T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SERİSİ MODELLERİ ÜZERİNE BİR SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Tufan ÖZEK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
Konya, 2010

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SERİSİ MODELLERİ ÜZERİNE BİR SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Tufan ÖZEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu tez ... / … / 2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

.....	.....	.....
Yrd.Doç.Dr.İsmail KINACI	DoçDr.Aşır GENÇ	Doç.Dr.M.Fedai KAYA
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAMAN SERİSİ MODELLERİ ÜZERİNE BİR SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Tufan ÖZEK

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr.İsmail KINACI

2010, 56 Sayfa

Jüri: Doç.Dr. Aşır GENÇ

Doç.Dr. M.Fedai KAYA

Yrd.Doç.Dr.İsmail KINACI

Bu tez çalışmasında gözlenmiş bir zaman serisi için bir başlangıç modelinin belirlenmesinde kullanılan çeşitli grafikler irdelenmiştir. İrdeleme için çeşitli zaman serisi modellerinden simülasyonla üretilen seriler göz önüne alınmıştır ve elde edilen seri için çeşitli grafikler oluşturularak bir başlangıç model yada modeller sınıfı belirlenmeye çalışılmıştır. Ayrıca bir zaman serisi için model belirlemede oldukça yararlı olan grafiksel özellikler farklı zaman serisi modelleri için incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal zaman serisi modelleri, Doğrusal olmayan zaman serisi modelleri, Simülasyon.

ABSTRACT

Master Thesis

A SIMULATION STUDY ON TIME SERIES MODELS

Tufan ÖZEK

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

Supervisor:Ass.Prof.Dr. İsmail KINACI

2010, 56 Pages

Jury: Assoc.Prof.Dr. Aşır GENÇ

Assoc.Prof.Dr. M.Fedai KAYA

Ass.Prof.Dr. İsmail KINACI

In this thesis, it is investigated some graphs to determine the initial model for a time series. Various series generated from time series models via simulation are considered for investigation and it is tried to determine an initial model or model class for generated series by using various graphs. Moreover, it is investigated graphical properties of different time series models.

Key Words: Linear time series models, Nonlinear time series models, Simulation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç.Dr. İsmail KINACI'ya, çalışmamda yardımcı olan hocam Sayın Doç.Dr. Coşkun KUŞ'a, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen arkadaşım Sayın Öğr. Gör. Muhammet KIZIL'a ve İngilizce öğretmeni arkadaşım Sayın Serkan DALDAL'a teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Muhtemel Trend Şekilleri..……..5

Şekil 1.2. Deterministik Trend (I ve II) ve Stokastik Trend (III)…...……..5

Şekil 3.1. Zaman serisi modelinin belirlenme süreci ……...20

Şekil 4.1. $j=1$ için X_t serisinin yönlendirilmiş saçılım grafiği……..……....29

Şekil 5.1. X_{1t} serisinin grafiği……30

Şekil 5.2. X_{1t} serisinin ACF ve PACF grafikleri…….……..31

Şekil 5.3. X_{2t} serisinin grafi…….…….32

Şekil 5.4. X_{2t} serisinin ACF ve PACF grafikleri……..…..32

Şekil 5.5. Y_t serisinin grafiği…….…….33

Şekil 5.6. Y_t serisinin ACF ve PACF grafiği……..….33

Şekil 5.7. X_{3t} serisinin grafiği……..….34

Şekil 5.8. X_{3t} serisinin ACF ve PACF grafiği……...…35

Şekil 5.9. X_{4t} serisinin grafiği……..…..36

Şekil 5.10. X_{4t} serisinin ACF ve PACF grafiği……..…...36

Şekil 5.11. X_{5t} serisinin grafiği……..……37

Şekil 5.12. X_{5t} serisinin ACF ve PACF grafiği……..…….….38

Şekil 5.13. X_{6t} serisinin grafiği…….....39

Şekil 5.14. X_{6t} serisinin ACF ve PACF grafiği…….....39

Şekil 5.15. X_{7t} serisinin grafiği……..…40

Şekil 5.16. X_{7t} serisinin ACF ve PACF grafiği……..…...40

Şekil 5.17. X_{8t} serisinin grafiği……..…41

Şekil 5.18. X_{8t} serisinin ACF ve PACF grafiği…….……..…42

Şekil 5.19. X_{1t} serinin grafiği……..……..43

Şekil 5.20. X_{1t} serisinin ACF ve PACF grafikleri…….……..…43

Şekil 5.21. X_{1t-1}'e karşı X_{1t}'nin nokta grafiği……..……..44

Şekil 5.22. X_{1t-1}'e karşı X_{1t}'nin yönlendirilmiş saçılım grafiği……..…45

Şekil 5.23. $\gamma = 100$ için g fonksiyonunun $X_{1t-1} - c$'ye göre grafiği…….46

Şekil 5.24. X_{2t} serinin grafiği……...46

Şekil 5.25. $\gamma = 1$ ve $\gamma = 100$ için g fonksiyonunun $X_{t-1} - c$'ye göre grafiği.....47

Şekil 5.26. X_{2t-1}'e karşı X_{2t}'nin nokta grafiği……..48

Şekil 5.27. X_{2t-1}'e karşı X_{2t}'nin yönlendirilmiş saçılım grafiği…….....48

Şekil 5.28. X_{3t} serisinin grafiği……...49

Şekil 5.29. $X_{3,t-1}$'e karşı X_{3t}'nin nokta grafiği……..49

Şekil 5.30. X_{4t} serisinin grafiği……..50

Şekil 5.31. $X_{4,t-1}$'e karşı X_{4t}'nin nokta grafiği…….51

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 4
2.1. Zaman Serisi 4
2.2. Zaman Serisinin Bileşenleri 4
2.3. Durağanlık 6
2.3.1. Güçlü Durağanlık 7
2.3.2. Zayıf Durağanlık 7
2.4. Otokovaryans ve Otokorelasyon Fonksiyonu 8
2.5. Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu 8
2.6. Beyaz Gürültü Serisi 9
3. DOĞRUSAL ZAMAN SERİSİ MODELLERİ 10
3.1. Hareketli Ortalama (MA) Modelleri 10
3.2. Otoregresif (AR) Modeller 13
3.3. Otoregresif Hareketli Ortalama (ARMA) Modelleri 16
3.4. Bütünleşik Otoregresif Hareketli Ortalama (ARIMA) Modelleri 17
3.5. Model Teşhisi 19
3.5.1. Model Belirleme Süreci (Box-Jenkins Metodolojisi) 19
4. DOĞRUSAL OLMAYAN ZAMAN SERİSİ MODELLERİ 21
4.1. Eşiksel Otoregresif (TAR) Modeller 21
4.1.1. Yapısal parametrelerin seçimi 24
4.2. Düzgün Geçişli (Smoothing Transition) Otoregresif (STAR) Modeller 25
4.3. Değişen Varyans Koşullu Otoregresif (ARCH) Modeller 27
4.4. Lineer Olmayan Yapıların Teşhisi 29
5. SİMÜLASYON 30
5.1. Doğrusal Zaman Serisi Modelleri 30
5.2. Doğrusal Olmayan Zaman Serisi Modelleri 42
5.2.1. STAR Modelleri 43
5.2.2. TAR Modelleri 49
6. SONUÇ 52
KAYNAKLAR 53

1. GİRİŞ

Bir zaman serisi, zaman içinde periyodik (saatlik, günlük, aylık, yıllık vb.) olarak yapılan gözlemlerin bir dizisidir. Bilimin birçok sahasında zaman serisi verileri ile oldukça sık karşılaşılmaktadır. Örneğin bir nehrin günlük ortalama debisi, bir barajdaki saatlik su seviyesi, belli bir bölgedeki günlük ortalama sıcaklık değerleri ve yağış miktarları, yıllık işsizlik oranları, günlük borsa endeksi, aylık tüketici fiyat endeksi, günlük döviz kuru verileri, borsa endeksi gibi bir çok veri ile karşılaşılabilmektedir. Bu tür zamana bağlı verilerin analizi ile ilgili istatistiksel metodoloji "zaman serisi analizleri" olarak adlandırılmaktadır. Zaman serisi analizlerini lineer ve lineer olmayan zaman serisi analizleri olarak başlıca iki grupta incelemek mümkündür. Lineer zaman serisi analizleri, teori ve uygulamalarının kolay olması nedeniyle genelde tercih edilmesine rağmen bazı durumlarda lineer olmayan zaman serisi analizlerinin kullanılması kaçınılmaz olmaktadır.

Doğrusal olmayan zaman serisi modelleri kullanılarak yapılan bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir. Tong ve Lim (1980), yıllık güneş lekesi sayısı ve Kanada vaşak verisinde sergilenen asimetrik ve periyodik davranışın eşiksel otoregresif (TAR) model ile açıklanabileceğini göstermişlerdir. TAR modelleri aynı zamanda finansal ve ekonomik zaman serilerine de uygulanabilmektedir. Örneğin Tyssedal ve Tjostheim (1988), 1984 ile 1987 yılları arasındaki Hang Seng indeksinin analizinde TAR modellerini kullanmışlardır. Li ve Lam (1995), 1970 ile 1991 yılları arasındaki Hong Kong Hang Seng indeksindeki asimetrik davranışları belirlemişler ve bu seriyi lineer olmayan bir model olan eşiksel otoregresif (TAR) modeli ile modellemeye çalışmışlardır. Hall ve ark.(2001), 2001 tarihinde el nino fırtınası verilerini düzgün geçişli otoregresif (STAR) model ile karakterize ederek, birkaç ay öncesinden el nino olaylarını tahmin etmeye çalışmıştır.Kamarianakis ve Prastacos (2005), trafik akışı yapılarındaki lineer olmayan yapıyı STAR modeli ile çözümleyerek açıklamıştır. Narayan (2006), eşiksel otoregresif (TAR) modelini 1964:06 - 2003:04 tarihleri arasında amerikan aylık stok price verilerine uygulamış ve bu hisse fiyatlarının

davranışlarındaki lineer olmayan yapıyı bu model ile karakterize etmiştir. Shen ve Chiang (1999), faiz oranlarıyla enflasyonun yüksek ve düşük değerde olması arasındaki ilişkiyi TAR modeli ile karakterize etmiştir. Bu modelle beraber TAR modelinin vektörel bazda incelenmesinin de olumlu sonuçlar verdiğini görmüştür. Kotnik ve ark. (2009), ses üretiminin otoregresif modellemesine dayanan dijital modülasyon tekniği kullanarak en uygun GSM veri aktarımının yapılabilmesi için AR modelinden faydalanmıştır. Domain ve Louton (1997), gerçek ekonomik aktivite ile hisse senedi kazançları arasındaki ilişkiye yönelik lineer olmayan yapıyı TAR modeli ile karakterize etmiştir. Cheong (2009), ham petrol piyasasında tahmin ve modelleme yapmak için değişen varyans koşullu otoregresif (ARCH) modelini kullanmıştır. Batı teksas ve avrupa brent petrol pazarlarındaki fiyat değişkenliğini ARCH modeli ile karakterize ederek incelemiştir. Christodoulakis ve Satchell (2002), finansal varlık kazançlarının zamana göre değişkenlik arz eden modelin tahmin edilerek etkili ve doğru kararlar alınabilmesi için lineer olmayan yapıyı ARCH modeli ve iki değişkenli genelleştirilmiş ARCH (GARCH) modelleriyle karakterize etmiştir. Gooijer ve Anguera (2003), stokastik enflasyon modellerinin geliştirilmesi ve aylık enflasyon ve mevsimsel dalgalanmaların dinamiklerini SETAR modeli ile karakterize ederek tahminde bulunmuştur.

Zaman serisi analizlerinde en önemli amaç, serinin gözlendiği dönemden ileriki dönemlerdeki değerleri hakkında öngörüde bulunmaktır. Öngörülerin anlamlı ve güvenilir olabilmesi hiç şüphesiz ki zaman serisi için belirlenen modelin uygunluğuna bağlı olacaktır. Seri için belirlenen modelin yanlış bir model olması durumunda modelden elde edilen öngörüler de yanlış ve anlamsız olacaktır. Bir zaman serisi için serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarına bakılarak serinin otoregresif (AR) yada hareketli ortalama (MA) modeline uygun olup olmadığı belirlenebilmektedir. Ancak gerçekte, serinin AR yada MA modellerinden farklı bir modele uyması durumunda otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarına bakılarak karar verilememektedir. Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayıları zaman serisinin geçmiş dönemleri ile olan doğrusal ilişkisinin bir ölçüsü olduğu düşünüldüğünde serisinin geçmiş dönemleri ile olan

ilişkisinin doğrusal olmaması durumunda bu katsayılar bir anlam ifade etmemektedir.

Lineer olmayan bir zaman serisi modeli için parametre tahmini ve bazı istatistiksel sonuç çıkarımların elde edilmesi zor ve zahmetli uğraşlar gerektirdiği için, veriye lineer olmayan bir model belirlemeden önce verideki lineer olmayan yapının güçlü kanıtlarla ortaya konulması gerekmektedir. Bu tez çalışmada farklı seriler için, serilerdeki doğrusal ve doğrusal olmayan yapılar çeşitli grafiklerle belirlenmeye çalışılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, zaman serisi, zaman serisinin bileşenleri, durağanlık kavramı, otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonu ve beyaz gürültü süreci gibi tez içerisinde kullanılacak olan temel kavramları ele alınmıştır. Üçüncü bölümünde AR, MA, ARMA ve ARIMA gibi lineer zaman serisi modelleri tanıtılmıştır. Çalışmanın dördüncü bölümünde, lineer olmayan zaman serisi modellerinden TAR, SETAR, EAR, STAR, ARCH modelleri ve serideki lineer olmayan yapının teşhisi için kullanılabilecek grafikler tanıtılmıştır. Beşinci bölümde ise simülasyonla üretilen farklı seriler için serideki doğrusal ve doğrusal olmayan yapıların varlığı incelenerek üretilen seri için bir model belirlenmeye çalışılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Zaman Serisi

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı, T de bir indis kümesi olmak üzere, bir zaman serisi $\Omega \times T$ çarpım uzayından reel sayılara giden,

$$X(.\ ,.) : \Omega \times T \to \Re$$
$$(\omega, t) \to X(\omega, t)$$

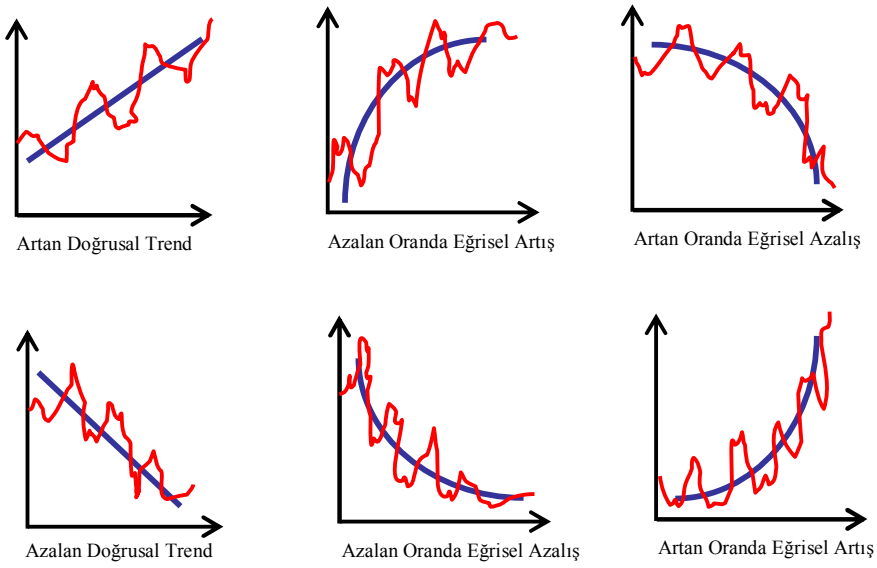
şeklinde bir fonksiyondur ve bu fonksiyon kısaca X_t ile gösterilecektir.

2.2. Zaman Serisinin Bileşenleri

Zaman serisi analizinde, farklı zaman noktalarındaki gözlemler arasındaki bağımlılık araştırılmaktadır. Bu bağlamda bir zaman serisini oluşturan bileşenlerin ortaya çıkartılması gerekmektedir. Bir zaman serisi için dört bileşen söz konusudur.

- Trend
- Devresel hareketler
- Mevsimsel değişiklikler
- Rassal değişiklikler

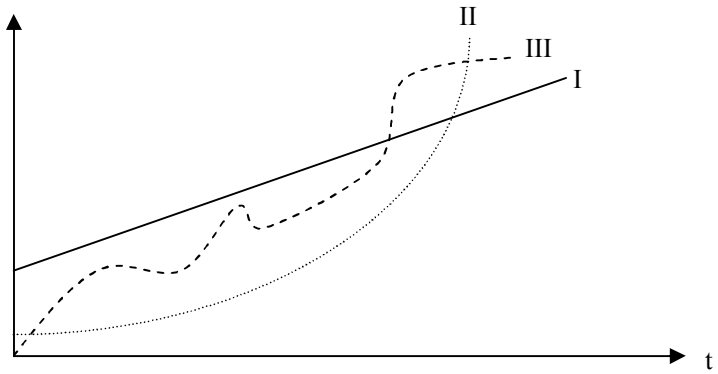
Trend, değişkenin uzun dönem hareketini ortaya koyan bir bileşendir. Trend etkisini üzerinde barındıran bir seri, zaman ilerledikçe artan veya azalan bir görünüm sergiler. Başka bir deyişle trend, zamanın artan ya da azalan bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon bazen zamana göre doğrusal olabildiği gibi bazen de doğrusal olmayan bir yapıda karşımıza çıkabilmektedir. Gerçekleşmesi mümkün olan birkaç eğrisel ve doğrusal trend şekilleri Şekil 1.1'de gösterilmiştir.



Şekil 1.1. Muhtemel trend şekilleri

Bir zaman serisindeki trend iki şekilde karşımıza çıkabilmektedir.

- Deterministik trend (sürekli artış veya sürekli azalış)
- Stokastik trend (zaman içinde genel eğilimi artış fakat bazen düşüşlerinde olduğu trenddir)



Şekil 1.2. Deterministik trend (I ve II) ve stokastik trend (III)

Uzun dönemli trend eğrisi etrafında artış ve azalışlarla oluşan dalgalanmalar devresel hareketler olarak adlandırılır. Devresel hareketleri belirlemede en çok kullanılan yöntem Box-Jenkins yöntemidir ve bu yöntem Kesim 3.5.1'de verilmiştir. Bir zaman serisinde 3 aylık, aylık veya haftalık gibi bir yıl içerisinde özel bir zaman

diliminde periyodik olarak meydana gelen artış veya azalış zaman serisindeki mevsimsel değişimleri meydana getirmektedir. Bir zaman serisindeki, trend, devresel hareketler ve mevsimsel değişimin arındırılmasından sonra bu seride geriye kalan değişimler rassal değişiklikler olarak adlandırılmaktadır.

