-1}(V) \subset Int\left(Cl\left(f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)\right)\right)$$

olup, $Cl\left(f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)\right)$ kümesinin x noktasının bir komşuluğu olduğu görülür.

(c)$\Rightarrow$(a): V kümesi Y uzayında herhangi bir açık küme ve $x \in f^{-1}(V)$ olsun. O zaman $f(x) \in V$ ve (c) ifadesi gereği $Cl\left(f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)\right)$ kümesi, x noktasının bir komşuluğu olup, $x \in Int\left(Cl\left(f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)\right)\right)$ olur. Buradan

$$f^{-1}(V) \subset Int\left(Cl\left(f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)\right)\right)$$

elde edilir. Böylece f fonksiyonu almost weakly I-süreklidir.

Almost weakly I-sürekli fonksiyonlar için bir kriter daha verelim:

Teorem 4.3.8. $f:(X,\tau) \to (Y,\nu,I)$ bir fonksiyon ve (Y,ν,I) ideal topolojik uzayında I ideali codense olsun. f fonksiyonunun almost weakly I-sürekli olması için gerek ve yeter şart her açık $V \subset Y$ kümesi için, $pCl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ V kümesi Y uzayının bir açık alt kümesi olsun. f fonksiyonu almost weakly I-sürekli ve (Y,ν,I) ideal topolojik uzayında I ideali codense olduğundan, Teorem 4.3.7 gereği,

$$Cl\left(Int\left(f^{-1}(V)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl^{*}(V)\right)$$

dır. Buradan,

$$pCl\left(f^{-1}(V)\right)=f^{-1}(V)\cup Cl\left(Int\left(f^{-1}(V)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl^{*}(V)\right)$$

olup,

$$pCl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl^{*}(V)\right)$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ V açık kümesi Y uzayının bir alt kümesi olsun.

$$pCl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl^{*}(V)\right)$$

olup, pre kapanış noktası tanımı gereğince,

$$Cl\left(Int\left(f^{-1}(V)\right)\right)\subset pCl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl^{*}(V)\right)$$

olup,

$$Cl\left(Int\left(f^{-1}(V)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl^{*}(V)\right)$$

ve (Y,ν,I) ideal topolojik uzayında I ideali codense olduğundan, f fonksiyonu almost weakly I-süreklidir.

Uyarı 4.3.3. Weakly θ-pre-I süreklilik, almost weakly I-süreklilikten bağimsızdır.

Örnek 4.3.5. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\varnothing,X,\{a\},\{a,c\}\}$ topolojisi ile $I=\{\varnothing,\{a\}\}$ ideali ve $Y=\{1,2,3\}$ kümesi üzerinde $\nu=\{\varnothing,Y,\{1\}\}$ topolojisi ile $I_1=\{\varnothing,\{1\}\}$ ideali verilsin. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu,I_1)$ fonksiyonu $f(a)=3$ $f(b)=2$ $f(c)=1$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir fakat almost weakly I-sürekli değildir.

Örnek 4.3.6. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde, $\tau=\{\varnothing,X,\{a\},\{a,b\}\{a,c\}\}$ topolojisi ile $I=\{\varnothing,\{b\}\}$ ideali ve $\nu=\{\varnothing,X,\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$ topolojisi ile

$I_1 = \{\varnothing, \{a\}\}$ ideali verilsin. $f : (X, \tau, I) \to (X, \nu, I_1)$ birim fonksiyonu almost weakly I-süreklidir fakat weakly θ-pre-I sürekli değildir.

Teorem 4.3.9. $f : (X, \tau, I) \to (Y, \nu, I_1)$ bir fonksiyon ve (Y, ν, I_1) ideal topolojik uzayında I_1 ideali codense olsun. Eğer f fonksiyonu weakly θ-pre-I sürekli ise, bu takdirde f fonksiyonu almost weakly I-süreklidir.

İspat: V kümesi Y uzayının bir açık alt kümesi olsun. f fonksiyonu weakly θ-pre-I sürekli olduğundan,

$$_{PI}Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

olur ve (Y, ν, I_1) ideal topolojik uzayında I_1 ideali codense olduğundan,

$$pCl\left(f^{-1}(V)\right) \subset_{PI} Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}(Cl(V)) = f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)$$

olup,

$$pCl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)$$

bulunur. Böylece f fonksiyonu almost weakly I-süreklidir.

