YARIGRUP TEORİSİ İLE EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

ERKAN SANCAR

TEMMUZ 2022

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARIGRUP TEORİSİ İLE EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

ERKAN SANCAR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

TEMMUZ 2022

DİYARBAKIR

YARIGRUP TEORİSİ İLE EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Erkan SANCAR tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Danışman, **Dicle Üniversitesi**

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Dicle Üniversitesi

Doç. Dr. Baver OKUTMUŞTUR
Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Dicle Üniversitesi

ONAY

Savunma Tarihi: … / … / …..

Annem, Babam, Eşim ve Çocuklarım Muhammed Ali ile

Hatice Kübra'ya…

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılayıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Erkan SANCAR

İmza: …….……

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni destekleyen ve her zaman yanımda olan sevgili eşim olmak üzere, deneyimi ve sorularıma ışık tutan akademik bilgisiyle tezimin hazırlanmasında bana destek olan danışmanım Prof. Dr. Erhan Pişkin'e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR v

İÇİNDEKİLER vi

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ vii

ÖZET viii

ABSTRACT ix

1. GİRİŞ 1

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 3

3. ÖN BİLGİLER 5

3.1 Lebesgue Uzayı 5

3.2 Sobolev Uzayı 7

3.3 Eşitsizlikler 10

3.4 Fourier Serisi 11

3.5 Yarıgrup Metodu 12

4. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ LAMÈ SİSTEMİ 19

4.1 İyi Konulmuşluk 19

4.2 Global Varlık 28

4.3 Üstel Azalma 33

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 38

KAYNAKLAR 39

ÖZGEÇMİŞ 41

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
α	Alfa
β	Beta
δ	Delta
ε	Epsilon
γ	Gamma
ξ	Ksi
μ	Mu
ω	Omega
ζ	Zeta

Kısaltma	Açıklama
R^n	n boyutlu Öklid uzayıdır.
Ω	R^n de sınırlı bir bölgedir.
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırıdır.
$C(\Omega)$	Sürekli fonksiyonlar uzayı
$L^p(\Omega)$	p. mertebeden Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev uzayı
$H^m(\Omega)$	Hilbert uzayı
Δ	Laplace operatörü
∇	Nabla operatörü (Gradiyent)

ÖZET

YARIGRUP TEORİSİ İLE EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Sancar, Erkan
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Erhan Pişkin
Temmuz 2022, 50 sayfa

Bu tezin ilk bölümünde Lamé denkleminin, gecikmeli denklemlerin ve logaritmik kaynak terim içeren denklemlerin fiziksel anlamları verilmiştir. Ayrıca gecikmeli diferansiyel denklemler ile ilgili tarihsel sürecinden bahsedilmiştir. Gecikmeli diferansiyel denklemler il eilgili ortaya çıkan bazı modellemeler de verilmiştir.

İkinci bölümünde, tezin amacı belirtilmiş ve gecikmeli terim içeren denklemlerin genel olarak kullanıldığı alanlar verilmiştir. Bu alanlar genel olarak optik, nükleer fizik, kuantum mekaniği ve joefizik gibi alanlarda ortaya çıkmıştır. Daha sonra gecikmeli terim içeren problemlerle ilgili temel çalışmalar verilmiştir. Burada ilk olarak Kafini'nin 2021'de çalıştığı problem verilmiş, hemen ardından Taouaf ve arkadaşlarının 2018 yılındaki çalışması verilmiştir.

Üçüncü bölüm, beş kısımdan oluşmaktadır. İlk olarak birinci kısımda Lebesgue uzayının tanımına yer verilmiştir. İkinci kısımda Sobolev uzayının tanımı ve Sobolev Gömülme teoremi verilmiştir. Üçüncü kısımda tez boyunca gerekli olan Young, Hölder, Sobolev ve Sobolev-Poincare eşitsizliklerine yer verilmiştir. Dördüncü kısımda Fourier Serisi ve Parseval Özdeşliği ifade edilmiştir. Beşinci kısımda ise Yarıgrup Metodu ile ilgili tanımlamalar, lemmalar ve teoremler yer almaktadır.

Dördüncü bölüm tezin esas kısmı olup Logaritmik Kaynak Terimli Lamé Sistemi ile ilgili üç alt bölümden oluşmuştur. İlk bölümde gecikmeli terim içeren logaritmik kaynak terimli denklemimizin iyi konulmuşluğu çalışılmıştır. Burada öncelikle bir dönüşüm yardımıyla gecikmeli denklem düzenlenerek elde problemin varlık ve tekliği yarıgrup yöntemiyle ispat edilmiştir. İkinci bölümde potansiyel derinlik metodu ile global varlığı gösterilmiştir. Bu bölümde ise global varlığın ispatı potansiyel derinlik metodu yardımıyla bulunmuştur. Üçüncü bölümde denklemin üstel azalması çalışılmıştır. Bu bölümde çalışılan üstel azalma tez içerisinde verilen teorem ve lemmalarla ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde ise tezin sonuç ve öneriler kısmına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dağılımlı gecikmeli terim, Lamé denklemi, Logaritmik kaynak terim, Üstel azalma, Yarıgrup metodu.

ABSTRACT

SOLUTIONS OF EVOLUTION EQUATIONS WITH THE SEMIGROUP THEORY

Sancar, Erkan
Master of Science in Department of Mathematic
Supervisor: Prof. Dr. Erhan Pişkin
July 2022, 50 pages

In the first part of this thesis, the physical meanings of Lamé equation, delayed equations and equations containing logarithmic source terms are given. In addition, the historical process of delayed differential equations is mentioned. Some emerging models of delayed differential equations are also given.

In the second part, the purpose of the thesis is stated and the areas where the equations with delayed terms are used in general are given. These fields have emerged in fields such as optics, nuclear physics, quantum mechanics, and geophysics in general. Then, basic studies on problems with delayed terms are given. Here, firstly, the problem that Kafini worked on in 2021 is given, and then Taouaf et al.'s work in 2018 is given.

The third part consists of five parts. Firstly, the definition of Lebesgue space is given in the first part. In the second part, the definition of Sobolev space and the Sobolev Embedding theorem are given. In the third part, the Young, Hölder, Sobolev and Sobolev-Poincare inequalities required throughout the thesis are included. In the fourth part, Fourier Series and Parseval Identity are expressed. In the fifth part, there are definitions, lemmas and theorems related to the Semigroup Method.

The fourth chapter is the main part of the thesis and consists of three subsections related to the Logarithmic Source Term Lamé System. In the first part, the goodness of our equation with logarithmic source term, which includes a delayed term, is studied. Here, first of all, the existence and uniqueness of the problem is proved by semigroup method by arranging the delayed equation with the help of a transformation. In the second part, its global presence is shown with the potential depth method. In this section, the proof of global existence is found with the help of potential depth method. In the third chapter, the exponential reduction of the equation is studied. The exponential decrease studied in this chapter has been proved by the theorems and lemmas given in the thesis.

In the fifth chapter, the conclusion and suggestions of the thesis are given.

Keywords: Distributed delay, Lamé system, Logarithmic source term, Exponential decay, Semigroup method.

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında logaritmik kaynak terim içeren gecikmeli Lamé denklemi ele alınmıştır. Gecikmeli denklemler ilk olarak 18. yüzyılda Bernoulli kardeşler ve Euler tarafından çalışılmıştır. Sistematik olarak ise, 1940 da A. Myshkis ve R. Bellman tarafından çalışılmaya başlanmıştır. 1960'dan beri, konuyla ilgili birçok araştırma yayınlandı. Kararsız gecikmeli sistemlerin aktif bir şekilde kontrolü 1990'ların ortalarında başladı (Fridman, 2014).

Zaman gecikmeli sistemler sonradan etkili veya ölü zamanlı sistemler, sapma argümanlı denklemler veya diferansiyel fark denklemleri olarak da adlandırılır. Adi diferansiyel denklemlerin aksine, sonsuz boyutlu fonksiyonel diferansiyel denklemler sınıfına aittirler. Zaman gecikmesi genellikle birçok kontrol sisteminde (uçak, kimyasal veya iletişim ağları gibi kontrol sistem süreçlerinde), hem kontrol girişi hem de ölçüm durumlarında görülür. Böylece, taşıma, iletişim veya ölçüm gecikmeleri olabilir. Kontrol sistemleri, öncelikle karar verme için gereken bilgileri elde etmek, kontrol kararları oluşturmak ve bu kararları uygulamak için gereken süre nedeniyle, genellikle gecikmelerin varlığında çalışır. Geri bildirim döngülerine dahil olan aktüatörler, sensörler ve saha ağları genellikle gecikmelere neden olur. Gecikmeler, iletişim ve bilgi teknolojilerinin, ağ bağlantılı kontrol sistemlerinin kararlılığı veya yüksek hızlı iletişim ağları gibi zorlu alanlarında sıkça görülür (Richard, 2003).

Aşağıdaki olayların modellenmesi, gecikmeli diferansiyel denklemler olarak ortaya çıkar.

- Örneklenmiş veri kontrolü ve ağa bağlı kontrol sistemi
- İletişim ağlarında tıkanıklık kontrolü
- Delme sistemi modeli
- Tünel diyotlu uzun hat ve lazer modeli
- Araç trafiği akışları
- Sinir ağları, nüfus dinamikleri ve salgın modeller (Fridman, 2014).

Logaritmik kaynak terimli denklemler ise nükleer fizikte, kuantum alan teorisinde,

kozmik enflasyon, süpersimetri alan teorisinde ortaya çıkmaktadır (Birula ve Mycielski 1976).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde amacımız, aşağıdaki gecikmeli terim içeren logaritmik kaynak terimli

$$u_{tt} - \Delta_e u + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, u_t(x, t-s)\, ds + \mu_1 u_t(x,t) = u\,|u|^{p-2} \ln |u|^k,$$

Lamé denkleminin iyi konulmuşluğunu, global varlığını ve üstel azalmasını çalışmaktır. Lamé denkleminin en temel hali

$$u_{tt} - \Delta_e u = 0$$

dır. Burada

$$\Delta_e u = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} u),$$

$\mu > 0,\ \lambda + \mu \geq 0$. Bu denklem, izotropik elastikiyet için koruma yasasını tanımlayan klasik bir modeldir. Ayrıca kaynak terimi logaritmik olup, logaritmik kaynak terime sahip denklemler nükleer fizikte, kuantum alan teorisinde, kozmik enflasyon, süpersimetri alan teorisinde ortaya çıkmaktadır (Birula ve Mycielski 1976).
Aşağıda literatürde olan ilgili çalışmalar verilmiştir.