Bir zaman serisi trend (T), devresel hareketler (C), mevsimsel değişiklikler (S) ve rassal değişiklikler (R) olarak dört bileşenden oluşmaktadır. Literatürde bir zaman serisi için, bu dört bileşene bağlı olarak aşağıdaki gibi gösterilen toplamsal model veya çarpımsal model olarak iki tür model ele alınmaktadır.

Toplamsal Model : $X = T + C + S + R$
Çarpımsal Model : $X = T.C.S.R$

Açıktır ki bu bileşenlerden biri belirlendiğinde, zaman serisinden bu bileşeni ayrıştırmak modelin toplamsallığına veya çarpımsallığına göre değişecektir. Örneğin toplamsal bir modelden trend

$$X - T = C + S + R$$

çarpımsal bir modelden trend

$$\frac{X}{T} = C.S.R$$

şeklinde ayrıştırılabilmektedir.

2.3. Durağanlık

Zaman serisi analizlerinde en önemli kavramlardan biri durağanlıktır. Bir zaman serisinin durağanlığı kısaca aşağıdaki şekilde tanımlanabilmektedir.

2.3.1. Güçlü Durağanlık

Bir X_t zaman serisi göz önüne alınsın. Eğer herhangi $h_1, h_2, \ldots, h_n \in T$ için $(X_t, X_{t+h_1}, \ldots, X_{t+h_n})$ nin ortak dağılımı sadece $h_1, h_2, \ldots, h_n$ değerlerine bağlı ve t'den bağımsız ise yani,

$$f(x_t, x_{t+h_1}, \ldots, x_{t+h_n}) = f(x_k, x_{k+h_1}, \ldots, x_{k+h_n}) \quad , \quad \forall t, k \in T$$

şeklinde $(X_t, X_{t+h_1}, \ldots, X_{t+h_n})$ ile $(X_k, X_{k+h_1}, \ldots, X_{k+h_n})$ rasgele vektörlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları aynı ise X_t zaman serisine güçlü durağandır denir.

2.3.2. Zayıf Durağanlık

Kesim 2.3.1'de tanımlanan güçlü durağanlık özelliğinin uygulamalarda sağlanabilmesi oldukça güçtür. Bu nedenle zaman serisi analizlerinde durağanlık kavramı genellikle, daha hafif koşullara sahip olan zayıf durağanlık biçiminde ele alınmaktadır. Bir zaman serisinin zayıf durağanlığı aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

X_t bir zaman serisi olmak üzere eğer,

i- $\forall t \in T$ için $E(X_t) = \mu < \infty$ (Yani serinin ortalaması zaman içinde sabittir)

ii- $\forall t, s \in T$ için $Cov(X_t, X_s)$ kovaryansı t ve s'ye değil sadece $|t-s|$ değerine bağlıdır

özellikleri sağlanıyorsa X_t zaman serisine zayıf durağandır veya kovaryans durağandır yada sadece durağandır denir (Akdi, 2003).

2.4. Otokovaryans ve Otokorelasyon Fonksiyonu

Zaman serisi analizlerinde otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonu en önemli araçlardan biridir. Bu fonksiyonlar hem zaman serisi modellerinin belirlenmesinde hem de durğanlığın araştırılmasında kullanılabilmektedir. Bir X_t zaman serisi için otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_h = Cov(X_t, X_{t+h}) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Eşitlik (2.1) ile verilen otokovaryans fonksiyonundan yararlanarak serinin otokorelasyon fonksiyonu ise,

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \frac{Cov(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+h})}} \tag{2.2}$$

olarak elde edilebilmektedir (Akdi, 2003).

2.5. Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu

Verilen bir X_t zaman serisi için, X_t'nin $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-h}$ üzerine regresyonundaki X_{t-h}'ın katsayısı *h.* kısmi otokorelasyon katsayısı olarak adlandırılmaktadır. Yani

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_h X_{t-h} + \varepsilon_t \tag{2.3}$$

modeli göz önüne alındığında *h.* kısmi otokorelasyon katsayısı ϕ_h olacaktır. (2.3) eşitliğini kullanarak kısmi otokorelasyonları hesaplamak zor ve zahmetli olmaktadır. Kısmi otokorelasyonları daha kolay olarak otokorelasyon katsayılarına bağlı olarak

$$P_h = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{h-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$P_h^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \cdots & \rho_h \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\phi(h) = \frac{\det(P_h^*)}{\det(P_h)} \tag{2.4}$$

eşitliğinden elde edilebilir (Akdi, 2003).

2.6. Beyaz Gürültü Serisi

Ortalaması sıfır olan herhangi bir ε_t zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} \sigma^2 & , \quad h = 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases} \tag{2.5}$$

şeklinde ise ε_t serisine beyaz gürültü serisi denir ve $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir.

3. DOĞRUSAL ZAMAN SERİSİ MODELLERİ

Lineer zaman serisi modelleri otoregresif (AR), hareketli ortalama (MA) ve bu iki modelin birleşimi şeklinde ifade edilen otoregresif hareketli ortalama modelleri olarak incelenebilir. Burada bu modeller kısaca tanıtılacak ve bazı özellikleri verilecektir.

3.1. Hareketli Ortalama (MA) Modelleri

Hareketli ortalama modellerinde bir seri, başka bir serinin lineer birleşimi olarak ifade edilmektedir. Genel olarak $q.$ dereceden bir hareketli ortalama serisi,

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad , \quad \theta_0 = 1 \tag{3.1}$$

veya gerileme operatörü B yardımıyla

$$\begin{aligned} (X_t - \mu) &= (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q)\varepsilon_t \\ &= \theta_q(B)\varepsilon_t \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak ifade edilebilmektedir ve $MA(q)$ ile gösterilmektedir. Burada $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ şeklindedir. Eşitlik (3.1) ile ifade edilen bir X_t zaman serisi için serinin beklenen değeri ve varyansı,

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E\left(\mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} \right) \\ &= \mu \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$
\begin{aligned}
Var(X_t) &= Var\left(\mu + \sum_{j=0}^{q}\theta_j \varepsilon_{t-j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{q}\theta_j^2 Var(\varepsilon_{t-j}) \\
&= \sigma^2 \sum_{j=0}^{q}\theta_j^2
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

şeklinde elde edilmektedir. Aynı zamanda $MA(q)$ serisi için otokovaryans fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t+h}) \\
&= Cov\left(\mu + \sum_{j=0}^{q}\theta_j \varepsilon_{t-j},\ \mu + \sum_{j=0}^{q}\theta_j \varepsilon_{t+h-j}\right) \\
&= Cov\left(\sum_{j=0}^{q}\theta_j \varepsilon_{t-j},\ \sum_{j=0}^{q}\theta_j \varepsilon_{t+h-j}\right) \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad h > q \\ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-h}\theta_j \theta_{j+h} & , \quad h = 0,1,\ldots,q \\ \gamma(-h) & , \quad h < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

olarak elde edilir ve bu otokovaryans fonksiyonundan yararlanarak seri için otokorelasyon fonksiyonu,

$$
\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & , \quad h = 0 \\ \dfrac{\sum_{j=0}^{q-h}\theta_j \theta_{j+h}}{\sum_{j=0}^{q}\theta_j^2} & , \quad h = 1,2,\ldots,q \\ 0 & , \quad h > q \\ \rho(-h) & , \quad h < 0 \end{cases} \tag{3.6}
$$

biçiminde elde edilmektedir (Chatfield, 1989). $MA(q)$ serisi için otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonlarından, h değerinin model derecesi olan q'dan daha büyük olması durumunda otokovaryans ve otokorelasyonların 0 (sıfır) olduğu anlaşılmaktadır. Bu sebeple hareketli ortalama serileri için model derecesinin

belirlenmesinde otokorelasyon fonksiyonu bir araç olarak kullanılmaktadır. Hareketli ortalama serilerinin kısmi otokorelasyon katsayıları ise (3.6) eşitliği ile verildiği gibi hesaplanmaktadır ve kısmi otokorelasyon katsayıları h değeri arttıkça otoregresif modellerin otokorelasyon katsayılarına benzer olarak ya üstel olarak azalan yada azalan sinüs dalgalanmaları biçiminde bir eğilim göstermektedir (Brockwell ve Davis, 1987).

Eşitlik (3.3) ve (3.4)'den görüldüğü gibi, eşitlik (3.1) ile verilen $MA(q)$ serisinin beklenen değeri sabit, varyansı sonlu ve otokovaryans (aynı zamanda otokorelasyon) fonksiyonu $\gamma(h)$ t'den bağımsızdır. Bu da sonlu her q değeri için $MA(q)$ serisinin durağan olduğu anlamına gelmektedir.

Ancak q'nun sonlu olmaması durumunda yani X_t zaman serisinin,

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad , \quad \theta_0 = 1 \tag{3.7}$$

şeklinde $MA(\infty)$ serisi olması durumunda bu serinin durağan olabilmesi için,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left|\theta_j\right| < \infty$$

koşulunun sağlanması gerekmektedir (Box ve ark. 1994).

Eşitlik (3.7) ile verilen $MA(\infty)$ serisinde $\left|\rho\right| < 1$ olmak üzere $\theta_j = \rho^j$ olarak tanımlandığında,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left|\theta_j\right| = \sum_{j=0}^{\infty} \left|\rho\right|^j = \frac{1}{1-\left|\rho\right|} < \infty$$

olacağından bu şekilde verilen $MA(\infty)$ serisi durağan olacaktır. Ayrıca,

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j} \tag{3.8}$$

ve

$$X_{t-1} = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-1-j} \tag{3.9}$$

olduğu dikkate alındığında,

$$X_t - \rho X_{t-1} = \varepsilon_t$$

veya

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.10}$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlik (3.10) ile ifade edilen seri birinci dereceden otoregresif süreç olarak adlandırılır ve $AR(1)$ ile gösterilir. Doğaldır ki eşitlik (3.10) ile verilen $AR(1)$ serisinin durağanlığı (3.7) eşitliği ile verilen $MA(\infty)$ serisinin durağanlığına yani $|\rho| < 1$ olmasına bağlıdır.

3.2. Otoregresif (AR) Modeller

Otoregresif zaman serilerinde, serinin şimdiki değerleri kendi geçmişindeki değerlere ve beyaz gürültüye bağlı olarak değişmektedir. Bir çok ekonomik veri otoregresif zaman serisi olarak modellenebilmektedir. Genel olarak p. dereceden bir otoregresif zaman serisi,

$$(X_t - \mu) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i (X_{t-i} - \mu) + \varepsilon_t \tag{3.11}$$

şeklinde ifade edilmekte ve kısaca $AR(p)$ ile gösterilmektedir. Burada $\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$ şeklindeki beyaz gürültü serisi, μ, X_t serisinin ortalaması ve ϕ_i'ler ise modelin bilinmeyen parametreleridir. Burada bazı kolaylıklar için $\mu = 0$ olduğu varsayılacaktır. Aynı zamanda kolaylık için $Y_t = X_t - \mu$ dönüşümü de kullanılabilmektedir. $\mu = 0$ varsayımı altında eşitlik (3.11) ile verilen $AR(p)$ serisi,

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t \tag{3.12}$$

şeklinde veya

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t = \varepsilon_t \tag{3.13}$$

$$X_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)^{-1} \varepsilon_t$$
$$X_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots)\varepsilon_t \tag{3.14}$$

şeklinde $MA(\infty)$ serisi olarak yazılabilir. Burada B, $B^k X_t = X_{t-k}$ şeklinde tanımlanan gerileme operatörüdür. Eşitlik (3.12) ile verilen X_t zaman serisinin (3.14) şeklinde $MA(\infty)$ serisi olarak gösterimi yardımıyla $\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2$ yakınsak olduğunda,

$$E(X_t) = E((1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots)\varepsilon_t)$$
$$= 0$$

ve

$$Var(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2$$

sonlu olacaktır ve bu eşitlik (3.14) ile verilen X_t serisinin durağanlığı için gerekli bir koşuldur.

Eşitlik (3.12) ile verilen X_t zaman serisi için otokovaryans fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t+h}) \\ &= Cov(X_t, \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t+h-i} + \varepsilon_{t+h}) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i Cov(X_t, X_{t+h-i}) \\ &= \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2) + \cdots + \phi_p \gamma(h-p) \ , \ h > 0\end{aligned}$$

olarak bulunur. Otokovaryans fonksiyonuna bağlı olarak $AR(p)$ serisinin otokorelasyon fonksiyonu da,

$$\rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2) + \cdots + \phi_p \rho(h-p) \ , \ h > 0$$

olarak elde edilmektedir.

p. dereceden bir otoregresif zaman serisi modeli $AR(p)$'nin durağan olabilmesi

$$m^p - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i m^{p-i} = 0 \tag{3.15}$$

karakteristik denkleminin tüm köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olmasına yada buna eşdeğer olarak (3.13) eşitliğindeki,

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) = 0 \tag{3.16}$$

denkleminin tüm köklerinin mutlak değerce 1'den büyük olmasına bağlıdır.

Durağan otoregresif zaman serisi modelleri için serinin otokorelasyonları h değeri arttıkça ya üstel olarak azalan yada azalan sinüs dalgalanmaları biçiminde bir

eğilim göstermektedir. Burada azalma oranının yavaş olması durumunda serinin durağanlığı konusunda şüpheye düşülmektedir. Durağan otoregresif zaman serisi modellerinin kısmi otokorelasyon katsayıları ise model derecesinden büyük h değerleri için sıfır değerini almaktadır. Bu yüzden otoregresif süreçler için model derecesinin belirlenmesinde kısmi otokorelasyon katsayıları bir araç olarak kullanılmaktadır.

3.3. Otoregresif Hareketli Ortalama (ARMA) Modelleri

Çoğu durumda seriler tek başına $AR(p)$ veya $MA(q)$ süreçleri tarafından ifade edilemezler. Bu yüzden bu seriler otoregresif ve hareketli ortalama modellerinin birleşimi olan $ARMA$ modeli şeklinde ifade edilmeye çalışılır. Genel olarak p. ve q. dereceden bir $ARMA(p,q)$ modeli,

$$\phi_p(B)X_t = \theta_q(B)\varepsilon_t \tag{3.17}$$

şeklinde veya açık olarak,

$$X_t - \sum_{i=1}^{p}\phi_i X_{t-i} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q}\theta_j \varepsilon_{t-j} \tag{3.18}$$

şeklinde ifade edilir. Bu modelin durağan olması için otoregresif kesime ait olan $\phi_p(B) = 0$ denkleminin tüm köklerinin mutlak değerce 1'den büyük olması gerekmektedir. AR yada MA modelini kullanarak çok sayıda parametreyi gerektiren veriler, bir $ARMA$ modeli kullanılarak sadece birkaç parametre ile modellenebilmektedir. Genelde, modelde çok sayıda parametrenin bulunması tahminde etkinliği azaltır (Wei, 1990).

$ARMA(p,q)$ zaman serisi modelinin otokovaryansları,

$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + \cdots + \phi_p\gamma(h-p) \quad , \quad h \geq q+1 \tag{3.19}$$

şeklinde veya buna bağlı olarak otokorelasyonları,

$$\rho(h) = \phi_1\rho(h-1) + \cdots + \phi_p\rho(h-p) \quad , \quad h \geq q+1 \tag{3.20}$$

şeklinde hesaplanabilmektedir. $ARMA(p,q)$ modelinin otokorelasyonları $h > q$ değerleri için $AR(p)$ modelinin otokorelasyonları ile aynı olmaktadır (Akdi, 2003). $ARMA(p,q)$ modelinin kısmi otokorelasyon katsayıları ise (2.4) eşitliği ile verildiği gibi hesaplanmaktadır.

3.4. Bütünleşik Otoregresif Hareketli Ortalama (ARIMA) Modelleri

Uygulamada karşılaşılan birçok seri durağan olmayan yapıya sahiptir. Böyle seriler için durağan bir model kullanabilmek için serideki durağan olmayan yapının arındırılması gerekmektedir. Eğer incelenen zaman serisi ortalamaya göre durağan olmayan bir yapı sergiliyorsa o zaman serinin farkı alınarak durağanlık sağlanabilir ve bu yaklaşım ekonometride sıklıkla kullanılmaktadır. Yani eşitlik (3.17) ile verilen eşitlikte X_t yerine $\nabla^d X_t$ alınarak ortalamasına göre durağan olmayan seri modellenebilir. Böyle bir model bütünleşik model olarak adlandırılmaktadır. Buradaki d, X_t serisinin durağanlığının sağlanabilmesi amacıyla uygulanması gereken fark işlemi sayısını göstermektedir ve uygulamada genellikle $d = 1$ durumu ile karşılaşılmaktadır.

Durağan olmayan X_t zaman serisi için,

$$W_t = \nabla^d X_t = (1-B)^d X_t$$

yazarak genel bütünleşik otoregresif hareketli ortalama ($ARIMA$) serisini,

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_p W_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

veya daha kısa olarak,

$$\phi_p(B) W_t = \theta_q(B) \varepsilon_t \tag{3.21}$$

veya

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_q(B) \varepsilon_t \tag{3.22}$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (3.22) ile verilen model kısaca $ARIMA(p,d,q)$ ile gösterilmektedir. X_t zaman serisi için oluşturulan (3.22) modeli açık bir şekilde durağan olmayan bir modeldir. Çünkü modelin sol tarafındaki otoregresif kısıma ait $\phi_p(B)(1-B)^d$ ifadesinin d tane kökü 1 çıkacaktır.

Aşağıda $AR(p)$, $MA(q)$ ve $ARMA(p,q)$ lineer zaman serisi modellerini bir arada göstermek amacıyla Çizelge 3.1 düzenlenmiştir.

