T. C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR MADDESEL NOKTANIN DİRENÇLİ BİR ORTAMDAKİ HAREKETİ

Volkan KORUCUOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Metin AYDOĞDU
Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı

EDİRNE-2011

BİR MADDESEL NOKTANIN DİRENÇLİ BİR ORTAMDAKİ HAREKETİ

Volkan KORUCUOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu tez 23 / 06 / 2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Metin AYDOĞDU
(Danışman, Jüri Üyesi)

Yrd. Doç. Dr. Figen BÖZ
(Jüri Üyesi)

Yrd. Doç. Dr. Nilhan ÜRKMEZ TAŞKIN
(Jüri Üyesi)

İÇİNDEKİLER

Önsöz iii

Özet iv

Abstract v

Şekil Listesi vi

Çizelge Listesi viii

Sembol Listesi ix

Kısaltmalar xi

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Problem ve Önemi 1

1.2. Önceki Çalışmalar 2

1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı 2

BÖLÜM 2. MADDESEL NOKTANIN HAREKETİ

2.1. Giriş 3

2.2. Dirençli Ortamda Bir Boyutlu Hareket 3

2.3. Dirençli Ortamda İki Boyutlu Hareket 6

BÖLÜM 3. DENKLEMLERİN RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

3.1. Giriş.....7
3.2. Runge-Kutta Yöntemi 7

BÖLÜM 4. SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

4.1. Giriş.....10
4.2. Bir Boyutlu Hareket 10
4.2.1. Bir Boyutlu Harekette Hızın Zaman İle Değişimi 10
4.2.2. Bir Boyutlu Harekette Konumun Zaman İle Değişimi 23
4.3. İki Boyutlu Hareket.....31

BÖLÜM 5. SONUÇLAR 35
KAYNAKLAR 36
ÖZGEÇMİŞ.....37

ÖNSÖZ

Çalışmalarımda, her türlü katkıyı benden esirgemeyen ve üzerimdeki emeğini ödeyemeyeceğim sayın hocam Doç. Dr. Metin AYDOĞDU'ya , desteğini esirgemeyen arkadaşım Araş.Gör.Fatih KARAÇAM'a ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Bu çalışmada, bir maddesel noktanın dirençli ve dirençsiz ortamdaki hareketi incelenmiştir. Dirençli ve dirençsiz ortamda bir ve iki boyutlu hareket incelenerek konum ve hız denklemlerinin genel formülasyonları çıkarılmıştır. Direnç kuvvetinin hızın farklı kuvvetleri şeklinde değişmesi sonucu konum ve hızın zamanla değişimi mümkün olduğu durumlarda analitik ve bir nümerik yöntem olan Runge-Kutta yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Sonuçlar farklı parametreler için sunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Dirençli ve dirençsiz ortam, bir boyutlu ve iki boyutlu hareket, Runge-Kutta Yöntemi.

ABSTRACT

In this study, motion of a particle with drag or without drag is investigated. General equations of motion for a particle are obtained for one and two dimensional motions. Runge kutta method is used in the solution of non-linear equations of motion. Results are given in tables and graphs.

Key words: Resistive medium, one and two dimensional motions, Runge-Kutta Method.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 4.1. Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=0.1 kg) 12

Şekil 4.2. Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=800m/sn, m=0.1 kg) 13

Şekil 4.3. Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=0.5 kg) 14

Şekil 4.4. Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=800m/sn, m=0.5 kg) 15

Şekil 4.5. Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=1 kg) 16

Şekil 4.6. Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=800m/sn, m=1 kg) 17

Şekil 4.7. Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=1.5 kg) 18

Şekil 4.8. Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=800m/sn, m=1.5 kg) 19

Şekil 4.9. Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi(Vo=100m/sn, m=0.1 kg, karesel direnç)…...……..…..20

Şekil 4.10. Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi(Vo = 100m/sn, m=1kg, karesel direnç) …… ……....21

Şekil 4.11.Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=10 kg, karesel direnç) …….....…22

Şekil 4.12.Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi(Vo=100m/sn, m=0.1kg)…..24

Şekil 4.13.Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi(Vo=800m/sn,m=0.1kg).....25

Şekil 4.14. Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi(Vo=100m/sn, m=0.5kg)….26

Şekil 4.15. Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi(Vo=800m/sn,m=0.5 kg) 27

Şekil 4.16. Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi (Vo=100m/sn,m=0.5 kg, h=0.0001, karesel direnç, Runge-Kutta) ……. 28

Şekil 4.17.Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi (Vo=100m/sn,m=1 kg, h=0.0001, karesel direnç, Runge-Kutta) 29

Şekil 4.18.Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi (Vo=100m/sn,m=10 kg, h=0.0001, karesel direnç, Runge-Kutta)……..30

Şekil 4.19. İki boyutlu harekette hız bileşenlerinin zaman ile değişimi (θ=30,m=0.5kg,V=10m/sn,β=0.5,h=0.01, Runge-Kutta, KD)……...…….. 32

Şekil 4.20. İki boyutlu harekette hız bileşenlerinin zaman ile değişimi (θ=35,m=0.5kg,V=10m/sn,β=0.5,h=0.01, Runge-Kutta, KD)……...…….. 32

Şekil 4.21. İki boyutlu harekette hız bileşenlerinin zaman ile değişimi (θ=40,m=0.5kg,V=10m/sn,β=0.5,h=0.01, Runge-Kutta, KD)……...…….. 33

Şekil 4.22. İki boyutlu harekette hız bileşenlerinin zaman ile değişimi (θ=45,m=0.5kg,V=10m/sn,β=0.5,h=0.01, Runge-Kutta, KD)……...…….. 33

Şekil 4.23. İki boyutlu hareket x-y değişim grafiği (m=0.5kg,V=10m/sn,β=0.5,h=0.01, karesel direnç)……..…….34

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 4.1. Parabolik atışta Deneysel, Dirençli ve Dirençsiz ortam kabulleri durumundaki menzil (M) ve uçuş zamanının (t_u) kıyaslanması ($\theta=45^o$)……31

SEMBOL LİSTESİ

β	Direnç katsayısı
V	Hız
t	Zaman
m	Maddesel noktanın kütlesi
g	Yerçekim ivmesi
α	Direncin hıza bağımlılığını gösteren paremetre
C_1	İntegrasyon sabiti
V_0	İlk hız değeri
X, Y	Konum
V_x	Hızın x bileşeni
V_y	Hızın y bileşeni
Φ	Aralık üzerindeki temsili eğim
a	Sabit bir sayı

θ	Açı değeri
V_X^0	Dirençsiz ortamdaki hızın x bileşeni
V_y^0	Dirençsiz ortamdaki hızın y bileşeni
M	Menzil
t_u	Uçuş Zamanı

Kısaltmalar

Re	Reynolds Sayısı
DD	Doğrusal direnç
KD	Karesel direnç

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Tezin bu bölümü, üç kısımdan oluşmaktadır. 1.Kısım'da tezde incelenen problem ve önemi açıklanmakta, 2.Kısım'da konu ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalar özetlenmektedir. 3.Kısım'da çalışmanın amacı ve kapsamı üzerinde durulmaktadır.

1.1.Problem ve Önemi

Bu çalışmada dirençli bir ortam içindeki bir cismin hareketi incelenmektedir. Direnç kuvvetinin hıza bağımlılığı farklı formlarda seçilerek analitik ve nümerik yöntemler ile hareket denklemleri çözülerek cismin konum ve hızı bulunmaktadır.

Bir cismin akışkan bir ortam içinde hareketi hem akademik hem de pratik uygulamalar açısından büyük öneme sahiptir. Uçak, roket, uzay mekiği, füze, mermi, spor oyunlarındaki topların hareketleri ve kimyasal transport işlemlerindeki uygulamalar dirençli ortamdaki cisim hareketlerine sayılabilecek örneklerden bazılarıdır.

Hava direncinin ihmal edildiği durumda ortaya çıkan hareket denklemleri doğrusaldır (lineerdir) ve Galileo zamanından beri bilinmektedir. Dirençsiz ortamdaki bir cismin hareketi bir boyutlu, iki boyutlu ve üç boyutlu haller için iyi bilinmekte ve ders kitaplarında yer almaktadır.

Gerçek uygulamalarda direnç kuvvetinin ihmal edilmesi Reynolds (Re) sayısına bağlı olmakla birlikte pek mümkün gözükmemektedir. Genel bir cismin akışkan bir ortam içindeki hareketi hıza ve cismin yeryüzüne göre konumuna bağlıdır.

1.2. Önceki Çalışmalar

Bir cismin dirençli bir ortamdaki hareketi ile ilgili literatürde bazı çalışmalar bulunmaktadır. Klasik ders kitaplarında probleme temel olarak değinilip detaylarına pek rastlanılmamaktadır.

Konuma bağlı direnç parametreleri Mohazzabi ve Fields, 2004, Mohazzabi ve Lerro, 2006, Pakdemirli, 2009 tarafından çalışılmıştır.

Direnç kuvvetinin hız ile doğrusal ve kuadratik değişimi için Parker, 1977 Hayen, 2003a,2003b ve Deakin ve Trop, 1998 tarafından yapılan bazı çalışmalar gösterilebilir.

Ebaid, 2011 dirençsiz ve hız ile doğrusal değişen dirençli ortamdaki bir cismin eğik atışını kesirli kalkulüs (Fractional calculus) kullanarak incelemiştir.

Önceki çalışmalar incelendiğinde dirençli ortamdaki bir cismin hareketi probleminin çözümü üzerine genel bir yaklaşım yok gibidir. Bu çalışmada bu eksiklik üzerinde çalışılacaktır.

1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmanın amacı, dirençli bir ortamda bir cismin hareketinin incelenmesidir. Ortamın direnci hıza bağlı olarak ifade edilmiştir. Elde edilen hareket denklemleri analitik ve nümerik olarak çözülmüştür. Elde edilen doğrusal olmayan diferansiyel denklemler 4.Mertebe Runge-Kutta yöntemiyle çözülmektedir. Çözümlerde mümkün analitik çözümler ile nümerik sonuçlar kıyaslamalı olarak incelenmektedir. Cismin kütlesi, şekli, ortamın yoğunluğu ve başlangıç şartları gibi parametrelerin sonuçlar üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmektedir.

BÖLÜM 2

MADDESEL NOKTANIN HAREKETİ

2.1. Giriş

Bu bölümde bir maddesel noktanın hareketi ana hatlarıyla özetlenecektir. Kısım 2.2'de dirençli ortamda bir boyutlu hareket incelendikten sonra kısım 2.3'te dirençli ortamda iki boyutlu hareket incelenmiştir.

2.2. Dirençli ortamda bir boyutlu hareket

Bir cismin hareket analizini basitleştirmek bakımından iki ana grupta toplanabilir: Kinematik ve Kinetik. Kinematik, cismin hareketinin geometrik yönünü ele alan bilim dalıdır. Tabiattaki cisimler en genel halde üç boyutludur. Böyle bir cisim tek boyutlu, iki boyutlu (düzlemsel) ve üç boyutlu bir hareket yapabilmektedir. Matematiksel basitlik bakımından hem cismin boyutları ve hem de hareket boyutu açısından bir takım kabuller yapmak faydalı olabilmektedir. Bir cismin boyutları ve kütle merkezine göre hareketinin ihmal edilebiliyorsa bu cisim **maddesel nokta** olarak adlandırılmaktadır. Eğer yukarıda belirtilen ihmaller yapılamazsa cisim rijit cisim olarak adlandırılmaktadır.

Hava direncinin olmadığı bir ortamda serbest bırakılan bir cismin yerçekimi etkisi ile aşağı doğru "**g**" ivmesi ile düşer. Bu olaya serbest düşme denir. Serbest düşmeye bırakılan bir cisim yeryüzüne yakın bölgelerde sabit "g" yerçekimi ivmesi ile

aşağı doğru düzgün hızlanan hareket yapar. Her saniye hızı yerçekimi ivmesi kadar artar.

Serbest düşme hareketini incelerken cisimlerin, boşluk gibi sürtünmesiz ideal ortamlarda hareket ettiğini kabul edilir. Oysa gerçek hayatta sıvı ve gaz gibi akışkanlar içinde hareket eden cisimlere bir direnç kuvveti uygulanır (Şuhubi, 1988). Bu direnç kuvvetinin büyüklüğü:

1- Cismin hareket doğrultusuna dik, en geniş kesit alanı ile doğru orantılıdır.
2- Hızın kendisi ya da karesiyle doğru orantılıdır.
3- Cismin biçimine ve havanın yoğunluğuna bağlıdır.

Bu bölümde öncelikle bir boyutlu hareket incelenecektir. İlk olarak hava direncinin olduğu durum incelenecektir. Bu durumda hava direnç kuvveti, hız ile orantılıdır.

En genel düşey konumlu bir boyutlu hareket durumunda hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m\frac{dV}{dt} = -mg - \beta V^{\alpha} \tag{2.1}$$

Burada m cismin kütlesini, V hızını, t zamanı, g yer çekim ivmesini β direnç katsayısını ve α ise direncin hıza bağımlılığını gösteren bir parametredir. Küçük cisimler için (beyzbol topu büyüklüğünde) 0.01m/s den küçük hızlarda direnç hıza lineer olarak bağlı iken bu hızdan büyük fakat ses hızından küçük hızlarda hıza karesel olarak bağlıdır. Ses hızından büyük hızlarda direnç tekrar hız ile doğru orantılıdır ancak bu sefer direnç katsayısı değişir (Mohazzabi ve Fields, 2004).

Eğer Re küçük ise (Re<1) direnç kuvveti hız ile lineer olarak değişir. Newton'un ikinci hareket kanunundan

$$m\frac{dV}{dt} = -mg - \beta V \tag{2.2}$$

yazılabilir. (2.2) eşitliği düzenlendiğinde aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{dV}{dt} + \frac{\beta}{m}V = -g \tag{2.3}$$

Bu diferansiyel denklem çözüldüğünde aşağıdaki hız ifadesi bulunur.

$$V(t) = \frac{-mg}{\beta} + C_1 e^{-\left(\frac{\beta}{m}t\right)} \tag{2.4}$$

$V(0) = V_0$ başlangıç şartı uygulanırsa;

$$V(t) = \frac{-mg}{\beta} + \left(V_o + \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\left(\frac{\beta}{m}t\right)} \tag{2.5}$$

elde edilir.