Messaoudi ve ark. (2016)

$$u_{tt} - \Delta u \ - \ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, \Delta u_t(x, t-s)\, ds - \mu_1 \Delta u_t(x,t) = 0,$$

güçlü sönüm terimli dalga denkleminin enerji azalmasını çalışmışlardır.

Beniani ve ark. (2016)

$$u_{tt} - \Delta_e u \ + \ \mu_2 g_2(u_t(x, t - \tau(s))) + \mu_1 g_1(u_t(x,t)) = 0,$$

denkleminin çözümlerinin enerjisinin azalmasını incelediler.

Taouaf ve ark. (2018)

$$u_{tt} - \Delta_e u \ + \ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, u_t(x, t-s)\, ds + \mu_1 u_t(x,t) = 0,$$

dağılımlı gecikmeli terim içeren Lamé sisteminin iyi konulmuşluğunu ve enerji azalmasını çalışmışlardır.

Kafini ve Messaoudi (2020)

$$u_{tt} - \Delta u + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau) = |u|^{p-2} u \ln |u|^k,$$

logaritmik kaynak terimli gecikmeli dalga denklemini çalıştılar. Denklemin global varlığını ve negatif başlangıç enerjisi için patlamasını ispatladılar.

Kafini ve Messaoudi (2020)

$$u_{tt} - \Delta u + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau) = |u|^{p-2} u,$$

polinomal kaynak terimli gecikmeli dalga denklemini çalıştılar. Denklemin global varlığını ve pozitif başlangıç enerjisi için patlamasını ispatladılar.

Kafini (2021)

$$u_{tt} - \Delta u + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x,t-s)\, ds + \mu_1 u_t(x,t) = u|u|^{p-2} \ln |u|^k,$$

gecikmeli terim içeren lineer olmayan dalga denkleminin lokal varlığını ve üstel azalmasını incelemiştir.

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümler için gerekli olan tanımlar, teoremler, eşitsizlikler yer almaktadır (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Evans, 1998; Kesevan, 2003; Pişkin, 2017).

Lebesgue Uzayı $(L^p(\Omega))$

Tanım 3.1.1. Ω, R^n de ölçülebilir bir bölge olsun. u ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, yani

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

ise $u(x)$ fonksiyonları p. kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır, ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir. Bu şartı sağlayan tüm u fonksiyonlarının uzayına L^p Lebesgue uzayı denir. Burada L^p uzayının elemanları $\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$ şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıfıdır.
Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır. $L^p(\Omega)$ uzayı bu norm ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.1.2. Ω, R^n uzayında bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Ω bölgesinde her kompakt altkümesinde p. kuvveti integrallenebilir bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L^p_{loc}(\Omega)$ uzayıdır.

Tanım 3.1.3. $vol(\Omega) = \int_\Omega dx < \infty$ (Ω bölgesi sınırlı), $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Bu durumda $u \in L^q(\Omega)$ ise $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq c \|u\|_q$$

dır. Burada $c = (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)}$ dır. Yani

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.1.4. $L^2(\Omega)$,

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\,\overline{v(x)}dx$$

iç çarpımına göre Hilbert uzaydır.

Tanım 3.1.5. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $\|u(.)\|_X \in L^p(a,b)$ koşulunu sağlayan (a,b) den X e tanımlanmış u fonksiyonlar uzayı $L^p(a,b;X)$ *uzayı*dır ve bu uzay

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p\, dt\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \underset{t\in(a,b)}{ess\sup} \|u(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile Banach uzaydır.

Benzer şekilde $a < c < d < b$ şartıyla her bir c, d için $u \in L^p(c,d;X)$ ise, o zaman $u \in L^p(a,b;X)$ yazılır ve $p = 1$ için u *lokal integrallenebilirdir* denir.

Tanım 3.1.6. $[0,T]$ den X e tanımlanmış $m.$ mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonlar uzayı $C^m([0,T];X)$ *uzayı*dır ve

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{t\in[0,T]} \|D^\alpha u(t)\|_X$$

normu ile Banach uzaydır.

3.2. Sobolev Uzayı $(W^{m,p}(\Omega))$

Tanım 3.2.1. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu-indisi verilsin. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

ise $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u nun α. *zayıf türevi* denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.2.2. Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir ve bu uzay

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

normları ile Banach uzaydır. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ dır. Burada

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.2.3. $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ dır. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.4. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

iç çarpımı ile Hilbert uzaydır. Burada $(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ şeklinde $L^2(\Omega)$ deki iç çarpımdır.
$H_0^1(\Omega)$ uzayında iç çarpım

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

dır ve norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 dx\right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.6. (**Sobolev Gömülme Teoremi).** Ω, R^n de koni özeliğine sahip açık bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

(i) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.
(ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

veya

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

dır. Ayrıca $p = 1$ ise

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.

(iii) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

veya

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

dır.

Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

dır.

$W^{m,p}$ yerine $W_0^{m,p}$ uzayı alınırsa, Ω bölgesinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın gömülmeler yine geçerli olur.

Teorem 3.2.7. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi bazı $p \leq q$ değerleri için kompakt ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ olur.

Teorem 3.2.8. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi $1 \leq q < p$ özelliğini sağlayan bazı p ve q değerleri için mevcut ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ olur.

3.3. Eşitsizlikler

Lemma 3.3.1. (**Young Eşitsizliği**). $\varepsilon > 0$, $a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

ve

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dır.

Lemma 3.3.2. (**Hölder Eşitsizliği**). $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır. $p = 1$ ise $q = \infty$ ve $\|v\|_q = ess \sup_{\Omega} |v|$ alırız.
$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği denir.

Lemma 3.3.3. (**Green Özdeşliği**). $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ olmak üzere

$$\int_\Omega v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

dır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n.\nabla u$ dır.

Lemma 3.3.4. (**Sobolev-Poincare Eşitsizliği**).

$$\begin{cases} 2 \leq q < \infty; & n = 1, 2 \\ 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}; & n \geq 3 \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_q \leq c \|\nabla u\|_2$$

dır. Burada $c = c(\Omega, p)$ dır.

3.4. Fourier Serisi

Tanım 3.4.1.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

serisine *Fourier serisi* veya *Trigonometrik seri* denir. Burada $\cos nx$ ve $\sin nx$ fonksiyonları 2π periyotlu olduklarından verilen seri yakınsak ise $f(x)$ fonksiyonu da 2π periyotlu olur.

Tanım 3.4.2. (Parseval Özdeşliği). a_0, a_n ve b_n Fourier serisinin katsayıları ve f Dirichlet koşullarını sağlıyorsa

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Fourier serisi yazılabilir. Bu serinin her iki tarafını $f(x)$ ile çarpıp, $(-L, L)$ aralığında integrallersek

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} [f(x)]^2 dx &= \int_{-L}^{L} f(x) \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \end{aligned}$$

olur. Daha önce elde ettiğimiz

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \\ a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases}$$

Fourier katsayıları göz önünde bulundurulursa

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe *Parseval özdeşliği* denir.

3.5. Yarıgrup Metodu

Bu kısımda diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ile ilgili önemli bir metod olan yarıgrup metodu ile ilgili temel kavramları vereceğiz (Zhang, 2003). Öncelikle aşağıdaki ısı problemini ele alalım:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \in L^2(0,\pi) \end{cases} \tag{3.5.1}$$

bu problem değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülürse

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin kx \tag{3.5.2}$$

Fourier serisi bulunur.

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin kx dx \tag{3.5.3}$$

dır. $u_0 \in L^2$ olduğundan, Parseval özdeşliğinden

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0^2(x)\, dx \tag{3.5.4}$$

olur. Ayrıca, $t \to 0$ için

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left(u(x,t) - u_0(x)\right)^2 dx &= \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(e^{-k^2 t} - 1\right) \sin kx \right|^2 dx \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left(e^{-k^2 t} - 1\right)^2 \to 0, \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

dır. Böylece, $S(t)$ dönüşümü altında $u_0(x)$ in görüntüsü $u(x,t)$ olur. Yani

$$u(x,t) = S(t)\, u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin kx. \tag{3.5.6}$$

yazılabilir. Şimdi (3.5.6) da verilen $S(t)$ nin bazı özelliklerini ifade edelim:

(i) $S(0) = I$ dır.

(ii) $t_1, t_2 \geq 0$ için

$$\begin{aligned} S(t_1)\, S(t_2)\, u_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k e^{-k^2 t_1}\right) e^{-k^2 t_2} \sin kx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 (t_1 + t_2)} \sin kx \\ &= S(t_1 + t_2)\, u_0(x) \end{aligned}$$

olduğundan

$$S(t_1+t_2) = S(t_1)\,S(t_2) = S(t_2)\,S(t_1)$$

yazılabilir.

(iii) Parseval özdeşliğinden

$$\begin{aligned} \|u(x,t)\|^2 &= \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 e^{-2k^2t} \\ &\leq e^{-2t}\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \\ &= e^{-2t}\|u_0\|^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\|S(t)\|^2 \leq 1$$

dır.

(iv) $u_0 \in L^2(0,\pi)$ için $S(t)\,u_0 \in C([0,\infty), L^2(0,\pi))$ dır.

Genel olarak bu dört özelliği sağlayan tek parametreli $\{S(t);\ t \geq 0\}$ operatörü dönüşümlerin yarıgrubu (semigroup) olarak adlandırılır.