Çizelge 3.1. Lineer zaman serisi modelleri

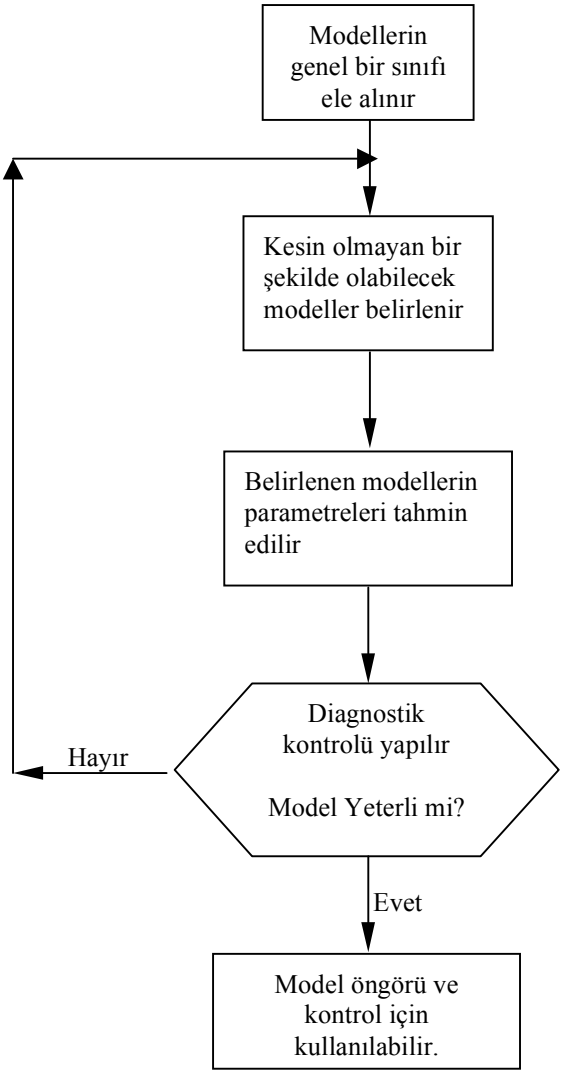
Model	Gösterimi	Modelin Matematiksel İfadesi	Parametreleri
Otoregresif Model	$AR(p)$	$X_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t$	$\alpha_i, i = 1,2,\ldots,p$
Hareketli Ortalama Modeli	$MA(q)$	$X_t = \sum_{j=0}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j}$, $\beta_0 = 1$	$\beta_j, j = 1,2,\ldots,q$
Otoregresif Hareketli Ortalama Modeli	$ARMA(p,q)$	$X_t - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j}$	$\alpha_i, i = 1,2,\ldots,p$ $\beta_j, j = 1,2,\ldots,q$
Bütünleşik Otoregresif Hareketli Ortalama Modeli	$ARIMA(p,d,q)$	$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_q(B) \varepsilon_t$	

3.5. Model Teşhisi

Durağan hale getirilen zaman serisinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarına bakılarak sezgisel olarak serinin $AR(p)$ veya $MA(q)$ sürecinden hangisine uyduğu belirlenebilir. Eğer otokorelasyon fonksiyonu herhangi q zirveden sonra birden sıfırlanıyor ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu azalarak sıfırlanıyorsa modelin $MA(q)$ şeklinde bir hareketli ortalama modeli olduğu söylenebilir veya kısmi otokorelasyon fonksiyonu herhangi p zirveden sonra birden sıfırlanıyor ve otokorelasyon fonksiyonu azalarak sıfırlanıyorsa modelin bir $AR(p)$ tipi olduğu söylenebilir.

3.5.1. Model Belirleme Süreci (Box-Jenkins Metodolojisi)

Zaman serisi analizleri bir çok sahada kullanılmaktadır. Zaman serisi analizleri metodolojisine en önemli katkı Box ve Jenkins (1970) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarında, zaman serisi modeli belirlemede Box-Jenkins yöntemi olarak bilinen yöntemi önermişlerdir. Box-Jenkins yöntemi, otoregresif bütünleşik hareketli ortalama (*ARIMA*) süreçleri olarak adlandırılan modeller sınıfına dayanır ve bu modellerin belirlenme süreci özet olarak Şekil 3.1'de verildiği gibidir. Box-Jenkins yönteminin model oluşturma döngüsündeki en zor aşama modelin belirlenmesi aşamasıdır. Çünkü geliştirilen hiçbir yöntem problemin çözümüne deterministik bir yaklaşımda bulunmamaktadır.



Şekil 3.1. Zaman serisi modelinin belirlenme süreci

4. DOĞRUSAL OLMAYAN ZAMAN SERİSİ MODELLERİ

Bu bölümde uygulamada sıkça kullanılan eşiksel otoregresif (TAR) modeller, düzgün geçişli otoregresif (STAR) modeller ve değişen varyans koşullu otoregresif (ARCH) modeller gibi doğrusal olmayan zaman serisi modelleri tanıtılacaktır.

4.1. Eşiksel Otoregresif (TAR) Modeller

Buradaki temel düşünce; X_t zaman serisine ilişkin oluşturulan zaman serisi modelinin parametrelerinin, X_t zaman serisinin geçmişteki değerlerinin düştüğü bölgeye göre değişim gösterebileceğidir. Yani burada X_t zaman serisi parçalı bir model ile modellenmeye çalışılmaktadır. Eşik modelleri, modelin parçalarında kullanılan modele göre *TAR*, *TARMA*, *SETAR*, *SETARMA* gibi isimler almaktadırlar. Eşik modelleri, zaman serisi analizlerinde sıklıkla kullanılan bir lineer olmayan zaman serisi modelidir. Bu modeller ilk kez Tong ve Lim (1980) tarafından ortaya konulmuştur.

Eşik modelleri, lineer olmayan bir modele parçalı lineer bir modelle yaklaşımda bulunulmasını sağlar. Bu modellerden biri parçalarında otoregresif modeller kullanılan eşiksel otoregresif modellerdir. *TAR*(k) ile gösterilen k. dereceden l eşikli bir eşiksel otoregresif model,

$$X_t = \begin{cases} a_0^{(1)} + a_1^{(1)} X_{t-1} + \cdots + a_k^{(1)} X_{t-k} + \varepsilon_{t-1}^{(1)} & , \quad \left(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k}\right) \in \Re^{(1)} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_0^{(l)} + a_1^{(l)} X_{t-1} + \cdots + a_k^{(l)} X_{t-k} + \varepsilon_{t-1}^{(l)} & , \quad \left(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k}\right) \in \Re^{(l)} \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde veya kısaca $j = 1,2,\ldots,l$ olmak üzere,

$$X_t = a_0^{(j)} + a_1^{(j)} X_{t-1} + \cdots + a_k^{(j)} X_{t-k} + \varepsilon_{t-1}^{(j)} \ , \left(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k}\right) \in \Re^{(j)} \qquad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada; $\varepsilon_t^{(j)} \sim WN\left(0, \sigma^2\right), j = 0,1,\ldots,l$, $a_{\cdot}^{(j)}$ ler katsayılar ve $\Re^{(j)}$, k boyutlu $\Re^k$ öklid uzayının bir bölgesidir ve eşik bölgesi olarak adlandırılır (Tong, 1990).

Eşitlik (4.12) ile verilen $TAR(k)$ modeli vektörel formda $j = 1,2,\ldots,l$ için,

$$A^{(j)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_1^{(j)} & a_2^{(j)} & \cdots & a_{k-1}^{(j)} & a_k^{(j)} \\ \hline & & I_{k-1} & & 0 \end{array}\right]_{k\times k} \ , \ H^{(j)} = \left[\begin{array}{c|c} h_1^{(j)} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{\underline{0}} \end{array}\right]_{k\times k}$$

$$\underline{X}_t = \left(X_t, X_{t-1}, \ldots, X_{t-k+1}\right)' \ , \ \underline{\varepsilon}_t = \left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots \varepsilon_{t-k+1}\right)' \ , \quad \underline{C}^{(j)} = \left(a_0^{(j)}, 0, \ldots, 0\right)$$

olmak üzere

$$\underline{X}_t = A^{(j)} \underline{X}_{t-1} + H^{(j)} \underline{\varepsilon}_t + \underline{C}^{(j)} \ , \ \underline{X}_{t-1} \in \Re^{(j)} \qquad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Eşitlik (4.2) ile verilen $TAR(k)$ modeli,

$$X_t = f\left(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k}\right) + \varepsilon_t \qquad (4.4)$$

şeklindeki genel lineer olmayan k. dereceden otoregresif model için parçalı lineer model yaklaşımı olarak ele alınabilir. Burada $f(.)$, herhangi bir lineer olmayan fonksiyondur.

Uygulamada uygun büyüklükteki k değeri için (4.2) biçiminde verilen bir modele veri uydurulması oldukça zordur. Çünkü eşik bölgesinin saptanması k boyutlu uzay boyunca bir araştırma gerektirmektedir ve bu da oldukça zordur. Bu

yüzden Tong (1980), X_{t-d} olarak belirtilen basit bir tek boyutlu geçmiş değerine göre eşik bölgelerini belirlemiştir. Buna göre l eşikli $TAR(k)$ modeli,

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k} a_i^{(j)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(j)} \ , \ X_{t-d} \in \Re^{(j)} \ , \ j = 1,2,\ldots,l \tag{4.5}$$

şeklinde düşünülebilir. Burada d gecikme parametresi, $\Re^{(j)}$ $\Re$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. Eşitlik (4.5) ile verilen modelde, her bir eşik bölgesinde modelin k. dereceden otoregresif model olduğu varsayılmıştır. Esasen uygulamada, farklı eşik bölgelerindeki modellerin dereceleri farklı olabilmektedir. Bu durumu da göz önünde bulundurarak (4.5) ile verilen model,

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(j)} \ , \ X_{t-d} \in \Re^{(j)} \ , \ j = 1,2,\ldots,l \tag{4.6}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Burada $k_1, k_2, \ldots, k_l$, l tane eşik bölgesindeki otoregresif modellerin derecelerini göstermektedir. Tong (1990), (4.6) eşitliği ile verilen modeli kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif model (self-exciting threshold autoregressive model) olarak adlandırmış ve bu modeli $SETAR(l; k_1, k_2, \ldots, k_l)$ şeklinde göstermiştir.

Eşitlik (4.6) ile verilen $SETAR(l; k_1, k_2, \ldots, k_l)$ modeli,

i) $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_k$

ii) $\max_{1 \le j \le l} \sum_{i=1}^{k_i} \left| a_i^{(j)} \right| < 1$ veya $\sum_{i=1}^{k} max_{1 \le j \le l} \left(a_i^{(j)} \right)^2 < 1$, $k = \max_{1 \le j \le l} k_j$

koşulları altında kesin durağan bir çözüme sahiptir (Fan ve Yao, 2003).

$SETAR(l; k_1, k_2, \ldots, k_l)$ modeli herbir $\Re^{(j)}$ eşik bölgesindeki $AR(k_j)$ modeli yerine $ARMA(k_j, k_j')$ otoregresif hareketli ortalama modeli kullanılarak kolaylıkla kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif hareketli ortalama modeline genişletilebilir. Bu model,

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + \sum_{i=1}^{k'_j} b_i^{(j)} \varepsilon_{t-i}^{(j)} + \varepsilon_t^{(j)} \ , \ X_{t-d} \in \Re^{(j)} \ , \ j = 1,2,\ldots,l \qquad (4.7)$$

şeklinde ifade edilir ve kısaca $SETARMA(l; k_1, k_2, \ldots, k_l; k'_1, k'_2, \ldots, k'_l)$ olarak gösterilir. $b_0^{(j)} = 1$, $j = 1,2,\ldots,l$ koşulu altında (4.7) modeli,

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + \sum_{i=0}^{k'_j} b_i^{(j)} \varepsilon_{t-i}^{(j)} \ , \ X_{t-d} \in \Re^{(j)} \ , \ j = 1,2,\ldots,l \qquad (4.8)$$

şeklinde yeniden yazılabilir (Tong, 1990).

Bu modellerdeki yapısal parametrelerin yani gecikme parametresi *d*, eşik bölgeleri $\Re^{(j)}$ ve $k_1, k_2, \ldots, k_l$ model derecelerinin belirlenmesi başlı başına bir problemdir.

4.1.1. Yapısal parametrelerin seçimi

Eşitlik (4.6) ile verilen *SETAR* modelindeki yapısal parametreler; gecikme parametresi d , eşik bölgesi $\Re^{(j)}$ ve her bir eşik bölgesindeki model dereceleri olan $k_1, k_2, \ldots, k_l$ dir. Bu parametrelerin saptanması oldukça zordur. Tong (1983), AIC kriterine dayalı olarak bu yapısal parametrelerin seçimi için bir algoritma önermiştir. Bu algoritmanın adımları aşağıda verildiği gibidir:

Adım 1. İlk önce gecikme parametresi d ve eşik değerleri $r_1, r_2, \ldots, r_{l-1}$ için uygun olması muhtemel değerlerin bir kümesi belirlenir.

Adım 2. Başlangıçta verilen $d, r_1, r_2, \ldots, r_{l-1}$ değerlerine göre her bir eşik bölgesinde $k_1, k_2, \ldots, k_l$ derecelerinde ayrı ayrı AR modelleri uydurulur. $AIC(k_i)$, i. eşik bölgesindeki modelin *AIC* değerini göstermek üzere $\hat{k}_i$, $AIC(k_i)$ değerini minimum

yapan değeri göstersin. Bu durumda *SETAR* modeline ilişkin *AIC* değeri, $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_{l-1})$ olmak üzere,

$$AIC(d, \underline{r}) = \sum_{i=1}^{l} AIC(\hat{k}_i)$$

şeklinde hesaplanır.

Adım 3. $\underline{r}$ için uygun olabilecek değerlerin keyfi q tane alt kümesi alınır. Bu alt kümenin elemanları $\underline{r}^{(1)}, \underline{r}^{(2)}, \ldots, \underline{r}^{(q)}$ ile gösterilsin. İlk başta alınan d değeri sabit tutularak $\underline{r} = \underline{r}^{(j)}, j = 1,2,\ldots,q$ için Adım 2 tekrarlanarak $AIC(d, \underline{r})$ değerleri hesaplanır ve $AIC(d, \underline{r})$ değerini minimum yapan $\hat{\underline{r}}$ değeri seçilir. $AIC(d, \underline{r})$'nin minimum değeri $AIC(d) = AIC(d, \hat{\underline{r}})$ ile gösterilsin.

Adım 4. Bu durumda $d = d_i, i = 1,2,\ldots,p$ için Adım 2 ve Adım 3 tekrarlanarak $d_1, d_2, \ldots, d_p$ içinde $AIC(d)$ değerini en küçük yapan $\hat{d}$ değeri araştırılır. $AIC(d)$ değerini minimum yapan $\hat{d}$ değeri seçildiğinde aynı zamanda $\hat{\underline{r}}$ ve $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \ldots, \hat{k}_l$ değerleri de seçilmiş olur. d değerindeki değişiklikler, model tahmininde kullanılacak gözlem sayısını da değiştirdiğinden burada AIC kriterinin normalleştirilmiş biçimi yani *AIC* değerinin kullanılabilir gözlem sayısına oranı kullanılmıştır.

4.2. Düzgün Geçişli (Smoothing Transition) Otoregresif (STAR) Modeller

Düzgün geçiş fikri ilk önce Bacon ve Watts (1971) tarafından ortaya atılmıştır. *STAR* modellerinin gelişmesinde ise Luukkonen ve ark (1988), Grenger ve Teräsvirta (1993), Teräsvirta (1994), Teräsvirta ve Anderson (1992), Eitrheim ve Teräsvirta (1996) katkıda bulunmuşlardır. $STAR(p, d)$ modelleri,

$$X_t = \mu_1 + \sum_{i=1}^{p} \phi_{1i} X_{t-i} + \left(\mu_2 + \sum_{i=1}^{p} \phi_{2i} X_{t-i} \right) g\left(X_{t-d} - c; \gamma\right) + \varepsilon_t \qquad (4.9)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $g\left(X_{t-d} - c; \gamma\right)$ sürekli geçiş fonksiyonu, γ pozitif değerli geçiş parametresi, d gecikme değeri, X_{t-d} geçiş değeri ve c geçiş rejiminin orta noktasıdır.

Eğer $g\left(X_{t-d} - c; \gamma\right)$ fonksiyonu,

$$g\left(X_{t-d} - c; \gamma\right) = \left\{1 - \exp\left[-\gamma\left(X_{t-d} - c\right)^2\right]\right\} \qquad (4.10)$$

şeklinde ise (4.9) eşitliği ile verilen $STAR(p,d)$ modeli üstel düzgün geçişli (exponential smooth transition) otoregresif $ESTAR\left(p,d\right)$ modeli haline dönüşür. Dikkat edilirse $\gamma \to 0$ veya $\gamma \to \infty$ olduğunda $ESTAR\left(p,d\right)$ lineer olmayan modeli lineer olacaktır. $ESTAR$ modelindeki $g\left(X_{t-d} - c; \gamma\right)$ terimi 0 ile 1 arasında sınırlıdır ve $\left(X_{t-d} - c\right) \in \left(-\infty, \infty\right)$ için sıfır etrafında simetriktir. $X_{t-d} - c = 0$ olduğunda $\left\{X_t\right\}$ bir $AR(p)$ sürecidir, $\left(X_{t-d} - c\right) \to \mp\infty$ olduğunda $\left\{X_t\right\}$ başka bir $AR(p)$ süreci olur. $\left(X_{t-d} - c\right)$ arada değerler aldığında yani, $0 < \left|X_{t-d} - c\right| < \infty$ olduğunda ise $\left\{X_t\right\}$, bundan önceki iki durumda belirtilen $AR(p)$ süreçlerinin kombinasyonu olan bir $AR(p)$ sürecine sahip olur. Dikkat edilirse $EAR(p,d)$ modeli, $\mu_2 = 0$ ve $c = 0$ olan $ESTAR$ modelinin özel bir halidir.

$g\left(X_{t-d} - c; \gamma^*\right)$ fonksiyonu,

$$g\left(X_{t-d} - c; \gamma^*\right) = \left[\left\{1 + \exp\left[-\gamma^*\left(X_{t-d} - c^*\right)\right]\right\}^{-1} - 0.5\right] \qquad (4.11)$$

şeklinde lojistik formda olduğunda $STAR$ modeli, lojistik smooth transition otoregresif $LSTAR(p,d)$ modeli olarak adlandırılır. $\gamma \to \infty$ olduğunda eğer

$X_{t-d} \le c^*$ ise $g\left(X_{t-d}-c;\gamma^*\right)=-0.5$, eğer $X_{t-d} > c^*$ ise $g\left(X_{t-d}-c;\gamma^*\right)=0.5$ olur ve bu yüzden $LSTAR$ modeli tek eşikli otoregresif model haline gelmektedir. $LSTAR$ modelindeki $g\left(X_{t-d}-c^*\right)$ terimi, $\left(X_{t-d}-c^*\right)\in(-\infty,\infty)$ için $[-0.5,0.5]$ aralığında sınırlıdır. $\left(X_{t-d}-c^*\right)\to\infty$ olduğunda $\{X_t\}$ bir AR(p) sürecidir; $\left(X_{t-d}-c^*\right)\to-\infty$ olduğunda $\{X_t\}$ başka bir AR(p) süreci olur ve $\left(X_{t-d}-c^*\right)$'ın ara değerleri için $\{X_t\}$ bu $AR(p)$ süreçlerinin birleşimi olan başka bir $AR(p)$ süreci olur. Dikkat edilirse $\gamma=0$ olduğunda $ESTAR(p,d)$ modeli bir $AR(p)$ modeline dönüşmektedir. Benzer şekilde $\gamma^*=0$ olduğunda $LSTAR(p,d)$ modeli de $AR(p)$ modeline dönüşmektedir.

