T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖLÇÜM SİSTEMLERİ ANALİZİNDE KULLANILAN İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLERİN İNCELENMESİ

ÜMİT YAMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
KONYA, 2009

ÖNSÖZ

Bu çalışma süresince çok değerli görüş ve bilgilerinden yararlandığım, her fırsatta yardımlarını esirgemeyen sevgili hocam Doç.Dr. Coşkun KUŞ'a, çalışmamın uygulama kısmındaki bilgisayar yazılımındaki gerekli çalışmalarda emeğini ve zamanını harcayan sayın Ahmet PEKÖR'e, Tezin biçimlenmesinde değerli katkılarını aldığım Dr. Neslihan YİĞİT'e her konuda destek ve moral veren eşim Keziban Sibel YAMAN ve oğlum Umut Mert YAMAN'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

1. GİRİŞ 1
2.TEMEL KAVRAMLAR 3
2.1. Bazı Özel Fonksiyonlar 3
2.1.1. Gamma fonksiyonu 3
2.1.2. Genelleştirilmiş Hipergeometrik fonksiyon 3
2.1.3. İndikatör fonksiyon 4
2.2. Bazı Dağılımlar 4
2.2.1. Normal dağılım 4
2.2.2. Ki-kare dağılımı 5
2.2.3. *F* dağılımı 5
2.2.4. Merkezi olmayan Ki-Kare dağılımı 6
2.2.5. Merkezi olmayan F dağılımı 7
3. İKİ ETKENLİ VARYANS ANALİZİ MODELLERİ 8
3.1. Rasgele Etkili Model 11
3.2. Karma Etkili Model 19
4. ÖLÇÜM SİSTEMLERİ ANALİZİ 26
4.1. Ölçüm Sistemi Yeterliliğinin Analizi için Varyans Analizi Modelleri 26
4.2. Bazı Ölçüm Yeterlilik Parametreleri ve Tahmin Edicileri 29
5. ÖLÇÜM YETERLİLİK PARAMETRELERİNİN GÜVEN ARALIKLARI 35
5.1. Rasgele Etkili Model Durumu 36
5.2. Karma Etkili Model Durumu 40
6. SELÇUK STAT, NCSS VE MİNİTAB ÇIKTILARININ İNCELENMESİ 44
7. SONUÇ VE ÖNERİLER 62
KAYNAKLAR 63

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖLÇÜM SİSTEMLERİ ANALİZİNDE KULLANILAN İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLERİN İNCELENMESİ

Ümit YAMAN
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Coşkun KUŞ
2009, Sayfa: 65

Süreçlerin ve ürünlerin değişkenliğini doğru bir şekilde gözlemlemek için ölçüm değişkenliğini anlamak kaçınılmazdır. Tekrarüretebilirlik ve tekraredilebilirlik (Repeatability&Reproducibility, R&R) çalışması, aynı zamanda ölçüm yeterlilik çalışması olarak adlandırılır. Bir ölçüm prosedürünün, yeterliliğini belirlemede kullanılır. ölçüm prosedürü ile ilgili değişkenliğin, kaynakları varyans analizi(Analyis of Variance, ANOVA) modeli kullanılarak karşılaştırılır. R&R çalışmasında, yaygın olarak kullanılan model iki faktör içerir: parça ve operatörler, süreç sonucunda elde edilen ürünlerde operatörler her bir parça üzerinde tekrarlı ölçüm yaparlar. R&R, Genel olarak operatörlerin bir operatör popülasyonundan rasgele seçildiği varsayılır, kurulan varyans analizi modelinde operatörler, rasgele faktör olarak ele alınır. Ne var ki, genellikle ölçüm prosedürünü yerine getiren operatörler sadece bu iş için, istihdam edilmiş olduğundan, operatörleri özel seçimli faktör olarak ele almak daha gerçekçi olacaktır.

Dolezal, Burdick, Birch (1998), operatörlerin sabit faktör parçaların rasgele faktör olması durumunda, R&R analizi için karma ANOVA modeli ele almışlardır. Bu varsayım altında model parametreleri için, güven aralığı oluşturup, güven aralıkların kapsama olasılıklarının performansı için simülasyon çalışması yapışmışlardır.

Bu tez çalışmasında, rasgele ve karma etkili modellerde ölçüm yeterlilik parametrelerinin tahmin edicileri ve güven aralıkları Selçuk Stat programına monte edilmiştir. Ayrıca Selçuk Stat yazılımının çıktıları, Minitab 15 ve NCSS 2007 yazılım çıktıları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Güven aralıkları, ölçüm yeterlilik parametreleri, tekraredilebilirlik, tekrarüretilebilirlik, varyans analizi modelleri.

ABSTRACT

Master Thesis

INVESTIGATION OF STATISTICAL METHODS USED IN THE MEASUREMENT SYSTEM ANALYSIS

Ümit YAMAN

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Coşkun KUŞ

2009, Page: 65

An understanding of measurement variability is necessary to properly monitor the variability of products and processes. A repeatability and reproducibility (R&R) study, also called a gague capability study, is used to determine the capability of a measurement procedure. The sources of variability associated with the measurement procedure are compared using an analysis of variance (ANOVA) model. A common model used in R&R studies involves two factors: parts and operators. Operators make repeated measurements on each part in a sample of process output. It is typically assumed that the operators are a random sample from a population of operators. As such, operators are treated as a random effect. However, the operators used in the study are often the only operators that will be used once the measurement procedure is implemented. In such a case, it is more appropriate to treat operators as a fixed effect.

The mixed effects ANOVA model is considered for R&R analysis by Dolezal et al. (1998) under fixed operators and random part factor assumption. Confidence intervals for several parameters are derived under this assumption. Computer simulation has been performed to evaluate the performance of the confidence intervals.

In this thesis, the estimators and confidence intervals of measurement capability parameters are assembled to Selçuk Stat software under random and mixed effects models. Also outputs of Selçuk Stat are compared with Minitab 15 and NCSS 2007 softwares.

Key Words: Analysis of variance models, confidence interval, mesaurement capability parameters, repeatability, reproducibility.

1. GİRİŞ

Ölçüm değişkenliğinin tespit edilmesi ürün ve süreç değişkenliğini doğru bir biçimde gözlemlemek için gereklidir. Tekraredilebilirlik, operatörlerin ürünleri tekrar tekrar ölçtüğünde hemen hemen aynı değerde ölçebilme kabiliyetini, Terkrarüretilebilirlik, operatörlerin biribiriyle uyum kabiliyetini göstermek üzere Tekraredilebilirlik ve Terkrarüretilebilirlik (Repeatability&Reproducibility, R&R) diğer bir deyişle ölçüm (Gauge, gage) analizi, ölçüm prosedürünün yeterli olup olmadığını belirlemek için kullanılır. Ölçüm prosedürü ile ilgili değişim kaynakları, varyans analizi (Analysis of Variance, ANOVA) kullanılarak tespit edilebilir. R&R analizinde genel olarak kullanılan ANOVA modeli, operatör ve parça olmak üzere iki faktörden(etken) oluşur. R&R analizinden önce operatörler ürünleri tekrar tekrar ölçerler. Genellikle operatörler, operatörler kitlesinden rasgele seçildiği varsayıldığından ANOVA modelindeki faktörler rasgele faktör (random effect) olarak ele alınır. Ne var ki süreç çıktısı ürünleri ölçen operatörler özel seçimli (fix) faktör de olabilir. Örneğin bir fabrikadaki üretilen parçaları ölçmek için önceden istihdam edilmiş üç operatöründe ölçüm yapması durumunda operatör faktörü özel seçimli olarak ele alınmalıdır.

Ölçüm prosesinin yeterli olup olmadığını tespit etmek için Tekraredilebilirlik ve Terkrarüretilebilirlik dışında kullanılan parametrelerden bazıları PTR(Precision-to-Tolerance Ratio), (Burdick, Borror ve Montgomery, 2003), SNR(Signal-to-Noise Ratio), (AIAG, 1995, Sayfa 32) ve DR(Discriminant Ratio), (Meder, 1999 ve Wheeler, 1992) olarak sıralanabilir.

Minitab 15 ve NCSS 2007 yazılımları, R&R analizini performe etmektedir. Minitab 15, R&R analizi için operatörlerin ve parçaların rasgele faktör olarak ele alındığı ANOVA modelini kullanılmasına karşın operatörlerin sabit olarak ele alınması durumunda karma model kullanılması için bir seçenek bulunmamaktadır. Minitab 15 yazılımı, ölçüm değişkenlik parametrelerinin tahmin değerlerini verirken, güven aralıklarını vermemektedir. Ayrıca yukarıda bahsedilen PTR, SNR ve DR

parametrelerinin güven aralıkları Minitab 15 yazılımında hesaplanmamaktadır. NCSS 2007 yazılımında yukarıda bahsedilen güven aralıkları verilmektedir.

Bu tez çalışmasında, İkinci Bölümde ölçüm sistemleri analizinde kullanılacak temel kavramlar, Üçüncü Bölümde, rasgele ve karma iki etkenli ANOVA modeli hakkında genel bilgiler, Dördüncü Bölümde, ölçüm sistemleri analizinde kullanılan parametreler, Beşinci Bölümde, rasgele ve karma etkili modellerde ölçüm sistemi yeterlilik parametrelerinin güven aralıkları, Altıncı Bölümde, Delphi 5 programlama dilinde yazılmakta olan Selçuk Stat programına tez aşamasında monte edilen R&R analiz sonuçlarının doğruluğu, Burdick, Borror ve Montgomery (2003), (Dolezal, Burdick, Birch, 1998) ve Burdick ve Larsen (1997) makalelerdeki nümerik örneklerle karşılaştırılarak kontrol edilmiştir. Ayrıca sonuçları karşılaştırmak için Minitab 15 ve NCSS 2007 çıktıları da bu bölüme eklenmiştir. Yedinci ve son bölümde tez çalışmasının sonuç ve önerilerine yer verilmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, yapılmış olan çalışma için gerekli olan ilgili tanımlar ve temel bilgiler verilmiştir.

2.1. Bazı Özel Fonksiyonlar

Bu bölümde, tezde ele alınan bazı özel fonksiyonlar hakkında kısa bilgi verilmiştir.

2.1.1. Gamma fonksiyonu

Gama fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Gamma(\beta)=\int_0^{\infty} t^{\beta-1}\exp(-t)dt,\ \ \beta>0$$

β pozitif tam sayı olmak üzere

$$\Gamma(\beta+1)=\beta!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}\exp\left(-t^2\right)dt=\sqrt{\pi}=1.7724538509$$

$$\Gamma(2\beta)=(2\pi)^{-1/2}2^{2\beta-1/2}\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+1/2)$$

Stirling formülü

$$\Gamma(\beta)\sim\exp(-\beta)\beta^{\beta-1/2}(2\pi)^{1/2}\left[1+\frac{1}{12\beta}+\frac{1}{288}\right]$$

$$\log[\Gamma(\beta)]=\left(\beta-2^{-1}\right)\log(\beta)-\beta+2^{-1}\log(2\pi)+\frac{1}{12\beta}-\frac{1}{360\beta^3}+\frac{1}{1260\beta^5}+\cdots$$

2.1.2. Genelleştirilmiş Hipergeometrik fonksiyon

$$F_{p,q}\left(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_k\times\cdots\times\left(a_p\right)_k}{\left(b_1\right)_k\times\cdots\times\left(b_q\right)_k}\frac{z^k}{k!}$$

şeklinde tanımlanır, burada $\left(a\right)_k=a\left(a+1\right)\times\cdots\times\left(a+k-1\right)$ biçimindedir.

2.1.3. İndikatör fonksiyon

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$I_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$$
$$x \to I_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona indikatör fonksiyon denir.

2.2. Bazı Dağılımlar

Bu bölümde, tezde ele alınan bazı dağılımlar hakkında kısa bilgi verilmiştir.

2.2.1. Normal dağılım

X rasgele değişkeni, Normal dağılıma sahip olduğunda olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} I_{(-\infty,\infty)}(x), \quad \sigma > 0, \ \mu \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

şeklindedir, burada $I_{(a,b)}(\bullet)$ indikatör fonksiyonudur. X, (2.1) olasılık yoğunluk fonksiyonlu normal dağılıma sahip rasgele değişken olduğunda X in beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2$$

biçimindedir. μ ortalamalı, σ^2 varyanslı Normal dağılım için $N(\mu, \sigma^2)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.2.2. Ki-kare dağılımı

X rasgele değişkeni, r serbestlik dereceli Ki-kare dağılıma sahip olduğunda olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\left\{\Gamma\left(2^{-1}r\right)2^{r/2}\right\}^{-1}x^{r/2}\exp\left(-2^{-1}x\right)I_{(0,\infty)}(x),\quad r>0 \tag{2.2}$$

şeklindedir, burada $I_{(a,b)}(\bullet)$ indikatör fonksiyonudur. X, r serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip rasgele değişken olduğunda X in beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X)=r \qquad Var(X)=2r$$

biçimindedir. r serbestlik dereceli Ki-kare dağılımı için $\chi^2_{(r)}$ gösterimi kullanılacaktır.

2.2.3. *F* dağılımı

X rasgele değişkeni, r_1 ve r_2 serbestlik dereceli F dağılımına sahip olduğunda olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{\Gamma\left[\left(r_1+r_2\right)2^{-1}\right]\left(r_1r_2^{-1}\right)^{r_1/2}}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)}x^{r_1/2-1}\left[1+\left(r_1r_2^{-1}\right)x\right]^{-(r_1+r_2)/2},\ x>0,\ r_1,r_2=1,2,\ldots \tag{2.3}$$

şeklindedir. X rasgele değişkeni, r_1 ve r_2 serbestlik dereceli F dağılımına sahip olduğunda X in beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X)=r_2\left(r_2-2\right)^{-1},\ \ r_2>2$$

$$Var\left(X\right)=2r_2^2\left[1+\left(r_2-2\right)r_1^{-1}\right]\left(r_2-2\right)^{-2}\left(r_2-4\right)^{-1},\ \ r_1>4$$

biçimindedir. r_1 ve r_2 serbestlik dereceli F dağılımı için F_{r_1,r_2} gösterimi kullanılacaktır.

2.2.4. Merkezi olmayan Ki-Kare dağılımı

$X_1,X_2,\ldots,X_n$ bağımız ve sırasıyla $N\left(\mu_i,1\right),\ i=1,2,\ldots,n$ dağılımına sahip rasgele değişkenler olduğunda $Z=\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}$ rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Z\left(z\right)=\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)F_{0,1}\left(\frac{n}{2};\frac{\lambda z}{4}\right)\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)z^{\frac{n}{2}-1}I_{(0,\infty)}\left(z\right) \qquad (2.4)$$

şeklindedir, burada $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2$, $I_{(a,b)}\left(\bullet\right)$ indikatör fonksiyonu ve $F_{a,b}\left(\bullet\right)$, genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonudur (Muirhead, 1982). (2.4) de verilen olasılık yoğunluk fonsiyonunlu dağılıma, n serbetlik dereceli, λ merkezsel olmama parametreli merkezi olmayan Ki-kare dağılımı denir. Z, merkezi olmayan Ki-kare dağılımına sahip olduğunda Z nin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla

$$E\left(Z\right)=n+\lambda$$

$$Var\left(Z\right)=2n+4\lambda,$$

şeklindedir (Muirhead, 1982). $\lambda=0$ olduğunda dağılıma merkezsel Ki-Kare veya kısaca Ki-Kare dağılımı denir.

2.2.5. Merkezi olmayan F dağılımı

X , n_1 serbetlik dereceli, λ merkezsel olmama parametreli merkezi olmayan Ki-kare dağılımına sahip, Y ise n_2 serbetlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip bağımız iki rasgele değişken olmak üzere $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_F(f) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) F_{1,1}\left(\frac{n_1+n_2}{2}; \frac{n_1}{2}; \frac{\frac{1}{2}\frac{n_1}{n_2}\lambda f}{1+\frac{n_1}{n_2}f}\right) \times \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \frac{f^{\frac{n_1}{2}-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}f\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} I_{(0,\infty)}(f) \tag{2.5}$$

şeklindedir, burada $I_{(a,b)}(\bullet)$ indikatör fonksiyonu ve $F_{a,b}(\bullet)$, genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonudur (Muirhead, 1982). (2.5) de verilen olasılık yoğunluk fonsiyonunlu dağılıma, n_1 ve n_2 serbetlik dereceli, λ merkezsel olmama parametreli merkezi olmayan F dağılımı denir. F , merkezi olmayan F dağılımına sahip bir rasgele değişken olduğunda F nin beklenen değeri ve varyansı, sırasıyla,

$$E(F) = \frac{n_2(n_1+\lambda)}{n_1(n_2-2)}, \quad n_2 > 0$$

$$Var(F) = 2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \left\{\frac{(n_1+\lambda)^2 + (n_1+2\lambda)(n_2-2)}{(n_2-2)^2(n_2-4)}\right\}, \quad n_2 > 4$$

şeklindedir (Muirhead, 1982).

3. İKİ ETKENLİ VARYANS ANALİZİ MODELLERİ

4,5 ve 6. Bölümlerde, R&R çalışmasında iki etkenli varyans analizi (ANOVA) modellerinin önemli bir yeri vardır. Bu sebeple, Öztürk (2009) ün İstatistiksel Deney Tasarımı ders notlarından iki faktörlü ANOVA modelleri konusu bu bölümde ele alınacaktır.

R&R analizinde, iki etkenli (faktörlü) deneylerin iki durumu kullanılmaktadır. Birincisi, her iki etkenin düzeyleri rasgele seçimli olabilir, ikincisi ise etkenlerin birinin düzeyleri özel, diğerinin düzeyleri rasgele seçimli olabilir. Bu durumda modeller: rasgele etkili model (random effects model) ve karma etkili model (mixed effects model) olarak adlandırılır.