3.5.1. Sonsuz Küçük Üreteç

Kabul edelim ki $\{S(t);\ t \geq 0\}$, B Banach uzayında tanımlı daralmaların (büzülmelerin) bir lineer yarıgrubu olsun. B nin bir alt kümesini D ile gösterelim, öyle ki $x \in D$ için $S(t)\,x$, $t = 0$ noktasında sağdan türevlenebilirdir. Yani

$$D = \left\{ x \in B \,\middle|\, \lim_{h\to+0} \frac{S(h)\,x - x}{h} \right\} \tag{3.5.1.1}$$

mevcuttur. $x \in D$ için

$$-Ax = \lim_{h\to+0} \frac{S(h)\,x - x}{h} \tag{3.5.1.2}$$

dır. A nın, D üzerinde tanımlı bir lineer operatör olduğu açıktır ve genellikle $S(t)$ nin sonsuz küçük üreteci olarak adlandırılır. A ve $S(t)$ arasında çok yakın bir ilişki olduğunu göreceğiz. Tanımdan, $S(t)$ biliniyorsa, bu durumda A yı (3.5.1.2)

den elde edebiliriz. Diğer yandan, A verilmişse, $S(t)$ nin A tarafından üretildiğini göreceğiz.

Lemma 3.5.1.1. $x \in D$ için, $S(t)x \in C^1([0,+\infty), B)$ dir. Ayrıca, $t > 0$ için

$$x - S(t)x = \int_0^t AS(\tau)x d\tau = \int_0^t S(\tau)Ax d\tau \tag{3.5.1.3}$$

ve

$$\frac{d(S(t)x)}{dt} + A(S(t)x) = 0 \tag{3.5.1.4}$$

dır.

İspat. $x \in D$ ve $h > 0$ için

$$\frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = \frac{(S(h) - I)S(t)x}{h} = S(t)\frac{S(h) - I}{h}x \tag{3.5.1.5}$$

dir. $h \to +0$ iken, yukarıda verilen üçüncü terimin limiti vardır, böylece ikinci terimin de limiti olur, bundan dolayı $S(t)x \in D$ ve

$$-AS(t)x = -S(t)Ax \tag{3.5.1.6}$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan,

$$\frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} = \frac{S(t-h)(S(h) - I)x}{h} \tag{3.5.1.7}$$

ve $S(t)x \in C([0,+\infty), B)$ den $h \to 0$ iken (3.5.1.7) nin limiti vardır ve $-S(t)Ax$ dir. Önceki verilerden $S(t)x \in C^1([0,+\infty), B)$ olur ve

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = -S(t)Ax = -AS(t)x \tag{3.5.1.8}$$

sağlanır. Buradan t ye göre integral alırsak (3.5.1.3) ü elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Not. (3.5.1.4) den $x \in D$ için $u = S(t)x$, aşağıda verilen, soyut birinci mertebeden evolüsyon denklemli başlangıç değer probleminin klasik bir çözümüdür:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{3.5.1.9}$$

Lemma 3.5.1.2 A kapalı bir operatördür.

İspat. Kapalı operatörün tanımından eğer B de, $x_n \to x$ ve $Ax_n \to y$ iken, $x_n \in D$ ise, bu durumda $x \in D$ ve $y = Ax$ dir.

$h > 0$ için (3.5.1.3) ten

$$\frac{x_n - S(h)x_n}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h AS(\tau)x_n d\tau = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Ax_n d\tau \tag{3.5.1.10}$$

olur. $n \to +\infty$ olsun, $h \to 0$ iken

$$\frac{1}{h}(x - S(h)x) = \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)y d\tau \to y \tag{3.5.1.11}$$

olur. Böylece, $x \in D$ ve $Ax = y$ dir ve ispat tamamlanır.

$x \in D(A) = D$ için

$$\|x\|_{D(A)} = \left(\|x\|^2 + \|Ax\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.5.1.12}$$

tanımlayalım. B de normu kısaca $\|.\|$ ile gösterelim. A kapalı bir operatör olduğundan, $D(A)$, bir Banach uzayında, (3.5.1.12) de tanımlı norm ile eşleşir ve B de sürekli olarak gömülür.

Lemma 3.5.1.3 D, B de yoğun olsun. Ayrıca, herhangi $x \in B$ ve $t > 0$ için,

$$\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D$$

ve

$$x - S(t)x = A\int_0^t S(\tau)x d\tau \tag{3.5.1.13}$$

dır.

İspat. Her $x \in B$ için,

$$x_t = \int_0^t S(\tau)x d\tau, \tag{3.5.1.14}$$

olsun. Bu durumda, $h > 0$ için, $h \to 0$ iken,

$$\begin{aligned} \frac{-S(h)x_t + x_t}{h} &= \frac{\int_0^t S(\tau)x d\tau - \int_0^t S(\tau+h)x d\tau}{h} \\ &= \frac{\int_0^t S(\tau)x d\tau - \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau}{h} \to x - S(t)x \end{aligned} \tag{3.5.1.15}$$

olur. Bundan dolayı, $x_t \in D$ ve $Ax_t = x - S(t)x$ dir. Bu (3.5.1.13) u sağlar. Diğer taraftan, $t > 0$ için, $t \to 0$ iken,

$$\frac{x_t}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)x d\tau \to x \tag{3.5.1.16}$$

olur. Böylece, B deki D nin yoğunluğu ispatlanır.

Verilen lemmalar, bir B banach uzayındaki $S(t)$ daralmalarının, lineer yarıgruplarının, sonsuz küçük bir üretecinin yoğun tanımlı bir operatör olduğunu gösterir. Bir sonraki bölümde, daralmaların bir lineer yarıgrubunun, bir sonsuz küçük üretecinin, ne tür yoğun tanımlı operatör olduğunu göstereceğiz.

3.5.2. Hille-Yosida Teoremi

Hille-Yosida Teoremi, bir Banach uzayında daralma dönüşümlerinin bir yarılineer grubunun, sonsuz küçük bir üretecinin, yoğun tanımlı bir operatör olması için yeterli ve gerekli koşulları göstermektedir.

Teorem 3.5.2.1 A, bir Banach uzayında tanımlı lineer bir operatör olsun,

$$A : D(A) \subset B \longmapsto B$$

dır. Bu durumda, A nın daralmaların yarıgruplarının bir sonsuz küçük üretecinin olması için yeterli ve gerekli koşullar:

(i) A, B de yoğun bir operatördür.

(ii) Her $\lambda > 0$ için, $\lambda I + A$ bire-bir ve örtendir ve

$$\left\|(\lambda I + A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

dır.

İspat. Öncelikle gerekliliği ispatlayalım. A, $S(t)$ daralmaların (dönüşümlerinin) bir yarılineer grubunun sonsuz küçük bir üreteci olsun. Bu durumda lemma (3.5.1.2) ve (3.5.1.3) ten, A yoğun tanımlı bir operatördür. Herhangi bir $\lambda > 0$ için, ayrıca $\left\{e^{-\lambda t}S(t);\ t \geq 0\right\}$, daralmaların bir lineer yarıgrubudur, açıktır ki aynı D bölgesinde $\lambda I + A$ sonsuz küçük bir üretece sahiptir. (3.5.1.3) ve (3.5.1.13) ü bu yarıgruba uygularsak, her $x \in D$ ve $y \in B$, ve $t \geq 0$ için

$$x - e^{-\lambda t}S(t)x = \int_0^t e^{-\lambda \tau}S(\tau)(\lambda I + A)x d\tau, \tag{3.5.2.1}$$

$$y - e^{-\lambda t}S(t)y = (\lambda I + A)\int_0^t e^{-\lambda \tau}S(\tau)y d\tau \tag{3.5.2.2}$$

elde ederiz.

$$\left\|e^{-\lambda t}S(t)y\right\| \leq e^{-\lambda t}\|y\|$$

olduğundan ve sonraki $[0,+\infty)$ üzerinde integrallenebilir olduğundan,

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} S(\tau)\, y d\tau$$

vardır ve

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} e^{-\lambda\tau} S(\tau)\, y d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} S(\tau)\, y d\tau \tag{3.5.2.3}$$

olur. (3.5.2.2) de $t \to +\infty$ olsun.

$$\int_0^{t} e^{-\lambda\tau} S(\tau)\, y d\tau \in D$$

ve $t \to +\infty$ iken, (3.5.2.2) nin sol tarafındaki terimin limiti olduğundan, $\lambda I + A$ kapalı bir operatör olur, yani

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} S(\tau)\, y d\tau \in D$$

ve

$$y = (\lambda I + A) \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} S(\tau)\, y d\tau \tag{3.5.2.4}$$

olur ki, $\lambda I + A$ nın D den B ye bir operatör olmasını belirtir. Diğer yandan, (3.5.2.1) de $t \to +\infty$ olsun,

$$x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} S(\tau)\, (\lambda I + A)\, x d\tau \tag{3.5.2.5}$$

elde ederiz, bu $\lambda I + A$ nın D den B ye bire-bir operatör olduğunu gösterir. Böylece (3.5.2.4) ten

$$\begin{aligned} \left\| (\lambda I + A)^{-1} y \right\| &\leq \left\| \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} S(\tau)\, y d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} d\tau \, \|y\| = \frac{1}{\lambda} \|y\| \end{aligned} \tag{3.5.2.6}$$

$$\left\| (\lambda I + A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\lambda} \tag{3.5.2.7}$$

dır. Böylece ispatın gerekliliği tamamlanır.

Şimdi ispat için yeterliliği üç koşulda verelim:

(i) A ya yaklaşan A_λ sınırlı operatörlerinin bir dizisini oluşturalım;

(ii) A_λ ya karşılık gelen

$$S_\lambda(t) = e^{-tA_\lambda}$$

daralmalarının lineer yarıgruplarını oluşturalım;

(iii)

$$\lim_{\lambda \to 0} S_{\lambda}(t) = S(t)$$

limitin varlığını ispatlayalım ve $S(t)$ daralmaların istenen lineer yarıgrubudur.