Hava dirençli durumda hızın limit değere yaklaştığı görülmektedir (Serbest düşüş olduğu durumda hız artmaya devam edecektir). Bu limit değere son hız (terminal hız) denilmektedir. Konum ise dirençsiz ve dirençli ortamlarda sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Y_f(t) = \frac{1}{2} g t^2 + V_o t + Y_o \tag{2.6}$$

$$Y_f(t) = \frac{mg}{\beta} t + \frac{m}{\beta}\left(\frac{mg}{\beta} - V_o \right) e^{\frac{-\beta}{m}t} + Y_o - \frac{m}{\beta}\left(\frac{mg}{\beta} - V_o \right) \tag{2.7}$$

Direnç kuvvetinin hızın karesiyle değişmesi durumunda hız ve konum sırasıyla aşağıdaki gibi verilebilir.

$$V(t) = -\tan\left[\frac{\left(t\sqrt{gm\beta} - ma\tan\left(\beta \frac{V_o}{\sqrt{gm\beta}} \right) \right)}{m} \right] \frac{\sqrt{gm\beta}}{m} \tag{2.8}$$

$$Y(t) := \left[Yo + \frac{1}{2}\cdot\ln\left[1 + \tan\left[\frac{\left(-matan\left(\beta\cdot\frac{V0}{\sqrt{g\cdot m\beta}} \right) \right)}{m} \right]^2 \right]\cdot\frac{m}{\beta} \right] + \frac{-1}{2}\cdot\ln\left[1 + \tan\left[\frac{\left(t\cdot\sqrt{g\cdot m\beta} - matan\left(\beta\cdot\frac{V0}{\sqrt{g\cdot m\beta}} \right) \right)}{m} \right]^2 \right]\cdot\frac{m}{\beta}$$

(2.9)

2.3 Dirençli ortamda iki boyutlu hareket

Maddesel noktanın düzlemde hareket etmesi durumunda hareket denklemleri aşağıdaki yazılabilir.

$$m\frac{dV_x}{dt} = -\beta V_x\left(V_x^2 + V_y^2\right)^{1/2}$$
$$m\frac{dV_y}{dt} = -mg - \beta V_x\left(V_x^2 + V_y^2\right)^{1/2} \qquad (2.10)$$

Burada pozitif y ekseni yukarıya doğru seçilmiştir. Bu denklemlerin genel durumda analitik çözümleri mümkün değildir. Bu sebeple bu çalışmada (2.10) denklemlerinde verilen kuple doğrusal olmayan diferansiyel denklem takımı nümerik bir yöntem olan 4.Mertebe Runge-Kutta yöntemiyle çözülecektir.

3.BÖLÜM

DENKLEMLERİN RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

3.1. Giriş

Daha önceki kısımlarda değinildiği gibi genel durumda dirençli ortamdaki maddesel noktanın hareket denklemleri analitik olarak çözülememektedir. Bu bölümde bölüm 2'te elde edilen lineer olmayan diferansiyel denklem takımının çözümünde kullanılabilecek nümerik bir yöntem olan Runge-Kutta yöntemleri kısaca açıklanacaktır.

3.2 Runge Kutta Yöntemi

Direnç kuvvetinin hızın farklı kuvvetleri şeklinde değişmesi durumlarında (2.1) denkleminin analitik çözümü güçtür. Bu nedenle bu çalışmada nümerik bir yöntem olan Runge- Kutta yöntemi kullanılacaktır.

Adi türevli pek çok diferansiyel denklemin analitik çözüm yöntemi olmasına karşılık, birçoğunun da bilinen yöntemler yardımıyla çözümü mümkün olamamaktadır. Hatta değişkenlerine ayrılabilen tipten olsalar bile bazı diferansiyel denklemlerde, elemanter yöntemler yardımıyla integral hesabı yapmak çok zor olabilmektedir. Bu nedenle, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleriyle ilgili olarak pek çok araştırma yapılmış

ve analitik çözümlere yakın sonuçlar veren çok sayıda yöntem ortaya konmuştur. Özellikle bilgisayar imkânlarının artmasıyla, elemanter fonksiyonlar cinsinden çözümün elde edilebildiği bazı durumlarda dahi, uygulama kolaylığı nedeniyle sayısal yöntemler tercih edilmektedir. Ancak dikkat edilmesi gereken nokta, verilen şartlara uygun bir çözümün varlığı ve tekniğinin araştırılması gerektiğidir (Chapra ve Canale, 2002).

$$y' = f(x, y); \qquad y(x_0) = y_0 \tag{3.1}$$

(3.1) ile tanımlanan başlangıç değer probleminde, $x = x_0$ noktasından sonraki noktada fonksiyon değeri, bu $x = x_0$ noktası civarında, fonksiyonun Taylor seri açılımı yapılarak hesaplanabiliyordu. Ancak bu tür bir hesaplamada karşımıza çıkacak yüksek mertebeden türevleri bulmak oldukça zaman alıcı olacaktır. Bu nedenle Taylor seri yöntemi yerine, bu serinin indirekt olarak kullanıldığı Runge-Kutta yöntemlerini kullanmak hesaplama açısından büyük kolaylık getirecektir. Runge-Kutta yöntemleri bir anlamda integrallerin yaklaşık hesabına ait Simpson kuralına dayanır. 1891 yılında Carl Runge tarafından teklif edilmiş ve kullanıldığı yıllarda diğer yöntemlere nazaran daha hassas sonuçlar vermiştir. 1901 yılında, Kutta bazı değişiklikler yaparak yöntemi daha iyi sonuçlar verecek hale sokmuştur. Bu yöntemin çok değişik şekilleri mevcut olup, genel olarak fonksiyonun bir sonraki değeri,

$$y_{i+1} = y_i + (x_i, y_i, h)h \tag{3.2}$$

formunda hesaplanmaktadır. Buradaki $\Phi(x_i, y_i, h)$ aralık üzerinde temsili eğim olarak yorumlanabilir. Bu fonksiyon, a_i'lar sabitler olmak üzere,

$$\Phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilmektedir. (3.2) deki k_i'lar ise;

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklindedir. Dikkat edilirse her bir k_i değeri bir önceki k_i'ler cinsinden ifade edilmektedir.

‘’n’’ değişik şekilde seçilerek farklı türdeki formüller elde edilebilir. n=1 seçilecek olursa Euler yöntemindeki formüller elde edilir. n=2 seçilirse ikinci mertebe Runge-Kutta formülleri elde edilir. n=4 seçilirse dördüncü mertebeden Runge-Kutta formülleri elde edilir. 4.Mertebe Runge-Kutta Yönteminde her bir adımdaki hata (h^5)ve toplam hata (h^4)’tür.

BÖLÜM 4

SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

4.1. Giriş

Bu bölümde daha önceki bölümlerde elde edilmiş olan hareket denklemlerinin çözümleri ile elde edilen sayısal sonuçlar çeşitli parametreler için detaylı olarak incelenecek ve sonuçlar sunulacaktır. Kısım 4.2'de bir boyutlu hareket ve kısım 4.3'te iki boyutlu hareket incelenecektir.

4.2. Bir boyutlu hareket

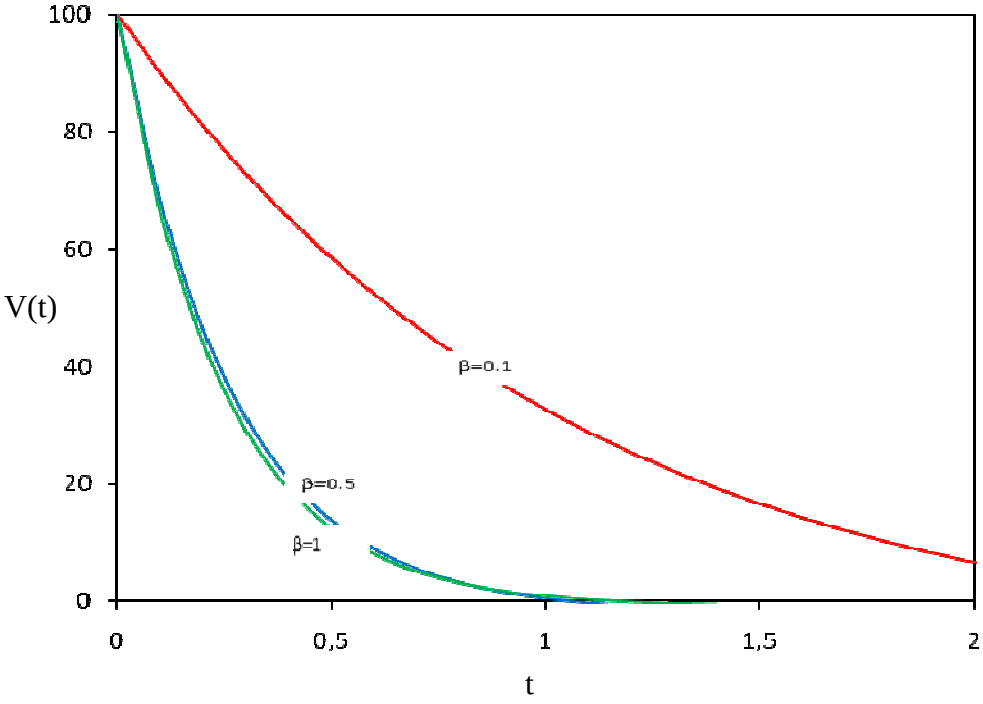
4 .2.1. Bir boyutlu harekette hızın zaman ile değişimi

Bu bölümde öncelikle cismin hızının zamana göre değişimi farklı parametreler için verilecektir. Önceki bölümlerde elde edilmiş olan hız-zaman ve konum-zaman denklemleri için analitik durumda MATHCAD programından sonuçlar elde edilmiştir. Nümerik hesaplamalar için kullanılan 4.Mertebe Ruge-Kutta yöntemi için Fortran programı hazırlanmıştır. Tüm hesaplamalarda çift incelikli sayılar kullanılmıştır.

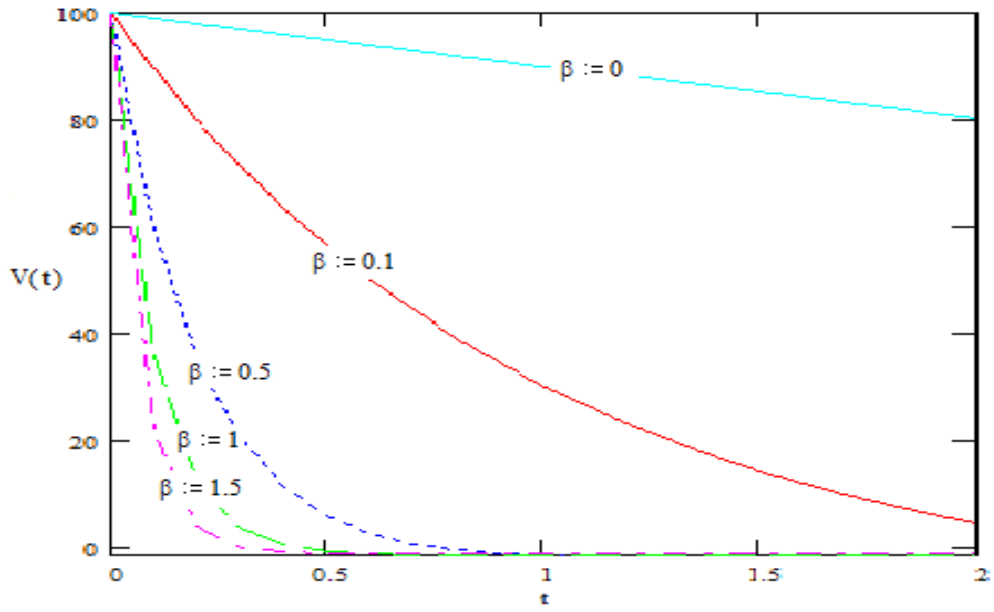
Bir maddesel noktanın doğrusal(DD) dirençli bir ortamda hızının zaman ile değişimi farklı direnç parametreleri, farklı maddesel nokta kütlesi ve başlangıç hızları için Şekil 4.1-4.8'de verilmiştir. **Başlangıç hızları yerden yukarıya doğru** V_o=100m/sn ve 800m/sn, maddesel nokta kütlesi m=0.1kg, 0.5kg, 1kg ve 1.5 kg, direnç katsayısı β=0.1, 0.5, 1 ve 1.5kg/s olarak seçilmiştir. Grafiklerde hem analitik hem de nümerik sonuçlar sunulmuştur. Grafikler incelendiğinde analitik ve nümerik sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu gözlenmektedir. Artan direnç katsayısı ile hız azalmaktadır. Direnç

katsayısının artmasıyla birlikte hız zaman eğrileri birbirine yaklaşmaktadır. Beklenildiği gibi büyük direnç katsayılarında limit hıza daha çabuk ulaşılmaktadır. Maddesel noktanın kütlesinin artmasıyla birlikte maddesel noktanın hızı daha yavaş düşmektedir. Dolayısıyla limit hıza daha geç ulaşılmaktadır. Dirençsiz duruma göre çok farklı hız-zaman değişimi elde edilmektedir. Örneğin Şekil 4.1 göz önüne alınırsa, 2.saniyede en küçük dirençli durum olan β=0.1 için hız yaklaşık 10m/sn değeri alırken dirençsiz durumda hız 80m/sn olmaktadır.

Direncin hızın karesiyle değişmesi durumundaki hız zaman eğrileri Şekil 4.9-4.11'de gösterilmiştir. Bu durumda elde edilen hız eğrileri lineer durum ile kıyaslandığında hızın zaman ile daha çabuk azaldığı gözlenmektedir.

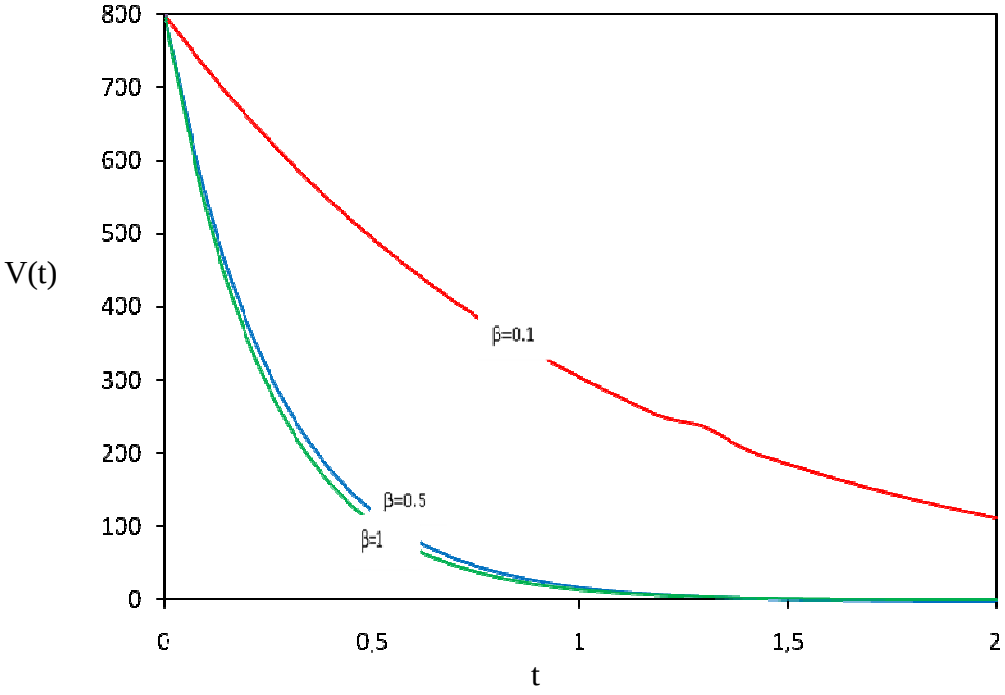


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

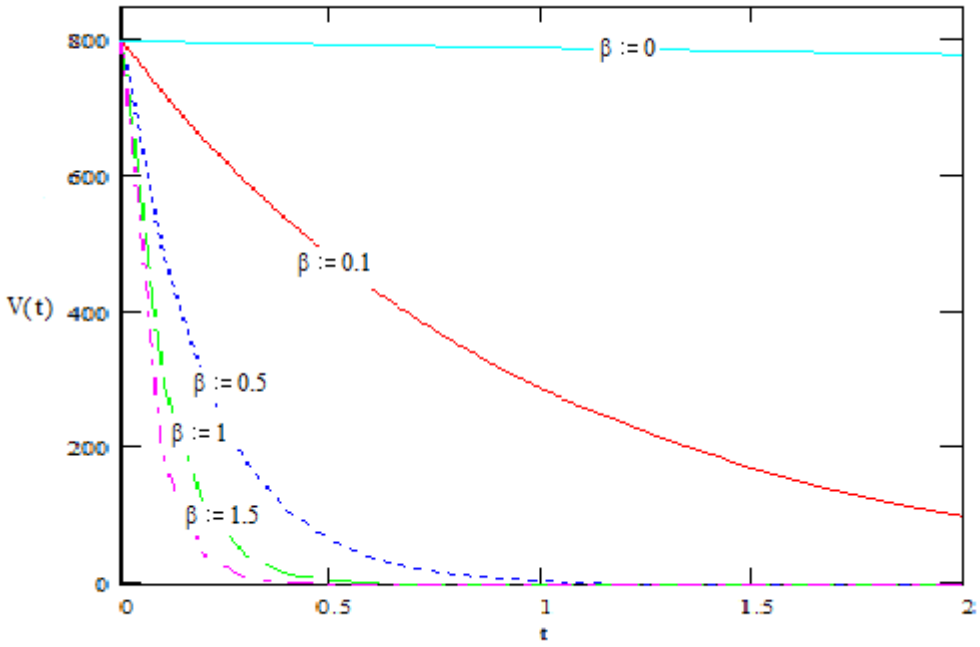


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.1 Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=0.1 kg, DD)