İki etkenli dengeli bir deney tasarımında, A etkeninin düzeyleri $A_1, A_2, ..., A_p$ ve bu düzeylerin etkileri $P_1, P_2, ..., P_p$ ile B etkeninin düzeyleri $B_1, B_2, ..., B_o$ ve bu düzeylerin etkileri $O_1, O_2, ..., O_o$ ile gösterilsin. İki etkenin düzeylerinin kombinasyonu olan ortak etkiler $(PO)_{ij}$ olmak üzere, iki etkenli çapraz (cross) dengeli (balanced) ANOVA modeli

$$Y_{ijk} = \mu + P_i + O_j + (PO)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \ , \ i = 1,2,...,p; \ j = 1,2,...,o; \ k = 1,2,...,r \ (3.1)$$

biçiminde tanımlanır. Modeldeki, $P_1, P_2, ..., P_p$, $O_1, O_2, ..., O_o$ düzey etkilerine ana etkiler (main effects) ve $(PO)_{ij}$ 'lere ise etkileşim (interaction) etkileri denir (Öztürk, 2009).

Rasgele etkili ve karma etkili model için varsayımlar Tablo 1 de verilmiştir (Öztürk, 2009).

Tablo 1. İki faktörlü ANOVA Modeli Varsayımları

Rasgele etkili model	**Karma model**
$i=1,2,...,p;\ j=1,2,...,o;k=1,2,...,r$ için ε_{ijk}'ler bağımsız ve $N\left(0,\sigma_{\varepsilon}^2\right)$ dağılımına sahip rasgele değişkenler,	$i=1,2,...,p;\ j=1,2,...,o;k=1,2,...,r$ için ε_{ijk}'ler bağımsız ve $N\left(0,\sigma_{\varepsilon}^2\right)$ dağılımına sahip rasgele değişkenler,
$P_1,P_2,...,P_p$ ler bağımsız ve $N\left(0,\sigma_P^2\right)$ dağılımına sahip rasgele değişkenler,	$O_1,O_2,...,O_o$ ler $\sum_{j=1}^{o}O_j=0$ kısıtını sağla yan sabit sayılar,
$O_1,O_2,...,O_o$ lar bağımsız $N\left(0,\sigma_O^2\right)$ dağılımına sahip rasgele değişkenler,	$\sum_{j=1}^{o}(PO)_{ij}=0,\ i=1,2,...,p$ (kısıtsız (unrestricted) modelde bu varsayım ele alınmaz),
$i=1,2,...,p;\ j=1,2,...,o$ için $(PO)_{ij}$'ler bağımsız ve $N\left(0,\sigma_{PO}^2\right)$ dağılımına sahip rasgele değişkenler,	$i=1,2,...,p;\ j=1,2,...,o$ için $(PO)_{ij}$'ler bağımsız ve $N\left(0,\sigma_{PO}^2\right)$ dağılımına sahip rasgele değişkenler,
$i=1,2,...,p;\ j=1,2,...,o;k=1,2,...,r$ için $P_i,O_j,(PO)_{ij}$ ve ε_{ijk}'ler bağımsız rasgele değişkenler.	$i=1,2,...,p;\ j=1,2,...,o;k=1,2,...,r$ için $P_j,(PO)_{ij}$ ve ε_{ijk}'lar bağımsız rasgele değişkenler.

Karma etkili modellerde $\sum_{j=1}^{o}(PO)_{ij}=0,\ i=1,2,...,p$ varsayımı altında (3.1) modeline kısıtlı (restricted) model, $\sum_{j=1}^{o}(PO)_{ij}=0,\ i=1,2,...,p$ varsayımı ele alınmadığında (3.1) modeline kısıtsız (unrestricted) model denir (Montgomery, 2001). Modelin kısıtlı ve kısıtsız olmasına göre karma modellerde varyans bileşenlerinin tahmin edicileri ve F hesap değeri değişebilmektedir.

SPSS 13 yazılımı karma modellerde sadece kısıtsız modeli ele almaktadır. Minitab 15 yazılımı ise karma modellerde hem kısıtlı hem de kısıtsız modeli ele alabilmektedir. Genel olarak (Default) Minitab 15, karma modellerde kısıtsız modeli kullanmaktadır. Sırasıyla ANOVA-BALANCED ANOVA-OPTIONS seçilip **Use the restricted form of the model** seçeneği kullanıldığında Minitab 15'de karma modellerde kısıtlı model ele alınabilir. Bu tez çalışmasında da karma modellerde kısıtsız model ele alınacaktır.

İki etkenli dengeli (balanced) deney tasarımında kitleden alınacak örneklem Tablo 2 deki tablolaştırılabilir.

Tablo 2. İki Etkenli Deney Tasarımı Örneklem Düzeni

	B_1	B_2	…	B_o	
A_1	$Y_{111}, Y_{112}, ..., Y_{11r}$	$Y_{121}, Y_{122}, ..., Y_{12r}$	…	$Y_{1o1}, Y_{1o2}, ..., Y_{1or}$	$\bar{Y}_{1\bullet\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} Y_{1jk}}{o \times r}$
A_2	$Y_{211}, Y_{212}, ..., Y_{21r}$	$Y_{221}, Y_{222}, ..., Y_{22r}$	…	$Y_{2o1}, Y_{2o2}, ..., Y_{2or}$	$\bar{Y}_{2\bullet\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} Y_{2jk}}{o \times r}$
⋮	⋮	⋮		⋮	
A_p	$Y_{p11}, Y_{p12}, ..., Y_{p1r}$	$Y_{p21}, Y_{p22}, ..., Y_{p2r}$	…	$Y_{po1}, Y_{po2}, ..., Y_{por}$	$\bar{Y}_{p\bullet\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}}{o \times r}$
	$\bar{Y}_{\bullet 1\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} Y_{i1k}}{p \times r}$	$\bar{Y}_{\bullet 2\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} Y_{i2k}}{p \times r}$	…	$\bar{Y}_{\bullet o\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}}{p \times r}$	$\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}}{p \times o \times r}$

$\bar{Y}_{i\bullet\bullet}$, $\bar{Y}_{\bullet j\bullet}$, $\bar{Y}_{ij\bullet}$ ve $\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}$ ifadeleri,

$$\bar{Y}_{i\bullet\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}}{p \times r},\quad \bar{Y}_{\bullet j\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}}{o \times r},\quad \bar{Y}_{ij\bullet} = \frac{\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}}{r} \text{ ve } \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}}{p \times o \times r}$$

şeklinde tanımlanmak üzere, Y_{ijk} ile $\overline{Y}_{...}$ arasındaki fark,

$$Y_{ijk}-\overline{Y}_{...}=\left(\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{...}\right)+\left(\overline{Y}_{.j.}-\overline{Y}_{...}\right)+\left(\overline{Y}_{ij.}-\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{.j.}+\overline{Y}_{...}\right)+\left(Y_{ijk}-\overline{Y}_{ij.}\right)$$

biçiminde yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafın karesi alınıp i, j ve k üzerinden toplam alındığında,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(Y_{ijk}-\overline{Y}_{...}\right)^2}_{KT_T}=\underbrace{or\sum_{i=1}^{p}\left(\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{...}\right)^2}_{KT_P}+\underbrace{pr\sum_{j=1}^{o}\left(\overline{Y}_{.j.}-\overline{Y}_{...}\right)^2}_{KT_O}$$

$$+\underbrace{r\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\left(\overline{Y}_{ij.}-\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{.j.}+\overline{Y}_{...}\right)^2}_{KT_{PO}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(Y_{ijk}-\overline{Y}_{ij.}\right)^2}_{KT_E}$$

veya sembolik olarak

$$KT_T=KT_P+KT_O+KT_{PO}+KT_E$$

eşitliği elde edilir (Öztürk, 2009). Ayrıca Cochran Teoreminden (Montgomery, 2001: sayfa 69) KT_P , KT_O , KT_{PO} ve KT_E ler bağımsızdır.

3.1. Rasgele Etkili Model

Operatörler arasından rasgele seçilen o tane $O_1, O_2, ..., O_o$ operatör ile ürünler arasından rasgele seçilen p tane $P_1, P_2, ..., P_p$ ürün kullanılarak, her operatör her üründe rasgele bir sırada r kez ölçüm yapacak şekilde bir deney tasarlansın.

Bağımlı değişken: Y - ürünün ölçüm değeri.

Etkenler (faktörler):

Operatör etkeni: Düzeyleri $O_1, O_2, ..., O_o$ rasgele seçimli etken.

Parça etkeni: Düzeyleri $P_1, P_2, ..., P_p$ rasgele seçimli etken.

İki etkenin düzeylerinin kombinasyonu olan ortak etkiler $(PO)_{ij}$ olmak üzere, Rasgele Etkenli Varyans Analizi Modeli

$$Y_{ijk} = \mu + P_i + O_j + (PO)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,2,...,p;\ j = 1,2,...,o;\ k = 1,2,...,r$$

biçiminde yazılabilir. Rasgele etkili ANOVA modelinin varsayımları aşağıda verilmiştir.

Varsayım 1. $i = 1,2,...,p;\ j = 1,2,...,o;\ k = 1,2,...,r$ için gözlenemeyen rasgele hata terimi olarak adlandırılan ε_{ijk}'lar bağımsız ve $N\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$ dağılıma sahip rasgele değişkenler,

Varsayım 2. $P_1, P_2, ..., P_p$ rasgele düzey etkileri bağımsız ve $N\left(0,\sigma_P^2\right)$ dağılıma sahip rasgele değişkenler,

Varsayım 3. $O_1, O_2, ..., O_o$ rasgele düzey etkileri bağımsız ve $N\left(0,\sigma_O^2\right)$ dağılıma sahip rasgele değişkenler,

Varsayım 4. $i = 1,2,...,p;\ j = 1,2,...,o$ için $(PO)_{ij}$ etkileşimleri bağımsız ve $N\left(0,\sigma_{PO}^2\right)$ dağılıma sahip rasgele değişkenler,

Varsayım 5. $i = 1,2,...,p;\ j = 1,2,...,o;\ k = 1,2,...,r$ için ε_{ijk}, P_i, O_j, $(PO)_{ij}$'ler bağımsız rasgele değişkenler olup,

$$Var\left(Y_{ijk}\right) = \sigma_P^2 + \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

dır. $\overline{O}_\bullet$, $\overline{P}_\bullet$, $\left(\overline{PO}\right)_{i\bullet}$, $\left(\overline{PO}\right)_{\bullet j}$, $\left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet}$, $\overline{\varepsilon}_{\bullet j}$, $\overline{\varepsilon}_{i\bullet}$, $\overline{\varepsilon}_{ij\bullet}$ ve $\overline{\varepsilon}_{\bullet\bullet}$ ifadeleri

$$\bar{O}_{\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{o} O_j}{o},\ \bar{P}_{\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{p} P_j}{p},\ \left(\overline{PO}\right)_{i\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{o} (PO)_{ij}}{o},\ \left(\overline{PO}\right)_{\bullet j} = \frac{\sum_{i=1}^{p} (PO)_{ij}}{p},$$

$$\left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o} (PO)_{ij}}{p \times o},\ \bar{\varepsilon}_{\bullet j\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{ijk}}{p \times r},\ \bar{\varepsilon}_{i\bullet\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{ijk}}{o \times r} \text{ ve}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij\bullet} = \frac{\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{ijk}}{r},\ \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{ijk}}{p \times o \times r}$$

şeklinde tanımlanmak üzere yukarıda verilen beş varsayımdan

$$E\left(P_i^2\right) = \sigma_P^2\ ,\ E\left(\bar{P}_{\bullet}^2\right) = \frac{\sigma_P^2}{p},\ E\left(O_j^2\right) = \sigma_O^2\ ,\ E\left(\bar{O}_{\bullet}^2\right) = \frac{\sigma_O^2}{o}$$

$$E\left[(PO)_{ij}^2\right] = \sigma_{PO}^2\ ,\ E\left[\left(\overline{PO}\right)_{i\bullet}^2\right] = \frac{\sigma_{PO}^2}{o},\ E\left[\left(\overline{PO}\right)_{\bullet j}^2\right] = \frac{\sigma_{PO}^2}{p},\ E\left[\left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet}^2\right] = \frac{\sigma_{PO}^2}{po}$$

yazılabilir (Sahai ve Ageel, 2000).

$$S_P^2 = \frac{KT_P}{p-1},\ S_O^2 = \frac{KT_O}{o-1},\ S_{PO}^2 = \frac{KT_{PO}}{(o\text{-}1)(p\text{-}1)} \text{ ve } S_E^2 = \frac{KT_E}{po(r-1)}$$

olmak üzere

$$\theta_P = E\left(S_P^2\right),\ \ \theta_O = E\left(S_O^2\right),\ \ \theta_{PO} = E\left(S_{PO}^2\right) \text{ ve } \ \theta_E = E\left(S_E^2\right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\bar{Y}_{i\bullet\bullet}$, $\bar{Y}_{\bullet j\bullet}$, $\bar{Y}_{ij\bullet}$ ve $\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}$ ifadeleri (3.1) eşitliğinde verilen model ele alınarak

$$\bar{Y}_{i\bullet\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}}{p \times r} = \frac{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left(P_i + O_j + (PO)_{ij} + \varepsilon_{ijk}\right)}{p \times r} = \mu + P_i + \bar{O}_{\bullet} + \left(\overline{PO}\right)_{i\bullet} + \bar{\varepsilon}_{i\bullet\bullet} \qquad (3.2)$$

$$\bar{Y}_{\bullet j\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}}{o \times r} = \frac{\sum_{i=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(P_i + O_j + (PO)_{ij} + \varepsilon_{ijk}\right)}{o \times r} = \mu + \bar{P}_{\bullet} + O_j + \left(\overline{PO}\right)_{\bullet j} + \bar{\varepsilon}_{\bullet j\bullet} \qquad (3.3)$$

$$\bar{Y}_{ij\bullet} = \frac{\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}}{r} = \frac{\sum_{k=1}^{r}\left(P_i + O_j + (PO)_{ij} + \varepsilon_{ijk}\right)}{r} = \mu + P_i + O_j + (PO)_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij\bullet} \qquad (3.4)$$

$$\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}}{p \times o \times r} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(P_i + O_j + (PO)_{ij} + \varepsilon_{ijk}\right)}{p \times o \times r} = \mu + \bar{P}_{\bullet} + \bar{O}_{\bullet} + \left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet} + \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet} \qquad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2) ve (3.5) eşitlikleri kullanılarak KT_P,

$$KT_P = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(P_i - \bar{P}_{\bullet} + \left(\overline{PO}\right)_{i\bullet} - \left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet} + \bar{\varepsilon}_{i\bullet\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

biçiminde yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğinin her iki tarafının beklenen değeri alındığında

$$\mathrm{E}\left(KT_P\right) = or\sum_{i=1}^{p} E\left(P_i - P_{\bullet}\right)^2 + or\sum_{i=1}^{p} E\left(\left(\overline{PO}\right)_{i\bullet} - (PO)_{\bullet\bullet}\right)^2 + or\sum_{i=1}^{p}\left(\bar{\varepsilon}_{i\bullet\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

$$= or\left(p\sigma_P^2 - \sigma_P^2\right) + r\left(p\sigma_{PO}^2 - \sigma_{PO}^2\right) + \left(p\sigma_{\varepsilon}^2 - \sigma_{\varepsilon}^2\right)$$

$$= or(p-1)\sigma_P^2 + r(p-1)\sigma_{PO}^2 + (p-1)\sigma_{\varepsilon}^2$$

olup θ_P,

$$\theta_P = \frac{or(p-1)\sigma_P^2 + r(p-1)\sigma_{PO}^2 + (p-1)\sigma_\varepsilon^2}{p-1}$$

$$= or\sigma_P^2 + r\sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

şeklinde elde edilir (Sahai ve Ageel, 2000).

(3.3) ve (3.5) eşitlikleri kullanılarak KT_O,

$$KT_O = pr\sum_{j=1}^{o}\left(\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{Y}_{\cdots}\right)^2 = pr\sum_{j=1}^{o}\left(O_j - \bar{O}_{\cdot} + \left(\overline{PO}\right)_{\cdot j} - \overline{(PO)}_{\cdot\cdot} + \bar{\varepsilon}_{\cdot j\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdots}\right)^2$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının beklenen değeri alındığında

$$E(KT_O) = pr\sum_{j=1}^{o} E\left(O_j - \bar{O}_{\cdot} + \left(\overline{PO}\right)_{\cdot j} - \left(\overline{PO}\right)_{\cdot\cdot} + \bar{\varepsilon}_{\cdot j\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdots}\right)^2$$

$$= por\sigma_O^2 - pr\sigma_O^2 + or\sigma_{PO}^2 - r\sigma_{PO}^2 + o\sigma_\varepsilon^2 - \sigma_\varepsilon^2$$

$$= pr(o-1)\sigma_O^2 + r(o-1)\sigma_{PO}^2 + (o-1)\sigma_\varepsilon^2$$

olup θ_O,

$$\theta_O = \frac{pr(o-1)\sigma_O^2 + r(o-1)\sigma_{PO}^2 + r(o-1)\sigma_\varepsilon^2}{(o-1)}$$

$$= pr\sigma_O^2 + r\sigma_{PO}^2 + r\sigma_\varepsilon^2$$

dır (Sahai ve Ageel, 2000).

(3.2), (3.3), (3.4) ve (3.5) eşitlikleri kullanılarak KT_{PO},

$$KT_{PO} = r\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\left(\overline{Y}_{ij\bullet} - \overline{Y}_{i\bullet\bullet} - \overline{Y}_{\bullet j\bullet} + \overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

$$= r\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\left[\left(PO\right)_{ij} - \left(\overline{PO}\right)_{i\bullet} - \left(\overline{PO}\right)_{\bullet j} + \left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet} + \overline{\varepsilon}_{ij\bullet} - \overline{\varepsilon}_{i\bullet\bullet} - \overline{\varepsilon}_{\bullet j\bullet} + \overline{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right]^2$$

şeklinde yazılabilir. Böylece yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının beklenen değeri alındığında

$$E\left(KT_{PO}\right) = r\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}E\left[\left(PO\right)_{ij} - \left(\overline{PO}\right)_{i\bullet} - \left(\overline{PO}\right)_{\bullet j} + \left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet} + \overline{\varepsilon}_{ij\bullet} - \overline{\varepsilon}_{i\bullet\bullet} - \overline{\varepsilon}_{\bullet j\bullet} + \overline{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right]^2$$

$$= r\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\left(\sigma_{PO}^2 - \frac{\sigma_{PO}^2}{p} - \frac{\sigma_{PO}^2}{o} + \frac{\sigma_{PO}^2}{p\times o}\right) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{r} - \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{o\times r} - \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{p\times r} + \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{p\times o\times r}\right)$$

$$= npo\sigma_{PO}^2 - no\sigma_{PO}^2 - np\sigma_{PO}^2 + n\sigma_{PO}^2 + po\sigma_{\varepsilon}^2 - p\sigma_{\varepsilon}^2 - o\sigma_{\varepsilon}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2$$

$$= r\left(p\text{-}1\right)\left(o\text{-}1\right)\sigma_{PO}^2 + \left(p\text{-}1\right)\left(o\text{-}1\right)\sigma_{\varepsilon}^2$$

olup θ_{PO},

$$\theta_{PO} = \frac{r\left(p\text{-}1\right)\left(o\text{-}1\right)\sigma_{PO}^2 + \left(p\text{-}1\right)\left(o\text{-}1\right)\sigma_{\varepsilon}^2}{\left(p\text{-}1\right)\left(o\text{-}1\right)}$$

$$= r\sigma_{PO}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2$$

dır (Sahai ve Ageel, 2000).