Teorem 3.5.2.2 (Lax-Milgram). V bir Hilbert uzayı ve $a(.,.)$ sürekli bir V eliptik-bilineer form olsun. $f \in V$ verildiğinde, bir tek $u \in V$ vardır, öyle ki her $v \in V$ için,

$$a(u, v) = (f, v)$$

dır (Kesavan, 2003).

Teorem 3.5.2.3. $\mathcal{A}$ lineer operatörü, düzgün sürekli yarıgrubun sonsuz küçük üreteci ise ancak ve ancak sınırlı lineer operatördür (Komornik, 1994; Pazy, 1983).

4. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ LAMÉ SİSTEMİ

Dördüncü bölüm üç kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda gecikmeli terim içeren logaritmik kaynak terimli Lamé denkleminin iyi konulmuşluğu, ikinci kısımda global varlığı, üçüncü kısımda ise denklemin üstel azalması çalışılmıştır.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_e u + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, u_t(x, t-s)\, ds + \mu_1 u_t(x,t) = u\,|u|^{p-2} \ln |u|^k, & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega \\ u_t(x,-t) = f_0(x,t), & \Omega \times (0, \tau_2) \\ u(x) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

burada Ω bölgesi R^3 te, $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. k, μ_1 pozitif sabitlerdir, (u_0, u_1, f_0) başlangıç verileridir. Burada

$$\Delta_e u = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} u), \qquad u = (u_1, u_2, u_3)^T$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\mu > 0, \qquad \lambda + \mu \geq 0 \tag{4.2}$$

şartlarını sağlayan μ ve λ Lamé sabitleridir. Ayrıca, $\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \to R$ sınırlı bir fonksiyon ve $\tau_1 < \tau_2$ olacak şekilde iki pozitif sabittir.

4.1. İyi Konulmuşluk

Bu bölümde (4.1) probleminin çözümünün varlık ve tekliğini yarıgrup metodunu kullanarak ispatlayacağız. Nicaise ve Pignotti'nin (2006) çalışmasından faydalanarak

$$z(x, \rho, t, s) = u_t(x, t - \rho s)$$

fonksiyonu tanımlayalım. Burada $t - \rho s = k$ alınırsa $z = u_t(x,k)$ olur. Zincir kuralı uygulanırsa

$$z_t = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u_t(x,k)}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial t}\frac{\partial u_t(x,k)}{\partial k} = \frac{\partial u_t(x,k)}{\partial k} \tag{4.1.1}$$

ve

$$z_\rho = \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial u_t(x,k)}{\partial \rho} = \frac{\partial k}{\partial \rho}\frac{\partial u_t(x,k)}{\partial k} = -s\frac{\partial u_t(x,k)}{\partial k} \tag{4.1.2}$$

bulunur. Görüldüğü üzere (4.1.1) denklemi s ile çarpılır ve (4.1.2) denklemi ile taraf tarafa toplanırsa

$$sz_t(x,\rho,t,s)+z_\rho(x,\rho,t,s)=0$$

elde edilir. Bu dönüşümü kullanırsak (4.1) problemimiz

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta_e u+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\,z(x,1,t,s)\,ds+\mu_1 u_t(x,t)=u|u|^{p-2}\ln|u|^k, & \Omega\times R^+,\\ sz_t(x,\rho,t,s)+z_\rho(x,\rho,t,s)=0, & \Omega\times(0,1)\times(0,\infty)\times(\tau_1,\tau_2)\\ u=0, & \partial\Omega\times R^+\\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x) & \Omega\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)\\ z(x,\rho,0,s)=f_0(x,-\rho s) & \Omega\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2) \end{cases} \tag{4.1.3}$$

formatına dönüşür.

$v=u_t$ alalım ve

$$\Phi=(u,v,z)^T, \tag{4.1.4}$$

$$\Phi(0)=\Phi_0=(u_0,u_1,f_0(.,\rho s))^T, \tag{4.1.5}$$

$$J(\Phi)=\left(0,u|u|^{p-2}\ln|u|^k,0\right)^T. \tag{4.1.6}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece (4.1.3) problemi

$$\begin{cases} \Phi_t+\mathcal{A}\Phi=J(\Phi)\\ \Phi(0)=\Phi_0, \end{cases} \tag{4.1.7}$$

başlangıç değer problemi olarak yeniden yazılabilir. Burada $\mathcal{A}:D(\mathcal{A})\to\mathcal{H}$ lineer operatörü

$$\mathcal{A}\Phi=\mathcal{A}\begin{pmatrix} u\\ v\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -v\\ -\Delta_e u+\mu_1 v+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\,z(x,1,t,s)\,ds\\ \frac{1}{s}z_\rho(x,\rho,t,s)\end{pmatrix} \tag{4.1.8}$$

olarak tanımlanır.

(4.1.3) probleminin (4.1.7) problemine dönüştürülebildiğini gösterelim: (4.1.4) teki ifadenin t değişkenine göre türevini alırsak

$$\Phi_t=(u_t,u_{tt},z_t)^T$$

elde edilir. $v = u_t$ olduğundan $v_t = u_{tt}$ olur. (4.1.3) probleminden

$$u_{tt} = u\left|u\right|^{p-2}\ln\left|u\right|^{k} + \Delta_e u - \mu_1 v - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2\left(s\right) z\left(x,1,t,s\right) ds$$

ve

$$z_t = -\frac{1}{s} z_\rho$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{pmatrix} v \\ u\left|u\right|^{p-2}\ln\left|u\right|^{k} + \Delta_e u - \mu_1 v - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2\left(s\right) z\left(x,1,t,s\right) ds \\ -\frac{1}{s} z_\rho\left(x,\rho,t,s\right) \end{pmatrix} + \mathcal{A}\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ u\left|u\right|^{p-2}\ln\left|u\right|^{k} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_t + \mathcal{A}\Phi = J\left(\Phi\right)$$

olur. Şimdi

$$L_s^2\left(\tau_1,\tau_2\right) = \left\{ w : \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left|w\left(s\right)\right|^2 ds < \infty \right\},$$

tanımlayalım. Φ,

$$\mathcal{H} = H_0^1\left(\Omega\right) \times L^2\left(\Omega\right) \times L^2\left(\Omega \times \left(0,1\right); L_s^2\left(\tau_1,\tau_2\right)\right),$$

Hilbert uzayında tanımlıdır. $\mathcal{H}$ deki her $\Phi = \left(u,v,z\right)^T$ ve $\widetilde{\Phi} = \left(\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{z}\right)^T$ için iç çarpım

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi, \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega v\widetilde{v}dx + \mu\int_\Omega \nabla u \nabla \widetilde{u} dx + \left(\lambda+\mu\right)\int_\Omega \operatorname{div} u \operatorname{div} \widetilde{u} dx \\ &\quad + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\mu_2\left(s\right) \int_0^1 z\left(x,\rho,t,s\right) \widetilde{z}\left(x,\rho,t,s\right) d\rho ds dx \end{aligned}$$

şeklindedir. $\mathcal{A}$ nın tanım kümesi

$$D\left(\mathcal{A}\right) = \left\{ \begin{array}{c} \Phi \in \mathcal{H} : u \in H^2\left(\Omega\right),\ v \in H_0^1\left(\Omega\right),\ z\left(.,1,.\right) \in L^2\left(\Omega\right) \\ z, z_\rho \in L^2\left(\Omega \times \left(0,1\right); L_s^2\left(\tau_1,\tau_2\right)\right),\quad z\left(.,0,.\right) = v \end{array} \right\}$$

dir.

Teorem 4.1.1 Kabul edelim ki

$$\mu_1 > \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2\left(s\right) ds$$

ve

$$2 < p < 4 \tag{4.1.9}$$

olsun. Bu durumda herhangi bir $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ için (4.1.7) probleminin $\Phi \in C([0,T);\mathcal{H})$ uzayında bir tek lokal zayıf çözümü vardır.

İspat. Önce $\mathcal{A}$ nın monoton olduğunu gösterelim: $\Phi \in D(\mathcal{A})$ için

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} &= -\mu \int_\Omega \nabla u(x,t)\, \nabla v(x,t)\, dx - (\lambda+\mu) \int_\Omega \operatorname{div} u(x,t) \operatorname{div} v(x,t)\, dx \\
&\quad + \int_\Omega \left[-\Delta_e u + \mu_1 v(x,t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, z(x,1,t,s)\, ds \right] v(x,t)\, dx \\
&\quad + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \int_0^1 z(x,\rho,t,s)\, z_\rho(x,\rho,t,s)\, d\rho ds dx \\
&= -\mu \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - (\lambda+\mu) \int_\Omega \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx \\
&\quad + \int_\Omega \begin{bmatrix} -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div} u) + \mu_1 v \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, z(x,1,t,s)\, ds \end{bmatrix} v dx \\
&\quad + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \int_0^1 z(x,\rho,t,s)\, z_\rho(x,\rho,t,s)\, d\rho ds dx \\
&= -\mu \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - (\lambda+\mu) \int_\Omega \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx \\
&\quad + \int_\Omega \begin{bmatrix} -\mu v\Delta u - (\lambda+\mu) v\nabla(\operatorname{div} u) + \\ \mu_1 v^2 + v\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, z(x,1,t,s)\, ds \end{bmatrix} dx \\
&\quad + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \int_0^1 z(x,\rho,t,s)\, z_\rho(x,\rho,t,s)\, d\rho ds dx
\end{aligned}$$

dır. Green özdeşliğinden

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} &= -\mu \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - (\lambda+\mu) \int_\Omega \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx + \mu \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \\
&\quad + (\lambda+\mu) \int_\Omega \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx + \mu_1 \int_\Omega |v|^2 dx \\
&\quad + \int_\Omega v \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, z(x,1,t,s)\, ds dx \\
&\quad + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \int_0^1 z(x,\rho,t,s)\, z_\rho(x,\rho,t,s)\, d\rho ds dx
\end{aligned}$$

olur. Son olarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} &= \mu_1 \int_\Omega |v|^2 dx + \int_\Omega v \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, z(x,1,t,s)\, ds dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} |z(x,\rho,t,s)|^2 d\rho ds dx \\ &\geq \mu_1 \int_\Omega |v|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |v|^2 ds dx \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z(x,1,t,s)|^2 ds dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z(x,1,t,s)|^2 ds dx \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z(x,0,t,s)|^2 ds dx \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

elde edilir. Burada Young eşitsizliğini kullanarak (4.1.10) denklemi

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} &\geq \mu_1 \int_\Omega |v|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |v|^2 ds dx \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |v|^2 ds dx \\ &= \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) ds\right) \int_\Omega |v|^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\mathcal{A}$ bir monoton operatördür.