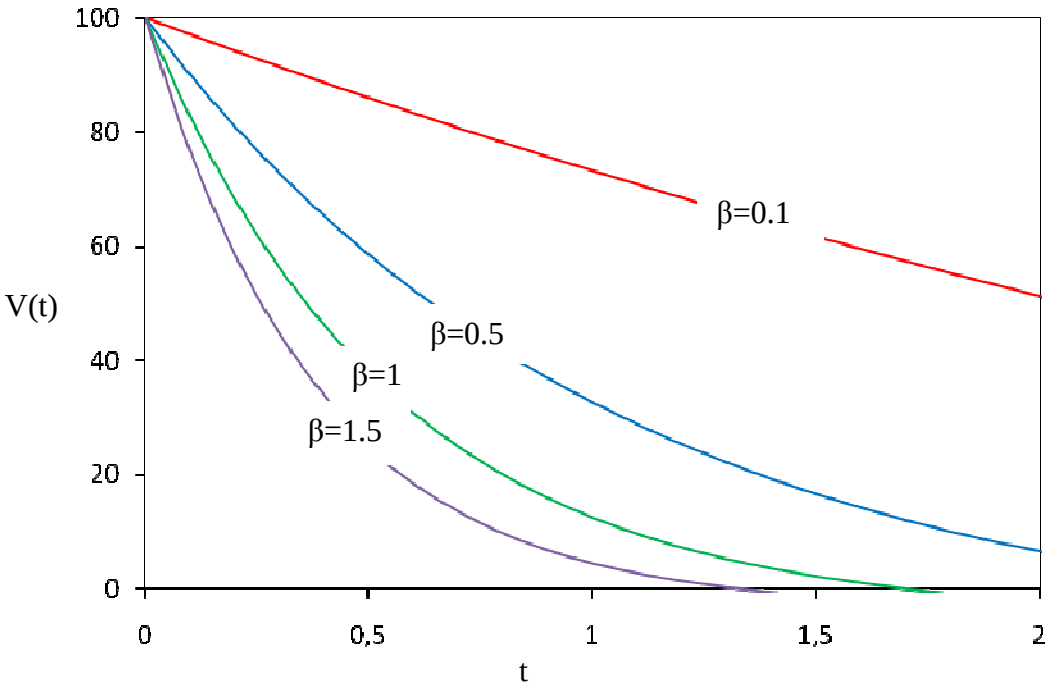


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

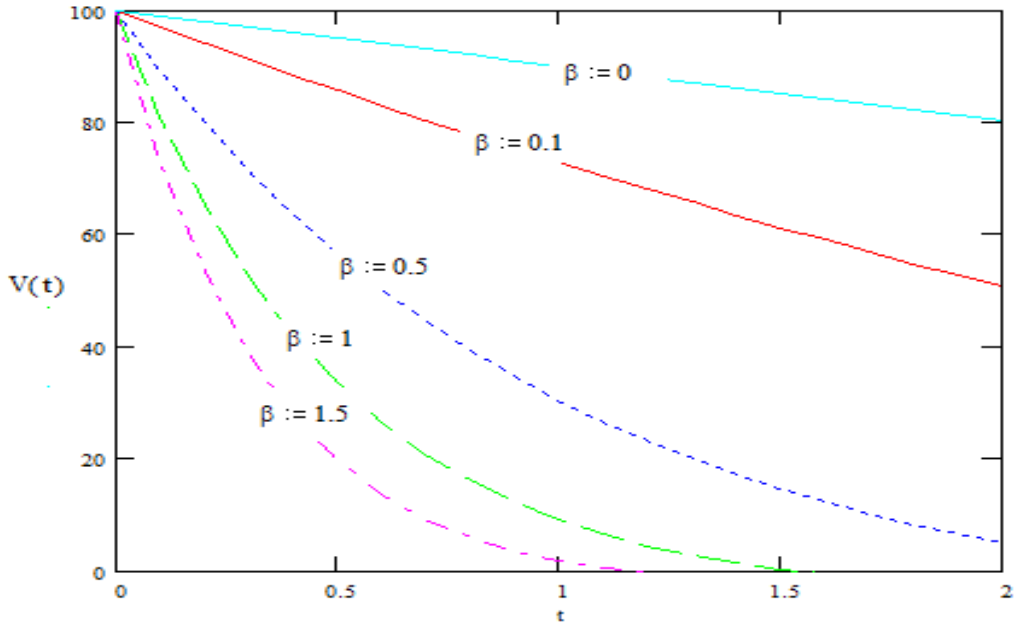


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.2 Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=800m/sn, m=0.1 kg, DD)

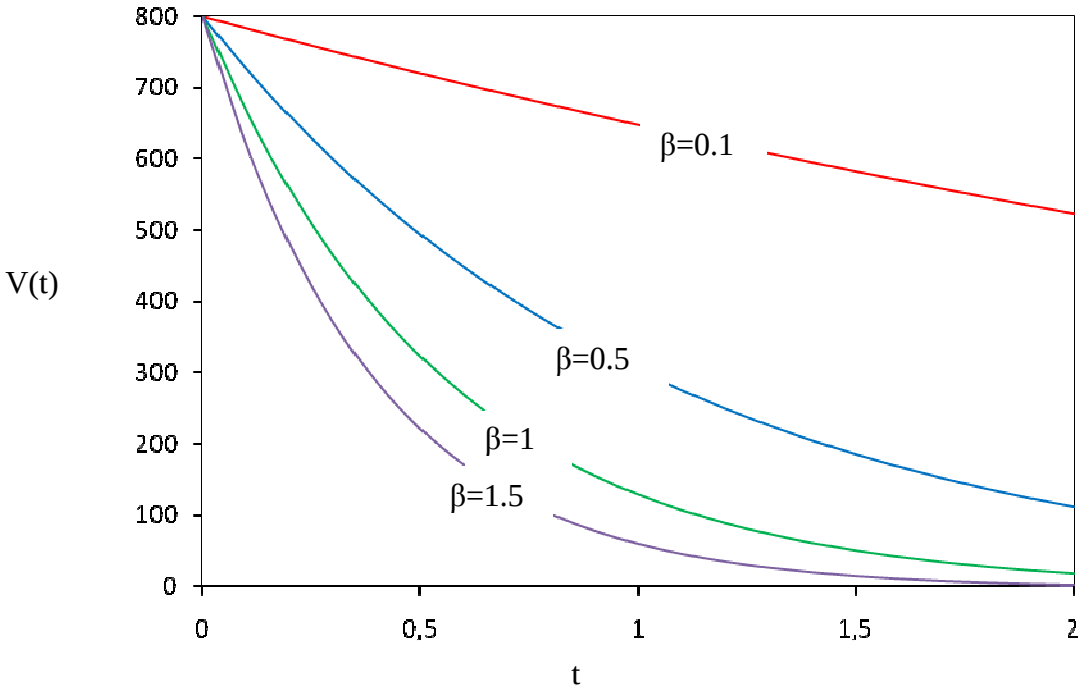


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

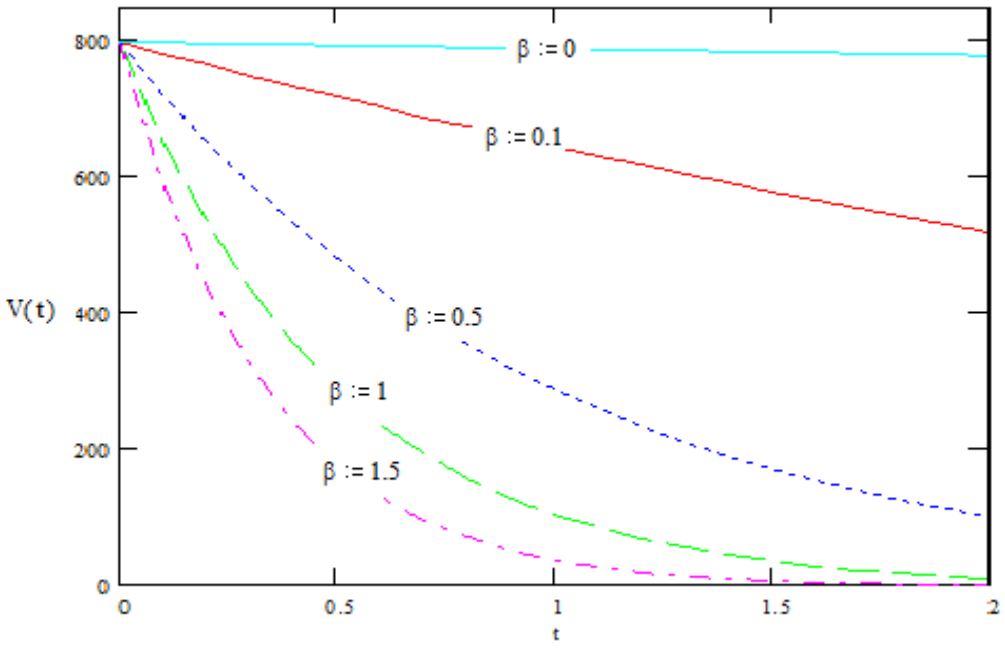


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.3 Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=0.5 kg, DD)

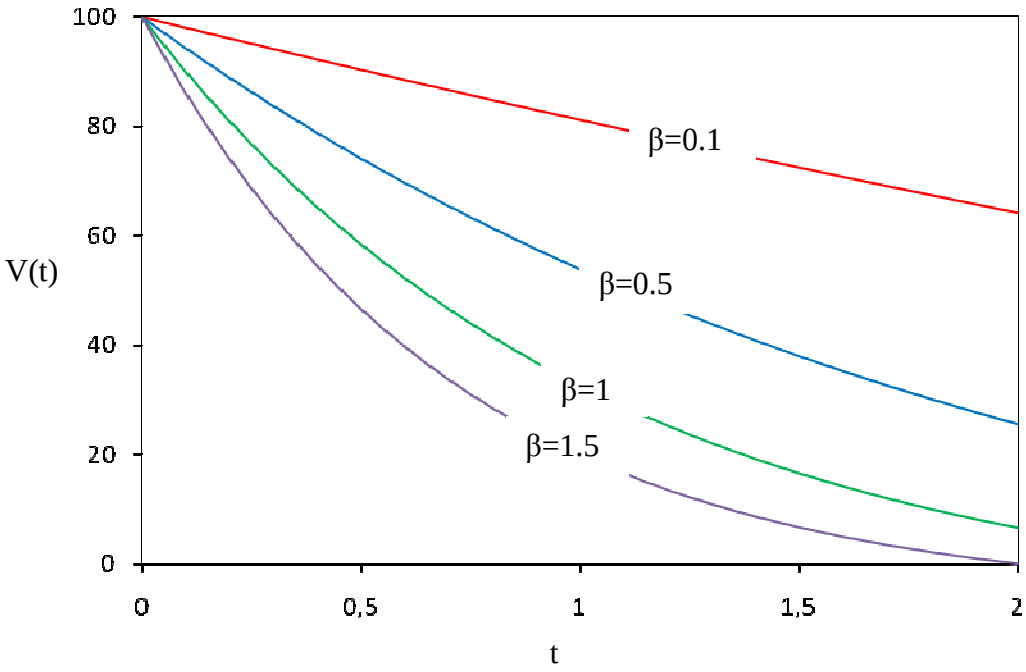


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

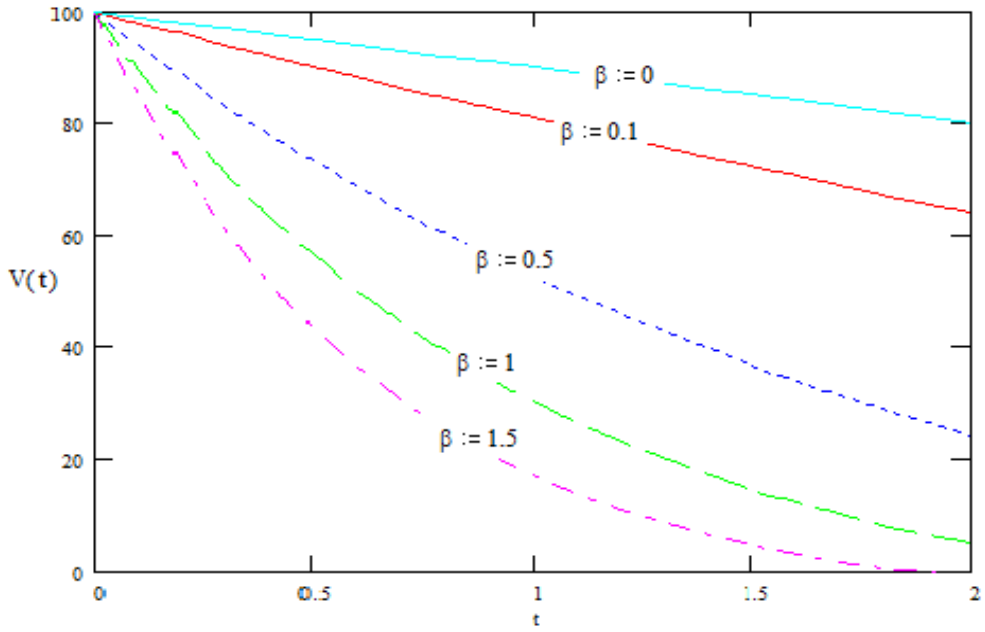


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.4 Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=800m/sn, m=0.5 kg, DD)