(3.1) ve (3.4) eşitlikleri kullanılarak

$$KT_E = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij\bullet}\right)^2$$

$$= \left(\varepsilon_{ijk} - \overline{\varepsilon}_{ij\bullet}\right)^2$$

olarak yazılabilir. Böylece yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının beklenen değeri alındığında

eşitliğin her iki tarafın beklenen değeri alındığında

$$E\left(KT_E\right)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}E\left(\varepsilon_{ijk}-\overline{\varepsilon}_{ij\bullet}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(\sigma_\varepsilon^2-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{r}\right)$$

$$=por\sigma_\varepsilon^2-po\sigma_\varepsilon^2$$

$$=po\left(r-1\right)\sigma_\varepsilon^2$$

olup θ_E,

$$\theta_E=\frac{op\left(r-1\right)\sigma_\varepsilon^2}{op\left(r-1\right)}=\sigma_\varepsilon^2$$

Dır (Sahai ve Ageel, 2000).

$\sigma_P^2,\sigma_O^2,\sigma_{PO}^2$ ve σ_ε^2 varyans bileşenleri için yansız birer tahmin edici,

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2=S_E^2$$

$$\hat{\sigma}_{PO}^2=\frac{S_{PO}^2-S_E^2}{r}$$

$$\hat{\sigma}_P^2=\frac{S_P^2-S_{PO}^2}{p\times r}$$

$$\hat{\sigma}_O^2=\frac{S_O^2-S_{PO}^2}{o\times r}$$

şeklinde önerilir (Öztürk, 2009).

Rasgele Etkili Modellerde varyans bileşeninin sıfır olması, normal dağılımlı ve sıfır ortalamalı olan düzey etkilerinin aynı (sıfır) olması demektir. Örneğin, σ_O^2=0 olması, O etkenin seviyelerinin aynı olması (operatör etkeninin düzeyleri arasında fark olmadığı) anlamına gelmektedir (Öztürk, 2009).

İki Etkenli Rasgele Etkili Modelde O etkeni ile ilgili,

$$H_0 : \sigma_O^2 = 0$$
$$H_1 : \sigma_O^2 > 0$$

P etkeni ile ilgili,

$$H_0 : \sigma_P^2 = 0$$
$$H_1 : \sigma_P^2 > 0$$

ve iki etkenin etkileşimi ile ilgili,

$$H_0 : \sigma_{PO}^2 = 0$$
$$H_1 : \sigma_{PO}^2 > 0$$

hipotezleri için ANOVA tablosu Tablo 3 de verilmiştir. Beklenen Kareler Ortalamaları (Expected Mean Squares) dikkate alınarak, sıfır hipotezleri altında F değerleri bire eşit olmakta, karşıt hipotez altında birden büyük olmaktadır. F_P, F_O, F_{PO} istatistiklerinin büyük değerleri için ilgili hipotezdeki sıfır hipotezi reddedilmektedir (Öztürk, 2009).

Tablo 3. Varyans Analizi(ANOVA) Tablosu

Değişim Kaynağı	**Serbestlik Derecesi**	**Hata Kare. Ortalaması**	**Beklenen Kareler Ortalaması**	***F* İstatist.**
Parça (P)	$p-1$	S_P^2	$\theta_P = or\sigma_P^2 + r\sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$	$F_P = \frac{KT_P}{KT_{PO}}$
Operatör (O)	$o-1$	S_O^2	$\theta_O = pr\sigma_O^2 + r\sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$	$F_O = \frac{KT_O}{KT_{PO}}$
Parça$\times$Operatör $(P\times O)$	$(p-1)(o-1)$	S_{PO}^2	$\theta_{PO} = r\sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$	$F_{PO} = \frac{KT_{PO}}{KT_E}$
Tekraredilebilirlik	$po(r-1)$	S_E^2	$\theta_E = \sigma_\varepsilon^2$	

3.2. Karma Etkili Model

Operatörler arasından özel seçilen o tane $O_1, O_2, ..., O_o$ operatör ile ürünler arasından rasgele seçilen p tane $P_1, P_2, ..., P_p$ ürün kullanılarak, her operatör her üründe rasgele bir sırada r kez ölçüm yapacak şekilde bir deney tasarlansın.

Bağımlı değişken: Y - ürünün ölçüm değeri.

Etkenler (faktörler):

Operatör etkeni: Düzeyleri $O_1, O_2, ..., O_o$ özel seçimli etken.

Parça etkeni: Düzeyleri $P_1, P_2, ..., P_p$ rasgele seçimli etken.

İki etkenin düzeylerinin kombinasyonu olan ortak etkiler $(PO)_{ij}$ olmak üzere, Karma Etkili Varyans Analizi Modeli

$$Y_{ijk} = \mu + P_i + O_j + (PO)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,2,...,p;\ j = 1,2,...,o;\ k = 1,2,...,r$$

biçiminde yazılabilir. Karma Etkili ANOVA modelinin varsayımları aşağıda verilmiştir.

Varsayım 1. $i = 1,2,...,p;\ j = 1,2,...,o;\ k = 1,2,...,r$ için gözlenemeyen rasgele hata terimi olarak adlandırılan ε_{ijk}'lar bağımsız ve $N\left(0,\sigma_{\varepsilon}^2\right)$dağılıma sahip rasgele değişkenler,

Varsayım 2. $O_1, O_2, ..., O_o$ özel seçilmiş (sabit) düzey etkileri için $\sum_{j=1}^{o} O_j = 0$,

Varsayım 3. $P_1, P_2, ..., P_p$ rasgele düzey etkileri bağımsız ve $N\left(0,\sigma_P^2\right)$ dağılıma sahip rasgele değişkenler,

Varsayım 4. . $i = 1,2,...,p;\ j = 1,2,...,o$ için $\left(PO\right)_{ij}$ etkileşimleri bağımsız ve $N\left(0,\sigma_{PO}^2\right)$ dağılıma sahip rasgele değişkenler,

Varsayım 5. $i = 1,2,...,p;\ j = 1,2,...,o;\ k = 1,2,...,r$ için ε_{ijk}, P_i, $\left(PO\right)_{ij}$'ler bağımsız olup, $Var\left(Y_{ijk}\right) = \sigma_P^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2$ dır.

Varsayım 6. $\sum_{j=1}^{o}\left(PO_{ij}\right) = 0,\ i = 1,2,...,p$ (Bu varsayım kısıtlı karma model için vardır ancak bu tezde kısıtsız karma modeller kullanılacağından bu varsayım ele alınmayacaktır.)

(3.2) ve (3.5) eşitlikleri kullanılarak KT_P,

$$KT_P = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2 = or\sum_{i=1}^{p}\left(\mu + P_i + \bar{O}_{\bullet} + \left(\overline{PO}\right)_{i\bullet} + \bar{\varepsilon}_{i\bullet\bullet} - \mu - \bar{P}_{\bullet} - \bar{O}_{\bullet} - \left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

$$= or\sum_{i=1}^{p}\left(P_i + \bar{O}_{\bullet} + \left(\overline{PO}\right)_{i\bullet} + \bar{\varepsilon}_{i\bullet\bullet} - \bar{P}_{\bullet} - \bar{O}_{\bullet} - \left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının beklenen değeri alındığında

$$E\left(KT_P\right)=or\sum_{i=1}^{p}E\left(P_i+\left(\overline{PO}\right)_{i\bullet}+\overline{\varepsilon}_{i\bullet\bullet}-\overline{P}_{\bullet}-\left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet}-\overline{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

$$=or\sum_{i=1}^{p}\left[E\left(P_i-\overline{P}_{\bullet}\right)^2+E\left(\left(\overline{PO}\right)_{i\bullet}-\left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet}\right)^2+E\left(\overline{\varepsilon}_{i\bullet\bullet}-\overline{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2\right]$$

$$=por\left(\sigma_P^2-\frac{\sigma_P^2}{p}\right)+por\left(\frac{\sigma_{PO}^2}{o}-\frac{\sigma_{PO}^2}{p\times o}\right)+por\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{o\times r}-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{p\times o\times r}\right)$$

$$=or\left(p\text{-}1\right)\sigma_P^2+r\left(p-1\right)\sigma_{PO}^2+\sigma_\varepsilon^2\left(p-1\right)$$

olup θ_P,

$$\theta_P=E\left(S_P^2\right)=\frac{or\left(p\text{-}1\right)\sigma_P^2+r\left(p-1\right)\sigma_{PO}^2+\sigma_E^2\left(p-1\right)}{p-1}=or\sigma_P^2+r\sigma_{PO}^2+\sigma_E^2$$

dır (Sahai ve Ageel, 2000).

(3.3) ve (3.5) eşitlikleri kullanılarak

$$KT_O=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(\overline{Y}_{\bullet j\bullet}-\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(O_j+\left(\overline{PO}\right)_{\bullet j}+\overline{\varepsilon}_{\bullet j\bullet}-\overline{O}_{\bullet}-\left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet}-\overline{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

olmak üzere her iki tarafın beklenen değeri alındığında

$$E\left(KT_O\right)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}E\left(\left(O_j\right)+E\left(\overline{PO}\right)_{\bullet j}-\left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet}\right)+E\left(\overline{\varepsilon}_{\bullet j\bullet}-\overline{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

$$=pr\sum_{j=1}^{o}O_j+por\left(\frac{\sigma_{PO}^2}{p}-\frac{\sigma_O^2}{p\times o}\right)+por\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{p\times r}-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{p\times o\times r}\right)$$

$$=pr\sum_{j=1}^{o}O_j+r\left(o-1\right)\sigma_{PO}^2+\left(o-1\right)\sigma_\varepsilon^2$$

olup θ_O,

$$\theta_O = \frac{pr\sum_{j=1}^{o} O_j + r(o\text{-}1)\sigma_{PO}^2 + (o-1)\sigma_\varepsilon^2}{o-1}$$

$$= \frac{pr}{o\text{-}1}\sum_{j=1}^{o} O_j + r\sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

dır (Sahai ve Ageel, 2000).

(3.2), (3.3), (3.4) ve (3.5) eşitlikleri kullanılarak

$$KT_{PO} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{Y}_{ij\bullet} - \bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet j\bullet} + \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left[(PO)_{ij} - \left(\overline{PO}\right)_{i\bullet} - \left(\overline{PO}\right)_{\bullet j} + \left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet} + \bar{\varepsilon}_{ij\bullet} - \bar{\varepsilon}_{i\bullet\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet j\bullet} + \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right]^2$$

olmak üzere yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının beklenen değeri alındığında

$$E\left(KT_{PO}\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} E\left(\bar{Y}_{ij\bullet} - \bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet j\bullet} + \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} E\left[(PO)_{ij} - \left(\overline{PO}\right)_{i\bullet} - \left(\overline{PO}\right)_{\bullet j} + \left(\overline{PO}\right)_{\bullet\bullet} + \bar{\varepsilon}_{ij\bullet} - \bar{\varepsilon}_{i\bullet\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet j\bullet} + \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet\bullet}\right]^2$$

$$= por\left[\left(\sigma_{\mathrm{PO}}^2 - \frac{\sigma_{PO}^2}{p} - \frac{\sigma_{PO}^2}{o} + \frac{\sigma_{PO}^2}{p\times o}\right) + \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{r} - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{p\times r} - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{o\times r} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{p\times o\times r}\right)\right]$$

$$= r(p\text{-}1)(o\text{-}1)\sigma_{PO}^2 + (p\text{-}1)(o\text{-}1)\sigma_\varepsilon^2$$

olup θ_{PO},

$$\theta_{PO} = \frac{r(p-1)(o-1)\sigma^2_{PO} + (p-1)(o-1)\sigma^2_{\varepsilon}}{(p-1)(o-1)}$$

$$= r\sigma^2_{PO} + \sigma^2_{\varepsilon}$$

dır (Sahai ve Ageel, 2000).

(3.1) ve (3.4) eşitlikleri kullanılarak

$$KT_E = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\bullet}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{r} E\left(\varepsilon_{ijk} - \bar{\varepsilon}_{ij\bullet}\right)^2$$

$$= por\left(\sigma^2_{\varepsilon} - \frac{\sigma^2_{\varepsilon}}{r}\right)$$

$$= po(r-1)\sigma^2_{\varepsilon}$$

olup θ_E,

$$\theta_E = \frac{po(r-1)\sigma^2_{\varepsilon}}{po(r-1)} = \sigma^2_{\varepsilon}$$

dır (Sahai ve Ageel, 2000).

Karma modelde, $\mu, O_1, O_2, ..., O_o$ parametreleri için yansız birer tahmin edici,

$$\hat{\mu} = \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

$$\widehat{O_j} = \bar{Y}_{\bullet j\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} \quad , \; j = 1, 2, ..., o$$

ve

$$E\left(S_E^2\right)=\sigma_\varepsilon^2$$

$$E\left(S_{PO}^2\right)=\sigma_\varepsilon^2+r\sigma_{PO}^2$$

$$E(S_P^2)=\sigma_\varepsilon^2+r\sigma_{PO}^2+pr\sigma_O^2$$

olmak üzere, σ_P^2,σ_{PO}^2 ve σ_ε^2 varyans bileşenleri için yansız birer tahmin edici,

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2=S_E^2$$

$$\hat{\sigma}_{PO}^2=\frac{S_{PO}^2-S_E^2}{r}$$

$$\hat{\sigma}_P^2=\frac{S_P^2-S_{PO}^2}{or}$$

dır (Öztürk, 2009).

Karma modelde, P etkeni ile ilgili,

$$H_0:\sigma_P^2=0$$
$$H_1:\sigma_P^2>0$$

O etkeni ile ilgili,

$$H_0:O_1=O_2=\cdots=O_o=0$$
$$H_1:O_1\neq 0 \text{ veya } O_2\neq 0 \text{ veya } \cdots \text{ veya } O_o\neq 0$$

ve iki etkenin etkileşimi ile ilgili,

$$H_0:\sigma_{PO}^2=0$$
$$H_1:\sigma_{PO}^2>0$$

hipotezleri için ANOVA tablosu Tablo 4 de verilmiştir (Öztürk, 2009).

Tablo 4. Varyans Analizi(ANOVA) Tablosu

Değişim Kaynağı	**Serbestlik Derecesi**	**Hata K.Ort.**	**Beklenen Kareler Ortalaması**	***F* İstatist.**
Parça (P)	$p-1$	S_P^2	$\theta_P = or\sigma_P^2 + r\sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$	$F_P = \dfrac{KT_P}{KT_{PO}}$
Operatör (O)	$o-1$	S_O^2	$\theta_O = pr\dfrac{\sum_{j=1}^{o} O_j^2}{o-1} + r\sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$	$F_O = \dfrac{KT_O}{KT_{PO}}$
Parça$\times$Operatör$(P\times O)$	$(p-1)(o-1)$	S_{PO}^2	$\theta_{PO} = r\sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$	$F_{PO} = \dfrac{KT_{PO}}{KT_E}$
Tekraredilebilirlik	$po(r-1)$	S_E^2	$\theta_E = \sigma_\varepsilon^2$	

Burada not edilmelidir ki kısıtlı karma modellerde Tablo 6 daki F_O, $F_O = \dfrac{KT_O}{KT_E}$ olarak alınır.

4. ÖLÇÜM SİSTEMLERİ ANALİZİ

Ölçüm değişkenliğinin tespit edilmesi, ürün ve süreç değişkenliğini doğru bir biçimde gözlemlemek için gereklidir. Tekraredilebilirlik ve Tekrarüretilebilirlik (Repeatability&Reproducibility, R&R) diğer bir deyişle ölçüm (Gauge, gage) analizi ölçüm prosedürünün yeterliliğini belirlemek için kullanılır. Tekraredilebilirlik, ölçüm aletinden kaynaklanan değişimi, tekrarüretilebilirlik, operatörlerin ölçme yönteminden kaynaklanan değişimi temsil eder. Ölçüm prosedürü ile ilgili değişim kaynaklarını elde etmek için iki yöntem kullanılır: Bunlardan ilki, uygun varyans bileşenlerinin tahmin değerinin kullanılmasıyla ANOVA yaklaşımı, diğeri de ölçüm değişkenliğinin bileşenlerinin standart sapmalarının tahmin için genişlik metoduna dayalı çizelge algoritmadır.

Bu tez çalışmasında, kompleks deneylere adapte olabilmesi, Tekraredilebilirlik ve Terkrarüretilebilirlik ve diğer ölçüm yeterlilik parametrelerinin güven aralıklarının elde edilmesine imkan vermesi sebebiyle ANOVA yöntemi ele alınacaktır. R&R analizinde genel olarak kullanılan ANOVA modeli, operatör ve parça olmak üzere iki faktörden oluşur. Genellikle operatörler, operatörler kitlesinden rasgele seçildiği varsayıldığından ANOVA modelinde rasgele faktör (random effect) olarak ele alınır. Operatörler özel seçimli faktör olabilir. Örneğin bir fabrikadaki üretilen parçaları ölçmek için önceden istihdam edilmiş üç operatöründe ölçüm yapması durumunda operatör faktörü özel seçimli olarak düşünülmelidir. Bu durumda ölçüm sistemleri çalışmasında karma (mixed effect) model ele alınmalıdır.

Ölçüm sistemleri analizi ile ilgili ayrıntılı bilgi için **(**AIAG, 1995, 2002), Horrell (1991) ve Croarkin (2002) kaynaklarına bakılabilir.