Şimdi $I + \mathcal{A}$ nın örten olduğunu gösterelim:

$$F = (f, g, h)^T \in \mathcal{H}$$

için, öyle bir $V = (u, v, z)^T \in D(\mathcal{A})$ vardır ki $(I + \mathcal{A}) V = F$ dir. Bu da

$$\begin{cases} u - v = f \\ v - \Delta_e u + \mu_1 v + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, z(x,1,t,s)\, ds = g \\ sz(x,\rho,t,s) + z_\rho(x,\rho,t,s) = sh \end{cases} \tag{4.1.11}$$

şeklindedir. $z(0) = u_t = v$ ve $v = u - f$ alınırsa, (4.1.11) in üçüncü denkleminden

$$z(x,t,\rho,s) = (u - f) e^{-\rho s} + s e^{-\rho s} \int_0^\rho h(x,\sigma) e^{\sigma s} d\sigma \tag{4.1.12}$$

yazılır. (4.1.11) in ikinci denklemi

$$Ku - \Delta_e u = G,$$

olur, burada

$$\begin{aligned} K &= 1+\mu_1+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\,e^{-s}ds>0 \\ G &= g+\left(1+\mu_1+\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-s}\mu_2(s)\,ds\right)f \\ &\quad -\int_{\tau_1}^{\tau_2}se^{-s}\mu_2(s)\int_0^1 h(x,\sigma)\,e^{\sigma s}d\sigma \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

dır. Şimdi, $H_0^1(\Omega)$ uzayında bilineer ve lineer formlarını

$$\begin{aligned} B(u,w) &= K\int_\Omega uwdx+\mu\int_\Omega \nabla u\nabla w dx+(\lambda+\mu)\int_\Omega \operatorname{div}u\operatorname{div}w dx, \\ L(w) &= \int_\Omega Gw dx \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. B nin sürekli ve zorlayıcı ve L nin de $H_0^1(\Omega)$ uzayında sürekli olduğunu göstermek kolaydır. Bu durumda Lax-Milgram teoremi

$$B(u,w)=L(w),\quad \forall w\in H_0^1(\Omega) \tag{4.1.14}$$

eşitliğinin $u\in H_0^1(\Omega)$ uzayında tek bir çözüme sahip olduğunu belirtir. Böylece $v=u-f\in H_0^1(\Omega)$ dır.
Sonuç olarak (4.1.12) den

$$z,z_\rho\in L^2(\Omega\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2))\quad ve\quad z(.,0,.)=v$$

olur.
Böylece, $V\in\mathcal{H}$ dır. (4.1.14) ten her $w\in H_0^1(\Omega)$ için,

$$K\int_\Omega uwdx+\mu\int_\Omega\nabla u\nabla w dx+(\lambda+\mu)\int_\Omega\operatorname{div}u\operatorname{div}w dx=\int_\Omega Gw dx$$

sonucuna varırız.
Eliptik düzgünlük teorisi, $u\in H^2(\Omega)$ olduğunu belirtir. Ayrıca, Green formülünden

$$K\int_\Omega uwdx-\int_\Omega w\Delta_e u-\int_\Omega Gw=0,\quad \forall w\in H_0^1(\Omega)$$

elde ederiz ve (4.1.13) ü kullanarak

$$\int_\Omega\left[(1+\mu_1)v-\Delta_e u+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\,z(.,1,s)\,ds-g\right]w=0,\quad \forall w\in H_0^1(\Omega)$$

elde ederiz. Buradan

$$(1+\mu_1)\,v - \Delta_e u + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, z(.,1,s)\, ds = g \in L^2(\Omega)$$

eşitliği elde edilir. Bu sebeple

$$V = (u,v,z)^T \in D(\mathcal{A})$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, $I+\mathcal{A}$ örtendir dolayısıyla $\mathcal{A}$ maksimaldir. Son olarak, $J:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ lokal Lipschitz olduğunu gösterelim. Bunun için

$$f(s) = |s|^{p-2} s \ln |s|^k, \quad |s| \neq 0 \;\text{ ve }\; f(s) = 0, \quad |s| = 0$$

seçelim. Buradan çarpımın türevini alırsak

$$\begin{aligned} f'(s) &= k\left[(p-1)\,|s|^{p-2}\ln|s| + |s|^{p-1}\frac{1}{s}\right] \\ &= k\left[(p-1)\,|s|^{p-2}\ln|s| + |s|^{p-2}\right] \\ &= k\left[1+(p-1)\ln|s|\right]|s|^{p-2} \end{aligned}$$

elde edilir, burada $|s|\neq 0$ ve $f'(s)=0$, $|s|=0$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned} \left\| J(\Phi) - J\left(\widetilde{\Phi}\right)\right\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left\| \left(0, |u|^{p-2}u\ln|u|^k - |\widetilde{u}|^{p-2}\widetilde{u}\ln|\widetilde{u}|^k, 0\right)\right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \left\| |u|^{p-2}u\ln|u|^k - |\widetilde{u}|^{p-2}\widetilde{u}\ln|\widetilde{u}|^k \right\|_{L^2}^2 \\ &= \|f(u) - f(\widetilde{u})\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

olur. $c = \theta u + (1-\theta)\,\widetilde{u}$ olmak üzere ortalama değer teoreminden

$$f'(c) = \frac{f(u) - f(\widetilde{u})}{u - \widetilde{u}}$$

olduğunu biliyoruz. Ortalama değer teoreminin sonucu olarak, $0 \leq \theta \leq 1$ aralığında bazı θ değerleri için,

$$\begin{aligned} |f(u) - f(\widetilde{u})| &= |f'(\theta u + (1-\theta)\,\widetilde{u})\,(u-\widetilde{u})| \\ &= k\left|[1+(p-1)\ln|\theta u + (1-\theta)\,\widetilde{u}|]\,|\theta u + (1-\theta)\,\widetilde{u}|^{p-2}(u-\widetilde{u})\right| \\ &\leq k\left[1+(p-1)\,|\ln|\theta u + (1-\theta)\,\widetilde{u}||\right]|\theta u + (1-\theta)\,\widetilde{u}|^{p-2}\,|u-\widetilde{u}| \\ &= k(p-1)\,|\ln|\theta u + (1-\theta)\,\widetilde{u}||\,|\theta u + (1-\theta)\,\widetilde{u}|^{p-2}\,|u-\widetilde{u}| \\ &\quad + k\,|\theta u + (1-\theta)\,\widetilde{u}|^{p-2}\,|u-\widetilde{u}| \end{aligned}$$

elde ederiz. Son eşitsizlikten ortaya çıkan

$$\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}$$

logaritmik terim için $\forall\varepsilon>0$ için

$$\lim_{|s|\to+\infty}\frac{\ln|s|}{|s|^{\varepsilon}}=0$$

olduğundan,

$$\frac{\ln|s|}{|s|^{\varepsilon}}<1,\quad\forall\,|s|>B$$

olacak şekilde bir $B>0$ vardır. Bu sebeple, $|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|>B$ olduğunda

$$\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\leq|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{\varepsilon}$$

ve

$$\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}\leq|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2+\varepsilon}$$

olur. $p>2$ olduğundan, bazı $A>0$ ve $|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\leq B$ için

$$\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}\leq A$$

olur. Böylece,

$$\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}\leq A+|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2+\varepsilon}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu durumda aşağıdaki kestirim

$$\begin{aligned}|f(u)-f(\widetilde{u})| &\leq k(p-1)|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2+\varepsilon}|u-\widetilde{u}|\\ &\quad+k|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}|u-\widetilde{u}|\\ &\quad+kA(p-1)|u-\widetilde{u}|\\ &\leq k(p-1)(|u|+|\widetilde{u}|)^{p-2+\varepsilon}|u-\widetilde{u}|+k(|u|+|\widetilde{u}|)^{p-2}|u-\widetilde{u}|\\ &\quad+kA(p-1)|u-\widetilde{u}| \qquad (4.1.15)\end{aligned}$$

yazılabilir. $u,\widetilde{u}\in H_0^1(\Omega)$ olduğundan dolayı, Hölder eşitsizliğini, (4.1.9) ve