4.3. Değişen Varyans Koşullu Otoregresif (ARCH) Modeller

Bundan önce bahsedilen tüm lineer olmayan zaman serisi modellerinde $\{\varepsilon_t\}$ hata teriminin bağımsız ve aynı dağılımlı olduğu varsayılıyordu ve lineer olmama model ortalamasında gerçekleşiyordu. Ancak $ARCH$ modellerinde lineer olmama, hata teriminin sabit olmayan koşullu varyansından kaynaklanmaktadır. Engle (1982 ve 1983) ve Cragg (1982), bazı ekonomik verileri inceleyerek, genellikle bilinenden farklı olarak, artıkların varyansının sabit olmadığını göstermiştir.

$ARCH$ modelleri ilk önce Engle (1982) tarafından incelenmiştir. Bir $ARCH(p,m)$ serisi için model,

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \theta_i X_{t-i} + u_t \tag{4.12}$$

gibi bir lineer $AR(p)$ formundadır. Ancak lineer olmamanın da kaynağı olan u_t,

$$u_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t} \tag{4.13}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_{t-j}^2 \tag{4.14}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $h_t > 0$ olmasını garantilemek için $\alpha_0 > 0$, $\{\alpha_j\}_{j=1}^{m} \geq 0$ olması gerekmektedir. Aynı zamanda α_j'lerin toplamının 1'den büyük olması sürece ait varyansı sonsuz kılacağı için $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j < 1$ koşulu da serinin zayıf durağan olmasını garantilemek için gereklidir. Burada $\{\varepsilon_t\}$, 1 varyanslı ve u_{t-j}, $j = 1,2,\ldots,m$ 'den bağımsız *niid* bir süreçtir (Zhang, 2002).

h_t bir $ARMA(m,n)$ süreci şeklinde olduğunda $\{X_t\}$ süreci, Bollerslev (1986) tarafından ileri sürülen $GARCH(p,m,n)$ (genelleştrilmiş *ARCH* modeli) olarak adlandırılır. Ancak burada, *NLARMA* modellerinin yerine *NLAR* modellerini ayrıntılı incelenmesiyle aynı sebepten dolayı *GARCH* modelleri ayrıntılı bir şekilde incelenmeyecektir.

ARCH modellerindeki $\{u_t\}$'nin koşullu varyansı kestirilebilirdir. Küçük bir hesaplama ile $\{u_t\}$'nin koşullu varyansı, onun geçmiş değerleri ile

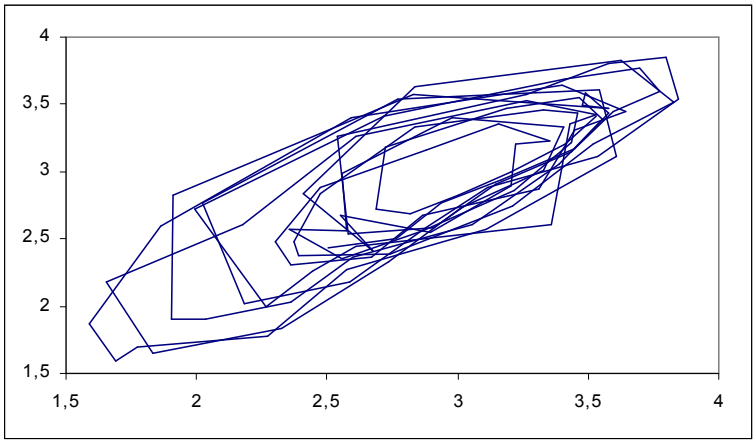
$$\begin{aligned} Var\left(u_t / u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots\right) &= E\left[u_t^2 / u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots\right] \\ &= h_t \\ &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_{t-j}^2 \end{aligned} \tag{4.15}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu yüzden büyük bir koşullu varyansı başka bir büyük koşullu varyans izler ve küçük koşullu varyansı başka bir küçük koşullu varyans takip eder. Bu özellik *ARCH* modellerinin, outlier'ların kümelerini oluşturmak için yetenekli olduğunu gösterir.

Bilindiği gibi asimptotik durumda, en küçük kareler ve en çok olabilirlik tahmin edicileri birbirine yakınsamaktadır. Ancak en çok olabilirlik yöntemi kullanıldığında *ARCH* artıklarına sahip bir modelin daha etkin tahminler vereceği kabul edilmektedir (Engle 1982).

4.4. Lineer Olmayan Yapıların Teşhisi

Lineer olmayan zaman serisi analizlerinde, modeldeki parametrelerin tahmin edilmesi zor ve zahmetli olduğundan ilk önce verilen bir zaman serisinin gerçekten lineer olmayan bir yapıya sahip olup olmadığı araştırılmalıdır. Bu araştırma çeşitli testler yardımıyla yapılabildiği gibi çeşitli grafikler yardımıyla da yapılabilmektedir. Bu grafiklerin en önemlilerinden biri yönlendirilmiş saçılım grafiği olarak adlandırılan grafiktir. Bu grafikler (X_t, X_{t-j}) ile $(X_{t+1}, X_{t+1-j}), j = \mp 1, \mp 2, \ldots, \mp p$ noktalarının doğru ile birleştirilmesinden elde edilir ve serinin lineer olmayan bir yapıya sahip olup olmadığının belirlenmesinde kullanılmaktadır. Bu grafiklerde, lineer olmayan bir yapının varlığının tespiti için aranması gereken özellik sınır döngünün teşhisidir. Örneğin bir X_t zaman serisi için $j = 1$ olmak üzere yönlendirilmiş saçılım grafiği Şekil 4.1'de verildiği gibi elde edilmiş olsun.



Şekil 4.1. $j = 1$ için X_t serisinin yönlendirilmiş saçılım grafiği

Şekil 4.1'e bakıldığında sınırlı daireye benzeyen bir yapı göze çarpmaktadır. Ayrıca tam net olmamakla birlikte ulaşılamayan bir iç bölgenin varlığından da söz edilebilir. Bu bulgular X_t zaman serisinin lineer olmayan bir yapıya sahip olabileceği konusunda fikir vermektedir.

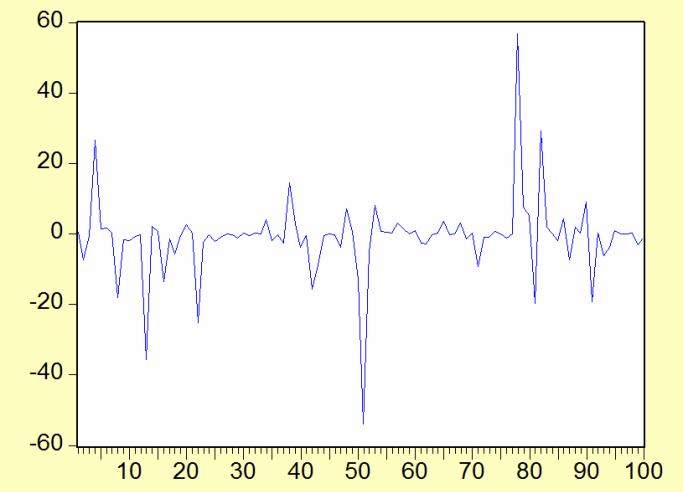
5. SİMÜLASYON

Bu bölümde farklı doğrusal ve doğrusal olmayan zaman serisi modellerinden simülasyonla üretilen $n=100$ birimlik örnek seriler incelenmiştir. Bu seriler için çizilen çeşitli grafiklerle seriye uygun model belirlenmeye çalışılmıştır.

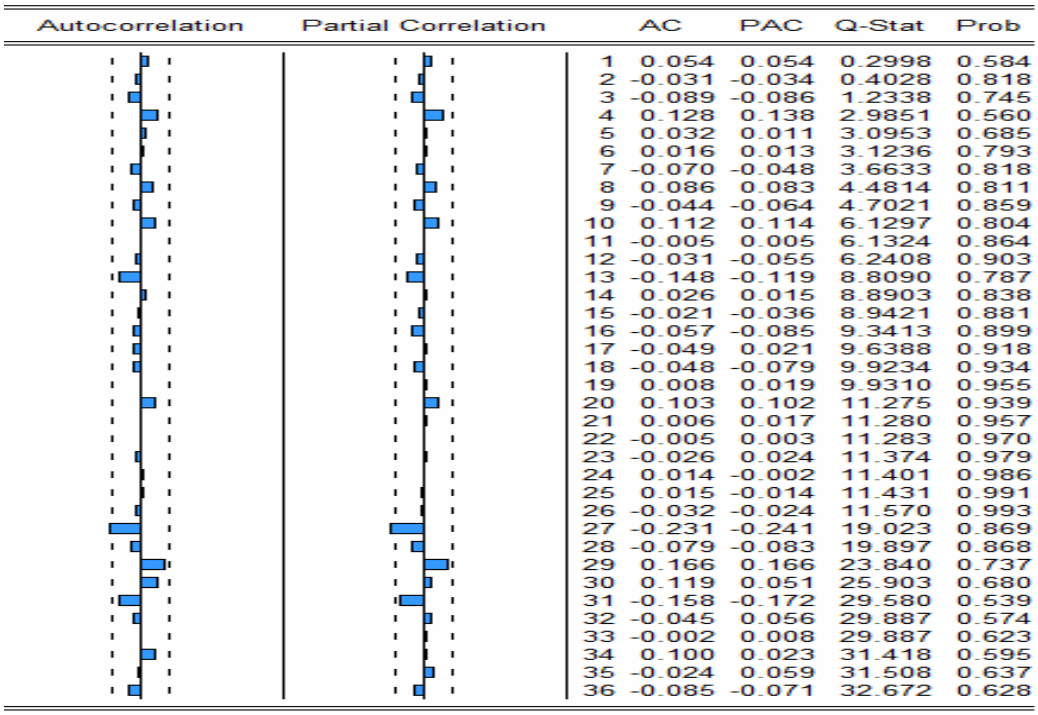
5.1. Doğrusal Zaman Serisi Modelleri

Bu kesimde, durağan ve durağan olmayan doğrusal zaman serisi modellerinden üretilen çeşitli serilerin sergilediği davranışlar grafiklerle incelenmiştir.

Seri 1. Simülasyonla üretilen $X_{1t}, t=1,2,\ldots,100$ serisinin grafiği Şekil 5.1'de ve otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafikleri ise Şekil 5.2'de verilmiştir.



Şekil 5.1. X_{1t} serisinin grafiği

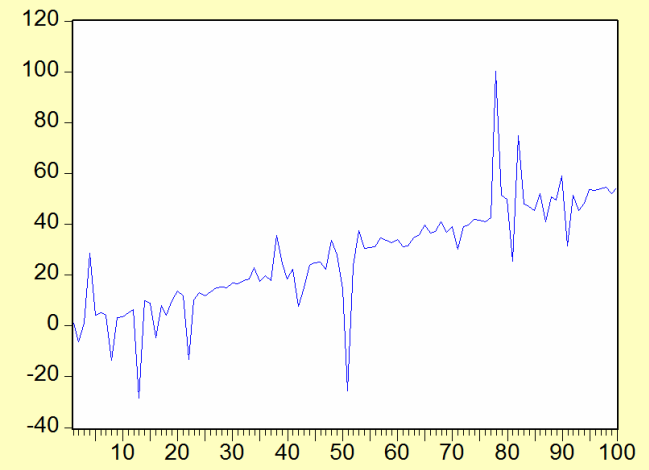


	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.054	0.054	0.2998	0.584
2	-0.031	-0.034	0.4028	0.818
3	-0.089	-0.086	1.2338	0.745
4	0.128	0.138	2.9851	0.560
5	0.032	0.011	3.0953	0.685
6	0.016	0.013	3.1236	0.793
7	-0.070	-0.048	3.6633	0.818
8	0.086	0.083	4.4814	0.811
9	-0.044	-0.064	4.7021	0.859
10	0.112	0.114	6.1297	0.804
11	-0.005	0.005	6.1324	0.864
12	-0.031	-0.055	6.2408	0.903
13	-0.148	-0.119	8.8090	0.787
14	0.026	0.015	8.8903	0.838
15	-0.021	-0.036	8.9421	0.881
16	-0.057	-0.085	9.3413	0.899
17	-0.049	0.021	9.6388	0.918
18	-0.048	-0.079	9.9234	0.934
19	0.008	0.019	9.9310	0.955
20	0.103	0.102	11.275	0.939
21	0.006	0.017	11.280	0.957
22	-0.005	0.003	11.283	0.970
23	-0.026	0.024	11.374	0.979
24	0.014	-0.002	11.401	0.986
25	0.015	-0.014	11.431	0.991
26	-0.032	-0.024	11.570	0.993
27	-0.231	-0.241	19.023	0.869
28	-0.079	-0.083	19.897	0.868
29	0.166	0.166	23.840	0.737
30	0.119	0.051	25.903	0.680
31	-0.158	-0.172	29.580	0.539
32	-0.045	0.056	29.887	0.574
33	-0.002	0.008	29.887	0.623
34	0.100	0.023	31.418	0.595
35	-0.024	0.059	31.508	0.637
36	-0.085	-0.071	32.672	0.628

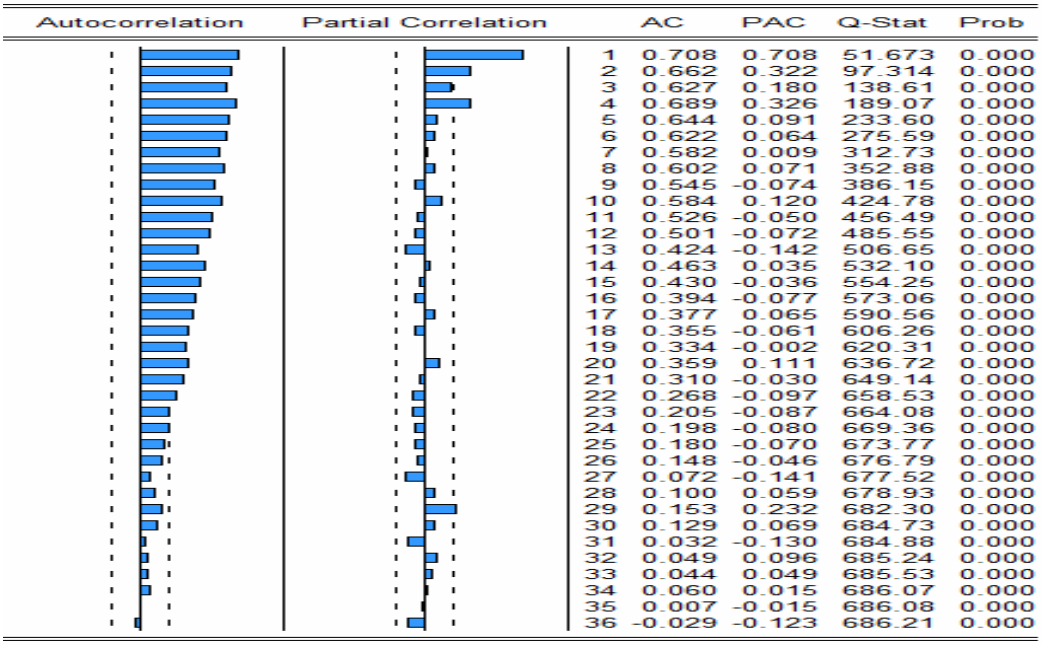
Şekil 5.2. X_{1t} serisinin ACF ve PACF grafikleri

Şekil 5.2'de verilen ACF ve PACF grafiklerine bakıldığında, X_{1t} serisinin tüm otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının istatistiksel olarak anlamsız olduğu görülmektedir. Bu durumda X_{1t} serisinin beyaz gürültü serisine benzediği söylenebilir. Gerçekte bu seri $X_{1t} = \alpha X_{1t-1} + e_t$ serisinden $\alpha = 0.1$ için rasgele üretilerek elde edilmiştir. Burada $\alpha = 0.1$ katsayısının sıfıra yakın olmasından dolayı seri beyaz gürültü serisine benzemektedir.

Seri 2. Simülasyonla üretilen $X_{2t}, t = 1,2,\ldots,100$ serisinin grafiği Şekil 5.3'de ve otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafikleri ise Şekil 5.4'de verilmiştir.



Şekil 5.3. X_{2t} serisinin grafiği

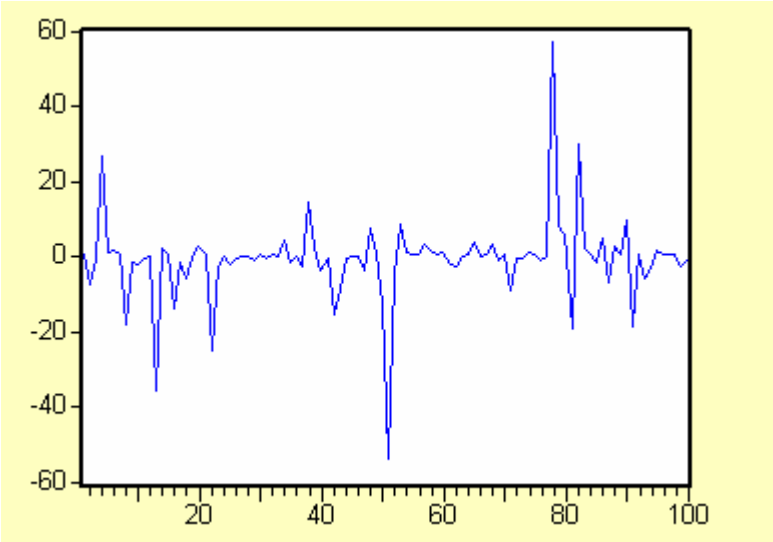


	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.708	0.708	51.673	0.000
2	0.662	0.322	97.314	0.000
3	0.627	0.180	138.61	0.000
4	0.689	0.326	189.07	0.000
5	0.644	0.091	233.60	0.000
6	0.622	0.064	275.59	0.000
7	0.582	0.009	312.73	0.000
8	0.602	0.071	352.88	0.000
9	0.545	-0.074	386.15	0.000
10	0.584	0.120	424.78	0.000
11	0.526	-0.050	456.49	0.000
12	0.501	-0.072	485.55	0.000
13	0.424	-0.142	506.65	0.000
14	0.463	0.035	532.10	0.000
15	0.430	-0.036	554.25	0.000
16	0.394	-0.077	573.06	0.000
17	0.377	0.065	590.56	0.000
18	0.355	-0.061	606.26	0.000
19	0.334	-0.002	620.31	0.000
20	0.359	0.111	636.72	0.000
21	0.310	-0.030	649.14	0.000
22	0.268	-0.097	658.53	0.000
23	0.205	-0.087	664.08	0.000
24	0.198	-0.080	669.36	0.000
25	0.180	-0.070	673.77	0.000
26	0.148	-0.046	676.79	0.000
27	0.072	-0.141	677.52	0.000
28	0.100	0.059	678.93	0.000
29	0.153	0.232	682.30	0.000
30	0.129	0.069	684.73	0.000
31	0.032	-0.130	684.88	0.000
32	0.049	0.096	685.24	0.000
33	0.044	0.049	685.53	0.000
34	0.060	0.015	686.07	0.000
35	0.007	-0.015	686.08	0.000
36	-0.029	-0.123	686.21	0.000

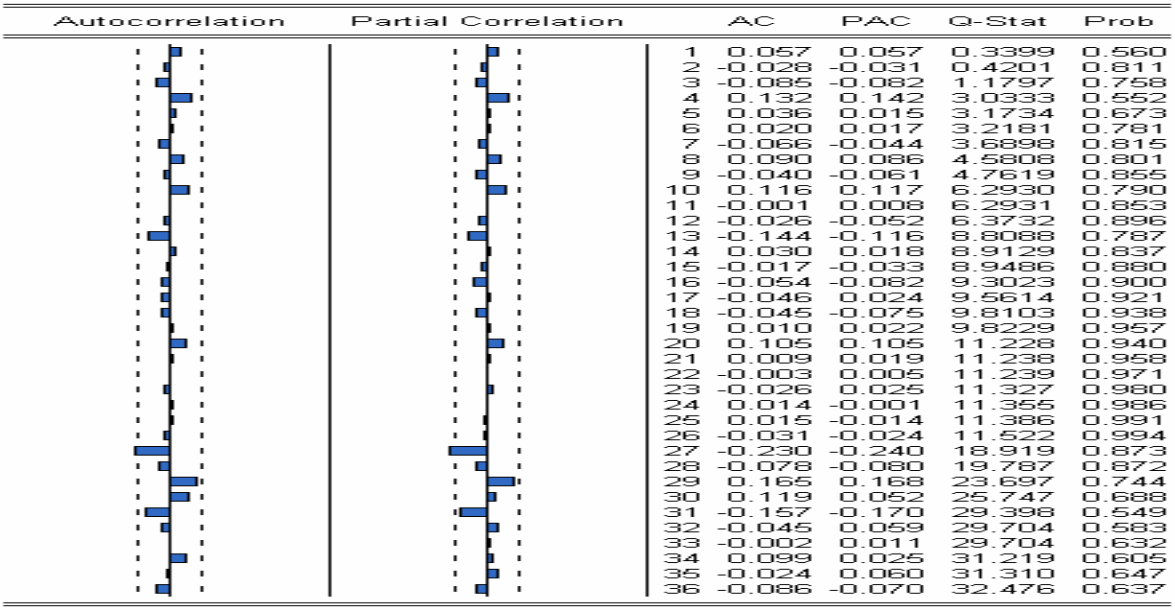
Şekil 5.4. X_{2t} serisinin ACF ve PACF grafikleri

Şekil 5.3'e bakıldığında X_{2t} serisinin açık bir şekilde deterministik trende sahip olduğu görülmektedir. İlk bakışta Şekil 5.4'de verilen ACF değerleri yavaş bir şekilde azalarak sıfıra yaklaştığından ve PACF değerleri 4 gecikmeden sonra istatistiksel olarak anlamsız olduğundan serinin durağan olmayan 4'üncü dereceden otoregresif modele uyduğu düşünülebilir. Aynı sonuçlara, serideki trend ayrıştırıldıktan sonra bakılacaktır. Serideki trend Şekil 5.3'ten de görüldüğü gibi doğrusaldır. Yani trend denklemi $X_{2t} = bt + \varepsilon_t$ şeklinde düşünülebilir. Serideki

trendi ayrıştırmak için bu trend denkleminin tahmin edilmesi gerekmektedir. Trend denklemindeki b parametresinin tahmini $\hat{b} = 0.549$ olarak elde edilmiştir. Buna göre X_{2t} serisindeki trendi yok etmek için $Y_t = X_{2t} - 0.549t$ dönüşümü yapılabilir. Bu dönüşüm yapıldığında elde edilen Y_t serisi için grafikler aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.5. Y_t serisinin grafiği



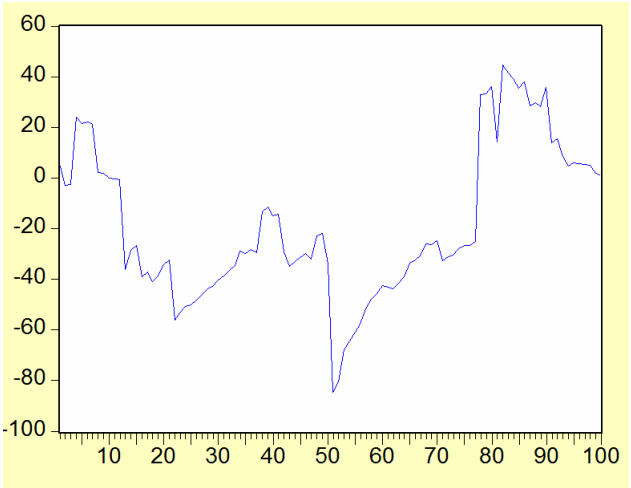
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.057	0.057	0.3399	0.560
2	-0.028	-0.031	0.4201	0.811
3	-0.085	-0.082	1.1797	0.758
4	0.132	0.142	3.0333	0.552
5	0.036	0.015	3.1734	0.673
6	0.020	0.017	3.2181	0.781
7	-0.066	-0.044	3.6898	0.815
8	0.090	0.086	4.5808	0.801
9	-0.040	-0.061	4.7619	0.855
10	0.116	0.117	6.2930	0.790
11	-0.001	0.008	6.2931	0.853
12	-0.026	-0.052	6.3732	0.896
13	-0.144	-0.116	8.8088	0.787
14	0.030	0.018	8.9129	0.837
15	-0.017	-0.033	8.9486	0.880
16	-0.054	-0.082	9.3023	0.900
17	-0.046	0.024	9.5614	0.921
18	-0.045	-0.075	9.8103	0.938
19	0.010	0.022	9.8229	0.957
20	0.105	0.105	11.228	0.940
21	0.009	0.019	11.238	0.958
22	-0.003	0.005	11.239	0.971
23	-0.026	0.025	11.327	0.980
24	0.014	-0.001	11.355	0.986
25	0.015	-0.014	11.386	0.991
26	-0.031	-0.024	11.522	0.994
27	-0.230	-0.240	18.919	0.873
28	-0.078	-0.080	19.787	0.872
29	0.165	0.168	23.697	0.744
30	0.119	0.052	25.747	0.688
31	-0.157	-0.170	29.398	0.549
32	-0.045	0.059	29.704	0.583
33	-0.002	0.011	29.704	0.632
34	0.099	0.025	31.219	0.605
35	-0.024	0.060	31.310	0.647
36	-0.086	-0.070	32.476	0.637

Şekil 5.6. Y_t serisinin ACF ve PACF grafiği

Şekil 5.5'e bakıldığında Y_t serisinde trendin yok olduğu ve Şekil 5.6'ya göre Y_t serisinin tüm otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının istatistiksel olarak anlamsız olduğu görülmektedir. Bu durumda Y_t serisinin beyaz gürültü serisine benzediği söylenebilir. Gerçekte X_{2t} serisi $X_{2t} = \alpha X_{2t-1} + bt + e_t$ serisinden $\alpha = 0.1$ ve $b = 0.5$ için rasgele üretilerek elde edilmiştir. Burada $\alpha = 0.1$ katsayısının sıfıra yakın olmasından dolayı Y_t serisi beyaz gürültü serisine benzemektedir.

Buna göre serideki trendin varlığı altında ACF ve PACF grafiklerine bakarak model hakkında yorum yapmak doğru değildir ve bu tür yorumlar yapabilmek için öncelikle serideki trendin yok edilmesi gerekmektedir.

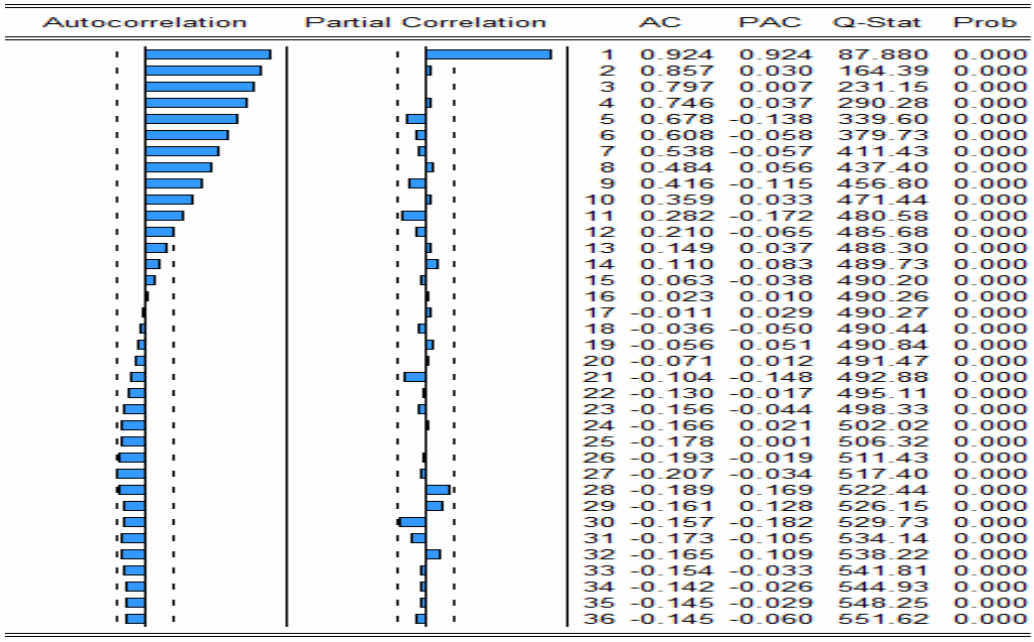
Seri 3. Simülasyonla üretilen $X_{3t}, t = 1,2,\ldots,100$ serisinin grafiği Şekil 5.7'de ve otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafikleri ise Şekil 5.8'de verilmiştir.



Şekil 5.7. X_{3t} serisinin grafiği

Şekil 5.7'ye bakıldığında serinin Şekil 5.1 ve Şekil 5.5'te verilen serilerin aksine ortalamasının sabit olmadığı zaman içinde büyük değişimler gösterdiği

dolayısıyla serinin durağan olmayan bir yapıya sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca seri düzensiz artmalar ve azalmalardan ibaret olduğu için deterministik bir trendin varlığından söz etmek de pek mümkün değildir.

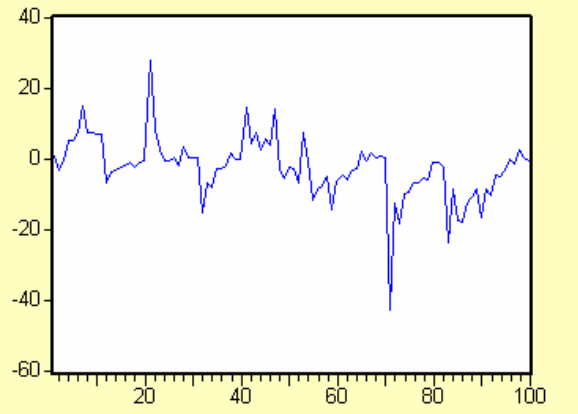


	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.924	0.924	87.880	0.000
2	0.857	0.030	164.39	0.000
3	0.797	0.007	231.15	0.000
4	0.746	0.037	290.28	0.000
5	0.678	-0.138	339.60	0.000
6	0.608	-0.058	379.73	0.000
7	0.538	-0.057	411.43	0.000
8	0.484	0.056	437.40	0.000
9	0.416	-0.115	456.80	0.000
10	0.359	0.033	471.44	0.000
11	0.282	-0.172	480.58	0.000
12	0.210	-0.065	485.68	0.000
13	0.149	0.037	488.30	0.000
14	0.110	0.083	489.73	0.000
15	0.063	-0.038	490.20	0.000
16	0.023	0.010	490.26	0.000
17	-0.011	0.029	490.27	0.000
18	-0.036	-0.050	490.44	0.000
19	-0.056	0.051	490.84	0.000
20	-0.071	0.012	491.47	0.000
21	-0.104	-0.148	492.88	0.000
22	-0.130	-0.017	495.11	0.000
23	-0.156	-0.044	498.33	0.000
24	-0.166	0.021	502.02	0.000
25	-0.178	0.001	506.32	0.000
26	-0.193	-0.019	511.43	0.000
27	-0.207	-0.034	517.40	0.000
28	-0.189	0.169	522.44	0.000
29	-0.161	0.128	526.15	0.000
30	-0.157	-0.182	529.73	0.000
31	-0.173	-0.105	534.14	0.000
32	-0.165	0.109	538.22	0.000
33	-0.154	-0.033	541.81	0.000
34	-0.142	-0.026	544.93	0.000
35	-0.145	-0.029	548.25	0.000
36	-0.145	-0.060	551.62	0.000

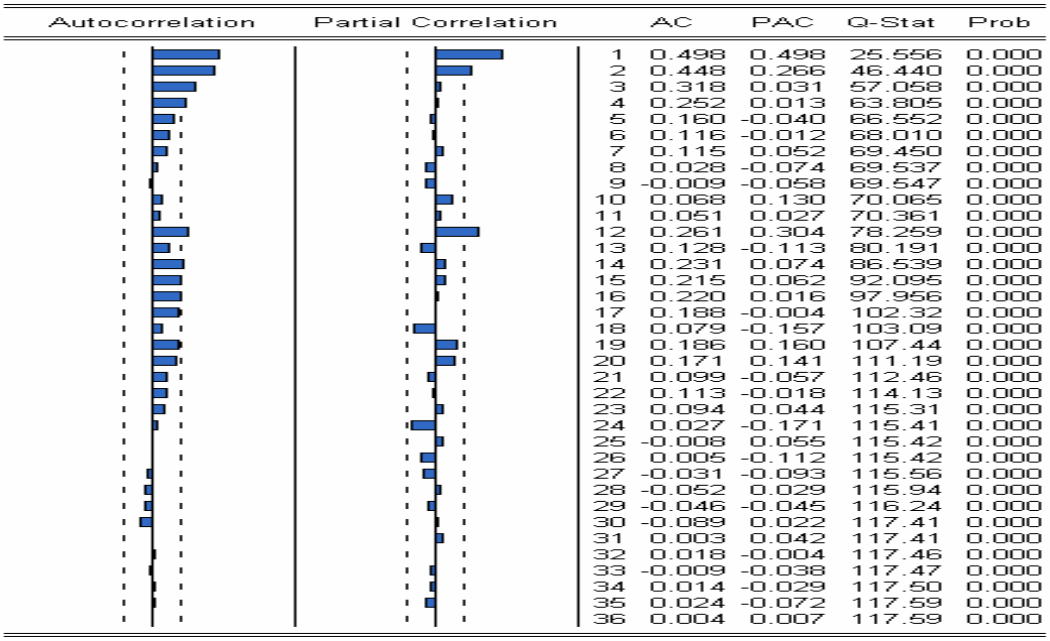
Şekil 5.8. X_{3t} serisinin ACF ve PACF grafiği

Şekil 5.8'e göre otokorelasyon katsayıları yavaş bir şekilde azalarak sıfıra yaklaşmakta ve kısmi otokorelasyon katsayıları ise ilk değerden sonra istatistiksel olarak anlamsız olmaktadır. Bu durumda seri için birinci dereceden otoregresif modelin uygun olduğu düşünülebilir. Otokorelasyon katsayılarının sıfıra yavaş bir şekilde yaklaşması ise serinin durağan olmadığı hakkında bir fikir vermektedir. Gerçekte X_{3t} serisi, $X_{3t} = \alpha X_{3,t-1} + e_t$ şeklindeki AR(1) serisinden $\alpha = 0.95$ için üretilmiştir. Buradaki α parametresinin 1'e yakın olmasından dolayı grafiklerde serinin durağan olmadığına dair işaretler ortaya çıkmıştır.

Seri 4. Simülasyonla üretilen $X_{4t}, t = 1,2,\ldots,100$ serisinin grafiği Şekil 5.9'da ve otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafikleri ise Şekil 5.10'da verilmiştir.



Şekil 5.9. X_{4t} serisinin grafiği



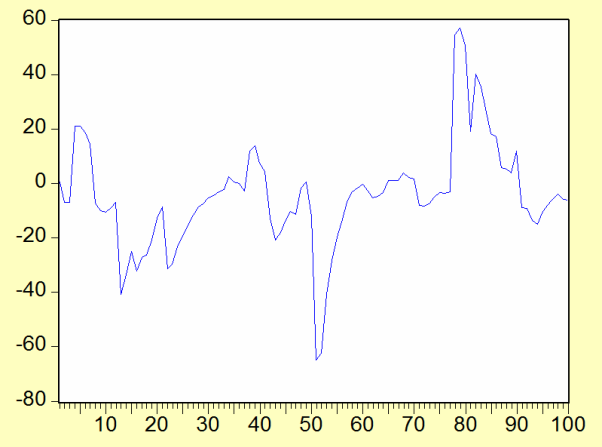
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.498	0.498	25.556	0.000
2	0.448	0.266	46.440	0.000
3	0.318	0.031	57.058	0.000
4	0.252	0.013	63.805	0.000
5	0.160	-0.040	66.552	0.000
6	0.116	-0.012	68.010	0.000
7	0.115	0.052	69.450	0.000
8	0.028	-0.074	69.537	0.000
9	-0.009	-0.058	69.547	0.000
10	0.068	0.130	70.065	0.000
11	0.051	0.027	70.361	0.000
12	0.261	0.304	78.259	0.000
13	0.128	-0.113	80.191	0.000
14	0.231	0.074	86.539	0.000
15	0.215	0.062	92.095	0.000
16	0.220	0.016	97.956	0.000
17	0.188	-0.004	102.32	0.000
18	0.079	-0.157	103.09	0.000
19	0.186	0.160	107.44	0.000
20	0.171	0.141	111.19	0.000
21	0.099	-0.057	112.46	0.000
22	0.113	-0.018	114.13	0.000
23	0.094	0.044	115.31	0.000
24	0.027	-0.171	115.41	0.000
25	-0.008	0.055	115.42	0.000
26	0.005	-0.112	115.42	0.000
27	-0.031	-0.093	115.56	0.000
28	-0.052	0.029	115.94	0.000
29	-0.046	-0.045	116.24	0.000
30	-0.089	0.022	117.41	0.000
31	0.003	0.042	117.41	0.000
32	0.018	-0.004	117.46	0.000
33	-0.009	-0.038	117.47	0.000
34	0.014	-0.029	117.50	0.000
35	0.024	-0.072	117.59	0.000
36	0.004	0.007	117.59	0.000

Şekil 5.10. X_{4t} serisinin ACF ve PACF grafiği

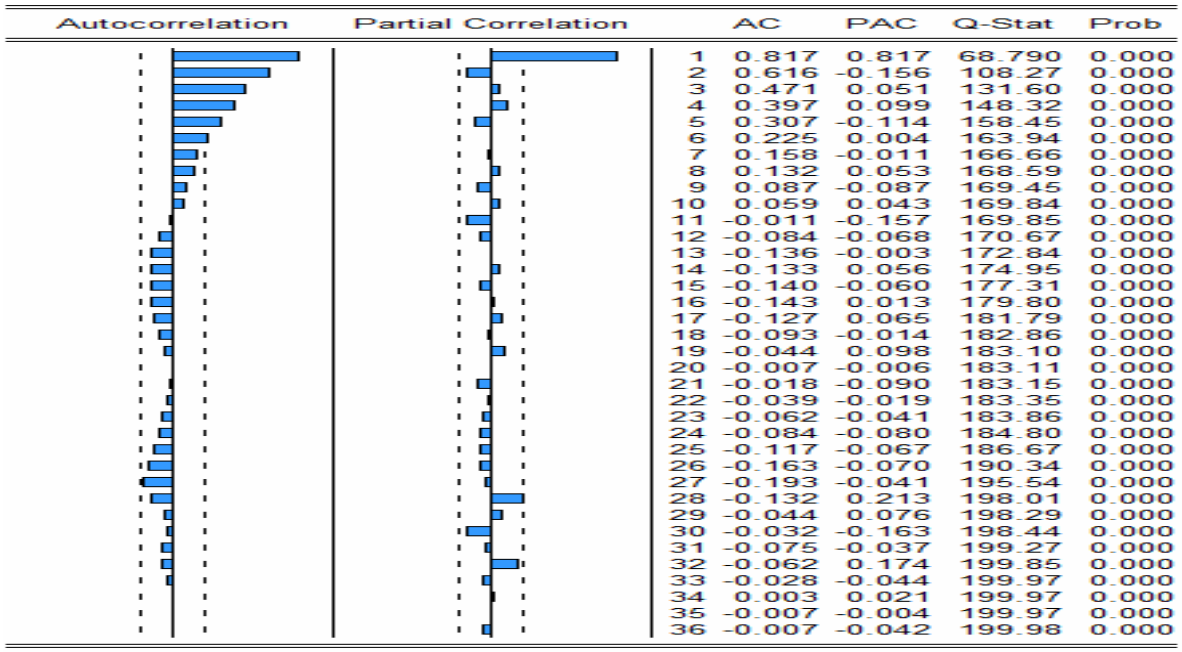
Şekil 5.10'daki X_{4t} serisinin ACF ve PACF grafiklerine bakıldığında, X_{4t} serisinin otokorelasyon katsayılarının hızlı bir şekilde sönerek sıfıra yaklaştığı ve kısmi otokorelasyon katsayılarının ise ilk iki değerden sonra istatistiksel olarak anlamsız oldukları görülmektedir. Bu durumda seri için ikinci dereceden otoregresif modelin uygun olduğu düşünülebilir. Ayrıca 12'nci kısmi otokorelasyon katsayısının güven bandının dışarısında olduğu yani istatistiksel olarak anlamlı olduğu gözlenmiştir. Ancak diğer kısmi otokorelasyon katsayılarına bakıldığında belirli bir düzen göze çarpmamaktadır. Dolayısıyla 12'nci kısmi otokorelasyon katsayısının istatistiksel

olarak anlamlı olması göz ardı edilebilir. Gerçekte bu seri $X_{4t} = \alpha_1 X_{4,t-1} + \alpha_2 X_{4,t-2} + e_t$ serisinden $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.4$ için rasgele üretilerek elde edilmiştir.

Seri 5. Simülasyonla üretilen $X_{5t}, t = 1,2,\ldots,100$ serisinin grafiği Şekil 5.11'de ve otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafikleri ise Şekil 5.12'de verilmiştir.



Şekil 5.11. X_{5t} serisinin grafiği

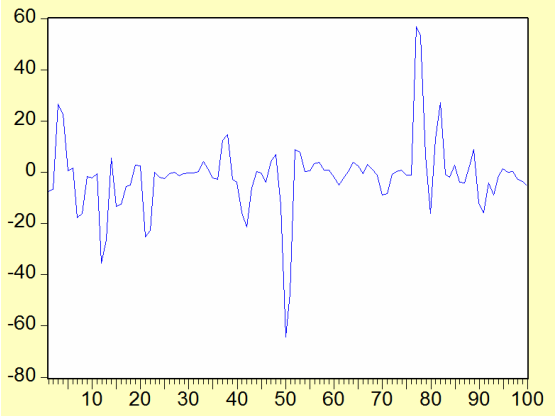


	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.817	0.817	68.790	0.000
2	0.616	-0.156	108.27	0.000
3	0.471	0.051	131.60	0.000
4	0.397	0.099	148.32	0.000
5	0.307	-0.114	158.45	0.000
6	0.225	0.004	163.94	0.000
7	0.158	-0.011	166.66	0.000
8	0.132	0.053	168.59	0.000
9	0.087	-0.087	169.45	0.000
10	0.059	0.043	169.84	0.000
11	-0.011	-0.157	169.85	0.000
12	-0.084	-0.068	170.67	0.000
13	-0.136	-0.003	172.84	0.000
14	-0.133	0.056	174.95	0.000
15	-0.140	-0.060	177.31	0.000
16	-0.143	0.013	179.80	0.000
17	-0.127	0.065	181.79	0.000
18	-0.093	-0.014	182.86	0.000
19	-0.044	0.098	183.10	0.000
20	-0.007	-0.006	183.11	0.000
21	-0.018	-0.090	183.15	0.000
22	-0.039	-0.019	183.35	0.000
23	-0.062	-0.041	183.86	0.000
24	-0.084	-0.080	184.80	0.000
25	-0.117	-0.067	186.67	0.000
26	-0.163	-0.070	190.34	0.000
27	-0.193	-0.041	195.54	0.000
28	-0.132	0.213	198.01	0.000
29	-0.044	0.076	198.29	0.000
30	-0.032	-0.163	198.44	0.000
31	-0.075	-0.037	199.27	0.000
32	-0.062	0.174	199.85	0.000
33	-0.028	-0.044	199.97	0.000
34	0.003	0.021	199.97	0.000
35	-0.007	-0.004	199.97	0.000
36	-0.007	-0.042	199.98	0.000

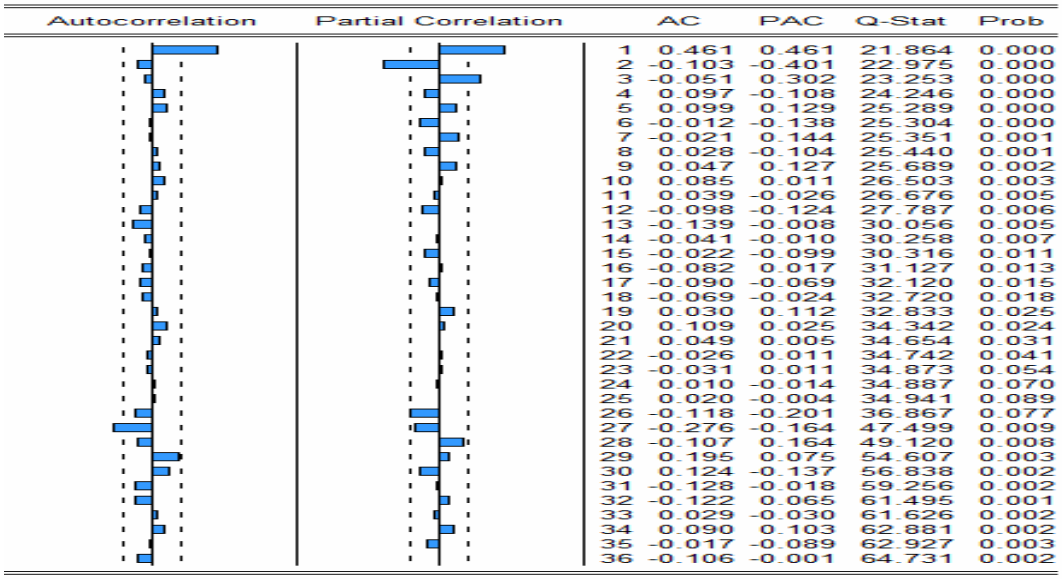
Şekil 5.12. X_{5t} serisinin ACF ve PACF grafiği

Şekil 5.12'deki X_{5t} serisinin ACF ve PACF grafiklerine bakıldığında, X_{5t} serisinin otokorelasyon katsayılarının hızlı bir şekilde sönerek sıfıra yaklaştığı ve kısmi otokorelasyon katsayılarının ise ilk değerden sonra istatistiksel olarak anlamsız oldukları görülmektedir. Bu durumda seri için birinci dereceden otoregresif modelin uygun olduğu düşünülebilir. Gerçekte bu seri $X_{5t} = \alpha_1 X_{5,t-1} + \alpha_2 X_{5,t-2} + e_t$ şeklindeki AR(2) serisinden $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -0.2$ için rasgele üretilerek elde edilmiştir. Burada α_1 katsayısının 1 olması ve α_2 katsayısının sıfıra yakın olmasından dolayı ACF ve PACF grafiklerine göre seri için birinci dereceden otoregresif modelin uygun olduğu gibi bir sonuç ortaya çıkmıştır. Eğer α_2 katsayısına mutlak değerce daha büyük bir değer verilmiş olsaydı muhtemelen PACF değerleri ilk iki değerden sonra anlamsız olacaktı.

Seri 6. Simülasyonla üretilen $X_{6t}, t = 1,2,\ldots,100$ serisinin grafiği Şekil 5.13'de ve otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafikleri ise Şekil 5.14'de verilmiştir.



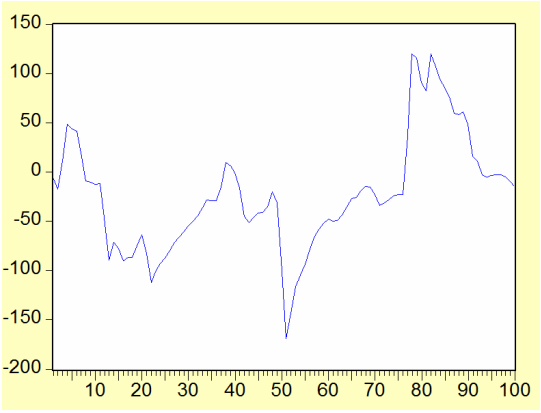
Şekil 5.13. X_{6t} serisinin grafiği



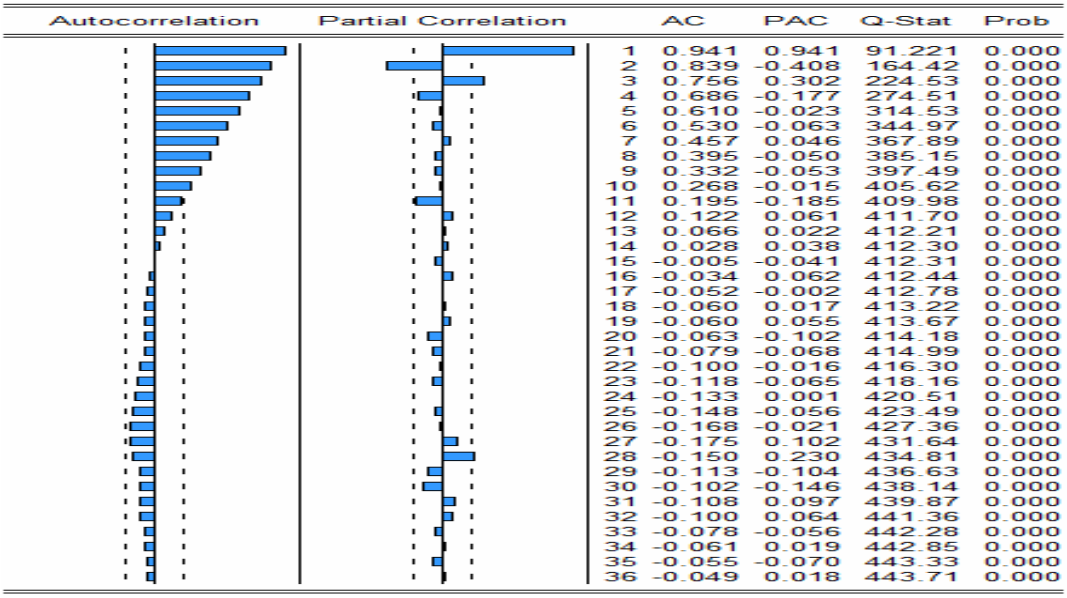
Şekil 5.14. X_{6t} serisinin ACF ve PACF grafiği

Şekil 5.13'e bakıldığında serinin ortalamasının sabit kaldığı görülmektedir. Ayrıca Şekil 5.14'deki X_{6t} serisinin ACF ve PACF grafiklerine bakıldığında, X_{6t} serisinin otokorelasyon katsayıları ilk değerden sonra istatistiksel olarak anlamsız olmakta ve kısmi otokorelasyon katsayıları ise mutlak değerce azalarak sıfıra yaklaşmaktadır. Bu durumda X_{6t} serisinin birinci dereceden hareketli ortalama modeline uyduğu söylenebilir. Gerçekte bu seri $X_{6t} = \beta e_{t-1} + e_t$ serisinden $\beta = 0.9$ için rasgele üretilerek elde edilmiştir. Seri için hareketli ortalama modeli uygun olduğundan aynı zamanda bu serinin durağan olduğunu da söyleyebiliriz.

Seri 7. Simülasyonla üretilen $X_{7t}, t = 1,2,\ldots,100$ serisinin grafiği Şekil 5.15'de ve otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafikleri ise Şekil 5.16'da verilmiştir.



Şekil 5.15. X_{7t} serisinin grafiği



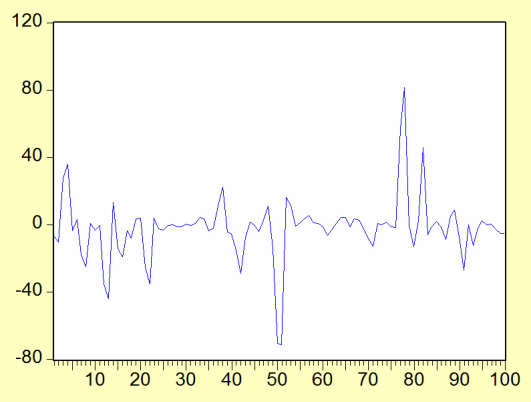
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.941	0.941	91.221	0.000
2	0.839	-0.408	164.42	0.000
3	0.756	0.302	224.53	0.000
4	0.686	-0.177	274.51	0.000
5	0.610	-0.023	314.53	0.000
6	0.530	-0.063	344.97	0.000
7	0.457	0.046	367.89	0.000
8	0.395	-0.050	385.15	0.000
9	0.332	-0.053	397.49	0.000
10	0.268	-0.015	405.62	0.000
11	0.195	-0.185	409.98	0.000
12	0.122	0.061	411.70	0.000
13	0.066	0.022	412.21	0.000
14	0.028	0.038	412.30	0.000
15	-0.005	-0.041	412.31	0.000
16	-0.034	0.062	412.44	0.000
17	-0.052	-0.002	412.78	0.000
18	-0.060	0.017	413.22	0.000
19	-0.060	0.055	413.67	0.000
20	-0.063	-0.102	414.18	0.000
21	-0.079	-0.068	414.99	0.000
22	-0.100	-0.016	416.30	0.000
23	-0.118	-0.065	418.16	0.000
24	-0.133	0.001	420.51	0.000
25	-0.148	-0.056	423.49	0.000
26	-0.168	-0.021	427.36	0.000
27	-0.175	0.102	431.64	0.000
28	-0.150	0.230	434.81	0.000
29	-0.113	-0.104	436.63	0.000
30	-0.102	-0.146	438.14	0.000
31	-0.108	0.097	439.87	0.000
32	-0.100	0.064	441.36	0.000
33	-0.078	-0.056	442.28	0.000
34	-0.061	0.019	442.85	0.000
35	-0.055	-0.070	443.33	0.000
36	-0.049	0.018	443.71	0.000

Şekil 5.16. X_{7t} serisinin ACF ve PACF grafiği

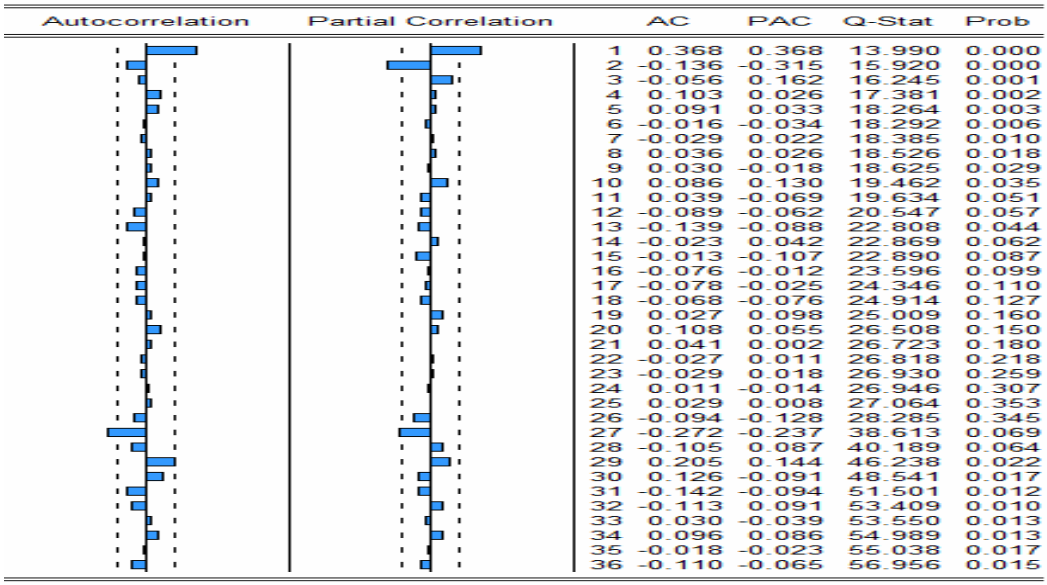
Şekil 5.15'e bakıldığında serinin ortalamasının zaman içinde sabit kalmayarak düzensiz bir şekilde dalgalı hareketler sergilediği görülmektedir. Şekil 5.16'da ise otokorelasyon katsayıları yavaş bir şekilde azalarak sıfıra yaklaşmakta ve kısmi

otokorelasyon katsayıları ise ilk 3 değerden sonra güven bandının içinde kalmaktadır. İlk bakışta serinin durağan olmayan AR(3) modeline uygun olduğu düşünülebilir. Gerçekte bu seri $X_{7t} = \alpha X_{7,t-1} + e_t + \beta e_{t-1}$ şeklindeki ARMA(1,1) modelinden $\alpha = 0.9$, $\beta = 1.5$ için rasgele üretilerek elde edilmiştir. Her ne kadar grafiklere bakılarak model hakkında öneriler yapılabiliyorsa da bu önerilerin her zaman doğru olacağını söylemek pek mümkün olmamaktadır. Bu seri de buna bir örnek teşkil etmektedir. Burada böyle bir durumun çıkma sebebi muhtemelen modeldeki otoregresif kısmın parametresi olan α 'nın 1'e yakın olmasıdır. Aşağıdaki seride bu α parametresinin $\alpha = -0.1$ olduğu yani sıfıra yakın olduğu durum incelenmiştir.

Seri 8. Simülasyonla üretilen $X_{8t}, t = 1,2,\ldots,100$ serisinin grafiği Şekil 5.17'de ve otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafikleri ise Şekil 5.18'de verilmiştir.



Şekil 5.17. X_{8t} serisinin grafiği



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.368	0.368	13.990	0.000
2	-0.136	-0.315	15.920	0.000
3	-0.056	0.162	16.245	0.001
4	0.103	0.026	17.381	0.002
5	0.091	0.033	18.264	0.003
6	-0.016	-0.034	18.292	0.006
7	-0.029	0.022	18.385	0.010
8	0.036	0.026	18.526	0.018
9	0.030	-0.018	18.625	0.029
10	0.086	0.130	19.462	0.035
11	0.039	-0.069	19.634	0.051
12	-0.089	-0.062	20.547	0.057
13	-0.139	-0.088	22.808	0.044
14	-0.023	0.042	22.869	0.062
15	-0.013	-0.107	22.890	0.087
16	-0.076	-0.012	23.596	0.099
17	-0.078	-0.025	24.346	0.110
18	-0.068	-0.076	24.914	0.127
19	0.027	0.098	25.009	0.160
20	0.108	0.055	26.508	0.150
21	0.041	0.002	26.723	0.180
22	-0.027	0.011	26.818	0.218
23	-0.029	0.018	26.930	0.259
24	0.011	-0.014	26.946	0.307
25	0.029	0.008	27.064	0.353
26	-0.094	-0.128	28.285	0.345
27	-0.272	-0.237	38.613	0.069
28	-0.105	0.087	40.189	0.064
29	0.205	0.144	46.238	0.022
30	0.126	-0.091	48.541	0.017
31	-0.142	-0.094	51.501	0.012
32	-0.113	0.091	53.409	0.010
33	0.030	-0.039	53.550	0.013
34	0.096	0.086	54.989	0.013
35	-0.018	-0.023	55.038	0.017
36	-0.110	-0.065	56.956	0.015

Şekil 5.18. X_{8t} serisinin ACF ve PACF grafiği

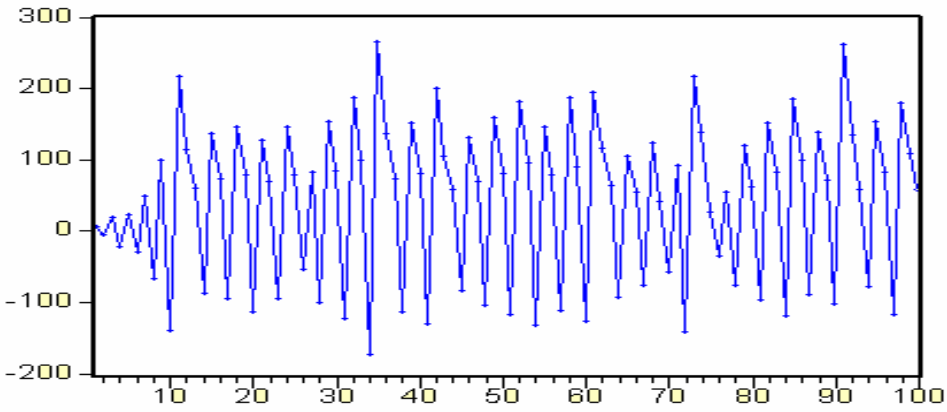
Şekil 5.17'ye bakıldığına bir önceki serinin aksine ortalamasının sabit olduğu görülmektedir ve bu da serinin durağan olabileceğine bir işarettir. Şekil 5.18'deki otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon grafiklerine bakıldığında ne otokorelasyonların ne de kısmi otokorelasyonların düzenli bir şekilde azalarak sıfıra yaklaşmadığı görülmektedir. Bu durumda seri için AR yada MA modeli önerilememekte ARMA modeli önerilmektedir ve ARMA modelinin derecesi grafikler yardımıyla belirlenememektedir. Gerçekte bu seri $X_{8t} = \alpha X_{8,t-1} + e_t + \beta e_{t-1}$ şeklindeki ARMA(1,1) modelinden $\alpha = -0.1$, $\beta = 1.5$ için rasgele üretilerek elde edilmiştir.

5.2. Doğrusal Olmayan Zaman Serisi Modelleri

Bu kesimde, doğrusal olmayan zaman serisi modellerinden düzgün geçişli otoregresif ve eşiksel otoregresif modellerinden üretilen çeşitli serilerin sergilediği davranışlar grafiklerle incelenmiştir.

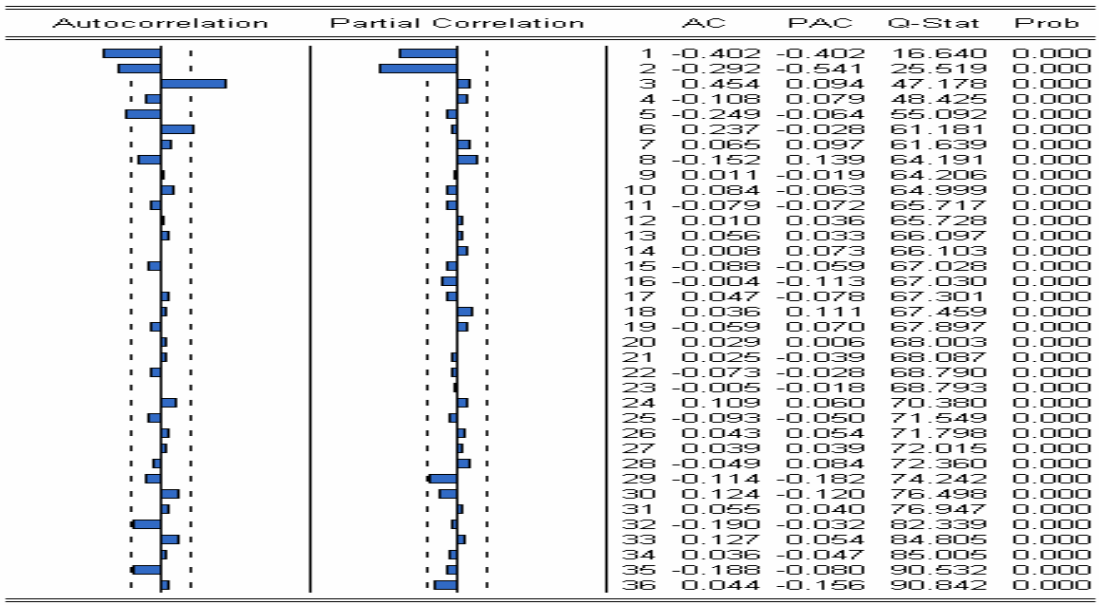
5.2.1. STAR Modelleri

Seri 1. Simülasyonla $n = 100$ birimlik bir seri (X_{1t}) üretilmiş ve bu serinin grafiği Şekil 5.21'de verilmiştir.



Şekil 5.19. X_{1t} serinin grafiği

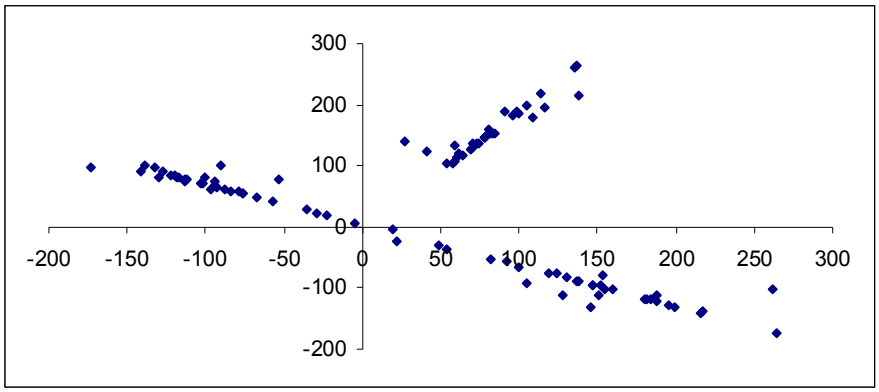
Şekil 5.19'a bakıldığında serinin sabit bir ortalama etrafında aşağı ve yukarı yönde düzenli salınımlar sergilediği görülmektedir. Bu serinin ACF ve PACF grafikleri ise Şekil 5.20'de verilmiştir.



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.402	-0.402	16.640	0.000
2	-0.292	-0.541	25.519	0.000
3	0.454	0.094	47.178	0.000
4	-0.108	0.079	48.425	0.000
5	-0.249	-0.064	55.092	0.000
6	0.237	-0.028	61.181	0.000
7	0.065	0.097	61.639	0.000
8	-0.152	0.139	64.191	0.000
9	0.011	-0.019	64.206	0.000
10	0.084	-0.063	64.999	0.000
11	-0.079	-0.072	65.717	0.000
12	0.010	0.036	65.728	0.000
13	0.056	0.033	66.097	0.000
14	0.008	0.073	66.103	0.000
15	-0.088	-0.059	67.028	0.000
16	-0.004	-0.113	67.030	0.000
17	0.047	-0.078	67.301	0.000
18	0.036	0.111	67.459	0.000
19	-0.059	0.070	67.897	0.000
20	0.029	0.006	68.003	0.000
21	0.025	-0.039	68.087	0.000
22	-0.073	-0.028	68.790	0.000
23	-0.005	-0.018	68.793	0.000
24	0.109	0.060	70.380	0.000
25	-0.093	-0.050	71.549	0.000
26	0.043	0.054	71.798	0.000
27	0.039	0.039	72.015	0.000
28	-0.049	0.084	72.360	0.000
29	-0.114	-0.182	74.242	0.000
30	0.124	-0.120	76.498	0.000
31	0.055	0.040	76.947	0.000
32	-0.190	-0.032	82.339	0.000
33	0.127	0.054	84.805	0.000
34	0.036	-0.047	85.005	0.000
35	-0.188	-0.080	90.532	0.000
36	0.044	-0.156	90.842	0.000

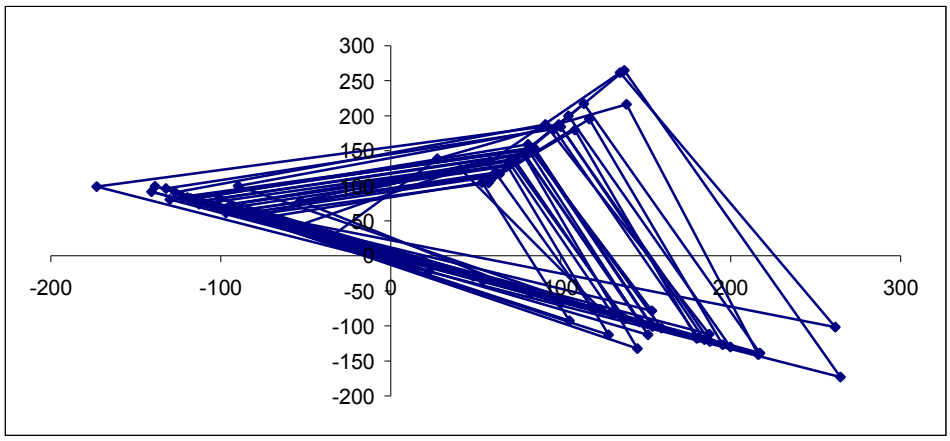
Şekil 5.20. X_{1t} serisinin ACF ve PACF grafikleri

Şekil 5.20'ye bakıldığında X_{1t} serisinin AR yada MA yapısına uygun olmadığı dolayısıyla bu iki modelin birleşimi olan ARMA modelleri ile modellenebileceği düşünülebilir. Ancak bazı durumlarda sadece serinin ACF ve PACF grafiklerine bakarak seri için model belirlemek her zaman doğru sonuçlar vermeyebilmektedir. Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayıları zaman serisinin farklı dönemleri arasındaki doğrusal ilişkinin derecesini ve yönünü verdiğinden, serinin farklı dönemleri arasındaki ilişkinin doğrusal olmaması durumunda bu katsayılar anlamını yitirmektedir. Burada X_{1t} serisinin farklı dönemleri arasındaki ilişkisinin şeklini ortaya koyabilmek için X_{1t-1}'e karşı nokta grafiği çizilmiş ve Şekil 5.21'de gösterilmiştir.



Şekil 5.21. X_{1t-1}'e karşı X_{1t}'nin nokta grafiği

Şekil 5.21'den, X_{1t} serisi ile X_{1t-1} arasındaki ilişkinin doğrusal olmadığı açıkça görülmektedir. Ayrıca grafikte iki tane doğrusal parça olduğu düşünüldüğünde X_{1t} ile X_{1t-1} arasındaki ilişkinin iki parçalı doğrusal modeller ile yada geçişli modeller ile modellenebileceği söylenebilir. Yaklaşık olarak X_{1t-1}'in 50'den büyük değerleri için iki ayrı doğrusal yapı olduğundan parçalı modellerin bu seri için pek uygun olmadığı söylenebilir. X_{1t} serisinde doğrusal olmayan bir yapının olup olmadığını anlamak amacıyla X_{1t}'nin X_{1t-1}'e göre yönlendirilmiş saçılım grafiği çizilmiş ve Şekil 5.22'de verilmiştir.



Şekil 5.22. X_{1t-1}'e karşı X_{1t}'nin yönlendirilmiş saçılım grafiği

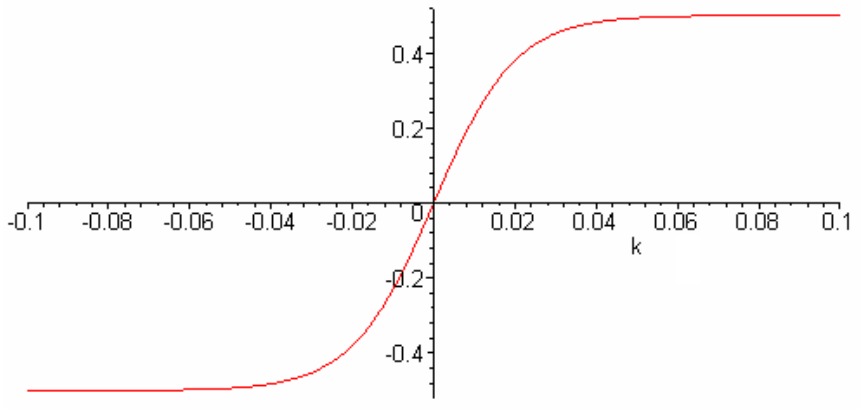
Şekil 5.22'e bakıldığında ulaşılamayan bir iç bölgenin varlığı görülmektedir ve bu durum daha önce de bahsedildiği gibi X_{1t} serisi ile X_{1t-1} arasında doğrusal olmayan bir yapının varlığını işaret etmektedir. Esasında X_{1t} serisi, geçiş fonksiyonu

$$g = \frac{1}{1+\exp\left[-\gamma\left(X_{1t-1}-c\right)\right]} - 0.5$$

şeklinde olmak üzere

$$X_{1t} = 5 - 0.5X_{1t-1} + \left(2X_{1t-1}\right)g + e_t\,, \quad e_t \sim WN\left(0,9\right) \tag{5.1}$$

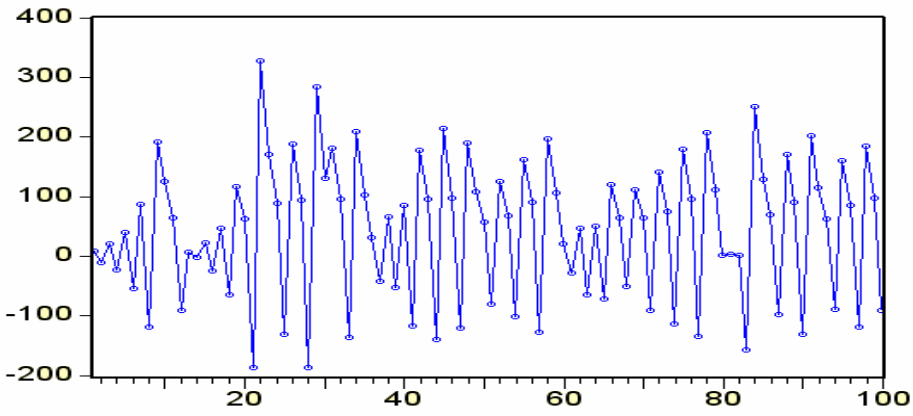
şeklindeki LSTAR modelinden $\gamma = 100$ ve $c = 100$ için üretilmiştir. Bu modelde yer alan g geçiş fonksiyonunun $\gamma = 100$ için $X_{1t-1} - c$'ye göre grafiği Şekil 5.23'de verilmiştir.



Şekil 5.23. $\gamma = 100$ için g fonksiyonunun $X_{1t-1} - c$'ye göre grafiği

Şekil 5.23'e bakıldığında $\gamma = 100$ olmak üzere g fonksiyonu $X_{1t-1} - c$'nin yeteri kadar küçük ve yeteri kadar büyük değerleri için sırasıyla -0.5 ve 0.5 değerlerine hızlı bir şekilde yakınsamaktadır. STAR modellerinde yer alan bu g fonksiyonu iki modelin ağırlık fonksiyonu olarak da yorumlanmaktadır. Buna göre $X_{1t-1} - c$'nin küçük değerleri için $X_{1t} = 5 - 1.5X_{1t-1} + e_t$ modeline, büyük değerleri için ise $X_{1t} = 5 + 0.5X_{1t-1} + e_t$ modeline daha fazla ağırlık yüklenmektedir.

Seri 2. Bir önceki seriden faklı olarak $\gamma = 1$ alındığında üretilen $n = 100$ birimlik serinin (X_{2t}) grafiği Şekil 5.24'de verilmiştir.

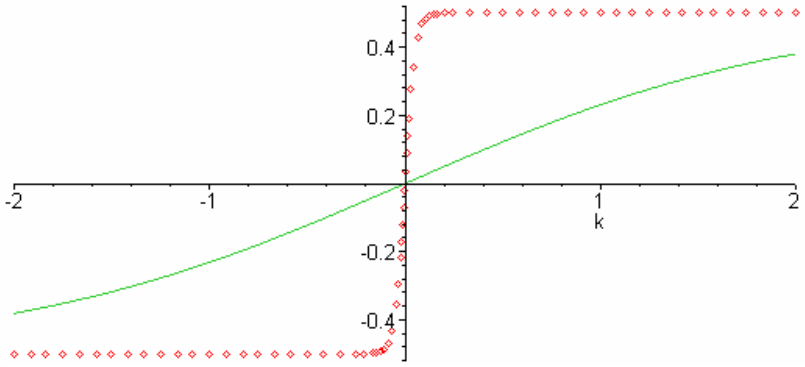


Şekil 5.24. X_{2t} serinin grafiği

Şekil 5.24'e bakıldığında X_{1t} serisi gibi X_{2t} serisinin de sabit bir ortalama etrafında değişim gösterdiği ancak X_{2t} serisindeki aşağı ve yukarı yöndeki salınımların X_{1t}'ninkinden daha düzensiz olduğu görülmektedir. Bunun sebebi modelde yer alan

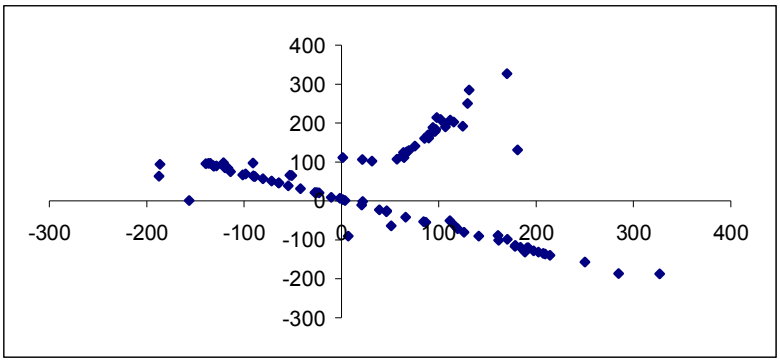
$$g = \frac{1}{1+\exp\left[-\gamma\left(X_{2t-1}-c\right)\right]} - 0.5$$

geçiş fonksiyonunun -0.5 ve 0.5 değerlerine çok daha geç yakınsama sağlamasıdır. Bu durum g fonksiyonunun $X_{2t-1}-c$'ye karşı çizilen grafiğinden açıkça görülmektedir. Bu grafik Şekil 5.25'de verilmiştir.



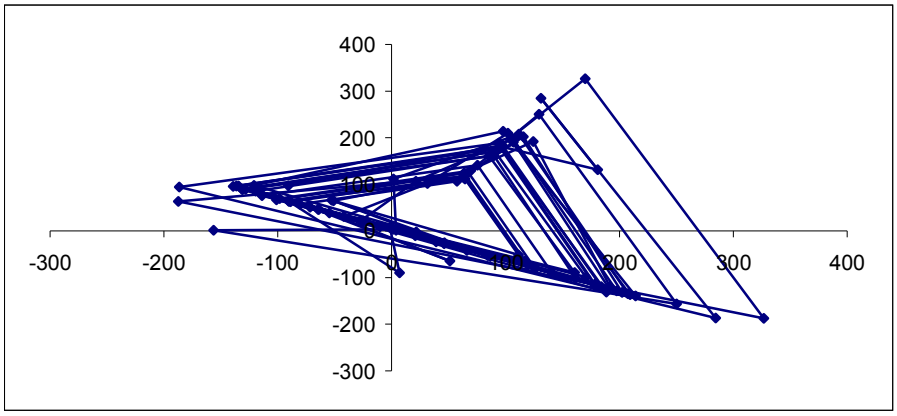
Şekil 5.25. $\gamma = 1$ ve $\gamma = 100$ için g fonksiyonunun $X_{t-1}-c$'ye göre grafiği

Şekil 5.25'de $\gamma = 1$ durumu sürekli çizgi ile ve $\gamma = 100$ durumu noktalı olarak gösterilmiştir. Burada X_{2t} serisinin farklı dönemleri arasındaki ilişkisinin şeklini ortaya koyabilmek için X_{2t-1}'e karşı nokta grafiği çizilmiş ve Şekil 5.26'da gösterilmiştir.



Şekil 5.26. X_{2t-1}'e karşı X_{2t}'nin nokta grafiği

Şekil 5.26'e bakıldığında X_{1t} serisi ile benzer sonuçların elde edildiği görülmektedir. Ayrıca X_{2t} serisinde doğrusal olmayan bir yapının olup olmadığını anlamak amacıyla X_{2t}'nin X_{2t-1}'e göre çizilen yönlendirilmiş saçılım grafiğinden de X_{1t} serisindekine benzer sonuçlar elde edilmiştir.

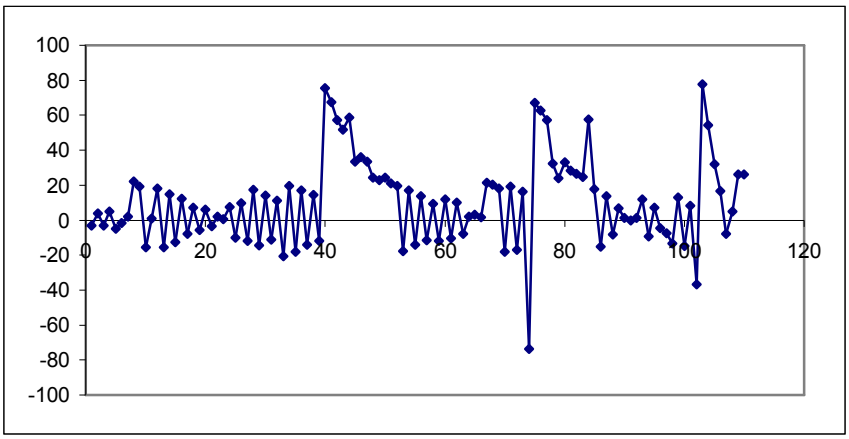


Şekil 5.27. X_{2t-1}'e karşı X_{2t}'nin yönlendirilmiş saçılım grafiği

Bu grafikten de X_{2t} serisinde doğrusal olmayan bir yapının varlığı açıkça görülmektedir.

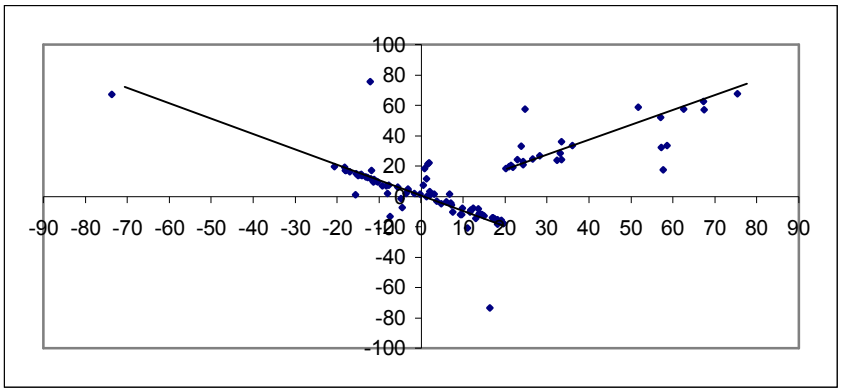
5.2.2. TAR Modelleri

Seri 3. Simülasyonla $n = 100$ birimlik bir seri (X_{3t}) üretilmiş ve bu serinin grafiği Şekil 5.28'de verilmiştir.



Şekil 5.28. X_{3t} serisinin grafiği

Şekil 5.28'e bakıldığında serinin sıfır etrafında salınımlar gösterdiği ve bu salınımların bazı dönemlerde oldukça fazla olduğu görülmektedir. Bu serinin, farklı dönemleri ile arasındaki ilişkisinin şeklini ortaya koyabilmek için $X_{3,t-1}$'e karşı nokta grafiği çizilmiş ve Şekil 5.29'da gösterilmiştir.



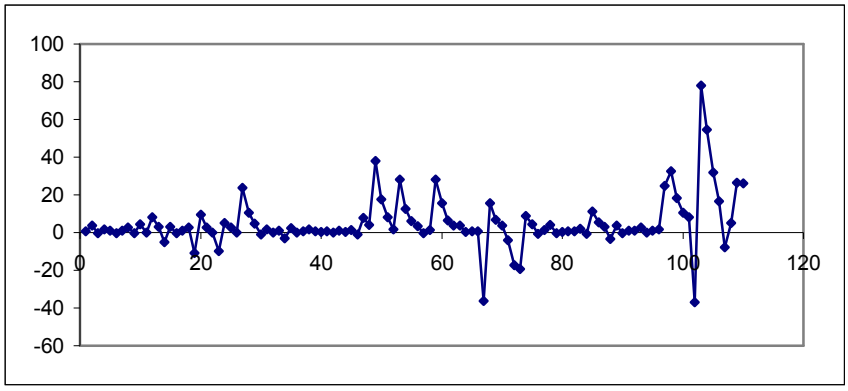
Şekil 5.29. $X_{3,t-1}$'e karşı X_{3t}'nin nokta grafiği

Şekil 5.29'dan, X_{3t} serisi ile $X_{3,t-1}$ arasındaki ilişkinin doğrusal olmadığı açıkça görülmektedir. Ayrıca grafikte $X_{3,t-1} < 20$ için X_{3t}'nin doğrusal bir şekilde azalan ve $X_{3,t-1} > 20$ için X_{3t}'nin doğrusal bir şekilde artan bir yapı sergilediği görülmektedir. Burada iki tane doğrusal parça olduğu düşünüldüğünde X_{3t} ile $X_{3,t-1}$ arasındaki ilişkinin iki parçalı doğrusal modeller ile modellenebileceği söylenebilir. Gerçekte bu seri

$$X_{3t} = \begin{cases} 1 - 0.9X_{3,t-1} + \varepsilon_t & , \quad X_{3,t-1} < 20 \\ 1 + 0.9X_{3,t-1} + \varepsilon_t & , \quad X_{3,t-1} \geq 20 \end{cases}$$

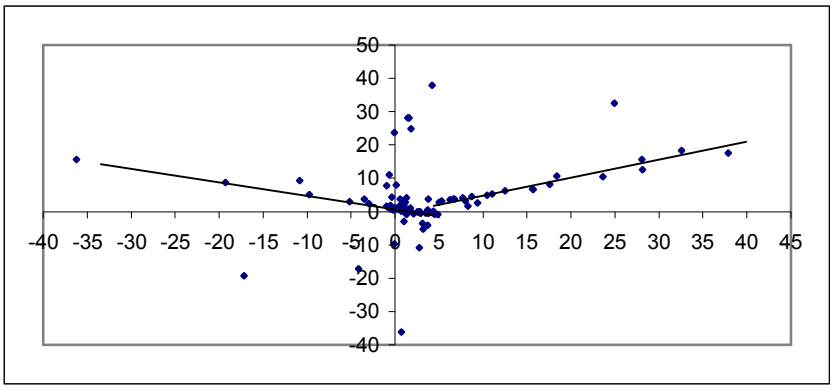
şeklindeki iki parçalı bir $TAR(1)$ modelinden üretilmiştir.

Seri 4. TAR(1) modelinden üretilen başka bir serinin (X_{4t}) grafiği Şekil 5.30'da verilmiştir.



Şekil 5.30. X_{4t} serisinin grafiği

Şekil 5.30'a bakıldığında bu serinin de sıfır etrafında değerler aldığı ve bir önceki seriyle karşılaştırıldığında salınımların daha küçük olduğu görülmektedir. Bu serinin, farklı dönemleri ile arasındaki ilişkisinin şeklini ortaya koyabilmek için $X_{4,t-1}$'e karşı nokta grafiği çizilmiş ve Şekil 5.31'de gösterilmiştir.



Şekil 5.31. $X_{4,t-1}$'e karşı X_{4t}'nin nokta grafiği

Şekil 5.31'den, X_{4t} serisi ile $X_{4,t-1}$ arasındaki ilişkinin ilk seriye benzer şekilde doğrusal olmadığı açıkça görülmektedir. Ayrıca Şekil 4'de $X_{4,t-1} < 5$ için X_{4t}'nin doğrusal bir şekilde azalan ve $X_{4,t-1} > 5$ için X_{4t}'nin doğrusal bir şekilde artan bir yapı sergilediği görülmektedir. Yani X_{4t} serisi için de TAR(1) modeli düşünülebilir. Ancak bu artma ve azalmalar X_{3t} serisindekine göre daha yavaştır. Bu da X_{4t} serisi için $X_{4,t-1}$'in katsayısının, X_{3t} serisinin üretildiği modeldeki $X_{3,t-1}$'in katsayısından mutlak değerce daha küçük olduğu anlamına gelmektedir. Gerçekte bu seri

$$X_{1t} = \begin{cases} 1 - 0.4X_{1,t-1} + \varepsilon_t & , \quad X_{1,t-1} < 5 \\ 1 + 0.4X_{1,t-1} + \varepsilon_t & , \quad X_{1,t-1} \geq 5 \end{cases}$$

şeklindeki $TAR(1)$ modelinden üretilmiştir.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, doğrusal ve doğrusal olmayan bazı zaman serisi modelleri, modellerden simülasyonla üretilen seriler yardımıyla grafiksel olarak incelenmiştir. Her bir model, kendi içinde farklı model parametreleri için ayrı ayrı ele alınmıştır. Doğrusal zaman serileri için uygun bir modelin belirlenmesinde ACF ve PACF grafiklerinin oldukça faydalı oldukları görülmektedir. Ancak seride trend olması durumunda bu grafiklerin pek anlamlı sonuçlar vermedikleri görülmüştür. Aynı zamanda ACF ve PACF grafikleri doğrusal olmayan zaman serileri için model belirlemede pek kullanışlı olmadıkları görülmüştür. Doğrusal olmayan zaman serileri için model belirleyebilmek veya en azından seride doğrusal olmayan bir yapının varlığını tespit edebilmek için, serinin geçmiş değerlerine karşı çizilen grafiklerinin oldukça faydalı oldukları görülmüştür.

KAYNAKLAR

Akdi, Y., (2003), Zaman Serileri Analizi (Birim Kökler ve Kointegreasyon), Bıçaklar Kitabevi, Ankara.

Bacon, D.W., Watts, D.G., (1971), Estimating the transition between two intersecting straight lines, Biometrica, 58, 525-534.

Bollerslev, T., (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", Journal of Econometrics, 31: 307-327.

Box, G.E.P., G.M. Jenkins, (1970), Time series analysis: Forecasting and control, San Francisco, Holden-Day.

Box, G.E., Jenkins, G.M., G.C. Reinsel, (1994), Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-Day, San Fransisco.

Brillinger, D. R., (1965), "An introduction to polyspectra", Ann. Math. Stat., 36: 1351-1374.

Brockwell, P.J., Davis, R.A., (1987), Time Series: Theory and Methods, Springer-Verlag.

Chatfield, C., (1989), The Analysis of Time Series: An Introduction, Chapman &Hall, New York.

Cheong C.W., (2009), "Modeling and forecasting crude oil markets using ARCH-type models." , Energy Policy, 37, 2346–2355.

Christodoulakis, G.A., Satchell, S.E., (2002), "Correlated ARCH (CorrARCH): Modelling the time-varying conditional correlation between financial asset returns.", European Journal of Operational Research,139, 351–370.

Cragg, J., (1982), "Estimation and Testing in Time Series Regression Models with Heteroscedastic Disturbances", Journal of Econometrics, 20: 135-157.

Domain, D.L., Louton, D.A., (1997), " A Threshold Autoregressive Analysis Of Stock Returns And Real Economic Aktivity" ,International Rewiew of Economics and Finance 6(2), 167-179.

Eitrheim, O., ve Teräsvirta, T., (1996), "Testing the Adequacy of Smooth Transition Autoregressive Models", Journal of Ecometrics, 74: 59-75.

Engle, R., (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", Econometrica, 50: 987-1008.

Engle, R. F., (1983), "Estimates of the Variances of U.S. Inflation Based on the ARCH Model", Journal of Money, Credit and Banking, 15: 286-301.

Fan, J., Yao, Q., (2003), Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods, Springer Verlag, New York.

Gooijer, J.G.D., Anguera, A.V., (2003), "Nonlinear stochastic inflation modelling using SEASETARs" , Insurance: Mathematics and Economics, 32, 3–18.

Granger, C.W.J., Teräsvirta T., (1993), Modelling nonlinear economic relationships, Oxford University Press, New York.

Hall, A.D., Skalin, J., Teräsvirta, T., (2001), " A nonlineer time series model of El Nino" , Environmental Modelling & Software,16, 139–146.

Kamarianakis, Y., Prastacos, P., (2005), "Space–time modeling of traffic flow" ,Computers & Geosciences,31, 119-133.

Kotnik, B., Mezgec, Z., Svecko, J., Chowdhury, A., (2009), "Data transmission over GSM voice channel using digital modulation technique based on autoregressive modeling of speech production" , Digital Signal Processing 19, 612–627.

Li W.K., Lam K., (1995), Modelling asymmetry in stock returns by threshold autoregressive conditional heteroscedastic model, The Statistician, 44, 333-341.

Luukkonen, R., Saikkonen, P., ve Teräsvirta, T., (1988), "Testing Linearity against Smooth Transition Autoregressive Models", Biometrika, 75: 491-499.

Narayan, P.K., (2006), "The behaviour of US stock prices: Evidence from a threshold autoregressive model", Mathematics and Computers in Simulation,71, 103–108.

Shen, C.H., Chiang, T.C.N., (1999), "Retrieving the Vanishing Liquidity Effect—A Threshold Vector Autoregressive Model" , Journal of Economics and Business 51, 259–277.

Teräsvirta, T., (1994), "Specification, Estimation, and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models", Journal of the American Statistical Association, 89: 208-218.

Teräsvirta, T., ve Anderson, H., (1992), "Characterizing Nonlinearities in Business Cycles Using Smooth Transition Autoregressive Models", Journal of Applied Econometrics, 7: 119-136.

Tong, H., (1980), A view on non-linear time series model building, In Time Series, North Holland, Amsterdam.

Tong, H., (1983), Threshold Models in Nonlinear Time Series Analysis (Lecture Notes in Statistics, No.21), New York, Springer-Verlag.

Tong, H., (1990), Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach, New York, Oxford University Press.

Tong, H., Lim, K., (1980), "Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclical Data", Journal of the Royal Statistical Society, B42: 245-292.

Tyssedal, J.S., Tjostheim, D., (1988), An autoregressive model with suddenly chancing parameters and an application to stoskmarket prices, Application Statistics, 37, 300.

Wei, W.W.S., (1990), Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Zhang, Y. (2002), Testing for nonlinearities in time series with an application to exchange rates, Doktora thesis, Iowa State University, Iowa.