4.1. Ölçüm Sistemi Yeterliliğinin Analizi için Varyans Analizi Modelleri

P, parça faktörü, O, operatör faktörü, PO, etkileşim faktörü ve ε hata terimi olmak üzere R&R analizi için ANOVA modeli

$$Y_{ijk} = \mu + P_i + O_j + (PO)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad i = 1,2,...,p, \; j = 1,2,...,o \quad k = 1,2,...,r \qquad (4.1)$$

şeklinde verilir. Burada p, parça sayısı, o, operatör sayısı ve r, tekrar sayısıdır. Operatör faktörünün rasgele veya özel seçimli olduğu durumlara göre (4.1) modeli rasgele etkili model veya karma etkili model adını almaktadır.

Rasgele model durumunda $P_i, O_j, (PO)_{ij}$ ve ε_{ijk} ler 0 ortalamalı ve sırasıyla σ_P^2, σ_O^2, σ_{PO}^2 ve σ_ε^2 varyanslı normal dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenlerdir (Bkz. Tablo 1).

Karma etkili model durumunda (O, operatör faktörü özel seçimli olduğunda) $P_i, (PO)_{ij}$ ve ε_{ijk} ler 0 ortalamalı ve sırasıyla σ_P^2, σ_{PO}^2 ve σ_ε^2 varyanslı normal dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenlerdir ve $\sum_{j=1}^{o} O_j = 0$ dır (Dolezal, Burdick, Birch, 1998). Ayrıca bu söylenenler için Tablo 1 e bakılabilir.

Rasgele ve Karma modellerde kareler ortalamalarının dağılımları bir istisna dışında aynıdır. Her iki modelde de $\frac{(p-1)S_P^2}{\theta_P}$, $\frac{(p-1)(o-1)S_{PO}^2}{\theta_{PO}}$ ve $\frac{po(r-1)S_E^2}{\theta_E}$ bağımsızdır ve sırasıyla $(p\text{-}1)$, $(p\text{-}1)(o\text{-}1)$ ve $po(r\text{-}1)$ serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahiptir. Ancak $\frac{(o-1)S_O^2}{\theta_O}$, rasgele modelde $(o\text{-}1)$ serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahipken, karma modelde bu durum geçerli değildir. Karma modelde $\frac{(o-1)S_O^2}{\theta_{PO}}$, $(o\text{-}1)$ serbestlik dereceli ve $\lambda = \frac{pr\sum_{j=1}^{o} O_j^2}{2\theta_{PO}}$ merkezsel olmama parametreli Ki-kare dağılımına sahiptir (Graybill, 1961). Burada karma modelde $\frac{(o-1)S_O^2}{\theta_O}$'nin dağılımı hakkında bilgi verilmediğine dikkat edilmelidir.

Tablo 5 ve Tablo 6 da Rasgele ve Karma model için ANOVA tabloları verilmiştir.

Tablo 5. Rasgele etkili ANOVA modeli için ANOVA Tablosu

Değişim Kaynağı	**Serbestlik Derecesi**	**Hata K. Ort.**	**Beklenen Kareler Ortalaması**	***F* İstatist.**
Parça (P)	$p-1$	S_P^2	$\theta_P = \sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{PO}^2 + or\sigma_P^2$	$F_P = \dfrac{KT_P}{KT_{PO}}$
Operatör (O)	$o-1$	S_O^2	$\theta_O = \sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{PO}^2 + pr\sigma_O^2$	$F_O = \dfrac{KT_O}{KT_{PO}}$
Parça×Operatör $(P\times O)$	$(p-1)(o-1)$	S_{PO}^2	$\theta_{PO} = \sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{PO}^2$	$F_{PO} = \dfrac{KT_{PO}}{KT_E}$
Tekraredilebilirlik	$po(r-1)$	S_E^2	$\theta_E = \sigma_\varepsilon^2$	

Tablo 5 de θ_O ile verilen hücrede σ_{PO}^2 yerine $\dfrac{1}{o\text{-}1}\sum_{j=1}^{o} O_j^2$ yazıldığında kısıtsız karma model için ANOVA tablosu elde edilir. Buna ilaveten Tablo 5 de F_O yerine $F_O = \dfrac{KT_O}{KT_E}$ de alındığında kısıtlı karma model için ANOVA tablosu elde edilir.

Tablo 6. Karma Etkili ANOVA modeli için ANOVA Tablosu

Değişim Kaynağı	**Serbestlik Derecesi**	**Hata K. Ort.**	**Beklenen Kareler Ortalaması**	***F* İstatist.**
Parça (P)	$p-1$	S_P^2	$\theta_P = or\sigma_P^2 + r\sigma_{PO}^2 + \sigma_E^2$	$F_P = \dfrac{KT_P}{KT_{PO}}$
Operatör (O)	$o-1$	S_O^2	$\theta_O = pr\dfrac{1}{o\text{-}1}\sum_{j=1}^{o} O_j^2 + r\sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$	$F_O = \dfrac{KT_O}{KT_{PO}}$
Parça×Operatör $(P\times O)$	$(p-1)(o-1)$	S_{PO}^2	$\theta_{PO} = r\sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$	$F_{PO} = \dfrac{KT_{PO}}{KT_E}$
Tekraredilebilirlik	$po(r-1)$	S_E^2	$\theta_E = \sigma_\varepsilon^2$	

Burada not edilmelidir ki kısıtlı karma model durumunda ANOVA tablosu için Tablo 6 daki F_O yerine $F_O = \frac{KT_O}{KT_E}$ alınır.

4.2. Bazı Ölçüm Yeterlilik Parametreleri ve Tahmin Edicileri

Ölçüm R&R analizinin (Gauge R&R) amacı, ölçüm sisteminin değişkenliğinin ölçülen parçanın değişkenliğine göre daha az olup olamadığını belirlemektir. Literatürde ölçüm sistemleri çalışmasında adı geçen birçok parametre ve bu parametrelerin fonksiyonlarından elde edilmiş parametreler vardır. Bu parametreler Tablo 7 de verilmiştir. Bu parametreler süreç ve ölçüm sistemi değişkenliği hakkında bilgi vermektedir.

Rasgele etkili ANOVA modeli kullanılarak yapılan R&R analizinde tekraredilebilirlik ve tekrarüretilebilirlik, sırasıyla,

$$\gamma_1 = \sigma_\varepsilon^2$$

ve

$$\gamma_2 = \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda toplam ölçüm

$$\gamma_M = \gamma_1 + \gamma_2 = \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

ve toplam süreç varyansı

$$\gamma_T = \gamma_P + \gamma_M = \sigma_P^2 + \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

biçiminde tanımlanır.

Karma ANOVA modeli ele alındığında yukarıdaki verilen tanımlarda σ_O^2 yerine $\frac{\sum_{j=1}^{o} O_j^2}{o-1}$ alınmalıdır.

PTR(Precision-to-Tolerance Ratio) parametresi,

$$PTR = \frac{k\sqrt{\gamma_M}}{USL - LSL} \times \%100$$

şeklinde tanımlanır. Burada USL, üst spefikasyon limiti, LSL, alt spefikasyon limitidir. Ayrıca $k = 5.15$ veya $k = 6$ olarak alınır. Selçuk Stat $k = 5.15$ değerini ele almaktadır. Bu değerler normal dağılım için sırasıyla kitlenin en az %99 unu barındıran %95 lik tolerans aralığı sınırları arasındaki mesafe ve doğal tolerans aralığı arasındaki mesafedir. PTR parametresinin yorumlanmasında faklı görüşler vardır. Montgomery and Runger (1993a) ölçüm sisteminin yeterli olduğunu söyleyebilmek için PTR parametresinin %10 dan az olması gerektiğini vurgulamışlardır. Bu öneri, AIAG Ölçüm Sistemleri Analizi El Kitabı (1995, sayfa 60) nın önerisi ile tutarlıdır. Mader, Prins ve Lambe (1999), Wheeler ve Lyday (1989) ı referans vererek PTR parametresi %20 den fazla olduğu durumda ölçüm sisteminin yetersiz olduğunu ileri sürmüşlerdir. Son olarak Barrentine (1991, sayfa 10) PTR parametresi %30 dan fazla olduğu durumda ölçüm sisteminin yetersiz olduğunu söylemiştir. Bazı özel durumlarda Montgomery and Runger (1993a) ve Mader (1999) PTR parametresinin ölçüm yeterliliği konusunda iyi bir katsayı olamayacağını vurgulamışlardır. Örneğin yüksek yeterliliğe sahip teknoloji, ölçüm sisteminden kaynaklanan değişkenliği tolere edebilir.

Parça hatasının, toplam ölçüm varyansına oranı

$$\delta = \frac{\sigma_P^2}{\gamma_M}$$

şeklinde tanımlanır. Ölçüm prosedürünün yeterliliği hakkında bilgi vermesi bakımından R&R analizinde δ parametresinin önemli bir yeri vardır.

Parça hatasının, toplam süreç hatasına oranı

$$\rho_P = \frac{\gamma_P}{\gamma_T}$$

şeklinde tanımlanır.

Toplam ölçüm hatasının, toplam süreç hatasına oranı

$$\rho_M = \frac{\gamma_M}{\gamma_T} = 1 - \rho_P$$

şeklinde tanımlanır.

Toplam ölçüm hatasının toplam süreç hatasına göre oranı %10 dan küçükse ölçüm sistemi yeterli %10 ile %30 arasında ise şartlı yetrli %30 dan büyükse ölçüm sistemi tekrar gözden geçirilmelidir (Kavi ve Elevli, 2008).

(AIAG, 1995, sayfa:32) SNR (Signal-to-Noise Ratio) parametresini δ veya ρ_P parametresine dayalı olarak

$$SNR = \sqrt{\frac{2\rho_P}{1-\rho_P}} = \sqrt{2\delta}$$

şeklinde tanımlamıştır. AIAG (1995) ölçüm sisteminin yeterli olduğunu söyleyebilmek için SNR parametresinin 5 den çok olması gerektiğini söylemiştir. Bu parametre kategorilerin farklı seviyelerinin sayısı(the number of distinct levels of categories) olarak da adlandırılır. Not etmek gerekir ki AIAG (1990) ölçüm sisteminin yeterli olduğunu söyleyebilmek için SNR parametresinin 3 den çok olması

gerektiğini söylemiştir (Dolezal, Burdick, Birch, 1998). Ayrıca burada not etmelidir ki (?) $SNR = \sqrt{\delta}$ olarak tanımlanmıştır. Minitab SNR yi $\sqrt{2\delta}$ ve NCSS 2007 SNR yi $\sqrt{\delta}$ olarak ele almaktadır.

Bir başka parametre Mader, Prins ve Lampe (1999) ve Wheeler (1992) tarafından önerilen ayırma oranıdır (Discriminant Ratio) ve DR

$$DR = \frac{1+\rho_P}{1-\rho_P}$$

şeklinde tanımlanır. Mader, Prins ve Lampe (1999), bu oranın dörtten büyük olmasının, ölçüm sisteminin yeterli olduğunu işaret ettiğini ileri sürmüşlerdir. Burada bahsedilen parametrelerin dışındaki parametreler için Vardeman ve VanValkenburg (1999), van den Heuvel ve Trip (2002) ve Larsen (2002) e bakılabilir.

Tablo 7. Ölçüm yeterlilik parametreleri

Parametreler	θ **türünden parametreler**	**Tahmin ediciler**
$\gamma_P = \sigma_P^2$	$\frac{\theta_P - \theta_{PO}}{o \times r}$	$\hat{\gamma}_P = \frac{S_P^2 - S_{PO}^2}{o \times r}$
$\gamma_O = \sigma_O^2$	$\frac{\theta_O - \theta_{PO}}{p \times r}$	$\hat{\gamma}_O = \frac{S_O^2 - S_{PO}^2}{p \times r}$
$\gamma_1 = \sigma_\varepsilon^2$	θ_E	$\hat{\gamma}_1 = S_E^2$
$\gamma_2 = \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2$	$\frac{\theta_O + (p-1)\theta_{PO} - p\theta_E}{p \times r}$	$\hat{\gamma}_2 = \frac{S_O^2 + (p-1)S_{PO}^2 - pS_E^2}{p \times r}$
$\gamma_M = \gamma_1 + \gamma_2$ $= \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$	$\frac{\theta_O + (p-1)\theta_{PO} + p(r-1)\theta_E}{p \times r}$	$\hat{\gamma}_M = \frac{S_O^2 + (p-1)S_{PO}^2 + p(r-1)S_E^2}{p \times r}$
$\gamma_T = \gamma_P + \gamma_1 + \gamma_2$ $= \sigma_P^2 + \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$	$\frac{p\theta_P + o\theta_O + (po - p - o)\theta_{PO} + po(r-1)\theta_E}{p \times o \times r}$	$\hat{\gamma}_T = \frac{pS_P^2 + oS_O^2 + (po - p - o)S_{PO}^2 + po(r-1)S_E^2}{p \times o \times r}$

Tablo 7.(Devam) Ölçüm yeterlilik parametreleri

Parametreler	θ **türünden parametreler**	**Tahmin ediciler**
$\rho_P = \frac{\gamma_P}{\gamma_T}$	$\frac{p(\theta_P - \theta_{PO})}{p\theta_P + o\theta_O + (po - p - o)\theta_{PO} + po(r-1)\theta_E}$	$\hat{\rho}_P = \frac{\hat{\gamma}_P}{\hat{\gamma}_T}$
$\rho_M = \frac{\gamma_M}{\gamma_T} = 1 - \rho_P$	$\frac{o[\theta_O + (p-1)\theta_{PO} + p(r-1)\theta_E]}{p\theta_P + o\theta_O + (po - p - o)\theta_{PO} + po(r-1)\theta_E}$	$\hat{\rho}_M = \frac{\hat{\gamma}_M}{\hat{\gamma}_T}$
$\delta = \frac{\sigma_P^2}{\gamma_M}$	$\frac{p(\theta_P - \theta_{PO})}{o(\theta_O + (p-1)\theta_{PO} + p(r-1)\theta_E)}$	$\hat{\delta} = \frac{\hat{\gamma}_P}{\hat{\gamma}_M}$
$PTR = \frac{k\sqrt{\gamma_M}}{USL - LSL} \times 100$	$\left[\sqrt{\frac{\theta_O + (p-1)\theta_{PO} + p(r-1)\theta_E}{p \times r}}\right] \times \frac{k}{USL - LSL} \times 100$	$\widehat{PTR} = \frac{k\sqrt{\hat{\gamma}_M}}{USL - LSL} \times 100$
$SNR = \sqrt{\frac{2\rho_P}{1 - \rho_P}} = \sqrt{2\delta}$	$\sqrt{\frac{2p(\theta_P - \theta_{PO})}{o[\theta_O + (p-1)\theta_{PO} - p(1-r)\theta_E]}}$	$\widehat{SNR} = \sqrt{\frac{2\hat{\rho}_P}{1 - \hat{\rho}_P}} = \sqrt{2\hat{\delta}}$
$DR = \frac{1 + \rho_P}{1 - \rho_P}$	$\frac{2p\theta_P + o\theta_O + (po - o - 2p)\theta_{PO} + po(r-1)\theta_E}{o[\theta_O + (p-1)\theta_{PO} - p(1-r)\theta_E]}$	$\widehat{DR} = \frac{1 + \hat{\rho}_P}{1 - \hat{\rho}_P}$

5. ÖLÇÜM YETERLİLİK PARAMETRELERİNİN GÜVEN ARALIKLARI

Montgomery ve Runger (1993b), Conors, Merrill ve O'Donnell (1995), Burdick ve Larsen (1997), Vardeman ve VanValkenburg (1999), Hamada ve Weerahandi (2000) ve Chiang (2001), ölçüm R&R analizinde güven aralıklarının önemini vurgulamışlarıdır.

Güven aralıklarının inşasında kullanılan Modifiye edilmiş büyük örneklem metodu (Modified large sample methods, Bkz. Montgomery, 2001) ilk kez Graybill ve Wang (1980) tarafından önerilmiş ve bu metod Burdick ve Graybill (1992) tarafıdan özetlenmiştir. Burdick ve Larsen (1997) bu yaklaşımı kullanarak iki rasgele faktörlü dizayn durumunda ilgili parametre ve fonksiyonlarının güven aralıklarını analitik olarak elde etmişlerdir. Örneğin *SNR* parametresinin tahmin değerinin 7 olması, parametrenin gerçek değerinin 7 olması anlamına gelmez. Bu durumda, *SNR* parametresinin 5 den büyük olması ölçüm sisteminin yeterli olduğunu göstermesi göz önüne alındığında *SNR* parametresinin tahmin değerinin(7) 5 den büyük olduğundan güvenle ölçüm sistemi yeterlidir denilebilir mi? İşte tam bu noktada güven aralığı kavramı önemi ortaya çıkmaktadır. *SNR* parametresinin %95 lik güven aralığının alt sınırı 5 den büyük olduğunda %95 güven seviyesinde ölçüm sistemi yeterli denilebilir.

Güven aralıklarının inşasında kullanılan ikinci bir yöntem genelleştirilmiş güven aralıkları yöntemidir. Weerahandi (1993), güven aralıklarının analitik olarak elde edilemediği durumlarda genelleştirilmiş güven aralıkları yöntemini incelemiştir. Hamada ve Weerahandi (2000) bu yaklaşımı kullanarak iki faktörlü dizayn durumunda ilgili parametre ve fonksiyonlarının güven aralıklarını analitik olarak elde etmişlerdir. Bu yöntemin nümerik integral gerektirmesi dezavantajıdır. Bu yöntemin avantajı ise güven aralığı elde etmek için genel bir strateji sunmasıdır. Modifiye edilmiş büyük örneklem metodunun belirli dizaynlar için kullanılabilmesine karşın, genelleştirilmiş güven aralıkları yöntemi, yuvalanmış(nested) dizaynlar gibi daha kompleks dizaynlar için de kullanılabilir (Burdick, Borror, Montgomery, 2003).

Selçuk Stat'da ρ_P ρ_M ve SNR_2 katsayıları ve güven aralıklarının kodları Leiva ve Graybill (1986) nın metoduna dayalı Chiang (2002) nin sonuçlarına göre yazılmıştır. İlgili güven aralıkları için Burdick, Borror ve Montgomery (2003) sayfa 346-346'ye bakılabilir.