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega),\quad 1\leq r\leq 3,$$

Sobolev gömülmesini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[(|u|+|\widetilde{u}|)^{p-2}|u-\widetilde{u}|\right]^2 dx \\
= &\int_\Omega (|u|+|\widetilde{u}|)^{2(p-2)}|u-\widetilde{u}|^2 dx \\
\leq &\ C\left(\int_\Omega (|u|+|\widetilde{u}|)^{2(p-1)} dx\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_\Omega |u-\widetilde{u}|^{2(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
\leq &\ C\left[\|u\|^{2(p-1)}_{L^{2(p-1)}(\Omega)} + \|\widetilde{u}\|^{2(p-1)}_{L^{2(p-1)}(\Omega)}\right]^{\frac{p-2}{p-1}} \|u-\widetilde{u}\|^2_{L^{2(p-1)}(\Omega)} \\
\leq &\ C\left[\|u\|^{2(p-1)}_{H_0^1(\Omega)} + \|\widetilde{u}\|^{2(p-1)}_{H_0^1(\Omega)}\right]^{\frac{p-2}{p-1}} \|u-\widetilde{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[(|u|+|\widetilde{u}|)^{p-2+\varepsilon}|u-\widetilde{u}|\right]^2 dx \\
= &\int_\Omega (|u|+|\widetilde{u}|)^{2(p-2+\varepsilon)}|u-\widetilde{u}|^2 dx \\
\leq &\left(\int_\Omega (|u|+|\widetilde{u}|)^{\frac{2(p-2+\varepsilon)(p-1)}{p-2}} dx\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_\Omega |u-\widetilde{u}|^{2(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
\leq &\left(\int_\Omega (|u|+|\widetilde{u}|)^{2(p-1)+\frac{2\varepsilon(p-1)}{p-2}} dx\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \|u-\widetilde{u}\|^2_{L^{2(p-1)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $2<p<4$ olduğundan, yeterince küçük $\varepsilon>0$ için

$$p^* = 2(p-1) + \frac{2\varepsilon(p-1)}{p-2} \leq 6$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (|u|+|\widetilde{u}|)^{2(p-2+\varepsilon)}|u-\widetilde{u}|^2 dx \\
\leq &\ C\left[\|u\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)} + \|\widetilde{u}\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)}\right]^{\frac{p-2}{p-1}} \|u-\widetilde{u}\|^2_{L^{2(p-1)}(\Omega)} \\
\leq &\ C\left[\|u\|^{p^*}_{H_0^1(\Omega)} + \|\widetilde{u}\|^{p^*}_{H_0^1(\Omega)}\right]^{\frac{p-2}{p-1}} \|u-\widetilde{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece son üç kestirimden

$$\begin{aligned}
\left\|J(\Phi)-J\left(\widetilde{\Phi}\right)\right\|^2_{\mathcal{H}} \leq &\ \left[k^2(p-1)^2A^2\right]\|u-\widetilde{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&+C\left[\left(\|u\|^{2(p-1)}_{H_0^1(\Omega)} + \|\widetilde{u}\|^{2(p-1)}_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\frac{p-2}{p-1}}\right. \\
&\left.+\left(\|u\|^{p^*}_{H_0^1(\Omega)} + \|\widetilde{u}\|^{p^*}_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\frac{p-2}{p-1}}\right]\|u-\widetilde{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
\leq &\ C\left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \|\widetilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}\right)\|u-\widetilde{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylelikle, J nin lokal Lipschitz olduğu görülür. Teorem 3.5.2.3 den ispat tamamlanır.

4.2. Global Varlık

Bu kısımda (4.1) probleminin çözümlerinin global varlığını göstereceğiz.
$t \geq 0$ için enerji fonksiyonelimiz

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\mu \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\|\operatorname{div} u\|_2^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\xi + \mu_2(s)) z^2 ds d\rho dx \\ &\quad - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

şeklindedir ve burada ξ

$$\mu_1 > \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) ds$$

koşulu altında

$$\mu_1 > \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) ds + \frac{\xi}{2}(\tau_2 - \tau_1) \tag{4.2.2}$$

şartını sağlayan pozitif bir sabittir.

Aşağıda verilen lemma enerji fonksiyonelinin artmadığını gösterir:

Lemma 4.2.1. (4.2.2) şartını sağladığını varsayalım. $C_0 \geq 0$ için, $E(t)$ artmayan bir fonksiyondur. Yani

$$E'(t) \leq -C_0 \int_\Omega \left(|u_t|^2 + |z|^2 (x,1,s,t) \right) dx \leq 0 \tag{4.2.3}$$

dır.

İspat. (4.1.3) probleminin ilk denklemini u_t ile çarpıp Ω bölgesi üzerinde, ikinci denklemini $(\xi + \mu_2(s))\, z$ ile çarpıp $(\tau_1, \tau_2) \times (0,1) \times \Omega$ bölgesi üzerinde integralini alalım:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_\Omega u_t u_{tt} dx}_{A_1} - \underbrace{\int_\Omega u_t \Delta_e u dx}_{A_2} + \underbrace{\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} u_t \mu_2(s) z(x,1,t,s) ds dx}_{A_3} + \underbrace{\int_\Omega u_t \mu_1 u_t dx}_{A_4} \\ &= \underbrace{\int_\Omega u_t u |u|^{p-2} \ln |u|^k dx}_{A_5} \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

ve

$$(\xi+\mu_2(s))\,z\left(\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\underbrace{sz_t(x,\rho,t,s)}_{B_1}+\underbrace{z_\rho(x,\rho,t,s)}_{B_2}\right)dsd\rho dx\right)=0 \quad (4.2.5)$$

olur. Kolaylık olsun diye (4.2.4) ve (4.2.5) eşitliklerinin terimlerini ayrı ayrı hesaplayalım.

A_1 terimi için

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_t u_{tt}dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u_t)^2\,dx\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2.\end{aligned}$$

A_2 terimi için Green özdeşliği uygulanır. $u(x,t)=\frac{\partial}{\partial v}u(x,t)=0$ sınır koşulları göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}-\int_\Omega u_t\Delta_e u dx &= -\int_\Omega u_t\mu\Delta u dx-\int_\Omega u_t(\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}u)\,dx\\ &= -\mu\int_\Omega u_t\Delta u dx-(\lambda+\mu)\int_\Omega u_t\nabla(\operatorname{div}u)\,dx\\ &= \mu\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx+(\lambda+\mu)\int_\Omega \operatorname{div}u\operatorname{div}u_t dx\\ &= \mu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(\nabla u)^2\,dx+(\lambda+\mu)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(\operatorname{div}u)^2\,dx\\ &= \mu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2+(\lambda+\mu)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div}u\|_2^2.\end{aligned}$$

A_3 terimi

$$\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2} u_t\mu_2(s)\,z(x,1,t,s)\,dsdx$$

dir. A_4 terimi için

$$\int_\Omega u_t\mu_1 u_t dx=\mu_1\int_\Omega(u_t)^2\,dx=\mu_1\|u_t\|_2^2.$$

A_5 terimi için

$$\int_\Omega u_t u\,|u|^{p-2}\ln|u|^k\,dx=\int_\Omega u_t\,|u|^{p-1}\ln|u|^k\,dx$$

ifadesi için

$$\begin{aligned}(u^p\ln u)' &= pu^{p-1}u_t\ln u+u^p\frac{u_t}{u}\\ &= pu_t u^{p-1}\ln u+u^{p-1}u_t\end{aligned}$$

olduğundan, $u^{p-1}u_t$ ifadesini eşitliğin soluna alıp Ω bölgesinde integral alırsak

$$\int_\Omega (u^p \ln u)' \, dx - \int_\Omega u^{p-1} u_t dx = \int_\Omega p u_t u^{p-1} \ln u dx$$

elde edilir. Şimdi eşitliğin her iki tarafını p ye bölersek,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\int_\Omega (u^p \ln u)' \, dx - \frac{1}{p}\int_\Omega u^{p-1} u_t dx &= \int_\Omega u_t u^{p-1} \ln u dx \\ \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^p \ln u dx - \frac{1}{p^2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^p dx &= \int_\Omega u_t u^{p-1} \ln u dx \end{aligned}$$

olur. Şimdi her iki tarafı k ile çarpıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} k\int_\Omega u_t u^{p-1} \ln |u| \, dx &= \frac{d}{dt}\frac{1}{p}\int_\Omega u^p \ln |u|^k \, dx - \frac{d}{dt}\frac{k}{p^2}\int_\Omega u^p dx \\ &= \frac{d}{dt}\frac{1}{p}\int_\Omega u^p \ln |u|^k \, dx - \frac{d}{dt}\frac{k}{p^2}\|u\|_p^p \end{aligned}$$

elde edilir.

B_1 terimi için

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left(\xi + \mu_2(s)\right) z z_t(x,\rho,t,s) \, ds d\rho dx \\ = \; &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left(\xi + \mu_2(s)\right) z^2 ds d\rho dx \end{aligned}$$

olur. B_2 terimi için

$$\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\xi + \mu_2(s)\right) z z_\rho(x,\rho,t,s) \, ds d\rho dx$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\mu\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\|\mathrm{div}\, u\|_2^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left(\xi + \mu_2(s)\right) z^2 ds d\rho dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k \, dx \right] \\ = \; &-\mu_1 \|u_t\|_2^2 - \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\xi + \mu_2(s)\right) z z_\rho(x,\rho,t,s) \, ds d\rho dx \\ &- \int_\Omega u_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \, z(x,1,t,s) \, ds dx \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\mu\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\|\mathrm{div}\, u\|_2^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left(\xi + \mu_2(s)\right) z^2 ds d\rho dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k \, dx \end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi (4.2.6) denkleminin sağ tarafındaki son iki terim için kestirim elde edelim:

$$\begin{aligned} & -\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\xi+\mu_2(s)\right) z z_{\rho}\left(x,\rho,t,s\right) dsd\rho dx \\ = & -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\xi+\mu_2(s)\right)\left|z\left(x,\rho,t,s\right)\right|^2 dsd\rho dx \\ = & \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)ds+\xi\left(\tau_2-\tau_1\right)\right)\int_{\Omega}\left|z\left(x,0,t,s\right)\right|^2 dsdx \\ & -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\xi+\mu_2(s)\right)\left|z\left(x,1,t,s\right)\right|^2 dsdx \end{aligned}$$

$z\left(0\right)=u_t$ olduğundan eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)ds+\xi\left(\tau_2-\tau_1\right)\right)\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2 dsdx \\ & -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\xi+\mu_2(s)\right)\left|z\left(x,1,t,s\right)\right|^2 dsdx \end{aligned}$$

ve ikinci terim için Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & -\int_{\Omega}u_t\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2\left(s\right)z\left(x,1,t,s\right)dsdx \\ \leq & \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)ds\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2 dx+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)ds\int_{\Omega}\left|z\left(x,1,t,s\right)\right|^2 dx\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{dE\left(t\right)}{dt} \leq & -\left(\mu_1-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)ds-\frac{\xi}{2}\left(\tau_2-\tau_1\right)\right)\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2 dx \\ & -\frac{\xi}{2}\int_{\Omega}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|z\left(x,1,t,s\right)\right|^2 dsdx \end{aligned}$$

olur. (4.2.2) bağıntısından, bazı $C_0\geq 0$ için

$$E^{'}\left(t\right)\leq -C_0\int_{\Omega}\left(\left|u_t\right|^2+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|z\left(x,1,s,t\right)\right|^2 ds\right)dx\leq 0$$

olduğu görülür.