Teorem 4.3.10. $f : (X, \tau, I_n) \to (Y, \nu, I_1)$ bir fonksiyon olsun**.** (X, τ, I_n) ideal topolojik uzayı pre-I-regular uzay ve (Y, ν, I_1) ideal topolojik uzayında I_1 codense ise, bu takdirde $f : (X, \tau, I_n) \to (Y, \nu, I_1)$ fonksiyonunun weakly θ-pre-I sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun almost weakly I-sürekli olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ Teorem 4.3.9 den açıktır.

$\Leftarrow V$ kümesi Y uzayının bir açık alt kümesi olsun. f fonksiyonu almost weakly I- sürekli ve (Y, ν, I_1) ideal topolojik uzayında I_1 codense olduğundan,

$$pCl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)$$

dır. Lemma 4.3.5 ve $Cl^*(V) \subset Cl(V)$ ifadesi gereği,

$$_{PI}Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) = pCl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl^*(V)\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

olup,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}(Cl(V))$$

bulunur. Böylece f fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir.

Şimdi weak θ-pre-I sürekliliğin weak süreklilikle hangi koşullar altında birbirini gerektirdiğini inceleyeceğiz. Weak θ-pre-I süreklilik weak süreklilikten bağımsızdır.

Örnek 4.3.7. Örnek 4.3.4. te verdiğimiz fonksiyon weak süreklidir fakat weakly θ-pre-I sürekli değildir.

Örnek 4.3.8. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde, $\tau=\{\varnothing,X,\{a\},\{b,c\}\}$ topolojisi $I=\{\varnothing,\{a\}\}$ ideali ve $\nu=\{\varnothing,X,\{c\},\{a,b\}\}$ topolojileri verilsin. $f:(X,\tau,I)\to(X,\nu)$ birim fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir fakat weakly sürekli değildir.

Rose [26] de weak sürekliliğin bir karakterizasyonunu aşağıdaki gibi vermiştir.

Teorem 4.3.11. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonunun weakly sürekli olması için gerek ve yeter şart her açık $V\subset Y$ kümesi için, $Cl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$ olmasıdır ([26], Rose).

Tanım 4.3.3. (X,τ,I) ideal topolojik uzay olsun. F kapalı kümesi ve $x\in X-F$ noktası için , $x\in U$ ve $F\subset V$ olacak şekilde ayrık, pre-I-açık U ve V komşulukları varsa (X,τ,I) ideal topolojik uzayına **p-I-regular uzay** denir ([31], Şimşekler).

Lemma 4.3.8. (X,τ,I) ideal topolojik uzayının p-I-regular uzay olması için, gerek ve yeter şart her $x\in X$ noktası ve x noktasının her U açık komşuluğu için $x\in V\subset_{PI}Cl(V)\subset U$ olacak şekilde $V\in PIO(X,x)$ kümesinin olmasıdır ([31],Şimşekler).

Lemma 4.3.9. (X,τ,I) ideal topolojik uzayının p-I-regular uzay olması için, gerek ve yeter şart her $A \subset X$ kümesi için ${}_{PI}Cl_{\theta}(A) \subset Cl(A)$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ Varsayalım ki (X,τ,I) uzayı p-I-regular uzay olsun. $A \subset X$ ve $x \in_{PI} Cl_{\theta}(A)$ noktası verilsin. U kümesi, X uzayının bir açık kümesi ve $x \in U$ olsun. O zaman en az bir $W \in PIO(X,x)$ kümesi vardır öyle ki $x \in W \subset_{PI} Cl(W) \subset U$ dır. $x \in_{PI} Cl_{\theta}(A)$ olduğundan, pre-θ-I kapanış noktası tanımı gereği ${}_{PI}Cl(W) \cap A \neq \varnothing$ olup, $U \cap A \neq \varnothing$ dır. Böylece $x \in Cl(A)$ dir.

$\Leftarrow$ Varsayalım ki her $A \subset X$ kümesi için ${}_{PI}Cl_{\theta}(A) \subset Cl(A)$ olsun. $x \in X$ noktası ve $x \notin F$, F kapalı küme verilsin. O zaman $x \notin Cl(F)$ ve hipotez gereği $x \notin_{PI} Cl_{\theta}(F)$ dır. Bu yüzden en az bir $U \in PIO(X,x)$ kümesi vardır, öyle ki ${}_{PI}Cl(U) \cap F = \varnothing$ dır. Böylece $x \in U$ ve $F \subset X - {}_{PI}Cl(U)$ olur. Buradan (X,τ,I) ideal topolojik uzayının p-I-regular uzay olduğu ispatlanır.

Teorem 4.3.12. Eğer (X,τ,I) ideal topolojik uzayı p-I-regular uzay ve $f:(X,\tau,I) \to (Y,\nu)$ weakly sürekli fonksiyon ise, bu takdirde f fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir.

İspat: $V \subset Y$ kümesi açık olsun. Lemma 4.3.9 gereği, (X,τ,I) ideal topolojik uzayı p-I-regular uzay olduğundan,

$$ {}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right) \subset Cl\left(f^{-1}(V)\right) $$

dır. f fonksiyonu weakly sürekli olduğundan,

$$ Cl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl(V)\right) $$

olur. Böylece

$$ {}_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl(V)\right) $$

olup, bu yüzden f fonksiyonu weakly θ-pre süreklidir.

Lemma 4.3.10. Eğer (X,τ,I) ideal topolojik uzayında X uzayının her pre-I-açık alt kümesi, α-I-açık küme ise, bu takdirde her $A \subset X$ kümesi için $Cl(A) \subset_{PI} Cl_\theta(A)$ dır.

İspat : $A \subset X$ kümesi ve $x \in Cl(A)$ noktası verilsin. $x \in U \in PIO(X)$ pre-I-açık küme olsun. Hipotez gereği, U kümesi α-I-açık kümedir ve

$$x \in U \subset Int\left(Cl^*\left(Int(U)\right)\right) \subset Int\left(U \cup Cl^*\left(Int(U)\right)\right) \subset Int\left(U \cup Cl\left(Int(U)\right)\right) = Int\left(pCl(U)\right)$$

dır.

$x \in Cl(A)$ olduğundan, $Int\left(pCl(U)\right) \cap A \neq \varnothing$ ve bu yüzden $pCl(U) \cap A \neq \varnothing$ dır. Buradan $x \in pCl_\theta(A)$ dır. Her zaman $pCl_\theta(A) \subset_{PI} Cl_\theta(A)$ olduğundan, $x \in_{PI} Cl_\theta(A)$ dır. Dolayısıyla $Cl(A) \subset_{PI} Cl_\theta(A)$ elde edilir.

Teorem 4.3.13. Eğer (X,τ,I) ideal topolojik uzayının her pre-I-açık alt kümesi, α-I-açık küme ve $f:(X,\tau,I) \to (Y,\nu)$ fonksiyonu weakly θ-pre-I sürekli ise, bu takdirde f fonksiyonu weakly süreklidir.

İspat : $V \subset Y$ açık küme olsun. f fonksiyonu weakly θ- pre-I sürekli olduğundan,

$$_{PI}Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

dır. Lemma 4.3.10 gereği,

$$Cl\left(f^{-1}(V)\right) \subset_{PI} Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right)$$

dır. Bu yüzden

$$Cl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

olur ki, bu f fonksiyonun weakly sürekli olduğunu gösterir.

Uyarı 4.3.4. Weak θ-pre-I süreklilik, weak I-süreklilikten bağimsızdır.

Örnek 4.3.9. Örnek 4.3.6. de verilen birim fonksiyonu weakly I-süreklidir fakat weakly θ-pre-I sürekli değildir.

Örnek 4.3.10. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde, $\tau=\{\varnothing,X,\{b\}\}$ topolojisi ile $I=\{\varnothing,\{b\}\}$ ideali ve $\nu=\{\varnothing,X,\{a,b\}$ topolojisi ile $I_1=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ideali verilsin. $f:(X,\tau,I)\to(X,\nu,I_1)$ birim fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir fakat weakly I-sürekli değildir.

Teorem 4.3.14. (Y,ν,I) ideal topolojik uzayında I ideali codense ve $f:(X,\tau)\to(Y,\nu,I)$ fonksiyonu weakly I-sürekli ise, bu takdirde her açık $V\subset Y$ kümesi için, $Cl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl^{*}(V)\right)$ olmasıdır ([16], Jeyanthı ve ark.).

Teorem 4.3.15. Eğer (X,τ,I) ideal topolojik uzayı p-I-regular uzay ve (Y,ν,I_1) ideal topolojik uzayında I_1 ideali codense olsun. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu,I_1)$ weakly I-sürekli fonksiyon ise, bu takdirde f fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir.

İspat : $V\subset Y$ kümesi açık olsun. Lemma 4.3.9 gereği (X,τ,I) ideal topolojik uzayı p-I-regular uzay olduğundan

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right)\subset Cl\left(f^{-1}(V)\right)$$

dır. f fonksiyonu weakly I-sürekli ve I_1 ideali codense olduğundan,

$$Cl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl^{*}(V)\right)$$

olur. Böylece

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right)\subset Cl\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl^{*}(V)\right)\subset f^{-1}(Cl(V))$$

olup,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}(Cl(V))$$

olur. Bu yüzden f fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir.

Teorem 4.3.16. Eğer (X,τ,I) ideal topolojik uzayının her pre-I-açık alt kümesi, α-I-açık küme ve (Y,ν,I_1) ideal topolojik uzayında I_1 ideali codense ve $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu,I_1)$ fonksiyonu weakly θ-pre-I sürekli ise, f fonksiyonunun weakly I- süreklidir.

İspat : $V \subset Y$ açık küme olsun. f fonksiyonu weakly θ- pre-I sürekli olduğundan,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}(Cl(V))$$

dır. Eğer (X,τ,I) ideal topolojik uzayının her pre-I-açık alt kümesi, α-I-açık küme ise,

$$Cl\left(f^{-1}(V)\right) \subset_{PI} Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right)$$

olur ve (Y,ν,I_1) ideal topolojik uzayında I_1 ideali codense olduğundan,

$$f^{-1}(Cl(V)) = f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)$$

dır. Bu yüzden

$$Cl\left(f^{-1}(V)\right) \subset_{PI} Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}(Cl(V)) = f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)$$

olup,

$$Cl\left(f^{-1}(V)\right) \subset f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)$$

olur ki, bu f fonksiyonunun weakly I-sürekli olduğunu gösterir.

Şimdi de weakly I-süreklilik ile almost weakly I-sürekliliği karşılaştıralım. Weakly I-süreklilik için ([1], Açıkgöz ve ark.) de verilen bir teoremi verelim.

Teorem 4.3.17. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu,I)$ fonksiyonunun weakly I-sürekli olması için gerek ve yeter şart Y uzayının her V açık kümesi için, $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Cl^*(V)\right)\right)$ olmasıdır ([1], Açıkgöz ve ark.).

Teorem 4.3.18. $f:(X,\tau)\to(Y,\nu,I)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu weakly I-sürekli ise, f fonksiyonu almost weakly I-süreklidir.

İspat: Teorem 4.3.17 ve Tanım 4.1.5 gereği açıktır.

Ancak aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi almost weakly I-sürekli fonksiyonun, weakly I-sürekli olması gerekmez.

Örnek 4.3.11. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde, $\tau=\{\varnothing,X,\{b\}\}$ topolojisi ve $\nu=\{\varnothing,X,\{a,b\}$ topolojisi ile $I_1=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ideali verilsin. $f:(X,\tau)\to(X,\nu,I_1)$ birim fonksiyonu almost weakly I-süreklidir fakat weakly I-sürekli değildir.

Tanım 4.3.4. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ bir fonksiyon olsun. Y uzayının her V açık kümesi için $f^{-1}(V)$ kümesi, pre-θ-I kapalı küme ise, bu fonksiyona **contra θ-pre-I sürekli fonksiyon** denir.

Teorem 4.3.19. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu contra θ-pre-I sürekli ise, bu takdirde f fonksiyonu weakly θ- pre-I süreklidir.

İspat : Y uzayının bir V açık kümesini alalım. O zaman $f^{-1}(V)$ kümesi pre-θ-I kapalı olduğundan,

$$_{PI}Cl_\theta\left(f^{-1}(V)\right)=f^{-1}(V)\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

dır. Buradan, f fonksiyonunun weakly θ- pre-I sürekli olduğu açıktır.

Aşağıdaki örnek weak θ-pre-I sürekliliğin, contra θ-pre-I sürekliliği gerektirmediğini gösterir.

Örnek 4.3.12. $X=\{a,b\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\varnothing,\{a\}\}$ **Sierpinski topolojisi** ile $I=\{\varnothing,\{b\}\}$ ideali verilsin. $f:(X,\tau,I)\to(X,\tau)$ birim fonksiyonu weakly θ- pre-I süreklidir fakat contra θ-pre-I sürekli değildir.

4.4. Bazı Özellikler

$f:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu için, $X\times Y$ uzayının $\{(x,f(x)):x\in X\}$ alt kümesi f fonksiyonunun grafiği olarak adlandırılır ve $G(f)$ ile gösterilir. Her $(x,y)\in(X\times Y)-G(f)$ noktası için, $(U\times V)\cap G(f)=\phi$ olacak şekilde Y uzayında x,y noktalarını içeren sırasıyla açık kümeleri varsa $f:X\to Y$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiğine kapalı grafik denir ([36], Genel topoloji).

Tanım 4.4.1. Her $(x,y)\in(X\times Y)-G(f)$ noktası için, $(x,y)\in({}_{PI}Cl(U)\times V)\subset X\times Y-G(f)$ olacak şekilde Y uzayında y noktasını içeren bir V açık kümesi ve $U\in PIO(X,x)$ pre-I-açık kümesi varsa $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiğine **strongly pre-I- kapalı** denir ([31], Şimşekler).

Teorem 4.4.1. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu weakly θ-pre-I sürekli ve Y uzayı Hausdorff uzay ise, bu takdirde $G(f)$ grafiği $X\times Y$ çarpım uzayında strongly pre-I-kapalıdır.

İspat: $(x,y)\in(X\times Y)-G(f)$ olsun. Hipotez gereği, Y uzayı Hausdorff uzayı olduğundan V ve W ayrık, açık kümeleri vardır ki $y\in V$ ve $f(x)\in W$ dir. Böylece $f(x)\notin Cl(V)$ olur ve bu yüzden $x\notin f^{-1}(Cl(V))$ dir. f fonksiyonu weakly θ- pre-I sürekli olduğundan $x\notin{}_{PI}Cl_{\theta}(f^{-1}(V))$ dir. Bu yüzden pre-θ-I kapanış noktası tanımından ${}_{PI}Cl(U)\cap f^{-1}(V)=\varnothing$ olacak şekilde bir $U\in PIO(X,x)$ kümesi vardır. Buradan $(x,y)\in({}_{PI}Cl(U)\times V)\subset X\times Y-G(f)$ olur ki, bu da $G(f)$ grafiğinin, strongly pre-I- kapalı oluşunu ispatlar.

Sonuç 4.4.1. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu strongly θ-pre-I-sürekli ve Y uzayı Hausdorff uzay ise, bu takdirde $G(f)$ grafiği $X\times Y$ çarpım uzayında strongly pre-I-kapalıdır ([31], Şimşekler).

Teorem 4.4.2. ([34], Yüksel ve ark.) (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $A, X_0 \subset X$ olsun.

(1) $A \in PIO(X)$ ve $X_0 \in SIO(X)$ ise, $A \cap X_0 \in PIO(X_0)$

(2) $A \in PIO(X_0)$ ve $X_0 \in PIO(X)$ ise, $A \in PIO(X)$.

Teorem 4.4.3. ([34], Yüksel ve ark.) (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $A \subset X_0 \subset X$ olsun ve ${}_{PI}Cl_{X_0}(A)$ ifadesi A kümesinin X_0 alt uzayında pre-I-kapanışını göstersin.

(1) X uzayında X_0 semi-I-açık küme ise, ${}_{PI}Cl_{X_0}(A) \subset {}_{PI}Cl(A)$ dır.

(2) $A \in PIO(X_0)$ ve $X_0 \in PIO(X)$ ise, ${}_{PI}Cl(A) \subset {}_{PI}Cl_{X_0}(A)$.

$B \subset A \subset X$ ise, o zaman B kümesinin pre-θ-I kapanışını A alt uzayıyla bağlantılı olarak ${}_{PI}Cl_{A\theta}(B)$ ile gösterebiliriz.

Lemma 4.4.1. $B \subset A \subset X$ olacak şekilde bir X uzayının A ve B alt kümeleri verilsin. A kümesi semi-I-açık ise, ${}_{PI}Cl_{A\theta}(B) \subset {}_{PI}Cl_{\theta}(B)$ dır.

İspat: $x \in {}_{PI}Cl_{A\theta}(B)$ ve $U \in PIO(X,x)$ olsun. O zaman $x \in U \cap A$ ve Teorem 4.4.2 den $U \cap A \in PIO(A)$ dır. $x \in {}_{PI}Cl_{A\theta}(B)$ olduğundan, $pCl_A(U \cap A) \cap B \neq \varnothing$ dır. Teorem 4.4.3 den ${}_{PI}Cl_A(U \cap A) \subset {}_{PI}Cl(U \cap A)$ dır. Böylece ${}_{PI}Cl(U \cap A) \cap B \neq \varnothing$ olup ve bu yüzden ${}_{PI}Cl(U) \cap B \neq \varnothing$ dır. Böylece $x \in pCl_{\theta}(B)$ dır.

Teorem 4.4.4. $f:(X,\tau,I) \to (Y,\nu)$ weakly θ-pre-I sürekli fonksiyon ve A kümesi X uzayının semi-I-açık bir alt kümesi ise $f/_A : (A,\tau_A,I_A) \to (Y,\nu)$ kısıtlanmış fonksiyonu da weakly θ-pre-I süreklidir.

İspat: $V \subset Y$ alt kümesi açık olsun. Lemma 4.4.1 gereği görebiliriz ki,

$$_{PI}Cl_{A\theta}\left(f/_{A}^{-1}(V)\right)=_{PI}Cl_{A\theta}\left(f^{-1}(V)\cap A\right)\subset_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\cap A\right)\cap A$$
$$\subset_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right)\cap A\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)\cap A=f/_{A}^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

dir. Bu yüzden $f/_{A}:(A,\tau_{A},I_{A})\to(Y,\nu)$ fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir.

Son olarak fonksiyonların çeşitli tipleri ile weakly θ-pre-I sürekli fonksiyonların bir araya gelmesiyle oluşan bazı özellikleri inceleyeceğiz.

Teorem 4.4.5. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ fonksiyonu weakly θ-pre-I sürekli ve $g:(Y,\nu)\to(Z,\sigma)$ fonksiyonu sürekli ise $g\circ f:(X,\tau,I)\to(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir.

İspat: Z uzayında V bir açık alt küme olsun. O zaman,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left((g\circ f)^{-1}(V)\right)=_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)\right)\subset f^{-1}\left(Cl\left(g^{-1}(V)\right)\right)$$
$$\subset f^{-1}\left(g^{-1}\left(Cl(V)\right)\right)=(g\circ f)^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

olduğundan,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left((g\circ f)^{-1}(V)\right)\subset(g\circ f)^{-1}(Cl(V))$$

olup, $g\circ f$ bileşke fonksiyonu weakly θ-pre-I süreklidir.

Tanım 4.4.2 $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu,I_{1})$ fonksiyonu verilsin. (X,τ,I) uzayının her pre θ-I kapalı alt kümesinin görüntüsü, (Y,ν,I_{1}) uzayında pre θ-I kapalı küme ise, f fonksiyonuna **pre θ-I kapalı fonksiyon** denir.

Teorem 4.4.6. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu,I_{1})$ fonksiyonunun pre θ-I kapalı fonksiyon olması için gerek ve yeter şart her $A\subset X$ kümesi için, $_{PI}Cl_{\theta}(f(A))\subset f(_{PI}Cl_{\theta}(A))$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ f fonksiyonu pre θ-I kapalı olsun. (X,τ,I) uzayının herhangi bir $A\subset X$ alt kümesini alalım. Her $A\subset X$ kümesi için, $A\subseteq_{PI}Cl_{\theta}(A)$ olup, f

fonksiyonuna göre görüntüsü alınırsa, $f(A) \subseteq f({}_{PI}Cl_{\theta}(A))$ ve her iki tarafın pre θ-I kapanışı alınırsa, ${}_{PI}Cl_{\theta}(f(A)) \subseteq {}_{PI}Cl_{\theta}(f({}_{PI}Cl_{\theta}(A)))$ olur. f fonksiyonu pre θ-I kapalı fonksiyon olduğundan, $f({}_{PI}Cl_{\theta}(A))$ kümesi pre θ-I kapalı kümedir. ${}_{PI}Cl_{\theta}(f({}_{PI}Cl_{\theta}(A))) = f({}_{PI}Cl_{\theta}(A))$ olup, ${}_{PI}Cl_{\theta}(f(A)) \subseteq f({}_{PI}Cl_{\theta}(A))$ bulunur.

$\Leftarrow$Her $A \subset X$ kümesi için, ${}_{PI}Cl_{\theta}(f(A)) \subseteq f({}_{PI}Cl_{\theta}(A))$ olduğunu kabul edelim. f fonksiyonunun pre θ-I kapalı olduğunu gösterelim. Herhangi bir K, pre θ-I kapalı alt kümesini alalım. K kümesi pre θ-I kapalı ise, $K = {}_{PI}Cl_{\theta}(K)$ dir. Kabulumüz gereği ${}_{PI}Cl_{\theta}(f(K)) \subseteq f({}_{PI}Cl_{\theta}(K)) = f(K)$ elde ederiz. Her $A \subset X$ kümesi için, $A \subseteq {}_{PI}Cl_{\theta}(A)$ olduğundan, $f(K) \subset {}_{PI}Cl_{\theta}(f(K))$ olup, buradan ${}_{PI}Cl_{\theta}(f(K)) = f(K)$ elde edilir.

Teorem 4.4.7. $f:(X,\tau,I) \to (Y,\nu,I_1)$ ve $g:(Y,\nu,I_1) \to (Z,\sigma)$ fonksiyonları verilsin. $g \circ f:(X,\tau,I) \to (Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu weakly θ-pre-I sürekli ve f fonksiyonu örten ve f fonksiyonu pre θ-I kapalı fonksiyon ise, o zaman g fonksiyonu weakly θ -pre-I süreklidir.

İspat: Z uzayında V bir açık alt küme olsun. O zaman $g \circ f$ bileşke fonksiyonu weakly θ-pre-I sürekli olduğundan,

$$ {}_{PI}Cl_{\theta}(f^{-1}(g^{-1}(V))) \subset f^{-1}(g^{-1}(Cl(V))) $$

dır. f fonksiyonuna göre görüntüsü alınırsa ve örtenlikten,

$$ f({}_{PI}Cl_{\theta}(f^{-1}(g^{-1}(V)))) \subset g^{-1}(Cl(V)) $$

elde edilir. $f({}_{PI}Cl_{\theta}(f^{-1}(g^{-1}(V))))$, f fonksiyonu pre θ-I kapalı olduğundan, Teorem 4.4.6 gereği,

$$ {}_{PI}Cl_{\theta}(f(f^{-1}(g^{-1}(V)))) \subset f({}_{PI}Cl_{\theta}(f^{-1}(g^{-1}(V)))) $$

dır. Ve bu yüzden,

$$ {}_{PI}Cl_{\theta}(f(f^{-1}(g^{-1}(V)))) \subset g^{-1}(Cl(V)) $$

dir. Son olarak f fonksiyonu örten olduğundan,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(\left(g^{-1}(V)\right)\right)\subset g^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

olur ki buda ispatı tamamlar. Böylece g fonksiyonu weakly θ -pre-I süreklidir.

Teorem 4.4.8. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\nu)$ ve $g:(Y,\nu)\to(Z,\sigma)$ fonksiyonları verilsin. Eğer $g\circ f:(X,\tau,I)\to(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu weakly θ-pre-I sürekli ve g fonksiyonu birebir, clopen ise, bu takdirde f fonksiyonu weakly θ -pre-I süreklidir.

İspat: Y uzayında V kümesi bir açık alt küme olsun. g fonksiyonu açık ve $g\circ f$ bileşke fonksiyonu, weakly θ-pre-I sürekli olduğundan,

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right)\subset_{PI} Cl_{\theta}\left(f^{-1}\left(g^{-1}\left(g(V)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(g^{-1}\left(Cl\left(g(V)\right)\right)\right)$$

dir. Dahası g fonksiyonu kapalı ve birebir olduğundan,

$$f^{-1}\left(g^{-1}\left(Cl\left(g(V)\right)\right)\right)\subset f^{-1}\left(g^{-1}\left(g\left(Cl(V)\right)\right)\right)=f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

olur ve

$$_{PI}Cl_{\theta}\left(f^{-1}(V)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. Böylece f fonksiyonu weakly θ -pre-I süreklidir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

(X,τ) topolojik uzayında tanımlanan weakly θ-pre- sürekli fonksiyonları ele aldık. Bu süreklilik çeşidini ideal topolojik uzaylarda tanımlayarak ideal topolojik uzay ve topolojik uzaylarda daha önceden tanımlanan süreklilik çeşitleriyle karşılaştırdık ve tanımladığımız bu süreklilik çeşidine ait birçok özellik ve karakterizasyon elde ettik.

İncelemiş olduğumuz bu süreklilik çeşidinden yola çıkılarak daha farklı karakterizasyon ve özellikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Açıkgöz A., Noiri T. and Yüksel Ş., 2004, A decompositions of continuity in ideal topological spaces, Acta Math. Hungar., 105 (4), 285-289.

[2] Açıkgöz A., Yüksel Ş., Gürsel E., 2006, On a new concept of functions in ideal topological spaces, Journal of the faculty of science, Vol 29., 30-35.

[3] Bourbaki N., 1966, General Topology, Addison-Wesley, Mass.

[4] Baker C. W., 2003, Weakly θ- pre continuous functions, Acta Math. Hungar 100 (4) 343-351.

[5] Csaszar A., 1997, Generalized open sets, Acta Math. Hungar., 75, 65-87.

[6] Dontchev J., 1996, On pre-I-open sets and a decomposition of I-continity, Banyan Math., Vol. 2.

[7] Dontchev J., Ganster M., and Rose A., 1999, İdeal resolvabilitiy, Topology and its aplications, 93, 1-16

[8] Dontchev J., Ganster M., and Noiri T., 2000, On p-closed spaces, Internant. J. Math. Math. Sci., 24, 203-212.

[9] El-Deeb N., Hasanein I. A., Mashhour A. S., and Noiri T., 1983, On p-regular spaces, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, 27 (75) 311-317

[10] Guo Jun Weng, 1981, On S-closed spaces, Acta Math. Sinica, 24, 55-63.

[11] Hayashi E., 1964, Tolologies defined by local properties, Math. Ann., Vol. 156, 205-215.

[12] Hatır E. and Noiri T., 2002, On decompositions of continuity via idealization, Acta Math. Hungar., 96 (4), 341-349.

[13] Jankovic D. S., 1985, θ-reguler spaces, Internal. J. Math. & Math. Sci., Vol.8, No. 3, 615-619

[14] Jankovic D. and Hamlet T.R., 1990 East Central University, Ada, OK 74820

[15] Jankovic D., Hamlet T.R. ,1990, New topologies from old via ideals, Amer. Math. Monthly., Vol. 97, 295-310.

[16] Jeyanthi V., Renuka Devi V., Sivaraj D., 2006, Weakly I- continuous functıons, Acta Math. Hungar., 113 (4), 319-324.

[17] Kuratowski K., 1933,Topologie 1, Worszsawa,

[18] Levine N., 1961, A decomposition of continuity in topological speces, Amer. Math. Monthly, 68, 44-46.

[19] Levine N., 1963, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, Vol. 70, 36-41.

[20] Long P. E., and Herrington L. L., 1981, Strongly θ- continuous functions, J. Korean Math. Soc., Vol. 18, No. 1,

[21] Mashhour A. S., Abd El-Monsef M. E., and El-Deep S. N., 1982, On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt., 53, 47-53

[22] Mashhour A. S., Abd El-Monsef M. E. and Hasanein I. A., 1984, On pretopological spaces, Bull. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, Vol. 28(76), 39-45.

[23] Njastad O.,1965, On some classes of nearly open sets, pacific J.Math.(15)961-970

[24] Noiri T., 2001 Strongly θ-precontinuous functions, Acta Math. Hungar., 90 (4), 307-316

[25] Popa V. and Noiri T., 1992 Almost weakly continuous functions, Demonstratio Math., 25 , 241-251.

[26] Rose D. A., 1984 Weak continuity and almost continuity, Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol. 7, No.2, 311-318.

[27] Reilly I. L. and Vamanamurthy M. K., 1990 On some questions concerning preopen sets, Kyungbook Math. J., 30 , 87-93.

[28] Renuka Devi V., Sivaraj D. and T. Tamizh Chelvam., 2005, Codense and completely codense ideals, Acta Math . Hungar., 108 (3), 197-205

[29] Samuels P., 1975, A topology formed from a given topology and ideal, J. Londan Math. Soc, (2) 10 409-416.

[30] Sten L.A. and Seebach J.A., 1978, Jr., Counterexamples in Topology, Springer-Verlag, New York,

[31] Şimşekler T.H., 2009, Yüksek lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya

[32] Vaidyanathaswamy R., 1960, Set Topology, Chelsea Publishing Company

[33] Velicko N. V., 1966, H-closed topolocigal spaces, Math. Sb. 70 (112)

[34] Yüksel Ş., Açıkgöz A., Noiri T., 2005, On δ-I-Continuous functions, Turk J Math. Tubitak, 29, 39-51

[35] Yüksel Ş., Açıkgöz A., , Gürsel E., 2007 On a new type of continuous functions in ideal topological spaces, The Journal of the Indian Academy of Mathematics, Vol. 28, 427-438

[36] Yüksel Ş., 2008, Genel topoloji, Konya