5.1. Rasgele Etkili Model Durumu

Burdick ve Larsen (1997) R&R analizinde ele alınan bazı parametreler için modifiye edilmiş büyük örneklem metodunu kullanarak güven aralıklarını vermişlerdir. Güven aralıklarının alt ve üst sınırları analitik olarak elde edilmesi metodun avantajlarındandır. Burdick ve Larsen (1997) kapsama olasılıklarını (coverage probability) simulasyon yaparak incelmiş ve asimptotik olarak elde edilen güven aralığının faklı durumlar için (farklı operatör ve parça sayıları) güven seviyesinin hemen hemen korunduğunu gözlemişlerdir.

Selçuk Stat yazılımı rasgele model durumunda $\gamma_P, \gamma_O, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_M, \gamma_T, \delta$, $SNR1$, PTR parametrelerinin güven aralıkları için Burdick ve Larsen (1997) in sonuçlarını kullanmaktadır. Yine rasgele modelde ρ_M, ρ_P ve $SNR2$ parametrelerinin güven aralıkları için Chiang (2002) in sonuçlarını kullanmaktadır. Karma model durumunda ise $\gamma_P, \gamma_O, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_M, \gamma_T, \delta, SNR1$ parametrelerinin güven aralıkları için Dolezal, Burdick, Birch (1998) in sonuçlarını kullanmaktadır.

Bu parametre ve güven aralıkları verilmeden önce kullanılacak bazı eşitlikler aşağıda verilmiştir (Burdick ve Larsen 1997). $n_O = o-1$, $n_P = p-1$, $n_{PO} = (p-1)(o-1)$ ve $n_\varepsilon = po(r-1)$ olmak üzere

$$n_1 = n_P,\ n_2 = n_O,\ n_3 = n_{PO},\ n_4 = n_\varepsilon,$$

$$H_q = \frac{1}{F_{1-\alpha;n_q,\infty}} - 1 = \frac{n_q}{\chi^2_{1-\alpha;n_q}} - 1,\ q = 1,2,3,4,$$

$$G_q = 1 - \frac{1}{F_{\alpha;n_q,\infty}} = 1 - \frac{n_q}{\chi^2_{\alpha,n_q}},\ q = 1,2,3,4\,,$$

$$H_{qr} = \frac{\left(1 - F_{1-\alpha;n_q,n_r}\right)^2 - H_q^2 F^2_{1-\alpha;n_q,n_r} - G_r^2}{F_{1-\alpha;n_q,n_r}},\ q = 1,2,3,4;\ r = 1,2,3,4\,,$$

$$G_{qr} = \frac{\left(F_{\alpha;n_q,n_r} - 1\right)^2 - G_q^2 F_{\alpha;n_q,n_r} - H_r^2}{F_{\alpha;n_q,n_r}},\ q = 1,2,3,4;,\ r = 1,2,3,4$$

, burada $F_{\alpha;n_q,n_r}$, n_q ve n_r serbestlik dereceli F dağılımının α sağ kuyruk olasılıklı kuantili ve $\chi_{\alpha;n_q}$, n_q serbestlik dereceli Ki-Kare dağılımının α sağ kuyruk olasılıklı kuantilidir.

Aşağıda verilen güven aralıkları Burdick ve Larsen (1997) in sonuçlarıdır.

$\gamma_1 = \sigma_\varepsilon^2$ için $\%100 \times (1-2\alpha)$ güven seviyeli kesin (exact) güven aralık

$$\left(\left(1 - G_4\right) S_R^2, \left(1 + H_4\right) S_R^2\right)$$

şeklinde verilir.

σ_O^2 için $\%100 \times (1-2\alpha)$ güven seviyeli güven aralık

$$\left(\frac{S_O^2 - S_{PO}^2 - \sqrt{V_L}}{IK}, \frac{S_O^2 - S_{PO}^2 + \sqrt{V_L}}{IK} \right)$$

şeklinde verilir. Burada

$$V_L = G_2^2 S_O^2 + H_3^2 S_{PO}^2 + G_{23} S_O^2 S_{PO}^2$$

$$V_U = H_2^2 S_O^2 + G_3^2 S_{PO}^2 + H_{23} S_O^2 S_{PO}^2$$

biçimindedir.

$\gamma_2 = \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2$ için $\%100 \times (1-2\alpha)$ güven seviyeli güven aralık

$$\left(\hat{\gamma}_2 - \sqrt{V_L}, \hat{\gamma}_2 - \sqrt{V_U} \right)$$

şeklinde verilir ve burada

$$\hat{\gamma}_2 = \left(S_O^2 + (p-1) S_{PO}^2 - p S_E^2 \right) / (pr)$$

$$V_L = \frac{1}{(pr)^2} \left\{ G_2^2 S_O^4 + G_3^2 (p-1)^2 S_{PO}^4 - H_4^2 p^2 S_E^4 + G_{24} p S_O^2 S_E^2 \right.$$

$$\left. + G_{34} (p-1) p S_{PO}^2 S_E^2 + G_{23}^* (p-1) S_O^2 S_{PO}^2 \right\}$$

$$V_U = \frac{1}{(pr)^2} \left\{ H_2^2 S_O^2 + H_3^2 (p-1)^2 S_{PO}^4 + G_4^2 p^2 S_E^4 \right.$$

$$\left. + H_{24} p S_O^2 S_E^2 + H_{34} (p-1) p S_{PO}^2 S_E^2 \right\}$$

ve

$$G_{24}^* = \left(1 - \frac{1}{F_{\alpha; n_2+n_3, \infty}} \right)^2 \frac{(n_2+n_3)^2}{n_2 n_3} - \frac{G_2^2 n_2}{n_3} - \frac{G_3^2 n_3}{n_2}$$

şeklindedir.

$\gamma_M = \gamma_1 + \gamma_2 = \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$ için $\%100 \times (1-2\alpha)$ güven seviyeli güven aralık

$$\left(\hat{\gamma}_M - \sqrt{V_L}, \hat{\gamma}_M - \sqrt{V_U}\right)$$

şeklinde verilir, burada

$$\hat{\gamma}_M = \frac{S_O^2 + (p-1)S_{PO}^2 + p(r-1)S_E^2}{pr},$$

$$V_L = \frac{G_2^2 S_O^4 + G_3^2 (p-1)^2 S_{PO}^4 + G_4^2 p^2 (r-1)^2 S_E^4}{(pr)^2} \text{ ve}$$

$$V_U = \frac{H_2^2 S_O^4 + H_3^2 (p-1)^2 S_{PO}^4 + H_4^2 I^2 (r-1)^2 S_E^4}{(pr)^2}$$

şeklindedir.

δ için $\%100\times(1-2\alpha)$ güven seviyeli güven aralık

$$\left(\frac{p}{o}\left(B_L - \frac{\sqrt{Q_L}}{2A_L}\right), \frac{p}{o}\left(B_U + \frac{\sqrt{Q_U}}{2A_U}\right)\right)$$

şeklinde verilir, burada

$$Q_U = Max\left(0, B_U^2 - 4A_U C_U\right)$$

$$A_U = \left(1 - G_2^2\right)S_O^4 + (p-1)^2\left(1 - G_3^2\right)S_{PO}^4 + p^2(r-1)^2\left(1 - G_4^2\right)S_E^4 + 2(p-1)S_O^2 S_{PO}^2$$

$$+ 2p(r-1)^2 S_O^2 S_E^2 + 2p(p-1)(r-1)S_{PO}^2 S_E^2$$

$$B_U = -2(p-1)\left(p-G_4^2\right)S_{PO}^4 + (2+H_{12})S_P^2S_O^2 + (2+H_{13})(p-1)S_P^2S_{PO}^2$$

$$+(2+H_{14})\,p(r-1)S_P^2S_E^2 - 2S_O^2S_{PO}^2 - 2p(r-1)S_{PO}^2S_E^2$$

$$C_L = \left(1-H_4^2\right)S_P^2 + \left(1-G_3^2\right)S_{PO}^4 - (2+H_{13})S_P^2S_{PO}^2$$

$$Q_L = Max\left(0, B_L^2 - 4A_LC_L\right)$$

$$A_L = \left(1-H_2^2\right)S_O^4 + (p-1)^2\left(1-H_3^2\right)S_{PO}^4 + p^2(r-1)^2\left(1-H_4^2\right)S_E^4 + 2(p-1)S_O^2S_{PO}^2$$

$$+2p(r-1)^2 S_O^2S_E^2 + 2p(p-1)(r-1)S_{PO}^2S_E^2$$

$$B_L = -2(p-1)\left(p-H_3^2\right)S_{PO}^4 + (2+G_{12})S_P^2S_O^2 + (2+G_{13})(p-1)S_P^2S_{PO}^2$$

$$+(2+H_{14})\,p(r-1)S_P^2S_R^2 - 2S_O^2S_{PO}^2 - 2p(r-1)S_{PO}^2S_R^2$$

ve

$$C_L = \left(1-G_4^2\right)S_P^2 + \left(1-H_3^2\right)S_{PO}^4 - (2+G_{13})S_P^2S_{PO}^2$$

şeklindedir.

5.2. Karma Etkili Model Durumu

Rasgele ve karma etkili modellerde kareler ortalamalarının dağılımları bir istisna dışında aynıdır. Her iki modelde de $\frac{(p-1)S_P^2}{\theta_P}$, $\frac{(p-1)(o-1)S_{PO}^2}{\theta_{PO}}$ ve $\frac{po(r-1)S_E^2}{\theta_E}$ bağımsızdır ve sırasıyla $(p-1)$, $(p-1)(o-1)$ ve $po(r-1)$ serbestlik

dereceli Ki-kare dağılımına sahiptir. Ancak $\frac{(o-1)S_O^2}{\theta_O}$, rasgele modelde $n_O = (o\text{-}1)$ serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahipken, karma modelde bu durum geçerli değildir. Karma modelde $\frac{(o-1)S_O^2}{\theta_{PO}}$, $(o\text{-}1)$ serbestlik dereceli ve $\lambda = \frac{pr\sum_{j=1}^{o} O_j^2}{2\theta_{PO}}$ merkezsel olmama parametreli Ki-kare dağılımına sahiptir (Graybill, 1961).

Karma modelin varsayımlarından $U = \frac{n_O S_O^2}{\theta_{PO}}$, n_O serbestlik dereceli ve λ merkezsel olmama parametreli Ki-kare dağılımına sahip rasgele değişkendir. V de n^* serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip rasgele değişken olsun. Bu durumda $E(U) = n_O + 2\lambda$, $Var(U) = 2(n_O + 2\lambda)$, $E(V) = n^*$ ve $Var(U) = 2n^*$ yazılabilir. U ve V rasgele değişkenleri arasında $cU = V$ şelinde bir eşitliğin varlığı düşünüldüğünde cU ve V rasgele değişkenlerinin beklenen değer ve varyansları birbirine eşitlendiğinde c ve n^*

$$c = \frac{n_O + 2\lambda}{n_O + 4\lambda} \quad \text{ve} \quad n^* = \frac{(n_O + 2\lambda)^2}{n_O + 4\lambda}$$

olarak bulunur. Böylece $cU = \frac{cn_O S_O^2}{\theta_{PO}}$, asimptotik olarak n^* serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip rasgele değişken olur. Diğer taraftan $\frac{n^*}{c} = n_O + \lambda$ olduğundan

$$\frac{cn_O S_O^2}{\theta_{PO}} = \frac{cn^* n_O S_O^2}{n^* \theta_{PO}}$$

$$= \frac{n^* S_O^2}{\theta_{PO} + \frac{2\lambda\theta_{PO}}{n_O}}$$

yazılabilir. Aynı zamanda

$$\theta_{PO} + \frac{2\lambda\theta_{PO}}{n_O} = \theta_{PO} + \frac{pr}{o-1}\sum_{j=1}^{o} O_j^2 = \theta_O$$

olduğundan $cU = \frac{n^* S_O^2}{\theta_O}$, asimptotik olarak n^* serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip rasgele değişken olur.

λ bilindiğinde, rasgele modelde $\frac{(p-1)S_P^2}{\theta_P}$, $\frac{(o-1)S_O^2}{\theta_O}$, $\frac{(p-1)(o-1)S_{PO}^2}{\theta_{PO}}$ ve $\frac{po(r-1)S_E^2}{\theta_E}$ kullanılarak elde edilen varyans bileşenleri ve fonksiyonları için yukarıda elde edilen güven aralıklarında n_O yerine n^* yazıldığında $\frac{(p-1)S_P^2}{\theta_P}$, $\frac{n^* S_O^2}{\theta_O}$, $\frac{(p-1)(o-1)S_{PO}^2}{\theta_{PO}}$ ve $\frac{po(r-1)S_E^2}{\theta_E}$ pivotları kullanılarak karma etkili model durumunda varyans bileşenleri ve fonksiyonları için güven aralıkları oluşturulabilir, burada

$$n^* = \frac{(n_O + 2\lambda)^2}{n_O + 4\lambda} = n_O + \frac{4\lambda^2}{n_O + 4\lambda} \qquad (5.1)$$

dır. $\lambda \geq 0$ olduğundan $n^* \geq n_O$ olup, karma model durumunda S_O^2, rasgele modele göre daha büyük serbestlik derecesine sahip olacaktır. Bu ise, karma model durumunda S_O^2 ifadesini barındıran güven aralıkları, rasgele model durumunda elde edilen güven aralıklarından daha dar olması anlamına gelmektedir. Ayrıca (5.1) eşitliğinden, $\lambda = 0$ olması karma ve rasgele model durumunda güven aralılarının aynı olacağı açıktır. n^* serbestlik derecesini tahmin etmek için önce λ merkezsel olmama parametresinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Karma modelin varsayımları altında $\frac{n_O S_O^2}{\theta_{PO}}$, n_O serbestlik dereceli λ merkezsel olmama parametreli Ki-kare

dağılımına sahip rasgele değişken ve $\frac{n_{PO}S_{PO}^2}{\theta_{PO}}$, n_O serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip rasgele değişken olmak üzere Bölüm 2.2.5 de verilen merkezi olmayan F dağılımının tanımından

$$\frac{S_O^2}{S_{PO}^2} = \frac{\frac{n_O S_O^2}{\theta_{PO}}}{\frac{n^*}{\frac{n_{PO}S_{PO}^2}{\theta_{PO}}}}$$

rasgele değişkeni n_O, n_{PO} serbestlik dereceli λ merkezsel olmama parametreli merkezi olmayan F dağılımına sahiptir. Buradan

$$E\left(\frac{S_O^2}{S_{PO}^2}\right) = \frac{n_{PO}}{(n_{PO}-1)}\left(1+\frac{2\lambda}{n_O}\right) \tag{5.2}$$

yazılabilir (Dolezal, Burdick, Birch, 1998). Böylece $n_{PO} > 2$ için λ merkezsel olmama parametresinin bir tahmin edicisi

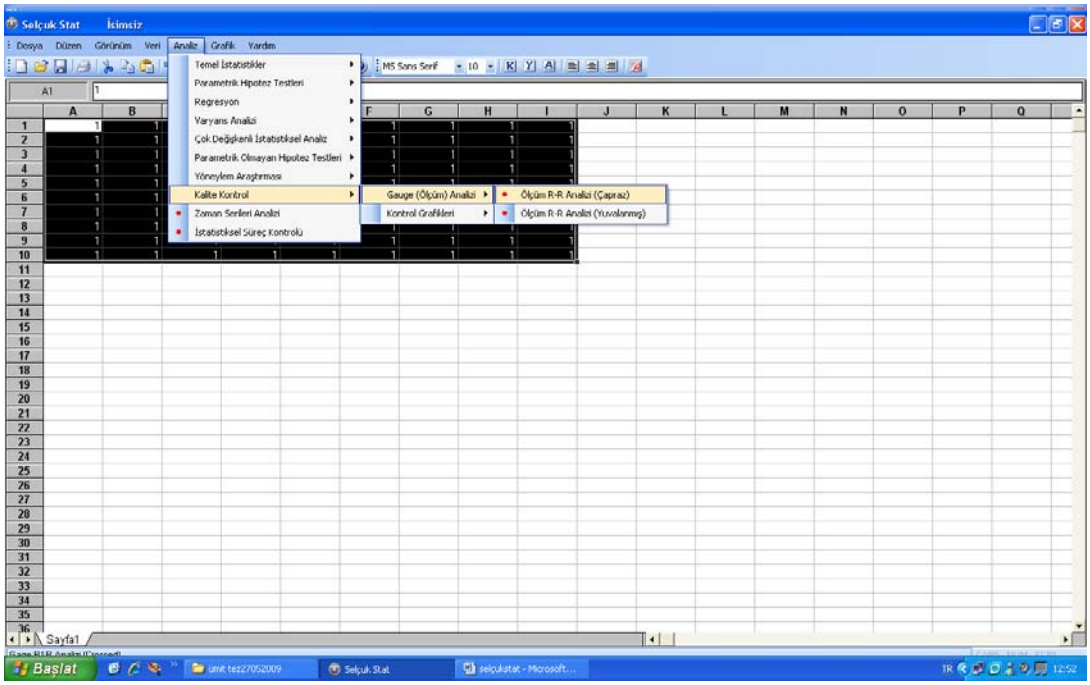
$$\hat{\lambda} = \frac{n_O}{2}\left\{\frac{S_O^2}{S_{PO}^2}\left(\frac{n_{PO}-2}{n_{PO}}\right)-1\right\} \tag{5.3}$$

şeklinde önerilebilir. Burada, $\hat{\lambda}$ tahmin edicisi sıfırdan küçük değer aldığında $\lambda = 0$ olarak alınmalıdır. Ayrıca burada not etmek gerekir ki Bölüm 2.2.5 deki Muirhead (1982) in verdiği beklenen değer, Dolezal, Burdick, Birch (1998) in verdiği beklenen değer birbirini tutmamaktadır. Burada Dolezal, Burdick, Birch (1998) in verdiği beklenen değer ele alınmıştır.

6. SELÇUK STAT, NCSS VE MİNİTAB ÇIKTILARININ İNCELENMESİ

Selçuk Stat programı Selçuk Üniversitesi İstatistik bölümünün sitesi http://selcuk-istatistik.tr.cx/ adresinden temin edilebilir. Ayrıca program kodları Arş. Gör. Ahmet PEKGÖR' den (apekgör@selcuk.edu.tr) istenebilir.

Selçuk Stat'da ölçüm sistemleri analizi, aşağıda verilen Şekil 1'deki menüden yapılmaktadır.



Şekil 1. Selçuk Stat Ölçüm Sistemleri Menüsü

Örnek 1.

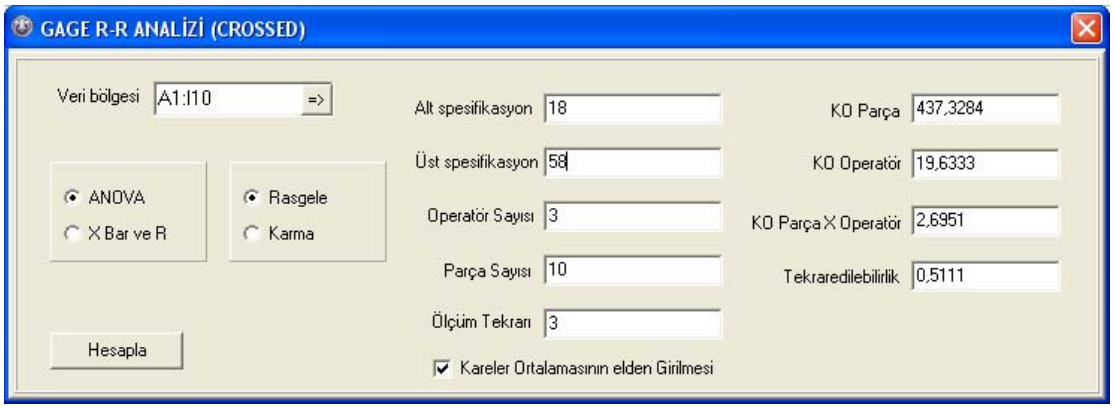
Rasgele Model Durumu

Aşağıda Burdick, Borror ve Montgomery (2003) nin kullandığı verilere dayalı kareler ortalamalarının girilmesiyle elde edilen ölçüm yeterlilik analizi verilmiştir. Burada veri bölgesi kısmına gerçek ölçümler girilmemiştir. Şekil 2 de Burdick, Borror ve Montgomery (2003) sayfa 348 deki veriler girilmiştir ve operatör

ve parça rasgele faktör olarak ele alınmıştır. Gerçek ölçümler Tablo 8 de verilmiştir. Selçuk Stat'da, gerçek veriler veya kareler ortalaması girilerek de analiz yapılabilmektedir.

Tablo 8. Burdick, Borror ve Montgomery (2003) nin Nümerik Örnek İçin Kullandığı Veriler

	Operatör I			Operatör II			Operatör III		
Parça	I. Den.	II. Den.	III. Den.	I. Den.	II. Den.	III. Den.	I. Den.	II. Den.	III. Den.
1	37	38	37	41	41	40	41	42	41
2	42	41	43	42	42	42	43	42	43
3	30	31	31	31	31	31	29	30	28
4	42	43	42	43	43	43	42	42	42
5	28	30	29	29	30	29	31	29	29
6	42	42	43	45	45	45	44	46	45
7	25	26	27	28	28	30	29	27	27
8	40	40	40	43	42	42	43	43	41
9	25	25	25	27	29	28	26	26	26
10	35	34	34	35	35	34	35	34	35



Şekil 2. Selçuk Stat Ölçüm Yeterlilik Analizi Ara Yüzeyi

Selçuk Stat Program çıktısı Şekil 3 de verilmiştir. Varyans Analiz Tablosunda, Kareler Toplamı (K.T.) sütunu ham verilerin yerine "1" yazılmasından dolayı "0" yazılmıştır. Varyans Bileşenleri Tablosunda, tekraredilebilirlik, tekrarüretilebilirlik ve toplam ölçüm varyansı;operatör varyansı, parça varyansı ve

toplam varyans parametrelerinin tahmini ve %95 lik güven aralıkları verilmiştir. Ölçüm yeterlilik parametreleri kısmında ise SNR, PTR ve DR parametrelerinin tahmini ve %95 lik güven aralıkları verilmiştir. Burada ρ_M ve ρ_P nin tahmin ve güven aralıkların verilmesinin sebebi SNR1, SNR2 ve DR tahmin ve güven aralıklarının bu değerlere bağlı olmasıdır (Bakınız Tablo 7).

PTR tahmin değeri %17 iken %95 lik güven aralığı 14.134 ile 66.918 arasıdır. PTR değerinin %30 dan küçük olması, ölçüm yeterliliğinin kabul edilebilir olduğunu gösterdiği göz önüne alındığında PTR nin tahmini %17 olması ilk bakışta ölçüm sisteminin yeterliliğini göstermektedir. Diğer taraftan % 95 lik güven aralığı asgari %30 luk PTR değerini bir hayli aştığından ölçüm sisteminin yeterliliğinden şüphe duyulması gerektiği açıktır.

SNR tahmin değeri 7.317 iken %95 lik güven aralığı 1.885 ile 13.742 arasıdır. SNR değerinin 5'den büyük olması, ölçüm yeterliliğinin kabul edilebilir olduğunu gösterdiği göz önüne alındığında SNR nin tahminin 7.317 olması ilk bakışta ölçüm sisteminin yeterliliğini göstermektedir. Diğer taraftan % 95 lik güven aralığının alt sınırı asgari olması gereken SNR=5 değerinin altında olması nedeniyle ölçüm sisteminin yeterliliğinden şüphe duyulması gerektiği açıktır.

İKİ YÖNLÜ ETKİLEŞİMLİ VARYANS ANALİZİ TABLOSU

Değişim Kaynağı	S.D.	K.T.	K.O.	F Hesap	P Değeri
Parça	9	0,000000000	437,328400000	162,267967800	0,000000000
Operatör	2	0,000000000	19,633300000	7,284813179	0,004809917
Opetatör x Parça	18	0,000000000	2,695100000	5,273136373	0,000000506
Tekraredilebilirlik	60	0,000000000	0,511100000		
Toplam	89	0,000000000			

VARYANS BİLEŞENLERİ TABLOSU

Kaynak	Tahmin	Alt Sınır	Üst Sınır	Katkı yüzdesi(%)
Toplam Ölçüm R&R	1,803706667	1,205291671	27,014368070	3,600479131
Tekraredilebilirlik	0,511100000	0,368429991	0,756785482	1,020235118
Tekrarüretilebilirlik	1,292606667	0,616433574	26,495830720	2,580244013
Operatör	0,564606667	0,072940463	25,747872180	1,127042749
Operatör X Parça	0,728000000	*	*	1,453201264
Parça X Parça	48,292588890	22,650939230	161,577712000	96,399520870
Toplam Değişim	50,096295560	24,444443660	166,161868500	100,000000000

ÖLÇÜM YETERLİLİK İNDEKSLERİ

İndeksler	Tahmin	Alt sınır	Üst sınır
Delta	26,774081270	1,777155834	94,425012160
SNR1	7,317661003	1,885288219	13,742271440
SNR2	7,317661003	1,838914812	14,545018810
RHO P	0,963995209	0,628363843	0,990634844
RHO M	0,036004791	0,009365156	0,371636157
DR	54,548162550	4,381607686	212,557572100
PTR	17,291401420	14,134918710	66,918260640

Ölçüm sisteminin yeterliliği için SNR>5 olması önerilir
Ölçüm sisteminin yeterliliği için PTR<30 olması önerilir

Şekil 3. Tablo 8 deki ölçüm değerleri için Selçuk Stat Çıktısı

Ayrıca Selçuk Stat R&R modelinde $SNR1$ ve $SNR2$ parametrelerinin anlamı şudur: $SNR1 = SNR2$ olmasına rağmen $SNR1$ güven aralığı Burdick ve Larsen (1997) e dayalıdır, $SNR2$ güven aralığı Chiang (2002) ye dayalıdır.

Tablo 8 de verilen örneklem için Burdick, Borror ve Montgomery (2003) nin sayfa 346 da verdiği parametre ve güven aralıklarını göstermektedir. Tablo 9 daki değerler ile Selçuk Stat çıktısı ile tutarlı olduğu gözükmektedir. Tablo 9 daki ve Şekil 3 deki γ_P, γ_M ve γ_T için güven aralıkları Burdick ve Larsen (1997) in metodu ile ρ_P ve ρ_M için güven aralıkları Chiang (2002) nin sonuçlarına göre yazılmıştır.

Tablo 9. Burdick, Borror ve Montgomery (2003) ün Verdiği Parametre ve İlgili Güven Aralıkları

Parametre	**Alt Sınır**	**Üst Sınır**	**%95 lik Güven Aralığı**
γ_P	$\hat{\gamma}_P - \frac{\sqrt{V_{LP}}}{or}$	$\hat{\gamma}_P + \frac{\sqrt{V_{UP}}}{or}$	(22.69,161.64)
γ_M	$\hat{\gamma}_M - \frac{\sqrt{V_{LM}}}{pr}$	$\hat{\gamma}_M + \frac{\sqrt{V_{UM}}}{pr}$	(1.20,27.02)
γ_T	$\hat{\gamma}_T - \frac{\sqrt{V_{LT}}}{por}$	$\hat{\gamma}_T + \frac{\sqrt{V_{UT}}}{por}$	(24.48,166.23)
ρ_P	$L_\rho = \frac{pL^*}{pL^* + o}$	$L_\rho = \frac{pU^*}{pU^* + o}$	(0.628,0.991)
ρ_M	$1 - U_P$	$1 - L_P$	(0.009,0.372)

Tablo 10. Burdick, Borror ve Montgomery (2003) ün verdiği örnekle ilgili bazı hesaplamalar

Terimler	**Tanımları**	**Örnekteki Değerleri**
$V_{LP}=$	$G_1^2S_P^4+H_3^2S_{PO}^4+G_{13}S_P^2S_{PO}^2$	53,076.17
$V_{UP}=$	$H_1^2S_P^4+G_3^2S_{PO}^4+H_{13}S_P^2S_{PO}^2$	1,040,643.4
$V_{LM}=$	$G_2^2S_O^4+G_3^2(p-1)S_{PO}^4+G_4^2p^2(r-1)^2S_E^4$	321.282
$V_{UM}=$	$H_2^2S_O^4+H_3^2(p-1)S_{PO}^4+H_4^2p^2(r-1)^2S_E^4$	572,150.12
$V_{LT}=$	$G_1^2p^2S_P^4+G_2^2o^2S_O^4+G_3^2(po-p-o)^2S_{PO}^4+G_4^2\left(po\right)^2(r-1)^2S_E^4$	5,311,676.7
$V_{UT}=$	$H_1^2p^2S_P^4+H_2^2o^2S_O^4+H_3^2(po-p-o)^2S_{PO}^4+H_4^2\left(po\right)^2(r-1)^2S_E^4$	109,230,276
$G_1=$	$1-\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};p-1,\infty}}$	0.5269
$G_2=$	$1-\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};p-1,\infty}}$	0.7289
$G_3=$	$1-\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};(p-1)(o-1),\infty}}$	0.4290
$G_4=$	$1-\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};po(r-1),\infty}}$	0.2797
$H_1=$	$\frac{1}{F_{\alpha/2;p-1,\infty}}-1$	2.3329
$H_2=$	$\frac{1}{F_{\alpha/2;o-1,\infty}}-1$	38.4979
$H_3=$	$\frac{1}{F_{\alpha/2;(p-1)(o-1),\infty}}-1$	1.1869
$H_4=$	$\frac{1}{F_{\alpha/2;po(r-1),\infty}}-1$	0.4821

Tablo 10 (Devamı). Burdick, Borror ve Montgomery (2003) ün verdiği örnekle ilgili bazı hesaplamalar

Terimler	**Tanımları**	**Örnekteki Değerleri**
$G_{13}=$	$\dfrac{\left(F_{1-\alpha/2;p-1,(p-1)(o-1)}-1\right)^2-G_1^2F^2_{1-\alpha/2;p-1,(p-1)(o-1)}-H_3^2}{F_{1-\alpha/2;p-1,(p-1)(o-1)}}$	-0.0236
$H_{13}=$	$\dfrac{\left(1-F_{\alpha/2;p-1,(p-1)(o-1)}-1\right)^2-H_1^2F^2_{\alpha/2;p-1,(p-1)(o-1)}-G_3^2}{F_{\alpha/2;p-1,(p-1)(o-1)}}$	-0.1800
$L^*=$	$\dfrac{S_p^2-F_{1-\alpha/2;p-1,(p-1)(o-1)}S_{PO}^2}{p(r-1)F_{1-\alpha/2;p-1,\infty}S_E^2+F_{1-\alpha/2;p-1,(o-1)}S_O^2+(p-1)F_{1-\alpha/2;p-1,\infty}S_{PO}^2}$	0.5075
$U^*=$	$\dfrac{S_p^2-F_{\alpha/2;p-1,(p-1)(o-1)}S_{PO}^2}{p(r-1)F_{\alpha/2;p-1,\infty}S_E^2+F_{\alpha/2;p-1,(o-1)}S_O^2+(p-1)F_{\alpha/2;p-1,\infty}S_{PO}^2}$	31.6827

Gage R&R Study - ANOVA Method

Two-Way ANOVA Table With Interaction

Source	DF	SS	MS	F	P
C2	9	3935,96	437,328	162,270	0,000
C1	2	39,27	19,633	7,285	0,005
C2 * C1	18	48,51	2,695	5,273	0,000
Repeatability	60	30,67	0,511		
Total	89	4054,40			

Gage R&R

Source	VarComp	%Contribution (of VarComp)
Total Gage R&R	1,8037	3,60
Repeatability	0,5111	1,02
Reproducibility	1,2926	2,58
C1	0,5646	1,13
C1*C2	0,7280	1,45
Part-To-Part	48,2926	96,40
Total Variation	50,0963	100,00

Number of Distinct Categories = 7

Şekil 4. Tablo 8 deki ölçüm değerleri için; Minitab Çıktısı

Minitab 15 çıktısı, Şekil 3' de verilen Selçuk Stat çıktısı ile karşılaştırıldığında çıktıların hemen hemen aynı olduğu gözlenmektedir. Selçuk Stat'da SNR1 ile gösterilen ayrı kategorilerin sayısı 7.317 olarak tahmin edilirken Minitab bu değeri 7 olarak çıktı vermiştir. Ayrıca Selçuk Stat Minitab 15'de olmayan tüm varyans bileşenlerin ve ölçüm yeterlilik parametrelerin güven aralıklarını vermektedir.

Aşağıda Şekil 5 de NCSS 2007 çıktısı verilmiştir. NCSS 2007 çıktındaki Varyans analiz tablosu, varyans bileşenleri ve Katkı yüzdeleri tablosu Minitab 15 ve Selçuk Stat çıktıların ile uyum göstermektedir.

R & R Report

Page/Date/Time	1 01.07.2009 00:16:12
Database	C:\DOCUMENTS AND SETTINGS\COSKUN\DESKTOP\ÜMIT.S0
Measurements	C2-C4

Data Summary Section

Item	Actual Count	Expected Count
Total Values	90	90
C1	10	
Operators	3	
Replicates	3	

Expected Mean Square and Variance Component Section

Source Term	DF	Expected Mean Square	Variance Component	Lower 95% Conf. Limit	Upper 95% Conf. Limit
C1 (P)	9	R+3(PO)+9(P)	48,29259	22,68114	161,6738
Operators (O)	2	R+3(PO)+30(O)	0,5646091	7,294767E-02	25,75069
Interaction (PO)	18	R+3(PO)	0,7279835	0,3325595	1,793344
Replicates (R)	60	R	0,5111111	0,3681575	0,757543

Analysis of Variance Section

Source Term	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Ratio	Prob Level
C1	9	3935,956	437,3284	162,27*	0,000000
Operators	2	39,26667	19,63333	7,28*	0,004810
Interaction	18	48,51111	2,695062	5,27*	0,000001
Replicates	60	30,66667	0,5111111		
Total (Adjusted)	89	4054,4			
Total	90				

Şekil 5. Dolezal, Burdick ve Birch (1998) Sayfa 166 da Verilen Kareler Ortalamaları için NCSS 2007 çıktısı

Variance Section

Term	Variance	% Total Variance	Standard Deviation	Lower 95% Conf. Limit of Std Dev	Upper 95% Conf. Limit of Std Dev	% Total Std Dev
C1	48,292593	96,3995	6,9493	4,7625	12,7151	98,1833
Operators	0,564609	1,1270	0,7514	0,2701	5,0745	10,6162
Interaction	0,727984	1,4532	0,8532	0,5767	1,3392	12,0547
Reproducibility	1,292593	2,5802	1,1369	0,7824	5,1477	16,0631
Repeatability	0,511111	1,0203	0,7149	0,6068	0,8704	10,1008
R and R	1,803704	3,6005	1,3430	1,0981	5,1978	18,9749
Total Variation	50,096296	100,0000	7,0779	4,9472	12,8940	100,0000

Percent of Process Variation R & R Section

Term	Lower 95% Conf. Limit	5,15 Std Dev	Upper 95% Conf. Limit	% Total Variation	Percent Contribution
C1	24,5267	35,7888	65,4828	98,1833	96,3995
Operator	1,3910	3,8697	26,1337	10,6162	1,1270
Interaction	2,9699	4,3941	6,8967	12,0547	1,4532
Reproducibility	4,0292	5,8552	26,5105	16,0631	2,5802
Repeatability	3,1248	3,6818	4,4824	10,1008	1,0203
R and R	5,6554	6,9166	26,7687	18,9749	3,6005
Total Variation	25,4780	36,4510	66,4043	100,0000	100,0000

Since the % R&R value is between 10% and 20%, the measurement system is acceptable.

R & R Report

Page/Date/Time	2 01.07.2009 00:16:12
Database	C:\DOCUMENTS AND SETTINGS\COSKUN\DESKTOP\ÜMIT.S0
Measurements	C2-C4

Percent of Tolerance R & R Section

Term	Lower 95% Conf. Limit	5,15 Std Dev	Upper 95% Conf. Limit	Percent Tolerance
C1	24,5267	35,7888	65,4828	89,4721
Operator	1,3910	3,8697	26,1337	9,6743
Interaction	2,9699	4,3941	6,8967	10,9852
Reproducibility	4,0292	5,8552	26,5105	14,6379
Repeatability	3,1248	3,6818	4,4824	9,2046
R and R	5,6554	6,9166	26,7687	17,2914
Total Variation	25,4780	36,4510	66,4043	91,1276

Upper Spec Limit	58
Lower Spec Limit	18
Tolerance	40

Since the % R&R value is between 10% and 20%, the measurement system is acceptable.

R & R Indices Section

Index	Lower 95% Conf. Limit	Value	Upper 95% Conf. Limit
Distinct Categories	1,8853	7,3177	13,7440
Signal-to-Noise Ratio	1,3331	5,1744	9,7185
Measurement Error	8,2361	10,0727	38,9836
Precision-to-Tolerance	16,4721	20,1453	77,9671

Since the lower confidence limit of Distinct Categories is less than 3,
the measurement process may be inadequate.
Since the upper confidence limit of Measurement Error is more than 25%,
measurement error should be considered in decision making.

Şekil 5. (Devam) Tablo 8 deki ölçüm değerleri için NCSS 2007 çıktısı

NCSS 2007 varyans bileşenleri için güven aralıkları yerine bunların karekökünün(standart sapma) güven aralıklarını vermektedir. Bu güven aralıklarının alt ve üst sınırlarının karesi alındığında Selçuk Stat çıktısı ile hemen hemen uyum sağlamaktadır.

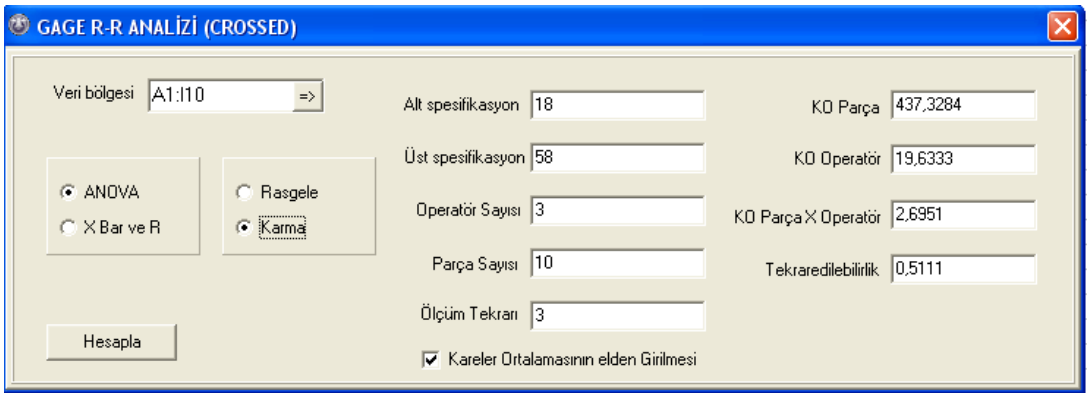
Ölçüm yeterlilik parametrelerine (NCSS 2007, parametre yerine indeks terimini kullanmıştır) bakıldığında Distinct Categories $\sqrt{\delta}$ olarak ele alınmış, *SNR* $\sqrt{2\delta}$ olarak ele alınmıştır. Bu tez de *SNR* tanımının $\sqrt{2\delta}$ olarak yapıldığı ve Distinct Categories sayısı olarak da adlandırıldığı düşünüldüğünde NCSS 2007 ile Tezde kullanlanı terminolojide uyumsuzluk göze çapraktadır.

Ölçüm hatası (Measurement Error) PTR değerinin yarısı olarak tanımlanır. Bu nedenle Selçuk Stat da yer verilmemiştir.

PTR değeri için, Selçuk Stat 5.15 katsayısını, NCSS 2007 "6" katsayını kullanmaktadır. Bu değer de Selçuk ve NCSS 2007 de uyumludur.

Karma Model Durumu

Aşağıda Burdick, Borror ve Montgomery (2003) nin kullandığı verilere dayalı kareler ortalamalarının girilmesiyle elde edilen ölçüm yeterlilik analizi verilmiştir. Burada veri bölgesi kısmına gerçek ölçümler girilmemiştir. Şekil 6 da Burdick, Borror ve Montgomery (2003) sayfa 348 deki veriler (Tezdeki Tablo 11 deki verilere dayalı kareler ortalamaları) girilmiştir ve operatör özel seçimli ve parça rasgele seçimli faktör olarak ele alınmıştır.



Şekil 6. Selçuk-Stat Ölçüm Yeterlilik Analizi Ara Yüzeyi

ÖLÇÜM R-R ANALİZİ (ÇAPRAZ)

İKİ YÖNLÜ ETKİLEŞİMLİ VARYANS ANALİZİ TABLOSU

Değişim Kaynağı	S.D.	K.T.	K.O.	F Hesap	P Değeri
Parça	9	0,000000000	437,328400000	162,267967800	0,000000000
Operatör	7 (*)	0,000000000	19,633300000	7,284813179	0,004809917
Opetatör x Parça	18	0,000000000	2,695100000	5,273136373	0,000000506
Tekraredilebilirlik	60	0,000000000	0,511100000		
Toplam	89	0,000000000			

(*) Düzeltilmiş serbestlik derecesi için lamda=5,47538949286565

VARYANS BİLEŞENLERİ TABLOSU

Kaynak	Tahmin	Alt Sınır	Üst Sınır	Katkı yüzdesi(%)
Toplam Ölçüm R&R	1,803706667	1,287647236	4,069690761	3,600479131
Tekraredilebilirlik	0,511100000	0,368429991	0,756785482	1,020235118
Tekrarüretilebilirlik	1,292606667	0,711079520	3,548304694	2,580244013
Operatör	0,564606667	0,182183017	2,607489622	1,127042749
Operatör X Parça	0,728000000	*	*	1,453201264
Parça X Parça	48,292588890	22,650939230	161,577712000	96,399520870
Toplam Değişim	50,096295560	24,446232740	163,413436600	100,000000000

ÖLÇÜM YETERLİLİK İNDEKSLERİ

İndeksler	Tahmin	Alt sınır	Üst sınır
Delta	26,774081270	9,282493206	91,647805360
SNR1	7,317661003	4,308710528	13,538670940

Ölçüm sisteminin yeterliliği için SNR>5 olması önerilir

Şekil 7. Dolezal, Burdick ve Birch (1998) Sayfa 166 da Verilen Kareler Ortalamaları için Selçuk Stat Çıktısı

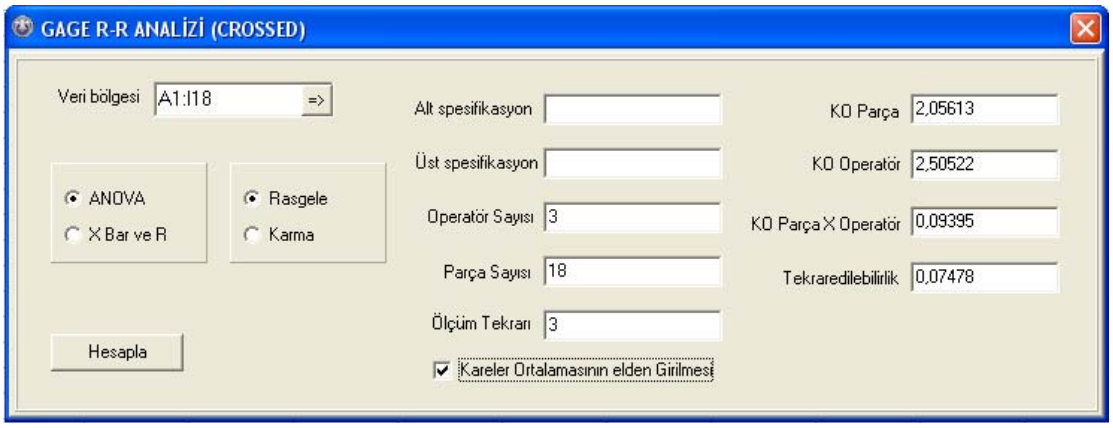
Yukarıda yapılan yorumlar burada da aynı şekilde yapılacağından yorum yapılmamıştır. Şekil 7 da, varyans bileşenleri tablosundaki operatör satırı operatör özel seçimli olduğundan varyans bileşeni olmadığına dikkat edilmelidir. Burada vurgulanması gereken husus, Selçuk Stat'da operatör faktörünün özel seçimli olması durumuyla ilgili analiz yapılabilmesine karşın, Minitab 15 ve NCSS 2007 de operatör faktörünün özel seçimli olması durumuyla ilgili analiz yapılamamasıdır. Burada $SNR2, \rho_M$, ρ_P ve DR için güven aralıkları verilmemiştir. Çünkü Chiang

(2001) bu parametrelerin güven aralılarını karma model durumda elde etmemiştir. Bu çalışılabilecek açık bir problemdir.

Örnek 2.

Rasgele Model Durumu

Aşağıda Dolezal, Burdick ve Birch (1998) in kullandığı verilere dayalı kareler ortalamalarının girilmesiyle elde edilen ölçüm yeterlilik analizi verilmiştir. Burada veri bölgesi kısmına gerçek ölçümler girilmemiştir. Şekil 8 de Dolezal, Burdick ve Birch (1998) sayfa 166 daki kareler ortalamaları girilmiştir ve operatör ve parça rasgele faktör olarak ele alınmıştır. Verilerin orijinal haline ulaşılamadığından analiz kareler ortalamaları girilerek yapılmıştır.



Şekil 8. Selçuk Stat Ölçüm Yeterlilik Analizi Ara Yüzeyi

Selçuk Stat Program çıktısı Şekil 9 de verilmiştir. Varyans Analiz Tablosunda, Kareler Toplamı (K.T.) sütunu ham verilerin yerine "1" yazılmasından dolayı "0" yazılmıştır. Varyans Bileşenleri Tablosunda, tekraredilebilirlik, tekrarüretilebilirlik ve toplam ölçüm varyansı, operatör varyansı, parça varyansı ve toplam süreç varyansı parametrelerinin tahmini ve %95 lik güven aralıkları verilmiştir. Ölçüm yeterlilik parametreleri kısmında ise SNR, PTR ve DR parametrelerinin tahmini ve %95 lik güven aralıkları verilmiştir. Burada ρ_M ve ρ_P nin tahmin ve güven aralıkların verilmesinin sebebi SNR1, SNR2 ve DR tahmin ve güven aralıklarının bu değerlere bağlı olmasıdır.

SNR1 tahmin değeri 1.861 iken %95 lik güven aralığı 0.475 ile 2.940 arasıdır. SNR1 değerinin 5'den az olması, ölçüm sisteminin yetersiz olduğunu gösterdiği göz önüne alındığında SNR1 in tahminin 1.861 olması ilk bakışta ölçüm sisteminin yeterli olmadığını göstermektedir. Diğer taraftan % 95 lik güven aralığının tüm değerleri 5'den küçük olduğundan ölçüm sisteminin yeterli olmadığı %95 güven ile söylenebilir. *PTR* alt ve üst tolerans değerleri girilmediğinden Şekil 9' da verilen çıktıda yer almamıştır.

ÖLÇÜM R-R ANALİZİ (ÇAPRAZ)

İKİ YÖNLÜ ETKİLEŞİMLİ VARYANS ANALİZİ TABLOSU

Değişim Kaynağı	S.D.	K.T.	K.O.	F Hesap	P Değeri
Parça	17	0,000000000	2,056130000	21,885364560	0,000000000
Operatör	2	0,000000000	2,505220000	26,665460350	0,000000108
Opetatör x Parça	34	0,000000000	0,093950000	1,256351966	0,189026165
Tekraredilebilirlik	108	0,000000000	0,074780000		
Toplam	161	0,000000000			

VARYANS BİLEŞENLERİ TABLOSU

Kaynak	Tahmin	Alt Sınır	Üst Sınır	Katkı yüzdesi(%)
Toplam Ölçüm R&R	0,125823148	0,088816354	1,911858343	36,593181750
Tekraredilebilirlik	0,074780000	0,058238877	0,099504829	21,748288540
Tekrarüretilebilirlik	0,051043148	0,011910496	1,836380013	14,844893210
Operatör	0,044653148	0,010754589	1,830379882	12,986487700
Operatör X Parça	0,006390000	*	*	1,858405507
Parça X Parça	0,218020000	0,117529974	0,502518416	63,406818250
Toplam Değişim	0,343843148	0,237250722	2,152349224	100,000000000

ÖLÇÜM YETERLİLİK İNDEKSLERİ

İndeksler	Tahmin	Alt sınır	Üst sınır
Delta	1,732749524	0,112844254	4,322785073
SNR1	1,861585090	0,475066846	2,940335040
SNR2	1,861585090	0,456592526	3,147976218
RHO P	0,634068182	0,094398429	0,832070423
RHO M	0,365931818	0,167929577	0,905601571
DR	4,465499047	1,208476735	10,909754270

Ölçüm sisteminin yeterliliği için SNR>5 olması önerilir

Şekil 9. Dolezal, Burdick ve Birch (1998) Sayfa 166 da Verilen Kareler Ortalamaları için Selçuk Stat Çıktısı

Tablo 11, Tablo Dolezal, Burdick ve Birch (1998) nin sayfa 167'de verdiği parametre ve güven aralıklarını göstermektedir.

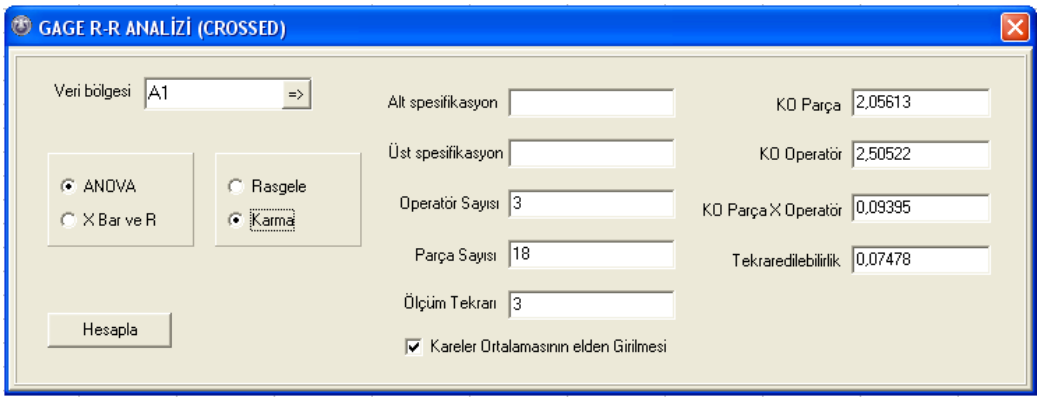
Tablo 11. Dolezal, Burdick ve Birch (1998) in Verdiği Parametre ve İlgili Güven Aralıkları

Ölçüm varyansları	Rasgele model güven aralığı
σ_O^2	(0.011, 1.831)
γ_1	(0.012, 1.837)
γ_2	(0.089, 1.912)
δ	(0.113, 4.323)

Tablo 11 deki sonuçlar ile Şekil 9 de verilen Selçuk Stat çıktısı ile tutarlı olduğu gözükmektedir.

Karma Model Durumu

Aşağıda Dolezal, Burdick ve Birch (1998) in kullandığı verilere dayalı kareler ortalamalarının girilmesiyle elde edilen ölçüm yeterlilik analizi verilmiştir. Burada veri bölgesi kısmına gerçek ölçümler girilmemiştir. Şekil 10 da Dolezal, Burdick ve Birch (1998) sayfa 166 daki kareler ortalamaları (Bkz. Makalede Tablo 11 deki kareler ortalamaları) girilmiştir ve operatör özel seçimli ve parça rasgele seçimli faktör olarak ele alınmıştır.



Şekil 10. Selçuk Stat Ölçüm Yeterlilik Analizi Ara Yüzeyi

ÖLÇÜM R-R ANALİZİ (ÇAPRAZ)

İKİ YÖNLÜ ETKİLEŞİMLİ VARYANS ANALİZİ TABLOSU

Değişim Kaynağı	S.D.	K.T.	K.O.	F Hesap	P Değeri
Parça	17	0,000000000	2,056130000	21,885364560	0,000000000
Operatör	26 (*)	0,000000000	2,505220000	26,665460350	0,000000108
Opetatör x Parça	34	0,000000000	0,093950000	1,256351966	0,189026165
Tekraredilebilirlik	108	0,000000000	0,074780000		
Toplam	161	0,000000000			

(*) Düzeltilmiş serbestlik derecesi için lamda=24,0969038600006

VARYANS BİLEŞENLERİ TABLOSU

Kaynak	Tahmin	Alt Sınır	Üst Sınır	Katkı yüzdesi(%)
Toplam Ölçüm R&R	0,125823148	0,102601280	0,174860134	36,593181750
Tekraredilebilirlik	0,074780000	0,058238877	0,099504829	21,748288540
Tekrarüretilebilirlik	0,051043148	0,027172395	0,097304099	14,844893210
Operatör	0,044653148	0,026921984	0,085707318	12,986487700
Operatör X Parça	0,006390000	*	*	1,858405507
Parça X Parça	0,218020000	0,117529974	0,502518416	63,406818250
Toplam Değişim	0,343843148	0,241219089	0,632247611	100,000000000

ÖLÇÜM YETERLİLİK İNDEKSLERİ

İndeksler	Tahmin	Alt sınır	Üst sınır
Delta	1,732749524	0,860800787	4,058188923
SNR1	1,861585090	1,312098157	2,848925736

Ölçüm sisteminin yeterliliği için SNR>5 olması önerilir

Şekil 11. Dolezal, Burdick ve Birch (1998) sayfa 166 da verilen kareler ortalamaları için Selçuk Stat Çıktısı

Tablo 12. Dolezal, Burdick ve Birch (1998) in verdiği parametre ve ilgili güven aralıkları

Ölçüm varyansları	Karma model güven aralığı
ϕ_O^2	(0.027, 0.086)
γ_1	(0.027, 0.097)
γ_2	(0.103, 0.175)
δ	(0.861, 4.058)

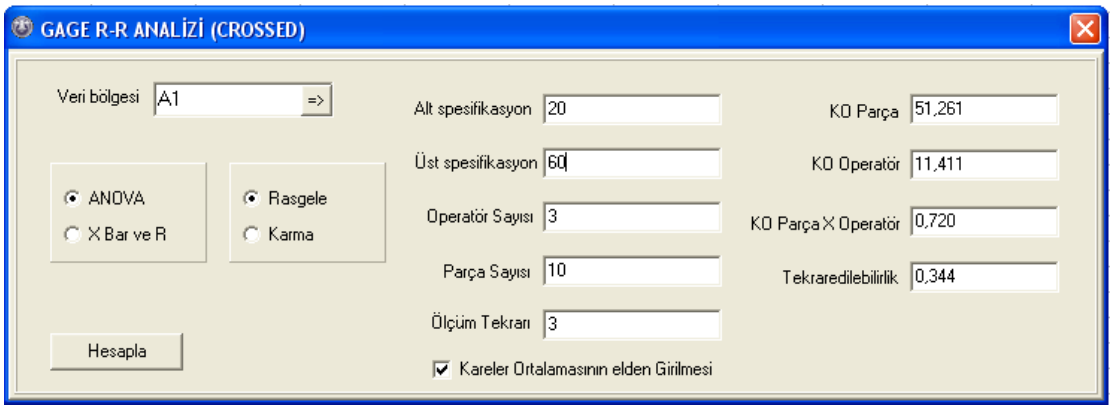
Tablo 12, Dolezal, Burdick ve Birch (1998) nin sayfa 167'de verdiği parametre ve güven aralıklarını göstermektedir. Tablo 12 deki değerler ile Şekil 11 deki Selçuk Stat çıktısı ile tutarlı olduğu gözükmektedir.

Yukarıda yapılan yorumlar burada da aynı şekilde yapılacağından yorum yapılmamıştır. Burada vurgulanması gereken husus, Selçuk Stat'da operatör faktörünün özel seçimli olması durumuyla ilgili analiz yapılabilmesine karşın, Minitab 15 ve NCSS 2007 de operatör faktörünün özel seçimli olması durumuyla ilgili analiz yapılamamasıdır.

Örnek 3.

Rasgele Model Durumu

Aşağıda Burdick ve Larsen (1997) in kullandığı verilere dayalı olarak rasgele modellerin kareler ortalamalarının girilmesiyle elde edilen ölçüm yeterlilik analizi verilmiştir. Veriler Burdick ve Larsen (1997) Sayfa 269: Tablo 8 den alınmıştır. Burada veri bölgesi kısmına gerçek ölçümler girilmemiştir. Şekil 12 de Burdick ve Larsen (1997) Sayfa 269: Tablo 8 deki veriler girilmiştir ve operatör ve parça rasgele faktör olarak ele alınmıştır. Selçuk-Stat'da bu veriler girilerek de analiz yapılabilmektedir.



Şekil 12. Selçuk Stat Ölçüm Yeterlilik Analizi Ara Yüzeyi

Selçuk Stat Program çıktısı Şekil 13 de verilmiştir. Varyans Analiz Tablosunda, Kareler Toplamı (K.T.) sütunu ham verilerin yerine "1" yazılmasından dolayı "0" yazılmıştır. Varyans Bileşenleri Tablosunda, tekraredilebilirlik, tekrarüretilebilirlik ve toplam ölçüm varyansı;operatör varyansı, parça varyansı ve toplam varyans parametrelerinin tahmini ve %95 lik güven aralıkları verilmiştir. Ölçüm yeterlilik parametreleri kısmında ise SNR, PTR ve DR parametrelerinin tahmini ve %95 lik güven aralıkları verilmiştir. Burada ρ_M ve ρ_P nin tahmin ve güven aralıkların verilmesinin sebebi SNR1, SNR2 ve DR tahmin ve güven aralıklarının bu değerlere bağlı olmasıdır.

PTR tahmin değeri %11.6992 iken %95 lik güven aralığı 9.3403 50.6399 arasıdır. PTR değerinin %30 dan küçük olması, ölçüm yeterliliğinin kabul edilebilir olduğunu gösterdiği göz önüne alındığında PTR nin tahmini yaklaşık %11 olması ilk bakışta ölçüm sisteminin yeterliliğini göstermektedir. Diğer taraftan % 95 lik güven aralığının, azami %30 luk PTR değerini bir hayli aştığı için ölçüm sisteminin yeterliliğinden şüphe duyulması gerektiği açıktır.

SNR1 tahmin değeri 3.6881 iken %95 lik güven aralığı 0.8499 ile 7.0176 arasıdır. SNR1 değerinin 5'den büyük olması, ölçüm yeterliliğinin kabul edilebilir olduğunu gösterdiği göz önüne alındığında SNR1 in tahminin 3.6881 olması ilk bakışta ölçüm sisteminin yeterli olmadığını göstermektedir. Diğer taraftan % 95 lik güven aralığının altsınırı asgari olması gereken SNR1=5 değerinden bir hayli az olduğundan ölçüm sisteminin yeterliliğinden şüphe duyulması gerektiği açıktır.

ÖLÇÜM R-R ANALİZİ (ÇAPRAZ)

İKİ YÖNLÜ ETKİLEŞİMLİ VARYANS ANALİZİ TABLOSU

Değişim Kaynağı	S.D.	K.T.	K.O.	F Hesap	P Değeri
Parça	9	0,000000000	51,261000000	71,195833330	0,000000000
Operatör	2	0,000000000	11,411000000	15,848611110	0,000107266
Opetatör x Parça	18	0,000000000	0,720000000	2,093023256	0,017245950
Tekraredilebilirlik	60	0,000000000	0,344000000		
Toplam	89	0,000000000			

VARYANS BİLEŞENLERİ TABLOSU

Kaynak	Tahmin	Alt Sınır	Üst Sınır	Katkı yüzdesi(%)
Toplam Ölçüm R&R	0,825700000	0,526301594	15,470051620	12,818708250
Tekraredilebilirlik	0,344000000	0,247974793	0,509360606	5,340481575
Tekrarüretilebilirlik	0,481700000	0,157233240	15,121024770	7,478226670
Operatör	0,356366667	0,076867253	14,995752300	5,532469817
Operatör X Parça	0,125333333	*	*	1,945756853
Parça X Parça	5,615666667	2,609964911	18,892521030	87,181291750
Toplam Değişim	6,441366667	3,421255385	26,209407300	100,000000000

ÖLÇÜM YETERLİLİK İNDEKSLERİ

İndeksler	Tahmin	Alt sınır	Üst sınır
Delta	6,801098058	0,361180682	24,623448250
SNR1	3,688115524	0,849918445	7,017613306
SNR2	3,688115524	0,828091624	7,534659053
RHO P	0,871812918	0,255325097	0,965969661
RHO M	0,128187082	0,034030339	0,744674903
DR	14,602196120	1,685735737	57,771087040
PTR	11,699259660	9,340380754	50,639932620

Ölçüm sisteminin yeterliliği için SNR>5 olması önerilir
Ölçüm sisteminin yeterliliği için PTR<30 olması önerilir

Şekil 13. Burdick ve Larsen (1997) sayfa 269 da verilen kareler ortalamaları için Selçuk Stat Çıktısı

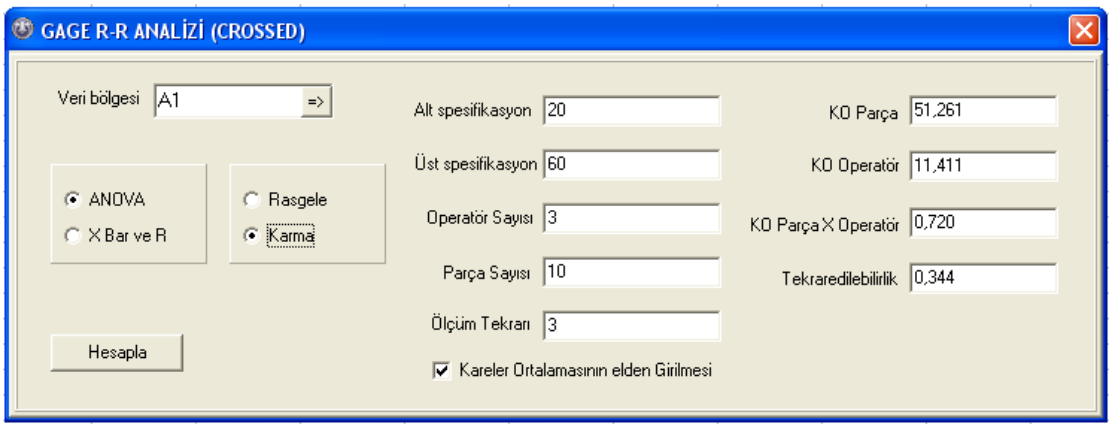
Tablo 13 de verilen örneklem için Burdick ve Larsen (1997) nin sayfa 270:Tablo 9' da verdiği parametre ve güven aralıklarını göstermektedir. Tablo 13 deki değerler ile Şekil 13 de verilen Selçuk Stat çıktısının tutarlı olduğu gözükmektedir.

Tablo 13. Burdick ve Larsen (1997) sayfa 270 deki %95 lik güven aralığı

Parametre	**Alt Sınır**	**Üst Sınır**
$\gamma_1 = \sigma_\varepsilon^2$	0.248	0.51
σ_O^2	0.077	14.997
$\gamma_2 = \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2$	0.156	15.123
$\gamma_M = \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$	0.526	15.472
$\delta = \frac{\sigma_P^2}{\gamma_2}$	0.361	24.631
$\frac{6\sqrt{\gamma_M}}{(USL - LSL)} \times \%100$	%10.9	%59
$\sqrt{2\delta}$	0.85	7.02

Karma Model Durumu

Aşağıda Burdick ve Larsen (1997) in kullandığı verilere dayalı kareler ortalamalarının girilmesiyle elde edilen ölçüm yeterlilik analizi verilmiştir. Burada veri bölgesi kısmına gerçek ölçümler girilmemiştir. Şekil 14 de Burdick ve Larsen (1997) sayfa 269:Tablo 8 deki veriler ve operatör özel seçimli ve parça rasgele seçimli faktör olarak ele alınmıştır.



Şekil 14. Selçuk Stat Ölçüm Yeterlilik Analizi Ara Yüzeyi

Şekil 15 de analiz sonuçları verilmiştir. Yukarıda yapılan yorumlar burada da aynı şekilde yapılacağından yorum yapılmamıştır. Burada vurgulanması gereken husus, Selçuk Stat'da operatör faktörünün özel seçimli olması durumuyla ilgili analiz yapılabilmesine karşın, Minitab 15 ve NCSS 2007 de operatör faktörünün özel seçimli olması durumuyla ilgili analiz yapılamamasıdır.

ÖLÇÜM R-R ANALİZİ (ÇAPRAZ)

İKİ YÖNLÜ ETKİLEŞİMLİ VARYANS ANALİZİ TABLOSU

Değişim Kaynağı	S.D.	K.T.	K.O.	F Hesap	P Değeri
Parça	9	0,000000000	51,261000000	71,195833330	0,000000000
Operatör	15 (*)	0,000000000	11,411000000	15,848611110	0,000107266
Opetatör x Parça	18	0,000000000	0,720000000	2,093023256	0,017245950
Tekraredilebilirlik	60	0,000000000	0,344000000		
Toplam	89	0,000000000			

(*) Düzeltilmiş serbestlik derecesi için lamda=13,0876543209877

VARYANS BİLEŞENLERİ TABLOSU

Kaynak	Tahmin	Alt Sınır	Üst Sınır	Katkı yüzdesi(%)
Toplam Ölçüm R&R	0,825700000	0,617495611	1,435484016	12,818708250
Tekraredilebilirlik	0,344000000	0,247974793	0,509360606	5,340481575
Tekrarüretilebilirlik	0,481700000	0,256344809	1,079943963	7,478226670
Operatör	0,356366667	0,180211339	0,898253569	5,532469817
Operatör X Parça	0,125333333	*	*	1,945756853
Parça X Parça	5,615666667	2,609964911	18,892521030	87,181291750
Toplam Değişim	6,441366667	3,428928815	19,733854500	100,000000000

ÖLÇÜM YETERLİLİK İNDEKSLERİ

İndeksler	Tahmin	Alt sınır	Üst sınır
Delta	6,801098058	2,690121707	23,117349790
SNR1	3,688115524	2,319535172	6,799610252

Ölçüm sisteminin yeterliliği için SNR>5 olması önerilir

Şekil 15. Burdick ve Larsen (1997) sayfa 269 da verilen kareler ortalamaları için Selçuk Stat Çıktısı

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Minitab 15 ve NCSS 2007 yazılımlarında analizi yapılan Ölçüm R&R analizi, literatürde son çıkan makalelere göre geliştirilerek Selçuk Stat yazılımına monte edilmiştir. Selçuk Stat Analiz sonuçları Minitab 15, NCSS 2007 ve ilgili makalelerdeki sonuçlar karşılaştırılmış ve Selçuk Stat analiz sonuçlarının doğruluğu kontrol edilmiştir. Minitab 15 sadece parametrelerin tahmin değerlerini verirken, Selçuk Stat, NCSS 2007 gibi ölçüm yeterlilik parametrelerinin güven aralıklarını da vermektedir. Ayrıca, Minitab 15 yazılımı, operatör faktörünün rasgele olması durumunu ele alırken, Selçuk Stat Operatör faktörünün özel seçimli olması durumunu da ele almaktadır. Bu vesile ile Selçuk Stat yazılımı, ölçüm sistemleri analizinde Minitab 15 ve NCSS 2007 ile yarışacak düzeye getirilmiştir.

Bundan sonraki çalışmalara yön verecek bazı açık problemler aşağıda verilmiştir:

Eşitlik (5.3) de verilen $\hat{\lambda}$ tahmin edicisine alternatif tahmin ediciler önerilip, Dolezal, Burdick, Birch (1998) in elde ettikleri güven aralıkların kapsama olasılıkları tekrar incelenerek λ parametresi için daha iyi tahmin ediciler araştırılabilir.

ρ_P ρ_M ve SNR_2 katsayıları ve güven aralıklarının kodları Leiva ve Graybill (1986) nın metoduna dayalı Chiang (2002) nin sonuçlarına göre elde edilmiştir. Chiang (2002) bu parametrelerin güven aralıklarını sadece rasgele etkili model varsayımı altında elde etmiştir. Bu güven aralıkları karma etkili modeller içinde elde edilebilir.

Dolezal, Burdick, Birch (1998), kısıtsız karma model varsayımı altında güven aralıklarını elde etmişlerdir. Bu güven aralıkları kısıtlı karma model içinde incelenebilir.

Son olarak yuvalanmış (nested) ANOVA modeli durumunda Tablo 7 de verilen parametreler için güven aralıkları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Automotive Industry Action Group, (1995), Measurement Systems Analysis, 2nd cd. Detrait, MI.

Automotive Industry Action Group, (2002), Measurement Systems Analysis, 3rd cd. Detrait, MI.

Barrentine, L.B., (1991), Concepts for R&R Studies. ASQC Quality Prcss, Milwaukee, WI.

Burdick, R.K., Larsen, G.A., (1997), Confidence Intervals on Measures of Variability in R&R Studies, Journal of Quality Technology, 29, 261-273.

Burdick, R.K., Borror, C.M., Montgomery, D.C., (2003), A Review of Methods for Measurement Systems Capability Analysis, Journal of Quality Technology, 35, 342-354.

Burdick, R.K., Graybill, F.A., (1992), Confidence Intervals on Variance Components, Marcel Dekker, New York, NY.

Chiang, A.K.L., (2001), A simple General Method for Constructing Confidence Intervals for Functions of Variance Components, Technometrics 43, 356-367.

Chiang, A.K.L., (2002), Improved Confidence Intervals for a Ratio in an R&R Study, Communications in Statistics Simulation ve Computation, 31, 329-344.

Conors, M., Merrill, K., O'Donnell, B., (1995), A Comprehensive Approach to Measurement System Evaluation, ASA Proceedings of the Section on Physical and Engineering Sciences, 136-138.

Croarkin, C., Editor (2002), Gauge R&R Studies, Section 2.4 of the Beta Version of the Nist /Sematech Engineering Statistics Internet Handbook, Located at http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/

Dolezal, K.K., Burdick, R.K., Birch, N.J. (1998), Analysis of a Two-Factor R&R Study With Fixed Operators, Journal of Quality Technology, 30, 163-170.

Graybill, F.A., Wang, C. M., (1980), Confidence Intervals on Nonnegative Linear Combinations of Variances, Journal of theAmerican Statistical Association, 75, 869-873.

Graybill, F.A., (1961), An Introduction to Linear Statistical Models. Vol, I. McGraw Hill. New York. NY.

Hamada, M., Weerahandi, S., (2000), Measurement System Assessment Via Generalized Inference, Journal of Quality Technology 32, 241-253.

Horrell, K., (1991), Introduction to Measurement Capability Analysis, SEMATECH Report 91090709A-ENG.

Larsen, G., (2002), Measurement System Analysis, The Usual Metrics can be Noninformative, Quality Engineering 15, 293 298.

Leiva, R.A., Graybill., F.A., (1986), Confidence Intervals for Variance Components in the Balanced Two-Way Model with Interaction, Communications in Statistics Simulation and Compulation 15, 301-322.

Mader, D.P., Prins, J., Lampe, R.E., (1999), The Economic Inpact of Measurement Error, Quality Engineering 11, 563-574.

Minitab 13 (2001), Minitab Inc., State College, PA.

Montgomery, D.C., ve Renger, G.C., (1993a), Gauge Capability and Designed Experiments Part f: Basic Methods, Quality Engineering 6, 115-135.

Montgomery, D.C., Runger, G.C., (1993b), Gauge Capability Analysis and Designed Experiment, Part II. Experimental Desing Models and Variance Component Estimation, Quality Engincering 6, 289-305.

Montgomery, D.C., (2001), Design and Analysis of Experiment, John Wiley & Sons, Inc., Newyork.

Kavi U., Elevli S., (2008), Art-Craft Sofra Camı Üretim İşletmesinde Ölçüm Sistem Analizi Uygulaması, VII. Ulusal Ölçümbilim Kongresi

Öztürk, F., (2009), İst306 İstatistik Deney Tasarımı Ders notları: Web adresi: http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/

Sahai, H., Agel, M.I., (2000), The Analysis of variance: Fixed, random and Mixed Models, Birkäuser, Boston

Van Den Heuvel , E.R., Trip., A., (2002), Evaluation of Measurement Systems with a Small Number of Observers, Quality Engincering 15, 323-331.

Vanderman, S.B., Van Valkenburg, E.S., (1999), Two Way Random-Effects Analysis via Gauge R&R Studies, Technometrics 41, 202-211.

Weerahandi, S., (1993), Generalized Confidence Intervals, Journal of the American Statistical Association 88, 889-905.

Wheeler, D.J., (1992), Problems with Gauge R&R Studies, ASQC Quality Congress Transactions, 179-185.

Wheeler, D.J., Lyday, R.W., (1989), Evaluating the Measurement Process. SPC Press, Knoxville, TN.