Şimdi (4.1.3) denkleminin çözümünün düzgün sınırlı ve global olduğunu gösterelim. Bu amaçla, aşağıdaki fonksiyonelleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned} I\left(t\right) = & \left\|\nabla u\right\|_2^2+\left\|\operatorname{div}u\right\|_2^2-\int_{\Omega}\left|u\right|^p\ln\left|u\right|^k dx, \\ J\left(t\right) = & \frac{\mu}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2+\frac{\left(\lambda+\mu\right)}{2}\left\|\operatorname{div}u\right\|_2^2+\frac{k}{p^2}\left\|u\right\|_p^p \\ & +\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}s\left(\xi+\mu_2(s)\right)z^2 dsd\rho dx \\ & -\frac{1}{p}\int_{\Omega}\left|u\right|^p\ln\left|u\right|^k dx. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Buradan

$$E(t) = J(t) + \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2$$

dır.

Lemma 4.2.2. $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ başlangıç verilerinin

$$I(0) > 0 \text{ ve } \beta_{\max}\left(kC_{p+\gamma}\left(\frac{2pE(0)}{\mu p - 2}\right)^{\frac{p-2+\gamma}{2}}, \frac{2pE(0)}{p(\lambda+\mu)-2}\right) < 1, \qquad (4.2.8)$$

koşullarını sağladığını varsayalım. O zaman herhangi $t \in [0,T]$ için $I(t) > 0$ olur.

İspat. $I(0) > 0$ olduğundan, süreklilikten, her $t \in [0,T^*]$ için $I(t) \geq 0$ olacak şekilde $T^* \leq T$ olduğunun sonucunu çıkarıyoruz. Bu, her $t \in [0,T^*]$ için,

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{\mu p - 2}{2p}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{p(\lambda+\mu)-2}{2p}\|\operatorname{div} u\|_2^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\xi + \mu_2(s)) z^2 ds d\rho dx + \frac{1}{p} I(t), \\ J(t) &\geq \frac{\mu p - 2}{2p}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{p(\lambda+\mu)-2}{2p}\|\operatorname{div} u\|_2^2 \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} u\|_2^2 &\leq \frac{2p}{p(\lambda+\mu)-2} J(t) \\ &\leq \frac{2p}{p(\lambda+\mu)-2} E(t) \\ &\leq \frac{2p}{p(\lambda+\mu)-2} E(0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 &\leq \frac{2p}{\mu p - 2} J(t) \\ &\leq \frac{2p}{\mu p - 2} E(t) \\ &\leq \frac{2p}{\mu p - 2} E(0) \qquad (4.2.9) \end{aligned}$$

dır. Öte yandan, $\ln|u| < |u|^\gamma$ eşitsizliğini kullanarak

$$\int_\Omega u^p \ln|u|\, dx \leq \int_\Omega |u|^{p+\gamma}\, dx \qquad (4.2.10)$$

ifadesini elde ederiz. Burada γ, $0 < \gamma < 2$ aralığında olur öyle ki

$$p + \gamma < 4 + \gamma < 6$$

dir. Böylece $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+\gamma}(\Omega)$ gömülmesinden,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^p \ln|u|\,dx &\leq C_{p+\gamma}\|\nabla u\|_2^{p+\gamma} \\ &= C_{p+\gamma}\|\nabla u\|_2^2\|\nabla u\|_2^{p-2+\gamma} \\ &= C_{p+\gamma}\|\nabla u\|_2^2\left(\|\nabla u\|_2^2\right)^{\frac{p-2+\gamma}{2}} \\ &\leq C_{p+\gamma}\left(\frac{2pE(0)}{\mu p-2}\right)^{\frac{p-2+\gamma}{2}}\|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad +\frac{2pE(0)}{p(\lambda+\mu)-2}\|\operatorname{div} u\|_2^2 \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

sağlanır, burada $C_{p+\gamma}$ gömülme sabitidir. Sonuç olarak (4.2.7) ve (4.2.8) den, her $t \in [0, T^*]$ için,

$$I(t) > \|\nabla u\|_2^2 + \|\operatorname{div} u\|_2^2 - \beta\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|\operatorname{div} u\|_2^2\right) > 0 \tag{4.2.12}$$

sağlanır. Böylece T^*, T ye genişletilebilir.

Teorem 4.2.1. u_0, u_1 başlangıç verileri Lemma 4.2.2 nin koşullarını sağlasın. Bu durumda (4.1.3) probleminin çözümü düzgün sınırlı ve globaldır.

İspat. $\|\nabla u\|_2^2 + \|\operatorname{div} u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2$ ifadesinin t den bağımsız olarak sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Açıkça

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + J(t) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\xi+\mu_2(s))z^2 dsd\rho dx + \frac{1}{p}I(t) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{p}(1-\beta)\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|\operatorname{div} u\|_2^2\right) \end{aligned}$$

dır. Bu yüzden

$$\|\nabla u\|_2^2 + \|\operatorname{div} u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 \leq CE(0)$$

olur, burada C sadece k, p, C_{p+1} ve α ya bağlı pozitif bir sabittir.

4.3. Üstel Azalma

Bu kısımda problemimizin çözümlerinin azalma sonucumuzu ispatlayacağız.

Lemma 4.3.1.

$$F_1(t) = \int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} se^{-\rho s}(\xi+\mu_2(s))|z(x,\rho,s,t)|^2 dsd\rho dx$$

fonksiyonelinin türevi (4.1.3) denkleminin çözümü boyunca, c_1, $c_2 > 0$ için,

$$F_1'(t) \leq c_1 \|u_t\|_2^2 - c_2 \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\xi + \mu_2(s)) |z(x,\rho,s,t)|^2 \, ds d\rho dx \quad (4.3.1)$$

dir.

İspat. (4.1.3) denkleminin ikinci denklemini kullanarak $F_1(t)$ fonksiyonelinin türevini alalım.

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -s \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\rho s} (\xi + \mu_2(s)) |z|^2 \, ds d\rho dx \\ &\quad +2 \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-\rho s} (\xi + \mu_2(s)) z z_t ds d\rho dx \end{aligned}$$

(4.1.3) ün ikinci denkleminden

$$s z_t + z_\rho = 0$$

ve

$$z_t = -\frac{z_\rho}{s}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\xi + \mu_2(s)) \left(\int_0^1 s e^{-\rho s} |z|^2 \, d\rho \right) ds dx \\ &\quad -2 \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-\rho s} (\xi + \mu_2(s)) z \frac{z_\rho}{s} ds d\rho dx \\ &= -\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\xi + \mu_2(s)) \left(\int_0^1 s e^{-\rho s} |z|^2 \, d\rho \right) ds dx \\ &\quad -\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\rho s} (\xi + \mu_2(s)) \frac{\partial}{\partial \rho} |z|^2 \, ds d\rho dx \\ &= -\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\xi + \mu_2(s)) \left[\begin{array}{c} s \int_0^1 e^{-\rho s} |z|^2 \, d\rho + e^{-s} |z(x,1,s,t)|^2 \\ -|z(x,0,s,t)|^2 \end{array} \right] ds dx \\ &\leq c_1 \|u_t\|_2^2 - c_2 \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\xi + \mu_2(s)) |z(x,\rho,s,t)|^2 \, ds d\rho dx. \end{aligned}$$

$z(0) = u_t$ olduğundan yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -s \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\rho s} (\xi + \mu_2(s)) |z|^2 \, ds d\rho dx \\ &\quad +2 \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-\rho s} (\xi + \mu_2(s)) z z_t ds d\rho dx \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.3.2.

$$F_2(t) = NE(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx + \frac{\varepsilon \mu_1}{2} \int_\Omega |u|^2 dx$$

fonksiyonelinin türevi, (4.1.3) ün çözümü boyunca

$$\begin{aligned} F_2'(t) \leq & -(NC_0 - \varepsilon) \|u_t\|_2^2 - \varepsilon \left((\mu - \beta - \delta) \|\nabla u\|_2^2 \right. \\ & \left. + (\lambda + \mu - \beta) \|\operatorname{div} u\|_2^2 \right) \\ & - \left(NC_0 - \varepsilon \frac{C_*}{4\delta} \right) \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x, 1, s, t) \, ds dx, \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

dir, burada N, α ve ε pozitif sabitlerdir.

İspat.

$$F_2'(t) = NE'(t) + \varepsilon \int_\Omega (u_t u_t + u u_{tt}) \, dx + \varepsilon \mu_1 \int_\Omega u u_t dx$$

olur. (4.1.3) denkleminden u_{tt} ifadesi bulunur ve u ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \int_\Omega u u_{tt} dx = & \int_\Omega u \mu \Delta u dx + \int_\Omega (\lambda + \mu) u \nabla (\operatorname{div} u) \, dx - \mu_1 \int_\Omega u u_t(x, t) \, dx \\ & - u \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, t, s) \, ds dx + \int_\Omega u u |u|^{p-2} \ln |u|^k dx \\ = & -\mu \|\nabla u\|^2 - (\lambda + \mu) \|\operatorname{div} u\|^2 - \mu_1 u u_t \\ & - u \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, t, s) \, ds + |u|^p \ln |u|^k \end{aligned}$$

elde edilir ve denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F_2'(t) = & NE'(t) + \varepsilon \int_\Omega |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_\Omega \mu |\nabla u|^2 dx \\ & - \varepsilon \int_\Omega (\lambda + \mu) |\operatorname{div} u|^2 dx - \varepsilon \int_\Omega \mu_1 u u_t dx \\ & - \varepsilon \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} u \mu_2(s) z(x, 1, t, s) \, ds dx \\ & + \varepsilon \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx + \varepsilon \int_\Omega \mu_1 u u_t dx \end{aligned}$$

olur. Gerekli sadeleşmeler yapıldıktan sonra ve (4.2.3) ten

$$\begin{aligned} F_2'(t) \leq & -NC_0 \int_\Omega \left(|u_t|^2 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |z(x, 1, s, t)|^2 ds \right) dx \\ & + \varepsilon \int_\Omega |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_\Omega \mu |\nabla u|^2 dx \\ & - \varepsilon \int_\Omega (\lambda + \mu) |\operatorname{div} u|^2 dx + \varepsilon \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \\ & - \varepsilon \int_\Omega u \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, t, s) \, ds dx \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

elde edilir. Herhangi bir $\delta > 0$ ve bazı $c_* > 0$ için, $\mu_2(s)$ nin sınırlılık özelliği ile Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} &-\varepsilon \int_\Omega u \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, z(x,1,t,s)\, ds dx \\ &\leq \delta \|\nabla u\|_2^2 + \frac{c_*}{4\delta} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x,1,s,t)\, ds dx \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

dır. (4.2.10), (4.3.3) ve (4.3.4) ün birleştirilmesiyle sonuç ispatlanır.