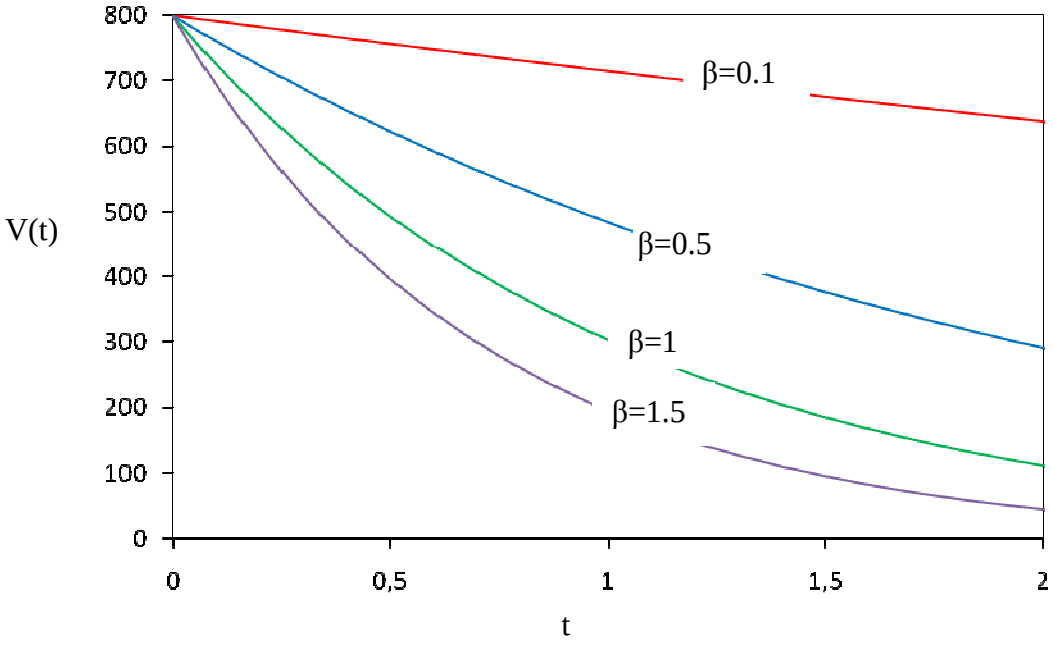


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

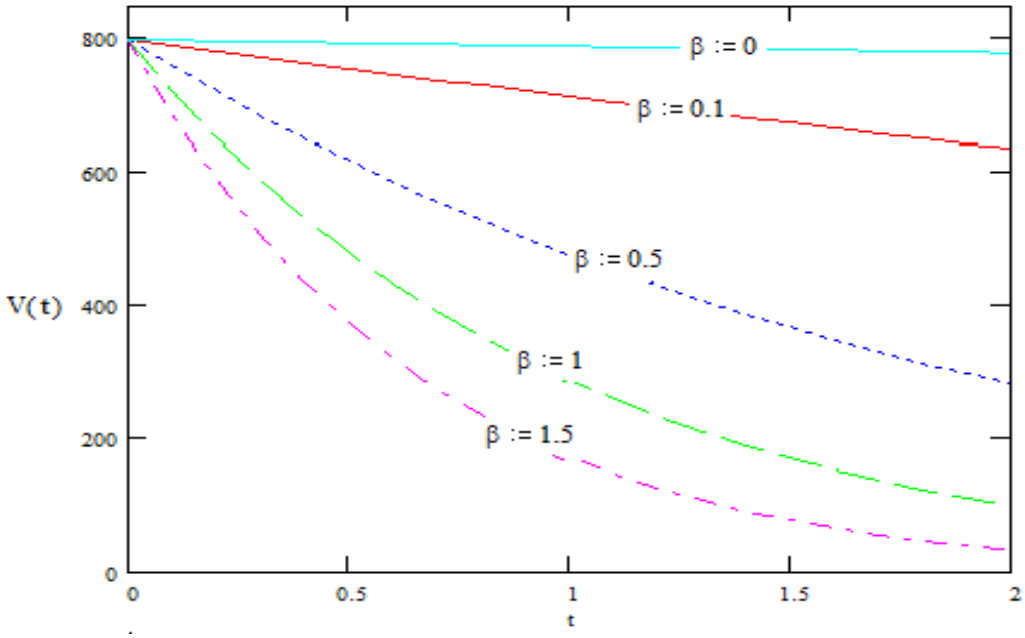


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.5 Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=1 kg, DD)

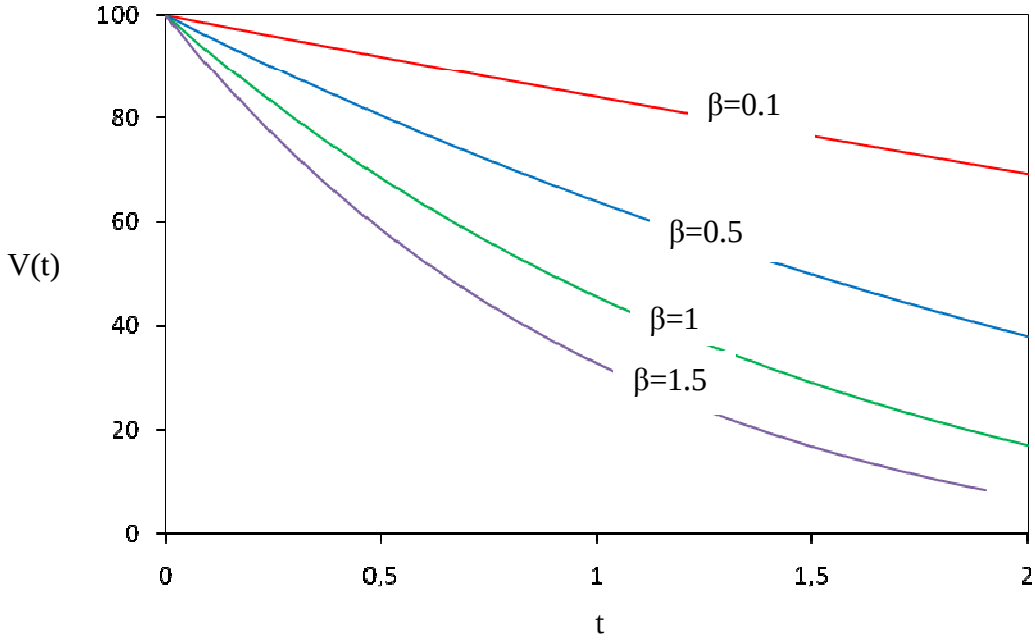


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

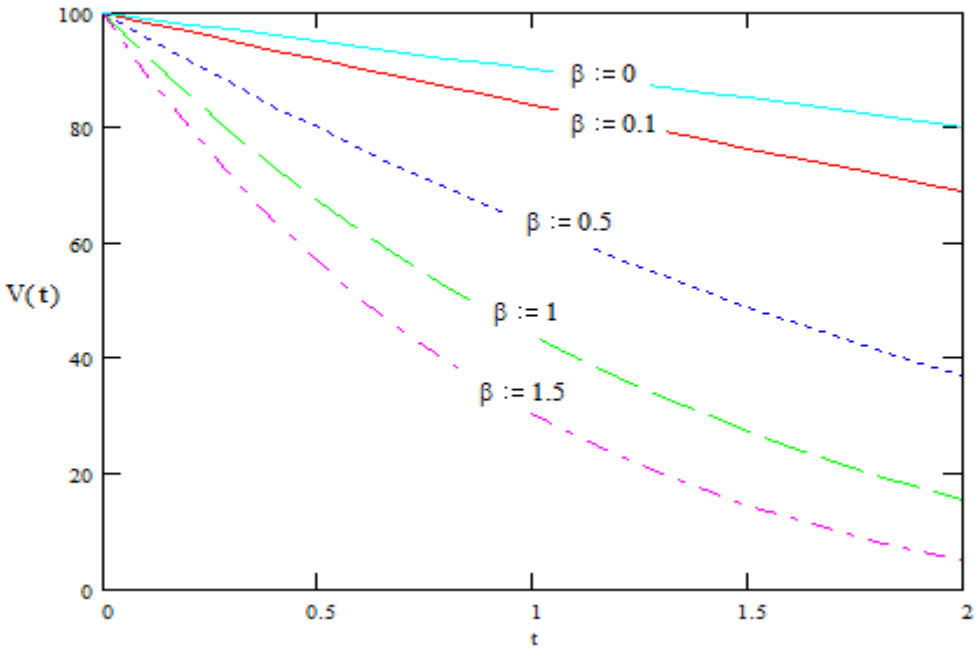


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.6 Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=800m/sn, m=1 kg, DD)

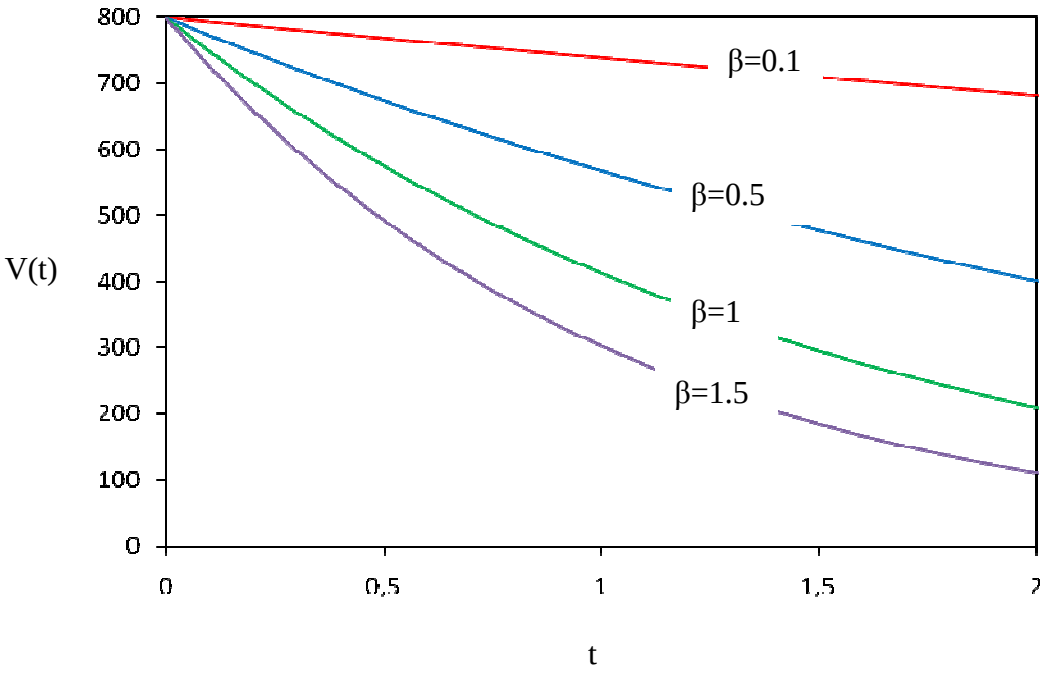


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

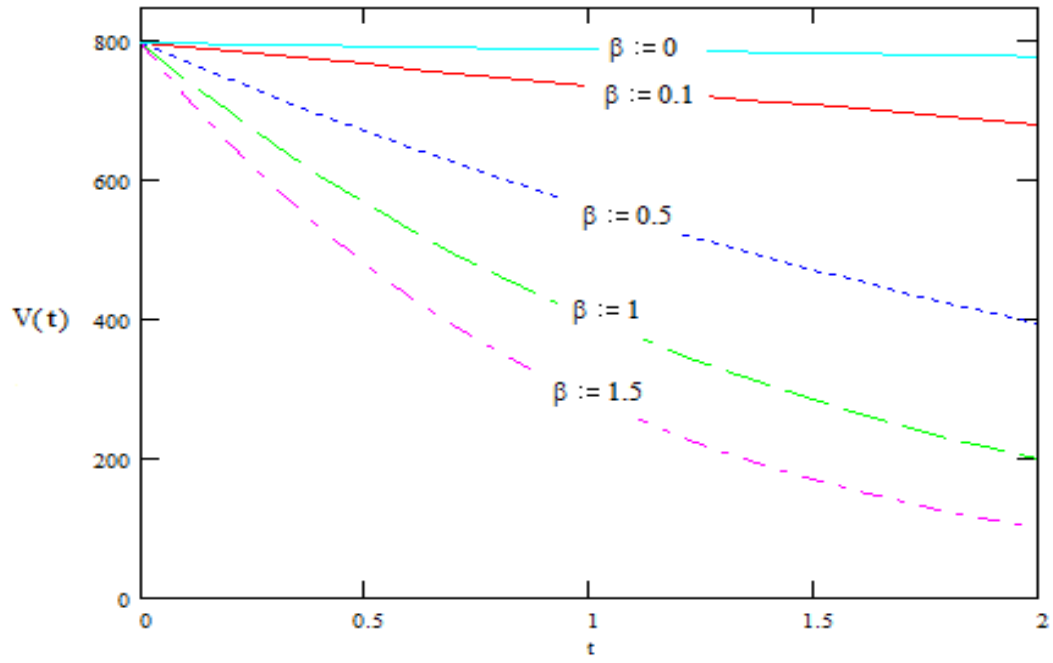


b)Analitik Çözüm

Şekil 4.7 Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=1.5 kg, DD)

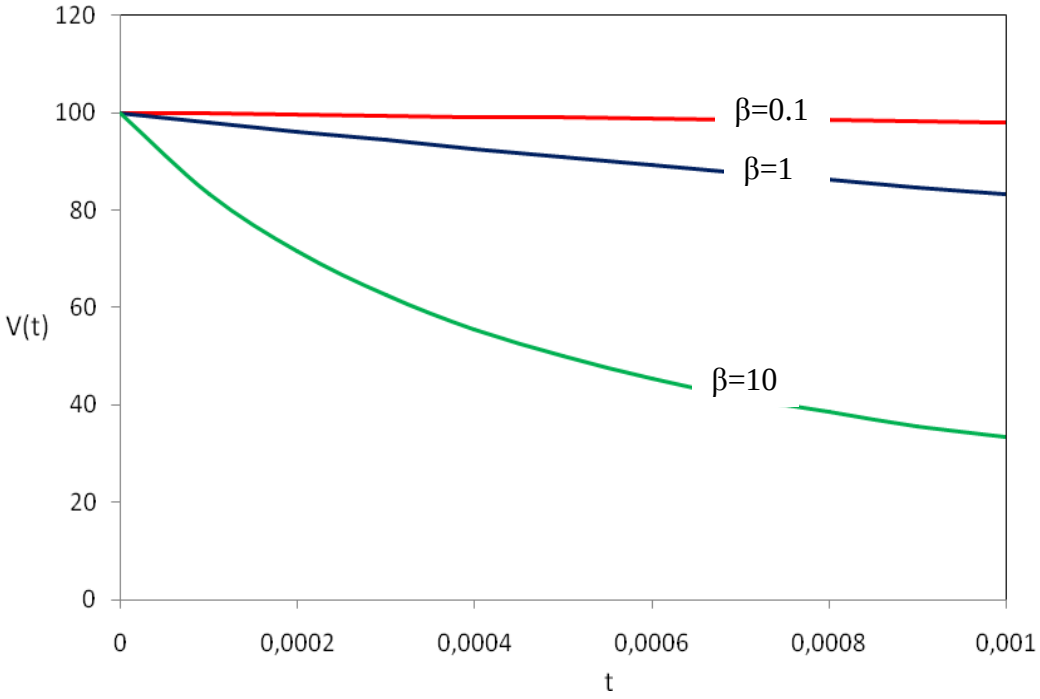


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

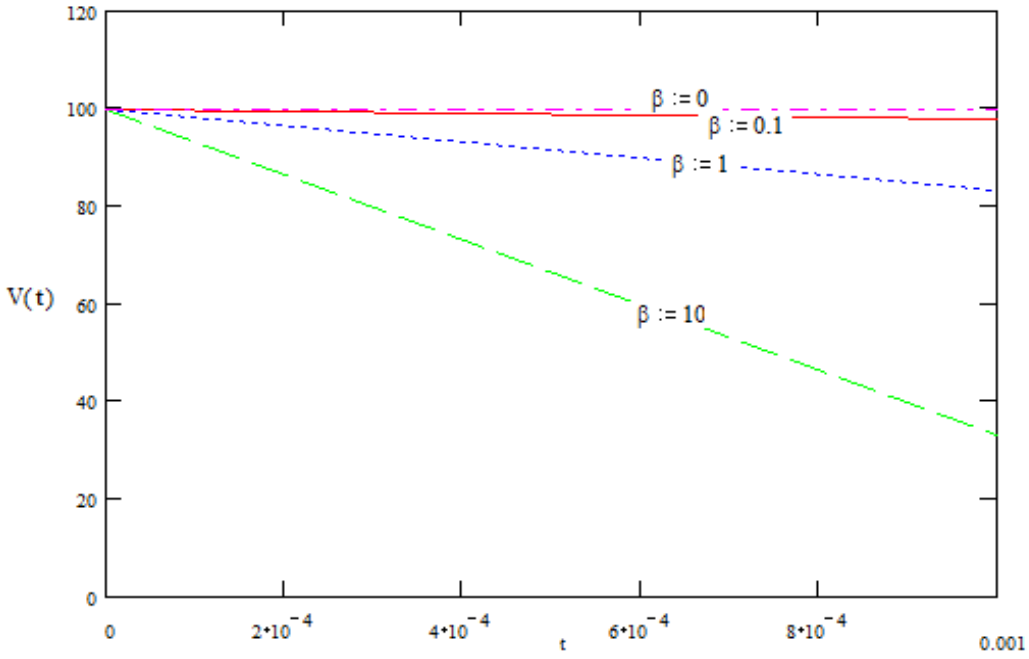


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.8 Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=800m/sn, m=1.5 kg, DD)

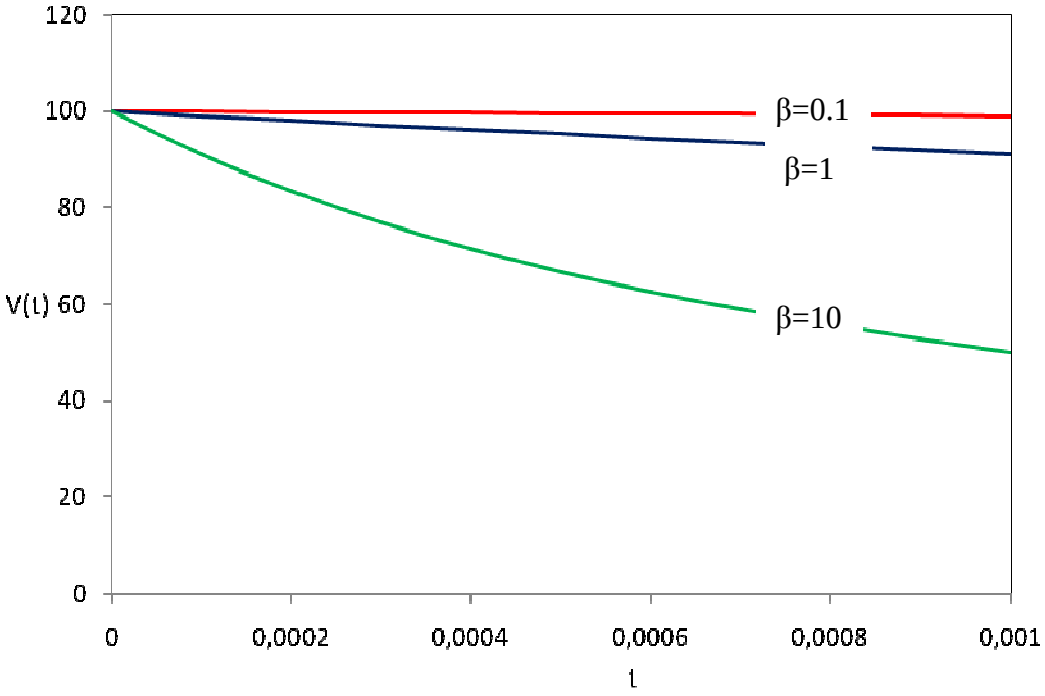


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

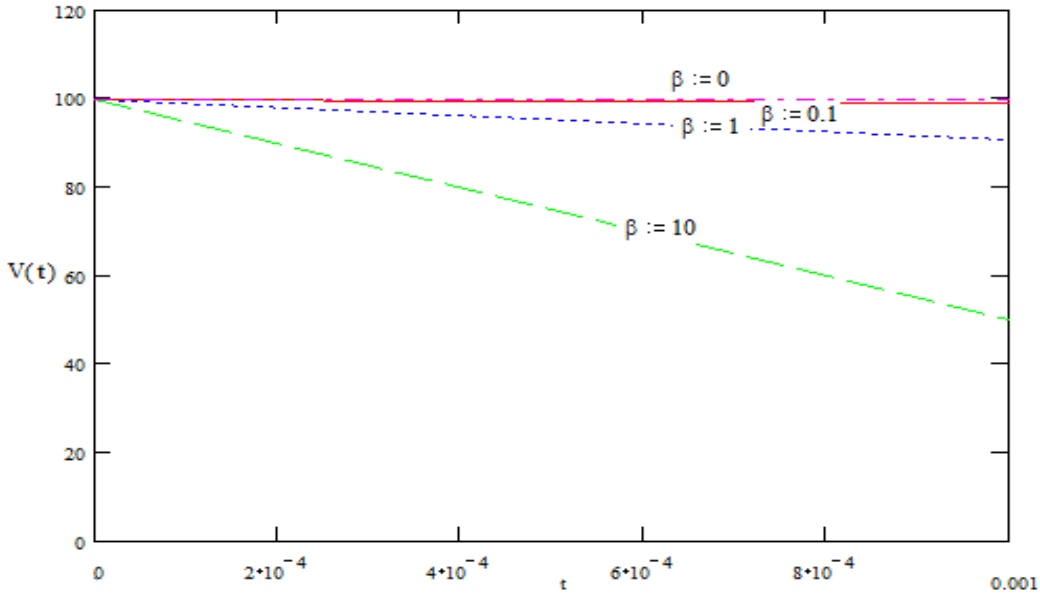


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.9 Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi(Vo=100m/sn, m=0.5 kg, KD)

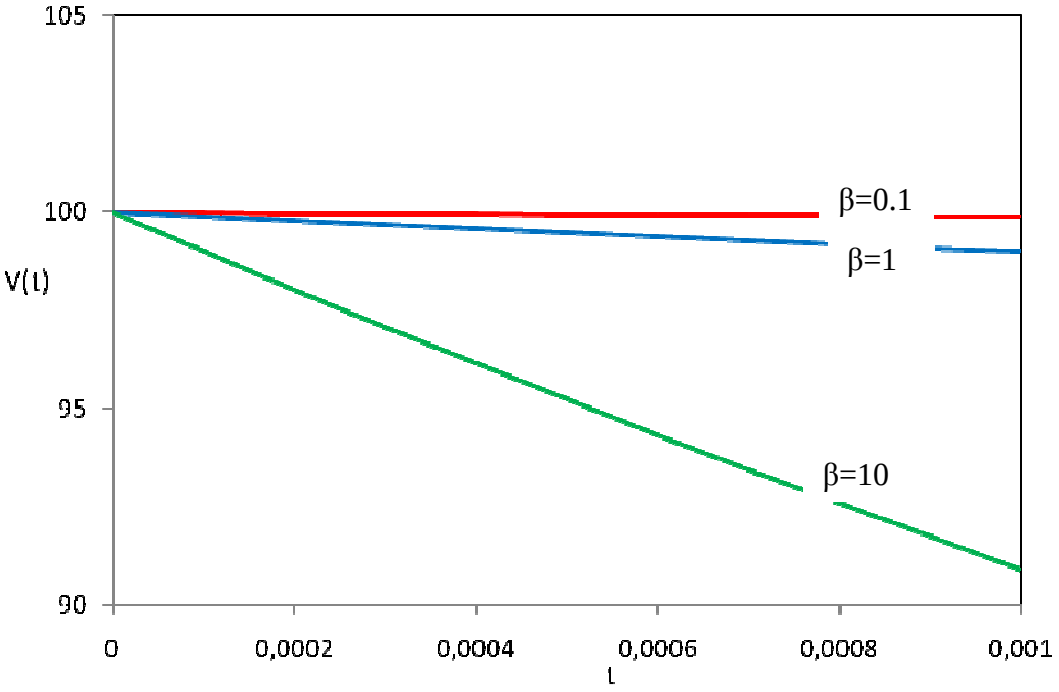


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

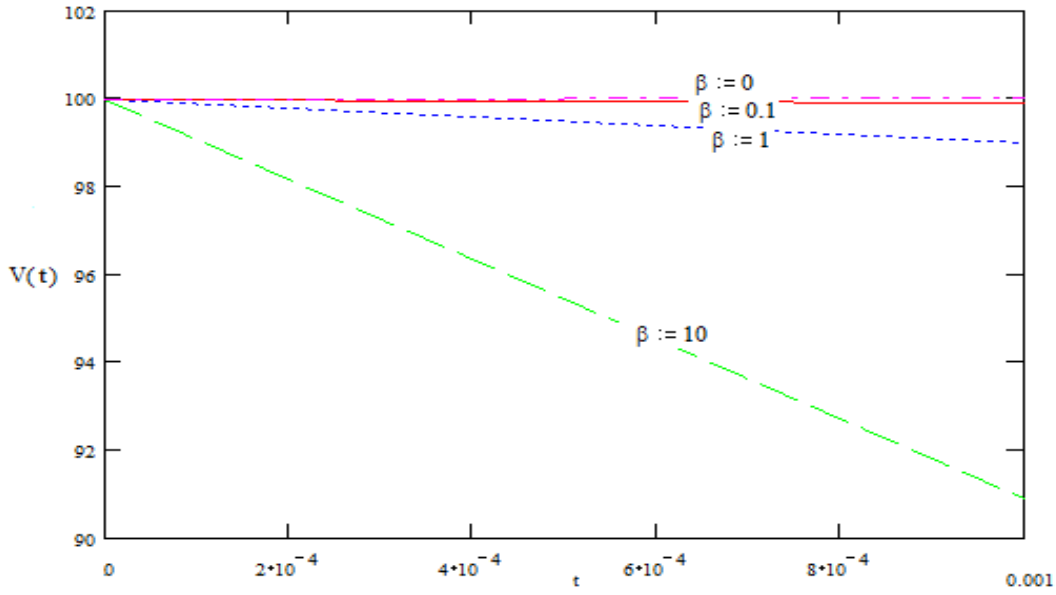


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.10 Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=1 kg, KD)



a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

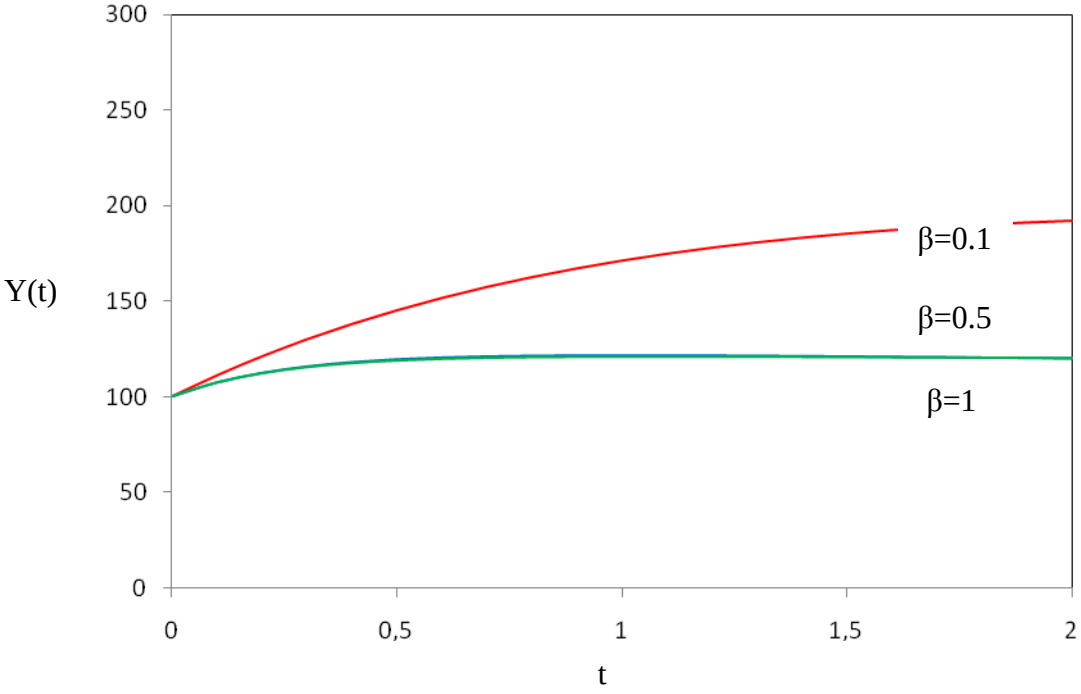


b)Analitik Çözüm

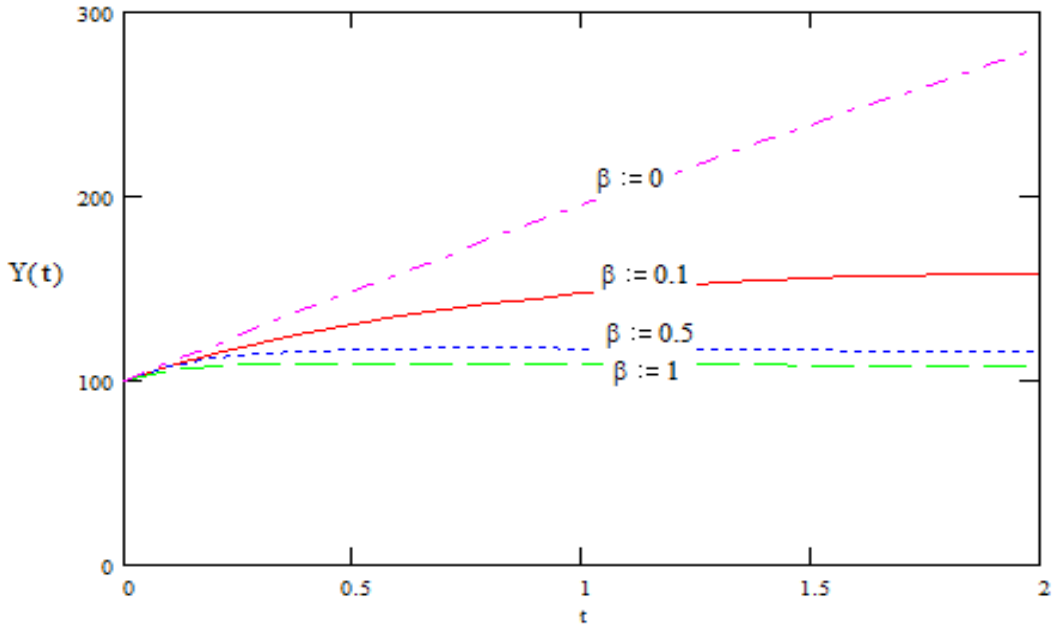
Şekil 4.11 Bir maddesel noktanın hızının zamanla değişimi(Vo=100m/sn, m=10 kg, KD)

4 .2.2. Bir boyutlu harekette konumun zaman ile değişimi

Direnç kuvvetinin hız ile doğrusal değişmesi durumunda elde edilen konum zaman grafikleri Şekil 4.12-4.15'te gösterilmiştir. Grafikler incelendiğinde konumun zaman ile eğrisel olarak değiştiği gözlenmektedir. Direnç katsayısının artmasıyla konum azalmaktadır. Direncin hız ile karesel değişmesi durumu için konum zaman eğrileri Şekil 4.16-4.18'de verilmiştir. Kütlenin artmasıyla eğriler birbirine yaklaşmaktadır.

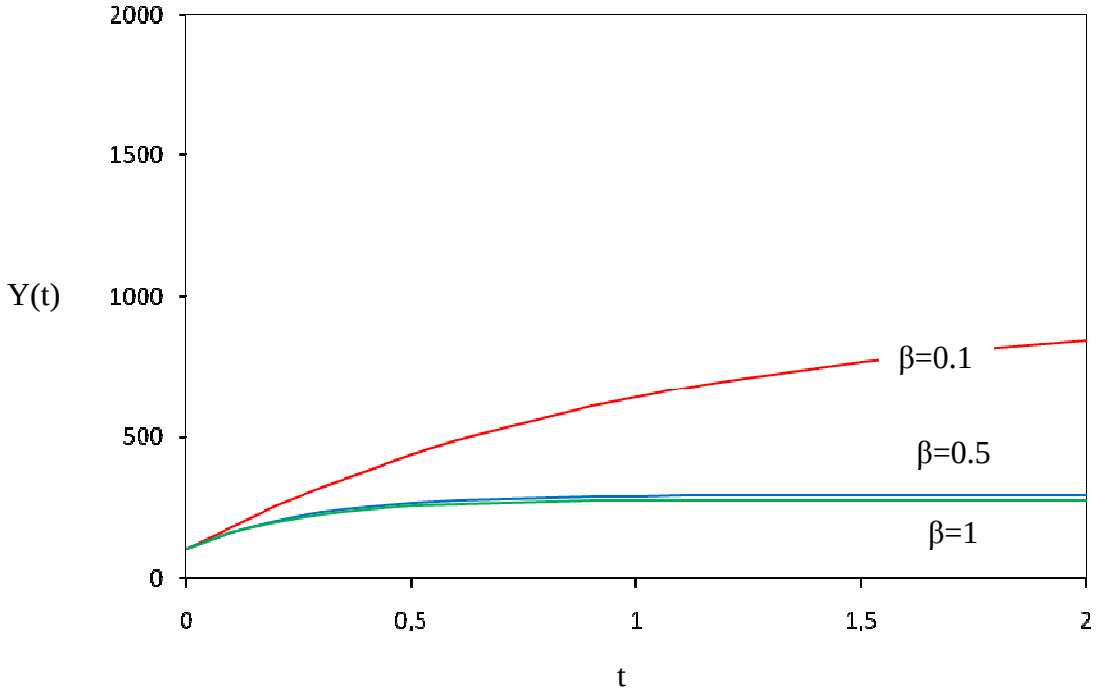


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

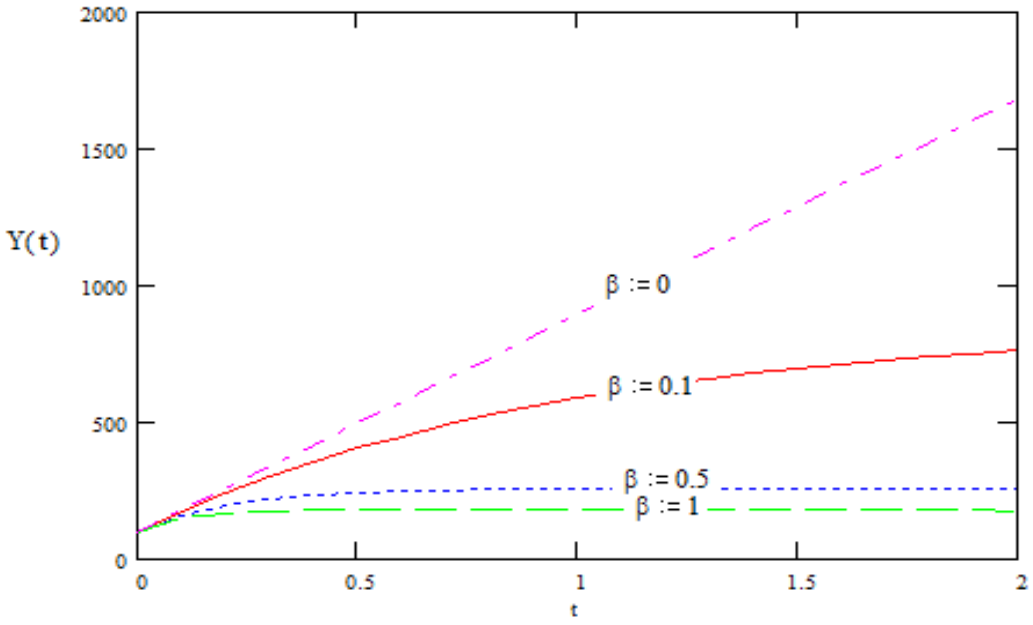


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.12 Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=0.1 kg, DD)

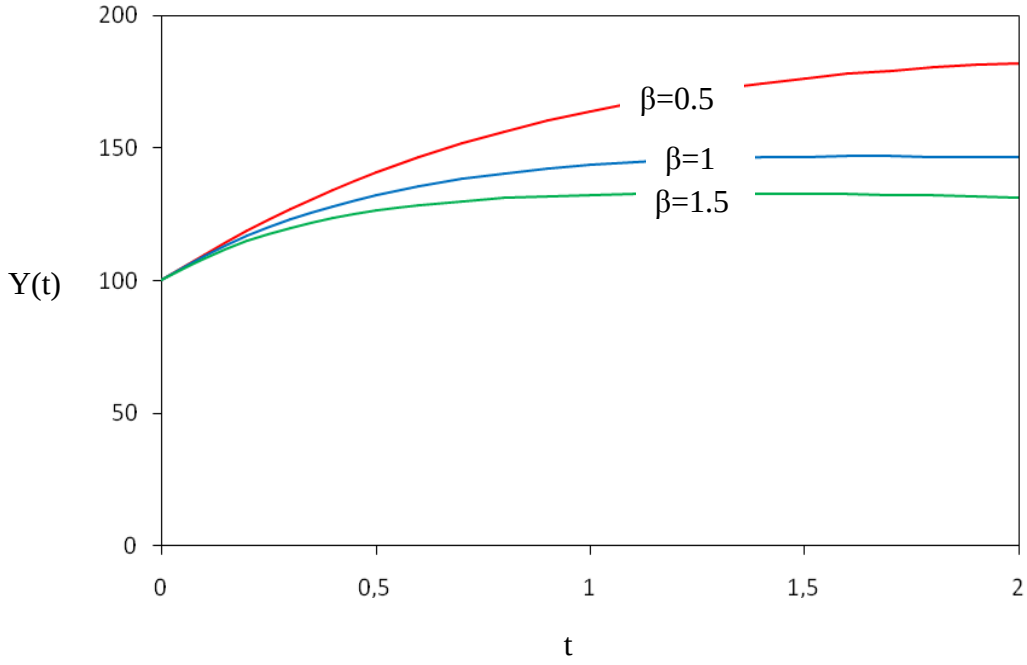


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

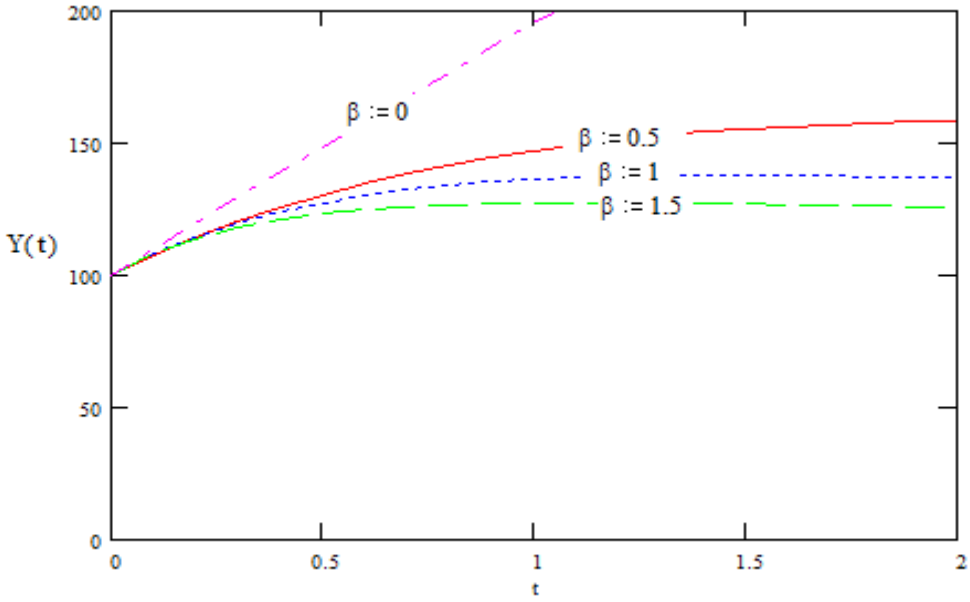


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.13 Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi(Vo=800m/sn, m=0.1 kg, DD)

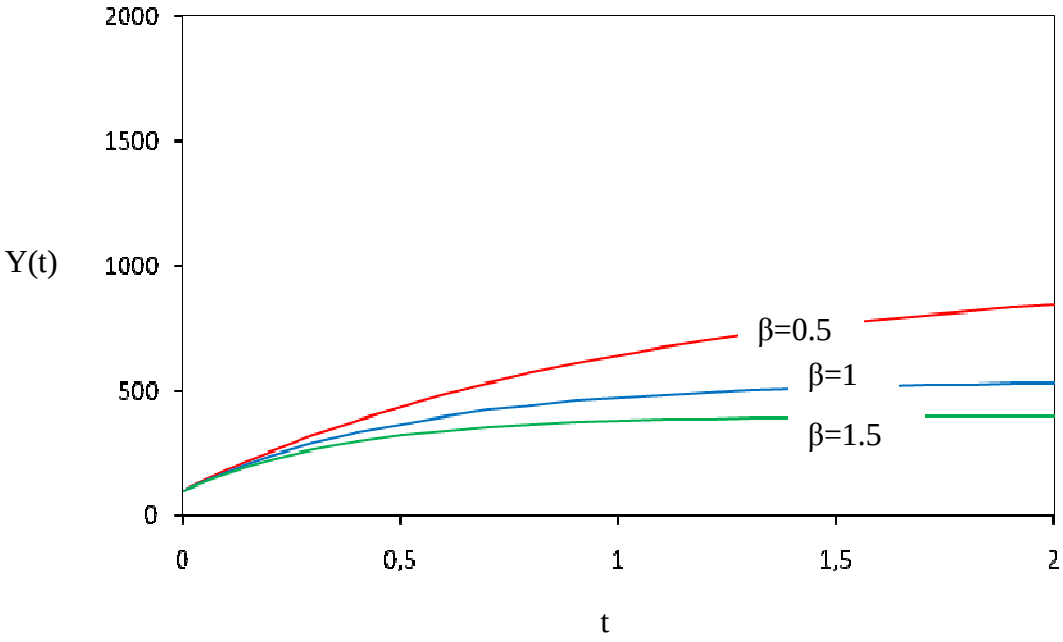


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

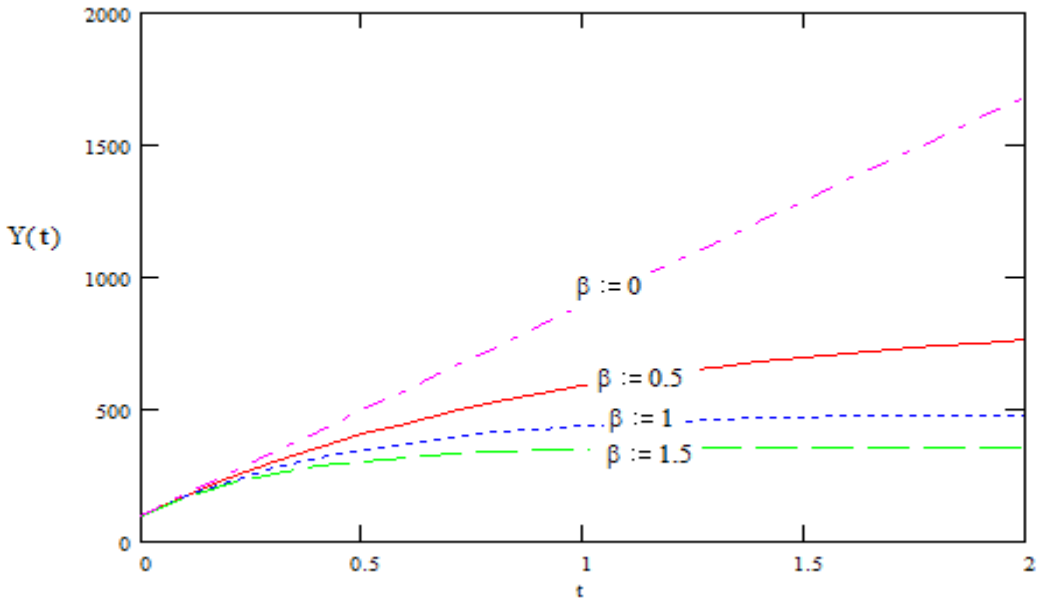


b) Analitik Çözüm

Şekil 4.14 Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=0.5 kg, DD)

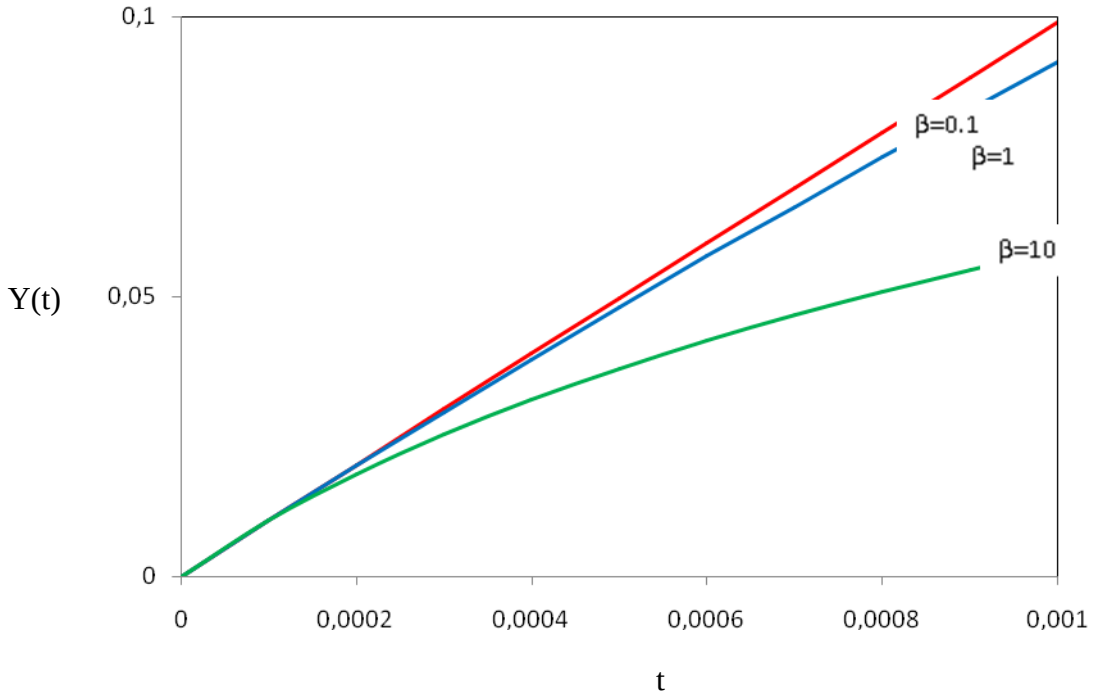


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

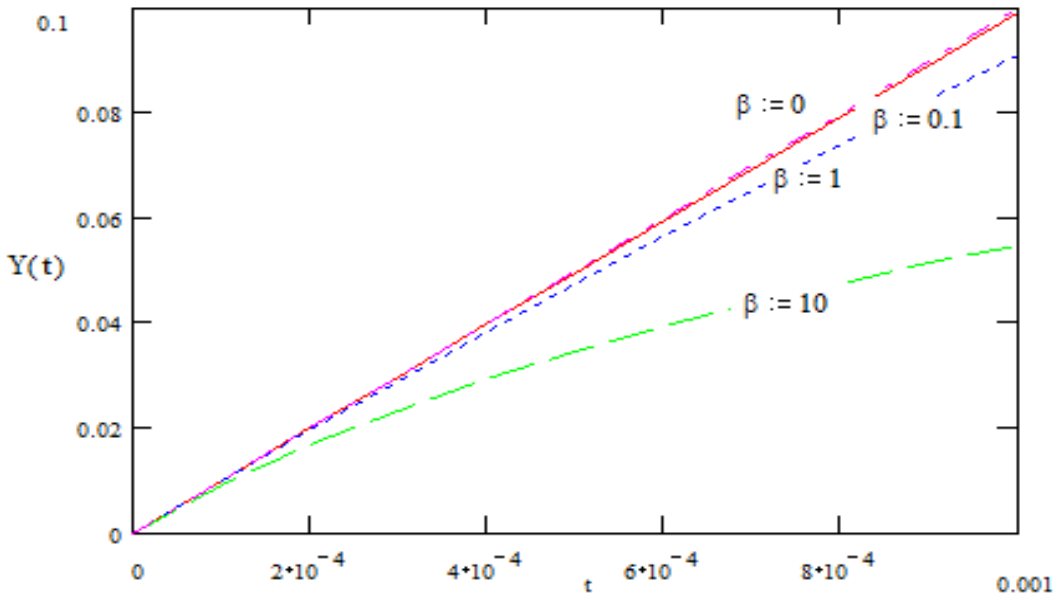


b)Analitik Çözüm

Şekil 4.15 Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi (Vo=800m/sn, m=0.5 kg, DD)

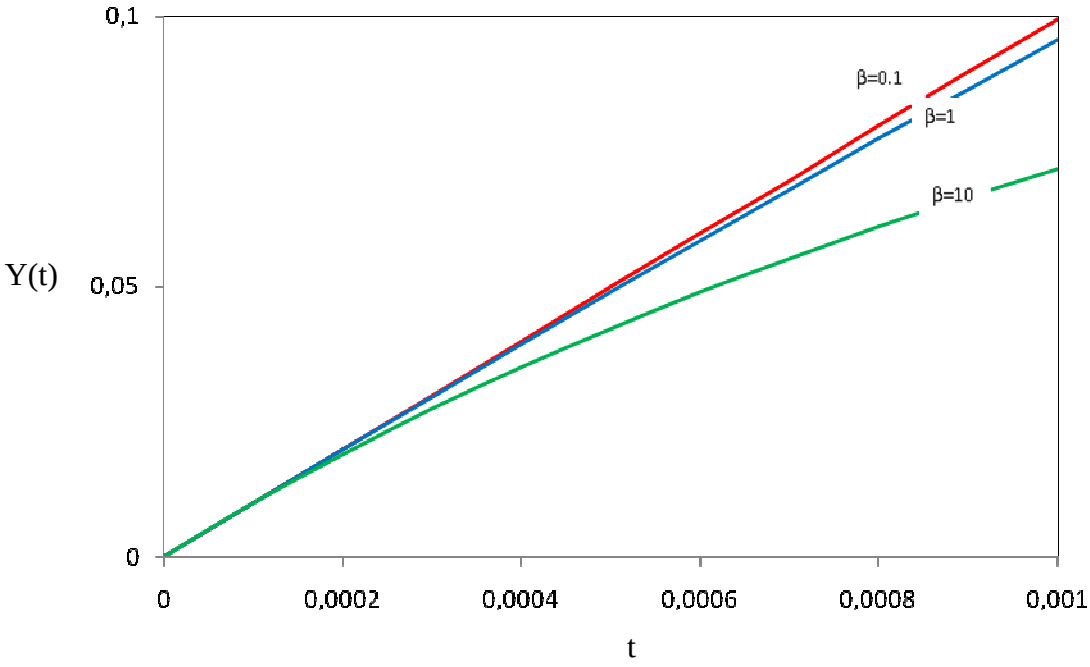


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

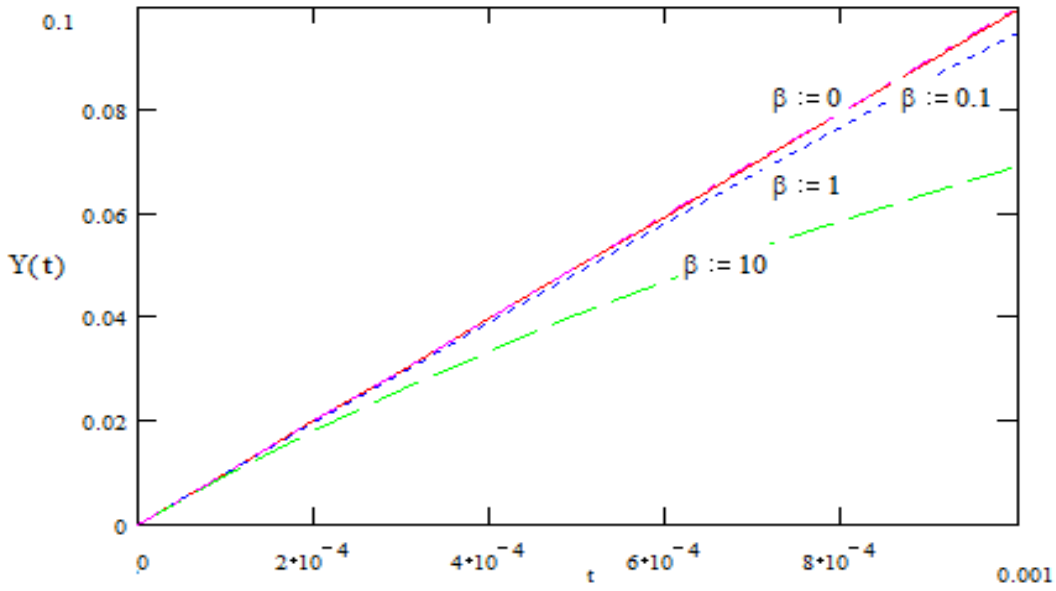


b)Analitik Çözüm

Şekil 4.16 Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=0.5 kg, KD)

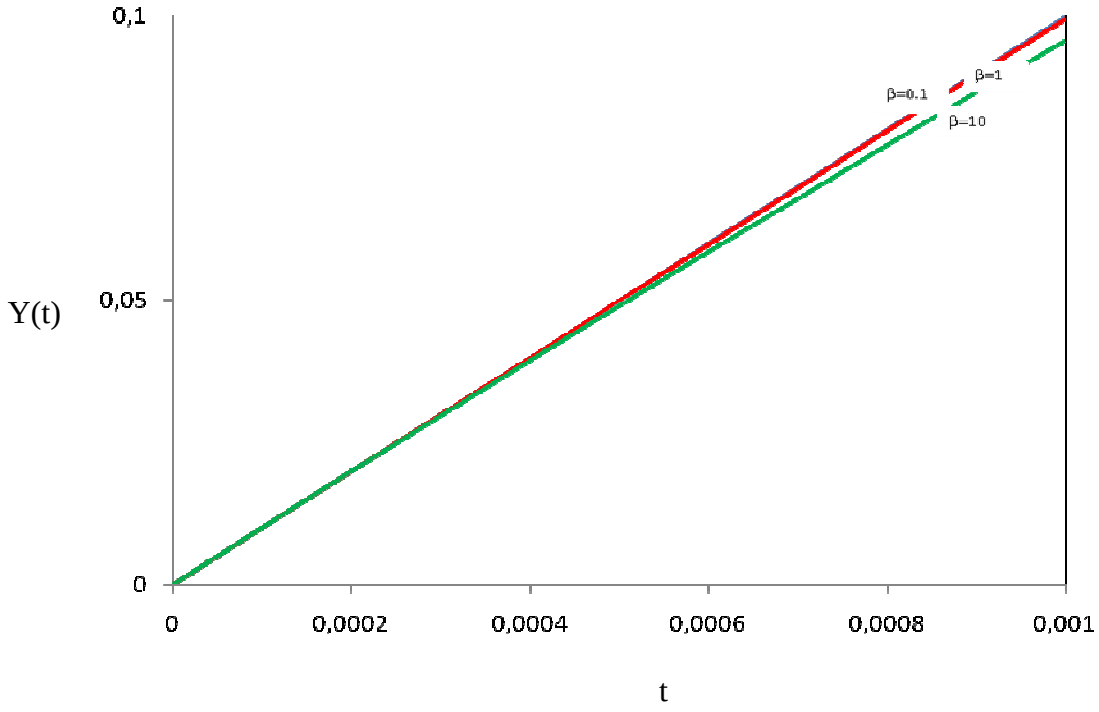


a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)

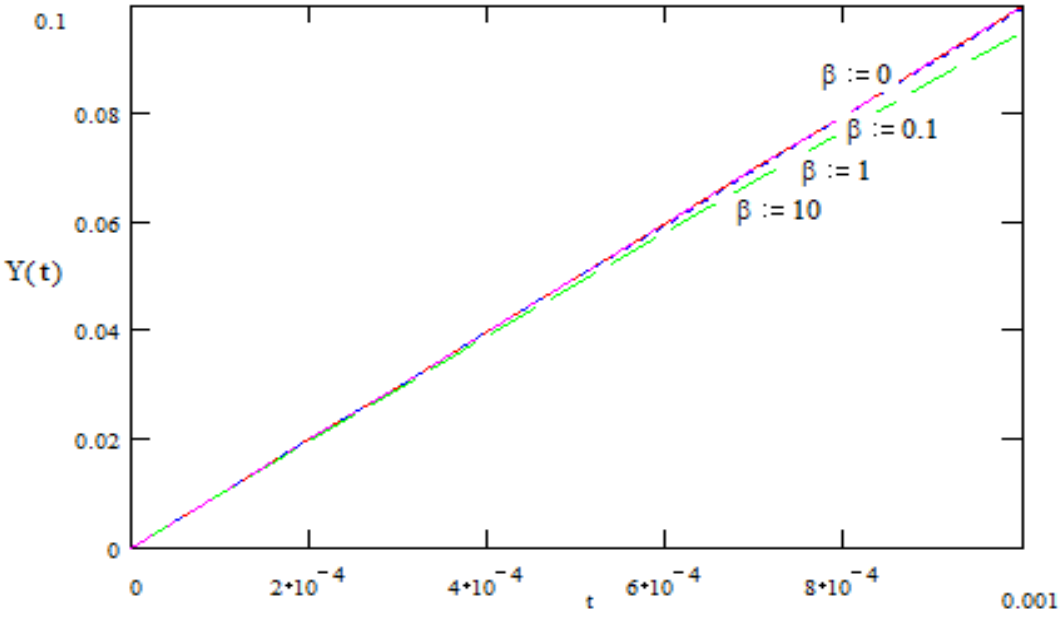


b)Analitik Çözüm

Şekil 4.17 Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi (Vo=100m/sn,m=1 kg, KD)



a) Runge-Kutta Yöntemi (h=0.0001)



b)Analitik Çözüm

Şekil 4.18 Bir maddesel noktanın konumun zamanla değişimi (Vo=100m/sn, m=10 kg, KD)

4.3. İki boyutlu hareket

Bu çalışmada bulunan sonuçlar öncelikle literatürde (Kittel ve ark., 1973) bulunan deneysel sonuçlar ile kıyaslanacaktır (Çizelge 4.1). Çizelge incelendiğinde dirençli ortam kabulünün dirençsiz ortam kabulüne göre deneysel sonuçlarla çok daha uyumlu olduğu gözlenmektedir.

Çizelge 4.1. Parabolik atışta Deneysel, Dirençli ve Dirençsiz ortam kabulleri durumundaki menzil (M) ve uçuş zamanının (t_u) kıyaslanması ($\theta=45^o$)

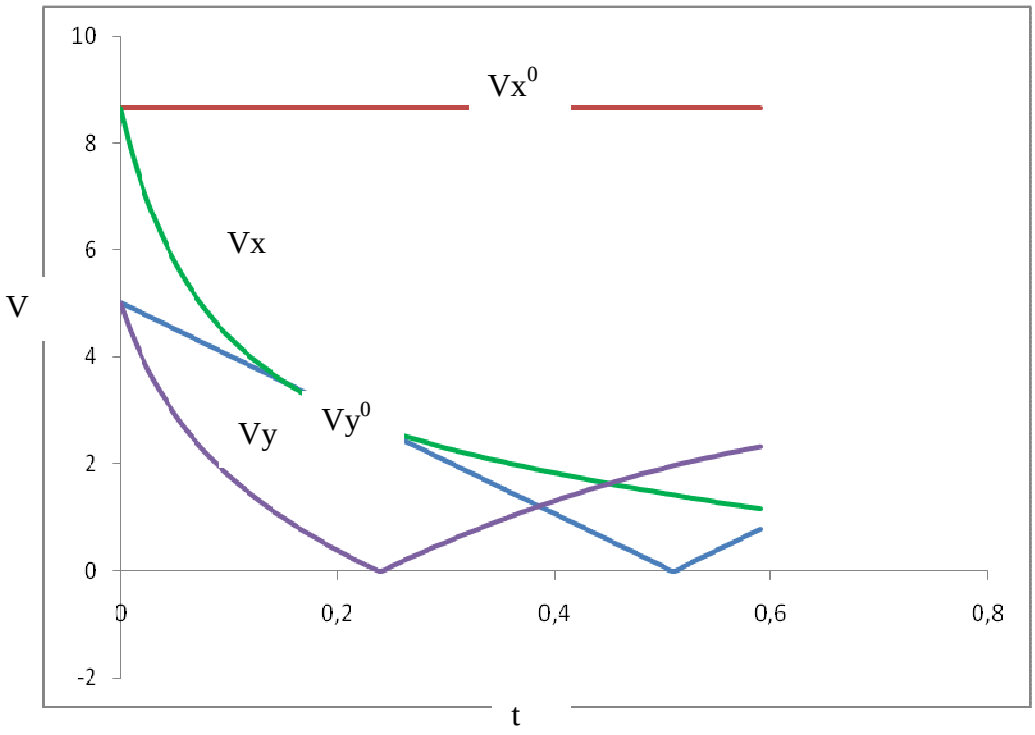
Hız (m/s)	Deneysel		Dirençli ortam(DD)		Dirençsiz	
	M(m)	t(sn)	M(m)	t(sn)	M(m)	t(sn)
101.8	972	14.4	1074.96	14.9	2112	29.35
112.2	1159	15.7	1306.23	16.5	2566.53	32.34
121.9	1348.8	17.0	1544.58	17.9	3029.48	35.14
131.36	1539	18.2	1794.62	19.3	3517.93	37.87

Dirençli bir ortamdaki iki boyutlu harekete ait hız bileşenlerinin zaman ile değişimleri Şekil 4.19-4.22'de verilmiştir. Grafiklerde V_x^0 ,V_y^0 dirençsiz durumdaki hızları göstermektedir. İlk fırlatma anındaki açı değerleri $\theta=30^o$, 35^o, 40^o ve 45^o olarak seçilmiştir. Grafikler incelendiğinde yatay hız bileşeni dirençsiz ortamda sabit iken direnç olması durumunda hızın x bileşeni zamanla azalmaktadır. Düşey hız bileşeni dirençsiz durumdaki gibi simetrik değildir.

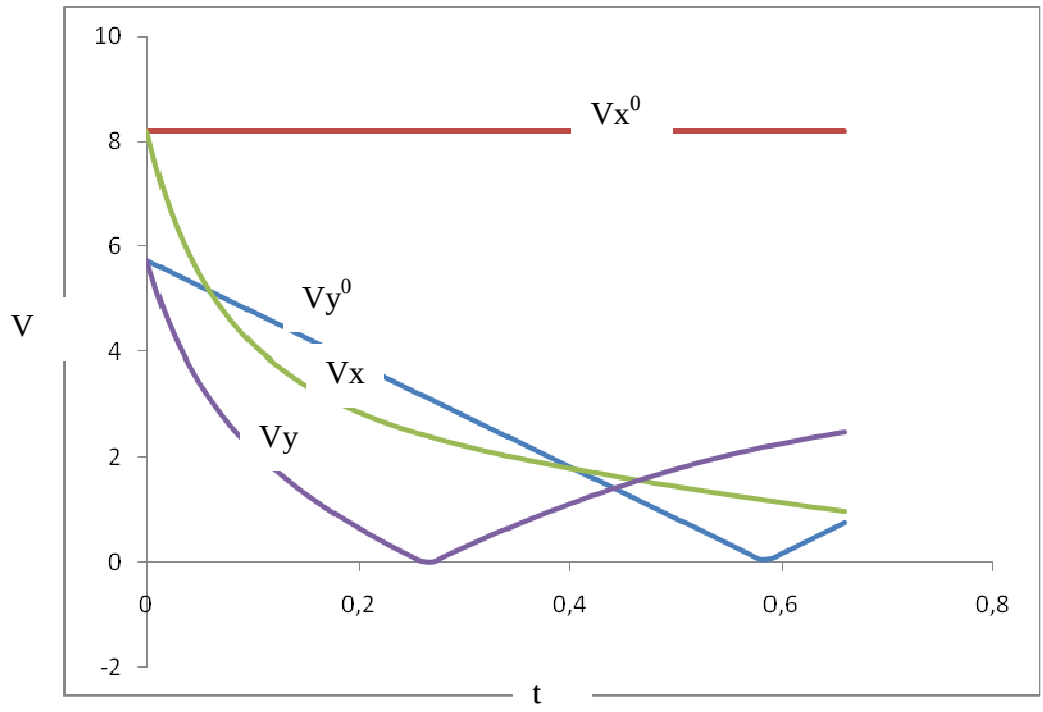
Düşey hız bileşeni dirençli durumda daha çabuk sıfır olmaktadır. Dolayısıyla hareketin daha kısa süreceği, menzilinin daha az olacağı anlaşılmaktadır

Şekil 4.23' te dirençli ortamdaki maddesel noktanın yörüngesi verilmiştir. Grafik incelendiğinde maksimum yatay yer değiştirmenin seçilen parametreler için $\theta=45^o$'de gerçekleşmeyip, $\theta=30^o$'de gerçekleştiği gözlenmektedir. Ayrıca en önemli sonuçlardan birisi yörüngenin simetrik olmamasıdır. Dirençsiz durumdaki menzil $\theta=30^o$ için 17.4m civarında iken grafikten bu değerin dirençli durumda 1.5m civarında olduğu görülmektedir.

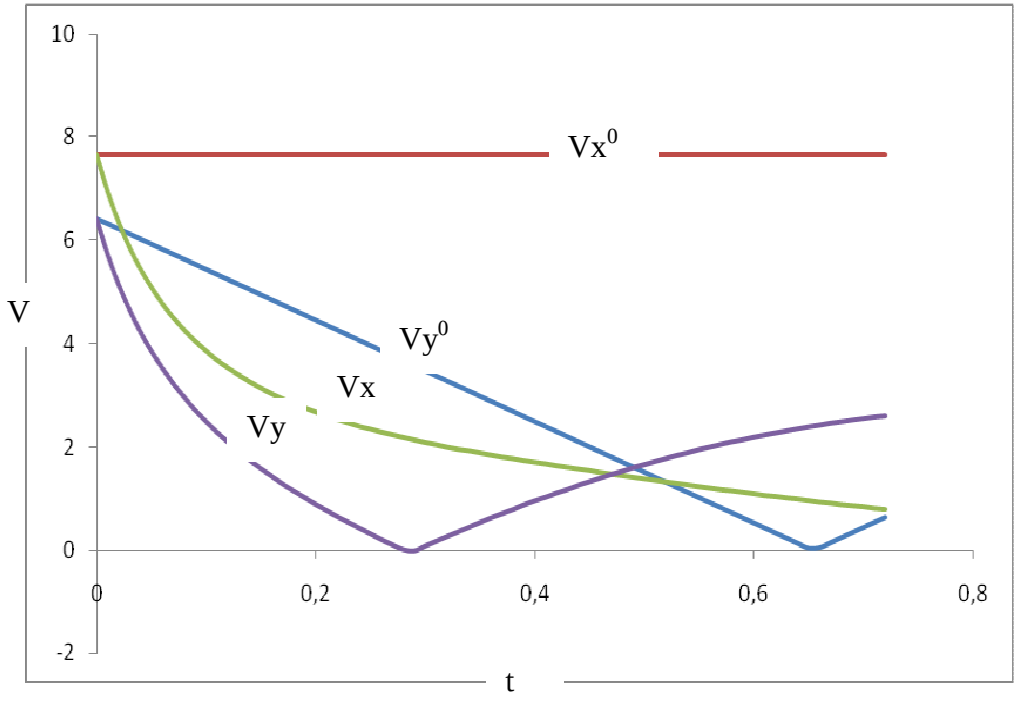
Elde edilen sonuçlar pek çok gerçek hayat uygulamasında faydalı olmaktadır.



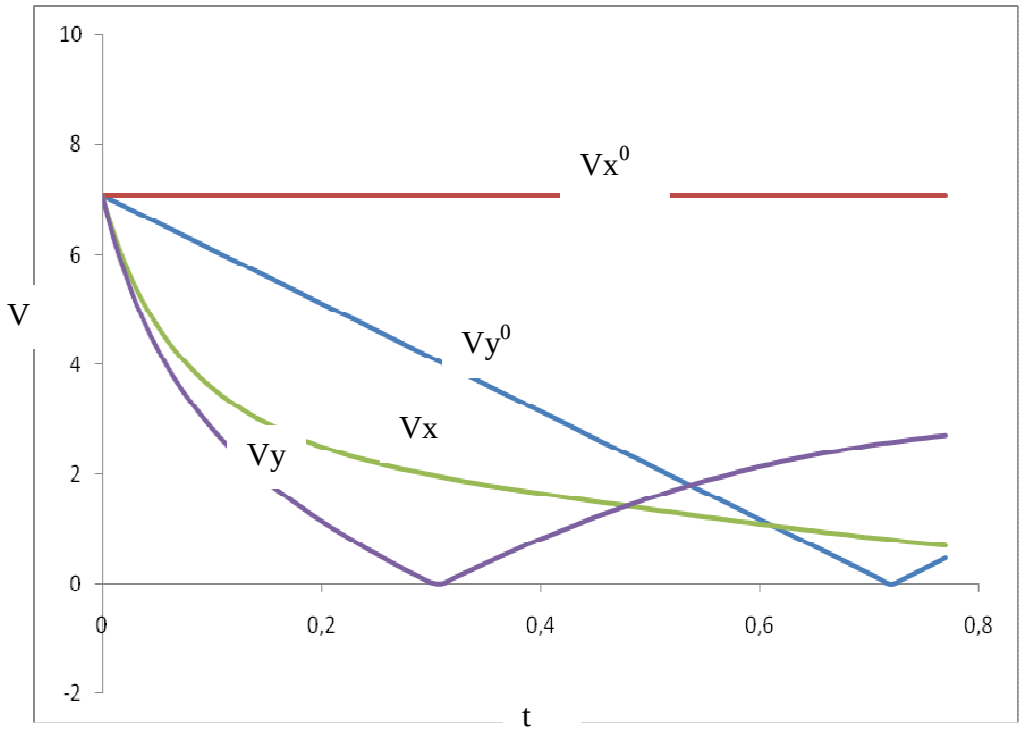
Şekil .4.19. İki boyutlu harekette hız bileşenlerinin zaman ile değişimi (θ=30,m=0.5kg,V=10m/sn,β=0.5,h=0.01, Runge-Kutta, KD)



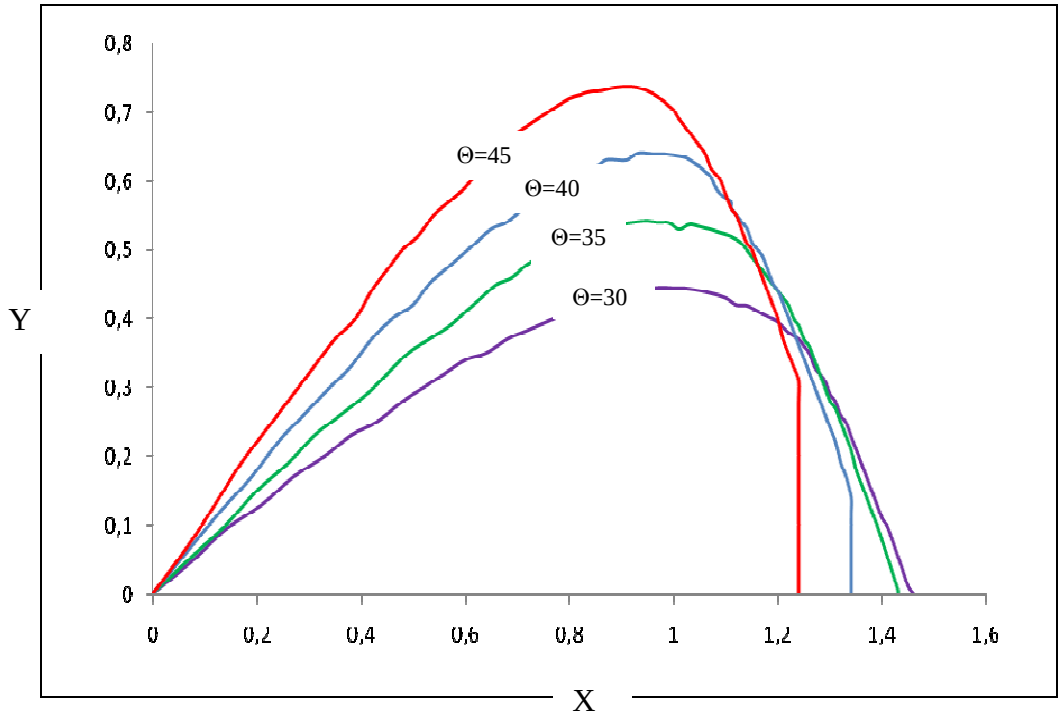
Şekil .4.20. İki boyutlu harekette hız bileşenlerinin zaman ile değişimi (θ=35,m=0.5kg,V=10m/sn,β=0.5,h=0.01, Runge-Kutta, KD)



Şekil .4.21 İki boyutlu harekette hız bileşenlerinin zaman ile değişimi (θ=40,m=0.5kg,V=10m/sn,β=0.5,h=0.01, Runge-Kutta, KD)



Şekil .4.22 İki boyutlu harekette hız bileşenlerinin zaman ile değişimi (θ=45,m=0.5kg,V=10m/sn,β=0.5,h=0.01, Runge-Kutta, KD)



Şekil.4.23 İki boyutlu harekette x-y değişim grafiği (m=0.5kg,V=10m/sn,β=0.5,h=0.01, Runge-Kutta, KD)

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Bu çalışmada, bir maddesel noktanın dirençli ve dirençsiz ortamdaki hareketi incelenmiştir. Dirençli ve dirençsiz ortamda bir ve iki boyutlu hareket incelenerek konum ve hız denklemlerinin genel formülasyonları çıkarılmıştır. Direnç kuvvetinin hızın farklı kuvvetleri şeklinde değişmesi durumları için konum ve hızın zamanla değişimi Runge-Kutta yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Sonuçlar grafiksel olarak karşılaştırılarak değişimler görülmüştür. Dirençli ve dirençsiz durumlar kıyaslandığında sonuçlarda birkaç misli farklar ortaya çıktığı gözlenmiştir. Dirençli ortamda harekette direncin ihmal edilmemesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Daha hassas sonuçlar için gelecek çalışmalarda yeryüzündeki konum ve atmosferdeki değişimler de göz önüne alınarak daha detaylı hesaplamalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Chapra, S.C. ve Canale, R.P., Numerical Methods, McGrawHill, 2002**.**

Deakin, M.A. and Troup, G.J., 1998, Approximate trajectories for projectile motion with air resistance', American Journal of Physics, 66(1), 34-36.

Ebaid, A., 2011, 'Analysis of projectile motion in view of fractional calculus', Applied Mathematical Modelling, 35,1231-1239.

Hayen J.C., 2003, 'Projectile motion in a resistat medium Part I:exact solution and properties, International Journal of Non-Linear Mechanics, 38, 357-369.

Hayen J.C., 2003, 'Projectile motion in a resistat medium Part II:approximate solution and estimates, International Journal of Non-Linear Mechanics, 38, 371-380.

Kittel,C., Knight,W., Ruderman,M., Helmholz,K. Ve Moyer,B. Berkeley Physics Course Mechanics, vol1, McGraw Hill,1973.

Mohazzabi, P. ve Fields J.C., 2004, 'High-altitude projectile motion', Can. J. Physics, 82, 197-204.

Mohazzabi, P. ve Lerro T.N., 2006, 'Projectile motion in the "exponential atmosphere":approximate trajectories', Can. J. Physics, 84, 299-309.

Pakdemirli, M., 2009, 'The drag work minimization path for a flying object with altitude-dependent drag parameters', Proc. IMech E Vol.223, 1113.

Parker, G.W., 1977, Projectile motion with air resistance quadratic in the speed', American Journal of Physics, 45(7), 606-610.

Şuhubi, E.S., 1988, Rijit cisimlerin dinamiği, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matbaası.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Silivri'de doğdu. Orta öğretimini Silivri Lisesi'nde tamamladı. 2001 yılında İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesinin Makine Mühendisliği Bölümünden mezun oldu.Halen Türk Silahlı Kuvvetlerinde Subay olarak görev yapmaktadır.