



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k-JACOBSTHAL VE k-JACOBSTHAL LUCAS SAYI DİZİLERİNİN MATRİS METOTLARIYLA TOPLAMI

TUĞBA AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2019

KONYA

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

k-JACOBSTHAL ve k-JACOBSTHAL LUCAS SAYILARININ MATRİS METOTLARIYLA TOPLAMI

Tuğba AYDIN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hasan KÖSE

2019 , 52 sayfa

Jüri
Doç. Dr. Tuncer ACAR
Dr. Öğr. Üyesi Hasan KÖSE
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet CİHANGİR

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tam sayı dizilerinin tarihçesinden ve kullanım alanlarından bahsedilmiştir. Ayrıca çalışmamız boyunca kullandığımız kaynakların literatür özetlerine yer verilmiştir.

İkinci bölümde ise Fibonacci, Lucas sayı dizilerinin tanımları verilmiş ve bu sayı dizileri ile ilgili bazı özellikler verilmiştir. Ayrıca 1996 yılında ilk defa Horadam tarafından tanımlanan Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin tanımları verilmiştir. Bu sayı dizileriyle ilgili temel özellikler, aralarındaki özdeşlikler verilmiş ve kısaca ispat edilmiştir.

Üçüncü bölümde, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin genelleştirilmiş hali olan k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizilerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, sayı dizilerinin matris temsillerinden bahsedilmiştir. Bu matris temsilleri kullanılarak sayı dizileri arasındaki özdeşlikler verilmiştir.

Beşinci bölümde, çalışmada kullanılacak olan ve elemanları k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizilerinden oluşan T matrisi tanımlanmıştır. Bu sayı dizileri arasındaki özdeşlikler T matrisini kullanarak ispatlanmıştır. Ayrıca k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileri arasındaki toplam formülleri verilip, tanımlanan T matrisi kullanılarak ispatlar yapılmıştır.

Altıncı bölümde sonuç ve öneriler ile yararlanılan kaynaklara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Jacobsthal, Jacobsthal Lucas, k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileri , Matris Metodu

ABSTRACT

MS. THESIS

k-JACOBSTHAL AND k-JACOBSTHAL LUCAS NUMBERS SUMS BY MATRİX METHODS

TUĞBA AYDIN

SELCUK UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCİENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATİCS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Hasan KÖSE

2019, 52 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Tuncer ACAR
Asst. Prof. Dr. Hasan KÖSE
Asst. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR

This study consist of six sections.

In the first section, we have mentioned the history of integer sequences and usage areas. In addition,we have given literature review of the resourches that we have used during our study.

In the second section, we have given definitions of Fibonacci , Lucas numbers sequences. We have identified some of the properties of this sequence of numbers. We have given jacobsthal and jacobsthal lucas numbers definitions that were defined by Horadam in 1996.

In the third section, we have given k-Jacobsthal and k-Jacobsthal lucas numbers.

In the fourth section, we have mentioned matrix representations of number sequences.Identities between number sequences have been given by using these matrix.

In the fifth section, we have used T matrix.The elements of this matrix occurs k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas numbers.Some properties of these sequences have been proven by using T matrix. Also,We have given two theorems that are known before about k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas numbers.

In the sixth section, conclusions and suggestions and the resourches used have been given.

Keywords: Jacobsthal, Jacobsthal Lucas, k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas numbers ,Matrix Methods.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Dr. Öğr. Üyesi Hasan Köse danışmanlığında yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma boyunca emeği geçen danışmanım Dr. Öğretim üyesi Hasan Köse'ye, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Ereğli Eğitim Fakültesi öğretim üyesi Doç. Dr. Hafize Gümüş'e ve maddi manevi her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür ederim.

Tuğba AYDIN
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Tam Sayı Dizilerinin Tarihçesi……..…..1

1.2. Kaynak Araştırması 3

2. SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ **7**

2.1. Fibonacci Sayıları ve Özellikleri 7
2.2. Üreteç Fonksiyonu……..…...7
2.3. Lucas Sayıları ve Özellikleri…….....8
2.4. Jacobsthal Sayı Dizisi…….9
2.5. Jacobsthal Lucas Sayı Dizisi……11
2.6. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayı Dizisi Arasındaki Bağıntılar……12

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ SAYI DİZİLERİ……...13

3.1. k-Fibonacci Sayı Dizisi……....13
3.2. k-Lucas Sayı Dizisi…….....14
3.3. k-Jacobsthal Sayı Dizisi……....15
3.3.1. k-Jacobsthal Sayı Dizisinin Üreteç Fonksiyonu……18
3.4. k-Jacobsthal Lucas Sayı Dizileri…….....19
3.4. 1.k-Jacobsthal Lucas Sayı Dizisinin Üreteç Fonksiyonu…….21
3.4.2. k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Dizisi Arasındaki İlişki…….22

4. SAYI DİZİLERİNİN MATRİS GÖSTERİMİ ……..……...26

4.1. Sayı Dizilerinin Matris Gösterimi……....26

5. k-JACOBSTHAL ve k-JACOBSTHAL LUCAS T MATRİSİ……..…..30

6. SONUÇ ve ÖNERİLER……..…….41

KAYNAKLAR……...42

ÖZGEÇMİŞ **44**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

N :Doğal sayılar kümesi

Z :Tam sayılar kümesi

F_n :n. Fibonacci sayısı

L_n :n.Lucas sayısı

J_n :n. Jacobsthal sayısı

j_n :n. Jacobsthal Lucas sayısı

$F_{k,n}$:n. k-Fibonacci sayısı

$L_{k,n}$:n. k-Lucas sayısı

$J_{k,n}$:n. k-Jacobsthal sayı

$j_{k,n}$:n. k-jacobsthal lucas sayısı

$\hat{C}_{k,n}$:k-Jacobsthal Lucas matris dizisi

$\hat{J}_{k,n}$:k-Jacobsthal matris dizisi

$J_k(x)$:k-Jacobsthal sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$\mathcal{J}_k(x)$:k-Jacobsthal lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

K :T matrisinden üretilen bir kare matris

S,W :k-Jacobsthal matris

T :k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal lucas matris

Q :Fibonacci matrisi

Kısaltmalar

D :$det(I - T^m)$

d : $det(I + T^m)$

1.GİRİŞ

Bu bölümde öncelikle tamsayı dizilerinin tarihçesinden bahsedeceğiz. Önce bu sayı dizilerinin parlayan iki yıldızı olan Fibonacci ve Lucas dizilerinden, gündelik hayatta nerelerde karşımıza çıkacağından ve altın orandan bahsedeceğiz. Daha sonra ise çalışmamızda yararlandığımız kaynaklardan kısa özetler vereceğiz.

1.1.Tam Sayı Dizilerinin Tarihçesi

Leonardo Fibonacci 12. yüzyılda İtalya'nın Pisa şehrinde doğmuştur ve ortaçağın ünlü matematikçisidir. Çocukluğu başarılı bir tüccar olan babasıyla birlikte Cezayir'de geçmiştir. Fibonacci ilk eğitimini Arap sayı sistemiyle Müslüman matematikçilerden almıştır. Yetişkinliğinde Mısır, Suriye, Yunanistan, Fransa ve İstanbul'a seyahat etmiştir. Burada aritmetiğin farklı sistemleri üzerine çalışmış ve yerli matematikçilerinden farklı bakış açıları kazanmıştır.1200'lü yıllarda Pisa'ya geri dönmüş ve Arap sayı sisteminin Roma sayı sisteminden daha pratik ve üstün olduğunu ortaya koymuştur(Koshy, 2001).

1202 yılında Fibonacci "Liber Abaci" adlı kitabını yazmıştır. Bu kitabın yeni versiyonunu 1228'de tamamlayan Fibonacci'nin "Practica Geometria (1220)", "Flos(1225)" ve "Liber Quadratorum (1225)" kitapları ise matematik alanındaki diğer eserleridir. Bu kitapların içinde en ünlü olanı ise Fibonacci sayılarıyla Altın Oran'ın anlatıldığı "Liber Abaci"dir. Kitapta karşılaşılan bir problemin çözümünde Fibonacci dizisi anlatılmaktadır. Bu problem şöyledir:

"Dört yanı duvarlarla çevrili bir yere bir çift tavşan konulmuştur. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan yavruladığı, her yeni çiftin de ergenleşmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği varsayılırsa, 100 ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?"

Burada ilk ayın sonunda sadece bir çift vardır. İkinci ayın sonunda dişi bir çift yavru doğurur ve elimizde iki çift tavşan olur. Üçüncü ayın sonunda ilk dişimiz bir çift yavru doğurur ve üç çift yavrumuz olur. Dördüncü ayın sonunda, ilk dişimiz yeni bir çift yavru daha doğurur, iki ay önce doğan dişide bir çift yavru doğurur ve artık 5 çift tavşanımız vardır. Yani her ayın sonundaki tavşan çifti sayısı; aydan hemen önceki iki ayın tavşan çiftlerinin toplamına eşittir. Bu sorudan ortaya çıkan dizi;

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,… şeklindedir.

Yukarıda gösterilen Fibonacci sayıları, kendisinden önceki son iki sayının toplamı ile devam etmektedir. Bu sayı dizisinde her bir sayıyı kendinden önceki sayıya böldüğümüzde, birbirine yakın sayılar çıkar. 13. terimden sonra bu oran sabitlenir ve 1,618 olur. Bu değere "Altın Oran" denir.(Aydın ve Ayran, 2017)

Fibonacci sayı dizisi ilginç sayı dizilerinden biridir. Bu dizi; amatör ve profesyonel matematikçilerin ufuklarını genişletmeye devam etmektedir. Matematik literatüründe çok önemli olan bu dizi için Fibonacci Derneği bile kurulmuştur. Bu dernek 1963 yılında Verner E. Hoggat tarafından kurulmuştur. Dernek; tamsayı dizileriyle ilgili ilginç makaleleri "The Fibonacci Quarterly" dergisinde yayınlamıştır. Bu diziye yakından bakıldığında büyüleyici bir özelliği olduğu ortaya çıkar.

Her Fibonacci sayısı ilk iki terimi hariç, kendinden önce gelen son iki teriminin toplamıdır.

n. Fibonacci dizisinin tanımı ; $F_0 = 0 \; ve \;\; F_2 = 1$ olmak üzere;

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$

şeklinde ifade edilir (Koshy,2001).

Bu diziye bakıldığında basit bir kuralla oluşturulmuş gibi görünüyor olsa da bu sayılara doğanın her yerinde rastlamak mümkündür. Bir bitkiyi dikkatle incelerseniz fark edersiniz ki yapraklar, hiçbir yaprak alttaki yaprağı kapamayacak şekilde dizilmiştir. Bu da her bir yaprak güneş ışığını eşit bir şekilde paylaşıyor ve yağmur damlaları bitkinin her bir yaprağına değebiliyor demektir. Birçok çiçeğin taç yaprak sayısı Fibonacci dizisinin terimlerinden bazılarını verir. Fibonacci sayısının hayvanlarda da örnekleri vardır. Mesela, yavru bir salyangoz büyüdükçe kabuğunda yeni odacıklar oluşur. Her bir oda, kendinden önceki iki odanın toplamı kadardır. Fibonacci sayılarına ayrıca Pascal ve Binom üçgenlerinde, Mimar Sinan'ın eserlerinde, Da Vinci'nin resimlerinde de rastlanmaktadır (Baykut ve Kıvanç, 2004). Ayrıca el parmaklarımızdaki boğumların birbirine oranında, kolumuzu ikiye ayırdığımızda dirsek ile omuz ve el arasındaki mesafeye oranı da altın oranı vermektedir. Yüzümüzde de altın orana rastlamak mümkündür (Kutlu, 2011).

Fibonacci sayı dizisinin başlangıç noktalarını farklı seçtiğimizde yeni bir dizi olan Lucas dizisini elde ederiz. L_n, dizinin n. terimidir. Başlangıç noktalarını

$L_0 = 2 \; ve \; L_1 = 1$ seçersek;

$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 2$

şeklinde Lucas dizisini elde ederiz.

Bu dizinin terimleri 2,1,3,4,7,11,… şeklindedir.

Günümüzde de devam eden çalışmalar bu iki dizi arasında ilginç bağıntıların olduğunu kanıtlamıştır. Bu özellikleri matematik literatüründe birçok çalışmada görebiliriz. Sadece bilimsel olarak değil doğada da birçok örneği bulunmaktadır.
Örneğin, 123 sağ sarmalı ve 76 sol sarmalı olan Lucas ayçiçekleri bunlardan bazılarıdır (Koshy, 2001).

1.2. Kaynak Araştırması

Bu bölümde sayı dizileriyle ilgili daha önce yapılmış olan ve çalışmamızda yararlandığımız kaynakların özetlerine yer verilmiştir.

Silvester (1979), " Fibonacci Properties by Matrix Methods " adlı makalesinde Fibonacci $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini tanımlamıştır. Bu matris yardımıyla Fibonacci dizisinin bazı özelliklerine yer vermiştir.

Horadam (1996), "Jacobsthal Repesentation Numbers" adlı çalışmasında Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizileri tanımlanmıştır. Bu sayı dizilerinin rekürans bağıntıları verilerek karakteristik denklemleri oluşturulmuştur. Ayrıca bu sayı dizileri arasındaki ilişkileri veren bağıntılar incelenmiştir.

Cerrin (2007), " Sums of Squares and products of Jacobsthal Numbers" adlı çalışmasında; tek ve çift terimli Jacobsthal Sayı dizilerinin kareleri toplamını elde etmiştir. Bu toplamlar benzer sayı dizileriyle ilişkilendirilmiştir.

Falcon ve Plaza (2007), "On the Fibonacci k-Numbers" adlı çalışmasında; Fibonacci sayı dizilerinin genelleştirilmesi olan k-Fibonacci sayı dizilerini tanımlamıştır. $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ şeklinde gösterilen sayı dizisini 4TLE (four triangle longest edge) yöntemini kullanarak açıklamıştır. Bu sayı dizisinin birçok özelliği elemanter matris cebiri kullanılarak açıklanmıştır. Ayrıca k-Fibonacci sayı dizisinin tanımı verilmiş ve k'nın değerlerine göre hangi dizilere yakınsadığı ifade edilmiştir. Ek olarak R ve L şeklinde iki matris tanımlanmış ve bu sayı dizisinin bazı özellikleri bu matrisler yardımıyla gösterilmiştir.

Yosma (2008), "Fibonacci ve Lucas Sayıları" adlı yüksek lisans tezinde Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin genel özellikleri incelenmiştir. Fibonacci sayılarının temelini oluşturan "Tavşan Problemlerine" yer vermiştir. Fibonacci sayısının nasıl ortaya çıktığı anlatılıp Fibonacci sayı dizilerinin bölünebilme özelliklerine yer verilmiştir. Bu sayı dizisinin Binet formülü verilmiştir. Daha sonra Lucas sayı dizisinin tanımı verilerek Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bağıntılar ifade edilmiştir. Ayrıca bu sayı dizilerinin matris temsillerine yer verilmiştir.

Bolat (2008), " k-Fibonacci ve k-Lucas Sayılarının Özellikleri ve Uygulamaları" adlı yüksek lisans tezinde; k-Fibonacci ve k-Lucas sayı dizileri üzerine durulmuştur. Binet formülü ve matris cebirinden yararlanılarak bu sayı dizileri için bazı önemli özellikler bulunmuştur. Ardından k-Fibonacci ve k-Lucas sayıları için üreten fonksiyonları içeren özdeşlikler elde edilmiştir. Son olarak da bu sayıların sürekli kesir cinsinden yazılabileceği gösterilmiştir.

Demirtürk (2010), "Fibonacci and Lucas Sums by Matrix Methods" adlı çalışmasında; S ve K şeklinde iki matris tanımlanarak bu matrisler yardımıyla Fibonacci ve Lucas sayı dizileri arasındaki ilişkileri veren özellikler ve teoremler ifade edilmiştir

Falcon (2011), " On the k-Lucas Numbers" adlı çalışmasında 2007 yılında k-Fibonacci sayılarıyla ilgili yaptığı çalışmadan yola çıkarak k-Lucas sayı dizisini tanımlamıştır. Bu sayı dizisinin rekürans bağıntısını verilmiş ve bu sayı dizileri arasındaki ilişkileri veren teoremler ispatlanmıştır. Son olarak da bu sayı dizisinin toplam formülü ve üreteç fonksiyonlarına yer verilmiştir.

Jhala ve Ark. (2013), " On Some Identities for k-Jacobsthal Numbers" adlı çalışmasında k-Jacobsthal sayı dizilerinin rekürans bağıntısını vermiştir. Karakteristik denklemi verip binet formülünü elde etmiştir. Ayrıca bu sayı dizisinin özelliklerini binet formülü yardımıyla ispatlamıştır. Son olarak da bu sayı dizisinin üreteç fonksiyonunu vermiştir.

Jhala ve Rathore (2014), " Some Properties of k-Jacobsthal Lucas Sequences" adlı çalışmasında; k-Jacobsthal Lucas dizisinin rekürans bağıntısını tanımlayıp karakteristik denklemini ve binet formülünü vermiştir. Binet formülü yardımıyla k-

Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas dizileri arasındaki eşitlikleri ispatlamıştır. Ayrıca k-Jacobsthal Lucas dizisi için üreteç fonksiyonunu elde etmiştir.

Falcon (2014), " On the k-Jacobsthal Numbers" adlı çalışmasında k-Jacobsthal dizisini

$J_{k,n+1} = J_{k,n} + kJ_{k,n-1}$; $n \geq 1$

şeklinde Jhala ve arkadaşlarınınkinden farklı bir rekürans bağıntısıyla tanımladı.k-Fibonacci dizisine ait birçok özelliği bu diziye uyguladı. Son olarak da bu diziyi pascal üçgeniyle ilişkilendirdi.

Compos ve Ark. (2014), "On Some Identities of k-Jacobsthal Lucas Numbers" adlı çalışmasında Horadam tarafından tanmlanan Jacobsthal Lucas dizilerini k-Jacobsthal Lucas dizisine genelleştirmiştir. Bu sayı dizisi için Binet formülü, Catalan ve D'ocagne özdeşliği ve üreteç fonksiyonları bulunmuştur.

Srisawat ve ark. (2015), "On the k-Jacobsthal Numbers by Matrix Methods" adlı çalışmasında k-Jacobsthal S ve W martislerini tanımlamışlardır. Bu matrisleri kullanarak k-Jacobsthal sayıların bazı özellikleri ve Binet Formülü elde edilmiştir.

Uygun ve Eldoğan (2016(a)), "Properties of k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas Sequences" adlı çalışmasında k-Jacobsthal sayı dizisini $\{j_{k,n}\}_{n\in N}$ olarak, k-Jacobsthal Lucas dizisini $\{c_{k,n}\}_{n\in N}$ olarak tanımlamıştır. Ardından bu sayı dizileri arasındaki bazı özellikleri ve bazı önemli ilişkileri vermiştir. Üreteç fonksiylonarını elde etmiştir.

Uygun ve Eldoğan (2016(b)), " k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas Matrix Sequences" adlı çalışmasında matris dizilerini tanımlamıştır.

k-Jacobsthal matris dizisini $\{\hat{J}_{k,n}\}_{n\in N}$ ile göstermiştir.

$n \in N, k > 0$ olmak üzere;

$\hat{J}_{k,n+2} = k\hat{J}_{k,n+1} + 2\hat{J}_{k,n}$; $\hat{J}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{J}_{k,1} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

şeklinde tanımlamıştır.

k-Jacobsthal Lucas matris dizisini ise $\{\hat{C}_{k,n}\}_{n\in N}$ile tanımlamıştır.

$n \in N, k > 0$ olmak üzere;

$$\hat{C}_{k,n+2} = k\hat{C}_{k,n+1} + 2\hat{C}_{k,n}; \hat{C}_{k,0} = \begin{pmatrix} k & 4 \\ 2 & -k \end{pmatrix}, \hat{C}_{k,1} = \begin{pmatrix} k^2+4 & 2k \\ k & 4 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlamıştır.

Bu iki matris dizisi arasındaki ilişkileri veren bazı özelliklere yer vermiştir.

2. SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde öncelikle Fibonacci ve Lucas tam sayı dizilerinin tanımını ve bunlarla ilgili özellikleri vereceğiz. Daha sonra ise farklı bir sayı dizisi olan Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin tanımını verip özelliklerini vereceğiz.

2.1. Fibonacci Sayıları ve Özellikleri

Tanım 2.1 (Fibonacci Dizisi)

$F_0 = 0$ *ve* $F_1 = 1$ olmak üzere;

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2 \tag{2.1}$$

ile tanımlanan $\{F_n\}_{n\in N}$ sayı dizisine Fibonacci sayı dizisi ve bu dizinin elemanlarına da Fibonacci sayıları denir. Fibonacci dizisinde her **n** tamsayısına karşılık gelen değere n. Fibonacci sayısı denir.n=0,1,2,3,4,5,6,7,… tamsayılarına karşılık gelen değerler $F_n = \{0,1,1,2,3,5,8,13, \ldots\}$ şeklindedir.

(2.1) ile verilen ifadenin karakteristik denklemi;

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ dır.Denklemin kökleri α ve β olmak üzere

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

Binet formülü;

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir. (2.2)

Binet formülü yardımıyla $lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$=1,618…olarak adlandırılan "altın orana" yakınsadığı görülür.

Negatif indisli Fibonacci sayı dizilerinin

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

şeklinde de tanımlanır. (Vajda, 1989; Koshy, 2001)

2.2. Üreteç Fonksiyonu

Tanım 2.2 (Üreteç Fonksiyonu)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{2.3}$$

şeklindeki bir kuvvet serisidir ve $f(x)$ 'e (a_n) dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

Şimdi Fibonacci sayı dizisi için üreteç fonksiyonunu verelim.

$F(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots + F_nx^n + \cdots$

olsun. O halde

$F(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots + F_nx^n + \cdots$

$-xF(x) = -F_1x^2 - F_2x^3 - F_3x^4 - \cdots - F_nx^{n+1} - \cdots$

$-x^2F(x) = -F_1x^3 - F_2x^4 - F_3x^5 - \cdots - F_nx^{n+2} - \cdots$

olur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$(1 - x - x^2)F(x) = F_1x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + (F_4 - F_3 - F_2)x^4 +$

$(F_5 - F_4 - F_3)x^5 + \cdots + (F_{n-1} - F_{n-2} - F_{n-3})x^{n-1} + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \cdots$

dir. Fibonacci sayı dizisinin tanımı kullanılarak

$(1 - x - x^2)F(x) = F_1x = x$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

üreteç fonksiyonu elde edilir. (Horadam, 1965)

Simpson Formülü,(Koshy, 2001)

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Toplam Formülü, (Koshy, 2001)

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

şeklindedir.

2.3.Lucas Sayıları ve Özellikleri

Tanım 2.3 (Lucas Dizisi)

$L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere,

$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\ n \geq 0$ (2.4)

şeklinde tanımlanan $\{L_n\}_{n\in N}$ sayı dizisine Lucas dizisi denir ve bu dizinin elemanlarına da Lucas sayıları denir. Lineer rekürans bağıntısı ile verilen tamsayılar dizisine Lucas dizisi denir. Lucas dizisinde her n tam sayısına karşılık gelen her bir değere **n.Lucas sayısı** denir.

n=0,1,2,3,4,5,6,…değerlerine karşılık gelen Lucas sayıları {2,1,3,4,7,11,18,…} dir.(2.4) ile verilen ifadenin karakteristik denklemi

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ dır.

Denklemin kökleri α ve β olmak üzere

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

Lucas sayı dizilerinin Binet Formülü,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{2.5}$$

şeklindedir.

$$lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha$$

değerine ulaşılır.

Negatif indisli Lucas sayı dizisi

$$L_{-n} = (-1)^{n+1} L_n$$

şeklinde tanımlanır.

Lucas sayılarının üreten fonksiyonları,

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

Simpson formülü,

$$L_{n+1}L_{n-1} - {L_n}^2 = 5(-1)^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$$

şeklinde verilir. (Koshy,2001)

2.4.Jacobsthal Sayı Dizisi

Tanım 2.4 (Jacobsthal Sayı dizisi)

$J_0 = 0$ ve $J_1 = 1$ olmak üzere

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, \ \ n \geq 0 \tag{2.6}$$

rekürans bağıntısı ile verilir.

Bu sayı dizisi $\{J_n\}_{n\in N}$ ile gösterilir. Jacobsthal sayı dizisindeki her n tamsayısına karşılık gelen elemana n. Jacobsthal sayısı denir. Şimdi bazı **n** değerleri için Jacobsthal değerleri bulalım.

n=0,1,2,3,4,5… için $J_n = \{0,1,1,3,5,11,21, \ldots\}$ elde edilir.

(2.6) ile gösterilen fark denkleminin karakteristik denklemi

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ dır.

α ve β bu denklemin kökleri olmak üzere ;

$\alpha = 2,\ \beta = -1$ dir. $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -2, \alpha - \beta = 3$ olur.

Binet formülü;

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \tag{2.7}$$

şeklinde elde edilir.

Horadam, Jacobsthal sayı dizisinin elemanlarının negatif değerler içinde hesaplanabileceğini belirtmiştir. O halde negatif tam sayılar için Jacobsthal binet formülü;

$$J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_n$$

şeklindedir.

Jacobsthal sayılar için üreteç formülünü bulalım.

$$J(x) = J_1 x + J_2 x^2 + J_3 x^3 + \cdots + J_n x^n + \cdots$$

$$-x\,J(x) = -J_1 x^2 - J_2 x^3 - J_3 x^4 - \cdots - J_n x^{n+1} + \cdots$$

$$-2x^2 J(x) = -2J_1 x^3 - 2J_2 x^4 - 2J_3 x^5 - \cdots - 2J_n x^{n+2} + \cdots$$

olduğndan bu üç eşitlik taraf tarafa toplanırsa;

$$(1 - x - 2x^2) = J_1 x + (J_2 - J_1)x^2 + (J_3 - J_2 - 2J_1)x^3 + \cdots$$

$$+(J_n - J_{n-1} - 2J_{n-2})x^n + \cdots$$

$$J(x) = \frac{x}{1 - x - 2x^2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} J_i x^{i-1} = (1 - x - 2x^2)^{-1}$$

Üreteç fonksiyonunu elde ederiz.

Simpson Formülü;

$$J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$$

Toplam Formülü;

$$\sum_{i=2}^{n} J_i = \frac{1}{2}(J_{n+2} - 3)$$

Şeklindedir. (Horadam ,1996)

2.5. Jacobsthal Lucas Sayı Dizisi

Tanım 2.5(Jacobsthal Lucas)

$j_0 = 2$ ve $j_1 = 1$ olmak üzere;

$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n,\ \ n \geq 0$ (2.8)

Şeklinde lineer rekürans bağıntısı ile verilen sayı dizisine Jacobsthal Lucas sayı dizisi denir ve $\{j_n\}_{n\in N}$ ile gösterilir. Bu sayı dizisinin elemanlarına da jacobsthal lucas sayıları denir. Jacobsthal Lucas sayı dizisindeki her **n** tamsayısına karşılık gelen elemana n. Jacobsthal Lucas sayısı denir.

n=0, 1, 2, 3, 4, 5, … için n. Jacobsthal Lucas sayıları $j_n = \{2, 1, 5, 7, 17, 31, 65,\ldots\}$ şeklinde yazabiliriz.

(2.8) ile verilen ifadenin karakteristik denklemi

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

dır.α ve β bu denklemin kökleri olmak üzere ;

$\alpha = 2,\ \beta = -1$ dir. $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -2, \alpha - \beta = 3$

olur. Binet formülü;

$j_n = 2^n + (-1)^n$ (2.9)

şeklindedir.

Horadam Jacobsthal sayı dizilerinde olduğu gibi Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin de negatif n tamsayıları için hesaplanabileceğini ifade etmiştir.

Bu sayı dizisinin binet formülü;

$j_{-n} = \frac{(-1)^n}{2^n} j_n$

Jacobsthal Lucas Sayılarının Üreteç Fonksiyonu;

$\sum_{i=1}^{\infty} j_i x^{i-1} = (1 + 4x)(1 - x - 2x^2)^{-1}$

şeklindedir.

Simpson Formülü;

$j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 = 9(-1)^{n-1}2^{n-1} = -9(J_{n+1}J_{n-1} - {J_n}^2$

Toplam Formülü;

$\sum_{i=1}^{n} j_i = \frac{j_{n+2} - 5}{2}$

dir.(Horadam, 1996)

2.6. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayı Dizileri Arasındaki Bağıntılar

$j_n J_n = J_{2n}$ (2.10)

$j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$

$9J_n = j_{n+1} + 2j_{n-1}$

$j_{n+1} + j_n = 3(J_{n+1} + J_n) = 3.2^n$

$j_{n+1} - j_n = 3(J_{n+1} - J_n) + 4(-1)^{n+1} = 2^n + 2(-1)^{n+1}$

$j_{n+1} - 2j_n = 3(2J_n - J_{n+1}) = 3(-1)^{n+1}$

$2j_{n+1} + j_{n-1} = 3(2J_{n+1} + J_{n-1}) + 6(-1)^{n+1}$

$j_{n+r} + j_{n-r} = 3(J_{n+r} + J_{n-r}) + 4(-1)^{n-r} = 2^{n-r}(2^{2r} + 1) + 2(-1)^{n-r}$

$j_{n+r} - j_{n-r} = 3(J_{n+r} - J_{n-r}) = 2^{n-r}(2^{2r} - 1)$

$j_n = 3J_n + 2(-1)^n$

$3J_n + j_n = 2^{n+1}$

$J_n + j_n = 2J_{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{J_{n+1}}{J_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{j_{n+1}}{j_n}\right) = 2$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{j_n}{J_n}\right) = 3$

$j_{n+2}j_{n-2} - {j_n}^2 = -9\left(J_{n+2}J_{n-2} - {J_n}^2\right)9(-1)^n 2^{n-2}$

$J_m j_n + J_n j_m = 2J_{m+n}$ (m=n ise (2.10))

$j_m j_n + 9J_m J_n = 2j_{m+n}$

$j_m j_n - 9J_m J_n = (-1)^n 2^{n+1} j_{m-n}$ (2.11)

((2.11) de m=n seçersek)

${j_n}^2 - 9{J_n}^2 = (-1)^n 2^{n+2}$

bulunur.

Bu özellikleri Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin Binet formülünü kullanarak ispatlayabiliriz. (Horadam, 1996)

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde ise sayı dizilerinin genelleştirilmiş hali olan k-Fibonacci, k-Lucas, k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin tanımını verip bu sayı dizileriyle ilgili bazı özellikleri açıklayacağız.

3.1 k-Fibonacci Sayı Dizisi

Tanım 3.1

$\forall\, k > 0$ reel sayısı için $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$ olmak üzere,

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1} \quad n \geq 1 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

$\{F_{k,n}\}_{n\in N}$ sayı dizisine k-Fibonacci sayı dizisi denir. Dizinin elemanlarına da k-Fibonacci sayıları denir.

k-Fibonacci sayı dizisinin elemanlarından bazılarını yazarsak;

$F_{k,1} = 1$ $\qquad$ $F_{k,6} = k^5 + 4k^3 + 3k$

$F_{k,2} = k$ $\qquad$ $F_{k,7} = k^6 + 5k^4 + 6k^2 + 1$

$F_{k,3} = k^2 + 1$ $\qquad$ $F_{K,8} = k^7 + 6k^5 + 10k^3 + 4k$

$F_{k,4} = k^3 + 2k$

$F_{k,5} = k^4 + 3k^2 + 1$

olur.

k-Fibonacci sayı dizisi Fibonacci sayı dizisinin bir genellemesidir. Farklı **k** değerleri için farklı sayı dizileri elde ederiz.

k=1 alırsak klasik Fibonacci dizisi elde edilir.

$F_0 = 0, F_1 = 1$ ve $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, n≥ 1

$\{F_n\}_{n\in N} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ şeklinde olur.

k=2 alırsak Pell Sayı dizisini elde edilir.

$P_0 = 0, P_1 = 1\ ve\ P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}, \quad n \geq 1$

$\{P_n\}_{n\in N} = \{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \dots\}$

k=3 alırsak farklı bir sayı dizisi

$F_{3,0} = 0,\ F_{3,1} = 1\ ve\ F_{3,n+1} = 3F_{3,n} + F_{3,n-1}, \quad n \geq 1$

$\{H_n\}_{n\in N} = \{0, 1, 3, 10, 33, 109, \dots\}$

olarak elde edilir.

(3.1) ile verilen bağıntının karakteristik denklemi;

$\lambda^2 = k\lambda + 1$

şeklindedir.

k-Fibonacci sayılarının binet formülü;

$$F_{k,n} = \frac{{\alpha_k}^n - {\beta_k}^n}{\alpha_k - \beta_k} \qquad (3.2)$$

şeklindedir.

Karakteristik denklemin pozitif kökü α_k ya "k-altın oran "denir. k=1,2,3,… değerleri için farklı isimler almıştır.

k=1 için $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ye "altın oran" denir.

k=2 için $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$ ye "gümüş oran" denir.

k=3 için $\alpha_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ de "bronz oran" olarak adlandırılır.

Şimdi k-Fibonacci sayı dizileriyle ilgili bazı özdeşlikleri verelim.

Catalan Özdeşliği:

$F_{k,n-r}F_{k,n+r} - {F_{k,n}}^2 = (-1)^{n+1-r}{F_{k,r}}^2$

Simpson Özdeşliği:

$F_{k,n-1}F_{k,n+1} - {F_{k,n}}^2 = (-1)^n$

D'ocagne Özdeşliği:

$F_{k,m}F_{k,n+1} - F_{k,m+1}F_{k,n} = (-1)^n F_{k,m-n}$

İlk n terim Toplamı:

$$S_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} F_{k,i} = \frac{1}{k}\left(F_{k,n+1} + F_{k,n-1}\right)$$

Üreteç Fonksiyonu:

$$f_k(x) = \frac{x}{1 - kx - x^2}$$

(Falcon ve Plaza, 2007)

3.2 k-Lucas Sayı Dizisi

Tanım 3.2

$\forall k > 0$ reel sayısı için

$L_{k,0} = 2\ ve\ L_{k,1} = k$ olmak üzere

$$L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1} \qquad n \geq 1 \qquad (3.3)$$

Şeklinde tanımlanan $\{L_{k,n}\}_{n\in N}$ sayı dizisine k-Lucas sayı dizisi denir. Dizinin elemanlarına da k-Lucas sayıları denir.

k=1 alırsak

$L_1 = \{L_{1,n}\} = \{2,1,3,4,7,11,18,29, \dots\}$

klasik Fibonacci sayı dizisini elde ederiz.

k=2 alırsak $L_2 = \{L_{2,n}\} = \{2,2,6,14,34,82,198,478, \dots\}$

k=3 alırsak $\{L_{3,n}\}$={2,3,11,36,119,393,1243,4287,…}

k-Lucas sayı dizisi için bazı terimleri verelim.

$L_{k,0} = 2$ $\qquad$ $L_{k,5} = k^5 + 5k^3 + 5k$

$L_{k,1} = k$ $\qquad$ $L_{k,6} = k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2$

$L_{k,2} = k^2 + 2$ $\qquad$ $L_{k,7} = k^7 + 7k^5 + 14k^3 + 7k$

$L_{k,3} = k^3 + 3k$

$L_{k,4} = k^4 + 4k^2 + 2$

(3.3) ile gösterilen ifadenin kökleri α_k ve β_k olmak üzere;

$$\alpha_k = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

$$\beta_k = -\frac{1}{\alpha_k} = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

şeklindedir.

Binet Formülü:

$$L_{k,n} = {\alpha_k}^n + {\beta_k}^n \qquad (3.4)$$

şeklindedir.

(Falcon, 2011)

3.3 k-Jacobsthal Sayı Dizisi

Tanım 3.3

$\forall k > 0$ reel sayısı için başlangıç koşulları $J_{k,0} = 0$ ve $J_{k,1} = 1$ seçilerek

$$J_{k,n+1} = kJ_{k,n} + 2J_{k,n-1} \quad n \geq 1 \qquad (3.5)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $(J_{k,n})_{n\in N}$dizisine “k-Jacobsthal dizi” denir.

$\{J_{k,n}\}_{n\in N}$ ile gösterilir. (Jhala ve ark. , 2013)

Şimdi k-Jacobsthal sayı dizisinin bazı elemanlarını bulalım.

$J_{k,2} = k$ $\qquad$ $J_{k,7} = k^6 + 10k^4 + 24k^2 + 8$

$J_{k,3} = k^2 + 2$ $\qquad$ $J_{k,8} = k^7 + 12k^5 + 40k^3 + 32k$

$J_{k,4} = k^3 + 4k$ $\qquad$ $J_{k,9} = k^8 + 14k^6 + 60k^4 + 80k^2 + 16$

$J_{k,5} = k^4 + 6k^2 + 4$ $\quad\quad$ $J_{k,10} = k^9 + 16k^7 + 84k^5 + 160k^3 + 80k$

$J_{k,6} = k^5 + 8k^3 + 12k$

k-Jacobsthal sayı dizisi k=1 için klasik jacobsthal sayı dizisine dönüşür.

(3.5) ile verilen ifadenin karakteristik denklemi $r^2 - kr - 2 = 0$ şeklindedir.

Kökleri $r_1 \; ve \; r_2$ olmak üzere

$r_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}, \; r_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}$

şeklinde bulunur. (Jhala ve ark. , 2013)

Teorem 3.3.1 (Binet Formülü)

k-Jacobsthal dizisi için Binet Formülü;

$r_1 \; ve \; r_2$ (3.5) ile gösterilen ifadenin karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere

$J_{k,n} = \frac{{r_1}^n - {r_2}^n}{r_1 - r_2} \; (r_1 \; > r_2)$ (3.6)

dir. (Jhala ve ark., 2013)

İspat:

$r^2 - kr - 2 = 0$

denkleminin kökleri $r_1 \; ve \; r_2$ olmak üzere

$r_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}, \; r_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}$

$(r_2 < 0 < r_1)$, $|\; r_2| < |r_1|$

$r_1 + \; r_2 = k$, $r_1 - \; r_2 = \sqrt{k^2+8}, \; r_1 \; r_2 = -2$ şeklindedir.

$J_{k,n} = c_1 {r_1}^n + c_2 {r_2}^n$

şeklinde genel denklemini yazarsak;

$J_{k,0} = 0$ dan $\; c_1 + c_2 = 0$ ise $c_1 = -c_2$

dir.

$J_{k,1} = 1$ den $\; c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1$

$c_1 r_1 - c_1 r_2 = 1$

$c_1 (r_1 - r_2) = 1$

$c_1 = \frac{1}{r_1 - r_2}, \; c_2 = \frac{-1}{r_1 - r_2}$ dir.

$J_{k,n} = \frac{{r_1}^n - {r_2}^n}{r_1 - r_2}$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.3.2(Catalan Özdeşliği)

$$J_{k,n-r}J_{k,n+r} - {J_{k,n}}^2 = (-1)^{n+1-r}{J_{k,r}}^2 2^{n-r} \quad (3.7)$$

eşitliği sağlanır.

(Jhala ve ark., 2013)

İspat: Bu özdeşliği ispatlamak için (3.6) ile ifade edilen binet formülü kullanılmıştır.

$$J_{k,n-r}J_{k,n+r} - {J_{k,n}}^2 = \frac{{r_1}^{n-r} - {r_2}^{n-r}}{r_1 - r_2}\frac{{r_1}^{n+r} - {r_2}^{n+r}}{r_1 - r_2} - \left(\frac{{r_1}^n - {r_2}^n}{r_1 - r_2}\right)^2$$

$$= \frac{{r_1}^{2n} + {r_2}^{2n} - (r_1 r_2)^n\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^r - (r_2 r_1)^n\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^r}{(r_1 - r_2)^2} - \frac{({r_1}^{2n} - 2(r_1 r_2)^n + {r_2}^{2n})}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}2^n}{(r_1 - r_2)^2}\left(\frac{({r_1}^{2r} + {r_2}^{2r})}{(r_1 r_2)^r} - 2\right)$$

$$= (-1)^{n+1-r}2^{n-r}{J_{k,r}}^2.$$

Teorem 3.3.3 (Cassini Özdeşliği)

$$J_{k,n-1}J_{k,n+1} - {J_{k,n}}^2 = (-1)^n{J_{k,r}}^2 2^{n-1} \quad (3.8)$$

dir.

(Jhala ve ark., 2013)

İspat: Catalan Özdeşliğinde r=1 yazarsak Cassini Özdeşliğini elde ederiz.

Teorem 3.3.4 (D'ocagne's Özdeşliği) m> n olmak üzere;

$$J_{k,m}J_{k,n+1} - J_{k,m+1}J_{k,n} = (-2)^n \quad (3.9)$$

dir. (Jhala ve ark., 2013)

İspat: Bu özdeşliği ispatlamak için (3.6) ile ifade edilen binet formülünü kullanılırsa;

$$J_{k,m}J_{k,n+1} - J_{k,m+1}J_{k,n} = \frac{{r_1}^m - {r_2}^m}{r_1 - r_2}\frac{{r_1}^{n+1} - {r_2}^{n+1}}{r_1 - r_2} - \frac{{r_1}^{m+1} - {r_2}^{m+1}}{r_1 - r_2}\frac{{r_1}^n - {r_2}^n}{r_1 - r_2}$$

$$= (-2)^n J_{k,m-n}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.5. k-Jacobsthal sayı dizileri için ardışık sayıların limitleri oranı;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{J_{k,n+1}}{J_{k,n}} = r_1 \quad (3.10)$$

şeklindedir. (Jhala ve ark., 2013)

İspat: Bu oran k-Jacobsthal sayı dizisinin diğer özdeşliklerin ispatında yapıldığı gibi binet formülünü kullanarak ispat edilmiştir.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{J_{k,n+1}}{J_{k,n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{{r_1}^{n+1}-{r_2}^{n+1}}{r_1-r_2}}{\frac{{r_1}^{n}-{r_2}^{n}}{r_1-r_2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{{r_1}^{n+1}-{r_2}^{n+1}}{{r_1}^{n}-{r_2}^{n}}$$

($r_1 > r_2$ olduğu için)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n=0$$

dır.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{r_1}^{n}\left(r_1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n r_2\right)}{{r_1}^{n}\left(1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n\right)}=r_1$$

elde edilir.

3.3.1.k-Jacobsthal Sayı Dizilerinin Üreteç Fonksiyonu

Bu kısımda k-Jacobsthal sayı dizisinin üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Öncelikle (2.3) ile tanımlanan üreteç fonksiyonunun genel tanımından yola çıkılarak elde edilen k-Jacobsthal sayı dizisi için tanımlanan üreteç fonksiyonunu verelim.

$$J_k(x)=J_{k,0}+J_{k,1}x+J_{k,2}x^2+J_{k,3}x^3+\cdots+J_{k,n}x^n+\cdots$$
$$kxJ_k(x)=kJ_{k,0}x+kJ_{k,1}x+kJ_{k,2}x^3+kJ_{k,3}x^4+\cdots+kJ_{k,n}x^{n+1}+\cdots$$
$$2x^2J_k(x)=2J_{k,0}x^2+2J_{k,1}x^3+2J_{k,2}x^4+2J_{k,3}x^5+\cdots+2J_{k,n}x^{n+2}+\cdots$$

Yukarıdaki eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak;

$$J_k(x)-kxJ_k(x)-2x^2J_k(x)=J_{k,0}+x\left(J_{k,1}-kJ_{k,0}\right)+x^2\left(J_{k,2}-kJ_{k,1}-2J_{k,0}\right)+$$
$$x^3(J_{k,3}-kJ_{k,2}-2J_{k,1})+\ldots+x^n\left(J_{k,n}-kJ_{k,n-1}-2J_{k,n-2}\right)+\cdots$$
$$J_k(x)(1-kx-2x^2)=x$$
$$J_k(x)=\frac{x}{(1-kx-2x^2)}$$

bulunur. Böylece

k-Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu:

$$J_k(x)=\frac{x}{(1-kx-2x^2)}$$

elde edilir. (Jhala ve ark., 2013)

3.4. k-Jacobsthal Lucas Sayı Dizileri

Tanım 3.4

$\forall k > 0$ reel sayı dizisi için $j_{k,0} = 2, j_{k,1} = k$ seçilerek

$$j_{k,n+1} = kj_{k,n} + 2j_{k,n-1} \quad n \geq 1 \tag{3.11}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanan diziye k-Jacobsthal Lucas sayı dizisi denir.$\{j_{k,n}\}_{n\in N}$ ile gösterilir. k-Jacobsthal Lucas dizisinin her bir elemanına k-Jacobsthal Lucas sayısı denir. (Jhala ve Rathore, 2014)

Bu sayı dizisinin k nın bazı değerleri için elemanlarını bulalım.

$j_{k,0} = 2$ $\qquad$ $j_{k,6} = k^6 + 12k^4 + 36k^2 + 16$

$j_{k,1} = k$ $\qquad$ $j_{k,7} = k^7 + 14k^5 + 56k^3 + 56k$

$j_{k,2}=k^2 + 4$ $\qquad$ $j_{k,8} = k^8 + 16k^6 + 80k^4 + 28k^2 + 32$

$j_{k,3} = k^3 + 6k$ $\qquad$ $j_{k,9} = k^9 + 18k^7 + 108k^5 + 140k^3 +144$k

$j_{k,4} = k^4 + 8k^2 + 8$ $\qquad$ $j_{k,10} = k^{10} + 20k^8 + 140k^6 + 300k^4 + 272k^2 + 64$

$j_{k,5} = k^5 + 10k^3 + 20k$

şeklindedir.

(3.11) ile verilen ifadenin karakteristik denklemi

$$r^2 - kr - 2 = 0$$

şeklindedir.

$r_1 ve\ r_2$ denklemin kökleri olmak üzere;

$$r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}, r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{2} \qquad (k > 0)$$

$$r_2 < 0 < r_1\ ,\quad |r_2| < |r_1|,\quad r_1 + r_2 = k,\quad r_1 r_2 = -2,\quad r_1 - r_2 = \sqrt{k^2 + 8} \tag{3.12}$$

olarak bulunur. (Jhala ve Rathore, 2014)

Teorem 3.4.1 (Binet Formülü)

$r_1 ve\ r_2$ (3.15) ifadesinin karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere

$$j_{k,n} = {r_1}^n + {r_2}^n\ (r_1 > r_2) \tag{3.13}$$

dir. (Jhala ve Rathore, 2014)

İspat: (3.13) ile verilen karakteristik denklemin genel çözümü;

$$j_{k,n} = c_1 {r_1}^n + c_2 {r_2}^n$$

şeklindedir.

n=0 için $j_{k,0} = c_1 + c_2 = 2$

n=1 için $j_{k,1} = c_1 r_1 + c_2 r_2 = k$

$c_1 = c_2 = 1$ elde edilir. O halde binet formülünü;

$j_{k,n} = {r_1}^n + {r_2}^n$

şeklinde elde ederiz.

Teorem 3.4.2 (Catalan's Özdeşliği)

$$j_{k,n-r} j_{k,n+r} - {j_{k,n}}^2 = (-2)^{n-r}\left\{{j_{k,r}}^2 - 4(-2)^r\right\} \quad (3.14)$$

dir. (Jhala ve Rathore , 2014)

İspat: k-Jacobsthal lucas sayı dizisinin binet formülü yardımıyla bu özdeşliği ispatlayalım.

$$j_{k,n-r} j_{k,n+r} - {j_{k,n}}^2 = \frac{{r_1}^{n-r} - {r_2}^{n-r}}{r_1 - r_2}\frac{{r_1}^{n+r} - {r_2}^{n+r}}{r_1 - r_2} - \left(\frac{{r_1}^n - {r_2}^n}{r_1 - r_2}\right)^2$$

Gerekli düzenlemeler yapılıp

(3.12 den) $r_1 r_2 = -2$ yi yerine yazarsak

$(-2)^{n-r}\left\{{j_{k,r}}^2 - 4(-2)^r\right\}$

elde edilir.

Teorem 3.4.3 (Cassini Özdeşliği)

$$j_{k,n-1} j_{k,n+1} - {j_{k,n}}^2 = (-2)^{n-1}(k^2 + 8) \quad (3.15)$$

dir. (Jhala ve Rathore , 2014**)**

İspat: Catalan Özdeşliğinde r=1 yazarsak k-Jacobsthal Lucas sayı dizisi için Cassini Özdeşliği elde edilir.

Teorem 3.4.4 (D'ocagne Özdeşliği)

m>n olmak üzere

$$j_{k,m} j_{k,n+1} - j_{k,m+1} j_{k,n} = (-2)^n \sqrt{k^2 + 8}\left\{j_{k,m-n} - 2\left(\frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^{m-n}\right\} \quad (3.16)$$

dır.(Jhala ve Rathore, 2014)

İspat: (3.12) ve (3.13) ile ifade edilen eşitliklerini kullanarak teoremi ispatlarız.

3.4.1 k-Jacobsthal Lucas Sayı Dizilerinin Üreteç Fonksiyonu

$\mathcal{J}_k(x)$ k-Jacobsthal Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere (2.3) te verilen üreteç fonksiyonu tanımından yararlanarak;

$$\mathcal{J}_k(x)=j_{k,0}+j_{k,1}x+j_{k,2}x^2+j_{k,3}x^3+\cdots+j_{k,n}x^n+\cdots$$
$$=2+kx+\sum_{n=0}^{\infty}j_{k,n}x^n$$
$$=2+kx+\sum_{n=0}^{\infty}(kj_{k,n-1}+2j_{k,n-2})x^n$$
$$=2+kx+k\sum_{n=0}^{\infty}kj_{k,n-1}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}j_{k,n-2}x^n$$
$$=2+kx+kx\sum_{n=2}^{\infty}kj_{k,n-1}x^{n-1}+2x^2\sum_{n=2}^{\infty}j_{k,n-2}x^{n-2}$$

$n-2=j\ ve\ n-1=p$

seçelim;

$$\mathcal{J}_k(x)=2+kx+kx\left(\sum_{p=0}^{\infty}j_{k,p}x^p+j_{k,0}\right)+2x^2\sum_{j=0}^{\infty}j_{k,j}x^j$$
$$\mathcal{J}_k(x)=2-kx+kx\sum_{p=0}^{\infty}j_{k,p}x^p+2x^2\sum_{j=0}^{\infty}j_{k,j}x^j$$
$$\mathcal{J}_k(x)=2-kx+kx\mathcal{J}_k(x)+2x^2\mathcal{J}_k(x)$$

$$\mathcal{J}_k(x)(1-kx-2x^2)=2-4x$$
$$\mathcal{J}_k(x)=\frac{2-kx}{(1-kx-2x^2)}$$

k-Jacobsthal Lucas dizisi için üreteç fonksiyonu elde edilir. (Jhala ve Rathore,2014)

Teorem 3.4.5 (Campos ve ark., 2014)

m>n olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\frac{j_{k,n}}{j_{k,n-1}}=r_1\quad,\left|\frac{r_2}{r_1}\right|<1 \tag{3.17}$$

dir. (Jhala ve Rathore,2014)

İspat:

(3.13) ile ifade edilen binet formülünü yerine yazarsak;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{r_1}^n+{r_2}^n}{{r_1}^{n-1}+{r_2}^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{r_1}^n(1+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n)}{{r_1}^n(\frac{1}{r_1}+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n\frac{1}{r_2})}=r_1$$

elde edilir.

Teorem 3.4.6 (Toplam Formülü)

$$\sum_{i=1}^{n} j_{k,i}=\frac{j_{k,n+1}+2j_{k,n}-k-4}{k+1} \tag{3.18}$$

dir. (Jhala ve Rathore , 2014)

İspat: Toplam ifadesinin özelliğinden;

$$\sum_{i=1}^{n} j_{k,i}=\sum_{i=1}^{n}{r_1}^i+{r_2}^i=\sum_{i=1}^{n}{r_1}^i+\sum_{i=1}^{n}{r_2}^i$$

şeklinde yazılır.

Toplam formüllerini açarsak;

$$\sum_{i=1}^{n} j_{k,i}=r_1\frac{(1-{r_1}^n)}{1-r_1}+r_2\frac{(1-{r_1}^n)}{1-r_2}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{n} j_{k,i}=\frac{r_1-r_1r_2-{r_1}^{n+1}+{r_1}^{n+1}r_2+r_2-r_2r_1-{r_2}^{n+1}+{r_2}^{n+1}r_1}{(1-r_1)(1-r_2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} j_{k,i}=\frac{-({r_1}^{n+1}+{r_2}^{n+1})+r_1r_2({r_1}^n+{r_1}^n)+(r_1+r_2)-2r_1r_2}{(1-r_2-r_1+r_1r_2)}$$

(3.12) den

$$\sum_{i=1}^{n} j_{k,i}=\frac{j_{k,n+1}+2j_{k,n}-k-4}{k+1}$$

elde edilir.

Şimdi ise k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileri arasındaki ilişkileri verelim:

3.4.2.k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Dizisi Arasındaki İlişkiler:

$j_{k,n}$:k-Jacobsthal Lucas ve $J_{k,n}$: k-Jacobsthal dizi olmak üzere

$$J_{k,n}j_{k,n}=J_{k,2n}$$

$$J_{k,n+1}+2J_{k,n-1}=j_{k,n} \tag{3.20}$$

$$j_{k,n+1}+2j_{k,n-1}=(k^2+8)J_{k,n}$$

$$(k^2+8){J_{k,n}}^2+4(-2)^n={j_{k,n}}^2$$

$kJ_{k,n} + 4J_{k,n-1} = j_{k,n}$

$kJ_{k,n} + j_{k,n} = 2J_{k,n+1}$

$(k^2+8)J_{k,n} + kj_{k,n} = 2j_{k,n+1}$

$\sqrt{(k^2+8)}J_{k,n} + kj_{k,n} = 2\alpha^n, \quad \sqrt{(k^2+8)}J_{k,n} - j_{k,n} = -2\beta^n$

$2J_{k,m+n} = j_{k,n}J_{k,m} + J_{k,m}j_{k,n}$

$J_{k,m+n+1} = J_{k,m+1}J_{k,n+1} + 2J_{k,m}J_{k,n}$

$j_{k,m+n+1} = J_{k,m+1}j_{k,n+1} + 2J_{k,m}j_{k,n}$

(Uygun ve Eldoğan, 2016(a))

Verilen bu özelliklerden hareketle daha sonra bunlardan bazıları ispatlanmıştır.

Teorem 3.4.2.1

$${j_{k,n}}^2 = (k^2+8){J_{k,n}}^2 + 4(-2)^n \tag{3.21}$$

dir. (Jhala ve Rathore, 2014**)**

İspat: Binet formülünü kullanarak teorem ispat edilmiştir.

$$\begin{aligned}(k^2+8){J_{k,n}}^2 + 4(-2)^n &= (k^2+8)\left(\frac{{r_1}^n - {r_2}^n}{r_1 - r_2}\right)^2 + 4(-2)^n \\ &= {r_1}^{2n} - 2(r_1r_2)^n + {r_2}^{2n} + 4(r_1r_2)^n \\ &= {r_1}^{2n} + 2(r_1r_2)^n + {r_2}^{2n} \\ &= ({r_1}^n + {r_2}^n)^2 \\ &= {j_{k,n}}^2\end{aligned}$$

elde ederiz.

Teorem 3.4.2.2 (Convolution Product)

$$j_{k,n+m} = j_{k,n+1}J_{k,m} + 2j_{k,n}J_{k,m-1} \tag{3.22}$$

dir. (Jhala ve Rathore, 2014)

İspat: Bu teoremi ispatlamak için k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizinin binet formüllerinden yararlanılmıştır.

$j_{k,n+m} = j_{k,n+1}J_{k,m} + 2j_{k,n}J_{k,m-1}$

eşitliğinin binet formülü yardımıyla sağ tarafının sol tarafına eşit olduğunu gösterelim.

$$j_{k,n+1}J_{k,m} + 2j_{k,n}J_{k,m-1} = ({r_1}^{n+1} + {r_2}^{n+1})\left(\frac{{r_1}^m - {r_2}^m}{r_1 - r_2}\right) + 2({r_1}^n + {r_2}^n)\left(\frac{{r_1}^{m-1} - {r_2}^{m-1}}{r_1 - r_2}\right)$$

$= \frac{1}{r_1 - r_2}\{({r_1}^{n+1} + {r_2}^{n+1})({r_1}^{m} - {r_2}^{m}) + 2({r_1}^{n} + {r_2}^{n})({r_1}^{m-1} - {r_2}^{m-1})\}$

$= \frac{1}{r_1 - r_2}\{{r_1}^{m+n}(r_1 + 2{r_1}^{-1}) - {r_2}^{m+n}(r_2 + 2{r_2}^{-1}) - {r_1}^{n}{r_2}^{m}(r_1 + 2{r_2}^{-1}) +$

${r_2}^{n}{r_1}^{m}(r_2 + 2{r_1}^{-1})\}$

$= \frac{1}{r_1 - r_2}\{{r_1}^{m+n}(r_1 - r_2) + {r_2}^{m+n}(r_1 - r_2)\}$, $(r_1 r_2 = -1)$ den

$= ({r_1}^{m+n} + {r_2}^{m+n})$

$= j_{k,n+m}$

Teorem 3.4.2.3

$j_{k,n} = 2J_{k,n-1} + J_{k,n+1}$; $n \geq 1$ (3.23)

dir. (Jhala ve Rathore, 2014**)**

İspat: Bu teoremin ispatında tümevarım metodu kullanılmıştır.

n=1 için; $j_{k,1} = 2J_{k,0} + J_{k,2}$

$k = 0 + k$ olup doğruluğu gösterilmiştir.

İfadenin n=n-1 e kadar aldığı değerler için doğru olduğunu kabul edelim;

$j_{k,n-2} = 2J_{k,n-3} + J_{k,n-1}$

$j_{k,n-1} = 2J_{k,n-2} + J_{k,n}$

k-Jacobsthal Lucas dizisinin tanımından;

$j_{k,n} = kJ_{k,n-1} + 2J_{k,n-2}$

yazarsak

$= k(2J_{k,n-2} + J_{k,n}) + 2(2J_{k,n-3} + J_{k,n-1})$

$=2(kJ_{k,n-2} + 2J_{k,n-3}) + (kJ_{k,n} + 2J_{k,n-1})$

$= 2J_{k,n-1} + J_{k,n+1}$

$j_{k,n} = 2J_{k,n-1} + J_{k,n+1}$

eşitliğini elde etmiş oluruz.

Teorem 3.4.2.4

$n \in N$ için $j_{k,n}J_{k,n} = J_{k,2n}$ (3.24)

dir. (Jhala ve Rathore, 2014**)**

İspat:

"Convolution Product " özelliğinin (3.22) de $j_{k,n+m} = j_{k,n+1}J_{k,m} + 2j_{k,n}J_{k,m-1}$ olduğunu vermiştik.

Bu özellikte m=n seçersek

$$J_{k,2n} = J_{k,n+1}J_{k,n} + 2J_{k,n}J_{k,n-1}$$
$$= J_{k,n}(J_{k,n+1} + 2J_{k,n-1})$$
$$= \frac{1}{k}(J_{k,n+1} - 2J_{k,n-1})(J_{k,n+1} + 2J_{k,n-1})$$

(3.20) den

$$= j_{k,n}J_{k,n}$$

elde edilir.

4.SAYI DİZİLERİNİN MATRİS GÖSTERİMİ

4.1. Sayı Dizilerinin Matris Gösterimi

Bu bölümde matematik literatüründe çok geniş kullanımı olan sayı dizilerinin matris temsillerinden bahsedeceğiz. Bilindiği gibi Fibonacci, Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizileri ve bunların k- parametresiyle genelleştirilmiş hali olan sayı dizilerinin matris temsilleriyle ilgili birçok çalışma yapılmıştır.

1960 lı yıllarda Charles H. King master tezinde Q matrisini tanımlamıştır.

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanmıştır.

$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} ve \det(Q^n) = -1$

olduğunu gösterdi.

$(detQ)^n = \det(Q^n) = (-1)^n$ olduğundan;

$F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n(Cassini\ Formülü)$

elde etti.

Silvester, bu matris gösterimini kullanarak Fibonacci sayılarının birçok özelliğinin ortaya çıkabileceğini gösterdi.

Somruk Srisawat ve ark (2015) de k-Jacobsthal sayı dizisinin elemanlarından olan S ve W matrisini tanımladı. S matrisi yardımıyla bu sayı dizisiyle ilgili eşitliklerden bazılarını ispatlamıştır.

$S=\begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ve\ W = \begin{bmatrix} k^2+1 & 2k \\ k & 2 \end{bmatrix}$ (4.1)

şeklindedir.

Teorem 4.1.1

$S=\begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $S^n = \begin{bmatrix} J_{k,n+1} & 2J_{k,n} \\ J_{k,n} & 2J_{k,n-1} \end{bmatrix}\ n \geq 1$ (4.2)

dir. (Somruk Srisawat ve ark., 2015)

İspat: İspat Tümevarım metodu kullanılarak yapılmıştır.

n=1 için $S^1 = \begin{bmatrix} J_{k,2} & 2J_{k,1} \\ J_{k,1} & 2J_{k,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

olup doğrudur.

n=m için $S^m = \begin{bmatrix} J_{k,m+1} & 2J_{k,m} \\ J_{k,m} & 2J_{k,m-1} \end{bmatrix}$

olduğunu kabul edelim.

n=m+1 için $S^{m+1} = S^m S = \begin{bmatrix} J_{k,m+1} & 2J_{k,m} \\ J_{k,m} & 2J_{k,m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} J_{k,m+2} & 2J_{k,m+1} \\ J_{k,m+1} & 2J_{k,m} \end{bmatrix}$$

olduğu gösterildi.

Teorem 4.1.1 in sonucu olarak;

$i) \det(S^n) = (-2)^n$

$ii) J_{k,n+1}J_{k,n-1} - {J_{k,n}}^2 = (-1)^n 2^{n-1}$

dır.

İspat:

S=$\begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

olmak üzere ;

$\det(S) = -2,\ \det(S^n) = (\det S)^n$

olduğundan

$\det(S^n) = (-2)^n$

dir.

$S^n = \begin{bmatrix} J_{k,n+1} & 2J_{k,n} \\ J_{k,n} & 2J_{k,n-1} \end{bmatrix}$

olmak üzere;

$\det(S^n) = 2J_{k,n-1}J_{k,n+1} - 2{J_{k,n}}^2$

dir.

$\det(S^n) = (-2)^n$

olduğunu yukarıdaki eşitlikten biliyoruz. O halde

$\det(S^n) = J_{k,n-1}J_{k,n+1} - {J_{k,n}}^2 = (-1)^n 2^{n-1}$

olur. (Somruk Srisawat ve ark., 2015)

Teorem 4.1.2

S^n matrisinin karakteristik denkleminin kökleri $\lambda_1 \; ve \; \lambda_2$ olmak üzere;

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{j_{k,n} \pm \sqrt{k^2+8} J_{k,n}}{2}$$

dir. (4.3)

Ayrıca $r_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}, \; r_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}$

olmak üzere

$$J_{k,n} = \frac{{r_1}^n - {r_2}^n}{r_1 - r_2} \text{ ve } j_{k,n} = {r_1}^n + {r_2}^n$$

dir. (Somruk Srisawat ve ark., 2015)

İspat: S^n matrisinin karakteristik denkleminin köklerini bulalım.

$$\det(S^n - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda - J_{k,n+1} & -2J_{k,n} \\ -J_{k,n} & \lambda - 2J_{k,n-1} \end{vmatrix}$$

$$\lambda^2 - \lambda \underbrace{\left(J_{k,n+1} + 2J_{k,n-1}\right)}_{j_{k,n}} + 2 \underbrace{\left(J_{k,n+1}J_{k,n-1} - {J_{k,n}}^2\right)}_{(-1)^n 2^{n-1}} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda j_{k,n} + (-2)^n = 0$$

Şeklinde karakteristik denklem elde edildi.

Kökleri $\lambda_1 \; ve \; \lambda_2$ olmak üzere;

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{j_{k,n} \pm \sqrt{{j_{k,n}}^2 - 4(-2)^n}}{2}$$

dir.

$${j_{k,n}}^2 - 4(-2)^n = (k^2 + 8)$$

olduğundan (3.21 den)

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{j_{k,n} \pm \sqrt{k^2+8} J_{k,n}}{2}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $r_1 \; ve \; r_2$ S matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$${r_1}^{\boldsymbol{n}} = \frac{j_{k,n} + \sqrt{k^2+8} J_{k,n}}{2} \; ve \; {r_2}^{\boldsymbol{n}} = \frac{j_{k,n} - \sqrt{k^2+8} J_{k,n}}{2}$$

$$J_{k,n} = \frac{{r_1}^{\boldsymbol{n}} - {r_2}^{\boldsymbol{n}}}{r_1 - r_2} \; ve \; j_{k,n} = {r_1}^{\boldsymbol{n}} + {r_2}^{\boldsymbol{n}}$$

olduğu yerine konularak görülür.

Teorem 4.1.3 (Somruk Srisawat ve ark., 2015)

(4.1) ile tanımlanan W matrisi olmak üzere n≥ 1 için

$$W^n = \begin{bmatrix} J_{k,2n+1} & 2J_{k,2n} \\ J_{k,2n} & 2J_{k,2n-1}, \end{bmatrix} \quad \text{dir.} \tag{4.4}$$

İspat:

Bu matrisin doğruluğu tümevarım metoduyla gösterilmiştir.

Teorem 4.1.3 ün sonucu olarak;

i) $\det W^n = 2^{2n}$ ve

$ii) J_{k,2n+1}J_{k,2n-1} - {J_{k,n}}^2 = 2^{2n-1}$ olduğu W ve W^n matrislerinin determinantları kullanılarak ispatlanmıştır.

5.k-JACOBSTHAL VE k-JACOBSTHAL LUCAS T MATRİSİ

Bu bölümde elemanları k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizilerinden oluşan T matrisi tanımlanmıştır. Öncelikle bir kare matris ve k-Jacobsthal sayı dizisi arasındaki ilişkiyi gösteren bir Lemma verilerek ispatı yapıldı. Bu Lemmanın sonucu olarak ise kare matris yerine daha önceden Somruk Srisawat ve ark. (2015) tarafından tanımlanan k-Jacobsthal S matrisini alabileceğimiz ifade edildi. Daha sonra tanımladığımız T matrisini kullanarak k-Jacobsthal ve k-Jaobsthal Lucas sayı dizileri arasındaki ilişkileri gösteren Lemmalar verilerek ispatlandı.

Lemma 5.1

X kare matris ve $X^2 = Xk + 2I$ olmak üzere;

$\forall n \in Z$ için $X^n = J_{k,n}X + 2J_{k,n-1}I$ (5.1)

dir.

(Aydın ve Köse, 2019)

İspat: Lemmanın ispatını Tümevarım metodunu kullanarak yapacağız.

- n=1 için $X=J_{k,1}X + 2J_{k,0}I$

  $X = X$ doğru olur.
- n=m için doğruluğunu kabul edelim. $X^m = J_{k,m}X + 2J_{k,m-1}I$
- n=m+1 için $X^{m+1} = J_{k,m+1}X + 2J_{k,m}I$ olduğunu göstermeliyiz.

$X^{m+1} = X^m X = \left(J_{k,m}X + 2J_{k,m-1}I\right)X = X^2 J_{k,m} + 2XJ_{k,m-1}$

olduğundan ve

$(X^2 = Xk + 2I)$ olduğu (Lemma 5.1) de verildiğinden,

$X^m X = Xk + 2IJ_{k,m} + 2XJ_{k,m-1}$

$= X\left(kJ_{k,m} + 2J_{k,m-1}\right) + 2IJ_{k,m}$

$= J_{k,m+1}X + 2J_{k,m}I$

dir.

Böylece ispat pozitif tam sayılar için gösterilmiş olur. Aynı zamanda, Lemma 5.1. $\forall n \in Z$ için geçerli olduğundan ifadenin negatif tam sayılar için de doğruluğu yani,

$X^{-n} = J_{k,-n}X + 2J_{k,-n-1}I$

olduğu ispatlanmalıdır.

Lemma 5.1 den;

$X^2 = Xk + 2I$ ise $-X^{-1} = \left(\frac{kI-X}{2}\right) = Y$ dersek

$$Y^2 = (-X^{-1})^2 = \left(\frac{kI-X}{2}\right)^2 = \left(\frac{kY}{2} + \frac{I}{2}\right)$$

$$Y^2 = \frac{J_{k,2}Y + J_{k,1}I}{2}$$

dir.

$$Y^4 = \left(\frac{kY}{2} + \frac{I}{2}\right)^2 = \frac{J_{k,4}Y + J_{k,3}I}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$Y^n = \frac{YJ_{k,n} + J_{k,n-1}I}{2^{n-1}}$$

$$(-X^{-1})^n = \frac{YJ_{k,n} + J_{k,n-1}I}{2^{n-1}}$$

$$(-1)^{-n}X^{-n} = \frac{\left(\frac{kI-X}{2}\right)J_{k,n} + J_{k,n-1}I}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{J_{k,n}kI - XJ_{k,n} + 2J_{k,n-1}I}{2^n}$$

$$= \frac{J_{k,n+1}I - XJ_{k,n}}{2^n} \quad \left.\begin{matrix} J_{k,n} = -J_{k,-n}(-2)^{-n} \\ J_{k,-n} = -J_{k,n}(-2)^{-n} \end{matrix}\right\} olduğundan$$

$$X^{-n} = \frac{-(-2)^{n+1}J_{k,-n-1}I + X(-2)^nJ_{k,-n}}{(-2)^n}$$

$X^{-n} = J_{k,-n}X + 2J_{k,-n-1}I$ elde ederiz.

Böylece negatif tamsayılar için de ispat verilmiş olur.

Sonuç 5.1

Somruk Srisawat ve ark. (2015) tarafından

$$S=\begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S^n = \begin{bmatrix} J_{k,n+1} & 2J_{k,n} \\ J_{k,n} & 2J_{k,n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matris Lemma (5.1) i sağlar. Kare matris yerine S matrisini alabiliriz.

Sonuç 5.2

$$T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} k & k^2+8 \\ 1 & k \end{bmatrix} \qquad T^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} j_{k,n} & (k^2+8)J_{k,n} \\ J_{k,n} & j_{k,n} \end{bmatrix} \quad n \geq 0 \qquad (5.3)$$

şeklinde tanımladığımız T matrisi de yukarıda Lemma (5.1) i sağlar. Şimdi bu T matrisinin doğruluğunu gösterelim.

İspat:

- n=1 için $T^1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} j_{k,1} & (k^2+8)J_{k,1} \\ J_{k,1} & j_{k,1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} k & k^2+8 \\ 1 & k \end{bmatrix}$ doğru
- n=m için doğru olduğunu kabul edelim;

$$T^m = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} j_{k,m} & (k^2+8)J_{k,m} \\ J_{k,m} & j_{k,m} \end{bmatrix}$$

- n=m+1 için doğru olduğunu gösterelim;

$$T^{m+1} = T^m T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} j_{k,m} & (k^2+8)J_{k,m} \\ J_{k,m} & j_{k,m} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} k & k^2+8 \\ 1 & k \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} kj_{k,m} + (k^2+8)J_{k,m} & (k^2+8)j_{k,m} + k(k^2+8)J_{k,m} \\ kJ_{k,m} + j_{k,m} & (k^2+8)J_{k,m} + kj_{k,m} \end{bmatrix}$$

(3.4.2) ile verilen ifadelerden;

$T^{m+1} = \begin{bmatrix} j_{k,m+1} & (k^2+8)J_{k,m+1} \\ J_{k,m+1} & j_{k,m+1} \end{bmatrix}$ elde edilir.

Böylece T matrisinin doğruluğunu göstermiş olduk. (Aydın ve Köse, 2019)

Lemma 5.2

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ şeklinde A matrisini alalım. $K = T + (T - kI) = \begin{bmatrix} 0 & (k^2+8) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$KA = \begin{bmatrix} b & a(k^2+8) \\ d & c(k^2+8) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Bu Lemmayı k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileriyle ilgili toplam formüllerini ispatlarken kullanacağız. (Aydın ve Köse, 2019)

Lemma 5.3

$$\forall n \in Z \; için \; , {j_{k,n}}^2 - (k^2+8){J_{k,n}}^2 = (-2)^n 4 \quad (5.5)$$

dir.(Aydın ve Köse, 2019)

İspat:

İspatta T matrisini kullanacağız.

$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} k & k^2+8 \\ 1 & k \end{bmatrix}$ $\det T = -2, detT^n = detT^n = (-2)^n$

Şimdi T^n matrisinin determinantına bakalım;

$$T^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} j_{k,n} & (k^2+8)J_{k,n} \\ J_{k,n} & j_{k,n} \end{bmatrix}$$

$$\det(T^n) = \begin{vmatrix} j_{k,n} & (k^2+8)J_{k,n} \\ J_{k,n} & j_{k,n} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\left({j_{k,n}}^2 - (k^2+8){J_{k,n}}^2\right) = (-2)^n$$

Böylece;

$${j_{k,n}}^2 - (k^2+8){J_{k,n}}^2 = (-2)^n 4$$

elde edilir.

Lemma 5.4

$\forall n, m \in Z \; için$

$$2j_{k,n+m} = j_{k,n}j_{k,m} + (k^2+8)J_{k,n}J_{k,m} \tag{5.6}$$

$$2J_{k,n+m} = J_{k,n}j_{k,m} + j_{k,m}J_{k,n} \tag{5.7}$$

dir.(Aydın ve Köse, 2019)

İspat:

$T^nT^m = T^{n+m}$ ifadelerinin karşılığı olan matrisleri yazarsak;

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} j_{k,n} & (k^2+8)J_{k,n} \\ J_{k,n} & j_{k,n} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} j_{k,m} & (k^2+8)J_{k,m} \\ J_{k,m} & j_{k,m} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} j_{k,n+m} & (k^2+8)J_{k,n+m} \\ J_{k,n+m} & j_{k,n+m} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} j_{k,n}j_{k,m} + (k^2+8)J_{k,n}J_{k,m} & (k^2+8)j_{k,n}J_{k,m} + (k^2+8)J_{k,n}j_{k,m} \\ j_{k,m}J_{k,n} + j_{k,n}J_{k,m} & (k^2+8)J_{k,m}J_{k,n} + j_{k,m}j_{k,n} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} j_{k,n+m} & (k^2+8)J_{k,n+m} \\ J_{k,n+m} & j_{k,n+m} \end{bmatrix}$$

İki matrisin eşitliğinden;

$$\frac{j_{k,n+m}}{2} = \frac{j_{k,n}j_{k,m} + (k^2+8)J_{k,n}J_{k,m}}{4}$$

$$2j_{k,n+m} = j_{k,n}j_{k,m} + (k^2+8)J_{k,n}J_{k,m}$$

olur.

$$\frac{J_{k,n+m}}{2} = \frac{j_{k,m}J_{k,n} + j_{k,n}J_{k,m}}{4}$$

$$2J_{k,n+m} = J_{k,n}j_{k,m} + j_{k,m}J_{k,n}$$

elde ederiz. Böylece istenilen ifadeler elde edilir.

Lemma 5.5

$\forall n, m \in Z \; için$

$$2(-2)^m J_{k,n-m} = J_{k,n}j_{k,m} - j_{k,n}J_{k,m} \tag{5.8}$$

$$2(-2)^m j_{k,n-m} = j_{k,m}j_{k,n} - (k^2+8)J_{k,m}J_{k,n} \tag{5.9}$$

dir.(Aydın ve Köse, 2019)

İspat:

$T^{n-m} = T^n(T^m)^{-1}$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} j_{k,n-m} & (k^2+8)J_{k,n-m} \\ J_{k,n-m} & j_{k,n-m} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} j_{k,n} & (k^2+8)J_{k,n} \\ J_{k,n} & j_{k,n} \end{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{(-2)^m}\begin{bmatrix} j_{k,m} & -(k^2+8)J_{k,m} \\ J_{k,m} & j_{k,m} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-2)^m}\begin{bmatrix} \frac{j_{k,n}j_{k,m} - (k^2+8)J_{k,n}J_{k,m}}{4} & \frac{-(k^2+8)j_{k,n}J_{k,m} + (k^2+8)J_{k,n}j_{k,m}}{4} \\ \frac{J_{k,n}j_{k,m} - j_{k,n}J_{k,m}}{4} & \frac{-(k^2+8)J_{k,n}J_{k,m} + j_{k,n}j_{k,m}}{4} \end{bmatrix}$$

Matrislerin birinci satır birinci sütün elemanlarını eşitlersek;

$2(-2)^m j_{k,n-m} = j_{k,m}j_{k,n} - (k^2+8)J_{k,m}J_{k,n}$

İkinci satır birinci sütün elemanlarını eşitlersek;

$2(-2)^m J_{k,n-m} = J_{k,n}j_{k,m} - j_{k,n}J_{k,m}$

olup ispat tamamlanmış olur.

Lemma 5.6 $\forall n, m \in Z$ olmak üzere;

$$j_{k,m}j_{k,n} = j_{k,n+m} + (-2)^m j_{k,n-m} \tag{5.10}$$

$$j_{k,m}J_{k,n} = J_{k,n+m} + (-2)^m J_{k,n-m} \tag{5.11}$$

dir. (Aydın ve Köse, 2019)

İspat:

Bu Lemmanın ispatında da tanımladığımız T matrisini kullanacağız.

$$T^{n+m} + (-2)^m T^{n-m} = \begin{bmatrix} \frac{j_{k,n+m}+(-2)^m j_{k,n-m}}{2} & \frac{(k^2+8)(J_{k,n+m}+(-2)^m J_{k,n-m})}{2} \\ \frac{J_{k,n+m}+(-2)^m J_{k,n-m}}{2} & \frac{j_{k,n+m}+(-2)^m j_{k,n-m}}{2} \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

$T^{n+m} + (-2)^m T^{n-m} = T^n[T^m + (-2)^m T^{-m}]$

Olduğu matrislerin çarpım özelliklerinden kolayca görülür. Şimdi bu ifadeyi yazarsak;

$$= \begin{bmatrix} \frac{j_{k,n}}{2} & \frac{(k^2+8)J_{k,n}}{2} \\ \frac{J_{k,n}}{2} & \frac{j_{k,n}}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{j_{k,m}}{2} & \frac{(k^2+8)J_{k,m}}{2} \\ \frac{J_{k,m}}{2} & \frac{j_{k,m}}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{(-2)^m}(-2)^m \begin{bmatrix} \frac{j_{k,m}}{2} & -\frac{(k^2+8)J_{k,m}}{2} \\ -\frac{J_{k,m}}{2} & \frac{j_{k,m}}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{j_{k,n}}{2} & \frac{(k^2+8)J_{k,n}}{2} \\ \frac{J_{k,n}}{2} & \frac{j_{k,n}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{k,m} & 0 \\ 0 & j_{k,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{j_{k,m}j_{k,n}}{2} & \frac{(k^2+8)J_{k,m}j_{k,n}}{2} \\ \frac{j_{k,m}J_{k,n}}{2} & \frac{j_{k,m}j_{k,n}}{2} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

(5.12) ve (5.13) ile ifade edilen matrislerin birinci satır birinci sütundaki elemanlarını eşitlersek;

$j_{k,m}j_{k,n} = j_{k,n+m} + (-2)^m j_{k,n-m}$

ve ikinci satır birinci sütundaki elemanları eşitlersek;

$j_{k,m}J_{k,n} = J_{k,n+m} + (-2)^m J_{k,n-m}$

elde edilir.

Şimdi ise k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin toplam formüllerini veren 2 teorem vereceğiz. Bu teoremleri de T matrisini kullanarak ispatlayacağız.

Teorem 5.1

$n \in N \;\; ve \; m, r \in Z$ olmak üzere $m \neq 0$

$$\sum_{j=0}^{n} j_{k,mj+r} = \frac{j_{k,r} - j_{k,mn+m+r} + (-2)^m (j_{k,mn+r} - j_{k,r-m})}{1 + (-2)^m - j_{k,m}} \tag{5.14}$$

ve

$$\sum_{j=0}^{n} J_{k,mj+r} = \frac{J_{k,r} - J_{k,mn+m+r} + (-2)^m (J_{k,mn+r} - J_{k,r-m})}{1 + (-2)^m - j_{k,m}} \tag{5.15}$$

dir. (Aydın ve Köse, 2019)

İspat: Bu teoremdeki amacımız k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas toplam formüllerindeki verilen ifadeleri T= $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} k & k^2+8 \\ 1 & k \end{bmatrix}$ matrisini kullanarak ispatlamaktır.

Öncelikle ;

$$I - (T^m)^{n+1} = (I - T^m) \sum_{j=0}^{n} (T^m)^j \tag{5.16}$$

olduğunu biliyoruz. Teoremi ispatlamak için $\det(I - T^m) \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi $(I - T^m)$ matrisinin determinantına bakalım.

$$(I - T^m) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{j_{k,m}}{2} & \frac{-(k^2+8)J_{k,m}}{2} \\ -\frac{J_{k,m}}{2} & -\frac{j_{k,m}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det(I - T^m) = \left(1 - \frac{j_{k,m}}{2}\right)^2 - (k^2+8)\left(\frac{J_{k,m}}{2}\right)^2$$

$$= 1 - j_{k,m} + \frac{j_{k,m}}{4} - (k^2+8)\frac{J_{k,m}{}^2}{4}$$

$$= 1 - j_{k,m} + \frac{(j_{k,m})^2 - (k^2+8)(J_{k,m})^2}{4}$$

$$\det(I - T^m) = 1 - j_{k,m} + (-2)^m \neq 0 \tag{5.17}$$

dır.

(5.16) ile gösterilen eşitliğin her iki tarafını soldan $(I - T^m)^{-1}$, sağdan T^r ile çarparsak;

$(I - T^m)^{-1}(I - (T^m)^{n+1})T^r = \sum_{j=0}^{n} T^{mj+r}$

$$\sum_{j=0}^{n} T^{mj+r} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j_{k,mj+r} & \frac{(k^2+8)}{2}\sum_{j=0}^{n} J_{k,mj+r} \\ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} J_{k,mj+r} & \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j_{k,mj+r} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

elde edilir.

$m \neq 0$ için ;

$(I - T^m)^{-1}$ i bulalım.

D=$1 + (-2)^m \ - j_{k,m} \neq 0$ alalım.

$$(I - T^m)^{-1} = \frac{1}{1 + (-2)^m \ - j_{k,m}} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j_{k,m}}{2} & \frac{(k^2+8)J_{k,m}}{2} \\ \frac{J_{k,m}}{2} & -\frac{j_{k,m}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(I - T^m)^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j_{k,m}}{2} & \frac{(k^2+8)J_{k,m}}{2} \\ \frac{J_{k,m}}{2} & -\frac{j_{k,m}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(I - T^m)^{-1} = \frac{1}{D}\left[\left(1 - \frac{j_{k,m}}{2}\right) I + \frac{J_{k,m}}{2} K\right] \quad (5.19)$$

K matrisinin Lemma 5.2 de (5.4) ile ifade edilen eşitlikte $K = \begin{bmatrix} 0 & (k^2+8) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

olduğunu vermiştik.(5.19) ile ifade edilen eşitliğin her iki tarafını sağdan

$(T^k - T^{mn+m+k})$ ile çarparsak;

$$(I - T^m)^{-1}(T^k - T^{mn+m+k}) = \frac{1}{D}\left[\left(1 - \frac{j_{k,m}}{2}\right) I + \frac{J_{k,m}}{2} K\right](T^k - T^{mn+m+k})$$

$$= \frac{1}{D}\left[\left(1 - \frac{j_{k,m}}{2}\right)(T^k - T^{mn+m+k}) + \frac{J_{k,m}}{2} K(T^k - T^{mn+m+k})\right] \quad (5.20)$$

olur. Şimdi $K(T^k - T^{mn+m+k})$ yı bulalım.

Lemma 5. 2 den;

$$K(T^k - T^{mn+m+k}) = \begin{bmatrix} \frac{(k^2+8)(J_{k,r} - J_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(k^2+8)(j_{k,r} - j_{k,mn+m+r})}{2} \\ \frac{(j_{k,r} - j_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(k^2+8)(J_{k,r} - J_{k,mn+m+r})}{2} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

dir.

(5.21) ile elde ettiğimiz eşitliği (5.20) de yerine yazarsak;

$$(I - T^m)^{-1}(T^k - T^{mn+m+k}) =$$

$$\frac{1}{D}\left\{\left(1-\frac{j_{k,m}}{2}\right)\begin{bmatrix}\frac{(j_{k,r}-j_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(k^2+8)(J_{k,r}-J_{k,mn+m+r})}{2}\\ \frac{(J_{k,r}-J_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(j_{k,r}-j_{k,mn+m+r})}{2}\end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.\frac{J_{k,m}}{2}\begin{bmatrix}\frac{(k^2+8)(J_{k,r}-J_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(k^2+8)(j_{k,r}-j_{k,mn+m+r})}{2}\\ \frac{(j_{k,r}-j_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(k^2+8)(J_{k,r}-J_{k,mn+m+r})}{2}\end{bmatrix}\right\} \qquad (5.22)$$

matrisini elde ederiz.

(5.19) ile ifade edilen matris ile (5.22) ile ifade edilen matrisi eşitlersek;

ikinci satır birinci sütün elemanlarının eşitliğinden;

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} J_{k,mj+r} = \frac{1}{D}\left[\left(1-\frac{j_{k,m}}{2}\right)\frac{(J_{k,r}-J_{k,mn+m+r})}{2} + \frac{J_{k,m}}{2}\frac{(j_{k,r}-j_{k,mn+m+r})}{2}\right]$$

$$\sum_{j=0}^{n} J_{k,mj+r} = \frac{1}{D}\left[J_{k,r} - J_{k,mn+m+r} - \frac{j_{k,m}J_{k,r}+j_{k,m}J_{k,mn+m+r}}{2} + \frac{J_{k,m}j_{k,r}-J_{k,m}j_{k,mn+m+r}}{2}\right]$$

düzenlersek Lemma 5.5 den;

$$\sum_{j=0}^{n} J_{k,mj+r} = \frac{1}{D}\left[J_{k,r} - J_{k,mn+m+r} - \frac{j_{k,m}J_{k,r}+J_{k,m}j_{k,r}}{2} + \frac{j_{k,m}J_{k,mn+m+r}-J_{k,m}j_{k,mn+m+r}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{D}\left[J_{k,r} - J_{k,mn+m+r} + (-2)^m(J_{k,mn+r} - J_{k,r-m})\right]$$

olur.

Son durumda

$$\sum_{j=0}^{n} J_{k,mj+r} = \frac{J_{k,r} - J_{k,mn+m+r} + (-2)^m(J_{k,mn+r} - J_{k,r-m})}{1 + (-2)^m - j_{k,m}}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Benzer şekilde eşitlediğimiz matrislerin ikinci satır ikinci sütün elemanlarını eşlersek;

$$\sum_{j=0}^{n} j_{k,mj+r} = \frac{j_{k,r} - j_{k,mn+m+r} + (-2)^m(j_{k,mn+r} - j_{k,r-m})}{1 + (-2)^m - j_{k,m}}$$

diğer formülü de ispatlamış oluruz.

Teorem 5.2 $n \in N \; ve \; m, r \in Z$ olmak üzere;

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j_{k,mj+r} = \frac{j_{k,r}+j_{k,mn+m+r}+(-2)^m j_{k,r-m}+j_{k,mn+2m+r}}{1+(-2)^m+j_{k,m}} \tag{5.23}$$

ve

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j J_{k,mj+r} = \frac{J_{k,r}+J_{k,mn+m+r}+(-2)^m J_{k,r-m}+J_{k,mn+2m+r}}{1+(-2)^m+j_{k,m}} \tag{5.24}$$

dir. (Aydın ve Köse, 2019)

İspat:

Bu teoremi ispat etmek için Teorem 5.1 de olduğu gibi T matrisini kullanacağız. Teoremi n'yi çift ve tek doğal sayı alarak iki kısımda ispat edeceğiz.

n çift doğal sayı olsun;

$$I + (T^m)^{n+1} = (I + T^m)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j (T^m)^j \tag{5.25}$$

olduğunu biliyoruz.

$\det(I + T^m)$ e bakalım.

$$|I + T^m| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{j_{k,m}}{2} & \frac{(k^2+8)J_{k,m}}{2} \\ \frac{J_{k,m}}{2} & 1 + \frac{j_{k,m}}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(1 + \frac{j_{k,m}}{2}\right)^2 - (k^2+8)\left(\frac{J_{k,m}}{2}\right)^2$$

Lemma 5.3 den;

$$= 1 + j_{k,m+}\frac{{j_{k,m}}^2 - (k^2+8){J_{k,m}}^2}{4}$$

$$\det(I + T^m) = 1 + j_{k,m+}(-2)^m \neq 0 \tag{5.26}$$

(6.11) ifadesinin her iki tarafını soldan $(I + T^m)^{-1}$ sağdan T^r ile çarparsak;

$$(I + T^m)^{-1}(I + (T^m)^{n+1}) = \sum_{j=0}^{n}(-2)^j T^{mj+r} \tag{5.27}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ ve sol kısımlarını ispatlayıp birbirine eşitleyelim.

Öncelikle eşitliğin sağ tarafını açık bir şekilde yazalım;

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j T^{mj+r} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j_{k,mj+r} & \frac{(k^2+8)}{2}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j J_{k,mj+r} \\ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j J_{k,mj+r} & \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j_{k,mj+r} \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

d=1+$j_{k,m+}(-2)^m$ olsun. (5.29)

Şimdi eşitliğin sağ tarafına karşılık gelen matrisi açık bir şekilde yazalım;

$$(I+T^m)^{-1}=\frac{1}{d}\begin{bmatrix}1+\frac{j_{k,m}}{2} & -\frac{(k^2+8)J_{k,m}}{2}\\ -\frac{J_{k,m}}{2} & 1+\frac{j_{k,m}}{2}\end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Lemma 5.2 den $K=\begin{bmatrix}0 & (k^2+8)\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$(I+T^m)^{-1}=\frac{1}{d}\left[\left(1+\frac{j_{k,m}}{2}\right)I-\frac{J_{k,m}}{2}K\right] \quad (5.31)$$

dir.

(5.32) eşitliğinin her iki tarafını sağdan (T^r+T^{mn+m+r}) ile çarparsak

$$(I+T^m)^{-1}(T^r+T^{mn+m+r})=\frac{1}{d}\left[\left(1+\frac{j_{k,m}}{2}\right)I-\frac{J_{k,m}}{2}K\right](T^r+T^{mn+m+r}) \quad (5.32)$$

olur. Bu eşitlikte de

$K(T^r+T^{mn+m+r})$ yi bulalım.

Lemma 5.2 den (5.4) ile ifade edilen eşitlikten;

$$K(T^r+T^{mn+m+r})=\begin{bmatrix}\frac{(k^2+8)(J_{k,r}-J_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(k^2+8)(j_{k,r}-j_{k,mn+m+r})}{2}\\ \frac{(j_{k,r}-j_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(k^2+8)(J_{k,r}-J_{k,mn+m+r})}{2}\end{bmatrix} \quad (5.33)$$

elde edilir.

(5.33) ile elde edilen ifadeyi (5.32) de yerine yazarsak;

$$(I+T^m)^{-1}(T^r+T^{mn+m+r})=\frac{1}{d}\left[\left(1+\frac{j_{k,m}}{2}\right)(T^r+T^{mn+m+r})-\frac{J_{k,m}}{2}K(T^r+T^{mn+m+r})\right]$$

$$=\frac{1}{d}\left(1+\frac{j_{k,m}}{2}\right)\begin{bmatrix}\frac{(j_{k,r}+j_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(k^2+8)(J_{k,r}+J_{k,mn+m+r})}{2}\\ \frac{(J_{k,r}+J_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(j_{k,r}+j_{k,mn+m+r})}{2}\end{bmatrix}$$

$$-\frac{J_{k,m}}{2}\begin{bmatrix}\frac{(k^2+8)(J_{k,r}-J_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(k^2+8)(j_{k,r}-j_{k,mn+m+r})}{2}\\ \frac{(j_{k,r}-j_{k,mn+m+r})}{2} & \frac{(k^2+8)(J_{k,r}-J_{k,mn+m+r})}{2}\end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Son olarak (5.28) ve (5.34) ile ifade edilen matrislerin birinci satır birinci sütün elemanlarını eşitlersek;

$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j_{k,mj+r}=\frac{1}{d}\left[\left(1+\frac{j_{k,m}}{2}\right)(j_{k,r}+j_{k,mn+m+r})-\frac{J_{k,m}}{2}(k^2+8)(J_{k,r}-J_{k,mn+m+r})\right]$ olur.

$$=\frac{1}{d}\left[j_{k,r}+j_{k,mn+m+r}+\frac{j_{k,m}j_{k,r}+j_{k,m}j_{k,mn+m+r}}{2}-\frac{(k^2+8)\left(J_{k,m}J_{k,r}+J_{k,m}J_{k,mn+m+r}\right)}{2}\right]$$

Lemma 5.4 ve Lemma 5.5 den;

$$= \frac{1}{d}\left[j_{k,r} + j_{k,mn+m+r} + \frac{j_{k,m}j_{k,r}-(k^2+8)J_{k,m}J_{k,r}}{2} + \frac{j_{k,m}j_{k,mn+m+r}+(k^2+8)J_{k,m}J_{k,mn+m+r}}{2}\right]$$

$$= \frac{j_{k,r}+j_{k,mn+m+r}+(-2)^m j_{k,r-m}+j_{k,mn+2m+r}}{1+(-2)^m+j_{k,m}}.$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j_{k,mj+r} = \frac{j_{k,r}+j_{k,mn+m+r}+(-2)^m j_{k,r-m}+j_{k,mn+2m+r}}{1+(-2)^m+j_{k,m}}. \quad (5.35)$$

Şeklinde teoremin ilk kısmı k-Jacobsthal Lucas sayıları için elde edilir.

Benzer şekilde ikinci kısmı için (5.28) ve (5.34) ile ifade edilen matrislerin ikinci satır birinci sütun elemanlarını eşitlersek;

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j J_{k,mj+r} = \frac{J_{k,r}+J_{k,mn+m+r}+(-2)^m J_{k,r-m}+J_{k,mn+2m+r}}{1+(-2)^m+j_{k,m}} \quad (5.36)$$

k-Jacobsthal sayıları için de elde edilir.

Şimdi tek sayılar için elde edelim.

n tek doğal sayı olsun. n tek doğal sayı ise n-1 çifttir. İspatladığımız toplam formülünde n yerine n-1 yazalım.

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j_{k,mj+r} = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j j_{k,mj+r} - j_{k,mn+r} \qquad dir.$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j_{k,mj+r} = \frac{j_{k,r}+j_{k,m(n-1)+m+r}+(-2)^m j_{k,r-m}+j_{k,m(n-1)+2m+r}}{1+(-2)^m+j_{k,m}} - j_{k,mn+r}$$

$$= \frac{j_{k,r} + j_{k,mn+r}+(-2)^m j_{k,r-m}+j_{k,mn+m+r}-j_{k,mn+r}-(-2)^m j_{k,mn+r} - j_{k,mn+r}j_{k,m}}{1 + (-2)^m + j_{k,m}}$$

Lemma 5.6 dan;

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j_{k,mj+r} = \frac{j_{k,r}+(-2)^m(j_{k,r-m}-j_{k,mn+r}+j_{k,mn+r-m})}{1+(-2)^m+j_{k,m}}$$

elde edilir.

Benzer şekilde k-Jacobsthal sayılar için de Lemma 5.6 kullanılarak;

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j J_{k,mj+r} = \frac{J_{k,r}+(-2)^m(J_{k,r-m}-J_{k,mn+r}+J_{k,mn+r-m})}{1+(-2)^m+j_{k,m}}$$

elde edilir.

Teorem 5.2 k-Jacobsthal sayılar için n tek sayı olduğunda ispatlanmış olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında genelleştirilmiş sayı dizilerinden olan k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizileriyle ilgili birçok özellik incelenmiştir. Ayrıca bu sayı dizilerinin matris temsillerine yer verilmiş ve birtakım özellikler için sağlandığı gösterilmiştir. Sayı dizilerinin matris temsillerinden faydalanılarak sayı dizileri için sağlanan birçok özelliğin sağladığı gösterilebilir.

KAYNAKLAR

Aydın, T. ve Köse, H., 2019, k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas Numbers Sums by Matrix Methots,*Ereğli International Science and Academic Congress*,Ereğli,103.

Aydın, N. ve Ayran,A., 2017, Mathematics and Nature, *Journal of Awareness(JOA),* Special,6, 509-514.

Baykut, V. ve Kıvanç, F.,2004, Pivolka,Sayı:13,Sayfa:3

Bolat, C.2008, k-Fibonacci ve k-Lucas Sayılarının Özellikleri ve Uygulamaları(Yüksek Lisans Tezi),Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya,(1-10),(14-23).

Campos, H., Catarino,P., AireS,A.P., Vasco, P., Borgers, A., 2014, On Some İdentities for k-Jacobsthal Lucas Numbers, *İnt.Journal of Math. Analysis,* Vol.8,no.10,489-494.

Cerin, Z., 2007, Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers, *Journal of Integer Sequences,*Vol.10, Art,cle 07.2.5.

Demirtürk, B., 2010,Fibonacci and Lucas Sums by Matrix Methods, *International Mathematical Forum,*5,no.3,99-107.

Falcon, S., ve Plaza A., 2007, On the Fibonacci k-numbers,Chaos, *Solitions and Fractals,* 32,1615-1624.

Falcon, S., 2011, On the k-Lucas Numbers, *Int.J.Contempt Math. Sciences,*Vol.6, no.21, 1039-1050.

Falcon, S.,2014, On The k-Jacobsthal Numbers, *American Rewiew of Mathematics and Statistics,* Vol.2, No.1, 67-77

Horadam, A.F., 1965,Generating functions for Powers of a certain generalized sequence of numbers, *Duke Math.J.*,32,437-446.

Horadam, A.F., 1996, Jacobsthal Representation Numbers, *The Fibonacci Quarterly,* 34,40-54

Jhala,D.,Sisodiya K., Rathore, G.P.S.,2013, On Some Identities for k-Jacobsthal Number, *Int. Journal of math.Analysis.*Vol.7, no.12,551-556.

Jhala,D. and Rathore, G.P.S, 2014,Some Properties of the k-Jacobsthal Lucas Sequence, *International Journal of Science and Engineering Technology, (IJMSET),*ISSN 2349-3755, Volume 1, Issue 3, 87-92.

Koshy,T.,2001,Fibonacci and Lucas Numbers with Applications,*John Wiley&Sons,*New York.

Kutlu,O.,2011,Altın Oran“Evrenin Matematiği”http://www.bilgicik.com/yazi/altin-oran-evrenin-matematiği/[Ziyaret Tarihi:10.05.2019]

Silvester, J.R.,1979, Fibonacci Properties by Matrix Methods,*The Mathematical Gazette,*Vol.63, no.425, 188-191

Srisawat, S., Sriprad, W., Sthityanak, O., 2015, On the k-Jacobsthal Numbers by Matrix Methods, *Science and Technology Rmutt Journal,* vol:5, no:1, 70-76

Uygun, S. ve Eldoğan, H., 2016(a), k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas Matrix Sequences, *International mathematical Forum,*Vol.11, no:3, 145-154.

Uygun, S. ve Eldoğan, H., 2016(b), Properties of k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas Sequences,*Gen.Math.Notes,*Vol.36, No.1, 34-47.

Vajda, S., 1989, Fibonacci and Lucas and The Golden Section, *Ellis Horwood Limited,* Chister, England.

Yosma, Z.2008, Fibonacci ve Lucas Sayıları(Yüksek Lisans Tezi),Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Tuğba AYDIN
Uyruğu : T.C
Doğum Yeri ve Tarihi : SAMSUN/Çarşamba 06.06.1990
Telefon : 05413644058
e-mail : aydintugba156@gmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı	İlçe	İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Çarşamba Anadolu Lisesi	Çarşamba	SAMSUN	2008
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi	Selçuklu	KONYA	2013
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi	Selçuklu	KONYA	2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2015	MEB	Matematik Öğretmeni
2017	MEB	Matematik Öğretmeni
2018	Pusula Özel Öğretim Kursu	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER

İngilizce