Teorem 4.3.1. (4.2.8) in sağlandığını farzedelim. Bu durumda c_3 ve c_4 pozitif sabitler olmak üzere

$$E(t) \leq c_3 e^{-c_4 t}$$

dır.

İspat.

$$F_3(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

olsun. Yeterince küçük ε için

$$F_3(t) \sim E(t) \tag{4.3.5}$$

denkliği sağlanır. (4.3.1) ve (4.3.2) yi yani

$$F_1'(t) \leq c_1 \|u_t\|_2^2 - c_2 \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\xi + \mu_2(s)) |z(x,\rho,s,t)|^2 \, ds d\rho dx$$

ve

$$\begin{aligned} F_2'(t) \;\leq\; & -(NC_0 - \varepsilon) \|u_t\|_2^2 \\ & -\varepsilon \left[(\mu - \beta - \delta) \|\nabla u\|_2^2 + (\lambda + \mu - \beta) \|\operatorname{div} u\|_2^2 \right] \\ & - \left(NC_0 - \varepsilon \frac{c_*}{4\delta} \right) \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x,1,s,t)\, ds dx \end{aligned}$$

kullanarak

$$\begin{aligned} F_3'(t) \;\leq\; & -(NC_0 - \varepsilon - c_1) \|u_t\|_2^2 \\ & -\varepsilon \left[(\mu - \beta - \delta) \|\nabla u\|_2^2 + (\lambda + \mu - \beta) \|\operatorname{div} u\|_2^2 \right] \\ & - \left(NC_0 - \varepsilon \frac{c_*}{4\delta} \right) \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x,1,s,t)\, ds dx \\ & -c_2 \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\xi + \mu_2(s)) |z(x,\rho,s,t)|^2 \, ds d\rho dx \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

elde edilir. $\beta < 1$ olduğundan, $\alpha = \mu - \beta - \delta > 0$ olacak şekilde δ yi yeterince küçük seçeriz.

Şimdi, bazı $\omega > 0$ için, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ gömülmesinden

$$\begin{aligned} \|u\|_p^p &\leq C \|\nabla u\|_2^p \\ &\leq C \left(\|\nabla u\|_2^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \|\nabla u\|_2^2 \\ &\leq C \left(E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} \|\nabla u\|_2^2 \\ &\leq \omega \|\nabla u\|_2^2 \end{aligned}$$

veya

$$-\frac{\varepsilon\alpha\omega^{-1}}{2} \|u\|_p^p \geq -\frac{\varepsilon\alpha}{2} \|\nabla u\|_2^2$$

olur. Bu nedenle (4.3.6)

$$\begin{aligned} F_3'(t) \leq & -\left(NC_0 - \varepsilon - c_1\right) \|u_t\|_2^2 \\ & -\varepsilon \left(\frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_2^2 + (\lambda + \mu - \beta) \|\operatorname{div} u\|_2^2\right) \\ & -\frac{\varepsilon\alpha\omega^{-1}}{2} \|u\|_p^p - \left(NC_0 - \varepsilon\frac{c_*}{4\delta}\right) \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x,1,s,t)\, dsdx \\ & -c_2 \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left(\xi + \mu_2(s)\right) |z(x,\rho,s,t)|^2\, dsd\rho dx \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

olur. δ sabit olduğunda, N yi yeterince büyük seçeriz, öyle ki;

$$NC_0 - \varepsilon - c_1 > 0 \text{ ve } NC_0 - \varepsilon\frac{c_*}{4\delta} > 0$$

dır. Böylece (4.3.7) bazı $C > 0$ için

$$\begin{aligned} F_3'(t) &\leq -C \Big[\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|\operatorname{div} u\|_2^2 + \|u\|_p^p \\ &\quad + \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left(\xi + \mu_2(s)\right) z^2 dsd\rho dx\Big] \\ &\leq -CE(t). \end{aligned}$$

olur. (4.3.5) denkliği kullanılarak ve $(0,t)$ ye integral alırsak sonucumuz ispatlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde gecikmeli terim içeren logaritmik kaynak terimli

$$u_{tt} - \Delta_e u + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, u_t(x, t-s)\, ds + \mu_1 u_t(x,t) = u\,|u|^{p-2} \ln |u|^k$$

denkleminin iyi konulmuşluğu, global varlığı ve üstel azalması ile ilgili sonuçlar elde edildi. Farklı koşullar altında yeni sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca problemin üstel büyümesi, patlaması, atraktörü gibi matematiksel davranışları da çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Adams, R. A. ve Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces*, Academic Press.

Antontsev, S., vd., (2021). Blow up and asymptotic behavior of solutions for ap (x)-Laplacian equation with delay term and variable exponents. *Electronic Journal of Differential Equations,* 1-20.

Beniani, A., vd., (2016). Stability for Lamé system with a time varying delay term in a nonlinear internel feedback. *Clifford Analysis, Clifford Algebras and Their Applications, 5*(4), 287-298.

Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer.

Evans, L. C. (1998). *Partial differantial equations, Graduate Studies in Mathematics,* vol. 19.

Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems,* Birkhäuser Basel.

Kafini, M. (2021). On the decay of a nonlinear wave equation with delay. *Annali Dell'Universita'Di Ferrara,* 67, 309-325.

Kafini, M. ve Messaoudi, S. (2020). Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay. *Applicable Analysis, 99*(3), 530-547.

Kafini, M. ve Messaoudi, S. (2020). Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay. *Applicable Analysis, 27*(3), 865-867.

Kaplan, S. (1963). On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics, 16,* 305-330.

Kesavan, S. (2003). *Topics in functional analysis and applications,* John Wiley Sons.

Komornik, V. (1994). *Exact Controllability and Stabilization,* Masson-John Wiley.

Messaoudi, S. A., vd. (2016). Well posedness and exponential stability in a wave equation with a strong damping and a strong delay. *Journal of Mathematical Physics, 57*(11), 1-13.

Nicaise, S. ve Pignotti, C. (2006). Stability and instability results of the wave

equation with a delay term in the boundary internal feedbacks. *SIAM Journal on Control and Optimization, 45,* 1561-1585.

Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Springer-Verlag.

Pişkin, E. (2017). *Sobolev Uzayları,* Seçkin Yayınları.

Pişkin, E., vd. (2022). Existence and asymptotic behavior for a logarithmic viscoelastic plate equation with distributed delay. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications.*

Pişkin, E., ve Yüksekkaya, H. (2021). Local existence and blow up of solutions for a logarithmic nonlinear viscoelastic wave equation with delay. *Computational Methods for Differential Equations, 9*(2), 623-636.

Pişkin, E., ve Yüksekkaya, H. (2021). Nonexistence of global solutions of a delayed wave equation with variable-exponents. *Miskolc Mathematical Notes, 22*(2), 841-859.

Richard, J. P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica, 39,* 1667-1694.

Taouaf, N., vd. (2018). Well-posedness and asymptotic stability for the Lamé system with internal distributed delay. *Mathematica Moravica, 22*(1) 31-41.

Yüksekkaya, H., vd. (2021). Existence, nonexistence and stability of solutions for adelayed plate equation with the logarithmic source. *Advances in Mathematical Physics,* 1-11.

Zhao, J. (2017). Blow up of solutions for a vibrating riser equation with dissipative term. *Journal of Computational Analysis and Applications, 22*(1), 128-137.

Zheng, S. (2004). *Nonlinear Evolution Equations,* Chapman & Hall/CRC.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad	Sancar, Erkan
Web sayfası (Research Gate, Academia, vs.)	

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Hasan Kalyoncu Üniversitesi, Eğitim Yönetim ve Denetimi	2014
Lisans	Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği	2020
Lisans	Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Fen Bilgisi Öğretmenliği	2008
Lise	Fatih Lisesi Diyarbakır	2002

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2010-	MEB	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1.Erhan Pişkin and Erkan Sancar, “Existence and decay for the logarithmic Lamé system with internal distributed delay”, 4th International Conference and Aplied Mathematics ICPAM-VAN 2022, June 22-23, 2022.

2.

3.

Özel İlgiler

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Erkan SANCAR
ÖĞRENCİ NO	20804010
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2021-2022
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Yarıgrup Teorisi ile Evolüsyon Denklemlerin Çözümleri
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	50
BENZERLİK ORANI	%21
RAPORLAMA TARİHİ	26/07/ 2022

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 50 sayfalık kısmına ilişkin, 26/07/2022 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %21'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☐ Kaynakça hariç
☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esaslarını inceledim ve bu Uygulama Esaslarında belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Öğrencinin
Adı ve Soyadı: Erkan SANCAR
Tarih:
İmza:

…….	…….
Tez Danışmanı	**Anabilim Dalı Başkanı**
Adı ve Soyadı: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN	Adı ve Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY
Tarih:	Tarih:
İmza:	İmza:

Formdaki bilgiler, bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersizdir.