ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

STRES-DAYANIKLILIK MODELİNDE SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİ YÖNTEMİ KULLANILARAK SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİNİN DAYANIKLI TAHMİNİ

FATMA GÜL AKGÜL

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Fatma Gül AKGÜL tarafından hazırlanan **"Stres-Dayanıklılık Modelinde Sıralı Küme Örneklemesi Yöntemi Kullanılarak Sistem Güvenilirliğinin Dayanıklı Tahmini"** adlı tez çalışması 01/10/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri **:**

Başkan : Doç. Dr. Bülent ÇELİK
Gazi Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye **:** Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye **:** Prof. Dr. Olcay ARSLAN
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye **:** Doç. Dr. Vilda PURUTÇUOĞLU GAZİ
Orta Doğu Teknik Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye **:** Yrd. Doç. Dr. İhsan KARABULUT
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

01.10.2015

Fatma Gül AKGÜL

ÖZET

Doktora Tezi

STRES-DAYANIKLILIK MODELİNDE SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİ YÖNTEMİ KULLANILARAK SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİNİN DAYANIKLI TAHMİNİ

Fatma Gül AKGÜL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

İstatistik literatüründe, sistem güvenilirliği $R=P(X<Y)$'nin basit rastgele örnekleme (SRS) yöntemine dayalı tahmini yaygın olarak ele alınan bir problemdir. Ancak son yıllarda, SRS'in makul ve etkin bir alternatifi olan sıralı küme örneklemesi (RSS) yöntemi, R'nin tahmininde kullanılmaktadır. Bu çalışmada öncelikle, en çok olabilirlik (ML) yöntemi kullanılarak R'nin RSS'e dayalı tahmin edicileri elde edilecektir. Bu yöntemde olabilirlik denklemlerini çözebilmek için iki farklı yaklaşım kullanılmıştır. Bunlardan ilki iteratif, ikincisi iteratif olmayan yaklaşımdır. İteratif olmayan yaklaşım tahmin edicilerin analitik olarak elde edilebildiği uyarlanmış en çok olabilirlik (MML) yöntemidir. Bu tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde, R'nin ML ve MML tahmin edicileri RSS yönteminin bazı modifikasyonları kullanılarak elde edilmiştir. Bu modifikasyonlar, uç değer sıralı küme örneklemesi (ERSS), meydan sıralı küme örneklemesi (MRSS) ve yüzdelik sıralı küme örneklemesidir (PRSS). Son olarak da, R için istatistiki sonuç çıkarımı II. tip sağdan sansürlü RSS verisine dayalı olarak yapılmıştır. Bu amaçla, R'nin ML ve MML tahmin edicileri II. tip sağdan sansürlü RSS verisine dayalı olarak elde edilmiştir. Monte-Carlo simülasyon çalışması ile önerilen tahmin edicilerin performansları karşılaştırılmıştır. Ayrıca, literatürde yer alan gerçek veri seti kullanılarak önerilen tahmin edicilerin klasik tahmin edicilerden daha etkin sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Ekim 2015, 154 sayfa

Anahtar Kelimeler: Stres-dayanıklılık modeli, sıralı küme örneklemesi, uçdeğer sıralı küme örneklemesi, medyan sıralı küme örneklemesi, yüzdelik sıralı küme örneklemesi, II. tip sağdan sansürleme, Monte-Carlo simülasyonu, uyarlanmış en çok olabilirlik, etkinlik, Weibull.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ROBUST ESTIMATION OF SYSTEM RELIABILITY IN STRESS-STRENGTH MODEL USING RANKED SET SAMPLING

Fatma Gül AKGÜL

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

In statistical literature, estimation of the system reliability $R=P(X<Y)$ is current problem, therefore, there are considerable number of studies dealing with the estimation of it under simple random sampling (SRS) data. However, in recent years, ranked set sampling (RSS) method which is cost effective and efficient alternative of SRS is widely used in the estimation of R. In the context of this problem, firstly we obtain the estimators of R based on RSS by using maximum likelihood (ML) methodology. The likelihood equations are solved by using two different approaches. First approach is iterative and the other one is non-iterative. As a non-iterative approach which is known as modified maximum likelihood (MML) provides explicit solution for the estimators. Then, we extent this problem to the modifications of RSS, such as extreme ranked set sampling (ERSS), median ranked set sampling (MRSS) and percentile ranked set sampling (PRSS). Therefore, we obtain the estimators of R by using ML and MML methodology under these modifications. Finally, we make statistical inference about the system reliability R under the type-II right censored RSS data. We derive ML and MML estimators of R under the type-II right censored RSS data. We then compare the performances of proposed estimators via Monte-Carlo simulation studies. Also, the proposed estimators have been shown to be more efficient than classical estimators by using real data set taken from literature.

October 2015, 154 pages

Key Words: Stress-strength model, ranked set sampling, extreme ranked set sampling, median ranked set sampling, percentile ranked set sampling, type-II right censoring, Monte-Carlo simulation, modified maximum likelihood, efficiency, Weibull.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimi almak üzere gelmiş olduğum Ankara Üniversitesinde tanıdığım ve tanıdığım ilk günden beri güler yüzlü, insancıl kişiliği ile bana bu üniversiteyi sevdiren, gerek akademik gerekse de kişisel tüm problemlerimi çözmemde bana en büyük desteği sağlayan, en büyük şansım danışman hocam Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU'na (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) en içten duygularımla teşekkür ederim.

Tez önerisinden itibaren çalışmamı titizlikle takip eden, yapıcı eleştiri ve görüşlerini esirgemeden çalışmama katkı sağlayan Tez İzleme Komitesi hocalarım Prof. Dr. Olcay ARSLAN (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) ve Doç. Dr. Vilda PURUTÇUOĞLU'na (Ortadoğu Teknik Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) çok teşekkür ederim.

Üniversite hayatımın ilk gününden beri tanıdığım zaman içerisinde arkadaşım, dostum ve "CAN" kardeşim olan, bu yola beraber baş koyduğum Arş. Gör. Fatma Zehra DOĞRU'ya, bir abla gibi her zaman yanımda olan değerli arkadaşım Yrd. Doç. Dr. Demet AYDIN'a, tez çalışmam süresince manevi desteklerini benden esirgemeyen değerli arkadaşlarım Arş. Gör. Dr. Şükrü ACITAŞ ve Arş. Gör. Dr. M. S. Talha ARSLAN'a en kalbi duygularımla teşekkür ederim.

Aramızda mesafeler olsa da anne-baba olmanın vermiş olduğu şefkatle beni koruyup gözeten annem Hayriye AKGÜL ve babam Ali AKGÜL'e, beni bu yolda ilerlemeye teşvik eden ve yol gösteren aramızdaki güçlü kardeşlik bağı sayesinde kilometrelerce uzakta olsa da aslında bir nefes kadar yakınımda olan ablam Pınar AKGÜL'e ve esprili kişiliğe ile daima yüzümü güldüren kardeşim Gökhan AKGÜL'e en içten duygularımla teşekkür ederim.

2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TUBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Fatma Gül AKGÜL
Ankara, Ekim 2015

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK ..... **i**
ÖZET ..... **ii**
ABSTRACT ..... **iii**
TEŞEKKÜR ..... **iv**
KISALTMALAR DİZİNİ ..... **vii**
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **viii**
ÇİZELGELER DİZİNİ ..... **ix**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Sıralı Küme Örneklemesi **1**
1.1.1 RSS yöntemi ile örneklem belirleme adımları **2**
1.1.2 Kitle ortalaması tahmin edicilerinin karşılaştırılması **5**
1.1.3 RSS yöntemi ile ilgili bazı temel kavramlar **9**
1.1.4 RSS yöntemine ilişkin literatür çalışması **10**
1.1.5 RSS yönteminin bazı modifikasyonları **13**
1.1.5.1 Uç Değer Sıralı Küme örneklemesi **13**
1.1.5.2 Medyan Sıralı Küme örneklemesi **15**
1.1.5.3 Yüzdelik Sıralı Küme örneklemesi **16**
1.2 Stres-Dayanıklılık Modeli **18**
1.2.1 Tanım **18**
1.2.2 SSM'ye ilişkin literatür çalışması **19**
1.2.3 Matematiksel model **21**
1.3 Sansürleme **22**
1.4 Parametre Tahmini **23**
1.4.1 En Çok Olabilirlik yöntemi **23**
1.4.2 Uyarlanmış En Çok Olabilirlik Yöntemi **23**
2. SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİNİN TAHMİNİ: WEİBULL DAĞILIMI **26**
2.1 Weibull Dağılımı **26**
2.2 *R*'nin SRS'e Dayalı Tahmini **29**
2.2.1 *R*'nin ML tahmin edicisi **29**
2.2.2 *R*'nin MML tahmin edicisi **31**
2.2.3 *R*'nin ML tahmin edicisinin asimptotik dağılımı **37**
2.3 *R*'nin RSS'e Dayalı Tahmini **40**
2.3.1 *R*'nin ML tahmin edicisi **41**
2.3.2 *R*'nin MML tahmin edicisi **43**
2.3.3 *R*'nin ML tahmin edicisinin asimptotik dağılımı **49**
2.4 Monte-Carlo Simülasyon Çalışması **54**
3. SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİNİN RSS YÖNTEMİ MODİFİKASYONLARINA DAYALI TAHMİNİ **61**
3.1 *R*'nin ERSS'e Dayalı Tahmini **62**
3.1.1 *R*'nin ML tahmin edicisi **62**
3.1.2 *R*'nin MML tahmin edicisi **67**
3.2 *R*'nin MRSS'e Dayalı Tahmini **77**
3.2.1 *R*'nin ML tahmin edicisi **78**
3.2.2 *R*'nin MML tahmin edicisi **81**

3.3 *R*'nin PRSS'e Dayalı Tahmini 89
3.3.1 *R*'nin ML tahmin edicisi 90
3.3.2 *R*'nin MML tahmin edicisi 95
3.4 Monte-Carlo Simülasyon Çalışması 104
4. II. TİP SAĞDAN SANSÜRLENMİŞ VERİLER İÇİN SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİNİN TAHMİNİ 111
4.1 *R*'nin II. Tip Sağdan Sansürlü SRS Verisine Dayalı Tahmini 112
4.1.1 *R*'nin ML tahmin edicisi 112
4.1.2 *R*'nin MML tahmin edicisi 114
4.2 *R*'nin II. Tip Sağdan Sansürlü RSS Verisine Dayalı Tahmini 118
4.2.1 *R*'nin ML tahmin edicisi 118
4.2.2 *R*'nin MML tahmin edicisi 121
4.3 Simülasyon Çalışması 126
5. UYGULAMA 132
5.1 *R*'nin SRS ve RSS'e Dayalı Tahmini 132
5.2 *R*'nin RSS Modifikasyonlarına Dayalı Tahmini 139
5.3 *R*'nin Sansürlü Gözlem Durumunda Tahmini 141
6. SONUÇ 142
KAYNAKLAR 145
EKLER 155
EK 1 Sistem Güvenilirliğinin SRS, RSS, ERSS, MRSS ve PRSS'e Dayalı ML ve MML Tahmin Edicilerinin Monte-Carlo Simülasyon Çalışması ile Elde Edildiği MATLAB Programı 156
EK 2 Sistem Güvenilirliğinin Sansürlü SRS ve RSS Verisine Dayalı ML ve MML Tahmin Edicilerinin Monte-Carlo Simülasyon Çalışması ile Elde Edildiği MATLAB Program 181
ÖZGEÇMİŞ 188

KISALTMALAR DİZİNİ

$\boldsymbol{R}$	Sistem güvenilirliği
SRS	Basit rastgele örnekleme
RSS	Sıralı küme örneklemesi
ERSS	Uç değer sıralı küme örneklemesi
MRSS	Medyan sıralı küme örneklemesi
PRSS	Yüzdelik sıralı küme örneklemesi
SSM	Stres-dayanıklılık modeli
ML	En çok olabilirlik
MML	Uyarlanmış en çok olabilirlik
$\boldsymbol{MSE}$	Hata kareler ortalaması
$\boldsymbol{RE}$	Göreli etkinlik
$\boldsymbol{pdf}$	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
$\boldsymbol{cdf}$	Dağılım fonksiyonu
$\boldsymbol{Weibull(p,\sigma)}$	p şekil ve σ ölçek parametreli Weibull dağılımı
$\boldsymbol{EV}$	Extreme Value dağılımı
$\boldsymbol{EV(\mu,\eta)}$	μ konum ve η ölçek parametreli EV dağılımı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Weibull dağılımının farklı şekil parametreleri için *pdf* grafikleri.....28

Şekil 5.1.a SRS kullanılarak çekilen veri Seti I için Q-Q grafiği, b. Ampirik *cdf* ile parametre tahmin değerlerine dayalı *cdf* grafikleri 135

Şekil 5.2.a SRS kullanılarak çekilen veri Seti II için Q-Q grafiği, b. Ampirik *cdf* ile parametre tahmin değerlerine dayalı *cdf* grafikleri 136

Şekil 5.3.a. RSS kullanılarak çekilen veri Seti I için Q-Q grafiği, b. Ampirik *cdf* ile parametre tahmin değerlerine dayalı *cdf* grafikleri 137

Şekil 5.4.a. RSS kullanılarak çekilen veri Seti II için Q-Q grafiği, b. Ampirik *cdf* ile parametre tahmin değerlerine dayalı *cdf* grafikleri 137

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1 Dengeli RSS ile elde edilen örneklem 10

Çizelge 1.2 Dengeli Olmayan RSS ile elde edilen örneklem 10

Çizelge 1.3 ERSS ile örneklem seçimi 14

Çizelge 1.5 Küme çapı çift ise PRSS ile örneklem seçimi 17

Çizelge 1.6 Küme çapı tek ise PRSS ile örneklem seçimi 18

Çizelge 2.1 Tahmin edicilerin SRS ve RSS'e dayalı *yan* ve *RE* değerleri 57

Çizelge 2.2 ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımı kullanılarak SRS ve RSS'e dayalı aralık uzunlukları 60

Çizelge 3.1 Tahmin edicilerin RSS, ERSS, MRSS ve PRSS'e dayalı *yan* ve *RE* değerleri 108

Çizelge 4.1 Sansürlü veri için *R*'nin SRS ve RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin *yan* ve *RE* değerleri 129

Çizelge 5.1 Veri Seti I (20 mm lik mastar boyu) 133

Çizelge 5.2 Veri Seti II (50 mm lik mastar boyu) 133

Çizelge 5.3 *Dayanıklılık* veri setinden SRS yöntemi kullanılarak çekilen veri seti, $n=m=21$ 134

Çizelge 5.4 *Dayanıklılık* veri setinden RSS yöntemi kullanılarak çekilen veri seti, $m_x=m_y=3$, $r_x=r_y=7$, $n=m=21$ 134

Çizelge 5.5 SRS'e dayalı *veri seti I* ve *veri seti II*'nin şekil ve ölçek parametrelerinin ML tahmini 135

Çizelge 5.6 RSS'e dayalı *veri seti I* ve *veri seti II*'nin şekil ve ölçek parametrelerinin ML tahmini 135

Çizelge 5.7 Sistem güvenilirliğinin ML ve MML tahmin değerleri 138

Çizelge 5.8 SRS ve RSS'e dayalı *veri seti I* ve *veri seti II*'nin şekil ve ölçek parametrelerinin ML tahmini 139

Çizelge 5.9 Sistem güvenilirliğinin ML ve MML tahmin değerleri 140

Çizelge 5.10 Sistem güvenilirliğinin II. tip sağdan %19 oranında sansürlenmiş veri için ML ve MML tahmin değerleri 141

1. GİRİŞ

Bu bölümde, çalışmanın içeriğine ilişkin ihtiyaç duyulan temel kavramlara ve literatür çalışmalarına yer verilmiştir.

Bu çalışmada, stres-dayanıklılık modelinin sistem güvenilirliği, basit rastgele örnekleme yönteminin yanı sıra bu yönteme alternatif olarak önerilmiş sıralı küme örneklemesi yöntemi kullanılarak tahmin edilmiştir. Bu amaçla, öncelikle sıralı küme örneklemesi yöntemine ilişkin temel kavramlara ve bu yöntemle örneklem belirleme aşamalarına değinildikten sonra yöntemin tarihsel gelişimine ve literatür çalışmasına yer verilmiştir. Ayrıca, yöntemin bu tez çalışmasında kullanılacak olan modifikasyonları üzerinde durulmuştur. Daha sonra, stres-dayanıklılık modeli ve bu modelin sistem güvenilirliği hakkında genel bilgiler verilmiştir. Stres-dayanıklılık modeline ilişkin literatür çalışmasına yer verildikten sonra modelin matematiksel ifadesine değinilmiştir. Sansürleme hakkında genel bilgiler verildikten sonra sistem güvenilirliğinin tahmin etmek için kullanılan tahmin yöntemleri ile ilgili bilgilere yer verilmiştir.

1.1 Sıralı Küme Örneklemesi

İstatistik bilimi, başta biyoloji, ekoloji, mühendislik, tıp, fizik, zirai ve sosyal bilimler olmak üzere birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. İlgilenilen kitle hakkında istatistiki sonuç çıkarımı yapabilmek için yapılması gereken, en doğru veriyi elde etmek ve bu veriyi kullanarak bilimsel sorunlara çözüm getirmektir. Bu amaçla öncelikle, ilgilenilen kitleyi en doğru şekilde yansıtan örneklemin belirlenmesi gerekmektedir.

Kitle hakkında sonuç çıkarımı yapabilmek için kullanılan en yaygın örneklem belirleme yöntemi basit rastgele örneklemedir (simple random sampling, SRS). SRS yöntemi sonlu büyüklükteki bir kitleden, her bir örneklem birimine eşit seçilme olasılığı vererek, n birimlik bir örneklemin iadeli veya iadesiz olarak seçilmesi esasına dayanır. Bu yöntem her ne kadar uygulama ve analiz açısından kolaylık sağlasa da, homojen olmayan bir kitleden elde edilen rastgele örneklemin kitleyi doğru bir şekilde temsil

ettiğinin garantisi yoktur. Bunun yanı sıra, büyük çaplı örneklem seçiminde zaman, emek ve maliyet açısından dezavantajlıdır.

SRS yönteminin yanı sıra uygulamada yaygın olarak kullanılan örnekleme yöntemleri tabakalı örnekleme (stratified sampling), sistematik örnekleme (systematic sampling) ve küme örneklemesi (cluster sampling) olarak sıralanabilir.

SRS yöntemine alternatif olarak önerilen sıralı küme örneklemesi yöntemi (ranked set sampling, RSS) örneklem birimlerinin ilgilenilen değişkene göre ölçümlerinin yapılmasının maliyet, zaman, emek vb. faktörler bakımından oldukça zor olduğu; ancak ilgilenilen değişkenin özellikleri bakımından sıralamanın görsel karşılaştırma, uzman görüşü, deneyimler veya yardımcı değişkenler kullanılarak yapılabildiği durumlarda ilk kez McIntyre (1952) tarafından mera ve tarımsal arazilerde ortalama verimi tahmin etmek için kullanılmıştır.

Bir kitleden elde edilen örneklem birimlerine ait gözlemlerin gerçek ölçümlerinin yapılmasıyla elde edilen örnekleme yöntemlerinin aksine, RSS yöntemi örneklem birimlerinin ilgilenilen değişkene göre gerçek ölçümü yapmaksızın uzman görüşü, görsel karşılaştırma, yardımcı değişkenler vb. yöntemler kullanılarak sıralanması esasına dayanır.

1.1.1 RSS yöntemi ile örneklem belirleme adımları

RSS yöntemi ile örneklem belirlenirken SRS yönteminden farklı olarak bazı adımlar izlenir. Bu adımlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Adım 1: RSS yöntemi ile örneklem elde etmek için öncelikle ilgilenilen kitleden SRS yöntemi ile m birimlik m tane örneklem seçilir. SRS yöntemi ile elde edilen her bir m birim küme olarak adlandırılır.

$$Küme\ 1: \quad X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_m$$

Adım 2: Daha sonra ilk m birim ilgilenilen özelliğe (boy, kilo vb.) göre gerçek ölçüm yapılmaksızın; uzman görüşü, görsel karşılaştırma veya yardımcı değişkenler kullanılarak kendi içinde küçükten büyüğe doğru sıralanır. Bu sıralamada en küçük olduğuna hükmedilen değer RSS örnekleminin ilk elemanı olarak seçilir ilgilenilen özelliğe göre gerçek ölçüm değeri elde edilir. Bu ölçüm değeri $X_{[1]}$ sembolü ile gösterilir. Burada, en küçük sıra istatistiğini göstermek için geleneksel yuvarlak parantez yerine köşeli parantez kullanılmıştır. Çünkü, $X_{[1]}$ SRS yöntemi ile çekilen m birimlik örneklemde ilgilenilen özelliğin ölçülen değeri bakımından sıralamada en küçük değeri alabileceği gibi bu değeri alamayabilir. SRS yöntemi ile seçilen örneklemde $X_{[1]}$'in dışında kalan diğer $m-1$ birimin kullanılmasının tek amacı gerçek ölçümü yapılmadan elde edilen sıralamada en küçük değere sahip birimin seçilmesine yardımcı olmaktır. Bir başka deyişle, bu $m-1$ gözlem kitle hakkında herhangi bir istatistiksel çıkarım yapılırken dikkate alınmaz. Adım 2 aşağıda gösterildiği gibi de ifade edilebilir.

<u>Sıralanan Gözlemler</u>

$1.Küme: \quad \boldsymbol{X_{(1)1}} \quad X_{(2)1} \quad \dots \quad X_{(m)1}$ ise

RSS örneklemine alınan değişken: $X_{(1)1} = X_{[1]}$ olarak ifade edilir.

Not: Tezin bu kısmında ve geri kalanında RSS yönteminden bahsedilirken kullanılan

"sıralanan gözlemler"

ifadesi gerçekte

"gerçek ölçümü yapılmadan sıralanan gözlemler"

anlamında kullanılmaktadır.

Adım 3: SRS yöntemi ile seçilen ikinci m birimin veya ikinci kümenin elemanları gerçek ölçümü yapılmaksızın kendi içinde küçükten büyüğe doğru sıralanır. Sıralı birimlerin en küçük ikinci gözlemi gerçek ölçümü yapıldıktan sonra RSS'in ikinci

elemanı olarak örnekleme dahil edilir ve $X_{[2]}$ ile gösterilir. Adım 3 kısaca aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sıralanan Gözlemler

$2.Küme$: $X_{(1)2}$ $\boldsymbol{X_{(2)2}}$ ... $X_{(m)2}$ ise

RSS örneklemine alınan değişken: $X_{(2)2} = X_{[2]}$ olarak ifade edilir.

Adım 4: SRS yöntemi ile seçilen $m.$ kümenin elemanları gerçek ölçümü yapılmaksızın ilgilenilen özelliklerine göre sıralanır. Sıralı birimlerin en büyük gözlemi gerçek ölçümü yapıldıktan sonra RSS'in $m.$ elemanı olarak örnekleme dahil edilir ve $X_{[m]}$ ile gösterilir. Adım 4 aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sıralanan Gözlemler

$m.Küme$: $X_{(1)m}$ $X_{(2)m}$ ... $\boldsymbol{X_{(m)m}}$ ise

RSS örneklemine alınan değişken: $X_{(m)m} = X_{[m]}$ olarak ifade edilir.

Adım 5: Adım 1-Adım 4'te elde edilen ve $X_{[1]}, X_{[2]}, \dots, X_{[m]}$ olarak gösterilen m tane ölçülmüş gözlem değerini içeren örneklem ile RSS yöntemi kullanılarak örneklem belirleme işlemi tamamlanmış olur. Bu işlem bir döngü olarak adlandırılır. r döngü kullanıldığında $n = mr$ çaplı örneklem elde edilmiş olur.

RSS yöntemi ile örneklem belirleme aşamalarından da görüldüğü gibi, RSS yöntemi ile m çaplı örneklem seçebilmek için SRS ile m çaplı m kümeden toplamda m^2 birim seçilir. Ancak bu birimlerden yalnızca m tanesinin gerçek ölçümleri yapılıp örnekleme alınır.

SRS yöntemi ile RSS yöntemi arasındaki bazı temel farklılıklar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

i) SRS yöntemi ile çekilen n birimlik örneklemdeki gözlemler bağımsız ve aynı dağılıma sahiptir (independent and identically distributed, iid). Bununla beraber, RSS yöntemi ile çekilen n birimlik örneklemdeki gözlemler bağımsız olmasına rağmen açıktır ki, aynı dağılımlı değildir.

ii) Aynı hacimli RSS gözlemlerinin kitleyi temsil etmesi SRS gözlemlerinin kitleyi temsil etmesine göre daha olasıdır, bkz. Chen vd. (2004). Bu nedenledir ki, kitle ortalamasını tahmin ederken RSS yöntemini kullanmak SRS yöntemini kullanmaya göre daha etkindir.

1.1.2 Kitle ortalaması tahmin edicilerinin karşılaştırılması

Bir önceki bölümde, RSS yöntemi kullanılarak elde edilen örneklemin kitle ortalaması tahmin edicisinin, SRS yöntemi ile elde edilen kitle ortalaması tahmin edicisine göre daha etkin olduğuna değinilmişti. Bu bölümde ise örnek teşkil etmesi bakımından SRS yöntemi ve RSS yöntemi ile elde edilmiş iki farklı örneklemlerin kitle ortalaması tahmin edicileri karşılaştırılmıştır.

n gözlem içeren bağımsız iki kümenin sürekli dağılım fonksiyonu F, olasılık yoğunluk fonksiyonu f, sonlu ortalaması μ ve sonlu varyansı σ^2 olsun. İlk n gözlem içeren küme SRS yöntemi ile belirlenip

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

şeklinde elde edilir. İkinci n gözlem içeren küme RSS yöntemi ile elde edilip $n = mr$ m: küme çapı, r: döngü sayısı olmak üzere

$$X_{[1]1}, X_{[2]1}, \dots, X_{[m]1}; X_{[1]2}, X_{[2]2}, \dots, X_{[m]2};\ X_{[1]m}, X_{[2]m}, \dots, X_{[m]r}$$

olarak elde edilir. Bu iki yöntemle elde edilen örneklemler kullanılarak kitle ortalamasının tahmin edicisi elde edilecektir.

SRS yöntemi ile kitle ortalamasının tahmin edicisi

$$\hat{\mu}_{SRS} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \tag{1.1}$$

dir. $\hat{\mu}_{SRS}$'in beklenen değer ve varyansı sırasıyla

$$E(\hat{\mu}_{SRS}) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = E(X) = \mu \tag{1.2}$$

ve

$$Var(\hat{\mu}_{SRS}) = Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n}Var(X) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{1.3}$$

şeklindedir. (1.2)'den de kolaylıkla görülebilir ki, $\hat{\mu}_{SRS}$ kitle ortalaması μ'nün yansız bir tahmin edicisidir.

RSS yöntemi kitle ortalaması $\hat{\mu}_{RSS}$'in tahmin edicisi

$$\hat{\mu}_{RSS} = \bar{X}_{RSS} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{m} \frac{X_{[i]j}}{mr} \tag{1.4}$$

olarak elde edilir. İşlem kolaylığı sağlaması bakımından döngü sayısı $r = 1$ olarak alınıp örneklem oluşturulmuştur. Böylelikle, n örneklem çapı m küme çapına ($n = m$) eşit olur. Kusursuz sıralama (sıralamada herhangi bir hata olmadığı, perfect ranking) varsayımı altında, RSS gözlemleri $X^*_{(1)}, \dots, X^*_{(n)}$ şeklinde gösterilsin. Burada $X^*_{(i)}$ $i = 1,2, \dots, n$ olmak üzere $X^*_{(i)}$ gösterimi $i.$ sıra istatistiğinin dağılımına sahip olduğu anlamına gelmektedir. Böylece kitle ortalamasının RSS tahmin edicisini beklenen değeri

$$E(\hat{\mu}_{RSS}) = E(\bar{X}_{RSS}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X^*_{(i)}\right) \tag{1.5}$$

olarak bulunur. Burada

$$E\left(X_{(i)}^{*}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x)]^{i-1}[1-F(x)]^{n-i}f(x)dx \tag{1.6}$$

şeklinde elde edilir. (1.5) ve (1.6) eşitlikleri birleştirilip

$$\begin{aligned}E(\bar{X}_{RSS})&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}nx\binom{n-1}{i-1}[F(x)]^{i-1}[1-F(x)]^{n-i}f(x)dx\right\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\left\{\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}[F(x)]^{i-1}[1-F(x)]^{n-i}\right\}dx\end{aligned} \tag{1.7}$$

$q=i-1$ olarak alınırsa (1.7)'deki toplamın $\forall x\in\mathbb{R}$ için

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}[F(x)]^{i-1}[1-F(x)]^{n-i}=\sum_{q=0}^{n-1}\binom{n-1}{q}[F(x)]^{q}[1-F(x)]^{n-1-q}=1 \tag{1.8}$$

Binom açılımı kullanılarak 1'e eşit olduğu görülür. Böylece

$$E(\hat{\mu}_{RSS})=E(\bar{X}_{RSS})=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\mu \tag{1.9}$$

olarak elde edilir. Yani $\hat{\mu}_{RSS}$, μ'nün yansız bir tahmin edicisidir.

$\hat{\mu}_{RSS}$'in varyansı elde edilirken, $X_{(i)}^{*}$, $i=1,2,\dots,n$ örneklem birimlerinin bağımsız olduğu bilgisi altında

$$Var(\bar{X}_{RSS})=\frac{1}{n^{2}}\sum_{i=1}^{n}Var\left(X_{(i)}^{*}\right) \tag{1.10}$$

şeklinde yazılabilir. $\mu_{(i)}^{*}=E\left(X_{(i)}^{*}\right)$, $i=1,2,\dots,n$ olarak gösterilmek üzere

$$E\left[\left(X_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2}\right]=E\left[\left(X_{(i)}^{*}-\mu_{(i)}^{*}+\mu_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2}\right]$$
$$=E\left[\left(X_{(i)}^{*}-\mu_{(i)}^{*}\right)^{2}+2\left(X_{(i)}^{*}-\mu_{(i)}^{*}\right)\left(\mu_{(i)}^{*}-\mu\right)+\left(\mu_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2}\right]$$
$$=E\left(X_{(i)}^{*}-\mu_{(i)}^{*}\right)^{2}+2E\left(X_{(i)}^{*}-\mu_{(i)}^{*}\right)\left(\mu_{(i)}^{*}-\mu\right)+\left(\mu_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2}$$
$$=E\left(X_{(i)}^{*}-\mu_{(i)}^{*}\right)^{2}+\left(\mu_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2}$$
$$=Var\left(X_{(i)}^{*}\right)+\left(\mu_{(i)}^{*}-\mu\right) \quad (1.11)$$

olarak elde edilir. Ayrıca (1.10) ve (1.11) eşitlikleri birleştirilerek

$$Var(\bar{X}_{RSS})=\frac{1}{n^{2}}\sum_{i=1}^{n}E\left[\left(X_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2}\right]-\frac{1}{n^{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2} \quad (1.12)$$

bulunur. Burada $\sum_{i=1}^{n}E\left(X_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2}$ ifadesi (1.7) eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{n}E\left(X_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2}=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}n(x-\mu)^{2}\binom{n-1}{i-1}[F(x)]^{i-1}[1-F(x)]^{n-i}f(x)dx$$
$$=n\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^{2}f(x)\left\{\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}[F(x)]^{i-1}[1-F(x)]^{n-i}\right\}dx \quad (1.13)$$

(1.8) kullanılarak (1.13) integralindeki toplam ifadesinin 1'e eşit olduğu görülür. Buradan

$$\sum_{i=1}^{n}E\left(X_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2}=n\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^{2}f(x)dx=n\sigma^{2} \quad (1.14)$$

elde edilir. (1.12) ve (1.14) eşitlikleri birleştirilerek

$$Var(\bar{X}_{RSS})=\frac{1}{n^{2}}\left\{n\sigma^{2}-\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2}\right\}=\frac{\sigma^{2}}{n}-\frac{1}{n^{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_{(i)}^{*}-\mu\right)^{2} \quad (1.15)$$

$\hat{\mu}_{SRS}$ ve $\hat{\mu}_{RSS}$'in kitle ortalamasının yansız tahmin edicileri olduğu ve (1.15)'den

$$Var(\bar{X}_{RSS}) \leq Var(\bar{X}_{SRS}) = Var(\bar{X})$$

olduğu görülür. Açıktır ki, RSS yöntemi ile elde edilen kitle ortalamasının varyansı, SRS yöntemi kullanılarak elde edilen kitle ortalamasının varyansından daha küçüktür (Takahasi ve Wakimoto 1968, Wolfe 2012).

1.1.3 RSS yöntemi ile ilgili bazı temel kavramlar

Küme: RSS yöntemi ile örneklem elde etmek için ilgilenilen kitleden m birim SRS yöntemi ile seçilir. SRS yöntemi ile elde edilen her bir m birim küme (set) olarak adlandırılır.

Döngü: RSS kullanılarak oluşturulan m birimlik $X_{[1]}, X_{[2]}, \dots, X_{[m]}$ ölçülmüş gözlemlerini elde etme süreci bir döngü (cycle) olarak adlandırılır.

Küme Çapı: Küme çapı (set size) m RSS yönteminin performansında kritik rol oynar. Her ne kadar m çaplı bir kümede sadece bir birimin gerçek ölçüm değeri hesaplanıp, bu değer RSS'in elemanı olarak seçilse de ölçümü yapılmayan $m-1$ birim, görsel karşılaştırmalar yaparken karar vermeye yardımcı olur. Bu yüzden, m küme çapı ekonomik kısıtlar da dikkate alınarak ne kadar geniş seçilirse en iyi sıralamayı elde etmeye o kadar olanak sağlar. Ancak küme çapının artması sıralama hatası yapma olasılığını da arttırır. Bu nedenle, m küme çapının optimal olarak seçilmesi, RSS yöntemi ile örneklem belirleme sürecinin doğru çalışmasını sağlar.

Dengeli RSS: Eğer her bir döngüde eşit sayıda gözlem varsa RSS dengeli RSS (balanced RSS) olarak adlandırılır. r tane döngü ve her bir döngüde m tane gözlem varsa örneklem hacmi $n = mr$ olarak tanımlanır (Çizelge 1.1).

Çizelge 1.1 Dengeli RSS ile elde edilen örneklem

$1.döngü$	$X_{[1]1}$	$X_{[2]1}$	…	$X_{[m]}$
$2.döngü$	$X_{[1]2}$	$X_{[2]2}$	…	$X_{[m]}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$r.döngü$	$X_{[1]r}$	$X_{[2]r}$	…	$X_{[m]}$

Dengeli Olmayan RSS: Dengeli olmayan RSS (unbalanced RSS) yönteminde dengeli RSS yönteminin aksine döngüler farklı sayıda gözlem içerebilir (Çizelge 1.2). $j = 1,2,\dots,r$ olmak üzere örnek hacmi $n = \sum_{j=1}^{r} n_j$ dır.

Çizelge 1.2 Dengeli Olmayan RSS ile elde edilen örneklem

$1.döngü$	$X_{[1]1}$	$X_{[2]1}$	…	$X_{[n_1]1}$
$2.döngü$	$X_{[1]2}$	$X_{[2]2}$	…	$X_{[n_2]2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$j.döngü$	$X_{[1]j}$	$X_{[2]j}$	…	$X_{[n_j]j}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$r.döngü$	$X_{[1]r}$	$X_{[2]r}$	…	$X_{[n_r]r}$

1.1.4 RSS yöntemine ilişkin literatür çalışması

Literatürde RSS yöntemi kullanılarak yapılan birçok çalışma mevcuttur. McIntyre (1952) tarafından ilk kez önerilen yöntem, bu çalışmadan 14 yıl sonra Halls ve Dell (1966) çalışmasında Texas'ın doğusundaki çam ormanlarındaki bitki ve ağaç yapraklarının ortalama ağırlıklarını tahmin etmek için kullanılmıştır.

Takahasi ve Wakimoto (1968) çalışmasında, McIntyre (1952)'nin çalışmasından bağımsız olarak, RSS'in istatistiksel temellerini atmıştır. Bu çalışmada, SRS ve RSS ile elde edilen kitle ortalaması tahmin edicilerinin performansları karşılaştırılmıştır. Ayrıca, Takahasi (1969) eş korelasyonlu çok boyutlu dağılımların kitle ortalamasını sıralı örneklemleri kullanılarak tahmin etmiştir.

Görsel sıralama hatalarının RSS yöntemi üzerindeki etkileri ilk kez Dell ve Clutter (1972) tarafından araştırılmıştır. Bu çalışmaya benzer olarak, David ve Levine (1972) sıralama hataları üzerine yapılmış olmakla beraber, Dell ve Clutter (1972)'ın simülasyon çalışmaları ile elde ettiği göreli etkinlikleri hesaplamak için analitik bir yöntem geliştirmişlerdir.

Dell ve Clutter (1972) ve David ve Levine (1972) çalışmalarının bir sonucu olarak düşünülebilecek olan Stokes (1977)'de görsel sıralamalarda hatadan kaçınmak için bir eş değişken (concomitant) tanımlanıp, ilgili değişkenin yardımı ile sıralama yapılması önerilmiştir. Ayrıca bu çalışma, RSS kullanılarak regresyon tahmin edicilerinin elde edilmesi konusunda temel niteliktedir. Patil vd. (1993) ilgili değişken ile eş değişken arasındaki korelasyonun 0.85'ten küçük olduğu durumda, RSS tahmin edicisinin, SRS regresyon tahmin edicisine göre daha etkin olduğunu göstermişlerdir. Yu ve Lam (1997) RSS regresyon tahmin edicisinin performansını, RSS tahmin edicisi ve SRS regresyon tahmin edicisi ile karşılaştırmışlardır.

RSS kullanılarak yapılan çalışmaların birçoğu RSS'in çeşitli modifikasyonları üzerinedir. Bu modifikasyonlardan ilki Samawi vd. (1996) tarafından önerilen uç değer sıralı küme örneklemesidir (Extreme Ranked Set Sampling, ERSS). Bu çalışmada, ilgilenilen kitlenin dağılımı simetrik ise, ERSS tahmin edicisinin kitle ortalamasının yansız ve SRS tahmin edicisine göre daha etkin olduğu gösterilmiştir. Sinha vd. (1996) medyan sıralı küme örneklemesini (Median Ranked Set Sampling, MRSS) önermiştir. Muttlak (1997) kitle ortalamasının MRSS tahmin edicisinin klasik RSS'den daha etkin olduğunu göstermiştir. Al-Saleh ve Al-Kadiri (2000) küçük çaplı örneklem ile çalışılırken etkinliği arttırmak için çift sıralı küme örneklemesini (Double Ranked Set Sampling, DRSS) önermiştir. Samawi (2002) çift uç değer sıralı küme örneklemesini (Double Extreme Ranked Set Sampling, DERSS), ayrıca Samawi ve Tawalbeh (2002) çift medyan sıralı küme örneklemesini (Double Median Ranked Set Sampling, DMRSS) önermişlerdir. RSS'in farklı bir dönüşümü Muttlak (2003) tarafından yüzdelik sıralı küme örneklemesi (Percentile Ranked Set Sampling, PRSS) olarak önerilmiştir. Bu çalışmada, ilgilenilen dağılım çarpık ise PRSS tahmin edicisinin daha etkin olduğu gösterilmiştir. Muttlak ve Dayyeh (2004) ağırlıklandırılmış uç değer sıralı küme

örneklemesini (Weighted Extreme Ranked Set Sampling, WERSS), ağırlıklandırılmış medyan sıralı küme örneklemesini (Weighted Median Ranked Set Sampling, WMRSS), ağırlıklandırılmış yüzdelik sıralı küme örneklemesini (Weighted Percentile Ranked Set Sampling, WPRSS) önermiştir. Al-Nasser (2007) RSS'e alternatif olarak L sıralı küme örneklemesini (L Ranked Set Sampling, LRSS) tanımlamıştır. Al-Omari ve Jaber (2008) yüzdelik çift sıralı küme örneklemesini (Percentile Double Ranked Set Sampling, PDRSS) önermiştir.

Literatürde, yaygın olarak kullanılan birçok dağılımın parametreleri RSS yöntemine dayalı olarak tahmin edilmiştir. Örneğin, üstel, extreme value, lojistik, Weibull ve Pareto dağılımlarının bilinmeyen parametreleri sırasıyla Lam vd. (1994), Bhoj (1997), Abu-Dayyeh vd. (2004), Helu vd. (2010) ve Abu-Dayyeh vd. (2013) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmaların yanı sıra, Adatia (2000), Al-Saleh ve Al-Hadrami (2003a,b), Abu-Dayyeh ve Al Sawi (2009) ve Chen vd. (2013) RSS ve onun çeşitli modifikasyonlarını kullanarak parametre tahmini yapmıştır.

RSS'in kalite kontrolü alanında da uygulamaları mevcuttur. İlk kez Salazar ve Sinha (1997) tarafından RSS kullanılarak $\bar{X}$ için kontrol grafikleri oluşturulmuştur. Muttlak ve Al-Sabah (2003) RSS, MRSS ve ERSS yöntemlerini kullanarak yeni kalite kontrol grafikleri oluşturma teknikleri geliştirilmişlerdir. Abujiya ve Muttlak (2004) RSS, DRSS, MDRSS ve DMRSS yöntemleri ile oluşturulan kalite kontrol grafiklerini ARL performanslarına göre karşılaştırmışlardır. Al-Sabah (2010) örneklem ortalaması için CUSUM kontrol grafiklerini RSS ve MRSS yöntemleri ile elde edilmiş verileri kullanarak oluşturmuştur.

RSS güvenilirlik çalışmalarında da yaygın olarak kullanılır, bkz. Kvam ve Samaniego (1993,1994), El-Neweihi ve Sinha (2000), Ghitany (2005) ve Dong vd. (2012). Ayrıca, stres-dayanıklılık modelinin sistem güvenilirliğinin tahmin edildiği çalışmalarda da kullanılmaktadır. İlk kez Sengupta ve Mukhuti (2008a,b)'de üstel bir kitleden $P(X > Y)$ olasılığı için RSS örnekleme yöntemi kullanılarak yansız tahmin edici elde edilmiştir. Muttlak vd. (2010)'da $\theta = P(X > Y)$ hakkında istatistikî sonuç çıkarımı

yapabilmek için RSS verisinin kullanılması önerilmiştir. θ'yı RSS verisini kullanarak tahmin edebilmek için çeşitli tahmin yöntemleri kullanılmıştır. Elde edilen tahmin edicilerin performansları SRS verisine dayalı olarak elde edilen tahmin edicilerle karşılaştırılmıştır. Dong vd. (2013) bağımsız üstel dağılımlı X dayanıklılığına karşı Y stresi için $R = P(X > Y)$ sistem güvenilirliğini eşit olmayan RSS ile tahmin etmiştir.

RSS yöntemine ilişkin daha geniş literatür için bkz. Kaur vd. (1995), Chen vd. (2004) ve Wolfe (2012).

1.1.5 RSS yönteminin bazı modifikasyonları

RSS yöntemi ile, bölüm 1.1.1'de anlatıldığı gibi, örneklem oluşturulurken sıra istatistiklerinden yararlanılır. Ancak, RSS yönteminin modifikasyonları kullanılarak hem daha az sıralı istatistikle daha kolay bir şekilde örneklem oluşturulur hem de etkinliğin arttırılması amaçlanır (Dong vd. 2012). Bunun yanı sıra RSS'in bazı modifikasyonları ilgilenilen kitlenin dağılımının normal olmayan simetrik ve çarpık olması durumunda kitle ortalaması hakkında daha doğru bilgi elde etmek için kullanılır (Muttlak 1997, Muttlak 2003 ve Shaibu ve Muttlak 2004). Bu bölümde, RSS yönteminin bu tez çalışmasında kullanılacak olan bazı modifikasyonları hakkında genel bilgiler verilmiştir. Literatürde RSS yönteminin bu modifikasyonların dışında daha birçok modifikasyon mevcuttur; ancak örnek teşkil etmesi açısından bu çalışmada yalnızca ERSS, MRSS ve PRSS'e yer verilmiştir.

1.1.5.1 Uç Değer Sıralı Küme örneklemesi

Uç değer sıralı küme örneklemesi (Extreme Ranked Set Sampling, ERSS), ilk kez Samawi vd. (1996) tarafından RSS yöntemine alternatif olarak önerilmiştir. Samawi vd. (1996) kitle ortalamasının SRS, RSS ve ERSS yöntemlerine dayalı tahmin edicilerinin etkinliklerini ilgilenilen kitlenin düzgün, üstel, normal ve lojistik dağıldığı varsayımı altında karşılaştırmışlardır. ERSS yöntemi ile örneklem belirleme adımları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Adım 1: Kitleden m çaplı m küme rastgele olarak seçilir.

Adım 2: Elde edilen örneklem birimleri ilgilenilen değişkene göre gerçek ölçüm yapılmaksızın görsel karşılaştırma, uzman görüşü veya yardımcı değişkenler kullanılarak sıralanır.

Adım 3:

i) Eğer m çift ise; ilk $m/2$ kümenin her birinden sıralı birimlerinin en küçüğü ve ikinci $m/2$ kümenin her birinden sıralı birimlerinin en büyüğü örnekleme alınır ve bu birimlerin gerçek ölçüm değerleri elde edilir.

ii) Eğer m tek ise; ilk $(m-1)/2$ kümenin her birinden sıralı birimlerinin en küçüğü, $(m+1)/2$. kümenin medyanı ve ikinci $(m-1)/2$ kümenin her birinden sıralı birimlerinin en büyüğü örnekleme alınır ve gerçek ölçüm değerleri elde edilir.

Adım 4: Bu prosedür örneklem hacmi $n = mr$ olana kadar r kez tekrar ettirilir.

Döngü sayısı $r = 1$ olarak alınıp m küme çapının tek veya çift olması durumuna göre ERSS yöntemi ile örneklem çizelge 1.3'deki gibi elde oluşturulur.

Çizelge 1.3 ERSS ile örneklem seçimi

m çift ise				m tek ise				
$\boldsymbol{X_{(1)1}}$	$X_{(2)1}$	$\cdots$	$X_{(m)1}$	$\boldsymbol{X_{(1)1}}$	$\cdots$	$X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)1}$	$\cdots$	$X_{(m)1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{X_{(1)\frac{m}{2}}}$	$X_{(2)\frac{m}{2}}$	$\cdots$	$X_{(m)\frac{m}{2}}$	$\boldsymbol{X_{(1)\frac{m-1}{2}}}$	$\cdots$	$X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{m-1}{2}}$	$\cdots$	$X_{(m)\frac{m-1}{2}}$
$X_{(1)\frac{m}{2}+1}$	$X_{(2)\frac{m}{2}+1}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(m)\frac{m}{2}+1}}$	$X_{(1)\frac{m+1}{2}}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{m+1}{2}}}$	$\cdots$	$X_{(m)\frac{m+1}{2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$X_{(1)\frac{m+1}{2}+1}$	$\cdots$	$X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{m+1}{2}+1}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(m)\frac{m+1}{2}+1}}$
$X_{(1)m}$	$X_{(2)m}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(m)m}}$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
				$X_{(1)k}$	$\cdots$	$X_{\left(\frac{k+1}{2}\right)k}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(m)m}}$

Döngü bir kez tekrar ettirildiğinde, ERSS yöntemi ile elde edilen örneklemin kitle ortalaması

$$\bar{X}_{ERSS} = \begin{cases} \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m/2} X_{(1)i} + \sum_{i=m/2+1}^{m} X_{(m)i}\right), & m\ çift\ ise \\ \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{(m-1)/2} X_{(1)i} + X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{m+1}{2}} + \sum_{i=(m+1)/2+1}^{m} X_{(m)i}\right), & m\ tek\ ise \end{cases}$$

şeklinde elde edilir (Samawi vd. 1996).

1.1.5.2 Medyan Sıralı Küme örneklemesi

İlk kez Muttlak (1997) tarafından RSS yöntemine alternatif olarak önerilen medyan sıralı küme örneklemesi (Median Ranked Set Sampling, MRSS) yöntemi ile örneklem belirleme adımları aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Adım 1: Kitleden m çaplı m küme rastgele olarak seçilir.

Adım 2: Elde edilen örneklem birimleri ilgilenilen değişkene göre gerçek ölçüm yapılmaksızın görsel karşılaştırma, uzman görüşü veya yardımcı değişkenler kullanılarak sıralanır.

Adım 3:

i) Eğer m çift ise; ilk $m/2$ kümenin her birinden sıralı birimlerin $m/2$. gözlemleri ve ikinci $m/2$ kümenin her birinden sıralı birimlerin $m/2+1$. gözlemleri örnekleme alınır ve bu gözlemlerin gerçek ölçüm değerleri elde edilir.

ii) Eğer m tek ise; her biri sıralı m kümenin medyanı örnekleme alınır ve gerçek ölçüm değerleri elde edilir.

Adım 4: Bu prosedür örneklem hacmi $n = mr$ olana kadar r kez tekrar ettirilir.

Döngü sayısı $r = 1$ olarak alınıp m küme çapının tek veya çift olması durumuna göre MRSS yöntemi ile örneklem çizelge 1.4'deki gibi oluşturulur.

Çizelge 1.4 MRSS ile örneklem seçimi

m çift ise						m tek ise				
$X_{(1)1}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{\left(\frac{m}{2}\right)1}}$	$X_{\left(\frac{m}{2}+1\right)1}$	$\cdots$	$X_{(m)1}$	$X_{(1)1}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)1}}$	$\cdots$	$X_{(m)1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$X_{(1)2}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)2}}$	$\cdots$	$X_{(m)2}$
$X_{(1)\frac{m}{2}}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{\left(\frac{m}{2}\right)\frac{m}{2}}}$	$X_{\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}}$	$\cdots$	$X_{(m)\frac{m}{2}}$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_{(1)\frac{m}{2}+1}$	$\cdots$	$X_{\left(\frac{m}{2}\right)\frac{m}{2}+1}$	$\boldsymbol{X_{\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}+1}}$	$\cdots$	$X_{(m)\frac{m}{2}+1}$	$X_{(1)\frac{m+1}{2}}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{m+1}{2}}}$	$\cdots$	$X_{(m)\frac{m+1}{2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_{(1)m}$	$\cdots$	$X_{\left(\frac{m}{2}\right)k}$	$\boldsymbol{X_{\left(\frac{m}{2}+1\right)m}}$	$\cdots$	$X_{(m)m}$	$X_{(1)m}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)m}}$	$\cdots$	$X_{(m)m}$

Döngü bir kez tekrar ettirildiğinde, MRSS yöntemi ile elde edilen örneklemin kitle ortalaması

$$\bar{X}_{MRSS} = \begin{cases} \dfrac{1}{m}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m/2} X_{\left(\frac{m}{2}\right)i} + \sum_{i=m/2+1}^{m} X_{\left(\frac{m}{2}+1\right)i}\right), & m\ çift\ ise \\ \dfrac{1}{m}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)i}\right), & m\ tek\ ise \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

1.1.5.3 Yüzdelik Sıralı Küme örneklemesi

Muttlak (2003) tarafından önerilen yüzdelik sıralı küme örneklemesi (Percentile Ranked Set Sampling, PRSS) özellikle ilgilenilen kitlenin dağılımının çarpık olması halinde kitle ortalaması için RSS'e göre daha etkin bir tahmin edicidir. PRSS yöntemi ile örneklem belirleme adımları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Adım 1: Kitleden m çaplı m küme rasgele olarak seçilir.

Adım 2: Elde edilen örneklem birimleri ilgilenilen değişkene göre gerçek ölçüm yapılmaksızın görsel karşılaştırma, uzman görüşü veya yardımcı değişkenler kullanılarak sıralanır.

Adım 3:

i) Eğer m çift ise; ilk $m/2$ kümenin her birinden sıralı birimlerin $p(m+1).$ gözlemleri ve ikinci $m/2$ kümenin her birinden sıralı birimlerin $q(m+1).$ gözlemleri örnekleme alınır ve bu gözlemlerin gerçek ölçüm değerleri elde edilir. Burada $0 < p < 1$ ve $q = 1 - p$'dir. Bunun yanı sıra,

$$p(m+1) \text{ ve } q(m+1)$$

hesaplanırken en yakın tamsayı değerinin alınması gerektiği unutulmamalıdır.

ii) Eğer m tek ise, ilk $(m-1)/2$ kümenin her birinden sıralı birimlerin $p(m+1).$ gözlemleri, $(m+1)/2.$ kümenin medyanı ve ikinci $(m-1)/2$ kümenin her birinden sıralı birimlerinin $q(m+1).$ gözlemleri örnekleme alınır ve bu gözlemlerin gerçek ölçüm değerleri elde edilir.

Adım 4: Bu prosedür örneklem hacmi $n = mr$ olana kadar r kez tekrar ettirilir.

Döngü sayısı $r = 1$ olarak alınıp m küme çapının tek veya çift olması durumuna göre PRSS yöntemi ile örneklem çizelge 1.5-1.6'daki gibi oluşturulur.

Çizelge 1.5 Küme çapı çift ise PRSS ile örneklem seçimi

$\underline{m \text{ çift ise}}$						
$X_{(1)1}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(p(m+1))1}}$	$\cdots$	$X_{(q(m+1))1}$	$\cdots$	$X_{(m)1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_{(1)\frac{m}{2}}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(p(m+1))\frac{m}{2}}}$	$\cdots$	$X_{(q(m+1))\frac{m}{2}}$	$\cdots$	$X_{(m)\frac{m}{2}}$
$X_{(1)\frac{m}{2}+1}$	$\cdots$	$X_{(p(m+1))\frac{m}{2}+1}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(q(m+1))\frac{m}{2}+1}}$	$\cdots$	$X_{(m)\frac{m}{2}+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_{(1)m}$	$\cdots$	$X_{(p(m+1))m}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(q(m+1))m}}$	$\cdots$	$X_{(m)m}$

Çizelge 1.6 Küme çapı tek ise PRSS ile örneklem seçimi

				m tek ise				
$X_{(1)1}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(p(m+1))1}}$	$\cdots$	$X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)1}$	$\cdots$	$X_{(q(m+1))1}$	$\cdots$	$X_{(m)1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_{(1)\frac{m-1}{2}}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(p(m+1))\frac{m-1}{2}}}$	$\cdots$	$X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{m-1}{2}}$	$\cdots$	$X_{(q(m+1))\frac{m-1}{2}}$	$\cdots$	$X_{(m)\frac{m-1}{2}}$
$X_{(1)\frac{m+1}{2}}$	$\cdots$	$X_{(p(m+1))\frac{m+1}{2}}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{m+1}{2}}}$	$\cdots$	$X_{(q(m+1))\frac{m+1}{2}}$	$\cdots$	$X_{(m)\frac{m+1}{2}}$
$X_{(1)\frac{m+1}{2}+1}$	$\cdots$	$X_{(p(m+1))\frac{m+1}{2}+1}$	$\cdots$	$X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{m+1}{2}+1}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(q(m+1))\frac{m+1}{2}+1}}$	$\cdots$	$X_{(m)\frac{m+1}{2}+}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_{(1)m}$	$\cdots$	$X_{(p(m+1))k}$	$\cdots$	$X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)k}$	$\cdots$	$\boldsymbol{X_{(q(m+1))m}}$	$\cdots$	$X_{(k)m}$

Döngü bir kez tekrar ettirildiğinde, PRSS yöntemi ile elde edilen örneklemin kitle ortalaması

$$\bar{X}_{PRSS} = \begin{cases} \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m/2} X_{(p(m+1))i} + \sum_{i=m/2+1}^{m} X_{(q(m+1))i}\right), & m\ çift\ ise \\ \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{(m-1)/2} X_{(p(m+1))i} + X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{m+1}{2}} + \sum_{i=(m+1)/2+1}^{m} X_{(q(m+1))i}\right), & m\ tek\ ise \end{cases}$$

şeklinde elde edilir (Muttlak 2003).

1.2 Stres-Dayanıklılık Modeli

Bu bölümde, güvenilirlik çalışmalarında yaygın olarak kullanılan stres-dayanıklılık modeli (stress-strength model, SSM) ve bu modelin sistem güvenilirliği hakkında temel bilgiler verilmiştir. Literatürde SSM kullanılarak yapılan çalışmalardan bahsedildikten sonra, modelin matematiksel ifadesine yer verilmiştir.

1.2.1 Tanım

Güvenilirlik çalışmalarında yaygın olarak kullanılan stres-dayanıklılık modeli

$$R = P(X < Y) \tag{1.16}$$

şeklinde ifade edilir. R aynı zamanda sistem güvenilirliği olarak da isimlendirilir. Burada, X bir bileşene uygulanan stres düzeyini, Y ise bu bileşenin uygulanan stresin üstesinden gelebilmesi için sahip olduğu dayanıklılığı göstermektedir. Stres-dayanıklılık modelinde X ve Y rastgele değişkenlerinin bağımsız olduğu varsayımı yapılır. Açıktır ki, X stresinin, Y dayanıklılığından büyük yada küçük olması durumuna göre sistem bozulur yada çalışmaya devam eder. Bir başka deyişle, $P(X < Y)$ olasılığının 1'e yakın olması sistem güvenilirliğinin yüksek, 0'a yakın olması ise sistem güvenilirliğinin düşük olduğu anlamına gelir. Tezin ilerleyen bölümlerinde $R = P(X < Y)$ olasılığı sistem güvenilirliği olarak ifade edilecektir.

1.2.2 SSM'ye ilişkin literatür çalışması

İlk kez Birnbaum (1956) tarafından ortaya atılan stres-dayanıklılık modeli fikri Birnbaum ve McCarty (1958)'de geliştirilmiştir. Birnbaum (1956) stres-dayanıklılık modelini, Mann Whitney istatistiğinin bir uygulaması olarak tanımlamış ve R'nin nokta tahmini ile aralık tahminini elde etmiştir. Ayrıca, Birnbaum ve McCarty (1958)'de $P(Y < X)$ olasılığı için bağımsız $X = (X_1, \dots, X_n)$ ve $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ örneklemlerine dayalı dağılımdan bağımsız üst sınır oluşturulmuştur.

Literatürde stres-dayanıklılık modeli için sistem güvenilirliğinin tahmini üzerine birçok çalışma mevcuttur. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri Normal dağılıma sahip olmak üzere R'nin tahminine ilişkin bazı çalışmalar şöyledir: Owen vd. (1964) R için üst güven sınırını ve güven limitini elde etmişlerdir. Govindarajulu (1967) R'nin iki yönlü güven limitini oluşturmuştur. Church ve Harris (1970) Y'nin dağılım parametreleri bilindiği varsayımı altında R'yi tahmin etmişlerdir. Downton (1973) Rao-Blackwell ve Lehmann-Scheffe teoremlerini kullanılarak R'nin MVU tahmin edicisini elde etmiştir. Woodward ve Kelley (1977) R'nin UMVU tahmin edicisi için yeni bir açılım önermişlerdir. Voinov (1984) X ve Y'nin dağılım parametreleri bilinmiyorken R'nin

UMVU tahmin edicisini elde etmiştir. Reiser ve Guttman (1986) R'nin tahmini için Bayes yaklaşımını önermişlerdir.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri Üstel dağılıma sahip olmak üzere R'nin tahminine ilişkin çalışmalardan bazıları şöyledir: Tong (1974) R'nin MVU tahmin edicisini elde etmiştir. Kelley vd. (1976) R'nin ML ve UMVU tahmin edicilerinin etkinliklerini karşılaştırmışlardır. Beg (1980a,b) R'nin MVU ve Bayes tahmin edicilerini elde etmiştir. Üstel dağılım varsayımı altında R'nin tahminine ilişkin diğer çalışmalar için bkz. Sathe ve Shah (1981) ve Iwase (1987).

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri Pareto dağılımına sahip olmak üzere Beg ve Singh (1979) Rao-Blackwell ve Lehmann-Scheffe teoremlerini kullanılarak R'nin MVU tahmin edicisini elde etmişlerdir. Ayrıca R'nin ML ve Bayes tahmin edicilerini bulmuşlardır. Monte-Carlo Simülasyon çalışması ile tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırmışlardır.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri Gamma dağılımına sahip ise Constantine vd. (1986) R'nin UMVU ve ML tahmin edicilerini elde etmiş ve R için aralık tahmini elde etmişlerdir. Ayrıca Ismail vd. (1986) R sistem güvenilirliğini tahmin etmişlerdir.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri Burr XII dağılımına sahipken Awad ve Gharraf (1986) R'nin ML, MVU ve Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. X ve Y Burr X dağılımına sahipken Ivshin ve Lumenkii (1995), Ahmad vd. (1997) ve Surles ve Padgett (1998, 2001) çalışmalarında R sitem güvenilirliğini tahmin etmişlerdir. Mokhlis (2005) X ve Y Burr III dağılımına sahipken R'nin UMVU, ML ve Bayes tahmin edicilerini elde etmiştir.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri iki parametreli Weibull dağılımına sahipken McCool (1991) $P(Y < X)$ olasılığı için güven limitini oluşturmuştur. Kundu ve Gupta (2006) tarafından R için ML ve AML tahmin edicileri elde edilmiştir. R'nin ML tahmin

edicisinin asimptotik dağılımı elde edilmiş ve bu dağılım kullanılarak güven aralığı oluşturulmuştur. Ayrıca R'nin Bayes tahmin edicisi elde edilip, bu üç tahmin edicinin etkinlikleri karşılaştırılmıştır. Kundu ve Raqab (2009) X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri üç parametreli Weibull dağılımına sahipken R'nin ML, MML ve AML tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri Çarpık-Normal dağılıma sahipken R'nin tahmini Gupta ve Brown (2001) ve Azzalini ve Chiogna (2004) çalışmalarında ele alınmıştır.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri Genelleştirilmiş Gamma dağılımına sahipken Pham ve Almhana (1995) tarafından R sistem güvenilirliği tahmin edilmiştir.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri Genelleştirilmiş Pareto dağılımına sahipken Rezaei vd. (2010) R'nin ML, MVU ve Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Aynı dağılım varsayımı altında, Wong (2012) R için aralık tahmini yapmıştır.

Stres-dayanıklılık modelinin birçok gerçek hayat problemine uygulamaları mevcuttur. Johnstone (1983), Halperin vd. (1987, 1989) ve Guttman vd. (1988) stres-dayanıklılık modellerinin sırasıyla savunma sanayi, tıp ve mühendislik alanlarındaki uygulamalarına örnek verilebilir. Ayrıntılı bilgi için bkz. Kotz vd. (2003).

1.2.3 Matematiksel model

X bir birim üzerindeki stresi, Y'de ilgili birimin dayanıklılığını göstermek üzere sistem güvenilirliği $R = P(X < Y)$ olarak ifade edilir. X ve Y rastgele değişkenlerinin bağımsız olduğu varsayımı altında

$$R = P(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x)f(y)dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\infty}^{y} f(x)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)F_X(y)dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y)dF_Y(y)$$

şeklinde yazılabilir. Sistem güvenilirliği, $y = t$ olmak üzere

$$R(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(t)dF_Y(t) \tag{1.17}$$

olarak ifade edilebilir.

1.3 Sansürleme

Bu çalışmada, sistem güvenilirliği R'nin RSS ve onun modifikasyonlarına dayalı tahmin edicilerinin yanı sıra stres ve dayanıklılığa ilişkin örneklemlerin sansürlü olduğu durum da incelenmiştir.

Gerçek hayatta, bir sistemin güvenilirliği araştırılırken sistemi oluşturan bileşenlere ait veriler araştırmacının elinde olmayan sebeplerden dolayı gözlemlenemeyebilir. Bu durumda, sistem güvenilirliğinin tahmini sistemi oluşturan bu bileşenlere ait sansürlü verilerin de istatistiki değerlendirmeye katılması uygun olacaktır.

Literatürde, uygulamada karşılaşılabilecek problemlere ilişkin birçok sansürleme türü önerilmiştir. Bunlardan I. Tip sansürleme (Type-I censoring veya time censoring), önceden belirlenmiş bir zaman diliminin içerisinde gözlemlenemeyen, bu zaman diliminin altında veya üstünde kalan gözlemlerin sansürlendiği sansürleme türüdür. II. Tip sansürleme (Type-II censoring veya failure censoring), önceden belirlenmiş bozulma (failure) sayısının altında ya da üstünde kalan gözlemlerin sansürlendiği sansürleme türüdür. Hibrit sansürleme (hybrid censoring) ise I. Tip ve II. tip sansürlemenin karışımı olarak düşünülebilir. İlerleyen tür sansürleme (progressive

censoring) de literatürde oldukça yaygın olan sansürleme türlerinden biridir. Ayrıntılı bilgi için bkz. Nelson (1982), Balakrishnan ve Aggarwala (2000), Lawless (2003), Childs vd. (2003) ve Balakrishnan ve Kundu (2013).

1.4 Parametre Tahmini

Bu bölümde, X ve Y rastgele değişkenlerinin dağılımlarına ilişkin bilinmeyen parametrelerin tahmin edilmesinde kullanılan yöntemler hakkında bilgi verilmiştir.

1.4.1 En Çok Olabilirlik yöntemi

En çok olabilirlik (Maximum Likelihood, ML) yöntemi log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametreye göre maksimum yapılması esasına dayanır. Parametre tahmini çalışmalarında en sık başvurulan yöntemlerden biri olan ML yönteminin en önemli avantajı düzgünlük koşulları sağlandığında elde edilen tahmin edicilerin asimptotik olarak yansız ve varyanslarının Rao-Cramer alt sınırına eşit olmasıdır.

Teorem 1.4.1 (ML tahmin edicilerinin değişmezlik özelliği): Eğer $\hat{\theta}$, θ'nın ML tahmin edicisi ise θ'nın herhangi bir fonksiyonu $\tau(\theta)$'nın ML tahmin edicisi $\tau(\hat{\theta})$'dır (Casella ve Berger, 2002).■

1.4.2 Uyarlanmış En Çok Olabilirlik Yöntemi

ML yönteminde, olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametrelere göre kısmi türevleri alınarak elde edilen olabilirlik denklemlerinin açık çözümü elde edilemediği durumlarda iteratif yöntemlere başvurmak gerektir. Ancak iteratif yöntemler kullanılırken yanlış köke yakınsama, birden fazla köke yakınsama veya hiç yakınsamama gibi istenmeyen durumlarla karşılaşılabilir. Bu yöntemler kullanılırken doğabilecek sakıncalara karşı parametrelerin ML tahmin edicilerinin analitik ifadelerinin elde edebilmek için Tiku

(1967,1968) tarafından uyarlanmış en çok olabilirlik (Modified Maximum Likelihood, MML) tahmin edicileri önerilmiştir.

Örneklem çapı n'nin büyük değerleri için asimptotik olarak ML tahmin edicilerine yakınsayan ve ML tahmin edicisinin makul bir alternatifi olan MML tahmin edicileri düzgünlük koşulları altında aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. Tahmin ediciler kapalı formda elde edilir.
ii. MML tahmin edicilerinin hesaplanması kolaydır.
iii. Asimptotik olarak tam etkindirler. Düzgünlük koşulları sağlandığı zaman varyansları Rao-Cramer alt sınırına eşittir, bkz. Vaughan (2002). Ayrıca küçük örneklemlerde yüksek etkinliğe sahiptirler, bkz. Şenoğlu vd. (2012).
iv. MML tahmin edicileri asimptotik olarak ML tahmin edicilerine eşittir, bkz. Bhattacharyya (1985) ve Vaughan ve Tiku (2000).
v. Asimptotik olarak *Normal* dağılırlar.
vi. Tek modlu konum-ölçek ailesine ait dağılımların konum ve ölçek parametrelerini tahmin etmek için kullanılır.■

Bu çalışmanın amacı, literatürde yer alan bazı dayanıklı tahmin yöntemlerini kullanarak stres-dayanıklılık modelinde sistem güvenilirliğinin tahmin edicilerinin elde edilmesidir. Sistem güvenilirliği, öncelikle düzgünlük koşulları sağlandığında MVB (Minimum Variance Bound-Minimum Varyans Sınırı) tahmin edicisi yani varyansı Rao-Cramer alt sınırına eşit olan en çok olabilirlik (maximum likelihood, ML) yöntemi kullanılarak tahmin edilmiştir. ML tahmin edicileri açık olarak elde edilemediğinde ise

i) İteratif Yöntemler (Newton Raphson)
ii) Uyarlanmış En Çok Olabilirlik Yöntemi (Modified Maximum Likelihood, MML), bkz. Tiku (1967, 1968)

alternatif yöntemleri kullanılmıştır.

Çalışmanın bir başka amacı ise sistem güvenilirliği R'yi SRS örnekleme yöntemi yerine RSS örnekleme yöntemi kullanarak tahmin etmektir. Böylelikle, örnekleme yöntemlerinin parametre tahmin edicilerinin etkinliklerine olan etkisi araştırılmıştır. Bu

çalışmada, RSS yönteminin ERSS, MRSS, PRSS modifikasyonları kullanılarak stres-dayanıklılık modelinin sistem güvenilirliği tahmin edilmiştir. Böylece, bu modifikasyonlar kullanılarak elde edilecek olan örneklemler ve dayanıklı tahmin yöntemleri ile literatüre katkı sağlanmıştır. Bunun yanı sıra, stres ve dayanıklılığa ilişkin örneklemlerin sansürlü gözlem içerdiği durumda R'nin SRS ve RSS'e dayalı tahmin edicileri elde edilmiştir.

Bu amaçla tezin ikinci bölümünde, stres ve dayanıklılığın dağılımı aynı şekil ve farlı ölçek parametreli Weibull iken sistem güvenilirliği R'nin SRS ve RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. R'nin SRS ve RSS'e dayalı ML tahmin edicisinin asimptotik dağılımı belirlenecek ve bu dağılım kullanılarak R'nin asimptotik güven aralığı hesaplanmıştır. Monte-Carlo simülasyon çalışması ile önerilen tahmin edicilerin performansları karşılaştırılmıştır. Ayrıca R'nin SRS ve RSS'e dayalı olarak elde edilen güven aralıkları incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde, R'nin RSS'in yanı sıra bu yöntemin modifikasyonları olan ERSS, MRSS ve PRSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Elde edilen tahmin edicilerin performansları Monte-Carlo simülasyon çalışmasıyla SRS'e dayalı alternatifleri ile karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, R'nin tahmin edicileri sansürlü gözlem varsayımı altında elde edilmiştir. Bu amaçla R için istatistikî sonuç çıkarımı II. tip sağdan sansürlenmiş SRS ve RSS verisine dayalı olarak yapılmıştır. Simülasyon çalışmaları ile farklı sansürleme oranlarında tahmin edicilerin performansları incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının beşinci bölümünde, önerilen yöntemler literatürde yaygın olarak kullanılan *Dayanıklılık* veri setine uygulanmıştır.

Çalışmanın son bölümünde, hem simülasyon çalışmaları hem de gerçek veri uygulamasında elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

2. SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİNİN TAHMİNİ: WEİBULL DAĞILIMI

Bu bölümde, öncelikle X stresinin ve Y dayanıklılığının birbirinden bağımsız Weibull dağılımına sahip olduğu varsayımı altında sistem güvenilirliği R'nin SRS'e dayalı ML ve MML tahmin edicileri elde edilip, ML tahmin edicisinin asimptotik dağılımı bulunmuştur. Asimptotik dağılım kullanılarak $\hat{R}$'nin SRS'e dayalı asimptotik güven aralığı hesaplanmıştır. Daha sonra, R'nin RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicileri elde edilip, ML tahmin edicisinin asimptotik dağılımı bulunduktan sonra, $\hat{R}$'nin asimptotik güven aralığı hesaplanmıştır. Son olarak, Monte-Carlo simülasyon çalışması ile önerilen tahmin edicilerin etkinlikleri ve güven aralıklarının genişlikleri farklı örnekleme yöntemlerine göre karşılaştırılmıştır.

2.1 Weibull Dağılımı

Tez çalışmasının bu bölümünde ve bundan sonraki bölümlerinde, birbirinden bağımsız X stresi ve Y dayanıklılığının Weibull dağılımına sahip olduğu durumda sistem güvenilirliği R için istatistiki sonuç çıkarımı yapılmıştır. Stres-dayanıklılık dağılımı olarak Weibull'un kullanılmasının nedeni ise bu dağılımın güvenilirlik çalışmalarında yaygın olarak kullanılması ve veri modellemede esnek bir yapıya sahip olmasıdır.

Stres ve dayanıklılığın dağılımı aynı şekil ve farklı ölçek parametreli Weibull, $X \sim Weibull(p, \sigma_1)$ ve $Y \sim Weibull(p, \sigma_2)$, olmak üzere, stres ve dayanıklılığa ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları (probability density function, *pdf*) ve dağılım fonksiyonları (cumulative distribution function, *cdf*) sırasıyla

$$f(x, p, \sigma_1) = \frac{p}{\sigma_1} x^{p-1} e^{-\frac{x^p}{\sigma_1}}, \; x, p, \sigma_1 > 0 \tag{2.1}$$

$$F(x, p, \sigma_1) = 1 - e^{-\frac{x^p}{\sigma_1}}, x, p, \sigma_1 > 0 \tag{2.2}$$

ve

$$f(y, p, \sigma_2) = \frac{p}{\sigma_2} y^{p-1} e^{-\frac{y^p}{\sigma_2}}, \; y, p, \sigma_2 > 0 \tag{2.3}$$

$$F(y, p, \sigma_2) = 1 - e^{-\frac{y^p}{\sigma_2}}, y, p, \sigma_2 > 0 \qquad (2.4)$$

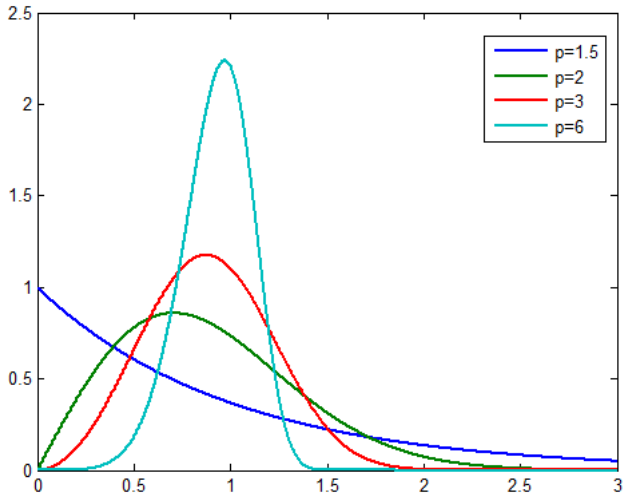
olarak ifade edilir. Burada,

p: X ve Y rastgele değişkenlerine ilişkin şekil parametresi,
σ_1: X rastgele değişkenine ilişkin ölçek parametresi,
σ_2: Y rastgele değişkenine ilişkin ölçek parametresi

dır. İlk kez Weibull (1939) tarafından önerilen Weibull dağılımı asimetrik verileri modellemek için kullanılan en önemli dağılımlardan biridir. Bu yüzden, dağılım yaşam modelleri, mühendislik, güvenilirlik ve kalite kontrolü vb. gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır, bkz. Nelson (1990) ve Meeker ve Escobar (1998). Ayrıca, Weibull dağılımı birçok olasılık dağılımı ile ilişkilidir. Örneğin, dağılım şekil parametresi $p = 1$ olarak alındığında üstel, $p = 2$ olarak alındığında Rayleigh dağılımına dönüşür. $p = 3.6$ (yaklaşık olarak) alındığında dağılımın şekli normal dağılıma yaklaşmaktadır. Aşağıdaki tabloda Weibull dağılımının farklı şekil parametresi değerleri için çarpıklık $\left(\sqrt{\beta_1}\right)$ ve basıklık (β_2) değerleri hesaplanmıştır.

p	1.5	2	3	6
$\sqrt{\beta_1}$	1.064	0.631	0.168	-0.158
β_2	4.365	3.246	2.705	2.538

Açıktır ki, Weibull dağılımı $p \leq 3.6$ olduğunda pozitif (sağa) çarpık ve $p > 3.6$ olduğunda negatif (sola) çarpıktır. Dağılımın veri modellemek konusundaki bu esnekliğini farklı şekil parametresi değerleri için çizilen *pdf* grafikleri şekil 2.1'de de izlenebilir.



Şekil 2.1 Weibull dağılımının farklı şekil parametreleri için *pdf* grafikleri

Literatürde stres ve dayanıklılığın Weibull dağılımına sahip olduğu varsayımı altında R'nin tahminine ilişkin birçok çalışmalar yapılmıştır bunlar arasından McCool (1991), Kundu ve Gupta (2006), Kundu ve Raqap (2009), Asgharzadeh vd. (2011) ve Valiollahi vd. (2013) örnek verilebilir. Bu çalışmaların ortak özelliği ise stres ve dayanıklılığa ilişkin örneklemlerin SRS yöntemi kullanılarak oluşturulmasıdır.

R sistem güvenilirliği

$$
\begin{aligned}
R = P(X < Y) &= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=x}^{\infty} f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{0}^{\infty} \int_{x}^{\infty} \frac{p}{\sigma_1} x^{p-1} e^{-\frac{x^p}{\sigma_1}} \frac{p}{\sigma_2} y^{p-1} e^{-\frac{y^p}{\sigma_2}}\,dydx \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{p}{\sigma_1} x^{p-1} e^{-\frac{x^p}{\sigma_1}} \int_{x}^{\infty} \frac{p}{\sigma_2} y^{p-1} e^{-\frac{y^p}{\sigma_2}}\,dydx \qquad u = \frac{y^p}{\sigma_2} \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{p}{\sigma_1} x^{p-1} e^{-\frac{x^p}{\sigma_1}} \int_{x^p/\sigma_2}^{\infty} e^{-u}\,dudx \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{p}{\sigma_1} x^{p-1} e^{-x^p\left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}\right)}\,dx \qquad t = x^p \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1} e^{-t\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}\right)} dt
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \tag{2.5}$$

şeklinde elde edilir. R sistem güvenilirliğini tahmin edebilmek için öncelikle σ_1 ve σ_2 parametrelerinin tahmin edilmesi gerekmektedir.

2.2 *R*'nin SRS'e Dayalı Tahmini

Bu bölümde, sistem güvenilirliği R, stres ve dayanıklılığa ilişkin örneklemlerin SRS yöntemi ile elde edildiği varsayımı altında tahmin edilmiştir. R'yi tahmin edebilmek için öncelikle p şekil, σ_1 ve σ_2 ölçek parametreleri tahmin edilmiştir. Bu amaçla, ML ve MML yöntemleri kullanılmıştır.

2.2.1 *R*'nin ML tahmin edicisi

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim Weibull(p, \sigma_1)$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \sim Weibull(p, \sigma_2)$ bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere sistem güvenilirliği R'nin ML tahmin edicileri Teorem 1.4.1 kullanılarak

$$\hat{R} = \frac{\hat{\sigma}_2}{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2} \tag{2.6}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\hat{\sigma}_1$ ve $\hat{\sigma}_2$ sırasıyla σ_1 ve σ_2'nin ML tahmin edicileridir. Bu amaçla olabilirlik fonksiyonu

$$L(p, \sigma_1, \sigma_2) = \frac{p^{n+m}}{\sigma_1^n \sigma_2^m} \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1} e^{-\frac{x_i^p}{\sigma_1}} \prod_{j=1}^{m} y_j^{p-1} e^{-\frac{y_j^p}{\sigma_2}} \tag{2.7}$$

şeklinde bulunur. (2.7)'nin logaritması alındığında log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L = (n+m)\ln p - n\ln\sigma_1 - m\ln\sigma_2 + (p-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p}{\sigma_1} + (p-1)\sum_{j=1}^{m}\ln y_j - \sum_{j=1}^{m}\frac{y_j^p}{\sigma_2} \tag{2.8}$$

dır. $\ln L$'nin sırasıyla p, σ_1 ve σ_2'ye göre türevleri alınarak olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{n+m}{p} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n}x_i^p \ln x_i + \sum_{j=1}^{m}\ln y_j - \frac{1}{\sigma_2}\sum_{j=1}^{m}y_j^p \ln y_j = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{n}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^p = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2} = -\frac{m}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{m}y_j^p = 0. \tag{2.11}$$

(2.10) ve (2.11) denklemlerinin çözümünden ve $\hat{p}$'nın p'nin ML tahmini olduğunu varsayarak aşağıdaki tahmin ediciler elde edilir

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{p}}, \tag{2.12}$$

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}y_j^{\hat{p}}. \tag{2.13}$$

Açıktır ki, denklem (2.9) lineer olmayan fonksiyonlar $h_1(x) = \ln x$ ve $h_2(x) = x^p$; $h_1(y) = \ln y$ ve $h_2(y) = y^p$ den dolayı analitik olarak çözümlemez. (2.9) denklemini p parametresine göre çözebilmek için iteratif yöntemlere başvurmak gerekmektedir, daha ayrıntılı bilgi için Kundu ve Gupta (2006)'ya bakılabilir. İteratif yöntemleri

kullanmadan önce (2.9)'da, σ_1 yerine $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p$ ve σ_2 yerine $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j^p$ yazılarak aşağıdaki denklem elde edilir

$$\frac{n+m}{p} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \sum_{j=1}^{m} \ln y_j - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p \ln x_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p} - \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j^p \ln y_j}{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j^p} = 0. \tag{2.14}$$

Denklem (2.14)'ün iteratif çözümü p parametresinin ML tahminini verir. $\hat{p}$ tahmin edildikten sonra, $\hat{\sigma}_1$ ve $\hat{\sigma}_2$ tahminleri, sırasıyla (2.12) ve (2.13)'den elde edilir.

p, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin SRS yöntemine dayalı yukarıda elde edilen ML tahminleri sırasıyla $\hat{p}_{ML,SRS}$, $\hat{\sigma}_{1_{ML,SRS}}$ ve $\hat{\sigma}_{2_{ML,SRS}}$ olmak üzere, ML tahmin edicilerinin değişmezlik özelliği kullanılarak sistem güvenilirliği R'nin SRS yöntemine dayalı ML tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir

$$\hat{R}_{ML,SRS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{ML,SRS}}}{\hat{\sigma}_{1_{ML,SRS}} + \hat{\sigma}_{2_{ML,SRS}}}. \tag{2.15}$$

2.2.2 *R*'nin MML tahmin edicisi

Bir önceki bölümde, R'nin ML tahmin edicisinin iteratif yöntemler kullanılarak elde edileceği söylenmiştir. Ancak iteratif yöntemler kullanılırken

i. Yanlış köke yakınsama,
ii. Birden fazla köke yakınsama,
iii. Hiç yakınsamama,

gibi problemlerle karşılaşılabilir, örneğin bkz. Smith (1985), Puthenpura ve Sinha (1986) ve Vaughan (1992,2002). Bu nedenle, bu tür problemlerin üstesinden gelmek için Tiku (1967,1968) tarafından önerilen ve MML olarak adlandırılan yöntem

kullanılacaktır. MML yönteminde, olabilirlik denklemlerindeki lineer olmayan fonksiyonlar, standartlaştırılmış sıra istatistiklerinin beklenen değeri etrafında Taylor serisinin ilk iki terimine açılarak lineer hale getirilirler. Böylece, bu yöntemle tahmin ediciler analitik olarak ifade edilir.

MML yöntemi konum ölçek ailesine ait dağılımların, konum ve ölçek parametrelerini tahmin etmek için kullanıldığından p şekil ve σ ölçek parametreli Weibull dağılımının parametreleri, μ konum ve η ölçek parametreli Extreme Value (*EV*) dağılımı kullanılarak elde edilir, bkz. Tiku ve Akkaya (2004). X rasgele değişkeni Weibull dağılımına sahip olmak üzere $U = \ln X$ dönüşümü altında U rastgele değişkeni *EV* dağılımlıdır, *pdf* ve *cdf*'i sırasıyla

$$f_U(u,\mu,\eta) = \frac{1}{\eta} e^{\left(\frac{u-\mu}{\eta} - e^{\frac{u-\mu}{\eta}}\right)}, -\infty < u < \infty, \tag{2.16}$$

$$F_U(u,\mu,\eta) = 1 - e^{-e^{\frac{u-\mu}{\eta}}}, -\infty < u < \infty \tag{2.17}$$

şeklindedir. Burada, $-\infty < \mu < \infty$ konum ve $0 < \eta < \infty$ ölçek parametresidir. Eğer U rastgele değişkeni μ konum ve η ölçek parametresi ile *EV* dağılımına sahip ise $U \sim EV(\mu,\eta)$ ile gösterilir.

EV dağılımı parametreleri ile Weibull dağılımının parametreleri arasındaki ilişki aşağıdaki eşitliklerde verildiği gibidir

$$\mu = \frac{1}{p}\ln\sigma \text{ ve } \eta = \frac{1}{p}. \tag{2.18}$$

Açıktır ki, *EV* dağılımının konum ve ölçek parametreleri μ ve η tahmin edildikten sonra, ters dönüşüm kullanılarak Weibull dağılımının şekil ve ölçek parametreleri p ve σ aşağıdaki gibi elde edilir

$$p = \frac{1}{\eta} \text{ ve } \sigma = e^{\mu p}. \tag{2.19}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim Weibull(p, \sigma_1)$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \sim Weibull(p, \sigma_2)$ bağımsız örneklemler olsun. $U = \ln X$ ve $V = \ln Y$ dönüşümü altında U ve V rastgele değişkenlerinin dağılımı sırasıyla $U_1, U_2, \dots, U_n \sim EV(\mu_1, \eta)$ ve $V_1, V_2, \dots, V_m \sim EV(\mu_2, \eta)$ dir. Olabilirlik fonksiyonu ise

$$L(\eta, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{\eta^{n+m}} \prod_{i=1}^{n} e^{\left(\frac{u_{(i)}-\mu_1}{\eta} - e^{\frac{u_{(i)}-\mu_1}{\eta}}\right)} \prod_{j=1}^{m} e^{\left(\frac{v_{(j)}-\mu_2}{\eta} - e^{\frac{v_{(j)}-\mu_2}{\eta}}\right)} \tag{2.20}$$

şeklindedir. Burada,

$$z_{(i)} = \left((u_{(i)} - \mu_1)/\eta\right), i = 1,2, \dots, n$$
$$w_{(j)} = \left((v_{(j)} - \mu_2)/\eta\right), j = 1,2, \dots, m$$

standartlaştırılmış sıra istatistik değerleri olmak üzere (2.20)'nin logaritması alınarak log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L = -(n+m)\ln\eta + \sum_{i=1}^{n} z_{(i)} - \sum_{i=1}^{n} e^{z_{(i)}} + \sum_{j=1}^{m} w_{(j)} - \sum_{j=1}^{m} e^{w_{(j)}} \tag{2.21}$$

biçimindedir. $\ln L$'nin sırasıyla μ_1, μ_2 ve η'ya göre kısmi türevleri alınarak

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = -n + \sum_{i=1}^{n} e^{z_{(i)}} = 0, \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = -m + \sum_{j=1}^{m} e^{w_{(j)}} = 0, \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = -(n+m) - \sum_{i=1}^{n} z_{(i)} + \sum_{i=1}^{n} e^{z_{(i)}} z_{(i)} - \sum_{j=1}^{m} w_{(j)} + \sum_{j=1}^{m} e^{w_{(j)}} w_{(j)} = 0 \quad (2.24)$$

olabilirlik denklemleri elde edilir. Burada, $g(z_{(i)}) = e^{z_{(i)}}$ ve $g(w_{(j)}) = e^{w_{(j)}}$ olmak üzere (2.22)-(2.24) denklemleri tekrar düzenlenip

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = -n + \sum_{i=1}^{n} g(z_{(i)}) = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = -m + \sum_{j=1}^{m} g(w_{(j)}) = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = -(n+m) - \sum_{i=1}^{n} z_{(i)} + \sum_{i=1}^{n} g(z_{(i)}) z_{(i)} - \sum_{j=1}^{m} w_{(j)} + \sum_{j=1}^{m} g(w_{(j)}) w_{(j)} = 0 \quad (2.27)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\sum_{i=1}^{n} g(z_i) = \sum_{i=1}^{n} g(z_{(i)})$ olduğundan gözlemlerin sıralı istatistikler cinsinden yazılmasıyla orijinal haliyle yazılması arasında fark yoktur. $g(z_{(i)})$ ve $g(w_{(j)})$ fonksiyonlarının lineer olmamasından dolayı (2.25)-(2.27) denklemlerinin açık çözümü yoktur. MML yöntemi ile parametre tahmini yapılabilmek için $g(z_{(i)})$ ve $g(w_{(j)})$ lineer olmayan fonksiyonları Taylor açılımı yardımıyla lineer hale getirilir. $E(z_{(i)}) = t_{(i)}^{u}$ ve $E(w_{(j)}) = t_{(j)}^{v}$, $i.$ ve $j.$ standartlaştırılmış sıra istatistiklerinin beklenen değeri olmak üzere $g(z_{(i)})$ ve $g(w_{(j)})$ sırasıyla $t_{(i)}^{u}$ ve $t_{(j)}^{v}$ etrafında I. dereceden Taylor serisine açılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$g(z_{(i)}) \cong \alpha_i^u + \beta_i^u z_{(i)}, i = 1, \dots, n,$$
$$g(w_{(j)}) \cong \alpha_j^v + \beta_j^v w_{(j)}, j = 1, \dots, m \quad (2.28)$$

şeklinde elde edilir. Burada, α_i^u, β_i^u, α_j^v ve β_j^v katsayıları ve $t_{(i)}^{u}$, $t_{(j)}^{v}$

$$\alpha_i^u = e^{t_{(i)}^u}\left(1 - t_{(i)}^u\right), \quad \beta_i^u = e^{t_{(i)}^u},$$
$$\alpha_j^v = e^{t_{(j)}^v}\left(1 - t_{(j)}^v\right), \quad \beta_j^v = e^{t_{(j)}^v},$$
$$t_{(i)}^u = \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\right), \; i = 1,2,\dots,n,$$
$$t_{(j)}^v = \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{j}{m+1}\right)\right), j = 1,2,\dots,m \tag{2.29}$$

şekilde elde edilir. $t_{(i)}^u$ ve $t_{(j)}^v$ aşağıdaki denklemlerden elde edilir

$$\int_{-\infty}^{t_{(i)}^u} f(z)dz = \frac{i}{n+1}, i = 1,\dots,n \text{ ve } \int_{-\infty}^{t_{(j)}^v} f(w)dw = \frac{j}{m+1}, j = 1,\dots,m. \tag{2.30}$$

(2.28) lineer hale getirilmiş fonksiyonları (2.25)-(2.27) denklemlerinde yerine yazılarak elde edilen uyarlanmış olabilirlik denklemlerinin, $\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_1} = 0$, $\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_2} = 0$ ve $\frac{\partial \ln L^*}{\partial \eta} = 0$, ilgili parametrelere göre çözülmesiyle, μ_1, μ_2 ve η parametrelerinin MML tahmin edicileri

$$\hat{\mu}_{1_{MML,SRS}} = K_1 + \frac{\Delta_1}{m_1}\hat{\eta}_{MML,SRS}, \quad \hat{\mu}_{2_{MML,SRS}} = K_2 + \frac{\Delta_2}{m_2}\hat{\eta}_{MML,SRS},$$
$$\hat{\eta}_{MML,SRS} = \frac{B+\sqrt{B^2+4AC}}{2(n+m)} \tag{2.31}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$m_1 = \sum_{i=1}^n \beta_i^u, \quad K_1 = \sum_{i=1}^n \beta_i^u u_{(i)}/m_1, \quad \Delta_i^u = \alpha_i^u - 1, \quad \Delta_1 = \sum_{i=1}^n \Delta_i^u,$$
$$m_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j^v, \quad K_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j^v v_{(j)}/m_2, \quad \Delta_j^v = \alpha_j^v - 1, \quad \Delta_2 = \sum_{j=1}^m \Delta_j^v,$$
$$A = n + m,$$
$$B = \sum_{i=1}^n \Delta_i^u\left(u_{(i)} - K_1\right) + \sum_{j=1}^m \Delta_j^v\left(v_{(j)} - K_2\right),$$
$$C = \sum_{i=1}^n \beta_i^u\left(u_{(i)} - K_1\right)^2 + \sum_{j=1}^m \beta_j^v\left(v_{(j)} - K_2\right)^2 \tag{2.32}$$

olarak ifade edilir.

(2.19) denkleminde verilen ters dönüşüm kullanılarak Weibull dağılımının şekil ve ölçek parametreleri p, σ_1 ve σ_2'nin SRS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri $\hat{p}_{MML,SRS}$, $\hat{\sigma}_{1_{MML,SRS}}$ ve $\hat{\sigma}_{2_{MML,SRS}}$, sırasıyla

$$\hat{p}_{MML,SRS} = \frac{1}{\hat{\eta}_{MML,SRS}},$$
$$\hat{\sigma}_{1_{MML,SRS}} = e^{\hat{p}_{MML,SRS}\hat{\mu}_{1_{MML,SRS}}} \quad \text{ve} \quad \hat{\sigma}_{2_{MML,SRS}} = e^{\hat{p}_{MML,SRS}\hat{\mu}_{2_{MML,SRS}}} \tag{2.33}$$

şeklindedir. (2.33) tahmin edicileri (2.5) denklemlerinde yerine yazılarak sistem güvenilirliği R'nin SRS yöntemine dayalı MML tahmin edicisi aşağıda verildiği gibidir

$$\hat{R}_{MML,SRS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{MML,SRS}}}{\hat{\sigma}_{1_{MML,SRS}} + \hat{\sigma}_{2_{MML,SRS}}}. \tag{2.34}$$

Teorem 2.2.1: $z_{(1)} \le z_{(2)} \le \cdots \le z_{(n)}$ ve $w_{(1)} \le w_{(2)} \le \cdots \le w_{(m)}$ standartlaştırılmış sıra istatistiklerini ve $t_{(i)}^{u} = E\left(z_{(i)}\right)$ ve $t_{(j)}^{v} = E\left(w_{(j)}\right)$ ise standartlaştırılmış sıra istatistiklerinin beklenen değerini göstermek üzere $g\left(z_{(i)}\right) - \left(\alpha_i^u + \beta_i^u z_{(i)}\right)$ ve $g\left(w_{(j)}\right) - \left(\alpha_j^v + \beta_j^v w_{(j)}\right)$ farkları $n \to \infty$ ve $m \to \infty$ için 0'a yaklaşır. Bir başka deyişle

$$i.\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_1}\right| = 0,$$
$$ii.\ \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left|\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_2}\right| = 0,$$
$$iii.\ \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{1}{n}\left|\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \eta}\right| = 0$$

olarak ifade edilebilir. Bu teorem MML tahmin edicilerinin asimptotik olarak ML tahmin edicilerine eşit olduğunu göstermektedir. Teoremin ispatı için bkz. Hoeffding (1953) ve Tiku ve Akkaya (2004).

2.2.3R'nin ML tahmin edicisinin asimptotik dağılımı

Bu bölümde, $\hat{R}$'nın (2.15)'de verilen ML tahmin edicisine dayalı asimptotik dağılımı elde edilmiştir. Bu amaçla öncelikle $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{p}, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2)$'nın asimptotik dağılımı belirlenecek daha sonra $\hat{R}$'nın asimptotik dağılımı elde edilmiştir. Bütün bu işlemlerin sonucunda, $\hat{R}$'nın asimptotik dağılımı kullanılarak R için asimptotik güven aralığı oluşturulmuştur.

$\boldsymbol{\theta} = (p, \sigma_1, \sigma_2)$ olmak üzere, $\boldsymbol{\theta}$'nın Fisher bilgi matrisi $\boldsymbol{I_{SRS}}(\boldsymbol{\theta}) = I_{ij}(\boldsymbol{\theta})$ $i, j = 1,2,3$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\boldsymbol{I_{SRS}}(\boldsymbol{\theta}) = -\begin{bmatrix} E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p \partial \sigma_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p \partial \sigma_2}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1 \partial p}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_2 \partial p}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_2^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}.$$

Burada,

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2} = -\frac{n+m}{p^2} - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n} x_i^p (\ln x_i)^2 - \frac{1}{\sigma_2}\sum_{j=1}^{m} y_j^p \left(\ln y_j\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1^2} = \frac{n}{\sigma_1^2} - \frac{2}{\sigma_1^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^p,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2^2} = \frac{m}{\sigma_2^2} - \frac{2}{\sigma_2^3}\sum_{j=1}^{m} y_j^p,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p \partial \sigma_1} = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^p \ln x_i,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p \partial \sigma_2} = \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{m} y_j^p \ln y_j,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_1} = 0$$

ve

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2}\right) = -I_{11}$$

$$= -\frac{1}{p^2}\left[(n+m)\left(1+\Gamma''(2)\right) + 2\Gamma'(2)(n\ln\sigma_1 + m\ln\sigma_2)\right.$$

$$\left. + n(\ln\sigma_1)^2 + m(\ln\sigma_2)^2\right],$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1^2}\right) = -I_{22} = -\frac{n}{\sigma_1^2},$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_2^2}\right) = -I_{33} = -\frac{m}{\sigma_2^2},$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p \partial \sigma_1}\right) = -I_{12} = -I_{21} = \frac{n}{p\sigma_1}\left(\ln\sigma_1 + \Gamma'(2)\right),$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p \partial \sigma_2}\right) = -I_{13} = -I_{31} = \frac{m}{p\sigma_2}\left(\ln\sigma_2 + \Gamma'(2)\right),$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2}\right) = -I_{23} = -I_{32} = 0$$

şeklindedir, bkz. Kundu ve Gupta (2006).

Teorem 2.2.2: $n \to \infty$ ve $m \to \infty$ iken

$$\left(\sqrt{m}(\hat{p}-p), \sqrt{n}(\hat{\sigma}_1 - \sigma_1), \sqrt{n}(\hat{\sigma}_2 - \sigma_2)\right) \xrightarrow{d} N_3\left(0, A^{-1}(p, \sigma_1, \sigma_2)\right) \qquad (2.35)$$

dir. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix},$$

ve

$$a_{11} = \frac{I_{11}}{m},\ a_{22} = \frac{I_{22}}{n},\ a_{33} = \frac{I_{33}}{n},\ a_{12} = a_{21} = \frac{I_{12}}{\sqrt{nm}},\ a_{13} = a_{31} = \frac{I_{13}}{\sqrt{nm}},$$

şeklinde tanımlanır.■

İspat: Teoremin ispatı, düzgünlük koşulları sağlandığında ML tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri, çok boyutlu merkezi limit teoremini kullanılarak ve log-olabilirlik fonksiyonunun türevleri Taylar serisine açılarak yapılır. Teorem 2.2.2'nin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.2.3: $n \to \infty$ ve $m \to \infty$ iken

$$\sqrt{n}\left(\hat{R} - R\right) \xrightarrow{d} N(0, B) \tag{2.36}$$

dir.

İspat: $\hat{R}$'nın asimptotik dağılımı, Teorem 2.2.2 kullanılarak ve delta metodu uygulanarak elde edilir. Burada, $B = b^t A^{-1} b$ dir.

$$u = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

olmak üzere

$$A^{-1} = \frac{1}{u}\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} & -a_{21}a_{33} & -a_{22}a_{31} \\ -a_{21}a_{13} & a_{11}a_{33} - a_{13}^2 & a_{12}a_{31} \\ -a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} & a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. b^t ise

$$b^t = \left(\frac{\partial R}{\partial p}, \frac{\partial R}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial R}{\partial \sigma_2}\right) = \frac{1}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}(0, -\sigma_2, \sigma_1)$$

şeklindedir. Böylece

$$B = \frac{1}{u(\sigma_1 + \sigma_2)^4}[\sigma_2^2(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) - 2\sigma_1\sigma_2 a_{12}a_{31} + \sigma_1^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)]$$

olarak bulunur.■

Teorem 2.2.3 R'nin asimptotik güven aralığını inşa etmek için kullanılır. R'nin güven aralığını hesaplayabilmek için varyans B'nin tahmin edilmesi gerekmektedir. B'nin tahmini p, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin ML tahmin edicilerinin yerine yazılması ile elde edilir. Böylece, $\%100(1-\alpha)$ anlam düzeyinde R'nin güven aralığı

$$\left(\hat{R} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{B}}}{\sqrt{n}}, \hat{R} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{B}}}{\sqrt{n}}\right) \tag{2.37}$$

şeklinde elde edilir. Burada z_α, $N(0,1)$ dağılımının α. yüzdeliğidir.

2.3 *R*'nin RSS'e Dayalı Tahmini

Literatürde genellikle, X stresinin, Y dayanıklılığı karşısında sistem güvenilirliği R tahmin edilirken $X_1, \ldots, X_n$ ve $Y_1, \ldots, Y_m$ bağımsız rastgele örneklemleri SRS yöntemi kullanılarak ile oluşturulur. Ancak son yıllarda sistem güvenilirliğinin tahminini konu alan bazı çalışmalarda RSS yöntemi ile elde edilen örneklemler kullanılarak R tahmin edildiğinde, $\hat{R}_{RSS}$'in $\hat{R}_{SRS}$'e göre daha etkin olduğu görülmüştür bkz. Sengupta ve Mukhuti (2008a,b), Muttlak vd. (2010) ve Dong vd. (2013). Bu bölümde, sistem güvenilirliği R tahmin edilirken stres ve dayanıklılığa ilişkin örneklemler SRS yöntemi yerine RSS yöntemi kullanılarak oluşturulmuştur. Sistem güvenilirliği öncelikle ML yöntemi ile tahmin edilmiş, tahmin edicilerin analitik ifadelerinin elde edilemediği durumlarda ise MML yöntemine başvurulmuştur.

2.3.1 *R*'nin ML tahmin edicisi

$X \sim Weibull(p, \sigma_1)$ stresi ve $Y \sim Weibull(p, \sigma_2)$ dayanıklılığına ilişkin RSS örneklemleri aşağıdaki gibi tanımlanır

$X_{(i)ic}, i = 1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x$, c. döngüdeki i. kümeden i. sıra istatistiği,
$Y_{(j)jl}, j = 1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y$, l. döngüdeki j. kümeden j. sıra istatistiği.

Burada, $X_{(i)ic}$ ve $Y_{(j)jl}$ notasyonları Bölüm 1'de ifade edilen $X_{[i]c}$ ve $Y_{[j]l}$ notasyonlarına denktir. Ancak literatür ile uyumlu olması açısından tezin bu kısmında ve bundan sonraki kısmında $X_{(i)ic}$ ve $Y_{(j)jl}$ notasyonları kullanılmıştır. Ayrıca, gösterim kolaylığı olması açından $X_{(i)ic}$ ve $Y_{(j)jl}$ yerine X_{ic} ve Y_{jl} gösterimi kullanılmıştır. m_x ve m_y sırasıyla X ve Y için küme çapları, r_x ve r_y sırasıyla X ve Y için döngü sayıları olmak üzere X ve Y için örneklem çapları sırasıyla $n = m_x r_x$ ve $m = m_y r_y$ ile gösterilir. X_{ic} ve Y_{jl}'ye ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları ise aşağıda verildiği gibidir

$$f_{X_{ic}}(x_{ic}) = \frac{m_x!}{(i-1)!(m_x-i)!}[F(x_{ic})]^{i-1}[1-F(x_{ic})]^{m_x-i} f(x_{ic}),$$
$$f_{Y_{jl}}(y_{jl}) = \frac{m_y!}{(j-1)!(m_y-j)!}\left[F(y_{jl})\right]^{j-1}\left[1-F(y_{jl})\right]^{m_y-j} f(y_{jl}). \quad (2.38)$$

Sistem güvenirliği R'nin ML tahmin edicisini elde etmek için öncelikle p, σ_1 ve σ_2 parametrelerini tahmin etmek gerekir. Bu amaçla olabilirlik fonksiyonu örneklemler biribinden bağımsız olduğundan

$$L = C\frac{p^{n+m}}{\sigma_1^n \sigma_2^m}\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=1}^{m_x} x_{ic}^{p-1}\left(1-e^{-\frac{x_{ic}^p}{\sigma_1}}\right)^{i-1}\left(e^{-\frac{x_{ic}^p}{\sigma_1}}\right)^{m_x-i+1}$$
$$\cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=1}^{m_y} y_{jl}^{p-1}\left(1-e^{-\frac{y_{jl}^p}{\sigma_2}}\right)^{j-1}\left(e^{-\frac{y_{jl}^p}{\sigma_2}}\right)^{m_y-j+1} \quad (2.39)$$

olarak yazılır. Burada, C sabiti $C = \prod_{c=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} \frac{m_x!}{(i-1)!(m_x-i)!} \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} \frac{m_y!}{(j-1)!(m_y-j)!}$'dir. (2.39) denkleminin logaritması alınarak log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\ln L = {} & \ln C + (n+m)\ln p - n\ln\sigma_1 - m\ln\sigma_2 \\
& + (p-1)\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\ln x_{ic} + \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(i-1)\ln\left(1-e^{-\frac{x_{ic}^p}{\sigma_1}}\right) \\
& - \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(m_x-i+1)\left(\frac{x_{ic}^p}{\sigma_1}\right) \\
& + (p-1)\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\ln y_{jl} + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(j-1)\ln\left(1-e^{-\frac{y_{jl}^p}{\sigma_2}}\right) \\
& - \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(m_y-j+1\right)\left(\frac{y_{jl}^p}{\sigma_2}\right)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

biçimindedir. $\ln L$'nin sırasıyla p, σ_1 ve σ_2'ye göre türevleri alınarak olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial p} = {} & \frac{n+m}{p} + \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\ln x_{ic} + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(i-1)\frac{x_{ic}^p \ln x_{ic}}{e^{x_{ic}^p/\sigma_1}-1} \\
& - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(m_x-i+1)x_{ic}^p \ln x_{ic} \\
& + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\ln y_{jl} + \frac{1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(j-1)\frac{y_{jl}^p \ln y_{jl}}{e^{y_{jl}^p/\sigma_2}-1} \\
& - \frac{1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(m_y-j+1\right)y_{jl}^p \ln y_{jl} = 0,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{n}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(i-1)\frac{x_{ic}^p}{e^{x_{ic}^p/\sigma_1}-1}$$

$$+\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(m_x-i+1)x_{ic}^p=0, \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2}=-\frac{m}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(j-1)\frac{y_{jl}^p}{e^{y_{jl}^p/\sigma_2}-1}$$

$$+\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(m_y-j+1\right)y_{jl}^p=0. \tag{2.43}$$

(2.41)-(2.43) denklemlerinin çözümünden p, σ_1 ve σ_2'nin ML tahmin edicileri elde edilir. Ancak bu denklemler parametrelerin lineer olmayan $h_1(x)=\ln x$, $h_2(x)=x^p$ ve $h_3(x)=\frac{1}{e^{x^p/\sigma_1}-1}$; $h_1(y)=\ln y$, $h_2(y)=y^p$ ve $h_3(y)=\frac{1}{e^{y^p/\sigma_2}-1}$ fonksiyonlarını içerdiğinden parametrelerin ML tahmin edicileri analitik olarak elde edilemez. Bu yüzden, iteratif yöntemlere başvurmak gerekir. p, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin ML tahminleri iteratif olarak elde edildikten sonra R sistem güvenilirliğinin tahmini

$$\hat{R}_{ML,RSS}=\frac{\hat{\sigma}_{2_{ML,RSS}}}{\hat{\sigma}_{1_{ML,RSS}}+\hat{\sigma}_{2_{ML,RSS}}} \tag{2.44}$$

şeklinde hesaplanır.

2.3.2 *R*'nin MML tahmin edicisi

μ_1, μ_2 ve η parametrelerinin MML tahmin edicilerini elde etmek için olabilirlik fonksiyonu Bölüm 2.2.2'de verilen benzer argümanları kullanarak ve örneklemlerin birbirinden bağımsız olduğu varsayımı altında aşağıdaki gibi yazılır

$$L=C\frac{1}{\eta^{n+m}}\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=1}^{m_x}\left[F\left(\frac{u_{(i)c}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{i-1}\left[1-F\left(\frac{u_{(i)c}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{m_x-i}f\left(\frac{u_{(i)c}-\mu_1}{\eta}\right)$$

$$\cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=1}^{m_y}\left[F\left(\frac{v_{(j)l}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{j-1}\left[1-F\left(\frac{v_{(j)l}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{m_y-j}f\left(\frac{v_{(j)l}-\mu_2}{\eta}\right). \tag{2.45}$$

Burada standartlaştırılmış sıra istatistikleri

$$z_{(i)c} = \left((u_{(i)c} - \mu_1)/\eta\right),\ i = 1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x,$$
$$w_{(j)l} = \left((v_{(j)l} - \mu_2)/\eta\right), j = 1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y$$

şeklindedir. $U_{(i)c},\ i = 1, \dots, m_x,\ c = 1, \dots, r_x$ ve $V_{(j)l},\ j = 1, \dots, m_y,\ l = 1, \dots, r_y$, $U = \ln X$ ve $V = \ln Y$ dönüşümü altında $c.$ ve $l.$ döngüdeki $i.$ ve $j.$ sıra istatistikleridir. Burada, $U_{(i)c}$ ve $V_{(j)l}$, U_{ic} ve V_{jl}'nin küçükten büyüğe doğru sıralanmasından elde edilir.

(2.45) denkleminin logaritması alınarak log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}\ln L \propto -(n+m)\ln\eta &+ \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(i-1)\ln F\left(z_{(i)c}\right) + \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(m_x - i)\ln\left(1 - F\left(z_{(i)c}\right)\right) \\ &+ \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\ln f\left(z_{(i)c}\right) + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(j-1)\ln F\left(w_{(j)l}\right) \\ &+ \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(m_y - j\right)\ln\left(1 - F\left(w_{(j)l}\right)\right) + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\ln f\left(w_{(j)l}\right)\end{aligned} \tag{2.46}$$

biçiminde elde edilir. (2.46) denkleminin sırasıyla μ_1, μ_2 ve η'ya göre türevleri alınarak olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} &= -\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(i-1)\frac{f\left(z_{(i)c}\right)}{F\left(z_{(i)c}\right)} + \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(m_x - i)\frac{f\left(z_{(i)c}\right)}{1 - F\left(z_{(i)c}\right)} \\ &\quad -\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\frac{f'\left(z_{(i)c}\right)}{f\left(z_{(i)c}\right)} = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} &= -\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(j-1)\frac{f\left(w_{(j)l}\right)}{F\left(w_{(j)l}\right)} + \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(m_y - j\right)\frac{f\left(w_{(j)l}\right)}{1 - F\left(w_{(j)l}\right)}\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\frac{f'(w_{(j)l})}{f(w_{(j)l})}=0, \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} &= -\frac{n+m}{\eta}-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(i-1)\frac{f(z_{(i)c})}{F(z_{(i)c})}z_{(i)c}\\ &+\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(m_x-i)\frac{f(z_{(i)c})}{1-F(z_{(i)c})}z_{(i)c}\\ &-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\frac{f'(z_{(i)c})}{f(z_{(i)c})}z_{(i)c}-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(j-1)\frac{f(w_{(j)l})}{F(w_{(j)l})}w_{(j)l}\\ &+\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(m_y-j)\frac{f(w_{(j)l})}{1-F(w_{(j)l})}w_{(j)l}\\ &-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\frac{f'(w_{(j)l})}{f(w_{(j)l})}w_{(j)l}=0.\end{aligned} \tag{2.49}$$

(2.47)-(2.49) denklemlerinin aşağıda verilen lineer olmayan fonksiyonlardan dolayı açık çözümü yoktur

$$\begin{aligned}&g_1(z_{(i)c})=\frac{f(z_{(i)c})}{F(z_{(i)c})},\quad g_2(z_{(i)c})=\frac{f(z_{(i)c})}{1-F(z_{(i)c})}\quad \text{ve}\\ &g_3(z_{(i)c})=\frac{f'(z_{(i)c})}{f(z_{(i)c})},\ i=1,\dots,m_x,\ c=1,\dots,r_x,\\ &g_1(w_{(j)l})=\frac{f(w_{(j)l})}{F(w_{(j)l})},\quad g_2(w_{(j)l})=\frac{f(w_{(j)l})}{1-F(w_{(j)l})}\quad \text{ve}\\ &g_3(w_{(j)l})=\frac{f'(w_{(j)l})}{f(w_{(j)l})},\ j=1,\dots,m_y,\ l=1,\dots,r_y.\end{aligned} \tag{2.50}$$

(2.47)-(2.49) denklemleri tekrar düzenlenip

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(i-1)g_1\left(z_{(i)c}\right) + \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(m_x - i)g_2\left(z_{(i)c}\right)$$
$$-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x} g_3\left(z_{(i)c}\right) = 0, \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(j-1)g_1\left(w_{(j)l}\right) + \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(m_y - j\right)g_2\left(w_{(j)l}\right)$$
$$-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} g_3\left(w_{(j)l}\right) = 0, \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = -\frac{n+m}{\eta} - \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(i-1)g_1\left(z_{(i)c}\right)z_{(i)c}$$
$$+\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(m_x - i)g_2\left(z_{(i)c}\right)z_{(i)c}$$
$$-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x} g_3\left(z_{(i)c}\right)z_{(i)c} - \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(j-1)g_1\left(w_{(j)l}\right)w_{(j)l}$$
$$+\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(m_y - j\right)g_2\left(w_{(j)l}\right)w_{(j)l}$$
$$-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} g_3\left(w_{(j)l}\right)w_{(j)l} = 0 \tag{2.53}$$

şeklinde yazılır. Alt bölüm 2.2.2'ye benzer olarak (2.51)-(2.53) olabilirlik denklemlerindeki (2.50) lineer olmayan fonksiyonları $t_{(i)}^{u} = E\left(z_{(i)c}\right)$ ve $t_{(j)}^{v} = E\left(w_{(j)l}\right)$ standartlaştırılmış sıra istatistiklerinin beklenen değeri etrafında I. dereceden Taylor serisine açılıp aşağıdaki gibi lineer hale getirilirler

$$g_1\left(z_{(i)c}\right) \cong \alpha_{1i}^{u} - \beta_{1i}^{u} z_{(i)c}, \quad g_2\left(z_{(i)c}\right) \cong \alpha_{2i}^{u} + \beta_{2i}^{u} z_{(i)c},$$
$$g_3\left(z_{(i)c}\right) \cong \alpha_{3i}^{u} - \beta_{3i}^{u} z_{(i)c}, \quad i = 1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x,$$
$$g_1\left(w_{(j)l}\right) \cong \alpha_{1j}^{v} - \beta_{1j}^{v} w_{(j)l}, \; g_2\left(w_{(j)l}\right) \cong \alpha_{2j}^{v} + \beta_{2j}^{v} w_{(j)l},$$
$$g_3\left(w_{(j)l}\right) \cong \alpha_{3j}^{v} - \beta_{3j}^{v} w_{(j)l}, \quad j = 1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y. \tag{2.54}$$

Burada α_{1i}^{u}, β_{1i}^{u}, α_{2i}^{u}, β_{2i}^{u}, α_{3i}^{u}, β_{3i}^{u} katsayıları ve $t_{(i)}^{u}$

$$\alpha_{1i}^{u} = \frac{f\left(t_{(i)}^{u}\right)}{F\left(t_{(i)}^{u}\right)} + t_{(i)}^{u}\beta_{1i}^{u}, \quad \beta_{1i}^{u} = \frac{\left(e^{t_{(i)}^{u}}-1\right)f\left(t_{(i)}^{u}\right)F\left(t_{(i)}^{u}\right)+f\left(t_{(i)}^{u}\right)^{2}}{F\left(t_{(i)}^{u}\right)^{2}}$$

$$\alpha_{2i}^{u} = e^{t_{(i)}^{u}} - t_{(i)}^{u}e^{t_{(i)}^{u}}, \quad \beta_{2i}^{u} = e^{t_{(i)}^{u}}$$

$$\alpha_{3i}^{u} = 1 - e^{t_{(i)}^{u}}\left(1 - t_{(i)}^{u}\right), \quad \beta_{3i}^{u} = e^{t_{(i)}^{u}}$$

$$t_{(i)}^{u} = \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{i}{m_x+1}\right)\right), \quad i = 1,2,\dots,m_x \tag{2.55}$$

biçimindedir. Ayrıca α_{1j}^{v}, β_{1j}^{v}, α_{2j}^{v}, β_{2j}^{v}, α_{3j}^{v}, β_{3j}^{v} katsayıları ve $t_{(j)}^{v}$

$$\alpha_{1j}^{v} = \frac{f\left(t_{(j)}^{v}\right)}{F\left(t_{(j)}^{v}\right)} + t_{(j)}^{v}\beta_{1j}^{v}, \quad \beta_{1j}^{v} = \frac{\left(e^{t_{(j)}^{v}}-1\right)f\left(t_{(j)}^{v}\right)F\left(t_{(j)}^{v}\right)+f\left(t_{(j)}^{v}\right)^{2}}{F\left(t_{(j)}^{v}\right)^{2}}$$

$$\alpha_{2j}^{v} = e^{t_{(j)}^{v}} - t_{(j)}^{v}e^{t_{(j)}^{v}}, \quad \beta_{2j}^{v} = e^{t_{(j)}^{v}}$$

$$\alpha_{3j}^{v} = 1 - e^{t_{(j)}^{v}}\left(1 - t_{(j)}^{v}\right), \quad \beta_{3j}^{v} = e^{t_{(j)}^{v}}$$

$$t_{(j)}^{v} = \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{j}{m_y+1}\right)\right), \quad j = 1,2,\dots,m_y \tag{2.56}$$

şeklinde elde edilir. (2.54) lineer hale getirilmiş fonksiyonları (2.51)-(2.53) denklemlerinde yerine yazılarak uyarlanmış olabilirlik denklemleri aşağıdaki elde edilir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(i-1)\left(\alpha_{1i}^{u} - \beta_{1i}^{u}z_{(i)c}\right) + \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(m_x - i)(\alpha_{2i}^{u} + \beta_{2i}^{u}z_{(i)c})$$
$$-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\left(\alpha_{3i}^{u} - \beta_{3i}^{u}z_{(i)c}\right) = 0, \tag{2.57}$$
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(j-1)\left(\alpha_{1j}^{v} - \beta_{1j}^{v}w_{(j)l}\right) + \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(m_y - j\right)\left(\alpha_{2j}^{v} + \beta_{2j}^{v}w_{(j)l}\right)$$

$$-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(\alpha_{3j}^{v}-\beta_{3j}^{v}w_{(j)l}\right)=0, \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta}=-\frac{n+m}{\eta}-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(i-1)\left(\alpha_{1i}^{u}-\beta_{1i}^{u}z_{(i)c}\right)z_{(i)c}$$

$$+\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(m_x-i)\left(\alpha_{2i}^{u}+\beta_{2i}^{u}z_{(i)c}\right)z_{(i)c}$$

$$-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\left(\alpha_{3i}^{u}-\beta_{3i}^{u}z_{(i)c}\right)z_{(i)c}-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(j-1)\left(\alpha_{1j}^{v}-\beta_{1j}^{v}w_{(j)l}\right)w_{(j)l}$$

$$+\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(m_y-j\right)\left(\alpha_{2j}^{v}+\beta_{2j}^{v}w_{(j)l}\right)w_{(j)l}$$

$$-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(\alpha_{3j}^{v}-\beta_{3j}^{v}w_{(j)l}\right)w_{(j)l}=0. \tag{2.59}$$

(2.57)-(2.59) uyarlanmış olabilirlik denklemleri μ_1, μ_2 ve η parametrelerine göre çözülerek parametrelerin MML tahmin edicileri

$$\hat{\mu}_{1_{MML,RSS}}=K_1-\frac{\Delta_1}{m_1}\hat{\eta}_{MML,RSS},\quad \hat{\mu}_{2_{MML,RSS}}=K_2-\frac{\Delta_2}{m_2}\hat{\eta}_{MML,RSS},$$
$$\hat{\eta}_{MML,RSS}=\frac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2(n+m)} \tag{2.60}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\delta_i^u=(i-1)\beta_{1i}^u+(m_x-i)\beta_{2i}^u+\beta_{3i}^u,\quad m_1=r_x\textstyle\sum_{i=1}^{m_x}{\delta_i}^u,$$
$$K_1=\textstyle\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_i^u u_{(i)c}\,/m_1,$$
$$\Delta_i^u=(i-1)\alpha_{1i}^u-(m_x-i)\alpha_{2i}^u+\alpha_{3i}^u,\quad \Delta_1=r_x\textstyle\sum_{i=1}^{m_x}\Delta_i^u,$$
$$\delta_j^v=(j-1)\beta_{1j}^v+\left(m_y-j\right)\beta_{2j}^v+\beta_{3j}^v,\quad m_2=r_y\textstyle\sum_{j=1}^{m_y}\delta_j^v,$$

$$K_2 = \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \delta_j^v v_{(j)l} / m_2,$$

$$\Delta_j^v = (j-1)\alpha_{1j}^v - (m_y - j)\alpha_{2j}^v + \alpha_{3j}^v, \quad \Delta_2 = r_y \sum_{j=1}^{m_y} \Delta_j^v,$$

$$A = n + m,$$

$$B = \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \Delta_i^u (u_{(i)c} - K_1) + \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \Delta_j^v (v_{(j)l} - K_2),$$

$$C = \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \delta_i^u (u_{(i)} - K_1)^2 + \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \delta_j^v (v_{(j)l} - K_2)^2 \qquad (2.61)$$

dir. (2.19) ters dönüşümü kullanılarak Weibull dağılımının şekil ve ölçek parametreleri p, σ_1 ve σ_2'nin RSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\hat{p}_{MML,RSS} = \frac{1}{\hat{\eta}_{MML,RSS}},$$

$$\hat{\sigma}_{1_{MML,RSS}} = e^{\hat{p}_{MML,RSS}\hat{\mu}_{1_{MML,RSS}}} \quad \text{ve} \quad \hat{\sigma}_{2_{MML,RSS}} = e^{\hat{p}_{MML,RSS}\hat{\mu}_{2_{MML,RSS}}} \qquad (2.62)$$

Böylece sistem güvenilirliği R'nin RSS yöntemine dayalı MML tahmin edicisi

$$\hat{R}_{MML,RSS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{MML,RSS}}}{\hat{\sigma}_{1_{MML,RSS}} + \hat{\sigma}_{2_{MML,RSS}}} \qquad (2.63)$$

şeklinde belirlenir.

2.3.3 *R*'nin ML tahmin edicisinin asimptotik dağılımı

Bu bölümde, Bölüm 2.2.3'e benzer olarak, RSS yöntemi kullanılarak $\hat{R}$'nın ML tahmin edicisine dayalı asimptotik dağılımı elde edilecektir. Bu amaçla, öncelikle $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{p}, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2)$'nın asimptotik dağılımı belirlenecek daha sonra $\hat{R}$'nın asimptotik dağılımı bulunacaktır. Bütün bu işlemlerin sonucunda, $\hat{R}$'nın asimptotik dağılımı kullanılarak R'nin asimptotik güven aralığı hesaplanacaktır.

$\boldsymbol{\theta} = (p, \sigma_1, \sigma_2)$'nın RSS yöntemine dayalı Fisher bilgi matrisi $\boldsymbol{I_{RSS}(\theta)}$'yı elde etmek için aşağıda verilen teorem ve yardımcı teoremden yararlanır.

Teorem 2.3.1: Düzgünlük koşulları ve mükemmel sıralama varsayımı altında Fisher bilgi matrisi

$$I_{RSS}(\boldsymbol{\theta}) = rmI_{SRS}(\boldsymbol{\theta}) + rm(m-1)\Delta(\boldsymbol{\theta}) \tag{2.64}$$

eşitliği kullanılarak elde edilir. Burada, m küme çapı, r döngü sayısı, $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta_1, \dots, \theta_q\right)^t$ bilinmeyen parametre vektörü,

$$\Delta(\boldsymbol{\theta}) = E\left\{\frac{\boldsymbol{D}F(X;\boldsymbol{\theta})[\boldsymbol{D}F(X;\boldsymbol{\theta})]^t}{F(X;\boldsymbol{\theta})\left(1-F(X;\boldsymbol{\theta})\right)}\right\}$$

ve $\boldsymbol{D} = \left(D_1, D_2, \dots, D_q\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\theta_q}\right)^t$ şeklindedir. $\Delta(\boldsymbol{\theta})$ negatif olmayan tanımlıdır, bkz. Chen vd. (2004).■

Yardımcı Teorem 2.3.1: $X_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$ i. sıra istatistiğini göstermek üzere, ve $X_{(i)}$ sürekli $F(x)$ dağılımına sahip olsun. Keyfi bir $G(x)$ fonksiyonu için $E\left(G(X)\right)$ var ve sonlu ise

$$E\sum_{i=1}^{m}(i-1)\frac{G\left(X_{(i)}\right)}{F\left(X_{(i)}\right)} = m(m-1)EG(X), \tag{2.65}$$

$$E\sum_{i=1}^{m}(m-i)\frac{G\left(X_{(i)}\right)}{1-F\left(X_{(i)}\right)} = m(m-1)EG(X) \tag{2.66}$$

dır, bkz. Chen vd. (2004).■

İspat:

$$
\begin{aligned}
& E\sum_{i=1}^{m}(i-1)\frac{G\left(X_{(i)}\right)}{F\left(X_{(i)}\right)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}(i-1)\int_{0}^{\infty}\frac{m!}{(i-1)!\,(m-i)!}\frac{G(x)}{F(x)}F(x)^{i-1}\left(1-F(x)\right)^{m-i}f(x)dx \\
&= m(m-1)\int_{0}^{\infty}G(x)f(x)dx\sum_{i=1}^{m}\binom{m-2}{i-2}F(x)^{i-1}\left(1-F(x)\right)^{m-i} \\
&= m(m-1)\int_{0}^{\infty}G(x)f(x)dx \\
&= m(m-1)E\left(G(X)\right).
\end{aligned}
$$

(2.66) eşitliğin ispatı, (2.65) eşitliğine benzer olarak yapılır.

Teorem 2.3.1'in ispatı: Teoremin ispatı için kolaylık olması açısından döngü sayısı $r = 1$ alınır ve olabilirlik fonksiyonu

$$L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{m} f_{(i)}\left(x_{(i)},\boldsymbol{\theta}\right)$$

şeklinde yazılır. Burada $f_{(i)}(.)$ $i.$ sıra istatistiğinin *pdf*'ini göstermektedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak

$$
\begin{aligned}
l_1(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^{m}\left[(i-1)\ln F\left(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\right) + (m-i)\ln\left(1-F\left(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\right)\right)\right], \\
l_2(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^{m}\ln f\left(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Açıktır ki, $\ln L(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\theta}) = l_1(\boldsymbol{\theta}) + l_2(\boldsymbol{\theta})$ dır ve böylece

$$I_{RSS}(\boldsymbol{\theta}) = -E\big(\nabla l_1(\boldsymbol{\theta})\big) - E\big(\nabla l_2(\boldsymbol{\theta})\big)$$

elde edilir. Burada $\nabla = \boldsymbol{DD}^t = \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_j\partial\theta_k}, j,k = 1,\dots,q\right]$ dır. Kolayca görülür ki,

$$-E\big(\nabla l_2(\boldsymbol{\theta})\big) = mI_{SRS}(\boldsymbol{\theta})$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\nabla_{ij} l_1(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{m}(i-1)\left[\frac{F''_{jk}\big(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\big)}{F\big(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\big)} - \frac{F'_j\big(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\big)F'_k\big(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\big)}{F\big(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\big)^2}\right]$$
$$-\sum_{i=1}^{m}(m-i)\left[\frac{F''_{jk}\big(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\big)}{1-F\big(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\big)} - \frac{F'_j\big(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\big)F'_k\big(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\big)}{\Big(1-F\big(x_{(i)};\boldsymbol{\theta}\big)\Big)^2}\right]$$

dır. Burada $F''_{jk} = \nabla_{jk}F$ ve $F'_j = D_jF$ şeklinde ifade edilir. Yardımcı teorem 2.3.1'i kullanarak

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{\theta})_{jk} &= -E\left(\nabla_{jk} l_1(\boldsymbol{\theta})\right)\\ &= m(m-1)\left[-EF''_{jk}(X;\boldsymbol{\theta}) + E\frac{F'_j(X;\boldsymbol{\theta})F'_k(X;\boldsymbol{\theta})}{F(X;\boldsymbol{\theta})} + EF''_{jk}(X;\boldsymbol{\theta})\right.\\ &\qquad \left. + E\frac{F'_j(X;\boldsymbol{\theta})F'_k(X;\boldsymbol{\theta})}{1-F(X;\boldsymbol{\theta})}\right]\\ &= E\frac{F'_j(X;\boldsymbol{\theta})F'_k(X;\boldsymbol{\theta})}{F(X;\boldsymbol{\theta})\big(1-F(X;\boldsymbol{\theta})\big)}\end{aligned}$$

elde edilir (Chen vd. 2004).■

Teorem 2.3.1 ve yardımcı teorem 2.3.1'i kullanarak $\boldsymbol{I_{RSS}}(\boldsymbol{\theta})$ aşağıdaki gibi elde edilir

$$\boldsymbol{I_{RSS}(\theta)} = -\begin{bmatrix} E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p \partial \sigma_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p \partial \sigma_2}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1 \partial p}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_2 \partial p}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_2^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}.$$

Burada, $\zeta(.)$ ve $\zeta(.,.)$ Riemann zeta fonksiyonu, γ Euler sabiti ve

$$E_1 = 2\zeta(3) + (1/3)\zeta(3)\pi^2 - 6\zeta(3)\gamma + 2\zeta(3)\gamma^2 + 6\zeta(1,3) - 4\zeta(1,3)\gamma + 2\zeta(2,3),$$
$$E_2 = -2\zeta(3)\gamma + 3\zeta(3) + 2\zeta(1,3),$$
$$E_3 = -2\zeta(3)\gamma + 2\gamma + 3\zeta(3) + 2\zeta(1,3) - 3$$

olmak üzere

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2}\right) = -I_{11}$$
$$= -\frac{1}{p^2}\Big\{\Big(n(m_x - 1) + m\big(m_y - 1\big)\Big)E_1 + \big(2n(m_x - 1)\ln\sigma_1 + 2m\big(m_y - 1\big)\ln\sigma_2\big)E_2 + 2\zeta(3)\big(n(m_x - 1)(\ln\sigma_1)^2 + m\big(m_y - 1\big)(\ln\sigma_2)^2\big)\Big\}$$
$$-\frac{1}{p^2}\big\{(n+m)\big(1 + \Gamma''(2)\big) + 2\Gamma'(2)(n\ln\sigma_1 + m\ln\sigma_2) + n(\ln\sigma_1)^2 + m(\ln\sigma_2)^2\big\},$$
$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1^2}\right) = -I_{22} = -n(m_x - 1)\frac{2\zeta(3) - 2}{\sigma_1^2} - \frac{n}{\sigma_1^2},$$
$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_2^2}\right) = -I_{33} = -m\big(m_y - 1\big)\frac{2\zeta(3) - 2}{\sigma_2^2} - \frac{m}{\sigma_2^2},$$
$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p \partial \sigma_1}\right) = -I_{12} = -I_{21}$$
$$= \frac{n(m_x - 1)}{p\sigma_1}\big((2\zeta(3) - 2)\ln\sigma_1 + E_3\big) + \frac{n}{p\sigma_1}\big(\ln\sigma_1 + \Gamma'(2)\big),$$
$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p \partial \sigma_2}\right) = -I_{13} = -I_{31}$$
$$= \frac{m\big(m_y - 1\big)}{p\sigma_2}\big((2\zeta(3) - 2)\ln\sigma_2 + E_3\big) + \frac{m}{p\sigma_2}\big(\ln\sigma_2 + \Gamma'(2)\big),$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma_1\partial\sigma_2}\right) = -I_{23} = -I_{32} = 0$$

şeklindedir. Teorem 2.2.2 kullanılarak $\hat{p}$, $\hat{\sigma}_1$ ve $\hat{\sigma}_2$'nin asimptotik dağılımı (2.35) eşitliğindeki gibi elde edilir. Sistem güvenilirliği $\hat{R}$'nin asimptotik dağılımı ise Teorem 2.2.3'ü kullanarak (2.36) eşitliğinde olduğu gibi belirlenir. R'nin asimptotik güven aralığı ise (2.37) eşitliğinde verildiği gibi hesaplanır.

2.4 Monte-Carlo Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, sistem güvenirliği R'nin SRS ve RSS yöntemlerine dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin performansları Monte-Carlo simülasyon çalışmasıyla *yan (bias)*, *hata kareler ortalaması (mean square error, MSE)* kriterleri kullanılarak karşılaştırılmıştır. $\hat{R}$ tahmin edicisinin *yan* ve *MSE*'si aşağıdaki gibi elde edilir

$$Bias(\hat{R}) = E(\hat{R} - R), \tag{2.67}$$

$$MSE(\hat{R}) = E(\hat{R} - R)^2. \tag{2.68}$$

Ayrıca *MSE*'lere dayalı *göreli etkinlik (relative efficiency, RE)* kriteri ile R'nin tahmin edicilerinin etkinlikleri aşağıdaki gibi karşılaştırılmıştır

$$RE_1 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{ML,RSS})}, RE_2 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{MML,SRS})}, RE_3 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{MML,RSS})},$$
$$RE_4 = \frac{MSE(\hat{R}_{MML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{MML,RSS})}, RE_5 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,RSS})}{MSE(\hat{R}_{MML,RSS})}. \tag{2.69}$$

RE'nin 1'den büyük olması (> 1) paydadaki tahmin edicinin paydaki tahmin ediciden daha etkin olduğunu göstermektedir. Sistem güvenilirliği R'nin SRS ve RSS yöntemine dayalı ML ve MML tahmin edicilerine ilişkin *yan* ve *RE*'değerleri çizelge 2.1'de verilmiştir.

Bunun yanı sıra, R'nin SRS ve RSS'e dayalı ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımı kullanılarak R için %95'lik güven aralıkları hesaplanmış ve aralık genişlikleri çizelge 2.2'de verilmiştir.

Simülasyon çalışmalarında MATLAB 2013 programı kullanılmıştır. RSS örneklerimi için farklı döngü sayıları (r_x, r_y) ve küme çapları (m_x, m_y) aşağıda verilen şekilde alınıp simülasyon çalışmaları yapılmıştır

$$\begin{aligned} &r_x = r_y = 1 \Rightarrow (m_x, m_y) = (5,5), (5,10), (15,15), (15,20), (20,20), \\ &r_x = r_y = 5 \Rightarrow (m_x, m_y) = (2,2), (2,3), (2,4), (3,4), (4,4), \\ &r_x = r_y = 10 \Rightarrow (m_x, m_y) = (2,2), (2,3), (3,3). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Açıktır ki, RSS yönteminde döngü sayıları $r_x = r_y = 1$ olarak alındığında örneklem çapı (n, m), $n = m_x r_x$ ve $m = m_y r_y$ olduğundan, küme çapına (m_x, m_y) eşit olacaktır. Döngü sayıları $r_x = r_y = 5$ ve $r_x = r_y = 10$ için (n, m) benzer şekilde elde edilir. RSS yöntemine ilişkin örneklemler mükemmel sıralama varsayımı altında elde edilmiştir. SRS yöntemine ilişkin örneklem çapları ise (n, m) alınmıştır. Burada belirtmek gerekir ki, SRS ve RSS yöntemleri kullanılarak elde edilen örneklemler birbirinden farklıdır. Simülasyon çalışmasında, Kundu ve Gupta (2006)'ya benzer olarak $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, 2 ve 3 ve $p = 1.5$ olarak alınmıştır. Ancak, bu çalışmayı genişletmek açısından şekil parametresinin $p = 3$ ve 6 olduğu durumlar için de simülasyonlar tekrar edilmiştir.

Simülasyonlarda tekrar sayısı $[\![100{,}000/\min(n, m)]\!]$ olarak alınmıştır. Burada, $[\![.]\!]$ en büyük tamsayı değerini ifade etmektedir.

Çizelge 2.1 incelendiğinde, *yan* kriterine göre bütün tahmin ediciler farklı şekil ve ölçek parametreleri kombinasyonları için ihmal edilebilir *yan*a sahiptir. Ancak, $\hat{R}_{ML,RSS}$ diğer tahmin ediciler arasında en küçük *yan*a sahiptir.

RE_1 kriterine göre, RSS yöntemine dayalı ML tahmin edicisi SRS yöntemine dayalı ML tahmin edicisinden daha etkindir. Bu etkinlik, döngü sayısı $r_x = r_y = 1$ olarak alındığında mükemmel sıralama varsayımı altında örneklem çapındaki artışa bağlı olarak yaklaşık üç kattan sekiz kata kadar çıkmaktadır. Benzer şekilde, RE_4 kriterine göre, RSS yöntemine dayalı MML tahmin edicisi SRS yöntemine dayalı MML tahmin edicisinden daha etkindir. Bu iki kriter göz önünde bulundurulduğunda, RSS yöntemine dayalı tahmin edicilerin aynı tahmin edici yöntemi kullanıldığında daha etkin olduğu sonucuna varılır.

RE_2 kriterine göre, SRS yöntemine dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin hemen hemen aynı olduğu söylenebilir. Ayrıca, örneklem çapı arttıkça MML tahmin edicisinin asimptotik olarak ML tahmin edicisine yakınsadığı görülmektedir. Bu sonuç, Kundu ve Gupta (2006) ile örtüşmektedir. RE_5 kriterine göre, $\hat{R}_{ML,RSS}$ tahmin edicisi $\hat{R}_{MML,RSS}$'den daha etkindir. Ancak, RE_3 kriterine göre, SRS yöntemine dayalı ML tahmin edicisinin etkinliğinin RSS yöntemine dayalı MML tahmin edicisinin etkinliğinden daha düşüktür. Yani önerilen RSS yöntemine dayalı MML tahmin edicisi, klasik yöntem olan SRS yöntemine dayalı ML tahmin edicisine göre daha etkindir.

Simülasyon çalışmalarından görülmüştür ki, şekil parametresi p'nin farklı değerleri için tahmin edicilerinin etkinlikleri önemli ölçüde değişim göstermemektedir. Ölçek parametreleri $\sigma_1 < \sigma_2$ olduğu durumlarda, RSS'e dayalı tahmin ediciler SRS'e dayalı tahmin edicilerden daha etkindir; fakat etkinlikler $\sigma_1 = \sigma_2$ olduğu durumlara göre biraz daha düşmektedir.

Çizelge 2.2'den açıktır ki, ML, SRS'e dayalı güven aralıklarının aralık uzunluğu şekil ve ölçek parametreleri ne olursa olsun ML, RSS'e dayalı güven aralıklarının aralık uzunluğundan daha geniştir. Ayrıca, beklenildiği gibi örneklem çapı (n, m) arttıkça, aralık uzunlukları daralmaktadır.

Çizelge 2.1 Tahmin edicilerin SRS ve RSS'e dayalı *yan* ve *RE* değerleri

$p = 1.5$											
			Bias				*Efficiency*				
$r_x = r_y$	(m_x, m_y)	(n, m)	$\hat{R}_{ML,SRS}$	$\hat{R}_{MML,SRS}$	$\hat{R}_{ML,RSS}$	$\hat{R}_{MML,RSS}$	RE_1	RE_2	RE_3	RE_4	RE_5
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$											
	(5,5)	(5,5)	-0,0014	-0,0011	-0,0009	-0,0010	2,83	1,05	2,70	2,57	0,95
	(5,10)	(5,10)	0,0131	0,0226	0,0034	0,0198	3,43	1,01	3,02	2,97	0,88
1	(15,15)	(15,15)	0,0010	0,0008	-0,0004	-0,0004	6,94	1,01	6,47	6,39	0,93
	(15,20)	(15,20)	0,0022	0,0045	0,0007	0,0036	7,95	1,01	7,37	7,29	0,92
	(20,20)	(20,20)	0,0024	0,0024	0,0001	0,0002	8,94	1,00	8,39	8,33	0,93
	(2,2)	(10,10)	0,0011	0,0012	-0,0008	-0,0007	1,42	1,02	1,24	1,22	0,87
	(2,3)	(10,15)	0,0064	0,0105	0,0032	0,0297	1,57	1,01	1,25	1,24	0,79
5	(2,4)	(10,20)	0,0067	0,0129	0,0034	0,0457	1,59	0,99	1,10	1,10	0,69
	(3,4)	(15,20)	0,0027	0,0050	0,0020	0,0177	2,11	1,01	1,80	1,78	0,85
	(4,4)	(20,20)	0,0003	0,0004	0,0004	0,0004	2,34	1,00	2,09	2,08	0,89
	(2,2)	(20,20)	-0,0005	-0,0004	-0,0011	-0,0015	1,45	1,00	1,22	1,21	0,84
10	(2,3)	(20,30)	0,0026	0,0050	0,0016	0,0289	1,60	1,00	1,13	1,13	0,71
	(3,3)	(30,30)	0,0010	0,0011	-0,0005	-0,0006	1,90	0,99	1,67	1,67	0,88
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$											
	(5,5)	(5,5)	0,0119	0,0072	0,0123	0,0119	2,66	1,03	2,47	2,37	0,92
	(5,10)	(5,10)	0,0193	0,0242	0,0101	0,0262	3,22	1,03	2,82	2,73	0,87
1	(15,15)	(15,15)	0,0064	0,0050	0,0027	0,0059	6,54	1,00	5,88	5,84	0,89
	(15,20)	(15,20)	0,0049	0,0059	0,0019	0,0077	6,98	1,01	6,12	6,06	0,87
	(20,20)	(20,20)	0,0056	0,0047	0,0018	0,0053	8,53	1,00	7,51	7,48	0,88
	(2,2)	(10,10)	0,0075	0,0052	0,0075	0,0008	1,37	1,01	1,18	1,16	0,85
	(2,3)	(10,15)	0,0098	0,0116	0,0066	0,0235	1,59	1,01	1,33	1,31	0,83
5	(2,4)	(10,20)	0,0104	0,0144	0,0065	0,0377	1,65	1,01	1,24	1,23	0,75
	(3,4)	(15,20)	0,0050	0,0058	0,0042	0,0136	1,93	1,00	1,67	1,66	0,86
	(4,4)	(20,20)	0,0025	0,0016	0,0025	-0,0007	2,26	0,99	1,98	1,98	0,87
	(2,2)	(20,20)	0,0015	0,0008	0,0025	-0,0053	1,41	1,00	1,12	1,11	0,79
10	(2,3)	(20,30)	0,0042	0,0057	0,0051	0,0230	1,49	1,00	1,17	1,16	0,78
	(3,3)	(30,30)	0,0025	0,0021	0,0027	-0,0032	1,80	1,00	1,54	1,53	0,85
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$											
	(5,5)	(5,5)	0,0144	0,0080	0,0151	0,0142	2,60	1,02	2,34	2,29	0,90
	(5,10)	(5,10)	0,0195	0,0223	0,0102	0,0238	3,13	1,03	2,72	2,62	0,87
1	(15,15)	(15,15)	0,0050	0,0031	0,0031	0,0073	6,11	1,00	5,30	5,28	0,86
	(15,20)	(15,20)	0,0066	0,0067	0,0022	0,0089	6,63	1,00	5,60	5,57	0,84
	(20,20)	(20,20)	0,0038	0,0026	0,0016	0,0062	7,73	1,00	6,60	6,56	0,85
	(2,2)	(10,10)	0,0092	0,0061	0,0092	-0,0001	1,37	1,01	1,10	1,09	0,80
	(2,3)	(10,15)	0,0089	0,0097	0,0079	0,0191	1,58	1,01	1,33	1,31	0,83
5	(2,4)	(10,20)	0,0092	0,0119	0,0073	0,0313	1,64	1,01	1,26	1,24	0,77
	(3,4)	(15,20)	0,0058	0,0057	0,0061	0,0119	1,90	1,00	1,60	1,58	0,84
	(4,4)	(20,20)	0,0042	0,0030	0,0040	-0,0011	2,01	1,00	1,67	1,66	0,82
	(2,2)	(20,20)	0,0051	0,0039	0,0023	-0,0083	1,41	1,00	1,03	1,03	0,73
10	(2,3)	(20,30)	0,0054	0,0062	0,0035	0,0158	1,55	1,00	1,22	1,21	0,78
	(3,3)	(30,30)	0,0023	0,0017	0,0031	-0,0043	1,78	0,99	1,42	1,42	0,79

Çizelge 2.1 Tahmin edicilerin SRS ve RSS'e dayalı *yan* ve *RE* değerleri (devam)

$p = 3$											
			Bias				*Efficiency*				
$r_x = r_y$	(m_x, m_y)	(n, m)	$\hat{R}_{ML,SRS}$	$\hat{R}_{MML,SRS}$	$\hat{R}_{ML,RSS}$	$\hat{R}_{MML,RSS}$	RE_1	RE_2	RE_3	RE_4	RE_5
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$											
	(5,5)	(5,5)	-0.0019	-0.0020	-0.0008	-0.0011	2.82	1.04	2.69	2.56	0.95
	(5,10)	(5,10)	0.0141	0.0233	0.0051	0.0217	3.32	1.01	2.90	2.86	0.87
1	(15,15)	(15,15)	0.0017	0.0019	0.0005	0.0005	7.45	1.01	6.92	6.83	0.92
	(15,20)	(15,20)	0.0030	0.0053	0.0001	0.0028	8.34	1.00	7.76	7.70	0.92
	(20,20)	(20,20)	-0.0007	-0.0007	0.0007	0.0007	9.27	1.01	8.68	8.59	0.93
	(2,2)	(10,10)	0.0007	0.0005	-0.0005	-0.0012	1.43	1.02	1.24	1.21	0.86
	(2,3)	(10,15)	0.0057	0.0098	0.0036	0.0294	1.57	1.01	1.25	1.23	0.79
5	(2,4)	(10,20)	0.0062	0.0124	0.0042	0.0454	1.61	0.99	1.12	1.12	0.69
	(3,4)	(15,20)	0.0028	0.0050	0.0019	0.0175	2.02	1.00	1.72	1.71	0.85
	(4,4)	(20,20)	-0.0013	-0.0013	-0.0001	-0.0001	2.27	1.00	2.09	2.07	0.92
	(2,2)	(20,20)	-0.0013	-0.0013	-0.0017	-0.0019	1.45	1.00	1.21	1.21	0.83
10	(2,3)	(20,30)	0.0014	0.0039	0.0002	0.0277	1.58	0.99	1.14	1.14	0.72
	(3,3)	(30,30)	0.0001	0.0001	0.0012	0.0011	1.75	1.00	1.52	1.52	0.87
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$											
	(5,5)	(5,5)	0.0112	0.0067	0.0133	0.0128	2.72	1.03	2.54	2.45	0.93
	(5,10)	(5,10)	0.0201	0.0252	0.0093	0.0253	3.27	1.03	2.89	2.79	0.88
1	(15,15)	(15,15)	0.0048	0.0035	0.0019	0.0052	6.78	1.01	6.03	5.96	0.88
	(15,20)	(15,20)	0.0054	0.0064	0.0017	0.0076	7.21	1.00	6.31	6.27	0.87
	(20,20)	(20,20)	0.0036	0.0026	0.0013	0.0048	8.48	1.00	7.59	7.57	0.89
	(2,2)	(10,10)	0.0085	0.0063	0.0067	-0.0009	1.42	1.01	1.18	1.16	0.83
	(2,3)	(10,15)	0.0100	0.0118	0.0070	0.0245	1.55	1.01	1.30	1.27	0.83
5	(2,4)	(10,20)	0.0088	0.0129	0.0084	0.0398	1.65	1.01	1.22	1.20	0.73
	(3,4)	(15,20)	0.0062	0.0070	0.0045	0.0143	1.99	1.01	1.70	1.68	0.85
	(4,4)	(20,20)	0.0038	0.0029	0.0036	0.0008	2.15	1.00	1.91	1.90	0.88
	(2,2)	(20,20)	0.0024	0.0016	0.0029	-0.0041	1.41	1.00	1.16	1.15	0.82
10	(2,3)	(20,30)	0.0043	0.0056	0.0033	0.0214	1.51	1.00	1.19	1.19	0.78
	(3,3)	(30,30)	0.0027	0.0022	0.0027	-0.0023	1.72	1.00	1.44	1.44	0.83
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$											
	(5,5)	(5,5)	0.0141	0.0079	0.0145	0.0137	2.62	1.02	2.38	2.33	0.90
	(5,10)	(5,10)	0.0183	0.0211	0.0092	0.0227	3.11	1.03	2.75	2.66	0.88
1	(15,15)	(15,15)	0.0061	0.0042	0.0028	0.0071	6.00	1.00	5.18	5.16	0.86
	(15,20)	(15,20)	0.0068	0.0070	0.0023	0.0091	6.52	1.00	5.50	5.47	0.84
	(20,20)	(20,20)	0,0047	0,0035	0,0017	0,0064	7,73	1,00	6,57	6,56	0,84
	(2,2)	(10,10)	0.0075	0.0045	0.0082	-0.0012	1.40	1.00	1.13	1.12	0.80
	(2,3)	(10,15)	0.0098	0.0105	0.0072	0.0182	1.53	1.01	1.30	1.28	0.84
5	(2,4)	(10,20)	0.0104	0.0132	0.0078	0.0311	1.57	1.01	1.21	1.19	0.77
	(3,4)	(15,20)	0.0061	0.0063	0.0061	0.0117	1.97	1.01	1.66	1.65	0.84
	(4,4)	(20,20)	0.0050	0.0038	0.0041	-0.0006	2.17	0.99	1.77	1.77	0.81
	(2,2)	(20,20)	0.0030	0.0019	0.0053	-0.0044	1.39	1.00	1.08	1.07	0.77
10	(2,3)	(20,30)	0.0045	0.0053	0.0047	0.0168	1.59	1.00	1.26	1.26	0.79
	(3,3)	(30,30)	0.0034	0.0027	0.0034	-0.0047	1.75	0.99	1.35	1.35	0.77

Çizelge 2.1 Tahmin edicilerin SRS ve RSS'e dayalı *yan* ve *RE* değerleri (devam)

$p = 6$											
			Bias				*Efficiency*				
$r_x = r_y$	(m_x, m_y)	(n, m)	$\hat{R}_{ML,SRS}$	$\hat{R}_{MML,SRS}$	$\hat{R}_{ML,RSS}$	$\hat{R}_{MML,RSS}$	RE_1	RE_2	RE_3	RE_4	RE_5
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$											
	(5,5)	(5,5)	0,0001	0,0003	0,0001	0,0001	2,79	1,05	2,64	2,51	0,94
	(5,10)	(5,10)	0,0140	0,0232	0,0054	0,0221	3,39	1,02	2,96	2,90	0,87
1	(15,15)	(15,15)	0,0019	0,0019	0,0004	0,0004	7,35	1,01	6,86	6,79	0,93
	(15,20)	(15,20)	0,0011	0,0034	0,0003	0,0031	7,43	1,00	6,94	6,89	0,93
	(20,20)	(20,20)	0,0020	0,0021	0,0003	0,0003	9,41	1,00	8,78	8,72	0,93
	(2,2)	(10,10)	0,0022	0,0021	-0,0003	0,0009	1,44	1,02	1,27	1,24	0,87
	(2,3)	(10,15)	0,0050	0,0089	0,0029	0,0290	1,64	1,01	1,30	1,28	0,79
5	(2,4)	(10,20)	0,0040	0,0102	0,0044	0,0455	1,69	1,00	1,15	1,15	0,68
	(3,4)	(15,20)	0,0004	0,0024	0,0003	0,0160	2,02	1,00	1,77	1,75	0,87
	(4,4)	(20,20)	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0002	2,34	1,01	2,11	2,09	0,90
	(2,2)	(20,20)	0,0005	0,0005	0,0017	0,0014	1,42	1,00	1,21	1,20	0,85
10	(2,3)	(20,30)	0,0022	0,0046	0,0020	0,0296	1,59	0,99	1,12	1,12	0,70
	(3,3)	(30,30)	-0,0005	-0,0006	0,0012	0,0011	1,85	0,99	1,61	1,61	0,87
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$											
	(5,5)	(5,5)	0,0105	0,0060	0,0114	0,0110	2,74	1,03	2,55	2,46	0,93
	(5,10)	(5,10)	0,0183	0,0235	0,0083	0,0240	3,28	1,03	2,91	2,81	0,88
1	(15,15)	(15,15)	0,0047	0,0034	0,0022	0,0055	6,76	1,00	6,05	5,99	0,89
	(15,20)	(15,20)	0,0060	0,0068	0,0019	0,0080	7,18	1,00	6,29	6,23	0,87
	(20,20)	(20,20)	0,0029	0,0022	0,0011	0,0047	8,55	1,00	7,60	7,57	0,88
	(2,2)	(10,10)	0,0065	0,0041	0,0071	0,0000	1,39	1,01	1,18	1,15	0,84
	(2,3)	(10,15)	0,0099	0,0117	0,0079	0,0243	1,57	1,01	1,32	1,30	0,83
5	(2,4)	(10,20)	0,0092	0,0133	0,0092	0,0399	1,62	1,01	1,20	1,18	0,73
	(3,4)	(15,20)	0,0060	0,0068	0,0038	0,0129	1,98	1,00	1,72	1,71	0,86
	(4,4)	(20,20)	0,0020	0,0012	0,0027	-0,0010	2,17	1,00	1,90	1,89	0,87
	(2,2)	(20,20)	0,0047	0,0037	0,0023	-0,0056	1,34	1,00	1,03	1,03	0,77
10	(2,3)	(20,30)	0,0044	0,0060	0,0051	0,0237	1,55	1,00	1,17	1,16	0,75
	(3,3)	(30,30)	0,0033	0,0029	0,0019	-0,0029	1,58	1,00	1,38	1,38	0,87
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$											
	(5,5)	(5,5)	0,0150	0,0085	0,0150	0,0142	2,65	1,02	2,42	2,36	0,91
	(5,10)	(5,10)	0,0188	0,0214	0,0109	0,0249	3,05	1,03	2,65	2,57	0,86
1	(15,15)	(15,15)	0,0061	0,0042	0,0023	0,0065	6,07	1,00	5,26	5,22	0,86
	(15,20)	(15,20)	0,0056	0,0057	0,0027	0,0093	6,87	1,00	5,67	5,63	0,82
	(20,20)	(20,20)	0,0049	0,0037	0,0013	0,0059	7,33	0,99	6,20	6,22	0,84
	(2,2)	(10,10)	0,0081	0,0051	0,0084	-0,0006	1,34	1,00	1,08	1,07	0,80
	(2,3)	(10,15)	0,0090	0,0097	0,0092	0,0208	1,53	1,01	1,29	1,28	0,84
5	(2,4)	(10,20)	0,0100	0,0127	0,0083	0,0315	1,60	1,01	1,23	1,21	0,76
	(3,4)	(15,20)	0,0066	0,0067	0,0052	0,0114	1,95	1,00	1,64	1,63	0,84
	(4,4)	(20,20)	0,0048	0,0037	0,0041	-0,0003	2,18	0,99	1,84	1,84	0,84
	(2,2)	(20,20)	0,0056	0,0043	0,0039	-0,0058	1,36	1,00	1,03	1,02	0,75
10	(2,3)	(20,30)	0,0035	0,0043	0,0045	0,0162	1,60	1,00	1,25	1,24	0,77
	(3,3)	(30,30)	0,0031	0,0025	0,0026	-0,0050	1,64	1,00	1,27	1,27	0,77

Çizelge 2.2 ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımı kullanılarak SRS ve RSS'e dayalı aralık uzunlukları

$r_x = r_y$	(m_x, m_y)	(n, m)	$\hat{R}_{ML,SRS}$	$\hat{R}_{ML,RSS}$	$\hat{R}_{ML,SRS}$	$\hat{R}_{ML,RSS}$	$\hat{R}_{ML,SRS}$	$\hat{R}_{ML,RSS}$
					$p = 1.5$			
			$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$		$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$		$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$	
	(5,5)	(5,5)	0.5695	0.3663	0.5309	0.3267	0.4786	0.2757
	(5,10)	(5,10)	0.5060	0.2990	0.4652	0.2647	0.4165	0.2230
1	(15,15)	(15,15)	0.3502	0.1380	0.3261	0.1231	0.2946	0.1042
	(15,20)	(15,20)	0.3287	0.1226	0.3059	0.1092	0.2753	0.0925
	(20,20)	(20,20)	0.3052	0.1049	0.2848	0.0936	0.2574	0.0792
	(2,2)	(10,10)	0.4238	0.3564	0.3944	0.3202	0.3546	0.2729
	(2,3)	(10,15)	0.3892	0.3136	0.3609	0.2792	0.3242	0.2362
5	(2,4)	(10,20)	0.3698	0.2932	0.3419	0.2604	0.3057	0.2204
	(3,4)	(15,20)	0.3288	0.2355	0.3063	0.2098	0.2754	0.1783
	(4,4)	(20,20)	0.3053	0.2060	0.2850	0.1839	0.2566	0.1563
	(2,2)	(20,20)	0.3052	0.2573	0.2846	0.2308	0.2573	0.1973
10	(2,3)	(20,30)	0.2793	0.2250	0.2596	0.2009	0.2337	0.1706
	(3,3)	(30,30)	0.2507	0.1866	0.2344	0.1672	0.2112	0.1419
					$p = 3$			
			$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$		$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$		$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$	
	(5,5)	(5,5)	0.5695	0.3659	0.5305	0.3252	0.4787	0.2739
	(5,10)	(5,10)	0.5061	0.2987	0.4658	0.2643	0.4141	0.2225
1	(15,15)	(15,15)	0.3504	0.1380	0.3264	0.1228	0.2934	0.1036
	(15,20)	(15,20)	0.3286	0.1226	0.3064	0.1090	0.2753	0.0920
	(20,20)	(20,20)	0.3051	0.1049	0.2844	0.0935	0.2568	0.0790
	(2,2)	(10,10)	0.4234	0.3556	0.3933	0.3175	0.3545	0.2712
	(2,3)	(10,15)	0.3890	0.3128	0.3606	0.2783	0.3232	0.2361
5	(2,4)	(10,20)	0.3699	0.2927	0.3418	0.2600	0.3057	0.2195
	(3,4)	(15,20)	0.3288	0.2353	0.3061	0.2095	0.2747	0.1766
	(4,4)	(20,20)	0.3051	0.2060	0.2853	0.1835	0.2565	0.1547
	(2,2)	(20,20)	0.3051	0.2569	0.2850	0.2293	0.2569	0.1944
10	(2,3)	(20,30)	0.2792	0.2248	0.2601	0.2002	0.2338	0.1696
	(3,3)	(30,30)	0.2506	0.1864	0.2339	0.1663	0.2114	0.1407
					$p = 6$			
			$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$		$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$		$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$	
	(5,5)	(5,5)	0.5695	0.3657	0.5305	0.3247	0.4787	0.2731
	(5,10)	(5,10)	0.5064	0.2986	0.4654	0.2644	0.4165	0.2221
1	(15,15)	(15,15)	0.3505	0.1380	0.3263	0.1227	0.2942	0.1033
	(15,20)	(15,20)	0.3287	0.1226	0.3060	0.1089	0.2753	0.0919
	(20,20)	(20,20)	0.3052	0.1049	0.2848	0.0932	0.2566	0.0786
	(2,2)	(10,10)	0.4237	0.3557	0.3938	0.3167	0.3541	0.2687
	(2,3)	(10,15)	0.3892	0.3130	0.3611	0.2772	0.3243	0.2351
5	(2,4)	(10,20)	0.3698	0.2928	0.3418	0.2593	0.3056	0.2190
	(3,4)	(15,20)	0.3287	0.2354	0.3058	0.2093	0.2753	0.1758
	(4,4)	(20,20)	0.3052	0.2060	0.2841	0.1831	0.2566	0.1546
	(2,2)	(20,20)	0.3052	0.2567	0.2853	0.2294	0.2574	0.1934
10	(2,3)	(20,30)	0.2792	0.2247	0.2598	0.1995	0.2342	0.1685
	(3,3)	(30,30)	0.2505	0.1863	0.2341	0.1656	0.2109	0.1407

3. SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİNİN RSS YÖNTEMİ MODİFİKASYONLARINA DAYALI TAHMİNİ

RSS yöntemi, SRS yönteminin etkin ve makul bir alternatifi olarak McIntre (1952) tarafından önerilmiştir. Literatürde, RSS yöntemi ile oluşturulmuş örneklemler kullanılarak yapılan birçok parametre tahmini çalışması mevcuttur. Ayrıca son yıllarda RSS'in yanı sıra bu yöntemin çeşitli modifikasyonları istatistiki sonuç çıkarımında yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, Shaibu ve Muttlak (2002,2004), Al-Saleh ve Al-Hadrami (2003a,b), Hossain and Muttlak (2006), Abu-Dayyeh ve Al Sawi (2009), Helu vd. (2010), Omar ve Ibrahim (2013). RSS modifikasyonları genellikle kitle ortalamasını daha etkin bir şekilde tahmin edebilmek için önerilmiştir. Bu bölümde ise, RSS'in Bölüm 1.1.5'de değinilen modifikasyonları ERSS, MRSS ve PRSS kullanılarak sistem güvenilirliği R'nin ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Literatürde bu modifikasyonların dışında daha birçok modifikasyon mevcuttur; ancak örnek teşkil etmesi açısından bu çalışmada yalnızca ERSS, MRSS ve PRSS'e yer verilmiştir. Bu amaçla öncelikle sistem güvenilirliği R'nin ERSS yöntemine dayalı ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. İlerleyen bölümlerde ise sırasıyla MRSS ve PRSS yöntemlerinin ML ve MML tahmin edicileri elde edilip, önerilen tahmin edicilerin etkinlikleri farklı küme çapı, farklı döngü sayı ve farklı örneklem çaplarına göre karşılaştırılmıştır.

Bölüm 1.1.5'de bahsedildiği gibi ERSS, MRSS ve PRSS yöntemleri ile örneklem oluşturulurken küme çapının tek veya çift olması durumuna göre örneklem belirleme adımları farklılık göstermektedir. Bu çalışmada, sistem güvenilirliği R'nin ERSS, MRSS ve PRSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicileri küme çapları m_x ve m_y'nin her ikisinin de çift ve her ikisinin de tek olması durumlarına göre elde edilmiştir. Küme çaplarının birinin tek ve birinin çift olması durumları da incelenmiş ancak küme çaplarının her ikisinin de tek ve ya çift olduğu duruma benzer olarak elde edildiği için yalnızca simülasyon çalışmalarında kullanılmıştır (EK 1).

3.1 R'nin ERSS'e Dayalı Tahmini

ERSS yöntemi ilk kez Samawi vd. (1996) tarafından kitle ortalamasını tahmin etmek için önerilmiştir. Ayrıca, ilgilenilen kitlenin dağılımının simetrik olduğu durumda ERSS yönteminin SRS yöntemine göre daha etkin olduğu gösterilmiştir.

ERSS yöntemi ile örneklem belirleme adımları Alt bölüm 1.1.5.1'de anlatılmıştır. X rastgele değişkenine ilişkin m küme çaplı ve r döngü sayılı ERSS örneklemine ait gözlemler, küme çapının tek veya çift olması durumuna göre

i) m tek ise

$$\left\{X_{(1)ic}, i = 1, \dots, \frac{m-1}{2}, c = 1, \dots, r\right\} \cup \left\{X_{(m)ic}, i = \frac{m+1}{2} + 1, \dots m, c = 1, \dots, r\right\} \cup \left\{X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)ic}, i = \frac{m+1}{2}, c = 1, \dots, r\right\}$$

ii) m çift ise

$$\left\{X_{(1)ic}, i = 1, \dots, \frac{m}{2}, c = 1, \dots, r\right\} \cup \left\{X_{(m)ic}, i = \frac{m}{2} + 1, \dots m, c = 1, \dots, r\right\}$$

şeklinde elde edilir.

3.1.1 R'nin ML tahmin edicisi

Bu kısımda, sistem güvenilirliği R'nin ERSS'e dayalı ML tahmin edicileri küme çaplarının tek veya çift olması durumlarına göre ayrı ayrı incelenmiştir.

Durum 1. *Küme çapı m_x ve m_y tek ise:*

$X \sim Weibull(p, \sigma_1)$ stres ve $Y \sim Weibull(p, \sigma_2)$ dayanıklılığa ilişkin rastgele değişkenler olmak üzere sırasıyla m_x ve m_x küme çaplı ERSS örneklemlerinin gözlemleri

$$\left\{X_{(1)ic}, i=1,\dots,\frac{m_x-1}{2}, c=1,\dots,r_x\right\}\cup\left\{X_{(m_x)ic}, i=\frac{m_x+1}{2}+1,\dots m_x, c=1,\dots,r_x\right\}$$
$$\cup\left\{X_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic}, i=\frac{m_x+1}{2}, c=1,\dots,r_x\right\},$$
$$\left\{Y_{(1)jl}, j=1,\dots,\frac{m_y-1}{2}, l=1,\dots,r_y\right\}\cup\left\{Y_{(m_y)jl}, j=\frac{m_y+1}{2}+1,\dots m_y, l=1,\dots,r_y\right\}$$
$$\cup\left\{Y_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl}, j=\frac{m_y+1}{2}, l=1,\dots,r_y\right\}$$

şeklinde oluşturulsun. Burada, gösterim kolaylığı olması açısından $m'=\frac{m_x-1}{2}$ ve $m''=\frac{m_y-1}{2}$ olarak alınmıştır. Sistem güvenilirliğinin ERSS'e dayalı ML tahmin edicileri SRS ve RSS yöntemlerinde de olduğu gibi öncelikle p, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin ML tahmin edicilerinin elde edilmesi ile belirlenir. Bu amaçla, olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}L=C\,\frac{p^{n+m}}{\sigma_1^n\sigma_2^m}&\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=1}^{m'}x_{(1)ic}^{p-1}\left(e^{-\frac{x_{(1)ic}^p}{\sigma_1}}\right)^{m_x}\\&\cdot\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=m'+2}^{m_x}x_{(m_x)ic}^{p-1}e^{-\frac{x_{(m_x)ic}^p}{\sigma_1}}\left(1-e^{-\frac{x_{(m_x)ic}^p}{\sigma_1}}\right)^{m_x-1}\\&\cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=1}^{m''}y_{(1)jl}^{p-1}\left(e^{-\frac{y_{(1)jl}^p}{\sigma_2}}\right)^{m_y}\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=m''+2}^{m_y}y_{(m_y)jl}^{p-1}e^{-\frac{y_{(m_y)jl}^p}{\sigma_2}}\left(1-e^{-\frac{y_{(m_y)jl}^p}{\sigma_2}}\right)^{m_y-1}\\&\cdot\prod_{c=1}^{r_x}x_{(m'+1)m'+1c}^{p-1}\left(e^{-\frac{x_{(m'+1)m'+1c}^p}{\sigma_1}}\right)^{m'+1}\left(1-e^{-\frac{x_{(m'+1)m'+1c}^p}{\sigma_1}}\right)^{m'}\\&\cdot\prod_{l=1}^{r_y}y_{(m''+1)m''+1l}^{p-1}\left(e^{-\frac{y_{(m''+1)m''+1l}^p}{\sigma_2}}\right)^{m''+1}\left(1-e^{-\frac{y_{(m''+1)m''+1l}^p}{\sigma_2}}\right)^{m''}\end{aligned}\qquad(3.1)$$

olarak elde edilir. Burada C sabiti $C=m_x^{r_x(m_x-1)}m_y^{r_y(m_y-1)}\left(\frac{m_x!}{m'!^2}\right)^{r_x}\left(\frac{m_y!}{m''!^2}\right)^{r_y}$ dir. (3.1) olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınıp p, σ_1 ve σ_2 parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{n+m}{p} + \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} \ln x_{(1)ic} - \frac{m_x}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} x_{(1)ic}^{p} \ln x_{(1)ic}$$

$$+ \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} \ln x_{(m_x)ic} - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} x_{(m_x)ic}^{p} \ln x_{(m_x)ic}$$

$$+ \frac{m_x - 1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} \frac{x_{(m_x)ic}^{p} \ln x_{(m_x)ic}}{e^{x_{(m_x)ic}^{p}/\sigma_1} - 1} + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} \ln y_{(1)jl}$$

$$- \frac{m_y}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} y_{(1)jl}^{p} \ln y_{(1)jl} + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} \ln y_{(m_y)jl}$$

$$- \frac{1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} y_{(m_y)jl}^{p} \ln y_{(m_y)jl} + \frac{m_y - 1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} \frac{y_{(m_y)jl}^{p} \ln y_{(m_y)jl}}{e^{y_{(m_y)jl}^{p}/\sigma_2} - 1}$$

$$+ \sum_{c=1}^{r_x} \ln x_{(m'+1)m'+1c} - \frac{m'+1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x} x_{(m'+1)m'+1c}^{p} \ln x_{(m'+1)m'+1c}$$

$$+ \frac{m'}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x} \frac{x_{(m'+1)m'+1c}^{p} \ln x_{(m'+1)m'+1c}}{e^{x_{(m'+1)m'+1c}^{p}/\sigma_1} - 1} + \sum_{l=1}^{r_y} \ln y_{(m''+1)m''+1l}$$

$$- \frac{m''+1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y} y_{(m''+1)m''+1l}^{p} \ln y_{(m''+1)m''+1l}$$

$$+ \frac{m''}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y} \frac{y_{(m''+1)m''+1l}^{p} \ln y_{(m''+1)m''+1l}}{e^{y_{(m''+1)m''+1l}^{p}/\sigma_2} - 1} = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{n}{\sigma_1} + \frac{m_x}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} x_{(1)ic}^{p} + \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} x_{(m_x)ic}^{p}$$

$$- \frac{m_x - 1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} \frac{x_{(m_x)ic}^{p}}{e^{x_{(m_x)ic}^{p}/\sigma_1} - 1} + \frac{m'+1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x} x_{(m'+1)m'+1c}^{p}$$

$$- \frac{m'}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x} \frac{x_{(m'+1)m'+1c}^{p}}{e^{x_{(m'+1)m'+1c}^{p}/\sigma_1} - 1} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2} = -\frac{m}{\sigma_2} + \frac{m_y}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} y_{(1)jl}^{p} + \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} y_{(m_y)jl}^{p}$$

$$-\frac{m_y-1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y}\frac{y_{(m_y)jl}^{p}}{e^{y_{(m_y)jl}^{p}/\sigma_2}-1}+\frac{m''+1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}y_{(m''+1)m''+1l}^{p}$$

$$-\frac{m''}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\frac{y_{(m''+1)m''+1l}^{p}}{e^{y_{(m''+1)m''+1l}^{p}/\sigma_2}-1}=0. \tag{3.4}$$

Durum 2. *Küme çapı m_x ve m_y çift ise:*

Durum 1'e benzer olarak Weibull dağılımına sahip X stresi ve Y dayanıklılığına ilişkin ERSS örneklemleri

$$\left\{X_{(1)ic}, i=1,\dots,\frac{m_x}{2}, c=1,\dots,r_x\right\}\cup\left\{X_{(m_x)ic}, i=\frac{m_x}{2}+1,\dots m_x, c=1,\dots,r_x\right\}$$
$$\left\{Y_{(1)jl}, j=1,\dots,\frac{m_y}{2}, l=1,\dots,r_y\right\}\cup\left\{Y_{(m_y)jl}, j=\frac{m_y}{2}+1,\dots m_y, l=1,\dots,r_y\right\}$$

şeklinde belirlenir. Olabilirlik fonksiyonu ise

$$L=C\frac{p^{n+m}}{\sigma_1^n\sigma_2^m}\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=1}^{m_x/2}x_{(1)ic}^{p-1}\left(e^{-\frac{x_{(1)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m_x}$$
$$\cdot\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=m_x/2+1}^{m_x}x_{(m_x)ic}^{p-1}e^{-\frac{x_{(m_x)ic}^{p}}{\sigma_1}}\left(1-e^{-\frac{x_{(m_x)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m_x-1}$$
$$\cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=1}^{m_y/2}y_{(1)jl}^{p-1}\left(e^{-\frac{y_{(1)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m_y}$$
$$\cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=m_y/2+1}^{m_y}y_{(m_y)jl}^{p-1}e^{-\frac{y_{(m_y)jl}^{p}}{\sigma_2}}\left(1-e^{-\frac{y_{(m_y)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m_y-1} \tag{3.5}$$

olarak elde edilir. Burada, C sabiti $C = m_x^n m_y^m$ dir. Olabilirlik fonksiyonun logaritması alınıp p, σ_1 ve σ_2 parametrelerine göre kısmi türevleri alındığında olabilirlik denklemleri aşağıdaki bulunur

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{n+m}{p} + \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x/2} \ln x_{(1)ic} - \frac{n_x}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x/2} x_{(1)ic}^p \ln x_{(1)ic}$$
$$+ \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m_x/2+1}^{m_x} \ln x_{(m_x)ic} - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m_x/2+1}^{m_x} x_{(m_x)ic}^p \ln x_{(m_x)ic}$$
$$+ \frac{m_x - 1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m_x/2+1}^{m_x} \frac{x_{(m_x)ic}^p \ln x_{(m_x)ic}}{e^{x_{(m_x)ic}^p/\sigma_1} - 1}$$
$$+ \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y/2} \ln y_{(1)jl} - \frac{m_y}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y/2} y_{(1)jl}^p \ln y_{(1)jl}$$
$$+ \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m_y/2+1}^{m_y} \ln y_{(m_y)jl} - \frac{1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m_y/2+1}^{m_y} y_{(m_y)jl}^p \ln y_{(m_y)jl}$$
$$+ \frac{m_y - 1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m_y/2+1}^{m_y} \frac{y_{(m_y)jl}^p \ln y_{(m_y)jl}}{e^{y_{(m_y)jl}^p/\sigma_2} - 1} = 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{n}{\sigma_1} + \frac{m_x}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x/2} x_{(1)ic}^p + \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m_x/2+1}^{m_x} x_{(m_x)ic}^p$$
$$- \frac{m_x - 1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m_x/2+1}^{m_x} \frac{x_{(m_x)ic}^p}{e^{x_{(m_x)ic}^p/\sigma_1} - 1} = 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2} = -\frac{m}{\sigma_2} + \frac{m_y}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y/2} y_{(1)jl}^p + \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m_y/2+1}^{m_y} y_{(m_y)jl}^p$$
$$- \frac{m_y - 1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m_y/2+1}^{m_y} \frac{y_{(m_y)jl}^p}{e^{y_{(m_y)jl}^p/\sigma_2} - 1} = 0. \tag{3.8}$$

(3.2)-(3.4) ve (3.6)-(3.8) olabilirlik denklemleri lineer olmayan fonksiyonlar içerdiğinden p, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin ML tahmin edicilerinin açık çözümleri elde

edilemez. Burada, lineer olmayan fonksiyonlar $h_1(x) = \ln x$, $h_2(x) = x^p$ ve $h_3(x) = \frac{x^p}{e^{x^p/\sigma_1 - 1}}$; $h_1(y) = \ln y$, $h_2(y) = y^p$ ve $h_3(y) = \frac{y^p}{e^{y^p/\sigma_2 - 1}}$ dir. Bu yüzden, hem Durum 1 hem de Durum 2'de parametrelerin ML tahmin edicilerini elde etmek için iteratif yöntemlere başvurmak gerekmektedir.

p, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin ERSS yöntemine dayalı ML tahmin edicileri sırasıyla $\hat{p}_{ML,ERSS}$, $\hat{\sigma}_{1_{ML,ERSS}}$ ve $\hat{\sigma}_{2_{ML,ERSS}}$ olarak tanımlanmıştır. ML tahmin edicilerinin değişmezlik özelliğini kullanarak R'nin ERSS yöntemine dayalı ML tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir

$$\hat{R}_{ML,ERSS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{ML,ERSS}}}{\hat{\sigma}_{1_{ML,ERSS}} + \hat{\sigma}_{2_{ML,ERSS}}}. \tag{3.9}$$

3.1.2 *R*'nin MML tahmin edicisi

Bu bölümde, sistem güvenilirliği R'nin MML tahmin edicileri ERSS yöntemi kullanılarak küme çaplarını hem tek hem de çift olduğu durumlar için elde edilmiştir.

Durum 1. *Küme çapı m_x ve m_y tek ise:*

$$\left\{X_{(1)ic}, i = 1, \dots, \frac{m_x - 1}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\} \cup \left\{X_{(m_x)ic}, i = \frac{m_x + 1}{2} + 1, \dots m_x, c = 1, \dots, r_x\right\}$$
$$\cup \left\{X_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic}, i = \frac{m_x + 1}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\},$$
$$\left\{Y_{(1)jl}, j = 1, \dots, \frac{m_y - 1}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\} \cup \left\{Y_{(m_y)jl}, j = \frac{m_y + 1}{2} + 1, \dots m_y, l = 1, \dots, r_y\right\}$$
$$\cup \left\{Y_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl}, j = \frac{m_y + 1}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\},$$

ERSS örneklemleri sırasıyla $Weibull(p, \sigma_1)$ ve $Weibull(p, \sigma_2)$ dağılımına sahip olmak üzere

$U = \ln X$ ve $V = \ln Y$

dönüşümü altında

$$\left\{U_{(1)ic}, i = 1, \dots, \frac{m_x-1}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\} \cup \left\{U_{(m_x)ic}, i = \frac{m_x+1}{2} + 1, \dots m_x, c = 1, \dots, r_x\right\}$$
$$\cup \left\{U_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic}, i = \frac{m_x+1}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\},$$
$$\left\{V_{(1)jl}, j = 1, \dots, \frac{m_y-1}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\} \cup \left\{V_{(m_y)jl}, j = \frac{m_y+1}{2} + 1, \dots m_y, l = 1, \dots, r_y\right\}$$
$$\cup \left\{V_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl}, j = \frac{m_y+1}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\},$$

örneklemleri sırasıyla $EV(\mu_1, \eta)$ ve $EV(\mu_2, \eta)$ dağılımına sahiptir. Burada, $m' = \frac{m_x-1}{2}$ ve $m'' = \frac{m_y-1}{2}$ olmak üzere, olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
L \propto \frac{1}{\eta^{n+m}} & \prod_{c=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m'} f\left(\frac{u_{(1)ic} - \mu_1}{\eta}\right) \left[1 - F\left(\frac{u_{(1)ic} - \mu_1}{\eta}\right)\right]^{m_x-1} \\
& \cdot \prod_{c=1}^{r_x} \prod_{i=m'+2}^{m_x} f\left(\frac{u_{(m_x)ic} - \mu_1}{\eta}\right) \left[F\left(\frac{u_{(m_x)ic} - \mu_1}{\eta}\right)\right]^{m_x-1} \\
& \cdot \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m''} f\left(\frac{v_{(1)jl} - \mu_2}{\eta}\right) \left[1 - F\left(\frac{v_{(1)jl} - \mu_2}{\eta}\right)\right]^{m_y-1} \\
& \cdot \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=m''+2}^{m_y} f\left(\frac{v_{(m_y)jl} - \mu_2}{\eta}\right) \left[F\left(\frac{v_{(m_y)jl} - \mu_2}{\eta}\right)\right]^{m_y-1} \\
& \cdot \prod_{c=1}^{r_x} f\left(\frac{u_{(m'+1)m'+1c} - \mu_1}{\eta}\right) \left[1 - F\left(\frac{u_{(m'+1)m'+1c} - \mu_1}{\eta}\right)\right]^{m'} \\
& \quad \left[F\left(\frac{u_{(m'+1)m'+1c} - \mu_1}{\eta}\right)\right]^{m'} \\
& \cdot \prod_{l=1}^{r_y} f\left(\frac{v_{(m''+1)m''+1l} - \mu_2}{\eta}\right) \left[1 - F\left(\frac{v_{(m''+1)m''+1l} - \mu_2}{\eta}\right)\right]^{m''} \\
& \quad \left[F\left(\frac{v_{(m''+1)m''+1l} - \mu_2}{\eta}\right)\right]^{m''} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada standartlaştırılmış sıra istatistikleri

$$z_{(1)ic} = \left(\left(u_{(1)ic} - \mu_1\right)/\eta\right), i = 1, \dots, m', c = 1, \dots, r_x,$$
$$z_{(m_x)ic} = \left(\left(u_{(m_x)ic} - \mu_1\right)/\eta\right), i = m' + 2, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x,$$
$$z_{(m'+1)m'+1c} = \left(\left(u_{(m'+1)m'+1c} - \mu_1\right)/\eta\right), c = 1, \dots, r_x,$$
$$w_{(1)jl} = \left(\left(v_{(1)jl} - \mu_2\right)/\eta\right), j = 1, \dots, m'', l = 1, \dots, r_y,$$
$$w_{(m_y)jl} = \left(\left(v_{(m_y)jl} - \mu_2\right)/\eta\right), j = m'' + 2, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y,$$
$$w_{(m''+1)m''+1l} = \left(\left(v_{(m''+1)m''+1l} - \mu_2\right)/\eta\right), l = 1, \dots, r_y$$

olmak üzere, (3.10) fonksiyonunun logaritması alındıktan sonra μ_1, μ_2 ve η parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = &-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_1\left(z_{(1)ic}\right) + \frac{m_x - 1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_2\left(z_{(1)ic}\right)\\ &-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} g_1\left(z_{(m_x)ic}\right) - \frac{m_x - 1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} g_3\left(z_{(m_x)ic}\right)\\ &-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_1\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right) + \frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_2\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right)\\ &-\frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_3\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right) = 0,\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = &-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_1\left(w_{(1)jl}\right) + \frac{m_y - 1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_2\left(w_{(1)jl}\right)\\ &-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_1\left(w_{(m_y)jl}\right) - \frac{m_y - 1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_3\left(w_{(m_y)jl}\right)\\ &-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y} g_1\left(w_{(m''+1)m''+1l}\right) + \frac{m''}{\eta}\sum_{c=1}^{r_y} g_2\left(w_{(m''+1)m''+1l}\right)\\ &-\frac{m''}{\eta}\sum_{c=1}^{r_y} g_3\left(w_{(m''+1)m''+1l}\right) = 0,\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = -\frac{n+m}{\eta} - \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_1\left(z_{(1)ic}\right) \mathrm{z}_{(1)\mathrm{ic}}$$

$$+\frac{m_x-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_2\left(z_{(1)ic}\right) z_{(1)ic} - \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} g_1\left(z_{(m_x)ic}\right) z_{(m_x)ic}$$

$$-\frac{m_x-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} g_3\left(z_{(m_x)ic}\right) z_{(m_x)ic} - \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_1\left(w_{(1)jl}\right) w_{(1)jl}$$

$$+\frac{m_y-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_2\left(w_{(1)jl}\right) w_{(1)jl} - \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_1\left(w_{(m_y)jl}\right) w_{(m_y)jl}$$

$$-\frac{m_y-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_3\left(w_{(m_y)jl}\right) w_{(m_y)jl}$$

$$-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_1\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right) z_{(m'+1)m'+1c}$$

$$+\frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_2\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right) z_{(m'+1)m'+1c}$$

$$-\frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_3\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right) z_{(m'+1)m'+1c}$$

$$-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y} g_1\left(w_{(m''+1)m''+1l}\right) w_{(m''+1)m''+1l}$$

$$+\frac{m''}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y} g_2\left(w_{(m''+1)m''+1l}\right) w_{(m''+1)m''+1l}$$

$$-\frac{m''}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y} g_3\left(w_{(m''+1)m''+1l}\right) w_{(m''+1)m''+1l} = 0. \qquad (3.13)$$

(3.11)-(3.13) olabilirlik denklemlerinin ilgili parametrelere göre çözümleri parametrelerin ML tahmin edicileridir. Ancak bu denklemler lineer olmayan fonksiyonlar içerdiğinden tahmin ediciler analitik olarak elde edilemezler. Bu yüzden, denklemleri çözebilmek için iteratif yöntemlere başvurmak gerekmektedir. Fakat, Bölüm 2'de bahsedildiği gibi iteratif yöntemler kullanılırken birden fazla köke

yakınsama, yanlış köke yakınsama veya hiç yakınsamama gibi problemler karşılaşılabilir bkz. Barnett (1966), Puthenpura ve Sinha (1986) ve Vaughan (1992). Bu nedenle, olabilirlik denklemlerini çözmek için Tiku (1967,1968) ve Tiku ve Suresh (1992) tarafından önerilen MML yöntemi kullanılmıştır.

(3.11)-(3.13) denklemlerindeki lineer olmayan fonksiyonlar

$$g_1(z_{(k)ic}) = \frac{f'(z_{(k)ic})}{f(z_{(k)ic})},\quad g_2(z_{(k)ic}) = \frac{f(z_{(k)ic})}{1-F(z_{(k)ic})},$$
$$g_3(z_{(k)ic}) = \frac{f(z_{(k)ic})}{F(z_{(k)ic})},\quad k = 1, \frac{m_x+1}{2}, m_x;$$
$$g_1(w_{(k)jl}) = \frac{f'(w_{(k)jl})}{f(w_{(k)jl})},\quad g_2(w_{(k)jl}) = \frac{f(w_{(k)jl})}{1-F(w_{(k)jl})},$$
$$g_3(w_{(k)jl}) = \frac{f(w_{(k)jl})}{F(w_{(k)jl})},\ k = 1, \frac{m_y+1}{2}, m_y \qquad (3.14)$$

standartlaştırılmış sıra istatistiklerinin beklenen değeri etrafında

$$t_k^u = E(z_{(k)ic}),\ k = 1, \frac{m_x+1}{2}, m_x \text{ ve } t_k^v = E(w_{(k)jl}),\ k = 1, \frac{m_y+1}{2}, m_y, \qquad (3.15)$$

I. derecen Taylor serisine açılıp

$$g_1(z_{(k)ic}) \cong \alpha_{1k}^u - \beta_{1k}^u z_{(k)ic},\ g_1(w_{(k)jl}) \cong \alpha_{1k}^v - \beta_{1k}^v w_{(k)jl},$$
$$g_2(z_{(k)ic}) \cong \alpha_{2k}^u + \beta_{2k}^u z_{(k)ic},\ g_2(w_{(k)jl}) \cong \alpha_{2k}^v + \beta_{2k}^v w_{(k)jl},$$
$$g_3(z_{(k)ic}) \cong \alpha_{3k}^u - \beta_{3k}^u z_{(k)ic},\ g_3(w_{(k)jl}) \cong \alpha_{3k}^v - \beta_{3k}^v w_{(k)jl} \qquad (3.16)$$

şeklinde lineer hale getirilirler. Burada $\alpha_{1k}^u, \beta_{1k}^u, \alpha_{2k}^u, \beta_{2k}^u, \alpha_{3k}^u, \beta_{3k}^u$ katsayıları ve t_k^u

$$\beta_{1k}^u = e^{t_k^u},\quad \alpha_{1k}^u = 1 - e^{t_k^u} + t_k^u e^{t_k^u},$$
$$\beta_{2k}^u = e^{t_k^u},\quad \alpha_{2k}^u = e^{t_k^u} - t_k^u e^{t_k^u},$$

$$\beta_{3k}^{u}=\frac{\left(e^{t_k^u}-1\right)f(t_k^u)F(t_k^u)+f(t_k^u)^2}{F(t_k^u)^2},\quad \alpha_{3k}^{u}=\frac{f(t_k^u)}{F(t_k^u)}+\beta_{3k}^{u}t_k^u,$$
$$t_k^u=\ln\left(-\ln\left(1-\frac{k}{m_x+1}\right)\right),\quad k=1,\frac{m_x+1}{2},m_x \tag{3.17}$$

dır. Ayrıca α_{1k}^{v}, β_{1k}^{v}, α_{2k}^{v}, β_{2k}^{v}, α_{3k}^{v}, β_{3k}^{v} katsayıları ve t_k^v ise

$$\beta_{1k}^{v}=e^{t_k^v},\quad \alpha_{1k}^{v}=1-e^{t_k^v}+t_k^v e^{t_k^v},$$
$$\beta_{2k}^{v}=e^{t_k^v},\quad \alpha_{2k}^{v}=e^{t_k^v}-t_k^v e^{t_k^v},$$
$$\beta_{3k}^{v}=\frac{\left(e^{t_k^v}-1\right)f(t_k^v)F(t_k^v)+f(t_k^v)^2}{F(t_k^v)^2},\quad \alpha_{3k}^{v}=\frac{f(t_k^v)}{F(t_k^v)}+\beta_{3k}^{v}t_k^v,$$
$$t_k^v=\ln\left(-\ln\left(1-\frac{k}{m_y+1}\right)\right),\quad k=1,\frac{m_y+1}{2},m_y \tag{3.18}$$

şekilde elde edilir. (3.14) lineer olmayan fonksiyonları (3.16)'da lineer hale getirilip, (3.11)-(3.13) denklemlerinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılarak μ_1, μ_2 ve η parametrelerin ERSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri

$$\hat{\mu}_{1_{MML,ERSS}}=K_1-\frac{\Delta_1}{m_1}\hat{\eta}_{MML,ERSS},\qquad \hat{\mu}_{2_{MML,ERSS}}=K_2-\frac{\Delta_2}{m_2}\hat{\eta}_{MML,ERSS}$$
$$\hat{\eta}_{MML,ERSS}=\frac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2(n+m)} \tag{3.19}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\delta_1^u=\beta_{11}^u+(m_x-1)\beta_{21}^u,\quad \delta_2^u=\beta_{1m_x}^u+(m_x-1)\beta_{3m_x}^u,$$
$$\delta_3^u=\left(\frac{m_x-1}{2}\right)\beta_{1\frac{m_x+1}{2}}^u+\left(\frac{m_x-1}{2}\right)\beta_{2\frac{m_x+1}{2}}^u+\beta_{3\frac{m_x+1}{2}}^u,\ m_1=r_x\left[\frac{m_x-1}{2}(\delta_1^u+\delta_2^u)+\delta_3^u\right],$$
$$K_1=\frac{\delta_1^u\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{\frac{m_x-1}{2}}u_{(1)ic}+\delta_2^u\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x+1}{2}+1}^{m_x}u_{(m_x)ic}+\delta_3^u\sum_{c=1}^{r_x}u_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)\frac{m_x+1}{2}c}}{m_1},$$
$$\Delta_1^u=\alpha_{11}^u-(m_x-1)\alpha_{21}^u,\quad \Delta_2^u=\alpha_{1m_x}^u+(m_x-1)\alpha_{3m_x}^u,$$
$$\Delta_3^u=\left(\frac{m_x-1}{2}\right)\alpha_{1\frac{m_x+1}{2}}^u-\left(\frac{m_x-1}{2}\right)\alpha_{2\frac{m_x+1}{2}}^u+\alpha_{3\frac{m_x+1}{2}}^u,\ \Delta_1=r_x\left[\frac{m_x-1}{2}(\Delta_1^u+\Delta_2^u)+\Delta_3^u\right],$$

$$\delta_1^v = \beta_{11}^v + (m_y - 1)\beta_{21}^v, \quad \delta_2^v = \beta_{1m_y}^v + (m_y - 1)\beta_{3m_y}^v,$$

$$\delta_3^v = \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\beta_{1\frac{m_y+1}{2}}^v + \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\beta_{2\frac{m_y+1}{2}}^v + \beta_{3\frac{m_y+1}{2}}^v, m_2 = r_y\left[\frac{m_y-1}{2}(\delta_1^v + \delta_2^v) + \delta_3^v\right],$$

$$K_2 = \frac{\delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{\frac{m_y-1}{2}} v_{(1)jl} + \delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y+1}{2}+1}^{m_y} v_{(m_y)jl} + \delta_3^v \sum_{l=1}^{r_y} v_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)\frac{m_y+1}{2}l}}{m_2},$$

$$\Delta_1^v = \alpha_{11}^v - (m_y - 1)\alpha_{21}^v, \quad \Delta_2^v = \alpha_{1m_y}^v + (m_y - 1)\alpha_{3m_y}^v,$$

$$\Delta_3^v = \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\alpha_{1\frac{m_y+1}{2}}^v - \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\alpha_{2\frac{m_y+1}{2}}^v + \alpha_{3\frac{m_y+1}{2}}^v, \Delta_2 = r_y\left[\frac{m_y-1}{2}(\Delta_1^v + \Delta_2^v) + \Delta_3^v\right],$$

$$A = n + m,$$

$$B = \Delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{\frac{m_x-1}{2}} (u_{(1)ic} - K_1) + \Delta_2^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x+1}{2}+1}^{m_x} (u_{(m_x)ic} - K_1)$$

$$+\Delta_3^u \sum_{c=1}^{r_x}\left(u_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)\frac{m_x+1}{2}c} - K_1\right) + \Delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{\frac{m_y-1}{2}} (v_{(1)jl} - K_2)$$

$$+\Delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y+1}{2}+1}^{m_y} (v_{(m_y)jl} - K_2) + \Delta_3^v \sum_{l=1}^{r_y}\left(v_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)\frac{m_y+1}{2}l} - K_2\right),$$

$$C = \delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{\frac{m_x-1}{2}} (u_{(1)ic} - K_1)^2 + \delta_2^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x+1}{2}+1}^{m_x} (u_{(m_x)ic} - K_1)^2$$

$$+\delta_3^u \sum_{c=1}^{r_x}\left(u_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)\frac{m_x+1}{2}c} - K_1\right)^2 + \delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{\frac{m_y-1}{2}} (v_{(1)jl} - K_2)^2$$

$$+\delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y+1}{2}+1}^{m_y} \left(v_{(m_y)jl} - K_2\right)^2 + \delta_3^v \sum_{l=1}^{r_y}\left(v_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)\frac{m_y+1}{2}l} - K_2\right)^2 \qquad (3.20)$$

olarak bulunur.

Durum 2. *Küme çapı m_x ve m_y çift ise:*

$$\left\{X_{(1)ic}, i = 1, \dots, \frac{m_x}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\} \cup \left\{X_{(m_x)ic}, i = \frac{m_x}{2} + 1, \dots m_x, c = 1, \dots, r_x\right\}$$

$$\left\{Y_{(1)jl}, j = 1, \dots, \frac{m_y}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\} \cup \left\{Y_{(m_y)jl}, j = \frac{m_y}{2} + 1, \dots m_y, l = 1, \dots, r_y\right\}$$

ERSS örneklemleri sırasıyla $Weibull(p, \sigma_1)$ ve $Weibull(p, \sigma_2)$ dağılımına sahip olmak üzere

$$U = \ln X \quad \text{ve} \quad V = \ln Y$$

dönüşümü altında

$$\left\{U_{(1)ic}, i = 1, \dots, \frac{m_x}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\} \cup \left\{U_{(m_x)ic}, i = \frac{m_x}{2} + 1, \dots m_x, c = 1, \dots, r_x\right\}$$

$$\left\{V_{(1)jl}, j = 1, \dots, \frac{m_y}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\} \cup \left\{V_{(m_y)jl}, j = \frac{m_y}{2} + 1, \dots m_y, l = 1, \dots, r_y\right\}$$

örneklemleri sırasıyla $EV(\mu_1, \eta)$ ve $EV(\mu_2, \eta)$ dağılımına sahiptir. Buna göre, olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} L \propto \frac{1}{\eta^{n+m}} & \prod_{c=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x/2} f\left(\frac{u_{(1)ic} - \mu_1}{\eta}\right) \left[1 - F\left(\frac{u_{(1)ic} - \mu_1}{\eta}\right)\right]^{m_x - 1} \\ & \cdot \prod_{c=1}^{r_x} \prod_{i=m_x/2+1}^{m_x} f\left(\frac{u_{(m_x)ic} - \mu_1}{\eta}\right) \left[F\left(\frac{u_{(m_x)ic} - \mu_1}{\eta}\right)\right]^{m_x - 1} \\ & \cdot \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y/2} f\left(\frac{v_{(1)jl} - \mu_2}{\eta}\right) \left[1 - F\left(\frac{v_{(1)jl} - \mu_2}{\eta}\right)\right]^{m_y - 1} \\ & \cdot \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=m_y/2+1}^{m_y} f\left(\frac{v_{(m_y)jl} - \mu_2}{\eta}\right) \left[F\left(\frac{v_{(m_y)jl} - \mu_2}{\eta}\right)\right]^{m_y - 1} \end{aligned} \tag{3.21}$$

şeklindedir. Burada standartlaştırılmış sıra istatistikleri

$$z_{(1)ic} = \left((u_{(1)ic} - \mu_1)/\eta\right), i = 1, \dots, m_x/2, c = 1, \dots, r_x,$$

$$z_{(m_x)ic} = \left(\left(u_{(m_x)ic} - \mu_1\right)/\eta\right), i = m_x/2 + 1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x,$$
$$w_{(1)jl} = \left(\left(v_{(1)jl} - \mu_2\right)/\eta\right), j = 1, \dots, m_y/2, l = 1, \dots, r_y,$$
$$w_{(m_y)jl} = \left(\left(v_{(m_y)jl} - \mu_2\right)/\eta\right), j = \frac{m_y}{2} + 1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y,$$

olmak üzere, (3.21) olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınıp, bu fonksiyonun μ_1, μ_2 ve η parametrelerine göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x/2} g_1\left(z_{(1)ic}\right) + \frac{m_x - 1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x/2} g_2\left(z_{(1)ic}\right)$$
$$-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x}{2}+1}^{m_x} g_1\left(z_{(m_x)ic}\right) - \frac{m_x - 1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x}{2}+1}^{m_x} g_3\left(z_{(m_x)ic}\right) = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y/2} g_1\left(w_{(1)jl}\right) + \frac{m_y - 1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y/2} g_2\left(w_{(1)jl}\right)$$
$$-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y}{2}+1}^{m_y} g_1\left(w_{(m_y)jl}\right) - \frac{m_y - 1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y}{2}+1}^{m_y} g_3\left(w_{(m_y)jl}\right) = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = -\frac{n+m}{\eta} - \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x/2} g_1\left(z_{(1)ic}\right) z_{(1)ic}$$
$$+\frac{m_x - 1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x/2} g_2\left(z_{(1)ic}\right) z_{(1)ic} - \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m_x/2+1}^{m_x} g_1\left(z_{(m_x)ic}\right) z_{(m_x)ic}$$
$$-\frac{m_x - 1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m_x/2+1}^{m_x} g_3\left(z_{(m_x)ic}\right) z_{(m_x)ic} - \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y/2} g_1\left(w_{(1)jl}\right) w_{(1)jl}$$
$$+\frac{m_y - 1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y/2} g_2\left(w_{(1)jl}\right) w_{(1)jl} - \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m_y/2+1}^{m_y} g_1\left(w_{(m_y)jl}\right) w_{(m_y)jl}$$
$$-\frac{m_y - 1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m_y/2+1}^{m_y} g_3\left(w_{(m_y)jl}\right) w_{(m_y)jl} = 0 \quad (3.24)$$

şeklinde elde edilir. Durum 1'e benzer olarak (3.22)-(3.24) denklemlerindeki (3.14) lineer olmayan fonksiyonları standartlaştırılmış sıra istatistikleri etrafında I. dereceden Taylor serisine açılıp (3.16)'deki gibi lineer hale getirilirler. Burada α_{1k}^{u}, β_{1k}^{u}, α_{2k}^{u}, β_{2k}^{u}, α_{3k}^{u}, β_{3k}^{u} katsayıları ve t_k^u (3.17), α_{1j}^{v}, β_{1j}^{v}, α_{2j}^{v}, β_{2j}^{v}, α_{3j}^{v}, β_{3j}^{v} katsayıları ve t_k^v ise (3.18) denklemlerine benzer şekilde elde edilir. Böylece μ_1, μ_2 ve η parametrelerinin ERSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri $\hat{\mu}_{1_{MML,ERSS}}$, $\hat{\mu}_{2_{MML,ERSS}}$ ve $\hat{\eta}_{MML,ERSS}$ (3.19) eşitliklerindeki gibi elde edilir. Burada,

$$\delta_1^u = \beta_{11}^u + (m_x - 1)\beta_{21}^u, \quad \delta_2^u = \beta_{1m_x}^u + (m_x - 1)\beta_{3m_x}^u,$$

$$m_1 = \frac{r_x m_x}{2}(\delta_1^u + \delta_2^u), \quad K_1 = \frac{\delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{\frac{m_x}{2}} u_{(1)ic} + \delta_2^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x}{2}+1}^{m_x} u_{(m_x)ic}}{m_1},$$

$$\Delta_1^u = \alpha_{11}^u - (m_x - 1)\alpha_{21}^u, \quad \Delta_2^u = \alpha_{1m_x}^u + (m_x - 1)\alpha_{3m_x}^u,$$

$$\Delta_1 = \frac{r_x m_x}{2}(\Delta_1^u + \Delta_2^u),$$

$$\delta_1^v = \beta_{11}^v + (m_y - 1)\beta_{21}^v, \quad \delta_2^v = \beta_{1m_y}^v + (m_y - 1)\beta_{3m_y}^v,$$

$$m_2 = \frac{r_y m_y}{2}(\delta_1^v + \delta_2^v), \quad K_2 = \frac{\delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{\frac{m_y}{2}} v_{(1)jl} + \delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y}{2}+1}^{m_y} v_{(m_y)jl}}{m_2},$$

$$\Delta_1^v = \alpha_{11}^v - (m_y - 1)\alpha_{21}^v, \quad \Delta_2^v = \alpha_{1m_y}^v + (m_y - 1)\alpha_{3m_y}^v,$$

$$\Delta_2 = \frac{r_y m_y}{2}(\Delta_1^v + \Delta_2^v),$$

$$A = n + m,$$

$$B = \Delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{\frac{m_x}{2}}(u_{(1)ic} - K_1) + \Delta_2^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x}{2}+1}^{m_x}(u_{(m_x)ic} - K_1)$$
$$+\Delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{\frac{m_y}{2}}(v_{(1)jl} - K_2) + \Delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y}{2}+1}^{m_y}(v_{(m_y)jl} - K_2),$$

$$C = \delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{\frac{m_x}{2}}(u_{(1)ic} - K_1)^2 + \delta_2^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x}{2}+1}^{m_x}(u_{(m_x)ic} - K_1)^2$$
$$+\delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{\frac{m_y}{2}}(v_{(1)jl} - K_2)^2 + \delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y}{2}+1}^{m_y}(v_{(m_y)jl} - K_2)^2 \qquad (3.25)$$

olarak bulunur.

(2.19) denkleminde verilen ters dönüşümü kullanılarak, Weibull dağılımının σ_1, σ_2 ve p parametrelerinin ERSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri $\hat{\sigma}_{1_{MML,ERSS}}$, $\hat{\sigma}_{2_{MML,ERSS}}$ ve $\hat{p}_{MML,ERSS}$ aşağıdaki gibi elde edilir

$$\hat{\sigma}_{1_{MML,ERSS}} = e^{\hat{p}_{MML,ERSS}\hat{\mu}_{1_{MML,ERSS}}}, \quad \hat{\sigma}_{2_{MML,ERSS}} = e^{\hat{p}_{MML,ERSS}\hat{\mu}_{2_{MML,ERSS}}} \text{ ve}$$

$$\hat{p}_{MML,ERSS} = \frac{1}{\hat{\eta}_{MML,ERSS}}. \tag{3.26}$$

(3.26) tahmin edicileri (2.5) denkleminde yerine yazılırsa, sistem güvenilirliği R'nin ERSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri aşağıdaki gibi belirlenir

$$\hat{R}_{MML,ERSS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{MML,ERSS}}}{\hat{\sigma}_{1_{MML,ERSS}} + \hat{\sigma}_{2_{MML,ERSS}}}. \tag{3.27}$$

3.2 *R*'nin MRSS'e Dayalı Tahmini

MRSS yöntemi Muttlak (1997) tarafından kitle ortalamasını SRS ve RSS yöntemine göre daha etkin bir şekilde tahmin edebilmek için önerilmiştir.

MRSS yöntemi ile örneklem belirleme adımları Bölüm 1.1.5.2'de anlatılmıştır. X rastgele değişkenine ilişkin m küme çaplı ve r döngü sayılı MRSS örneklemi, küme çapının tek veya çift olması durumuna göre

i) m tek ise

$$\left\{X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)ic}, i = 1, \dots, m, c = 1, \dots, r\right\}$$

ii) m çift ise

$$\left\{X_{\left(\frac{m}{2}\right)ic}, i = 1, \dots, \frac{m}{2}, c = 1, \dots, r\right\} \cup \left\{X_{\left(\frac{m}{2}+1\right)ic}, i = \frac{m}{2} + 1, \dots m, c = 1, \dots, r\right\}$$

şeklinde elde edilir.

3.2.1 R'nin ML tahmin edicisi

Bu kısımda, sistem güvenilirliği R'nin MRSS yöntemi kullanılarak ML tahmin edicileri örneklem çaplarının tek veya çift olması durumlarına göre elde edilmiştir.

Durum 1. *Küme çapı m_x ve m_y tek ise:*

$X \sim Weibull(p, \sigma_1)$ stres ve $Y \sim Weibull(p, \sigma_2)$ dayanıklılığa ilişkin rastgele değişkenler olmak üzere sırasıyla m_x ve m_y küme çaplı MRSS örneklemleri aşağıdaki gibidir

$$\left\{X_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic}, i = 1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x\right\} \text{ ve } \left\{Y_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl}, j = 1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y\right\}.$$

p, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin ML tahmin edicilerini elde etmek için olabilirlik fonksiyonu

$$L = C\frac{p^{n+m}}{\sigma_1^n \sigma_2^m}\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=1}^{m_x} x_{(m')ic}^{p-1}\left(e^{-\frac{x_{(m')ic}^p}{\sigma_1}}\right)^{m'}\left(1-e^{-\frac{x_{(m')ic}^p}{\sigma_1}}\right)^{m'-1}$$
$$\cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=1}^{m_y} y_{(m'')jl}^{p-1}\left(e^{-\frac{y_{(m'')jl}^p}{\sigma_2}}\right)^{m''}\left(1-e^{-\frac{y_{(m'')jl}^p}{\sigma_2}}\right)^{m''-1} \qquad (3.28)$$

olarak elde edilir. Burada, gösterim kolaylığı olması açısından $m' = \frac{m_x+1}{2}$, $m'' = \frac{m_y+1}{2}$ alınmıştır. Ayrıca C sabiti $C = \left(\frac{m_x!}{m'!^2}\right)^n \left(\frac{m_y!}{m''!^2}\right)^m$ dir. (3.28) olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak p, σ_1 ve σ_2 parametrelerine göre türev alındığında aşağıdaki olabilirlik denklemleri elde edilir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{n+m}{p} + \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x} \ln x_{(m')ic} - \frac{m'}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x} x_{(m')ic}^{p} \ln x_{(m')ic}$$
$$+\frac{m'-1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x} \frac{x_{(m')ic}^{p} \ln x_{(m')ic}}{e^{x_{(m')ic}^{p}/\sigma_1} - 1} + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} \ln y_{(m'')jl}$$
$$-\frac{m''}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} y_{(m'')jl}^{p} \ln y_{(m'')jl} + \frac{m''-1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} \frac{y_{(m'')jl}^{p} \ln y_{(m'')jl}}{e^{y_{(m'')jl}^{p}/\sigma_2} - 1} = 0, \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{n}{\sigma_1} + \frac{m'}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x} x_{(m')ic}^{p} - \frac{m'-1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x} \frac{x_{(m')ic}^{p}}{e^{x_{(m')ic}^{p}/\sigma_1} - 1} = 0, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2} = -\frac{m}{\sigma_2} + \frac{m''}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} y_{(m'')jl}^{p} - \frac{m''-1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} \frac{y_{(m'')jl}^{p}}{e^{y_{(m'')jl}^{p}/\sigma_2} - 1} = 0. \tag{3.31}$$

Durum 2. *Küme çapı m_x ve m_y çift ise:*

Durum 1'e benzer olarak Weibull dağılımına sahip X ve Y rastgele değişkenlerine ilişkin MRSS örneklemleri

$$\left\{X_{\left(\frac{m_x}{2}\right)ic}, i = 1, \dots, \frac{m_x}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\} \cup \left\{X_{\left(\frac{m_x}{2}+1\right)ic}, i = \frac{m_x}{2}+1, \dots m_x, c = 1, \dots, r_x\right\}$$
$$\left\{Y_{\left(\frac{m_y}{2}\right)jl}, j = 1, \dots, \frac{m_y}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\} \cup \left\{Y_{\left(\frac{m_y}{2}+1\right)jl}, j = \frac{m_y}{2}+1, \dots m_y, l = 1, \dots, r_y\right\}$$

şeklinde belirlenir. Olabilirlik fonksiyonu ise

$$L = C\frac{p^{n+m}}{\sigma_1^n \sigma_2^m}\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=1}^{m'} x_{(m')ic}^{p-1}\left(e^{-\frac{x_{(m')ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m'+1}\left(1 - e^{-\frac{x_{(m')ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m'-1}$$
$$\cdot\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=m'+1}^{m_x} x_{(m'+1)ic}^{p-1}\left(e^{-\frac{x_{(m'+1)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m'}\left(1 - e^{-\frac{x_{(m'+1)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m'}$$

$$\cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=1}^{m''} y_{(m'')jl}^{p-1}\left(e^{-\frac{y_{(m'')jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m''+1}\left(1-e^{-\frac{y_{(m'')jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m''-1}$$

$$\cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=m''+1}^{m_y} y_{(m''+1)jl}^{p-1}\left(e^{-\frac{y_{(m''+1)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m''}\left(1-e^{-\frac{y_{(m''+1)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m''} \tag{3.32}$$

olarak elde edilir. Burada, gösterim kolaylığı olması açısından $m'=\frac{m_x}{2}$, $m''=\frac{m_y}{2}$ olarak alınmıştır. Ayrıca, C sabiti $C=\left[\frac{m_x!}{\left(\frac{m_x}{2}\right)!\left(\frac{m_x}{2}-1\right)!}\right]^n\left[\frac{m_y!}{\left(\frac{m_y}{2}\right)!\left(\frac{m_y}{2}-1\right)!}\right]^m$ dir. Logaritması alınmış olabilirlik fonksiyonun p, σ_1 ve σ_2 parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial p}=&\frac{n+m}{p}+\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'}\ln x_{(m')ic}-\frac{m'+1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'}x_{(m')ic}^{p}\ln x_{(m')ic}\\
&+\frac{m'-1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'}\frac{x_{(m')ic}^{p}\ln x_{(m')ic}}{e^{x_{(m')ic}^{p}/\sigma_1}-1}+\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x}\ln x_{(m'+1)ic}\\
&-\frac{m'}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x}x_{(m'+1)ic}^{p}\ln x_{(m'+1)ic}+\frac{m'}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x}\frac{x_{(m'+1)ic}^{p}\ln x_{(m'+1)ic}}{e^{x_{(m'+1)ic}^{p}/\sigma_1}-1}\\
&+\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''}\ln y_{(m'')jl}-\frac{m''+1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''}y_{(m'')jl}^{p}\ln y_{(m'')jl}\\
&+\frac{m''-1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''}\frac{y_{(m'')jl}^{p}\ln y_{(m'')jl}}{e^{y_{(m'')jl}^{p}/\sigma_2}-1}+\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y}\ln y_{(m''+1)jl}\\
&-\frac{m''}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y}y_{(m''+1)jl}^{p}\ln y_{(m''+1)jl}\\
&+\frac{m''}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y}\frac{y_{(m''+1)jl}^{p}\ln y_{(m''+1)jl}}{e^{y_{(m''+1)jl}^{p}/\sigma_2}-1}=0,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{n}{\sigma_1} + \frac{m'+1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} x_{(m')ic}^{p} - \frac{m'-1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} \frac{x_{(m')ic}^{p}}{e^{x_{(m')ic}^{p}/\sigma_1}-1}$$
$$+\frac{m'}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} x_{(m'+1)ic}^{p} - \frac{m'}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} \frac{x_{(m'+1)ic}^{p}}{e^{x_{(m'+1)ic}^{p}/\sigma_1}-1} = 0, \qquad (3.34)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2} = -\frac{m}{\sigma_2} + \frac{m''+1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} y_{(m'')jl}^{p} - \frac{m''-1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} \frac{y_{(m'')jl}^{p}}{e^{y_{(m'')jl}^{p}/\sigma_2}-1}$$
$$+\frac{m''}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y} y_{(m''+1)jl}^{p} - \frac{m''}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y} \frac{y_{(m''+1)jl}^{p}}{e^{y_{(m''+1)jl}^{p}/\sigma_2}-1} = 0. \qquad (3.35)$$

Bölüm 3.1.1'de olduğu gibi (3.29)-(3.31) ve (3.33)-(3.35) olabilirlik denklemlerinin açık çözümü elde edilemediği için parametrelerin ML tahmin edicileri iteratif yöntemler kullanılarak elde edilecektir. Böylece, p, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin MRSS yöntemine dayalı ML tahmin edicileri $\hat{p}_{ML,MRSS}$, $\hat{\sigma}_{1_{ML,MRSS}}$ ve $\hat{\sigma}_{2_{ML,MRSS}}$ olarak elde edilir. Sistem güvenilirliği R'nin MRSS yöntemine dayalı ML tahmin edicisi aşağıdaki gibi bulunur

$$\hat{R}_{ML,MRSS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{ML,MRSS}}}{\hat{\sigma}_{1_{ML,MRSS}} + \hat{\sigma}_{2_{ML,MRSS}}}. \qquad (3.36)$$

3.2.2 *R*'nin MML tahmin edicisi

Bu bölümde, sistem güvenilirliği R'nin MRSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri elde edilmiştir.

Durum 1: *Küme çapı m_x ve m_y tek ise:*

$$\left\{X_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic}, i = 1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x\right\} \text{ ve } \left\{Y_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl}, j = 1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y\right\}$$

MRSS örneklemleri sırasıyla $Weibull(p, \sigma_1)$ ve $Weibull(p, \sigma_2)$ dağılımına sahip olmak üzere

$$U = \ln X \quad \text{ve} \quad V = \ln Y$$

dönüşümü altında

$$\left\{U_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic}, i = 1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x\right\}, \left\{V_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl}, j = 1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y\right\}$$

örneklemleri sırasıyla $EV(\mu_1, \eta)$ ve $EV(\mu_2, \eta)$ dağılımına sahiptir. Burada, $m' = \frac{m_x+1}{2}$ ve $m'' = \frac{m_y+1}{2}$ olmak üzere, olabilirlik fonksiyonu

$$L \propto \frac{1}{\eta^{n+m}} \prod_{c=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} f\left(\frac{u_{(m')ic} - \mu_1}{\eta}\right) \left[F\left(\frac{u_{(m')ic} - \mu_1}{\eta}\right)\right]^{m'-1} \left[1 - F\left(\frac{u_{(m')ic} - \mu_1}{\eta}\right)\right]^{m'-1}$$
$$\cdot \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} f\left(\frac{v_{(m'')jl} - \mu_2}{\eta}\right) \left[F\left(\frac{v_{(m'')jl} - \mu_2}{\eta}\right)\right]^{m''-1} \left[1 - F\left(\frac{v_{(m'')jl} - \mu_2}{\eta}\right)\right]^{m''-1} \tag{3.37}$$

şeklindedir. Burada standartlaştırılmış sıra istatistikleri

$$z_{(m')ic} = \left(\left(u_{(m')ic} - \mu_1\right)/\eta\right), i = 1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x,$$
$$w_{(m'')jl} = \left(\left(v_{(m'')jl} - \mu_2\right)/\eta\right), j = 1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y \tag{3.38}$$

olmak üzere, (3.37) fonksiyonunun logaritması alınıp, bu fonksiyonun μ_1, μ_2 ve η parametrelerine göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{\eta} \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} g_1\left(z_{(m')ic}\right) - \frac{m'-1}{\eta} \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} g_2\left(z_{(m')ic}\right)$$
$$+ \frac{m'-1}{\eta} \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} g_3\left(z_{(m')ic}\right) = 0, \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} g_1\left(w_{(m'')jl}\right) - \frac{m''-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} g_2\left(w_{(m'')jl}\right) + \frac{m''-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} g_3\left(w_{(m'')jl}\right) = 0, \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = &-\frac{n+m}{\eta} - \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x} g_1\left(z_{(m')ic}\right) z_{(m')ic} \\ &- \frac{m'-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x} g_2\left(z_{(m')ic}\right) z_{(m')ic} + \frac{m'-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x} g_3\left(z_{(m')ic}\right) z_{(m')ic} \\ &- \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} g_1\left(w_{(m'')jl}\right) w_{(m'')jl} - \frac{m''-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} g_2\left(w_{(m'')jl}\right) w_{(m'')jl} \\ &+ \frac{m''-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y} g_3\left(w_{(m'')jl}\right) w_{(m'')jl} = 0\end{aligned} \tag{3.41}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}&g_1\left(z_{(k)ic}\right) = \frac{f'\left(z_{(k)ic}\right)}{f\left(z_{(k)ic}\right)}, \quad g_1\left(w_{(k)jl}\right) = \frac{f'\left(w_{(k)jl}\right)}{f\left(w_{(k)jl}\right)}, \\ &g_2\left(z_{(k)ic}\right) = \frac{f\left(z_{(k)ic}\right)}{F\left(z_{(k)ic}\right)}, \quad g_2\left(w_{(k)jl}\right) = \frac{f\left(w_{(k)jl}\right)}{F\left(w_{(k)jl}\right)}, \\ &g_3\left(z_{(k)ic}\right) = \frac{f\left(z_{(k)ic}\right)}{1-F\left(z_{(k)ic}\right)}, \quad g_3\left(w_{(k)jl}\right) = \frac{f\left(w_{(k)jl}\right)}{1-F\left(w_{(k)jl}\right)}, \; k = \frac{m_x+1}{2}, \frac{m_y+1}{2}\end{aligned} \tag{3.42}$$

(3.42) lineer olmayan fonksiyonları standartlaştırılmış sıra istatistiklerinin beklenen değeri $t_k^u = E\left(z_{(k)ic}\right),\ k = \frac{m_x+1}{2}$ ve $t_k^v = E\left(w_{(m')jl}\right),\ k = \frac{m_y+1}{2}$ etrafında Taylor serisinin ilk iki terimine açılıp

$$\begin{aligned}&g_1\left(z_{(k)ic}\right) \cong \alpha_{1k}^u - \beta_{1k}^u z_{(k)ic},\ g_1\left(w_{(k)jl}\right) \cong \alpha_{1k}^v - \beta_{1k}^v w_{(k)jl}, \\ &g_2\left(z_{(k)ic}\right) \cong \alpha_{2k}^u - \beta_{2k}^u z_{(k)ic},\ g_2\left(w_{(k)jl}\right) \cong \alpha_{2k}^v - \beta_{2k}^v w_{(k)jl}, \\ &g_3\left(z_{(k)ic}\right) \cong \alpha_{3k}^u + \beta_{3k}^u z_{(k)ic},\ g_3\left(w_{(k)jl}\right) \cong \alpha_{3k}^v + \beta_{3k}^v w_{(k)jl}\end{aligned} \tag{3.43}$$

şeklinde lineer hale getirilirler. Burada α_{1k}^{u}, β_{1k}^{u}, α_{2k}^{u}, β_{2k}^{u}, α_{3k}^{u}, β_{3k}^{u} katsayıları ve t_k^u

$$\beta_{1k}^{u} = e^{t_k^u}, \quad \alpha_{1k}^{u} = 1 - e^{t_k^u} + t_k^u e^{t_k^u},$$
$$\beta_{2k}^{u} = \frac{\left(e^{t_k^u}-1\right)f(t_k^u)F(t_k^u)+f(t_k^u)^2}{F(t_k^u)^2}, \quad \alpha_{2k}^{u} = \frac{f(t_k^u)}{F(t_k^u)} + \beta_{2k}^{u} t_k^u,$$
$$\beta_{3k}^{u} = e^{t_k^u}, \quad \alpha_{3k}^{u} = e^{t_k^u} - t_k^u e^{t_k^u},$$
$$t_k^u = \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{k}{m_x+1}\right)\right), k = \frac{m_x+1}{2} \tag{3.44}$$

dır. α_{1k}^{v}, β_{1k}^{v}, α_{2k}^{v}, β_{2k}^{v}, α_{3k}^{v}, β_{3k}^{v} katsayıları ve t_k^v ise

$$\beta_{1k}^{v} = e^{t_k^v}, \quad \alpha_{1k}^{v} = 1 - e^{t_k^v} + t_k^v e^{t_k^v},$$
$$\beta_{2k}^{v} = \frac{\left(e^{t_k^v}-1\right)f(t_k^v)F(t_k^v)+f(t_k^v)^2}{F(t_k^v)^2}, \quad \alpha_{2k}^{v} = \frac{f(t_k^v)}{F(t_k^v)} + \beta_{1k}^{v} t_k^v,$$
$$\beta_{3k}^{v} = e^{t_k^v}, \quad \alpha_{3k}^{v} = e^{t_k^v} - t_k^v e^{t_k^v},$$
$$t_k^u = \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{k}{m_y+1}\right)\right), k = \frac{m_y+1}{2} \tag{3.45}$$

olarak elde edilir. (3.42) lineer olmayan fonksiyonları (3.43)'de lineer hale getirilip, (3.39)-(3.41) denklemlerinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılarak μ_1, μ_2 ve η parametrelerinin MRSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri $\hat{\mu}_{1_{MML,MRSS}}$, $\hat{\mu}_{2_{MML,ERSS}}$ ve $\hat{\eta}_{MML,MRSS}$ aşağıda verildiği gibi elde edilir

$$\hat{\mu}_{1_{MML,MRSS}} = K_1 - \frac{\Delta_1}{m_1}\hat{\eta}_{MML,MRSS}, \qquad \hat{\mu}_{2_{MML,MRSS}} = K_2 - \frac{\Delta_2}{m_2}\hat{\eta}_{MML,MRSS}$$
$$\hat{\eta}_{MML,MRSS} = \frac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2(n+m)}. \tag{3.46}$$

Burada,

$$\delta_1^u = \beta_{1\frac{m_x+1}{2}}^{u} + \left(\frac{m_x-1}{2}\right)\beta_{2\frac{m_x+1}{2}}^{u} + \left(\frac{m_x-1}{2}\right)\beta_{3\frac{m_x+1}{2}}^{u}, \quad m_1 = r_x m_x \delta_1^u,$$

$$K_1 = \frac{\delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} u_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic}}{m_1},$$

$$\Delta_1^u = \alpha^u_{1\frac{m_x+1}{2}} + \left(\frac{m_x-1}{2}\right)\alpha^u_{2\frac{m_x+1}{2}} - \left(\frac{m_x-1}{2}\right)\alpha^u_{3\frac{m_x+1}{2}}, \quad \Delta_1 = r_x m_x \Delta_1^u,$$

$$\delta_1^v = \beta^v_{1\frac{m_y+1}{2}} + \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\beta^v_{2\frac{m_y+1}{2}} + \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\beta^v_{3\frac{m_y+1}{2}}, \quad m_2 = r_y m_y \delta_1^v,$$

$$K_2 = \frac{\delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} v_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl}}{m_2},$$

$$\Delta_1^v = \alpha^v_{1\frac{m_y+1}{2}} + \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\alpha^v_{2\frac{m_y+1}{2}} - \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\alpha^v_{3\frac{m_y+1}{2}}, \quad \Delta_1 = r_y m_y \Delta_1^v,$$

$$A = n + m,$$

$$B = \Delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \left(u_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic} - K_1\right) + \Delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \left(v_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl} - K_2\right),$$

$$C = \delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x} \left(u_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic} - K_1\right)^2 + \delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y} \left(v_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl} - K_2\right)^2 \qquad (3.47)$$

olarak bulunur.

Durum 2. *Küme çapı m_x ve m_y çift ise:*

$$\left\{X_{\left(\frac{m_x}{2}\right)ic}, i = 1, \dots, \frac{m_x}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\} \cup \left\{X_{\left(\frac{m_x}{2}+1\right)ic}, i = \frac{m_x}{2}+1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x\right\}$$

$$\left\{Y_{\left(\frac{m_y}{2}\right)jl}, j = 1, \dots, \frac{m_y}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\} \cup \left\{Y_{\left(\frac{m_y}{2}+1\right)jl}, j = \frac{m_y}{2}+1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y\right\}$$

MRSS örneklemleri sırasıyla $Weibull(p, \sigma_1)$ ve $Weibull(p, \sigma_2)$ dağılımına sahip olmak üzere

$$U = \ln X \quad \text{ve} \quad V = \ln Y$$

dönüşümü altında

$$\left\{U_{\left(\frac{m_x}{2}\right)ic}, i = 1, \dots, \frac{m_x}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\} \cup \left\{U_{\left(\frac{m_x}{2}+1\right)ic}, i = \frac{m_x}{2}+1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x\right\}$$

$$\left\{V_{\left(\frac{m_y}{2}\right)jl}, j = 1, \dots, \frac{m_y}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\} \cup \left\{V_{\left(\frac{m_y}{2}+1\right)jl}, j = \frac{m_y}{2}+1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y\right\}$$

örneklemleri sırasıyla $EV(\mu_1,\eta)$ ve $EV(\mu_2,\eta)$ dağılımına sahiptir. Gösterim kolaylığı olması açısından $m'=\frac{m_x}{2}$ ve $m''=\frac{m_y}{2}$ olmak üzere olabilirlik fonksiyonu

$$L \propto \frac{1}{\eta^{n+m}} \prod_{c=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m'} f\left(\frac{u_{(m')ic}-\mu_1}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{u_{(m')ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{m'-1}\left[1-F\left(\frac{u_{(m')ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{m'}$$
$$\cdot \prod_{c=1}^{r_x} \prod_{i=m'+1}^{m_x} f\left(\frac{u_{(m'+1)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{u_{(m'+1)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{m'}\left[1-F\left(\frac{u_{(m'+1)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{m'-1}$$
$$\cdot \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m''} f\left(\frac{v_{(m'')jl}-\mu_2}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{v_{(m'')jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{m''-1}\left[1-F\left(\frac{v_{(m'')jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{m''}$$
$$\cdot \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=m''+1}^{m_y} f\left(\frac{v_{(m''+1)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{v_{(m''+1)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{m''}$$
$$\left[1-F\left(\frac{v_{(m''+1)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{m''-1} \qquad (3.48)$$

şeklindedir. Burada standartlaştırılmış sıra istatistikleri

$$z_{(m')ic}=\left(\left(u_{(m')ic}-\mu_1\right)/\eta\right),\ i=1,\dots,m',\ c=1,\dots,r_x,$$
$$z_{(m'+1)ic}=\left(\left(u_{(m'+1)ic}-\mu_1\right)/\eta\right),\ i=m'+1,\dots,m_x,\ c=1,\dots,r_x,$$
$$w_{(m'')jl}=\left(\left(v_{(m'')jl}-\mu_2\right)/\eta\right),\ j=1,\dots,m'',\ l=1,\dots,r_y,$$
$$w_{(m''+1)jl}=\left(\left(v_{(m''+1)jl}-\mu_2\right)/\eta\right),\ j=m''+1,\dots,m_y,\ l=1,\dots,r_y$$

olmak üzere, (3.48) fonksiyonunun logaritması alınıp, bu fonksiyonun μ_1, μ_2 ve η parametrelerine göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1}=-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_1\left(z_{(m')ic}\right)-\frac{m'-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_2\left(z_{(m')ic}\right)$$

$$+\frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_3\left(z_{(m')ic}\right)-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_1\left(z_{(m'+1)ic}\right)$$

$$-\frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_2\left(z_{(m'+1)ic}\right)+\frac{m'-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_3\left(z_{(m'+1)ic}\right)=0, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2}=-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_1\left(w_{(m'')jl}\right)-\frac{m''-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_2\left(w_{(m'')jl}\right)$$

$$+\frac{m''}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_3\left(w_{(m'')jl}\right)-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y} g_1\left(w_{(m''+1)jl}\right)$$

$$-\frac{m''}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y} g_2\left(w_{(m''+1)jl}\right)+\frac{m''-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y} g_3\left(w_{(m''+1)jl}\right)=0, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta}=-\frac{n+m}{\eta}-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_1\left(z_{(m')ic}\right)z_{(m')ic}-\frac{m'-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_2\left(z_{(m')ic}\right)z_{(m')ic}$$

$$+\frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_3\left(z_{(m')ic}\right)z_{(m')ic}-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_1\left(z_{(m'+1)ic}\right)z_{(m'+1)ic}$$

$$-\frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_2\left(z_{(m'+1)ic}\right)z_{(m'+1)ic}$$

$$+\frac{m'-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_3\left(z_{(m'+1)ic}\right)z_{(m'+1)ic}$$

$$-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_1\left(w_{(m'')jl}\right)w_{(m'')jl}-\frac{m''-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_2\left(w_{(m'')jl}\right)w_{(m'')jl}$$

$$+\frac{m''}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_3\left(w_{(m'')jl}\right)w_{(m'')jl}-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y} g_1\left(w_{(m''+1)jl}\right)w_{(m''+1)jl}$$

$$-\frac{m''}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y} g_2\left(w_{(m''+1)jl}\right)w_{(m''+1)jl}$$

$$+\frac{m''-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y} g_3\left(w_{(m''+1)jl}\right)w_{(m''+1)jl}=0 \quad (3.51)$$

olarak elde edilir. Durum 1'e benzer olarak, (3.49)-(3.51) denklemlerindeki (3.42) lineer olmayan fonksiyonları standartlaştırılmış sıra istatistiklerinin beklenen değeri etrafında I. derecen Taylor serisine açılıp (3.43)'de ki gibi lineer hale getirilirler. Burada α_{1k}^{u}, β_{1k}^{u}, α_{2k}^{u}, β_{2k}^{u}, α_{3k}^{u}, β_{3k}^{u} katsayıları ve t_k^u, $k = \frac{m_x}{2}, \frac{m_x}{2}+1$ (3.44); α_{1j}^{v}, β_{1j}^{v}, α_{2j}^{v}, β_{2j}^{v}, α_{3j}^{v}, β_{3j}^{v} katsayıları ve t_k^v, $k = \frac{m_y}{2}, \frac{m_y}{2}+1$ ise (3.45) gibi elde edilir. Böylece parametrelerin MRSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri (3.46) eşitliklerinde olduğu gibi elde edilir. Burada,

$$\delta_1^u = \beta_{1\frac{m_x}{2}}^{u} + \left(\frac{m_x}{2}-1\right)\beta_{2\frac{m_x}{2}}^{u} + \left(\frac{m_x}{2}\right)\beta_{3\frac{m_x}{2}}^{u},$$

$$\delta_2^u = \beta_{1\frac{m_x}{2}+1}^{u} + \left(\frac{m_x}{2}\right)\beta_{2\frac{m_x}{2}+1}^{u} + \left(\frac{m_x}{2}-1\right)\beta_{3\frac{m_x}{2}+1}^{u}, \quad m_1 = r_x\frac{m_x}{2}(\delta_1^u + \delta_2^u),$$

$$K_1 = \frac{\delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{\frac{m_x}{2}} u_{\left(\frac{m_x}{2}\right)ic} + \delta_2^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x}{2}+1}^{m_x} u_{\left(\frac{m_x}{2}+1\right)ic}}{m_1},$$

$$\Delta_1^u = \alpha_{1\frac{m_x}{2}}^{u} + \left(\frac{m_x}{2}-1\right)\alpha_{2\frac{m_x}{2}}^{u} - \left(\frac{m_x}{2}\right)\alpha_{3\frac{m_x}{2}}^{u},$$

$$\Delta_2^u = \alpha_{1\frac{m_x}{2}+1}^{u} + \left(\frac{m_x}{2}\right)\alpha_{2\frac{m_x}{2}+1}^{u} - \left(\frac{m_x}{2}-1\right)\alpha_{3\frac{m_x}{2}+1}^{u}, \quad \Delta_1 = r_x\frac{m_x}{2}(\Delta_1^u + \Delta_2^u),$$

$$\delta_1^v = \beta_{1\frac{m_y}{2}}^{v} + \left(\frac{m_y}{2}-1\right)\beta_{2\frac{m_y}{2}}^{v} + \left(\frac{m_y}{2}\right)\beta_{3\frac{m_y}{2}}^{v},$$

$$\delta_2^v = \beta_{1\frac{m_y}{2}+1}^{v} + \left(\frac{m_y}{2}\right)\beta_{2\frac{m_y}{2}+1}^{v} + \left(\frac{m_y}{2}-1\right)\beta_{3\frac{m_y}{2}+1}^{v}, \quad m_2 = r_y\frac{m_y}{2}(\delta_1^v + \delta_2^v),$$

$$K_2 = \frac{\delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{\frac{m_y}{2}} v_{\left(\frac{m_y}{2}\right)jl} + \delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y}{2}+1}^{m_y} v_{\left(\frac{m_y}{2}+1\right)jl}}{m_2},$$

$$\Delta_1^v = \alpha_{1\frac{m_y}{2}}^{v} + \left(\frac{m_y}{2}-1\right)\alpha_{2\frac{m_y}{2}}^{v} - \left(\frac{m_y}{2}\right)\alpha_{3\frac{m_y}{2}}^{v},$$

$$\Delta_2^v = \alpha_{1\frac{m_y}{2}+1}^{v} + \left(\frac{m_y}{2}\right)\alpha_{2\frac{m_y}{2}+1}^{v} - \left(\frac{m_y}{2}-1\right)\alpha_{3\frac{m_y}{2}+1}^{v} \quad \Delta_2 = r_y\frac{m_y}{2}(\Delta_1^v + \Delta_2^v),$$

$$A = n + m,$$

$$B = \Delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x/2}\left(u_{\left(\frac{m_x}{2}\right)ic} - K_1\right) + \Delta_2^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m_x/2+1}^{m_x}\left(u_{\left(\frac{m_x}{2}+1\right)ic} - K_1\right)$$

$$+\Delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y/2}\left(v_{\left(\frac{m_y}{2}\right)jl} - K_2\right) + \Delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m_y/2+1}^{m_y}\left(v_{\left(\frac{m_y}{2}+1\right)jl} - K_2\right),$$

$$C = \delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x/2} \left(u_{\left(\frac{m_x}{2}\right)ic} - K_1 \right)^2 + \delta_2^u \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=m_x/2+1}^{m_x} \left(u_{\left(\frac{m_x}{2}+1\right)ic} - K_1 \right)^2$$
$$+\delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y/2} \left(v_{\left(\frac{m_y}{2}\right)jl} - K_2 \right)^2 + \delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=m_y/2+1}^{m_y} \left(v_{\left(\frac{m_y}{2}+1\right)jl} - K_2 \right)^2 \quad (3.52)$$

olarak bulunur. (2.19) eşitliğindeki ters dönüşüm kullanılarak Weibull dağılımının σ_1, σ_2 ve p parametrelerinin MRSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\hat{\sigma}_{1_{MML,MRSS}} = e^{\hat{p}_{MML,MRSS}\hat{\mu}_{1_{MML,MRSS}}}, \quad \hat{\sigma}_{2_{MML,MRSS}} = e^{\hat{p}_{MML,MRSS}\hat{\mu}_{2_{MML,MRSS}}} \text{ ve}$$
$$\hat{p}_{MML,MRSS} = \frac{1}{\hat{\eta}_{MML,MRSS}}. \quad (3.53)$$

Böylece sistem güvenirliği R'nin MRSS yöntemine dayalı MML tahmin edicisi aşağıda verildiği gibi elde edilir

$$\hat{R}_{MML,MRSS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{MML,MRSS}}}{\hat{\sigma}_{1_{MML,MRSS}} + \hat{\sigma}_{2_{MML,MRSS}}}. \quad (3.54)$$

3.3 R'nin PRSS'e Dayalı Tahmini

PRSS yöntemi, Muttlak (2003) tarafından kitle ortalamasını daha etkin bir şekilde tahmin edebilmek için önerilmiştir. Özellikle ilgilenilen kitlenin dağılımı çarpık ise RSS yöntemine göre daha etkin sonuçlar elde edilebilmektedir.

PRSS yöntemi ile örneklem belirleme adımlarına Bölüm 1.1.5.3'de değinilmiştir. X rastgele değişkenine ilişkin m küme çaplı ve r döngü sayılı PRSS örneklemi, küme çapının tek veya çift olması durumuna göre

i) m tek ise

$$\left\{X_{(a)ic}, i = 1, \dots, \frac{m-1}{2}, c = 1, \dots, r\right\} \cup \left\{X_{(b)ic}, i = \frac{m+1}{2} + 1, \dots, m,\ c = 1, \dots, r\right\}$$
$$\cup \left\{X_{\left(\frac{m+1}{2}\right)ic}, i = \frac{m+1}{2}, c = 1, \dots, r\right\}$$

ii) m çift ise

$$\left\{X_{(a)ic}, i = 1, \dots, \frac{m}{2}, c = 1, \dots, r\right\} \cup \left\{X_{(b)ic}, i = \frac{m}{2} + 1, \dots, m,\ c = 1, \dots, r\right\}$$

şeklinde elde edilir. Burada, p ve $q = 1 - p$, $0 < p < 1$ olmak üzere $a = \big(p(m+1)\big)$ ve $b = \big(q(m+1)\big)$ dir. Belirtmek gerekir ki, $(.)$ en yakın tamsayı değerini ifade etmektedir.

3.3.1 *R*'nin ML tahmin edicisi

Bu kısımda, sistem güvenilirliği R'nin PRSS'e dayalı ML tahmin edicileri küme çaplarının tek veya çift olması durumlarına göre ayrı ayrı elde edilecektir.

Durum 1. *Küme çapı m_x ve m_y tek ise:*

$X \sim Weibull(p, \sigma_1)$ stres ve $Y \sim Weibull(p, \sigma_2)$ dayanıklılığa ilişkin rastgele değişkenler olmak üzere sırasıyla m_x ve m_y küme çapları PRSS örneklemleri aşağıdaki gibidir

$$\left\{X_{(a_x)ic}, i = 1, \dots, \frac{m_x-1}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\} \cup \left\{X_{(b_x)ic}, i = \frac{m_x+1}{2} + 1, \dots m_x, c = 1, \dots, r_x\right\}$$
$$\cup \left\{X_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic}, i = \frac{m_x+1}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\},$$
$$\left\{Y_{(a_y)jl}, j = 1, \dots, \frac{m_y-1}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\} \cup \left\{Y_{(b_y)jl}, j = \frac{m_y+1}{2} + 1, \dots m_y, l = 1, \dots, r_y\right\}$$
$$\cup \left\{Y_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl}, j = \frac{m_y+1}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\}.$$

Burada, p ve $q = 1 - p$, $0 < p < 1$ olmak üzere $a_x = \big(p(m_x + 1)\big)$ ve $b_x = \big(q(m_x + 1)\big)$; $a_y = \Big(p\big(m_y + 1\big)\Big)$ ve $b_y = \Big(q\big(m_y + 1\big)\Big)$ dir. Sistem güvenilirliğin R'nin ML tahmin edicilerini elde etmek için öncelikle p, σ_1, σ_2 parametreleri tahmin edilmelidir. Bu amaçla olabilirlik fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
L = C\,\frac{p^{n+m}}{\sigma_1^{n}\sigma_2^{m}} & \prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=1}^{m'} x_{(a_x)ic}^{p-1}\left(e^{-\frac{x_{(a_x)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m_x-a_x+1}\left(1-e^{-\frac{x_{(a_x)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{a_x-1} \\
& \cdot\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=m'+2}^{m_x} x_{(b_x)ic}^{p-1}\left(e^{-\frac{x_{(b_x)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m_x-b_x+1}\left(1-e^{-\frac{x_{(b_x)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{b_x-1} \\
& \cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=1}^{m''} y_{(a_y)jl}^{p-1}\left(e^{-\frac{y_{(a_y)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m_y-a_y+1}\left(1-e^{-\frac{y_{(a_y)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{a_y-1} \\
& \cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=m''+2}^{m_y} y_{(b_y)jl}^{p-1}\left(e^{-\frac{y_{(b_y)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m_y-b_y+1}\left(1-e^{-\frac{y_{(b_y)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{b_y-1} \\
& \cdot\prod_{c=1}^{r_x} x_{(m'+1)m'+1c}^{p-1}\left(e^{-\frac{x_{(m'+1)m'+1c}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m'+1}\left(1-e^{-\frac{x_{(m'+1)m'+1c}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m'} \\
& \cdot\prod_{l=1}^{r_y} y_{(m''+1)m''+1l}^{p-1}\left(e^{-\frac{y_{(m''+1)m''+1l}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m''+1}\left(1-e^{-\frac{y_{(m''+1)m''+1l}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m''} \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Burada, gösterim kolaylığı olması açısından $m' = \frac{m_x-1}{2}$ ve $m'' = \frac{m_y-1}{2}$ alınmıştır. Ayrıca C sabiti $C = \left[\frac{m_x!^2}{(m_x-a_x)!(a_x-1)!(m_x-b_x)!(b_x-1)}\right]^{m'r_x}$ $\left[\frac{m_y!^2}{(m_y-a_y)!(a_y-1)!(m_y-b_y)!(b_y-1)}\right]^{m''r_y}\left(\frac{m_x!}{m'!^2}\right)^{r_x}\left(\frac{m_y!}{m''!^2}\right)^{r_y}$ dir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınıp p, σ_1 ve σ_2 parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{n+m}{p} + \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} \ln x_{(a_x)ic} - \frac{m_x - a_x + 1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} x_{(a_x)ic}^{p} \ln x_{(a_x)ic}$$

$$+ \frac{a_x - 1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} \frac{x_{(a_x)ic}^{p} \ln x_{(a_x)ic}}{e^{x_{(a_x)ic}^{p}/\sigma_1} - 1} + \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} \ln x_{(b_x)ic}$$

$$- \frac{m_x - b_x + 1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} x_{(b_x)ic}^{p} \ln x_{(b_x)ic}$$

$$+ \frac{b_x - 1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} \frac{x_{(b_x)ic}^{p} \ln x_{(b_x)ic}}{e^{x_{(b_x)ic}^{p}/\sigma_1} - 1} + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} \ln y_{(a_y)jl}$$

$$- \frac{m_y - a_y + 1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} y_{(a_y)jl}^{p} \ln y_{(a_y)jl} + \frac{a_y - 1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} \frac{y_{(a_y)jl}^{p} \ln y_{(a_y)jl}}{e^{y_{(a_y)jl}^{p}/\sigma_2} - 1}$$

$$+ \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} \ln y_{(b_y)jl} - \frac{m_y - b_y + 1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} y_{(b_y)jl}^{p} \ln y_{(b_y)jl}$$

$$+ \frac{b_y - 1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} \frac{y_{(b_y)jl}^{p} \ln y_{(b_y)jl}}{e^{y_{(b_y)jl}^{p}/\sigma_2} - 1} + \sum_{c=1}^{r_x} \ln x_{(m'+1)m'+1c}$$

$$- \frac{m'+1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x} x_{(m'+1)m'+1c}^{p} \ln x_{(m'+1)m'+1c}$$

$$+ \frac{m'}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x} \frac{x_{(m'+1)m'+1c}^{p} \ln x_{(m'+1)m'+1c}}{e^{x_{(m'+1)m'+1c}^{p}/\sigma_1} - 1}$$

$$+ \sum_{l=1}^{r_y} \ln y_{(m''+1)m''+1l} - \frac{m''+1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y} y_{(m''+1)m''+1l}^{p} \ln y_{(m''+1)m''+1l}$$

$$+ \frac{m''}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y} \frac{y_{(m''+1)m''+1l}^{p} \ln y_{(m''+1)m''+1l}}{e^{y_{(m''+1)m''+1l}^{p}/\sigma_2} - 1} = 0, \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{n}{\sigma_1} + \frac{m_x - a_x + 1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} x_{(a_x)ic}^{p} - \frac{a_x - 1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} \frac{x_{(a_x)ic}^{p}}{e^{x_{(a_x)ic}^{p}/\sigma_1} - 1}$$

$$+ \frac{m_x - b_x + 1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} x_{(b_x)ic}^{p} - \frac{b_x - 1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} \frac{x_{(b_x)ic}^{p}}{e^{x_{(b_x)ic}^{p}/\sigma_1} - 1}$$

$$+\frac{m'+1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x} x_{(m'+1)m'+1c}^{p} - \frac{m'}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\frac{x_{(m'+1)m'+1c}^{p}}{e^{x_{(m'+1)m'+1c}^{p}/\sigma_1}-1} = 0, \tag{3.57}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2} = -\frac{m}{\sigma_2} + \frac{m_y - a_y + 1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} y_{(a_y)jl}^{p} - \frac{a_y - 1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''}\frac{y_{(a_y)jl}^{p}}{e^{y_{(a_y)jl}^{p}/\sigma_2}-1}$$
$$+\frac{m_y - b_y + 1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} y_{(b_y)jl}^{p} - \frac{b_y - 1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y}\frac{y_{(b_y)jl}^{p}}{e^{y_{(b_y)jl}^{p}/\sigma_2}-1}$$
$$+\frac{m''+1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y} y_{(m''+1)m''+1l}^{p} - \frac{m''}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\frac{y_{(m''+1)l}^{p}}{e^{y_{(m''+1)m''+1l}^{p}/\sigma_2}-1} = 0. \tag{3.58}$$

Durum 2. *Küme çapı m_x ve m_y çift ise:*

$X{\sim}Weibull(p,\sigma_1)$ stresi ve $Y{\sim}Weibull(p,\sigma_2)$ dayanıklılığına ilişkin rastgele örneklemler

$$\left\{X_{(a_x)ic}, i = 1,\dots,\frac{m_x}{2}, c = 1,\dots,r_x\right\} \cup \left\{X_{(b_x)ic}, i = \frac{m_x}{2}+1,\dots m_x, c = 1,\dots,r_x\right\}$$
$$\left\{Y_{(a_y)jl}, j = 1,\dots,\frac{m_y}{2}, l = 1,\dots,r_y\right\} \cup \left\{Y_{(b_y)jl}, j = \frac{m_y}{2}+1,\dots m_y, l = 1,\dots,r_y\right\}$$

PRSS yöntemi ile oluşturulsun. Burada, a_x, b_x, a_y ve b_y Durum 1'deki gibi belirlenir. Olabilirlik fonksiyonu

$$L = C\frac{p^{n+m}}{\sigma_1^n\sigma_2^m}\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=1}^{m'} x_{(a_x)ic}^{p-1}\left(e^{-\frac{x_{(a_x)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m_x-a_x+1}\left(1-e^{-\frac{x_{(a_x)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{a_x-1}$$
$$\cdot\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=m'+1}^{m_x} x_{(b_x)ic}^{p-1}\left(e^{-\frac{x_{(b_x)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{m_x-b_x+1}\left(1-e^{-\frac{x_{(b_x)ic}^{p}}{\sigma_1}}\right)^{b_x-1}$$
$$\cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=1}^{m''} y_{(a_y)jl}^{p-1}\left(e^{-\frac{y_{(a_y)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m_y-a_y+1}\left(1-e^{-\frac{y_{(a_y)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{a_y-1}$$

$$\cdot\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=m''+1}^{m_y} y_{(b_y)jl}^{p-1}\left(e^{-\frac{y_{(b_y)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{m_y-b_y+1}\left(1-e^{-\frac{y_{(m_y)jl}^{p}}{\sigma_2}}\right)^{b_y-1} \tag{3.59}$$

olarak elde edilir. Burada, $m'=\frac{m_x}{2}$, $m''=\frac{m_y}{2}$ ve C sabiti

$C=\left[\frac{m_x!^2}{(m_x-a_x)!(a_x-1)!(m_x-b_x)!(b_x-1)}\right]^{m'r_x}\left[\frac{m_y!^2}{(m_y-a_y)!(a_y-1)!(m_y-b_y)!(b_y-1)}\right]^{m''r_y}$ dir.

Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınıp p, σ_1 ve σ_2 parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial p}=&\frac{n+m}{p}+\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'}\ln x_{(a_x)ic}-\frac{m_x-a_x+1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'}x_{(a_x)ic}^{p}\ln x_{(a_x)ic}\\&+\frac{a_x-1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'}\frac{x_{(a_x)ic}^{p}\ln x_{(a)ic}}{e^{x_{(a_x)ic}^{p}/\sigma_1}-1}+\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x}\ln x_{(b_x)ic}\\&-\frac{m_x-b_x+1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x}x_{(b_x)ic}^{p}\ln x_{(b_x)ic}\\&+\frac{b_x-1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x}\frac{x_{(b_x)ic}^{p}\ln x_{(b_x)ic}}{e^{x_{(b_x)ic}^{p}/\sigma_1}-1}+\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''}\ln y_{(a_y)jl}\\&-\frac{m_y-a_y+1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''}y_{(a_y)jl}^{p}\ln y_{(a_y)jl}+\frac{a_y-1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''}\frac{y_{(a_y)jl}^{p}\ln y_{(a_y)jl}}{e^{y_{(a_y)jl}^{p}/\sigma_2}-1}\\&+\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y}\ln y_{(b_y)jl}-\frac{m_y-b_y+1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y}y_{(b_y)jl}^{p}\ln y_{(b_y)jl}\\&+\frac{b_y-1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y}\frac{y_{(b_y)jl}^{p}\ln y_{(b_y)jl}}{e^{y_{(b_y)jl}^{p}/\sigma_2}-1}=0,\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1}=&-\frac{n}{\sigma_1}+\frac{m_x-a_x+1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'}x_{(a_x)ic}^{p}-\frac{a_x-1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'}\frac{x_{(a_x)ic}^{p}}{e^{x_{(a_x)ic}^{p}/\sigma_1}-1}\\&+\frac{m_x-b_x+1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x}x_{(b_x)ic}^{p}-\frac{b_x-1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x}\frac{x_{(b_x)ic}^{p}}{e^{x_{(b_x)ic}^{p}/\sigma_1}-1}=0\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2} = -\frac{m}{\sigma_2} + \frac{m_y - a_y + 1}{\sigma_2^2} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m''} y_{(a_y)jl}^p - \frac{a_y - 1}{\sigma_2^2} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m''} \frac{y_{(a_y)jl}^p}{e^{y_{(a_y)jl}^p/\sigma_2} - 1}$$

$$+ \frac{m_y - b_y + 1}{\sigma_2^2} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=m''+1}^{m_y} y_{(b_y)jl}^p - \frac{b_y - 1}{\sigma_2^2} \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=m''+1}^{m_y} \frac{y_{(b_y)jl}^p}{e^{y_{(b_y)jl}^p/\sigma_2} - 1} = 0 \quad (3.62)$$

olabilirlik denklemleri elde edilir. Parametrelerin ML tahmin edicileri ERSS ve MRSS yöntemlerine benzer olarak, (3.56)-(3.58) ve (3.60)-(3.62) olabilirlik denklemlerinin lineer olmayan fonksiyonlar içermesi nedeniyle analitik olarak elde edilemez. Bu yüzden, iteratif yöntemlere başvurmak gerekmektedir. Böylece, p, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin PRSS yöntemine dayalı ML tahmin edicileri $\hat{p}_{ML,PRSS}$, $\hat{\sigma}_{1_{ML,PRSS}}$ ve $\hat{\sigma}_{2_{ML,PRSS}}$ olarak elde edilir. Sistem güvenilirliği R'nin PRSS yöntemine dayalı ML tahmin edicisi ise

$$\hat{R}_{ML,PRSS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{ML,PRSS}}}{\hat{\sigma}_{1_{ML,PRSS}} + \hat{\sigma}_{2_{ML,PRSS}}} \quad (3.63)$$

şeklinde elde edilir.

3.3.2 *R*'nin MML tahmin edicisi

Bu kısımda, sistem güvenilirliği R'nin PRSS'e dayalı MML tahmin edicileri elde edilmiştir.

Durum 1. *Küme çapı m_x ve m_y tek ise:*

$$\left\{X_{(a_x)ic}, i = 1, \dots, \frac{m_x - 1}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\} \cup \left\{X_{(b_x)ic}, i = \frac{m_x + 1}{2} + 1, \dots m_x, c = 1, \dots, r_x\right\}$$

$$\cup \left\{X_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic}, i = \frac{m_x + 1}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\},$$

$$\left\{Y_{(a_y)jl}, j=1,\dots,\frac{m_y-1}{2}, l=1,\dots,r_y\right\} \cup \left\{Y_{(b_y)jl}, j=\frac{m_y+1}{2}+1,\dots m_y, l=1,\dots,r_y\right\}$$
$$\cup \left\{Y_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl}, j=\frac{m_y+1}{2}\ l=1,\dots,r_y\right\},$$

PRSS örneklemleri sırasıyla $Weibull(p,\sigma_1)$ ve $Weibull(p,\sigma_2)$ dağılımına sahip olmak üzere

$$U=\ln X \quad \text{ve} \quad V=\ln Y$$

dönüşümü altında

$$\left\{U_{(a_x)ic}, i=1,\dots,\frac{m_x-1}{2}, c=1,\dots,r_x\right\} \cup \left\{U_{(b_x)ic}, i=\frac{m_x+1}{2}+1,\dots m_x, c=1,\dots,r_x\right\}$$
$$\cup \left\{U_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)ic}, i=\frac{m_x+1}{2}, c=1,\dots,r_x\right\},$$
$$\left\{V_{(a_y)jl}, j=1,\dots,\frac{m_y-1}{2}, l=1,\dots,r_y\right\} \cup \left\{V_{(b_y)jl}, j=\frac{m_y+1}{2}+1,\dots m_y, l=1,\dots,r_y\right\}$$
$$\cup \left\{V_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)jl}, j=\frac{m_y+1}{2}, l=1,\dots,r_y\right\},$$

örneklemleri sırasıyla $EV(\mu_1,\eta)$ ve $EV(\mu_2,\eta)$ dağılımına sahiptir. Gösterim kolaylığı olması açısından, $m'=\frac{m_x-1}{2}$ ve $m''=\frac{m_y-1}{2}$ olmak üzere, olabilirlik fonksiyonu

$$L \propto \frac{1}{\eta^{n+m}} \prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=1}^{m'} f\left(\frac{u_{(a_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{u_{(a_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{a_x-1}\left[1-F\left(\frac{u_{(a_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{m_x-a_x}$$
$$\cdot \prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=m'+2}^{m_x} f\left(\frac{u_{(b_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{u_{(b_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{b_x-1}\left[1-F\left(\frac{u_{(b_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{m_x-b_x}$$
$$\cdot \prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=1}^{m''} f\left(\frac{v_{(a_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{v_{(a_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{a_y-1}\left[1-F\left(\frac{v_{(a_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{m_y-a_y}$$
$$\cdot \prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=m''+2}^{m_y} f\left(\frac{v_{(b_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{v_{(b_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{b_y-1}\left[1-F\left(\frac{v_{(b_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{m_y-b_y}$$
$$\cdot \prod_{c=1}^{r_x} f\left(\frac{u_{(m'+1)m'+1c}-\mu_1}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{u_{(m'+1)m'+1c}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{m'}$$
$$\left[1-F\left(\frac{u_{(m'+1)m'+1c}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{m'}$$

$$\cdot\prod_{l=1}^{r_y} f\left(\frac{v_{(m''+1)m''+1l}-\mu_2}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{v_{(m''+1)m''+1l}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{m''}$$
$$\left[1-F\left(\frac{v_{(m''+1)m''+1l}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{m''} \tag{3.64}$$

şeklindedir. Burada standartlaştırılmış sıra istatistikleri

$$z_{(a_x)ic}=\left(\left(u_{(a_x)ic}-\mu_1\right)/\eta\right),\ i=1,\dots,m',\ c=1,\dots,r_x,$$
$$z_{(b_x)ic}=\left(\left(u_{(b_x)ic}-\mu_1\right)/\eta\right),\ i=m'+2,\dots,m_x,\ c=1,\dots,r_x,$$
$$z_{(m'+1)m'+1c}=\left(\left(u_{(m'+1)m'+1c}-\mu_1\right)/\eta\right),\ c=1,\dots,r_x,$$
$$w_{(a_y)jl}=\left(\left(v_{(a_y)jl}-\mu_2\right)/\eta\right),\ j=1,\dots,m'',\ l=1,\dots,r_y,$$
$$w_{(b_y)jl}=\left(\left(v_{(b_y)jl}-\mu_2\right)/\eta\right),\ j=m''+2,\dots,m_y,\ l=1,\dots,r_y,$$
$$w_{(m''+1)m''+1l}=\left(\left(v_{(m''+1)m''+1l}-\mu_2\right)/\eta\right),\ l=1,\dots,r_y$$

olmak üzere, olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınıp, bu fonksiyonun μ_1, μ_2 ve η parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1}=-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_1\left(z_{(a_x)ic}\right)-\frac{a_x-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_2\left(z_{(a_x)ic}\right)$$
$$+\frac{m_x-a_x}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_3\left(z_{(a_x)ic}\right)-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} g_1\left(z_{(b_x)ic}\right)$$
$$-\frac{b_x-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} g_2\left(z_{(b_x)ic}\right)+\frac{m_x-b_x}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} g_3\left(z_{(b_x)ic}\right)$$
$$-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_1\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right)-\frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_2\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right)$$
$$+\frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_3\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right)=0, \tag{3.65}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_1\left(w_{(a_y)jl}\right) - \frac{a_y - 1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_2\left(w_{(a_y)jl}\right)$$
$$+\frac{m_y - a_y}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_3\left(w_{(a_y)jl}\right) - \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_1\left(w_{(b_y)jl}\right)$$
$$-\frac{b_y - 1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_2\left(w_{(b_y)jl}\right) + \frac{m_y - b_y}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_3\left(w_{(b_y)jl}\right)$$
$$-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y} g_1\left(w_{(m''+1)m''+1l}\right) - \frac{m''}{\eta}\sum_{c=1}^{r_y} g_2\left(w_{(m''+1)m''+1l}\right)$$
$$+\frac{m''}{\eta}\sum_{c=1}^{r_y} g_3\left(w_{(m''+1)m''+1l}\right) = 0, \tag{3.66}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = -\frac{n+m}{\eta} - \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_1\left(z_{(a_x)ic}\right) z_{(a_x)ic} - \frac{a_x - 1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_2\left(z_{(a_x)ic}\right) z_{(a_x)ic}$$
$$+\frac{m_x - a_x}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_3\left(z_{(a_x)ic}\right) z_{(a_x)ic} - \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} g_1\left(z_{(b_x)ic}\right) z_{(b_x)ic}$$
$$-\frac{b_x - 1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} g_2\left(z_{(b_x)ic}\right) z_{(b_x)ic} + \frac{m_x - b_x}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+2}^{m_x} g_3\left(z_{(b_x)ic}\right) z_{(b_x)ic}$$
$$-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_1\left(w_{(a_y)jl}\right) w_{(a_y)jl} - \frac{a_y - 1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_2\left(w_{(a_y)jl}\right) w_{(a_y)jl}$$
$$+\frac{m_y - a_y}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_3\left(w_{(a_y)jl}\right) w_{(a_y)jl} - \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_1\left(w_{(b_y)jl}\right) w_{(b_y)jl}$$
$$-\frac{b_y - 1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_2\left(w_{(b_y)jl}\right) w_{(b_y)jl} + \frac{m_y - b_y}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_3\left(w_{(b_y)jl}\right) w_{(b_y)jl}$$
$$-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_1\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right) z_{(m'+1)m'+1c} - \frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_2\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right) z_{(m'+1)m'+1c}$$
$$+\frac{m'}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x} g_3\left(z_{(m'+1)m'+1c}\right) z_{(m'+1)m'+1c} - \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y} g_1\left(w_{(m''+1)m''+1l}\right) w_{(m''+1)m''+1l}$$

$$-\frac{m''}{\eta}\sum_{c=1}^{r_y} g_2\left(w_{(m''+1)m''+1l}\right)w_{(m''+1)m''+1l}+\frac{m''}{\eta}\sum_{c=1}^{r_y} g_3\left(w_{(m''+1)l}\right)w_{(m''+1)l}=0$$

(3.67)

şeklinde elde edilir. (3.65)-(3.67) olabilirlik denklemleri lineer olmayan fonksiyonlardan dolayı analitik olarak çözülemez. Burada, bu fonksiyonlar (3.42) eşitliklerine benzer olarak $g_1(z_{(k)ic})$, $g_2(z_{(k)ic})$ ve $g_3(z_{(k)ic})$, $k=a_x,b_x,m'+1$; $g_1(w_{(k)jl})$, $g_2(w_{(k)jl})$ ve $g_3(w_{(k)jl})$, $k=a_y,b_y,m''+1$ şeklindedir. Standartlaştırılmış sıra istatistiklerinin beklenen değeri etrafında I. derecen Taylor serisine açılan lineer olmayan fonksiyonlar (3.43) denklemlerinde olduğu gibi lineer hale getirilirler. Lineerleştirilmiş fonksiyonlar (3.65)-(3.67) denklemlerinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında μ_1, μ_2 ve η parametrelerinin PRSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri

$$\hat{\mu}_{1_{MML,PRSS}}=K_1-\frac{\Delta_1}{m_1}\hat{\eta}_{MML,PRSS},\quad \hat{\mu}_{2_{MML,PRSS}}=K_2-\frac{\Delta_2}{m_2}\hat{\eta}_{MML,PRSS}\text{ ve}$$
$$\hat{\eta}_{MML,PRSS}=\frac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2(n+m)} \qquad (3.68)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\delta_1^u=\beta_{1a_x}^u+(a_x-1)\beta_{2a_x}^u+(m_x-a_x)\beta_{3a_x}^u,$$
$$\delta_2^u=\beta_{1b_x}^u+(b_x-1)\beta_{2b_x}^u+(m_x-b_x)\beta_{3b_x}^u,$$
$$\delta_2^u=\beta_{1\frac{m_x+1}{2}}^u+\left(\frac{m_x-1}{2}\right)\beta_{2\frac{m_x+1}{2}}^u+\left(\frac{m_x-1}{2}\right)\beta_{3\frac{m_x+1}{2}}^u,\ m_1=r_x\left[\frac{m_x-1}{2}(\delta_1^u+\delta_2^u)+\delta_3^u\right],$$
$$K_1=\frac{\delta_1^u\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{\frac{m_x-1}{2}}u_{(a_x)ic}+\delta_2^u\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x+1}{2}+1}^{m_x}u_{(b_x)ic}+\sum_{c=1}^{r_x}u_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)c}}{m_1},$$
$$\Delta_1^u=\Delta_{1a_x}^u+(a_x-1)\Delta_{2a_x}^u-(m_x-a_x)\Delta_{3a_x}^u,$$
$$\Delta_2^u=\Delta_{1b_x}^u+(b_x-1)\Delta_{2b_x}^u-(m_x-b_x)\Delta_{3b_x}^u,$$
$$\Delta_3^u=\left(\frac{m_x-1}{2}\right)\alpha_{1\frac{m_x+1}{2}}^u-\left(\frac{m_x-1}{2}\right)\alpha_{2\frac{m_x+1}{2}}^u+\alpha_{3\frac{m_x+1}{2}}^u,\ \Delta_1=r_x\left[\frac{m_x-1}{2}(\Delta_1^u+\Delta_2^u)+\Delta_3^u\right],$$
$$\delta_1^v=\beta_{1a_y}^v+(a_y-1)\beta_{2a_y}^v+(m_y-a_y)\beta_{3a_y}^v,$$

$$\delta_2^v = \beta_{1b_y}^v + (b_y - 1)\beta_{2b_y}^v + (m_y - b_y)\beta_{3b_y}^v,$$

$$\delta_3^v = \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\beta_{1\frac{m_y+1}{2}}^v + \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\beta_{2\frac{m_y+1}{2}}^v + \beta_{3\frac{m_y+1}{2}}^v,\ m_2 = r_y\left[\frac{m_y-1}{2}(\delta_1^v + \delta_2^v) + \delta_3^v\right],$$

$$K_2 = \frac{\delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{\frac{m_y-1}{2}} v_{(a_y)jl} + \delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y+1}{2}+1}^{m_y} v_{(b_y)jl} + \sum_{l=1}^{r_y} v_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)l}}{m_2},$$

$$\Delta_1^v = \Delta_{1a_y}^v + (a_y - 1)\Delta_{2a_y}^v + (m_y - a_y)\Delta_{3a_y}^v,$$

$$\Delta_2^v = \Delta_{1b_y}^v + (b_y - 1)\Delta_{2b_y}^v + (m_y - b_y)\Delta_{3b_y}^v,$$

$$\Delta_3^v = \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\alpha_{1\frac{m_y+1}{2}}^v - \left(\frac{m_y-1}{2}\right)\alpha_{2\frac{m_y+1}{2}}^v + \alpha_{3\frac{m_y+1}{2}}^v,\ \Delta_2 = r_y\left[\frac{m_y-1}{2}(\Delta_1^v + \Delta_2^v) + \Delta_3^v\right],$$

$$A = n + m,$$

$$B = \Delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{\frac{m_x-1}{2}}(u_{(a_x)ic} - K_1) + \Delta_2^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x+1}{2}+1}^{m_x}(u_{(b_x)ic} - K_1)$$
$$+\Delta_3^u \sum_{c=1}^{r_x}\left(u_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)\frac{m_x+1}{2}c} - K_1\right) + \Delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{\frac{m_y-1}{2}}\left(v_{(a_y)jl} - K_2\right)$$
$$+\Delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y+1}{2}+1}^{m_y}(v_{(b_y)jl} - K_2) + \Delta_3^v \sum_{l=1}^{r_y}\left(v_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)\frac{m_y+1}{2}l} - K_2\right),$$

$$C = \delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{\frac{m_x-1}{2}}(u_{(a_x)ic} - K_1)^2 + \delta_2^u \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x+1}{2}+1}^{m_x}(u_{(b_x)ic} - K_1)^2$$
$$+\delta_3^u \sum_{c=1}^{r_x}\left(u_{\left(\frac{m_x+1}{2}\right)\frac{m_x+1}{2}c} - K_1\right)^2 + \delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{\frac{m_y-1}{2}}\left(v_{(a_y)jl} - K_2\right)^2$$
$$+\delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y+1}{2}+1}^{m_y}\left(v_{(b_y)jl} - K_2\right)^2 + \delta_3^v \sum_{l=1}^{r_y}\left(v_{\left(\frac{m_y+1}{2}\right)\frac{m_y+1}{2}l} - K_2\right)^2 \qquad (3.69)$$

olarak bulunur.

Durum 2. *Küme çapı m_x ve m_y çift ise:*

$$\left\{X_{(a_x)ic}, i = 1, \dots, \frac{m_x}{2}, c = 1, \dots, r_x\right\} \cup \left\{X_{(b_x)ic}, i = \frac{m_x}{2} + 1, \dots m_x, c = 1, \dots, r_x\right\},$$

$$\left\{Y_{(a_y)jl}, j = 1, \dots, \frac{m_y}{2}, l = 1, \dots, r_y\right\} \cup \left\{Y_{(b_y)jl}, j = \frac{m_y}{2} + 1, \dots m_y, l = 1, \dots, r_y\right\},$$

PRSS örneklemleri sırasıyla $Weibull(p,\sigma_1)$ ve $Weibull(p,\sigma_2)$ dağılımına sahip olmak üzere

$$U=\ln X \quad \text{ve} \quad V=\ln Y$$

dönüşümü altında

$$\left\{U_{(a_x)ic}, i=1,\dots,\frac{m_x}{2}, c=1,\dots,r_x\right\}\cup\left\{U_{(b_x)ic}, i=\frac{m_x}{2}+1,\dots m_x, c=1,\dots,r_x\right\},$$

$$\left\{V_{(a_y)jl}, j=1,\dots,\frac{m_y}{2}, l=1,\dots,r_y\right\}\cup\left\{V_{(b_y)jl}, j=\frac{m_y}{2}+1,\dots m_y, l=1,\dots,r_y\right\},$$

örneklemleri sırasıyla $EV(\mu_1,\eta)$ ve $EV(\mu_2,\eta)$ dağılımına sahiptir. Gösterim kolaylığı olması açısından $m'=\frac{m_x}{2}$ ve $m''=\frac{m_y}{2}$ olmak üzere, olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned}L \propto \frac{1}{\eta^{n+m}}&\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=1}^{m'} f\left(\frac{u_{(a_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{u_{(a_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{a_x-1}\left[1-F\left(\frac{u_{(a_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{m_x-a_x}\\ \cdot&\prod_{c=1}^{r_x}\prod_{i=m'+1}^{m_x} f\left(\frac{u_{(b_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{u_{(b_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{b_x-1}\left[1-F\left(\frac{u_{(b_x)ic}-\mu_1}{\eta}\right)\right]^{m_x-b_x}\\ \cdot&\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=1}^{m''} f\left(\frac{v_{(a_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{v_{(a_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{a_y-1}\left[1-F\left(\frac{v_{(a_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{m_y-a_y}\\ \cdot&\prod_{l=1}^{r_y}\prod_{j=m''+1}^{m_y} f\left(\frac{v_{(b_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\left[F\left(\frac{v_{(b_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{b_y-1}\left[1-F\left(\frac{v_{(b_y)jl}-\mu_2}{\eta}\right)\right]^{m_y-b_y}.\end{aligned}$$

(3.70)

Burada standartlaştırılmış sıra istatistikleri

$$\begin{aligned}z_{(a_x)ic}&=\left(\left(u_{(a_x)ic}-\mu_1\right)/\eta\right), i=1,\dots,m', c=1,\dots,r_x,\\ z_{(b_x)ic}&=\left(\left(u_{(b_x)ic}-\mu_1\right)/\eta\right), i=m'+1,\dots,m_x, c=1,\dots,r_x,\\ w_{(a_y)jl}&=\left(\left(v_{(a_y)jl}-\mu_2\right)/\eta\right), j=1,\dots,m'', l=1,\dots,r_y,\\ w_{(b_y)jl}&=\left(\left(v_{(b_y)jl}-\mu_2\right)/\eta\right), j=m''+1,\dots,m_y, l=1,\dots,r_y\end{aligned}$$

şeklindedir. (3.70) olabilirlik fonksiyonunun logaritması alındıktan sonra μ_1, μ_2 ve η parametrelerine göre türev alınarak olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_1\left(z_{(a_x)ic}\right) - \frac{a_x-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_2\left(z_{(a_x)ic}\right) + \frac{m_x-a_x}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_3\left(z_{(a_x)ic}\right) - \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_1\left(z_{(b_x)ic}\right) - \frac{b_x-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_2\left(z_{(b_x)ic}\right) + \frac{m_x-b_x}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_3\left(z_{(b_x)ic}\right) = 0, \tag{3.71}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_1\left(w_{(a_y)jl}\right) - \frac{a_y-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_2\left(w_{(a_y)jl}\right) + \frac{m_y-a_y}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_3\left(w_{(a_y)jl}\right) - \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_1\left(w_{(b_y)jl}\right) - \frac{b_y-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_2\left(w_{(b_y)jl}\right) + \frac{m_y-b_y}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+2}^{m_y} g_3\left(w_{(b_y)jl}\right) = 0, \tag{3.72}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = -\frac{n+m}{\eta} - \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_1\left(z_{(a_x)ic}\right) z_{(a_x)ic} - \frac{a_x-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_2\left(z_{(a_x)ic}\right) z_{(a_x)ic} + \frac{m_x-a_x}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m'} g_3\left(z_{(a_x)ic}\right) z_{(a_x)ic} - \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_1\left(z_{(b_x)ic}\right) z_{(b_x)ic} - \frac{b_x-1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_2\left(z_{(b_x)ic}\right) z_{(b_x)ic} + \frac{m_x-b_x}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m'+1}^{m_x} g_3\left(z_{(b_x)ic}\right) z_{(b_x)ic} - \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_1\left(w_{(a_y)jl}\right) w_{(a_y)jl} - \frac{a_y-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_2\left(w_{(a_y)jl}\right) w_{(a_y)jl} + \frac{m_y-a_y}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m''} g_3\left(w_{(a_y)jl}\right) w_{(a_y)jl} - \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y} g_1\left(w_{(b_y)jl}\right) w_{(b_y)jl}$$

$$-\frac{b_y-1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y} g_2\left(w_{(b_y)jl}\right)w_{(b_y)jl}$$
$$+\frac{m_y-b_y}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m''+1}^{m_y} g_3\left(w_{(b_y)jl}\right)w_{(b_y)jl}=0. \qquad (3.73)$$

Durum 1'de anlatılan MML tahmin edicileri elde etme prosedürü uygulanarak μ_1, μ_2 ve η parametrelerinin PRSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri (3.68)'de olduğu gibi elde edilir. Burada,

$$\delta_1^u=\beta_{1a_x}^u+(a_x-1)\beta_{2a_x}^u+(m_x-a_x)\beta_{3a_x}^u,$$
$$\delta_2^u=\beta_{1b_x}^u+(b_x-1)\beta_{2b_x}^u+(m_x-b_x)\beta_{3b_x}^u,\quad m_1=r_x\frac{m_x}{2}(\delta_1^u+\delta_2^u),$$
$$K_1=\frac{\delta_1^u\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{\frac{m_x}{2}}u_{(a_x)ic}+\delta_2^u\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=\frac{m_x}{2}+1}^{m_x}u_{(b_x)ic}}{m_1},$$
$$\Delta_1^u=\Delta_{1a_x}^u+(a_x-1)\Delta_{2a_x}^u-(m_x-a_x)\Delta_{3a_x}^u,$$
$$\Delta_2^u=\Delta_{1b_x}^u+(b_x-1)\Delta_{2b_x}^u-(m_x-b_x)\Delta_{3b_x}^u,\quad \Delta_1=r_x\frac{m_x}{2}(\Delta_1^u+\Delta_2^u),$$
$$\delta_1^v=\beta_{1a_y}^v+\left(a_y-1\right)\beta_{2a_y}^v+\left(m_y-a_y\right)\beta_{3a_y}^v,$$
$$\delta_2^v=\beta_{1b_y}^v+\left(b_y-1\right)\beta_{2b_y}^v+\left(m_y-b_y\right)\beta_{3b_y}^v,\quad m_2=r_y\frac{m_y}{2}(\delta_1^v+\delta_2^v),$$
$$K_2=\frac{\delta_1^v\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{\frac{m_y}{2}}v_{(a_y)jl}+\delta_2^v\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=\frac{m_y}{2}+1}^{m_y}v_{(b_y)jl}}{m_2},$$
$$\Delta_1^v=\Delta_{1a_y}^v+\left(a_y-1\right)\Delta_{2a_y}^v+\left(m_y-a_y\right)\Delta_{3a_y}^v,$$
$$\Delta_2^v=\Delta_{1b_y}^v+\left(b_y-1\right)\Delta_{2b_y}^v+\left(m_y-b_y\right)\Delta_{3b_y}^v,\quad \Delta_2=r_y\frac{m_y}{2}(\Delta_1^v+\Delta_2^v),$$
$$A=n+m,$$
$$B=\Delta_1^u\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x/2}\left(u_{(a_x)ic}-K_1\right)+\Delta_2^u\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=m_x/2+1}^{m_x}\left(u_{(b_x)ic}-K_1\right)$$
$$+\Delta_1^v\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y/2}\left(v_{(a_y)jl}-K_2\right)+\Delta_2^v\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=m_y/2+1}^{m_y}\left(v_{(b_y)jl}-K_2\right),$$

$$C = \delta_1^u \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=1}^{m_x/2} \left(u_{(a_x)ic} - K_1\right)^2 + \delta_2^u \sum_{c=1}^{r_x} \sum_{i=m_x/2+1}^{m_x} \left(u_{(b_x)ic} - K_1\right)^2$$
$$+\delta_1^v \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=1}^{m_y/2} \left(v_{(a_y)jl} - K_2\right)^2 + \delta_2^v \sum_{l=1}^{r_y} \sum_{j=m_y/2+1}^{m_y} \left(v_{(b_y)jl} - K_2\right)^2 \quad (3.74)$$

olarak bulunur. ERSS ve MRSS yönteminde olduğu gibi (2.19) ters dönüşümü kullanılarak Weibull dağılımının şekil ve ölçek parametreleri p, σ_1 ve σ_2'nin PRSS yöntemine dayalı MML tahmin edicileri aşağıdaki gibi belirlenir

$$\hat{\sigma}_{1_{MML,PRSS}} = e^{\hat{p}_{MML,PRSS}\hat{\mu}_{1_{MML,PRSS}}} \quad \text{ve} \quad \hat{\sigma}_{2_{MML,PRSS}} = e^{\hat{p}_{MML,PRSS}\hat{\mu}_{2_{MML,PRSS}}}$$
$$\hat{p}_{MML,PRSS} = \frac{1}{\hat{\eta}_{MML,PRSS}}. \quad (3.75)$$

Böylece sistem güvenilirliği R'nin PRSS yöntemine dayalı MML tahmin edicisi

$$\hat{R}_{MML,PRSS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{MML,PRSS}}}{\hat{\sigma}_{1_{MML,PRSS}} + \hat{\sigma}_{2_{MML,PRSS}}} \quad (3.76)$$

şeklinde elde edilir.

3.4 Monte-Carlo Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, sistem güvenilirliği R'nin RSS, ERSS, MRSS ve PRSS yöntemlerine dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin performansları, SRS yöntemine dayalı ML ve MML tahmin edicileri ile karşılaştırılmıştır.

Bu amaçla, Bölüm 2.4'e benzer olarak sistem güvenirliği R'nin SRS, RSS, ERSS, MRSS ve PRSS yöntemlerine dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin *yan* ve *MSE* değerleri Monte-Carlo simülasyon çalışması ile elde edilmiştir. $\hat{R}$ tahmin edicilerinin

yan ve *MSE*'si (2.67)-(2.68) denklemlerinde verildiği gibi hesaplanmıştır. Ayrıca, ilgili tahmin edicilerin performansları *RE* kriterine göre sınanmıştır. Tahmin edicilerinin etkinliklerini karşılaştırmak için kullanılan *RE* değerleri

$$RE_1 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{ML,RSS})},\ RE_2 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{ML,ERSS})},\ RE_3 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{ML,MRSS})},\ RE_4 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{ML,PRSS})}$$
$$RE_5 = \frac{MSE(\hat{R}_{MML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{MML,RSS})},\ RE_6 = \frac{MSE(\hat{R}_{MML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{MML,ERSS})},\ RE_7 = \frac{MSE(\hat{R}_{MML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{MML,MRSS})},\ RE_8 = \frac{MSE(\hat{R}_{MML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{MML,PRSS})}$$
$$RE_9 = \frac{MSE(\hat{R}_{MML,RSS})}{MSE(\hat{R}_{ML,RSS})},\ RE_{10} = \frac{MSE(\hat{R}_{MML,ERSS})}{MSE(\hat{R}_{ML,ERSS})},\ RE_{11} = \frac{MSE(\hat{R}_{MML,MRSS})}{MSE(\hat{R}_{ML,MRSS})},\ RE_{12} = \frac{MSE(\hat{R}_{MML,PRSS})}{MSE(\hat{R}_{ML,PRSS})} \quad (3.77)$$

şeklinde hesaplanır. Burada, RE_1, RE_2, RE_3 ve RE_4, sistem güvenilirliği R'nin RSS, ERSS, MRSS ve PRSS yöntemlerine dayalı ML tahmin edicilerinin *MSE*'lerinin SRS yöntemine dayalı ML tahmin edicisinin *MSE*'sine oranını gösterirken, RE_5, RE_6, RE_7 ve RE_8, R'nin RSS, ERSS, MRSS ve PRSS yöntemlerine dayalı MML tahmin edicilerinin *MSE*'lerinin SRS yöntemine dayalı MML tahmin edicisinin *MSE*'sine oranını göstermektedir. RE_9, RE_{10}, RE_{11} ve RE_{12}'de ise RSS ve modifikasyonlarına dayalı ML tahmin edicileri, aynı yöntemlere dayalı MML tahmin edicileri ile karşılaştırılmıştır.

RSS yöntemi ve onun modifikasyonları için küme çaplarıları (m_x, m_y) ve döngü sayıları (r_x, r_y) aşağıdaki gibi alınıp simülasyon çalışmaları yapılmıştır

$$r_x = r_y = 1 \Rightarrow (m_x, m_y) = (5,5),\ (5,10),\ (15,15),\ (15,20),\ (20,20),$$
$$r_x = r_y = 5 \Rightarrow (m_x, m_y) = (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4),\ (4,4),$$
$$r_x = r_y = 10 \Rightarrow (m_x, m_y) = (2,2),\ (3,3),\ (4,4). \quad (3.78)$$

Bölüm 2.4'e benzer olarak simülasyon çalışmalarında şekil parametresi p, $p = 1.5$, 3 ve 6 ve ölçek parametreleri σ_1 ve σ_2, $\sigma_1 = 1$ ve $\sigma_2 = 1$, 2 ve 3 alınmıştır.

(n, m) örneklem hacmi olmak üzere, simülasyonlar $[\![100{,}000/\min(n, m)]\!]$ kez tekrar ettirilmiştir. Burada, $[\![.]\!]$ en büyük tamsayı değerini ifade etmektedir. PRSS yöntemine dayalı örneklemler belirlenirken $p = 0.3$ ve $q = 0.7$ olarak alınmıştır.

Yapılan simülasyon çalışmalarında, *yan* kriterine göre sistem güvenilirliği R'nin RSS yöntemi ve onun modifikasyonlarına dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin ihmal edilebilir *yan*a sahip olduğu görülmüştür. Bu nedenle, tahmin edicilerin *yan*larına çizelge 3.1'de yer verilmemiştir.

Açıktır ki, küme çapı (m_x, m_y) (2,2) olarak alındığında RSS, ERSS, MRSS ve PRSS yöntemleri aynıdır. Dolayısıyla SRS yöntemine göre etkinlikleri de aynı olacaktır. Ayrıca küme çapı (m_x, m_y) (2,3) ve (3,3) olarak belirlendiğinde RSS, ERSS ve PRSS yöntemleri ile elde edilen örneklemler aynıdır (Çizelge 3.1).

RE_1, RE_2, RE_3 ve RE_4 kriterlerine göre, sistem güvenilirliği R'nin RSS yöntemi ve modifikasyonlarına dayalı ML tahmin edicilerinin, R'nin SRS yöntemine dayalı ML tahmin edicisinden daha etkin olduğu görülmüştür. Benzer durum MML tahmin edicileri için de geçerlidir. RE_5, RE_6, RE_7 ve RE_8 kriterlerine göre R'nin RSS, ERSS, MRSS ve PRSS yöntemlerine dayalı MML tahmin edicileri, R'nin SRS yöntemine dayalı MML tahmin edicisinden daha etkindir.

$r_x = r_y = 1$ alınıp küme çaplarının (m_x, m_y) (5,5) ve (5,10) olduğu durumda RSS yöntemi ve modifikasyonlarına dayalı tahmin edicilerin SRS yöntemine göre etkinliklerinin yakın olduğu görülmektedir. Ancak küme çapları arttırıldığında ERSS yöntemine dayalı tahmin edicilerin etkinliklerinin artış eğiliminin diğer yöntemlere göre azaldığı sonucuna varılmaktadır. Ayrıca, yine $r_x = r_y = 1$ durumunda, şekil parametresi ne olursa olsun, ölçek parametreleri $(\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2)$ ve $(\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3)$ için sistem güvenilirliği R'nin RSS ve PRSS yöntemine dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin ERSS ve MRSS yöntemlerine dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin etkinliklerinden daha yüksek olduğu görülmektedir.

$r_x = r_y$ =5 ve $r_x = r_y$ =10 durumunda küme çapları (2,2)'den (4,4)'e kadar değiştiği için tahmin edicilerin etkinliklerinin de çok farklı olmadığı görülmüştür. Yani aynı küme çapı altında döngü sayısını değiştirmek tahmin edicilerin performansları üzerinde büyük ölçüde etkili değildir. Ayrıca, aynı döngü sayısı söz konusu iken RSS ve modifikasyonlarına dayalı tahmin ediciler SRS'e göre daha etkindir.

Şekil parametresi p =1.5, 3 ve 6 alınarak tekrar edilen simülasyon çalışmalarında, şekil parametresinin sistem güvenilirliği R'nin tahmin edicileri üzerinde etkili olmadığı görülmüştür.

ML ve MML yöntemlerinin karşılaştırıldığı RE_9, RE_{10}, RE_{11} ve RE_{12}'ye göre $r_x = r_y = 1$ ve $(\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1)$ olduğu durumda küme çapı (m_x, m_y) arttıkça R'nin PRSS yönteminin MML tahmin edicisi ile ML tahmin edicisinin hemen hemen aynı olduğu görülmektedir, bkz. RE_{12}. Yani, örneklem çapı arttıkça MML tahmin edicisinin asimptotik olarak ML tahmin edicisine yakınsamaktadır. Ancak ERSS yönteminde MML tahmin edicisinin etkinliği ML tahmin edicisinden daha yüksektir. MRSS yönteminde ise ML tahmin edicisi MML tahmin edicisinden daha etkindir.

Döngü sayısı $r_x = r_y = 5$ ve $r_x = r_y = 10$ olduğu durumda küme çapı (m_x, m_y) küçük olduğu için ML tahmin edicileri MML tahmin edicilerinden daha etkindir.

Çizelge 3.1 Tahmin edicilerin RSS, ERSS, MRSS ve PRSS'e dayalı *yan* ve *RE* değerleri

						$p = 1.5$								
r	(m_x, m_y)	(n, m)	RE_1	RE_2	RE_3	RE_4	RE_5	RE_6	RE_7	RE_8	RE_9	RE_{10}	RE_{11}	RE_{12}
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$								
	(5,5)	(5,5)	2,87	2,85	2,63	2,78	2,69	3,08	2,43	2,41	1,01	0,88	1,03	1,09
	(5,10)	(5,10)	3,42	3,09	3,31	3,56	3,05	3,53	2,67	3,42	1,09	0,86	1,21	1,02
1	(15,15)	(15,15)	7,23	4,92	7,58	7,67	6,83	6,02	7,32	7,51	1,04	0,80	1,02	1,00
	(15,20)	(15,20)	7,92	5,08	8,47	8,78	7,38	6,07	7,46	8,75	1,06	0,82	1,12	0,99
	(20,20)	(20,20)	9,50	5,51	9,90	10,4	9,04	6,70	8,57	10,6	1,04	0,81	1,14	0,97
	(2,2)	(10,10)	1,50	1,50	1,50	1,50	1,34	1,34	1,34	1,34	1,09	1,09	1,09	1,09
	(2,3)	(10,15)	1,61	1,61	1,59	1,61	1,34	1,34	1,35	1,34	1,18	1,18	1,15	1,18
5	(2,4)	(10,20)	1,60	1,61	1,59	1,67	1,15	1,46	1,10	1,13	1,38	1,10	1,43	1,46
	(3,4)	(15,20)	1,94	1,89	2,00	2,02	1,75	1,97	1,54	1,76	1,09	0,95	1,29	1,13
	(4,4)	(20,20)	2,18	2,06	2,26	2,54	2,09	2,30	1,95	2,44	1,03	0,88	1,14	1,03
	(2,2)	(20,20)	1,39	1,39	1,39	1,39	1,26	1,26	1,26	1,26	1,08	1,08	1,08	1,08
10	(3,3)	(30,30)	1,91	1,91	1,96	1,91	1,79	1,79	1,70	1,79	1,06	1,06	1,14	1,06
	(4,4)	(40,40)	2,26	2,13	2,28	2,53	2,15	2,40	1,96	2,42	1,05	0,89	1,16	1,04
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$								
	(5,5)	(5,5)	2,72	2,73	2,44	2,65	2,52	2,85	2,26	2,29	1,03	0,92	1,03	1,11
	(5,10)	(5,10)	3,23	2,81	2,89	3,18	2,88	2,89	2,22	3,04	1,08	0,94	1,26	1,01
1	(15,15)	(15,15)	6,87	4,95	5,33	6,85	6,27	4,64	5,20	6,53	1,08	1,05	1,01	1,03
	(15,20)	(15,20)	7,62	4,85	5,80	7,41	6,91	4,07	4,65	7,37	1,09	1,18	1,23	0,99
	(20,20)	(20,20)	8,26	5,26	6,20	8,58	7,50	4,38	4,64	8,57	1,09	1,19	1,33	0,99
	(2,2)	(10,10)	1,35	1,35	1,35	1,35	1,19	1,19	1,19	1,19	1,11	1,11	1,11	1,11
	(2,3)	(10,15)	1,55	1,55	1,56	1,55	1,35	1,35	1,38	1,35	1,13	1,13	1,11	1,13
5	(2,4)	(10,20)	1,63	1,58	1,66	1,63	1,29	1,56	1,22	1,25	1,24	1,00	1,33	1,28
	(3,4)	(15,20)	1,91	1,80	1,93	1,90	1,74	1,64	1,47	1,72	1,08	1,09	1,29	1,09
	(4,4)	(20,20)	2,14	2,04	2,14	2,41	1,96	1,90	1,82	2,27	1,09	1,07	1,17	1,05
	(2,2)	(20,20)	1,37	1,37	1,37	1,37	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16
10	(3,3)	(30,30)	1,73	1,73	1,79	1,73	1,52	1,52	1,51	1,52	1,14	1,14	1,19	1,14
	(4,4)	(40,40)	2,25	2,13	2,32	2,55	2,02	1,67	1,94	2,37	1,11	1,27	1,19	1,07
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$								
	(5,5)	(5,5)	2,64	2,69	2,25	2,48	2,42	2,65	2,11	2,16	1,06	0,99	1,04	1,12
	(5,10)	(5,10)	3,14	2,78	2,59	3,04	2,77	2,46	1,99	2,85	1,09	1,08	1,25	1,02
1	(15,15)	(15,15)	5,75	4,56	3,83	5,39	5,12	3,30	3,76	5,09	1,12	1,37	1,01	1,05
	(15,20)	(15,20)	6,67	4,63	4,12	6,36	5,81	2,78	3,23	6,24	1,13	1,64	1,26	1,00
	(20,20)	(20,20)	7,55	5,26	4,37	7,56	6,72	3,02	3,08	7,42	1,12	1,73	1,41	1,01
	(2,2)	(10,10)	1,37	1,37	1,37	1,37	1,13	1,13	1,13	1,13	1,19	1,19	1,19	1,19
	(2,3)	(10,15)	1,52	1,52	1,56	1,52	1,32	1,32	1,39	1,32	1,13	1,13	1,10	1,13
5	(2,4)	(10,20)	1,58	1,52	1,62	1,55	1,32	1,42	1,26	1,29	1,18	1,06	1,26	1,19
	(3,4)	(15,20)	1,99	1,86	1,86	1,93	1,76	1,49	1,45	1,74	1,11	1,23	1,26	1,09
	(4,4)	(20,20)	2,16	2,15	2,04	2,38	1,81	1,59	1,68	2,13	1,18	1,35	1,21	1,11
	(2,2)	(20,20)	1,42	1,42	1,42	1,42	1,11	1,11	1,11	1,11	1,27	1,27	1,27	1,27
10	(3,3)	(30,30)	1,60	1,60	1,63	1,60	1,28	1,28	1,37	1,28	1,25	1,25	1,18	1,25
	(4,4)	(40,40)	2,14	2,08	2,11	2,42	1,75	1,16	1,65	2,08	1,21	1,79	1,27	1,16

Çizelge 3.1 Tahmin edicilerin RSS, ERSS, MRSS ve PRSS'e dayalı *yan* ve *RE* değerleri (devam)

						$p = 3$								
r	(m_x, m_y)	(n, m)	RE_1	RE_2	RE_3	RE_4	RE_5	RE_6	RE_7	RE_8	RE_9	RE_{10}	RE_{11}	RE_{12}
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$								
	(5,5)	(5,5)	2,83	2,82	2,62	2,80	2,66	3,07	2,42	2,43	1,01	0,87	1,02	1,09
	(5,10)	(5,10)	3,43	3,15	3,23	3,55	3,09	3,59	2,61	3,39	1,08	0,86	1,21	1,03
1	(15,15)	(15,15)	7,60	5,14	7,94	8,17	7,15	6,22	7,66	7,92	1,04	0,81	1,02	1,01
	(15,20)	(15,20)	7,87	5,19	8,40	8,66	7,38	6,19	7,39	8,63	1,05	0,83	1,12	0,99
	(20,20)	(20,20)	9,35	5,60	10,01	10,31	8,87	6,78	8,62	10,46	1,04	0,82	1,15	0,98
	(2,2)	(10,10)	1,40	1,40	1,40	1,40	1,25	1,25	1,25	1,25	1,09	1,09	1,09	1,09
	(2,3)	(10,15)	1,61	1,61	1,58	1,61	1,32	1,32	1,33	1,32	1,20	1,20	1,17	1,20
5	(2,4)	(10,20)	1,61	1,59	1,58	1,64	1,14	1,43	1,09	1,13	1,40	1,11	1,44	1,45
	(3,4)	(15,20)	1,95	1,93	2,07	2,06	1,78	2,04	1,58	1,81	1,08	0,94	1,30	1,13
	(4,4)	(20,20)	2,21	2,10	2,32	2,54	2,13	2,40	1,99	2,44	1,03	0,87	1,15	1,03
	(2,2)	(20,20)	1,36	1,36	1,36	1,36	1,21	1,21	1,21	1,21	1,12	1,12	1,12	1,12
10	(3,3)	(30,30)	1,78	1,78	1,92	1,78	1,69	1,69	1,66	1,69	1,05	1,05	1,15	1,05
	(4,4)	(40,40)	2,07	1,96	2,17	2,41	2,00	2,21	1,89	2,31	1,03	0,89	1,14	1,04
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$								
	(5,5)	(5,5)	2,72	2,70	2,35	2,60	2,53	2,83	2,18	2,25	1,03	0,91	1,03	1,10
	(5,10)	(5,10)	3,18	2,86	2,83	3,17	2,82	2,93	2,16	3,02	1,09	0,94	1,26	1,01
1	(15,15)	(15,15)	6,58	4,93	5,14	6,65	6,08	4,59	5,03	6,41	1,07	1,06	1,01	1,02
	(15,20)	(15,20)	7,20	4,91	5,70	7,15	6,52	4,04	4,56	7,12	1,09	1,20	1,23	0,99
	(20,20)	(20,20)	8,57	5,31	6,36	8,99	7,89	4,43	4,71	9,04	1,08	1,19	1,34	0,99
	(2,2)	(10,10)	1,40	1,40	1,40	1,40	1,21	1,21	1,21	1,21	1,13	1,13	1,13	1,13
	(2,3)	(10,15)	1,59	1,59	1,61	1,59	1,39	1,39	1,44	1,39	1,11	1,11	1,09	1,11
5	(2,4)	(10,20)	1,64	1,61	1,68	1,64	1,29	1,56	1,24	1,27	1,24	1,01	1,33	1,27
	(3,4)	(15,20)	1,99	1,89	1,96	1,96	1,80	1,75	1,49	1,77	1,09	1,07	1,30	1,09
	(4,4)	(20,20)	2,14	2,06	2,16	2,49	1,98	1,93	1,79	2,36	1,08	1,06	1,19	1,05
	(2,2)	(20,20)	1,36	1,36	1,36	1,36	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16
10	(3,3)	(30,30)	1,79	1,79	1,85	1,79	1,63	1,63	1,60	1,63	1,09	1,09	1,16	1,09
	(4,4)	(40,40)	2,16	2,05	2,14	2,40	1,89	1,61	1,76	2,20	1,14	1,27	1,21	1,09
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$								
	(5,5)	(5,5)	2,60	2,60	2,23	2,47	2,39	2,59	2,10	2,14	1,06	0,98	1,04	1,12
	(5,10)	(5,10)	3,13	2,76	2,58	3,07	2,75	2,43	1,98	2,86	1,09	1,09	1,25	1,03
1	(15,15)	(15,15)	6,04	4,73	3,84	5,60	5,44	3,38	3,76	5,37	1,10	1,39	1,01	1,04
	(15,20)	(15,20)	6,69	4,78	4,00	6,31	5,87	2,86	3,16	6,14	1,12	1,64	1,24	1,01
	(20,20)	(20,20)	7,24	4,95	4,23	7,37	6,50	2,80	3,03	7,20	1,11	1,76	1,39	1,02
	(2,2)	(10,10)	1,40	1,40	1,40	1,40	1,15	1,15	1,15	1,15	1,20	1,20	1,20	1,20
	(2,3)	(10,15)	1,60	1,60	1,65	1,60	1,39	1,39	1,47	1,40	1,13	1,13	1,11	1,12
5	(2,4)	(10,20)	1,65	1,59	1,69	1,63	1,35	1,47	1,29	1,33	1,20	1,05	1,28	1,20
	(3,4)	(15,20)	1,90	1,78	1,79	1,84	1,67	1,40	1,41	1,67	1,12	1,26	1,26	1,09
	(4,4)	(20,20)	2,10	2,05	2,01	2,29	1,82	1,56	1,65	2,07	1,15	1,30	1,21	1,10
	(2,2)	(20,20)	1,37	1,37	1,37	1,37	1,10	1,10	1,10	1,10	1,24	1,24	1,24	1,24
10	(3,3)	(30,30)	1,57	1,57	1,62	1,57	1,31	1,31	1,32	1,31	1,20	1,20	1,22	1,20
	(4,4)	(40,40)	2,28	2,26	2,11	2,52	1,81	1,24	1,68	2,17	1,26	1,82	1,25	1,16

Çizelge 3.1 Tahmin edicilerin RSS, ERSS, MRSS ve PRSS'e dayalı *yan* ve *RE* değerleri (devam)

$p = 6$														
Efficiency														
r	(m_x, m_y)	(n, m)	RE_1	RE_2	RE_3	RE_4	RE_5	RE_6	RE_7	RE_8	RE_9	RE_{10}	RE_{11}	RE_{12}
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$														
	(5,5)	(5,5)	2,83	2,82	2,62	2,80	2,66	3,07	2,42	2,43	1,01	0,87	1,02	1,09
	(5,10)	(5,10)	3,43	3,15	3,23	3,55	3,09	3,59	2,61	3,39	1,08	0,86	1,21	1,03
1	(15,15)	(15,15)	7,60	5,14	7,94	8,17	7,15	6,22	7,66	7,92	1,04	0,81	1,02	1,01
	(15,20)	(15,20)	7,81	4,96	8,47	8,45	7,37	5,94	7,48	8,48	1,05	0,82	1,12	0,99
	(20,20)	(20,20)	9,26	5,29	9,85	10,3	8,82	6,45	8,58	10,53	1,04	0,81	1,14	0,97
	(2,2)	(10,10)	1,41	1,41	1,41	1,41	1,27	1,27	1,27	1,27	1,08	1,08	1,08	1,08
	(2,3)	(10,15)	1,62	1,61	1,60	1,61	1,34	1,34	1,36	1,34	1,18	1,18	1,16	1,18
5	(2,4)	(10,20)	1,66	1,63	1,63	1,68	1,20	1,49	1,14	1,16	1,37	1,09	1,43	1,44
	(3,4)	(15,20)	1,94	1,89	2,04	2,04	1,75	1,97	1,57	1,78	1,10	0,95	1,29	1,14
	(4,4)	(20,20)	2,27	2,14	2,41	2,63	2,16	2,38	2,05	2,51	1,04	0,89	1,17	1,04
	(2,2)	(20,20)	1,40	1,40	1,40	1,40	1,26	1,26	1,26	1,26	1,10	1,10	1,10	1,10
10	(3,3)	(30,30)	1,86	1,86	1,86	1,86	1,71	1,71	1,62	1,71	1,08	1,08	1,15	1,08
	(4,4)	(40,40)	2,10	2,06	2,17	2,55	1,99	2,29	1,85	2,38	1,05	0,90	1,17	1,07
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$														
	(5,5)	(5,5)	2,79	2,78	2,47	2,69	2,56	2,91	2,30	2,31	1,04	0,91	1,03	1,11
	(5,10)	(5,10)	3,24	2,85	2,90	3,22	2,89	2,95	2,23	3,07	1,08	0,93	1,26	1,01
1	(15,15)	(15,15)	6,49	4,86	5,22	6,61	5,99	4,71	5,07	6,35	1,07	1,02	1,02	1,03
	(15,20)	(15,20)	7,21	4,64	5,69	7,23	6,53	3,82	4,53	7,22	1,09	1,20	1,24	0,99
	(20,20)	(20,20)	8,48	5,23	6,24	8,87	7,82	4,35	4,72	8,90	1,08	1,19	1,31	0,99
	(2,2)	(10,10)	1,42	1,42	1,42	1,42	1,21	1,21	1,21	1,21	1,14	1,14	1,14	1,14
	(2,3)	(10,15)	1,55	1,55	1,59	1,55	1,35	1,35	1,40	1,35	1,12	1,12	1,11	1,12
5	(2,4)	(10,20)	1,63	1,58	1,66	1,63	1,29	1,56	1,22	1,25	1,24	1,00	1,33	1,28
	(3,4)	(15,20)	1,91	1,80	1,93	1,90	1,74	1,64	1,47	1,72	1,08	1,09	1,29	1,09
	(4,4)	(20,20)	2,14	2,04	2,14	2,41	1,96	1,90	1,82	2,27	1,09	1,07	1,17	1,05
	(2,2)	(20,20)	1,37	1,37	1,37	1,37	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16
10	(3,3)	(30,30)	1,73	1,73	1,79	1,73	1,52	1,52	1,51	1,52	1,14	1,14	1,19	1,14
	(4,4)	(40,40)	2,25	2,13	2,32	2,55	2,02	1,67	1,94	2,37	1,11	1,27	1,19	1,07
$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$														
	(5,5)	(5,5)	2,53	2,61	2,22	2,43	2,37	2,59	2,08	2,11	1,06	0,98	1,04	1,12
	(5,10)	(5,10)	3,13	2,76	2,58	3,07	2,75	2,43	1,98	2,86	1,09	1,09	1,25	1,03
1	(15,15)	(15,15)	6,04	4,73	3,84	5,60	5,44	3,38	3,76	5,37	1,10	1,39	1,01	1,04
	(15,20)	(15,20)	6,69	4,78	4,00	6,31	5,87	2,86	3,16	6,14	1,12	1,64	1,24	1,01
	(20,20)	(20,20)	7,88	5,27	4,42	7,55	7,01	3,04	3,20	7,33	1,12	1,73	1,37	1,02
	(2,2)	(10,10)	1,39	1,39	1,39	1,39	1,17	1,17	1,17	1,17	1,19	1,19	1,19	1,19
	(2,3)	(10,15)	1,51	1,51	1,54	1,51	1,32	1,32	1,38	1,32	1,13	1,13	1,10	1,13
5	(2,4)	(10,20)	1,63	1,56	1,65	1,58	1,32	1,44	1,25	1,29	1,21	1,06	1,28	1,20
	(3,4)	(15,20)	1,93	1,83	1,88	1,91	1,71	1,45	1,48	1,72	1,12	1,24	1,25	1,10
	(4,4)	(20,20)	2,17	2,10	2,10	2,43	1,87	1,54	1,75	2,19	1,16	1,36	1,20	1,11
	(2,2)	(20,20)	1,38	1,38	1,38	1,38	1,07	1,07	1,07	1,07	1,29	1,29	1,29	1,29
10	(3,3)	(30,30)	1,80	1,80	1,74	1,80	1,41	1,41	1,42	1,41	1,27	1,27	1,22	1,27
	(4,4)	(40,40)	2,10	2,01	1,99	2,31	1,79	1,18	1,66	2,08	1,16	1,69	1,19	1,10

4. II. TİP SAĞDAN SANSÜRLENMİŞ VERİLER İÇİN SİSTEM GÜVENİLİRLİĞİNİN TAHMİNİ

Sansürleme veya sansürlü veri kullanılarak istatistiki sonuç çıkarımı yapmak tam verinin elde edilemediği durumlarda literatürde sıklıkla başvurulan yöntemlerdir. Sansürleme, gerek dağılım parametrelerinin tahmin edildiği çalışmalarda, gerekse güvenilirlik çalışmalarında oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, Cohen (1965, 1975, 1991), Asgharzadeh (2009), Raqab vd. (2010), Kim ve Han (2010), Joarder vd. (2011), Krishna ve Kumar (2011,2013), Krishna ve Malik (2012), Balakrishnan ve Zhu (2014), Panahi ve Sayyareh (2014) ve Elmahdy (2015).

Stres-dayanıklılık modelinde, sistem güvenilirliği $R = P(X < Y)$'nin tahmin edildiği bu çalışmanın ikinci bölümünde stres ve dayanıklılığa ilişkin örneklemler tam olduğu durumunda R'nin SRS ve RSS yöntemlerine dayalı ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Ancak, uygulamada her zaman tam veriye ulaşmak mümkün olmayabilir. Bu nedenle, son yıllarda yapılan bazı çalışmalarda sistem güvenilirliği R sansürlü veri durumunda tahmin edilmektedir. Saraçoğlu vd. (2012) ve Diaz-Frances ve Montaya (2013) sistem güvenilirliği R'nin tahmin edicilerini stres ve dayanıklılık üstel dağılıma sahipken sırasıyla ilerleyen II. tip (progressively type-II) ve sağdan (right) sansürlemeye dayalı olarak elde etmiştir. Lio ve Tsai (2012) stres ve dayanıklılığın dağılımı Burr XII iken sistem güvenilirliği R'nin tahmin edicilerini sansürlü gözlem durumunda elde etmiştir. Asgharzadeh vd. (2011) ve Valiollahi vd. (2013) sistem güvenilirliği R'nin tahmin edicilerini stres ve dayanıklılık Weibull dağılımına sahipken ilerleyen II. tip sansürlemeye dayalı olarak elde etmiştir. Genç (2013) stres ve dayanıklılığın Topp-Leone dağılımına sahip olduğu durumda tam veri ve sansürlü veri durumunda R'nin tahmin edicilerini elde etmiştir. Kumar vd. (2014) stres ve dayanıklılığın dağılımı Lindley iken R'yi sansürlü veri varsayımı altında tahmin etmiştir. Bu çalışmaların ortak özelliği ise stres ve dayanıklılığa ilişkin örneklemlerin SRS yöntemi kullanılarak belirlenmesidir.

SRS yönteminin aksine, RSS yönteminde sansürlü veri kullanılarak istatistiki sonuç çıkarımı yapılan az sayıda çalışma mevcuttur. Yu ve Tam (2002) kitle ortalaması ve

standart sapmasının soldan sansürlü RSS verisine dayalı ML ve Kaplan-Meier (KM) tahmin edicilerini elde etmiştir. Strzalkowska-Kominiak ve Mahdizadeh (2014) rastgele sansürlenmiş veri için RSS'e dayalı KM tahmin edicisini elde etmiştir.

Bu bölümde, stres ve dayanıklılık aynı şekil ve farklı ölçek parametreli Weibull dağılımına sahipken, R'nin tahmin edicileri II. tip sağdan sansürlemeye dayalı olarak elde edilmiştir. Buna göre, öncelikle R'nin II. tip sağdan sansürlenmiş SRS verisine dayalı ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Daha sonra, örneklemlerin RSS yöntemi kullanılarak elde edildiği durumda sistem güvenilirliğinin ML ve MML tahmin edicileri bulunmuştur. Yapılan simülasyon çalışmasıyla, R'nin II. tip sağdan sansürlü SRS ve RSS verisine dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri karşılaştırılmıştır.

4.1 R'nin II. Tip Sağdan Sansürlü SRS Verisine Dayalı Tahmini

Bu bölümde, sistem güvenilirliği R'nin II. tip sağdan sansürlü SRS verisine dayalı ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir.

4.1.1 R'nin ML tahmin edicisi

$X_1, X_2, \dots X_n \sim Weibull(p, \sigma_1)$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \sim Weibull(p, \sigma_2)$ sırasıyla stres ve dayanıklılık için bağımsız rastgele örneklemler olsun. X_i $(i = 1, \dots, n-r, \dots, n)$ ve Y_j $(j = 1, \dots, m-r', \dots, m)$ örneklemleri için sırasıyla en büyük r ve r' gözlemlerinin gözlenemediği varsayılsın. Bir başka deyişle, r ve r', X_i ve Y_j örneklemleri için sansürlenmiş gözlem sayısı olsun. Bu durumda, eğer $x_i \leq x_{(n-r)}$, $i = 1, \dots, n$ ve $y_j \leq y_{(m-r')}$, $j = 1, \dots, m$ ise bu gözlemlerin değerlerinde herhangi bir değişiklik yapılmaksızın örnekleme alınır. Eğer $x_i > x_{(n-r)}$ ve $y_j > y_{(m-r')}$ ise, yani sırayla $r.$ ve $r'.$ sıralı gözlem değerlerinden daha büyük değer alan gözlemler var ise, bu gözlemler $x_{(n-r)}$'inci ve $y_{(m-r')}$'inci gözlemler ile değiştirilir.

Bilinmeyen parametrelerin ML tahmin edicilerinin elde edilebilmesi için olabilirlik fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)^{\delta_i}[1 - F(x_i)]^{1-\delta_i} \prod_{j=1}^{m} f(y_j)^{\delta j}[1 - F(y_j)]^{1-\delta_j}$$
$$= \frac{p^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i + \sum_{j=1}^{m}\delta_j}}{\sigma_1^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}\sigma_2^{\sum_{j=1}^{m}\delta_j}} \prod_{i=1}^{n}\left(x_i^{p-1}\right)^{\delta_i} e^{-x_i^p/\sigma_1} \prod_{j=1}^{m}\left(y_j^{p-1}\right)^{\delta j} e^{-y_j^p/\sigma_2}. \quad (4.1)$$

Burada, δ_i $(i = 1, \dots, n)$ ve δ_j $(j = 1, \dots, m)$ sansürleme indikatörleridir ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\delta_i = \begin{cases} 1, x_i \le x_{(n-r)} \\ 0, x_i > x_{(n-r)} \end{cases} \text{ ve } \delta_j = \begin{cases} 1, y_j \le y_{(m-r')} \\ 0, y_j > y_{(m-r')} \end{cases}. \quad (4.2)$$

Olabilirlik fonksiyonun logaritması alındıktan sonra bilinmeyen parametreler σ_1, σ_2 ve p'ye göre kısmi türevler alınarak aşağıdaki olabilirlik denklemleri elde edilir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2} = -\frac{\sum_{j=1}^{m}\delta_j}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{m} y_j^p = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i + \sum_{j=1}^{m}\delta_j}{p} + \sum_{i=1}^{n}\delta_i \ln x_i - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n} x_i^p \ln x_i$$
$$+ \sum_{j=1}^{m}\delta_j \ln y_j - \frac{1}{\sigma_2}\sum_{j=1}^{m} y_j^p \ln y_j = 0. \quad (4.5)$$

Olabilirlik denklemleri (4.3)-(4.5)'in $h_1(x) = x^p$, $h_2(x) = \ln x$, $h_1(y) = y^p$ ve $h_2(y) = \ln y$ lineer olmayan fonksiyonlarından dolayı açık çözümleri elde edilemez. Bu yüzden iteratif yöntemlere başvurmak gerekmektedir.

(4.3) ve (4.4) denklemlerinden açıktır ki, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin ML tahmin edicileri şekil parametresi p'nin fonksiyonlarıdır ve sırasıyla aşağıda verildiği gibi elde edilirler

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{p}}}{\sum_{i=1}^{n} \delta_i} \quad \text{ve} \quad \hat{\sigma}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j^{\hat{p}}}{\sum_{j=1}^{m} \delta_j}. \tag{4.6}$$

Eğer σ_1 ve σ_2 parametrelerinin p'nin bir fonksiyonu olarak elde edilen ve (4.6)'da verilen ML tahmin edicileri (4.5) denkleminde yerine yazılıp iteratif yöntemler kullanılarak p'ye göre çözülürse, şekil parametresi p'nin ML tahmini elde edilmiş olur. Daha sonra p'nin tahmin değeri (4.6) denklemlerinde yerine yazılarak σ_1 ve σ_2 parametrelerinin ML tahminleri elde edilir.

İteratif yöntemler kullanılarak σ_1, σ_2 ve p parametrelerinin ML tahmin edicileri $\sigma_{1_{ML,SRS}}$, $\sigma_{2_{ML,SRS}}$ ve $p_{ML,SRS}$ elde edildikten sonra (2.5) eşitliği kullanılarak R'nin II. tip sağdan sansürlü SRS verisine dayalı ML tahmin edicisi aşağıdaki gibi belirlenir

$$\hat{R}_{ML,SRS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{ML,SRS}}}{\hat{\sigma}_{1_{ML,SRS}} + \hat{\sigma}_{2_{ML,SRS}}}. \tag{4.7}$$

4.1.2 *R*'nin MML tahmin edicisi

Bölüm 4.1.1'de sistem güvenilirliğinin II. tip sağdan sansürlü SRS verisine dayalı ML tahmin edicisi iteratif yöntemler kullanılarak elde edilmiştir. Ancak, Bölüm 2.2.2'de de bahsedildiği gibi iteratif yöntemler kullanılırken karşılaşılabilecek olası sorunlardan kaçınmak için tahmin edicilerin analitik olarak elde edildiği MML yöntemi kullanılmıştır.

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim Weibull(p, \sigma_1)$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \sim Weibull(p, \sigma_2)$ bağımsız rastgele örneklemler olmak üzere $U = \ln X$ ve $V = \ln Y$ bağımsız rastgele değişkenleri $U_1, U_2, \dots, U_n \sim EV(\mu_1, \eta)$ ve $V_1, V_2, \dots, V_m \sim EV(\mu_2, \eta)$ şeklindedir.

Bilinmeyen parametrelerin MML tahmin edicilerini elde edebilmek için II. tip sağdan sansürlenmiş veri için olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$L \propto \frac{1}{\eta^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\sum_{j=1}^{m}\delta_j}} \prod_{i=1}^{n} f\left(z_{(i)}\right)^{\delta_i}\left[1-F\left(z_{(i)}\right)\right]^{1-\delta_i} \prod_{j=1}^{m} f\left(w_{(j)}\right)^{\delta_j}\left[1-F\left(w_{(j)}\right)\right]^{1-\delta_j}. \tag{4.8}$$

Burada,

$$z_{(i)} = \left(u_{(i)}-\mu_1\right)/\eta,\ i=1,\dots,n \text{ ve } w_{(j)} = \left(v_{(j)}-\mu_2\right)/\eta,\ j=1,\dots,m \tag{4.9}$$

standartlaştırılmış sıra istatistikleridir. Ayrıca δ_i ve δ_j sansürleme indikatörleri (4.2) eşitliklerine benzer olarak tanımlanır.

Olabilirlik fonksiyonunun logaritmasını aldıktan sonra μ_1, μ_2 ve η parametrelerine göre kısmi türevler alınarak olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\delta_i g_1\left(z_{(i)}\right) + \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i) g_2\left(z_{(i)}\right) = 0, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{m}\delta_j g_1\left(w_{(j)}\right) + \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{m}\left(1-\delta_j\right) g_2\left(w_{(j)}\right) = 0, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\sum_{j=1}^{m}\delta_j}{\eta} - \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\delta_i g_1\left(z_{(i)}\right) z_{(i)} + \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i) g_2\left(z_{(i)}\right) z_{(i)} - \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{m}\delta_j g_1\left(w_{(j)}\right) w_{(j)} + \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{m}(1-\delta_j) g_2\left(w_{(j)}\right) w_{(j)} = 0. \tag{4.12}$$

(4.10)-(4.12) denklemlerinin açık çözümleri aşağıda tanımlanan lineer olmayan fonksiyonlardan dolayı elde edilemez

$$g_1(z_{(i)}) = \frac{f'(z_{(i)})}{f(z_{(i)})} \quad \text{ve} \quad g_2(z_{(i)}) = \frac{f(z_{(i)})}{1-F(z_{(i)})};$$
$$g_1(w_{(j)}) = \frac{f'(w_{(j)})}{f(w_{(j)})} \quad \text{ve} \quad g_2(w_{(j)}) = \frac{f(w_{(j)})}{1-F(w_{(j)})}. \tag{4.13}$$

Bu yüzden, (4.13) lineer olmayan fonksiyonları standartlaştırılmış sıra istatistiklerinin beklenen değeri $t_{(i)}^{u} = E(z_{(i)})$ ve $t_{(j)}^{v} = E(w_{(j)})$ etrafında Taylor serisinin ilk iki terimine açılarak lineer hale getirilir. Böylelikle, lineer hale getirilen fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$g_1(z_{(i)}) = \alpha_{1i}^{u} - \beta_{1i}^{u} z_{(i)}, \quad g_2(z_{(i)}) = \alpha_{2i}^{u} + \beta_{2i}^{u} z_{(i)}, \quad i = 1, \dots n,$$
$$g_1(w_{(j)}) = \alpha_{1j}^{v} - \beta_{1j}^{v} w_{(j)}, \quad g_2(w_{(j)}) = \alpha_{2j}^{v} + \beta_{2j}^{v} w_{(j)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

Burada

$$\alpha_{1i}^{u} = 1 - e^{t_{(i)}^{u}} + t_{(i)}^{u} e^{t_{(i)}^{u}}, \beta_{1i}^{u} = e^{t_{(i)}^{u}} \text{ ve } \alpha_{2i}^{u} = e^{t_{(i)}^{u}} - t_{(i)}^{u} e^{t_{(i)}^{u}}, \beta_{2i}^{u} = e^{t_{(i)}^{u}},$$
$$\alpha_{1j}^{v} = 1 - e^{t_{(j)}^{v}} + t_{(j)}^{v} e^{t_{(j)}^{v}}, \beta_{1j}^{v} = e^{t_{(j)}^{v}} \text{ ve } \alpha_{1j}^{v} = e^{t_{(j)}^{v}} - t_{(j)}^{v} e^{t_{(j)}^{v}}, \beta_{1j}^{v} = e^{t_{(j)}^{v}} \tag{4.14}$$

ve

$$t_{(i)}^{u} = \begin{cases} \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\right), & z_{(i)} \le z_{(n-r)} \\ \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{n-r}{n+1}\right)\right), & z_{(i)} > z_{(n-r)} \end{cases} \tag{4.15}$$

şeklindedir. $t_{(j)}^{v}$ ise (4.15) eşitliğine benzer şekilde belirlenir.

(4.14) lineer hale getirilmiş fonksiyonları (4.10)-(4.12) olabilirlik denklemlerinde yerine yazılarak uyarlanmış olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n} \delta_i(\alpha_{1i}^{u} - \beta_{1i}^{u} z_{(i)}) + \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)(\alpha_{2i}^{u} + \beta_{2i}^{u} z_{(i)}) = 0, \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{m}\delta_j\left(\alpha_{1j}^v - \beta_{1j}^v w_{(j)}\right) + \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{m}\left(1-\delta_j\right)\left(\alpha_{2j}^v + \beta_{2j}^v w_{(j)}\right) = 0, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*}{\partial \eta} = &-\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i + \sum_{j=1}^{m}\delta_j}{\eta} - \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_{1i}^u - \beta_{1i}^u z_{(i)}\right)z_{(i)} \\ &+\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\left(\alpha_{2i}^u + \beta_{2i}^u z_{(i)}\right)z_{(i)} - \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{m}\delta_j\left(\alpha_{1j}^v - \beta_{1j}^v w_{(j)}\right)w_{(j)} \\ &+\frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{m}(1-\delta_j)\left(\alpha_{2j}^v + \beta_{2j}^v w_{(j)}\right)w_{(j)} = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Uyarlanmış olabilirlik denklemleri bilinmeyen parametrelere göre çözüldükten sonra μ_1, μ_2 ve η parametrelerinin MML tahmin edicileri

$$\begin{aligned}&\hat{\mu}_{1_{MML,SRS}} = K_1 - D_1\hat{\eta}_{MML,SRS}, \quad \hat{\mu}_{2_{MML,SRS}} = K_2 - D_2\hat{\eta}_{MML,SRS} \\ &\hat{\eta}_{MML,SRS} = \frac{B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A}\end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}&\gamma_{1i}^u = \delta_i\beta_{1i}^u,\ \gamma_{2i}^u = (1-\delta_i)\beta_{2i}^u,\ \gamma_i^u = \gamma_{1i}^u + \gamma_{2i}^u,\ m_1 = \textstyle\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^u,\ K_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^u u_{(i)}}{m_1}, \\ &\Delta_{1i}^u = \delta_i\alpha_{1i}^u,\ \Delta_{2i}^u = (1-\delta_i)\alpha_{2i}^u,\ \Delta_i^u = \Delta_{1i}^u - \Delta_{2i}^u,\ \Delta_1 = \textstyle\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^u, \\ &\gamma_{1j}^v = \delta_j\beta_{1j}^v, \gamma_{2j}^v = \left(1-\delta_j\right)\beta_{2j}^v,\ \gamma_j^v = \gamma_{1j}^v + \gamma_{2j}^v,\ m_2 = \textstyle\sum_{j=1}^{m}\gamma_j^v, K_2 = \frac{\sum_{j=1}^{m}\gamma_j^v v_{(j)}}{m_2}, \\ &\Delta_{1j}^v = \delta_j\alpha_{1j}^v,\ \Delta_{2j}^v = \left(1-\delta_j\right)\alpha_{2j}^v,\ \Delta_j^v = \Delta_{1j}^v - \Delta_{2j}^v,\ \Delta_2 = \textstyle\sum_{j=1}^{m}\Delta_j^v, \\ &A = \textstyle\sum_{i=1}^{n}\delta_i + \sum_{j=1}^{m}\delta_j = n + m - (r + r'), \\ &B = \textstyle\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^u\left(u_{(i)} - K_1\right) + \sum_{j=1}^{m}\Delta_j^v\left(v_{(j)} - K_2\right), \\ &C = \textstyle\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^u\left(u_{(i)} - K_1\right)^2 + \sum_{j=1}^{m}\gamma_j^v\left(v_{(j)} - K_2\right)^2\end{aligned} \quad (4.20)$$

dır. (2.19) denkleminde verilen ters dönüşüm kullanılarak Weibull dağılımının şekil ve ölçek parametrelerinin MML tahmin edicileri $\hat{\sigma}_{1_{MML,SRS}}$, $\hat{\sigma}_{2_{MML,SRS}}$ ve $\hat{p}_{MML,SRS}$ aşağıdaki gibi belirlenir

$$\hat{\sigma}_{1_{MML,SRS}} = e^{\hat{p}_{MML,SRS}\hat{\mu}_{1_{MML,SRS}}}, \quad \hat{\sigma}_{2_{MML,SRS}} = e^{\hat{p}_{MML,SRS}\hat{\mu}_{2_{MML,SRS}}} \text{ ve}$$
$$\hat{p}_{MML,SRS} = \frac{1}{\hat{\eta}_{MML,SRS}}. \tag{4.21}$$

Böylece, sistem güvenilirliği R'nin II. tip sağdan sansürlenmiş SRS verisine dayalı MML tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir

$$\hat{R}_{MML,SRS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{MML,SRS}}}{\hat{\sigma}_{1_{MML,SRS}} + \hat{\sigma}_{2_{MML,SRS}}}. \tag{4.22}$$

4.2 R'nin II. Tip Sağdan Sansürlü RSS Verisine Dayalı Tahmini

Bu bölümde, sistem güvenilirliği R'nin RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicileri II. tip sağdan sansürleme varsayımı altında incelenecektir.

4.2.1 R'nin ML tahmin edicisi

$X_{(i)c}$, $(i = 1, \dots, m_x; c = 1, \dots, r_x)$ ve $Y_{(j)l}$, $\left(j = 1, \dots, m_y; l = 1, \dots, r_y\right)$ sırasıyla $i.$ ve $j.$ küme ve $c.$ ve $l.$ döngüdeki en küçük $i.$ ve $j.$ gözlemleri belirten RSS örneklemleri olsun. Sansürleme prosedürüne göre, her döngüdeki en büyük r ve r' gözlemlerin gözlenemediği varsayılmaktadır. Bir başka deyişle, r ve r', X ve Y örneklemleri için her döngüdeki sansürlenmiş gözlem sayısı belirtmektedir. Bu durumda, II. tip sağdan sansürlü RSS verisi aşağıdaki gibi elde edilir

$$x_{(i)c} = \begin{cases} x_{(i)c}, & x_{(i)c} \le x_{(m_x-r)c} \\ x_{(m_x-r)c}, & x_{(i)c} > x_{(m_x-r)c} \end{cases} \text{ ve } y_{(j)l} = \begin{cases} y_{(j)l}, & y_{(j)l} \le y_{(m_y-r')l} \\ y_{(m_y-r')l}, & y_{(j)l} > y_{(m_y-r')l} \end{cases}.$$

$\delta_{(i)c}$ ve $\delta_{(j)l}$ sansürleme indikatörleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır

$$\delta_{(i)c} = \begin{cases} 1, & x_{(i)c} \leq x_{(m_x - r)c} \\ 0, & x_{(i)c} > x_{(m_x - r)c} \end{cases} \text{ ve } \delta_{(j)l} = \begin{cases} 1, & y_{(j)l} \leq y_{(m_y - r')l} \\ 0, & y_{(j)l} > y_{(m_y - r')l} \end{cases}.$$

$X \sim Weibull(p, \sigma_1)$ ve $Y \sim Weibull(p, \sigma_2)$ olmak üzere p, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin II. tip sağdan sansürlenmiş RSS verisine dayalı ML tahmin edicilerini elde etmek için olabilirlik fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir

$$L = \prod_{c=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} \left[f_i\left(x_{(i)c}\right)\right]^{\delta_{(i)c}} \left[1 - F_i\left(x_{(i)c}\right)\right]^{1-\delta_{(i)c}} \cdot \prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} \left[f_j\left(y_{(j)l}\right)\right]^{\delta_{(j)l}} \left[1 - F_j\left(y_{(j)l}\right)\right]^{1-\delta_{(j)l}}. \quad (4.23)$$

Burada, $f_i(x)$ ve $F_i(x)$, i. sıra istatistiğinin *pdf* ve *cdf*'leridir

$$f_i(x) = \frac{m_x!}{(i-1)!\,(m_x - i)!} [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{m_x - i} f(x), \quad (4.24)$$

$$F_i(x) = \frac{m_x!}{(i-1)!\,(m_x - i)!} \int_0^{F(x)} u^{i-1} (1-u)^{m_x - i} du. \quad (4.25)$$

Burada, $F_i(x)$ tamamlanmamış Beta fonksiyonudur (incomplete Beta function) ve

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \frac{m_x!}{(i-1)!\,(m_x - i)!} \int_0^{1 - e^{-x^p/\sigma_1}} u^{i-1} (1-u)^{m_x - i} du \\ &= \frac{1}{B(i, m_x - i + 1)} \int_0^{1 - e^{-x^p/\sigma_1}} u^{i-1} (1-u)^{m_x - i} du \\ &= I_{1 - e^{-x^p/\sigma_1}}(i, m_x - i + 1) \end{aligned} \quad (4.26)$$

olarak tanımlanır. $f_j(y)$ ve $F_j(y)$ *pdf* ve *cdf*'i ise (4.24) ve (4.25) denklemlerine benzer şekilde elde edilir.

Log-olabilirlik fonksiyonunun p, σ_1 ve σ_2 parametrelerine göre türevleri alınarak olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c} + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}}{p} + \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c}\ln x_{(i)c}$$
$$+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c}(i-1)\frac{x_{(i)c}^p \ln x_{(i)c}}{e^{x_{(i)c}^p/\sigma_1}-1} - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c}(m_x-i+1)x_{(i)c}^p \ln x_{(i)c}$$
$$-\frac{1}{p}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(1-\delta_{(i)c})\frac{\ln x_{(i)c}\, f_i(x_{(i)c})}{1-I_{1-e^{-x_{(i)c}{}^p/\sigma_1}}(i, m_x-i+1)} + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}\ln y_{(j)l}$$
$$+\frac{1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}(j-1)\frac{y_{(j)l}^p \ln y_{(j)l}}{e^{y_{(j)l}^p/\sigma_2}-1} - \frac{1}{\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}(m_y-j+1)y_{(j)l}^p \ln y_{(j)l}$$
$$-\frac{1}{p}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(1-\delta_{(j)l})\frac{\ln y_{(j)l}\, f_j(y_{(j)l})}{1-I_{1-e^{-\frac{y_{(j)l}{}^p}{\sigma_2}}}(j, m_y-j+1)} = 0, \qquad (4.27)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c}}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c}\left[(i-1)\frac{x_{(i)c}^p}{e^{x_{(i)c}^p/\sigma_1}-1} + (m_x-i+1)x_{(i)c}^p\right]$$
$$-\frac{1}{p\sigma_1}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(1-\delta_{(i)c})\frac{f_i(x_{(i)c})}{1-I_{1-e^{-x_{(i)c}{}^p/\sigma_1}}(i, m_x-i+1)} = 0, \qquad (4.28)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2} = -\frac{\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}\left[(j-1)\frac{y_{(j)l}^p}{e^{y_{(j)l}^p/\sigma_2}-1} + (m_y-j+1)y_{(j)l}^p\right]$$
$$-\frac{1}{p\sigma_2}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}(1-\delta_{(j)l})\frac{f_j(y_{(j)l})}{1-I_{1-e^{-y_{(j)l}{}^p/\sigma_2}}(j, m_y-j+1)} = 0. \qquad (4.29)$$

Parametelerin ML tahmin edicileri olabilirlik denklemlerinin çözümünden bulunur. Ancak, bölüm 4.1.1'de değinilen benzer nedenlerden dolayı parametrelerin ML tahmin

edicilerinin açık ifadeleri elde edilemez. Bu nedenle, (4.27)-(4.29) denklemlerini çözmek için iteratif yöntemlere başvurmak gerekmektedir.

II. tip sağdan sansürlü verilerde RSS yöntemine dayalı sistem güvenilirliği R'nin ML tahmin edicilerinin elde edildiği bu bölümde, p, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin ML tahmin edicileri sırasıyla $\hat{p}_{ML,RSS}$, $\hat{\sigma}_{1_{ML,RSS}}$ve $\hat{\sigma}_{2_{ML,RSS}}$ ile gösterilmiştir. ML tahmin edicilerinin değişmezlik özelliği kullanılarak sistem güvenilirliği

$$\hat{R}_{ML,RSS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{ML,RSS}}}{\hat{\sigma}_{1_{ML,RSS}} + \hat{\sigma}_{2_{ML,RSS}}} \tag{4.30}$$

eşitliğinden elde edilir.

4.2.2 *R*'nin MML tahmin edicisi

Weibull dağılımının şekil ve ölçek parametrelerinin MML tahmin edicileri Weibull ile EV dağılımları arasındaki ilişki kullanılarak elde edilir, ayrıntılı bilgi için bkz. Alt Bölüm 2.2.2.

$U_{(i)c}$ $(i = 1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x)$ ve $V_{(j)l}$ $\left(j = 1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y\right)$ RSS örneklemleri sırasıyla $EV(\mu_1, \eta)$ ve $EV(\mu_2, \eta)$ dağılımından gelmek üzere, μ_1, μ_2 ve η parametrelerinin MML tahmin edicilerini elde etmek için olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır

$$L = C \prod_{c=1}^{r_x} \prod_{i=1}^{m_x} \left[\frac{1}{\eta} f\left(z_{(i)c}\right) F\left(z_{(i)c}\right)^{i-1} \left(1 - F\left(z_{(i)c}\right)\right)^{m_x - i}\right]^{\delta_{(i)c}} \left[1 - F_i\left(z_{(i)c}\right)\right]^{1-\delta_{(i)c}}$$
$$\prod_{l=1}^{r_y} \prod_{j=1}^{m_y} \left[\frac{1}{\eta} f\left(w_{(j)l}\right) F\left(w_{(j)l}\right)^{j-1} \left(1 - F\left(w_{(j)l}\right)\right)^{m_y - j}\right]^{\delta_{(j)l}} \left[1 - F_j\left(w_{(j)l}\right)\right]^{1-\delta_{(j)l}}. \tag{4.31}$$

Burada $z_{(i)c} = \left(u_{(i)c} - \mu_1\right)/\eta,\ (i = 1, \dots, m_x, c = 1, \dots, r_x)$ ve $w_{(j)l} = \left(v_{(j)l} - \mu_2\right)/\eta,$ $\left(j = 1, \dots, m_y, l = 1, \dots, r_y\right)$ standartlaştırılmış sıra istatistikleridir.

Olabilirlik denklemleri aşağıda verildiği gibidir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c}\left[g_1\left(z_{(i)c}\right) + (i-1)g_2\left(z_{(i)c}\right) - (m_x - i)g_3\left(z_{(i)c}\right)\right] + \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}(1-\delta_{(i)c})g_4\left(z_{(i)c}\right) = 0, \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}\left[g_1\left(w_{(j)l}\right) + (j-1)g_2\left(w_{(j)l}\right) - \left(m_y - j\right)g_3\left(w_{(j)l}\right)\right] + \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(1-\delta_{(j)l}\right)g_4\left(w_{(j)l}\right) = 0, \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = &-\frac{\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c} + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}}{\eta} \\ &-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c}\left[g_1\left(z_{(i)c}\right) + (i-1)g_2\left(z_{(i)c}\right) - (m_x - i)g_3\left(z_{(i)c}\right)\right] z_{(i)c} \\ &+\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\left(1-\delta_{(i)c}\right)g_4\left(z_{(i)c}\right)z_{(i)c} \\ &-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}\left[g_1\left(w_{(j)l}\right) + (j-1)g_2\left(w_{(j)l}\right) - \left(m_y - j\right)g_3\left(w_{(j)l}\right)\right] w_{(j)l} \\ &+\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\left(1-\delta_{(j)l}\right)g_4\left(w_{(j)l}\right)w_{(j)l} = 0.\end{aligned} \tag{4.34}$$

(4.32)-(4.34) denklemlerinin açık çözümü aşağıda verilen lineer olmayan fonksiyonlardan dolayı elde edilemez

$$g_1(z)=\frac{f'(z)}{f(z)},\ g_2(z)=\frac{f(z)}{F(z)},\ g_3(z)=\frac{f(z)}{1-F(z)},\ g_4(z)=\frac{f_i(z)}{F_i(z)};$$
$$g_1(w)=\frac{f'(w)}{f(w)},\ g_2(w)=\frac{f(w)}{F(w)},\ g_3(w)=\frac{f(w)}{1-F(w)},\ g_4(w)=\frac{f_j(w)}{F_j(w)}. \quad (4.35)$$

MML tahmin edici prosedürünü uygulayabilmek için ilk olarak lineer olmayan (4.35) fonksiyonları standartlaştırılmış sıra istatistiklerinin beklenen değeri $t^u_{(i)c}=E\left(z_{(i)c}\right)$ ve $t^v_{(j)l}=E\left(w_{(j)l}\right)$ etrafında Taylor serisinin ilk iki terimine açılıp aşağıdaki gibi lineer hale getirilirler

$$g_1\left(z_{(i)c}\right)\cong\alpha^u_{1ic}-\beta^u_{1ic}z_{(i)c},\ g_2\left(z_{(i)c}\right)\cong\alpha^u_{2ic}-\beta^u_{2ic}z_{(i)c},$$
$$g_3\left(z_{(i)c}\right)\cong\alpha^u_{3ic}+\beta^u_{3ic}z_{(i)c},\ g_4\left(z_{(i)c}\right)\cong\alpha^u_{4ic}+\beta^u_{4ic}z_{(i)c},$$
$$g_1\left(w_{(j)l}\right)\cong\alpha^v_{1jl}-\beta^v_{1jl}w_{(j)l},\ g_2\left(w_{(j)l}\right)\cong\alpha^v_{2jl}-\beta^v_{2jl}w_{(j)l},$$
$$g_3\left(w_{(j)l}\right)\cong\alpha^v_{3jl}+\beta^v_{3jl}w_{(j)l},\ g_4\left(w_{(j)l}\right)\cong\alpha^v_{4jl}+\beta^v_{4jl}w_{(j)l}.$$

Burada,

$$\alpha^u_{1ic}=1-e^{t^u_{(i)c}}+t^u_{(i)c}e^{t^u_{(i)c}},\ \ \beta^u_{1ic}=e^{t^u_{(i)c}},$$
$$\alpha^u_{2ic}=\frac{f\left(t^u_{(i)c}\right)}{F\left(t^u_{(i)c}\right)}+t^u_{(i)c}\beta^u_{2ic},\ \ \beta^u_{2ic}=\frac{\left(e^{t^u_{(i)c}}-1\right)f\left(t^u_{(i)c}\right)F\left(t^u_{(i)c}\right)+f^2\left(t^u_{(i)c}\right)}{F^2\left(t^u_{(i)c}\right)},$$
$$\alpha^u_{3ic}=e^{t^u_{(i)c}}-t^u_{(i)c}e^{t^u_{(i)c}},\ \ \beta^u_{3ic}=e^{t^u_{(i)c}},$$
$$\alpha^u_{4ic}=\frac{f_i\left(t^u_{(i)c}\right)}{1-F_i\left(t^u_{(i)c}\right)}-t^u_{(i)c}\beta^u_{4ic},\ \ \beta^u_{4ic}=\frac{f_i^2\left(t^u_{(i)c}\right)+f_i'\left(t^u_{(i)c}\right)\left(1-F_i\left(t^u_{(i)c}\right)\right)}{\left(1-F_i\left(t^u_{(i)c}\right)\right)^2},$$
$$t^u_{(i)}=\begin{cases}\ln\left(-\ln\left(1-\frac{i}{m_x+1}\right)\right), & x_{(i)c}\le x_{(m_x-r)c}\\ \ln\left(-\ln\left(1-\frac{m_x-r}{m_x+1}\right)\right), & x_{(i)c}>x_{(m_x-r)c}\end{cases} \quad (4.36)$$

şeklinde elde edilir. V örneklemi için α ve β katsayıları, $\left(\alpha^v_{1jl},\beta^v_{1jl}\right)$, $\left(\alpha^v_{2jl},\beta^v_{2jl}\right)$, $\left(\alpha^v_{3jl},\beta^v_{3jl}\right)$ ve $\left(\alpha^v_{4jl},\beta^v_{4jl}\right)$, (4.36) eşitliklerindeki gibi elde edilir. Yalnızca burada $t^u_{(i)}$, $t^v_{(j)}$ ile değiştirilir.

(4.32)-(4.34) denklemlerindeki lineer olmayan fonksiyonların yerine Taylor açılımıyla lineer hale getirilen (4.36) fonksiyonları yazılarak uyarlanmış olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c}\big[\big(\alpha_{1ic}^u - \beta_{1ic}^u z_{(i)c}\big) + (i-1)\big(\alpha_{2ic}^u - \beta_{2ic}^u z_{(i)c}\big) - (m_x - i)\big(\alpha_{3ic}^u + \beta_{3ic}^u z_{(i)c}\big)\big] + \frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\big(1-\delta_{(i)c}\big)\big(\alpha_{4ic}^u + \beta_{4ic}^u z_{(i)c}\big) = 0, \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}\big[\big(\alpha_{1jl}^v - \beta_{1jl}^v w_{(j)l}\big) + (j-1)\big(\alpha_{2jl}^v - \beta_{2jl}^v w_{(j)l}\big) - \big(m_y - j\big)\big(\alpha_{3jl}^v + \beta_{3jl}^v w_{(j)l}\big)\big] + \frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\big(1-\delta_{(j)l}\big)\big(\alpha_{4jl}^v + \beta_{4jl}^v w_{(j)l}\big) = 0, \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*}{\partial \eta} = &-\frac{\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c} + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}}{\eta} \\ &-\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c}\big[\big(\alpha_{1ic}^u - \beta_{1ic}^u z_{(i)c}\big) + (i-1)\big(\alpha_{2ic}^u - \beta_{2ic}^u z_{(i)c}\big) - (m_x - i)\big(\alpha_{3ic}^u + \beta_{3ic}^u z_{(i)c}\big)\big] z_{(i)c} \\ &+\frac{1}{\eta}\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\big(1-\delta_{(i)c}\big)\big(\alpha_{4ic}^u + \beta_{4ic}^u z_{(i)c}\big) z_{(i)c} \\ &-\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l}\big[\big(\alpha_{1jl}^v - \beta_{1jl}^v w_{(j)l}\big) + (j-1)\big(\alpha_{2jl}^v - \beta_{2jl}^v w_{(j)l}\big) - \big(m_y - j\big)\big(\alpha_{3jl}^v + \beta_{3jl}^v w_{(j)l}\big)\big] w_{(j)l} \\ &+\frac{1}{\eta}\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\big(1-\delta_{(j)l}\big)\big(\alpha_{4jl}^v + \beta_{4jl}^v w_{(j)l}\big) w_{(j)l} = 0.\end{aligned} \tag{4.39}$$

(4.37)-(4.39) denklemlerini bilinmeyen parametrelere göre çözerek μ_1, μ_2 ve η parametrelerinin MML tahmin edicileri

$$\hat{\mu}_{1_{MML,RSS}} = K_1 - D_1\hat{\eta}_{MML,RSS},\ \ \hat{\mu}_2 = K_2 - D_2\hat{\eta}_{MML,RSS} \text{ ve}$$
$$\hat{\eta}_{MML,RSS} = \frac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A} \tag{4.40}$$

olarak bulunur. Burada

$$\gamma_{1ic}^u = \delta_{(i)c}(\beta_{1ic}^u + (i-1)\beta_{2ic}^u + (m_x - i)\beta_{3ic}^u),\ \ \gamma_{2ic}^u = \left(1-\delta_{(i)c}\right)\beta_{4ic}^u,$$
$$\gamma_{ic}^u = \gamma_{1ic}^u + \gamma_{2ic}^u,\ \ m_1 = \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\gamma_{ic}^u,\ \ K_1 = \frac{\sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\gamma_{ic}^u u_{(i)c}}{m_1}$$
$$\Delta_{1ic}^u = \delta_{(i)c}(\alpha_{1ic}^u + (i-1)\alpha_{2ic}^u - (m_x - i)\alpha_{3ic}^u),\ \ \Delta_{2ic}^u = \left(1-\delta_{(i)c}\right)\alpha_{4ic}^u,$$
$$\Delta_{ic}^u = \Delta_{1ic}^u - \Delta_{2ic}^u,\ \ \Delta_1 = \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\Delta_{ic}^u,$$
$$\gamma_{1jl}^v = \delta_{(j)l}\left(\beta_{1jl}^v + (j-1)\beta_{2jl}^v + \left(m_y - j\right)\beta_{3jl}\right),\ \ \gamma_{2jl}^v = \left(1-\delta_{(j)l}\right)\beta_{4jl}^v,$$
$$\gamma_{jl}^v = \gamma_{1jl}^v + \gamma_{2jl}^v,\ \ m_2 = \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\gamma_{jl}^v,\ \ K_2 = \frac{\sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\gamma_{jl}^v v_{(j)l}}{m_2}$$
$$\Delta_{1jl}^v = \delta_{(j)l}\left(\alpha_{1jl}^v + (j-1)\alpha_{2jl}^v - \left(m_y - j\right)\alpha_{3jl}^v\right),\ \ \Delta_{2jl}^v = \left(1-\delta_{(j)l}\right)\alpha_{4jl}^v,$$
$$\Delta_{jl}^v = \Delta_{1jl}^v - \Delta_{2jl}^v,\ \ \Delta_2 = \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\Delta_{jl}^v,$$
$$A = \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\delta_{(i)c} + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\delta_{(j)l},$$
$$B = \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\Delta_{ic}^u\left(u_{(i)c} - K_1\right) + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\Delta_{jl}^v\left(v_{(j)l} - K_2\right),$$
$$C = \sum_{c=1}^{r_x}\sum_{i=1}^{m_x}\gamma_{ic}^u\left(u_{(i)c} - K_1\right)^2 + \sum_{l=1}^{r_y}\sum_{j=1}^{m_y}\gamma_{jl}^v\left(v_{(j)l} - K_2\right)^2 \tag{4.41}$$

şeklindedir.

(2.19) eşitliğinde tanımlanan ters dönüşüm kullanılarak, σ_1, σ_2 ve p parametrelerinin II. tip sağdan sansürlü RSS verisine dayalı MML tahmin edicileri $\hat{\sigma}_{1_{MML,RSS}}$, $\hat{\sigma}_{2_{MML,RSS}}$ ve $\hat{p}_{MML,RSS}$

$$\hat{\sigma}_{1_{MML,RSS}} = e^{\hat{p}_{MML,RSS}\hat{\mu}_{1_{MML,RSS}}}, \quad \hat{\sigma}_{2_{MML,RSS}} = e^{\hat{p}_{MML,RSS}\hat{\mu}_{2_{MML,RSS}}} \quad \text{ve}$$

$$\hat{p}_{MML,RSS} = \frac{1}{\hat{\eta}_{MML,RSS}}, \tag{4.42}$$

olarak elde edilir. Böylece sistem güvenilirliği R'nin II. tip sağdan sansürlü RSS verisine dayalı MML tahmin edicisi aşağıda verildiği gibi elde edilir

$$\hat{R}_{MML,RSS} = \frac{\hat{\sigma}_{2_{MML,RSS}}}{\hat{\sigma}_{1_{MML,RSS}} + \hat{\sigma}_{2_{MML,RSS}}}. \tag{4.43}$$

4.3 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, sistem güvenilirliği R'nin II. tip sağdan sansürlü SRS ve RSS verisine dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin performansları Monte-Carlo simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalarda (2.67) ve (2.68) eşitliklerinde tanımlanan *yan* ve *MSE* kriterleri kullanılmıştır. Ancak simülasyon sonuçlarının verildiği tablolarda *MSE* kriteri yerine bu kriter kullanılarak elde edilen *RE* değerlerine yer verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki RE'ler kullanılmıştır

$$RE_1 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{ML,RSS})}, \quad RE_2 = \frac{MSE(\hat{R}_{MML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{MML,RSS})}, \quad RE_3 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{MML,SRS})},$$

$$RE_4 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,RSS})}{MSE(\hat{R}_{MML,RSS})} \quad \text{and} \quad RE_5 = \frac{MSE(\hat{R}_{ML,SRS})}{MSE(\hat{R}_{MML,RSS})}. \tag{4.44}$$

Simülasyon çalışmalarında küme çapı $m_x = m_y$ =6, 8, 10 ve döngü sayısı $r_x = r_y$ =1, 5 olarak alınmıştır. Açıktır ki, X stresi ve Y dayanıklılığı için RSS'e dayalı örneklem çapları $n = m_x r_x$ ve $m = m_y r_y$ şeklinde belirlenir. Ayrıca, SRS'dayalı örneklemlerde de örneklem çapları (n, m) olarak alınmıştır. Simülasyonlar parametrelerin farklı değerleri için tekrar ettirilmiştir. Weibull dağılımı şekil parametresi $p \leq 3.6$ olduğunda sağa çarpıktır, bu nedenle p =0.5, 1.5, 2.5 ve (σ_1, σ_2) =(1,1), (1,2), (1,3) şeklinde alınarak parametrelerin aldığı farklı değerleri için tahmin edicilerin performansları karşılaştırılmıştır.

II. tip sağdan sansürlü SRS verisi varsayımı altında, X stresi ve Y dayanıklılığı için sırasıyla en büyük $[\![qn + 0.5]\!]$ ve $[\![qm + 0.5]\!]$ tane gözlem sansürlenir. II. tip sağdan sansürlü RSS verisi varsayımı altında ise, X ve Y örneklemlerinin her döngüsünde en büyük $[\![qm_x + 0.5]\!]$ ve $[\![qm_y + 0.5]\!]$ tane gözlem sansürlenir. Burada, q sansürleme oranını göstermektedir ve q =0.1, 0.2 ve 0.3 alınmıştır. q =0.3 en kötü senaryoyu ifade etmektedir. Simülasyonlarda $[\![100{,}000/\min(n,m)]\!]$ tekrar yapılmıştır. X stresi ve Y dayanıklılığı için II. tip sağdan sansürlü örneklemler sırasıyla $Weibull(p, \sigma_1)$ ve $Weibull(p, \sigma_2)$ dağılımlarından üretilmiştir. Simülasyon çalışmasının sonuçları çizelge 4.1'de verilmiştir.

Yan kriterine göre karşılaştırmalar: Çizelge 4.1'den görüleceği gibi şekil parametresi p'nin değerine bakılmaksızın bütün tahmin ediciler ihmal edilebilir *yan*a sahiptir. Ancak ölçek parametreleri σ_1 ve σ_2 birbirinden farklılaştıkça *yan*ın arttığı görülmektedir.

Örnekleme yöntemlerine göre karşılaştırmalar: Sistem güvenilirliği R'nin SRS'e dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri RSS'e dayalı olanlardan daha az etkindir. Başka bir deyişle, RE_1 ve RE_2 değerleri her durumda 1'den büyüktür ve bu durum RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin SRS'e dayalı ML ve MML tahmin edicilerinden daha yüksek olduğu anlamına gelmektedir.

Tahmin edici yöntemlerine göre karşılaştırmalar: RE_3 ve RE_4 sütunlarında, sistem güvenilirliği R'nin ML ve MML tahmin edicilerinin performansları SRS ve RSS yöntemlerine göre karşılaştırılmıştır. SRS'e dayalı ML ve MML tahmin edicilerin karşılaştırıldığı RE_3 sütunundan açıktır ki, sistem güvenilirliği R'nin ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri farklı örneklem çapları ve farklı şekil parametrelerine göre aşağı yukarı aynıdır. RSS'e dayalı tahmin edicilerin karşılaştırıldığı RE_4 sütununa göre döngü sayısı 1 iken, $r_x = r_y$ =1, R'nin RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri birbirine çok yakındır. Ancak, döngü sayısı arttıkça yani $r_x = r_y$ =5 iken, R'nin ML tahmin edicisinin MML tahmin edicisinden daha etkin olduğu görülmektedir. Ayrıca, $\sigma_1 > \sigma_2$ olduğu durumda şekil parameteresi ne olursa olsun MML tahmin edicisinin etkinliği gittikçe azalmaktadır.

RE_5 sütununda, R'nin RSS'e dayalı MML tahmin edicisi ile SRS'e dayalı ML tahmin edicisinin performansları karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmanın yapılmasının sebebi RSS'e dayalı ve tahmin edicilerin analitik formda elde edildiği yöntem ile klasik yöntem olan SRS'e dayalı ve tahmin edicilerin iteratif yöntemler kullanılarak elde edilebildiği yöntemi karşılaştırmaktır. RE_5 sütunundan açıktır ki, R'nin RSS'e dayalı MML tahmin edicisi SRS'e dayalı ML tahmin edicisinden farklı küme çapı, farklı döngü sayısı, farklı örneklem çapı ve farklı parametre değerlerine göre daha etkindir.

Sansürleme oranına göre karşılaştırmalar: Yapılan simülasyon çalışmalarından görülmüştür ki, döngü sayısı $r_x = r_y = 1$ iken aynı küme çapında sansürleme oranı q arttıkça R'nin tüm tahmin edicilerinin etkinliği azalmaktadır. Bu durum olması gereken bir durumdur. Ayrıca, küme çapları sabitken döngü sayıları ne olursa olsun q arttıkça bütün tahmin edicilerin *MSE*'lerinin arttığı görülmektedir. Ancak çizelge 4.1'de kısalık olması açısından *MSE* değerlerine yer verilmemiştir.

Çizelge 4.1 Sansürlü veri için *R*'nin SRS ve RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin *yan* ve *RE* değerleri

				Bias				*Efficiency*				
p	r	m	P.C.(%)	$\hat{R}_{ML.SRS}$	$\hat{R}_{MML.SRS}$	$\hat{R}_{ML.RSS}$	$\hat{R}_{MML.RSS}$	RE_1	RE_2	RE_3	RE_4	RE_5
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$						
			10	0.0001	0.0012	-0.0006	-0.0003	3.49	3.40	1.06	1.03	3.63
		6	20	-0.0025	-0.0031	-0.0012	-0.0024	3.18	3.16	1.06	1.05	3.36
			30	-0.0029	-0.0010	0.0013	0.0031	2.89	2.85	1.07	1.06	3.07
			10	-0.0004	-0.0003	0.0012	0.0012	4.18	3.92	1.05	0.98	4.14
	1	8	20	-0.0036	-0.0029	0.0008	0.0012	4.07	3.81	1.06	0.99	4.06
			30	-0.0085	-0.0078	-0.0016	-0.0012	3.91	3.60	1.06	0.97	3.82
			10	-0.0022	-0.0021	0.0004	0.0003	5.27	4.89	1.04	0.97	5.11
		10	20	-0.0007	-0.0008	0.0003	0.0003	5.06	4.72	1.05	0.98	4.97
			30	-0.0006	-0.0007	0.0005	0.0004	4.89	4.38	1.05	0.94	4.63
			10	0.0018	0.0018	0.0002	0.0003	2.88	2.86	1.01	1.01	2.91
		6	20	0.0012	0.0011	0.0005	0.0007	3.23	3.17	1.01	0.99	3.22
			30	-0.0001	-0.0001	0.0012	0.0008	2.87	2.92	1.01	1.03	2.97
			10	0.0021	0.0021	-0.0002	-0.0003	3.85	3.78	1.01	0.99	3.83
	5	8	20	0.0017	0.0017	-0.0010	-0.0009	3.67	3.60	1.01	0.99	3.65
			30	0.0012	0.0011	0.0003	0.0002	4.13	4.03	1.01	0.99	4.09
			10	-0.0005	-0.0005	-0.0006	-0.0006	4.86	4.65	1.00	0.96	4.68
		10	20	0.0001	0.0001	0.0000	-0.0001	5.29	5.16	1.00	0.98	5.21
			30	-0.0004	-0.0003	-0.0003	-0.0003	4.99	4.68	1.01	0.94	4.73
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$						
			10	0.0116	0.0045	0.0141	0.0082	2.83	2.70	1.05	1.00	2.83
		6	20	0.0206	0.0137	0.0178	0.0142	2.51	2.34	1.06	0.98	2.48
			30	0.0227	0.0157	0.0049	-0.0010	2.48	2.55	1.06	1.10	2.73
			10	0.0105	0.0058	0.0086	0.0065	3.80	3.54	1.04	0.97	3.69
	1	8	20	0.0176	0.012	0.0132	0.0096	3.74	3.47	1.05	0.98	3.67
			30	0.0163	0.0115	0.0163	0.0129	3.60	3.33	1.05	0.97	3.50
			10	0.0067	0.0032	0.0059	0.0054	4.74	4.33	1.03	0.94	4.47
		10	20	0.0102	0.0060	0.0094	0.0085	4.59	4.15	1.04	0.94	4.33
0.5			30	0.0115	0.0068	0.0098	0.0099	4.49	3.95	1.05	0.92	4.16
			10	0.0024	0.0012	0.0024	-0.0041	2.78	2.62	1.01	0.95	2.64
		6	20	0.0057	0.0042	0.0030	-0.0034	3.14	2.88	1.01	0.93	2.92
			30	0.0045	0.0029	0.0042	-0.0061	2.64	2.48	1.01	0.95	2.52
			10	0.0030	0.0020	0.0026	-0.0007	3.77	3.47	1.00	0.92	3.50
	5	8	20	0.0025	0.0014	0.0026	-0.0021	3.49	3.09	1.01	0.89	3.13
			30	0.0035	0.0023	0.0020	-0.0026	3.88	3.62	1.01	0.94	3.66
			10	0.0011	0.0003	0.0019	0.0007	4.49	4.17	1.00	0.93	4.20
		10	20	0.0045	0.0037	0.0013	-0.0003	4.44	4.00	1.01	0.91	4.05
			30	0.0039	0.0030	0.0025	0.0010	4.10	3.66	1.01	0.90	3.70
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$						
			10	0.0242	0.0170	0.0145	0.0077	2.86	2.57	1.03	0.93	2.67
		6	20	0.0182	0.0112	0.0214	0.0140	2.73	2.66	1.04	1.01	2.77
			30	0.0210	0.0121	0.0154	0.0089	2.34	2.21	1.05	0.99	2.32
			10	0.0122	0.0063	0.0101	0.0069	3.78	3.36	1.02	0.91	3.46
	1	8	20	0.0194	0.0119	0.0186	0.0142	3.37	3.01	1.04	0.93	3.15
			30	0.0216	0.0141	0.0177	0.0139	3.09	2.84	1.04	0.95	2.96
			10	0.0096	0.0047	0.0070	0.0062	4.54	4.06	1.02	0.91	4.14
		10	20	0.0127	0.0071	0.0101	0.0088	4.00	3.61	1.02	0.92	3.70
			30	0.0172	0.0110	0.0135	0.0132	3.85	3.37	1.03	0.90	3.48
			10	0.0027	0.0011	0.0039	-0.0057	2.61	2.22	1.00	0.85	2.24
		6	20	0.0070	0.0051	0.0044	-0.0054	2.85	2.48	1.00	0.87	2.50
			30	0.0076	0.0054	0.0057	-0.008	2.60	2.29	1.01	0.89	2.32
			10	0.0031	0.0019	0.0031	-0.0019	3.16	2.72	1.00	0.86	2.73
	5	8	20	0.0021	0.0007	0.0038	-0.0024	3.22	2.78	1.00	0.86	2.80
			30	0.0041	0.0025	0.0030	-0.0037	3.64	3.17	1.01	0.87	3.20
			10	0.0024	0.0014	0.0006	-0.0007	4.07	3.55	1.00	0.87	3.57
		10	20	0.0012	0.0001	0.0009	-0.0018	3.89	3.40	1.00	0.87	3.41
			30	0.0016	0.0004	0.0035	0.0016	3.87	3.29	1.00	0.85	3.31

Çizelge 4.1 Sansürlü veri için *R*'nin SRS ve RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin *yan* ve *RE* değerleri (devam)

				Bias				*Efficiency*				
p	r	m	P.C.(%)	$\hat{R}_{ML.SRS}$	$\hat{R}_{MML.SRS}$	$\hat{R}_{ML.RSS}$	$\hat{R}_{MML.RSS}$	RE_1	RE_2	RE_3	RE_4	RE_5
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$						
			10	0.0003	0.0010	-0.0017	-0.0013	3.47	3.34	1.06	1.02	3.55
		6	20	0.0037	0.0028	-0.0000	0.0002	3.10	2.98	1.07	1.03	3.20
			30	-0.0018	-0.0008	0.0006	-0.0032	2.87	2.74	1.08	1.04	2.99
			10	0.0012	0.0013	-0.0001	0.0001	4.30	4.03	1.05	0.98	4.24
	1	8	20	0.0015	0.0014	-0.0004	-0.0005	4.10	3.82	1.06	0.99	4.06
			30	-0.0014	-0.0013	0.0004	0.0006	4.07	3.84	1.06	1.00	4.09
			10	0.0003	0.0004	0.0002	0.0003	5.30	4.95	1.04	0.97	5.16
		10	20	-0.0006	-0.0004	0.0005	0.0005	5.20	4.82	1.05	0.97	5.08
			30	-0.0007	-0.0008	-0.0011	-0.0010	4.82	4.36	1.05	0.95	4.61
			10	0.0001	0.0001	-0.0003	-0.0001	2.88	2.84	1.01	1.00	2.88
		6	20	0.0014	0.0014	-0.0004	-0.0007	3.18	3.14	1.01	1.00	3.19
			30	0.0006	0.0007	0.0003	0.0001	2.80	2.88	1.01	1.05	2.94
			10	0.0009	0.0009	0.0000	0.0000	4.30	4.16	1.01	0.97	4.21
	5	8	20	0.0017	0.0016	-0.0003	-0.0003	3.62	3.51	1.01	0.98	3.55
			30	0.0010	0.0010	0.0001	0.0002	4.29	4.22	1.01	0.99	4.27
			10	0.0004	0.0004	0.0001	0.0002	5.07	4.89	1.00	0.97	4.93
		10	20	0.0038	0.0038	0.0016	0.0014	4.61	4.35	1.01	0.95	4.40
			30	0.0016	0.0016	-0.0001	0.0001	4.83	4.52	1.01	0.94	4.57
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$						
			10	-0.0022	-0.0081	0.0143	0.0079	3.30	3.11	1.04	0.99	3.27
		6	20	0.0210	0.0158	0.0151	0.0051	3.27	3.16	1.07	1.03	3.39
			30	0.0160	0.0094	0.0304	0.0227	2.65	2.50	1.06	1.00	2.66
			10	0.0109	0.0062	0.0095	0.0076	3.92	3.57	1.04	0.95	3.73
	1	8	20	0.0128	0.0075	0.0119	0.0087	3.74	3.46	1.05	0.97	3.64
			30	0.0109	0.0059	0.0152	0.0128	3.74	3.38	1.05	0.95	3.56
			10	0.0081	0.0048	0.0060	0.0057	4.80	4.36	1.03	0.94	4.52
		10	20	0.0110	0.0069	0.0081	0.0072	4.51	4.08	1.04	0.94	4.25
1.5			30	0.0131	0.0086	0.0123	0.0124	4.40	3.90	1.04	0.92	4.08
			10	0.0031	0.0020	0.0025	-0.0044	2.89	2.69	1.00	0.94	2.71
		6	20	0.0031	0.0017	0.0022	-0.0046	3.05	2.80	1.01	0.93	2.84
			30	0.0052	0.0037	0.0042	-0.0066	2.60	2.44	1.01	0.95	2.48
			10	0.0019	0.0011	0.0012	-0.0024	3.56	3.29	1.00	0.93	3.32
	5	8	20	0.0020	0.0010	0.0011	-0.0035	3.52	3.20	1.00	0.91	3.23
			30	0.0036	0.0023	0.0021	-0.0026	3.97	3.77	1.01	0.95	3.82
			10	0.0014	0.0007	0.0007	-0.0005	4.79	4.48	1.00	0.93	4.51
		10	20	0.0040	0.0031	0.0012	-0.0007	4.31	3.96	1.00	0.92	3.98
			30	0.0034	0.0024	0.0026	0.0013	4.10	3.64	1.01	0.89	3.68
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$						
			10	0.0013	-0.0055	0.0270	0.0198	3.40	3.19	1.02	0.96	3.28
		6	20	0.0196	0.0109	0.0213	0.0156	3.09	2.95	1.03	0.99	3.07
			30	0.0326	0.0234	0.0271	0.0152	2.84	2.46	1.05	0.90	2.59
			10	0.0159	0.0099	0.0128	0.0098	3.45	3.07	1.02	0.91	3.16
	1	8	20	0.0154	0.0084	0.0124	0.0084	3.42	3.10	1.04	0.94	3.23
			30	0.0188	0.0120	0.0161	0.0129	3.22	2.94	1.04	0.95	3.07
			10	0.0115	0.0067	0.0075	0.0067	4.32	3.81	1.02	0.90	3.90
		10	20	0.0129	0.0073	0.0099	0.0085	4.01	3.55	1.03	0.91	3.66
			30	0.0156	0.0095	0.0136	0.0133	3.85	3.38	1.03	0.90	3.50
			10	0.0046	0.0030	0.0037	-0.0058	2.58	2.17	1.00	0.84	2.19
		6	20	0.0037	0.0018	0.0036	-0.0060	3.01	2.53	1.00	0.84	2.55
			30	0.0055	0.0034	0.0063	-0.0084	2.44	2.09	1.01	0.86	2.11
			10	0.0029	0.0017	0.0023	-0.0020	3.20	2.73	1.00	0.86	2.75
	5	8	20	0.0030	0.0016	0.0036	-0.0032	3.16	2.76	1.00	0.88	2.78
			30	0.0056	0.0040	0.0039	-0.0026	3.66	3.18	1.00	0.87	3.21
			10	0.0035	0.0025	0.0014	-0.0007	4.12	3.59	1.00	0.87	3.61
		10	20	0.0031	0.0020	0.0016	-0.0014	4.10	3.49	1.00	0.85	3.51
			30	0.0033	0.0021	0.0029	0.0005	3.95	3.22	1.00	0.82	3.25

Çizelge 4.1 Sansürlü veri için *R*'nin SRS ve RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin *yan* ve *RE* değerleri (devam)

				Bias				*Efficiency*				
p	r	m	P.C.(%)	$\hat{R}_{ML.SRS}$	$\hat{R}_{MML.SRS}$	$\hat{R}_{ML.RSS}$	$\hat{R}_{MML.RSS}$	RE_1	RE_2	RE_3	RE_4	RE_5
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$						
			10	-0.0084	-0.0085	-0.0002	-0.0004	3.32	3.18	1.07	1.03	3.44
		6	20	-0.0255	-0.0235	-0.0046	-0.0031	3.23	3.13	1.08	1.05	3.40
			30	0.0060	0.0056	0.0026	0.0020	3.08	2.96	1.08	1.04	3.21
			10	-0.0007	-0.0010	-0.0001	-0.0001	4.24	3.99	1.05	0.99	4.21
	1	8	20	-0.0003	-0.0001	0.0009	0.0011	4.15	3.94	1.06	1.00	4.18
			30	0.0026	0.0023	0.0006	0.0007	3.95	3.71	1.06	1.00	3.96
			10	0.0019	0.0020	-0.0003	-0.0005	5.22	4.91	1.04	0.98	5.12
		10	20	0.0003	0.0002	0.0000	-0.0001	5.11	4.74	1.05	0.97	4.98
			30	-0.0017	-0.0016	0.0005	0.0005	4.79	4.31	1.05	0.95	4.57
			10	0.0017	0.0017	0.0006	0.0007	2.91	2.85	1.01	0.99	2.89
		6	20	-0.0007	-0.0007	-0.0015	-0.0012	3.46	3.42	1.01	1.00	3.48
			30	-0.0013	-0.0013	-0.0003	-0.0001	2.79	2.85	1.02	1.04	2.90
			10	-0.0017	-0.0018	-0.0002	-0.0003	4.08	3.96	1.01	0.97	4.00
	5	8	20	0.0018	0.0018	-0.0011	-0.0010	3.53	3.46	1.01	0.99	3.51
			30	0.0001	0.0002	-0.0002	0.0001	4.41	4.36	1.01	1.00	4.43
			10	-0.0013	-0.0014	-0.0004	-0.0003	4.87	4.69	1.01	0.97	4.75
		10	20	-0.0013	-0.0013	-0.0000	0.0000	4.98	4.83	1.01	0.97	4.88
			30	-0.0020	-0.0020	0.0001	-0.0001	4.40	4.05	1.01	0.93	4.10
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$						
			10	0.0077	0.0021	0.0172	0.0131	3.09	2.89	1.05	0.98	3.05
		6	20	0.0113	0.0055	0.0154	0.0105	3.02	2.80	1.06	0.98	2.98
			30	0.0091	0.0026	0.0334	0.0244	2.91	2.85	1.07	1.05	3.06
			10	0.0103	0.0058	0.0096	0.0073	3.96	3.67	1.04	0.96	3.83
	1	8	20	0.0115	0.0064	0.0125	0.0096	3.88	3.55	1.05	0.96	3.75
			30	0.0165	0.0111	0.0145	0.0110	3.77	3.40	1.05	0.95	3.58
			10	0.0096	0.0061	0.0063	0.0056	4.69	4.27	1.03	0.94	4.42
		10	20	0.0129	0.0085	0.0076	0.0067	4.61	4.16	1.04	0.94	4.34
2.5			30	0.0119	0.0072	0.0114	0.0117	4.48	3.95	1.04	0.92	4.14
			10	0.0021	0.0010	0.0034	-0.0037	2.68	2.52	1.01	0.95	2.55
		6	20	0.0039	0.0024	0.0026	-0.0042	3.08	2.82	1.01	0.92	2.86
			30	0.0040	0.0024	0.0054	-0.0051	2.80	2.68	1.01	0.97	2.72
			10	0.0037	0.0028	0.0024	-0.0009	4.01	3.67	1.01	0.92	3.71
	5	8	20	0.0024	0.0014	0.0027	-0.0017	3.75	3.50	1.00	0.94	3.54
			30	0.0050	0.0039	0.0023	-0.0025	4.18	3.82	1.01	0.92	3.87
			10	0.0043	0.0035	0.0012	0.0002	4.14	3.85	1.00	0.93	3.88
		10	20	0.0007	-0.0000	0.0026	0.0005	4.82	4.41	1.00	0.92	4.44
			30	0.0022	0.0012	0.0023	0.0006	4.45	3.89	1.00	0.88	3.93
						$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3$						
			10	0.0133	0.0069	0.0213	0.0139	2.90	2.72	1.05	0.98	2.87
		6	20	0.0168	0.0097	0.0160	0.0075	2.85	2.73	1.02	0.98	2.80
			30	0.0043	-0.0037	0.0397	0.0248	2.54	2.53	1.04	1.04	2.65
			10	0.0125	0.0066	0.0112	0.0078	3.60	3.26	1.02	0.93	3.35
	1	8	20	0.0134	0.0067	0.0161	0.0110	3.54	3.22	1.03	0.93	3.33
			30	0.0106	0.0038	0.0149	0.0100	3.29	3.07	1.04	0.97	3.20
			10	0.0099	0.0053	0.0078	0.0071	4.43	3.93	1.02	0.90	4.01
		10	20	0.0118	0.0063	0.0106	0.0093	4.06	3.65	1.02	0.92	3.74
			30	0.0153	0.0092	0.0136	0.0134	3.93	3.41	1.03	0.89	3.51
			10	0.0025	0.0010	0.0030	-0.0062	2.66	2.26	1.00	0.85	2.27
		6	20	0.0053	0.0035	0.0035	-0.0063	2.84	2.45	1.01	0.87	2.48
			30	0.0064	0.0044	0.0053	-0.0093	2.39	2.00	1.01	0.84	2.03
			10	0.0023	0.0012	0.0020	-0.0028	3.39	2.91	1.00	0.86	2.92
	5	8	20	0.0032	0.0018	0.0046	-0.0022	3.03	2.60	1.00	0.86	2.62
			30	0.0045	0.0030	0.0031	-0.0035	3.60	3.12	1.01	0.87	3.15
			10	0.0012	0.0003	0.0014	-0.0006	4.42	3.77	1.00	0.85	3.79
		10	20	0.0022	0.0011	0.0025	-0.0004	3.81	3.39	1.00	0.89	3.41
			30	0.0059	0.0047	0.0033	0.0013	3.88	3.22	1.00	0.83	3.25

5. UYGULAMA

Bu bölümde, sistem güvenilirliği R'nin

i) SRS ve RSS yöntemlerine dayalı tahmini ve güven aralıkları,

ii) RSS ve modifikasyonlarına dayalı tahmini,

ve

iii) Sansürlü gözlem durumunda SRS ve RSS'e dayalı tahminine

ilişkin uygulamalar yapılmıştır.

5.1 *R*'nin SRS ve RSS'e Dayalı Tahmini

Sistem güvenilirliği R'nin tahmin edildiği bu bölümde, literatürde yaygın olarak kullanılan *Dayanıklılık* veri seti kullanılmıştır.

Dayanıklılık veri seti: Tekli karbon fiberler ve emprenye 1000'lik karbon fiberlerin GPA'da ölçülen dayanıklılıkları ile ilgilidir.

Burada,

Tekli karbon fiberler: 1, 10, 20 ve 50 mm lik mastar boyu

Emprenye 1000'lik karbon fiberler: 20, 50, 150 ve 300 mm lik mastar boyu

geriliminde test edilmiştir.

İlk kez Badar ve Priest (1982) tarafından kullanılan veri setinin farklı mastar boyundaki dayanıklılıkları sistem güvenilirliği tahmini çalışmalarında ele alınmıştır. Örneğin, tekli karbon fiberlerin 20 mm ve 10 mm lik mastar boyundaki dayanıklılıkları Raqab ve Kundu (2005) tarafından genelleştirilmiş Rayleigh; Kundu ve Gupta (2006), Kundu ve Raqab (2009) ve Valiollahi vd. (2013) tarafından Weibull; Babayi vd. (2013) tarafından genelleştirilmiş lojistik dağılımı varsayımı altında SRS'e dayalı olarak analiz edilmiştir. Ayrıca, tekli karbon fiberlerin 20mm ve 50mm lik mastar boyundaki dayanıklılıkları Ghitany vd. (2015) tarafından power Lindley dağılımı varsayımı altında SRS'e dayalı olarak analiz edilmiştir.

Kundu ve Gupta (2006) çalışmasında aynı şekil ve farklı ölçek parametreli Weibull dağılımı varsayımı altında sistem güvenilirliği R tahmin edilmiştir. Ancak *Dayanıklılık* veri setlerinin şekil parametreleri farklı olduğundan veri setlerinin şekil parametreleri ayrı ayrı hesaplanmış ve ortalaması alınarak ortak bir şekil parametresi üzerinden ölçek parametreleri tahmin edilmiştir. Benzer şekilde, ölçek parametresi bağlamında, Babayi vd. (2013) ve Ghitany vd. (2015) çalışmalarında aynı ölçek ve farklı şekil parametreleri varsayımı altında R tahmin edilmiştir. Ölçek parametrelerini eşitleyebilmek için *Dayanıklılık* veri setlerinin ölçek parametreleri tahmin edilip ortalaması alınarak ortak bir ölçek parametresi üzerinden şekil parametreleri tahmin edilmiştir.

Bu çalışmada, sistem güvenilirliği R, Ghitany vd. (2015)'de kullanılan tekli karbon fiberlerin 20 mm ve 50 mm lik mastar boyundaki dayanıklılığı verisi kullanılarak SRS ve RSS'e dayalı olarak tahmin edilmiştir. Örneklem hacimleri sırasıyla 69 ve 65 olan veri seti çizelge 5.1 ve çizelge 5.2'de verilmiştir. Tekli karbon fiberlerin 20 mm ve 50 mm lik mastar boyundaki dayanıklılığı veri seti çalışmanın bu ve bundan sonraki kısmında kısalık olması açısından veri seti I ve veri seti II olarak adlandırılmıştır.

Çizelge 5.1 Veri Seti I (20 mm lik mastar boyu)

1.312	1.314	1.479	1.552	1.700	1.803	1.861	1.865	1.944	1.958
1.966	1.997	2.006	2.021	2.027	2.055	2.063	2.098	2.140	2.179
2.224	2.240	2.253	2.270	2.272	2.274	2.301	2.301	2.359	2.382
2.382	2.426	2.434	2.435	2.478	2.490	2.511	2.514	2.535	2.554
2.566	2.570	2.586	2.629	2.633	2.642	2.648	2.684	2.697	2.726
2.770	2.773	2.800	2.809	2.818	2.821	2.848	2.880	2.954	3.012
3.067	3.084	3.090	3.096	3.128	3.233	3.433	3.585	3.585	

Çizelge 5.2 Veri Seti II (50 mm lik mastar boyu)

1.339	1.434	1.549	1.574	1.589	1.613	1.746	1.753	1.764	1.807
1.812	1.840	1.852	1.852	1.862	1.864	1.931	1.952	1.974	2.019
2.051	2.055	2.058	2.088	2.125	2.162	2.171	2.172	2.180	2.194
2.211	2.270	2.272	2.280	2.299	2.308	2.335	2.349	2.356	2.386
2.390	2.410	2.430	2.431	2.458	2.471	2.497	2.514	2.558	2.577
2.593	2.601	2.604	2.620	2.633	2.670	2.682	2.699	2.705	2.735
2.785	3.020	3.042	3.116	3.174					

Bu çalışmada, literatürdeki çalışmalardan farklı olarak, tekli karbon fiberlerin 20 mm ve 50 mm'deki dayanıklılığı veri setleri ilgilenilen kitle olarak düşünülmüş ve bu kitleden SRS ve RSS yöntemlerine göre örneklem seçilerek sistem güvenilirliği R tahmin edilmiştir. RSS yöntemi ile örneklem seçerken küme çapları $m_x = m_y = 3$ olarak alınmıştır. Döngü sayısı ise $r_x = r_y = 7$ olarak belirlenmiştir. Böylelikle örneklem belirlenirken $m_x^2 r_x = m_y^2 r_y = 3^2.7 = 63$ veri kullanılmış ancak bunlardan sadece $m_x r_x = m_y r_y = 21$ tanesinin gerçek ölçümü ile ilgilenilmiştir. SRS yönteminde de örneklem hacmi $n = m = 21$ olarak alınmıştır. SRS ve RSS yöntemlerine dayalı 20 mm ve 50 mm lik mastar boyundaki dayanıklılık veri setleri çizelge 5.3 ve çizelge 5.4'de verilmiştir.

Çizelge 5.3 *Dayanıklılık* veri setinden SRS yöntemi kullanılarak çekilen veri seti, n=m=21

Veri Seti I (20 mm lik mastar boyu)			Veri Seti II (50 mm lik mastar boyu)		
1.479	1.552	1.803	1.339	1.549	1.589
1.966	1.997	2.006	1.613	1.746	1.807
2.098	2.24	2.27	1.852	2.019	2.055
2.272	2.426	2.566	2.058	2.162	2.171
2.642	2.773	2.818	2.335	2.386	2.471
2.821	2.88	2.954	2.558	2.633	2.67
3.012	3.067	3.233	2.699	2.785	3.116

Çizelge 5.4 *Dayanıklılık* veri setinden RSS yöntemi kullanılarak çekilen veri seti, m_x=m_y=3, r_x=r_y=7, n=m=21

Veri Seti I (20 mm lik mastar boyu)				Veri Seti II (50 mm lik mastar boyu)			
Döngü	1. küme	2. küme	3. küme	Döngü	1. küme	2. küme	3. küme
1	1.865	2.642	3.433	1	1.807	2.051	2.299
2	1.7	2.848	2.301	2	1.434	1.852	2.67
3	2.098	2.478	3.128	3	2.055	2.431	3.174
4	2.27	2.684	3.233	4	1.974	3.02	2.735
5	1.479	2.809	2.554	5	2.171	2.601	2.514
6	1.314	2.24	3.585	6	2.577	2.272	2.125
7	2.027	2.773	2.586	7	1.812	1.764	2.604

Sistem güvenilirliği R tahmin edilmeden önce çizelge 5.3 ve çizelge 5.4'de verilen ve sırasıyla SRS ve RSS yöntemleri kullanılarak çekilen veri setlerinin Weibull dağılımına uyup uymadığı araştırılmıştır. Bu amaçla, öncelikle veri setlerinin şekil parametrelerinin

eşit olduğu varsayımı altında parametrelerin SRS ve RSS'e dayalı ML tahminleri çizelge 5.5 ve çizelge 5.6'da verilmiştir.

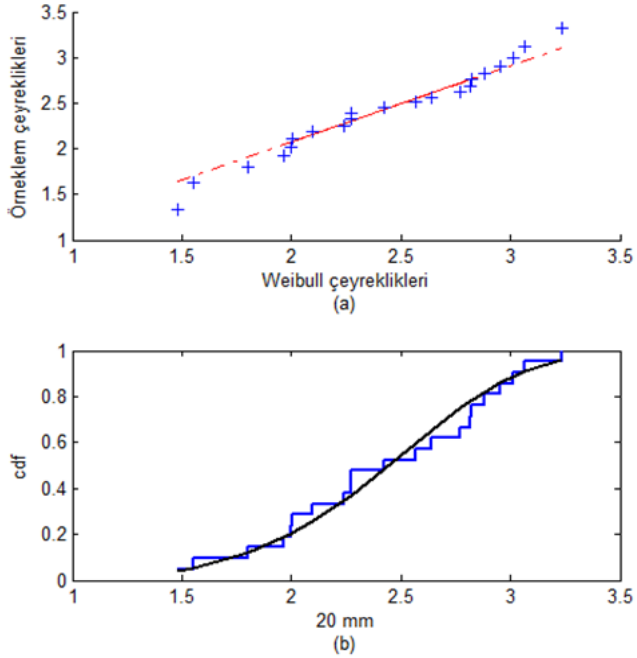
Çizelge 5.5 SRS'e dayalı *veri seti I* ve *veri seti II*'nin şekil ve ölçek parametrelerinin ML tahmini

Veri Seti	Şekil parametresi	Ölçek parametresi
I	5.4901	195.8884
II	5.4901	114.1287

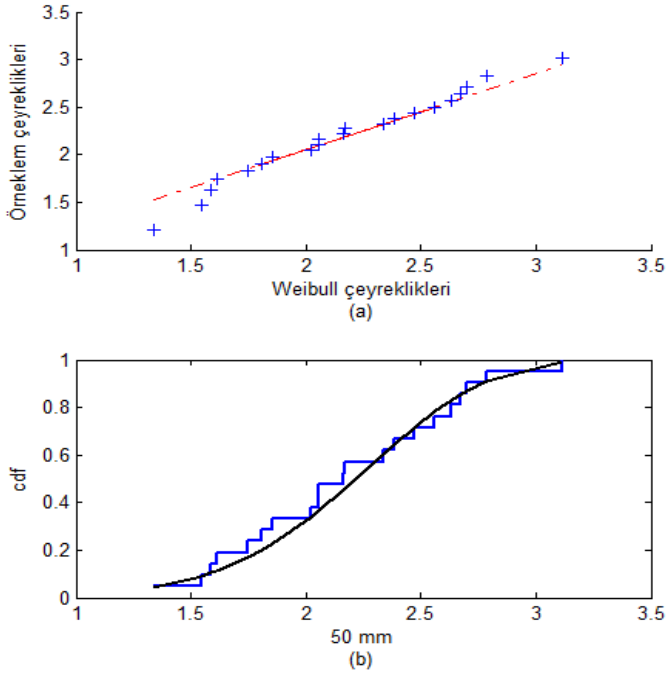
Çizelge 5.6 RSS'e dayalı *veri seti I* ve *veri seti II*'nin şekil ve ölçek parametrelerinin ML tahmini

Veri Seti	Şekil parametresi	Ölçek parametresi
I	5.1524	168.5650
II	5.1524	104.5094

Şekil 5.1.a,b (veri seti I) ve şekil 5.2.a,b'de (veri seti II), çizelge 5.3'de verilen SRS yöntemi kullanılarak elde edilen veri seti I ve veri seti II'nin Q-Q grafikleri ve ampirik *cdf* ile çizelge 5.5'de elde edilen parametre tahmin değerlerine dayalı *cdf* grafikleri verilmiştir.

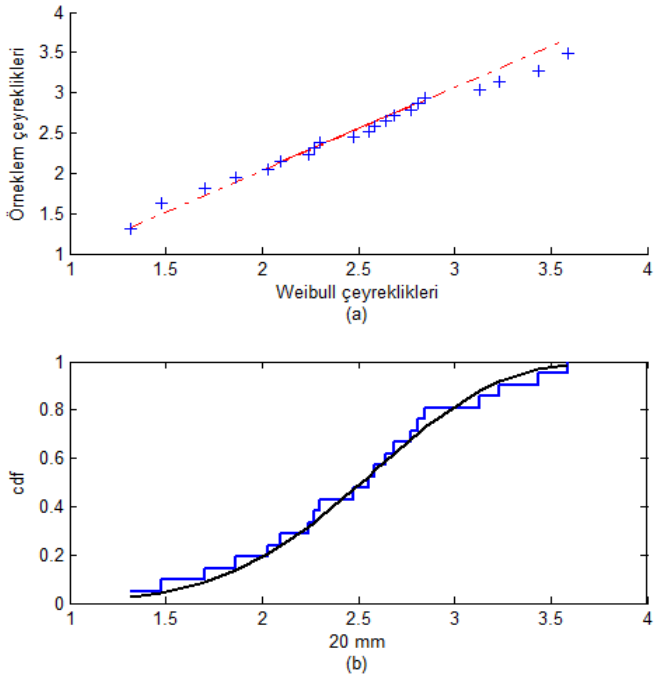


Şekil 5.1.a SRS kullanılarak çekilen veri Seti I için Q-Q grafiği, b. Ampirik *cdf* ile parametre tahmin değerlerine dayalı *cdf* grafikleri

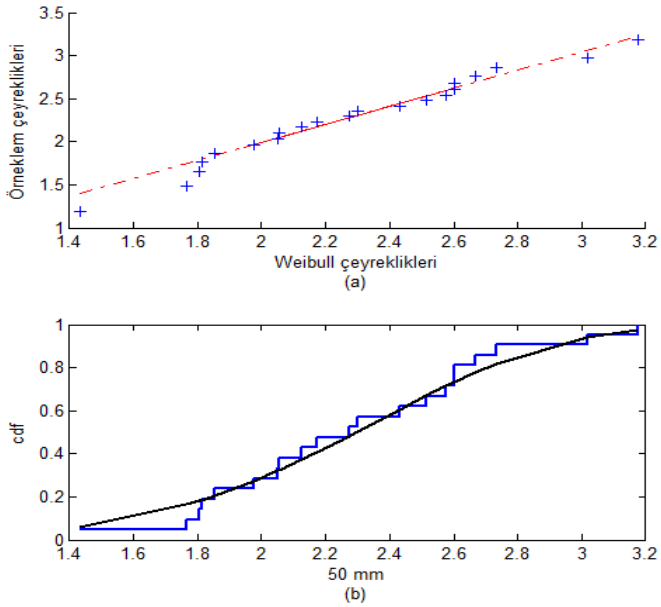


Şekil 5.2.a SRS kullanılarak çekilen veri Seti II için Q-Q grafiği, b. Ampirik *cdf* ile parametre tahmin değerlerine dayalı *cdf* grafikleri

Şekil 5.3.a,b (veri seti I) ve şekil 5.4.a,b'de (veri seti II), çizelge 5.4'de verilen RSS yöntemi kullanılarak elde edilen veri seti I ve veri seti II'nin Q-Q grafikleri ve ampirik *cdf* ile çizelge 5.6'da elde edilen parametre tahmin değerlerine dayalı *cdf* grafikleri verilmiştir.



Şekil 5.3.a. RSS kullanılarak çekilen veri Seti I için Q-Q grafiği, b. Ampirik *cdf* ile parametre tahmin değerlerine dayalı *cdf* grafikleri



Şekil 5.4.a. RSS kullanılarak çekilen veri Seti II için Q-Q grafiği, b. Ampirik *cdf* ile parametre tahmin değerlerine dayalı *cdf* grafikleri

Buradan açıktır ki, çizelge 5.1 ve çizelge 5.2'den sırasıyla SRS ve RSS yöntemleri kullanılarak çekilen ve çizelge 5.3 ve çizelge 5.4'deki gibi elde edilen veri seti I ve veri seti II Weibull dağılımı kullanılarak modellenebilmektedir.

SRS ve RSS'e dayalı dayanıklılık verileri kullanarak sistem güvenilirliği R'nin ML ve MML tahminleri, bootstrap *MSE* ve bootstrap güven aralığı hesaplanarak çizelge 5.7'de verilmiştir. Açıktır ki, R'nin RSS'e dayalı bootstrap *MSE*'leri SRS'e dayalı boostrap *MSE*'lerinden daha küçüktür. $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde, RSS'e dayalı bootstrap güven aralıklarının, SRS'e dayalı bootstrap güven aralıklarından daha dar olduğu görülmektedir. Bu nedenle, RSS'e dayalı tahminler daha güvenilirdir.

Çizelge 5.7 Sistem güvenilirliğinin ML ve MML tahmin değerleri

$\hat{R}_{ML,SRS}$	$\hat{R}_{MML,SRS}$	$\hat{R}_{ML,RSS}$	$\hat{R}_{MML,RSS}$
0.3684	0.3664	0.3757	0.3785
(0.0709)*	(0.0719)*	(0.0530)*	(0.0562)*
(0.2352,0.5097)**	(0.2349,0.5102)**	(0.2729,0.4801)**	(0.2765,0.4986)**

*: Bootstrap *MSE*
**: Bootstrap güven aralığı

Ayrıca, R'nin SRS ve RSS'e dayalı ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımı yardımıyla hesaplanan asimptotik güven aralıkları sırasıyla (0.2249,0.5119) ve (0.2713, 0.4801) olarak elde edilmiştir. Bu sonuçlar, bootstrap güven aralıkları ile benzerlik göstermektedir.

Bu analizlerin sonucunda, sistem güvenilirliği $R = P(X < Y)$'nin RSS'e dayalı tahmininin yaklaşık olarak 0.38 olduğu görülmektedir. Bir başka deyişle, $P(X > Y) = 0.62$'dir. Bu durum, tekli karbon fiberlerin 20 mm'lik mastar boyundaki dayanıklılığının 50 mm'lik mastar boyundaki dayanıklılığından daha yüksek olduğunu göstermektedir. Elde edilen sonuçlar, Ghitany vd. (2015)'de bulunan sonuçlar ile örtüşmektedir.

5.2 R'nin RSS Modifikasyonlarına Dayalı Tahmini

Sistem güvenilirliği R'yi, RSS ve modifikasyonlarını kullanarak tahmin edebilmek için karbon fiberlerin 20 mm'lik mastar boyundaki dayanıklılığı ve 50 mm'lik mastar boyundaki dayanıklılığı veri seti, ilgilenilen kitle olarak düşünülmüştür. Bir önceki bölümden farklı olarak RSS, ERSS, MRSS ve PRSS için örneklem seçerken küme çapı $m_x = m_y = 4$ ve döngü sayısı $r_x = r_y = 4$ olarak alınmıştır. Böylelikle örneklem belirlenirken $m_x^2 r_x = m_y^2 r_y = 4^2.4 = 64$ veri kullanılmış ancak bunlardan sadece $m_x r_x = m_y r_y = 16$ tanesinin gerçek ölçümü ile ilgilenilmiştir. Hem SRS, hem de RSS ve modifikasyonları için örneklem hacmi $n = m = 16$ olarak belirlenmiştir. R tahmin edilmeden önce çizelge 5.8'de yeni elde edilen veri seti I ve veri seti II'nin şekil ve ölçek parametrelerinin eşit şekil parametresi varsayımı altında SRS ve RSS'e dayalı ML tahminleri verilmiştir.

Çizelge 5.8 SRS ve RSS'e dayalı *veri seti I* ve *veri seti II*'nin şekil ve ölçek parametrelerinin ML tahmini

Veri Seti	Şekil parametresi	Ölçek parametresi
	SRS	
I	6.1588	366.7556
II	6.1588	207.9913
	RSS	
I	6.3185	442.8558
II	6.3185	244.7679

Çizelge 5.8'de elde edilen tahmin değerleri kullanılarak veri seti I ve veri seti II için çizdirilen Q-Q grafiklerinden veri setlerinin Weibull dağılımı kullanılarak modellenebileceği görülmüştür. Ancak, kısalık olması açısından burada Q-Q grafiklerine yer verilmemiştir.

Sistem güvenilirliği R'nin SRS, RSS, ERSS, MRSS ve PRSS'e dayalı ML ve MML tahmin değerleri çizelge 5.9'da verilmiştir.

Çizelge 5.9 Sistem güvenilirliğinin ML ve MML tahmin değerleri

$\hat{R}_{ML,SRS}$	$\hat{R}_{ML,RSS}$	$\hat{R}_{ML,ERSS}$	$\hat{R}_{ML,MRSS}$	$\hat{R}_{ML,PRSS}$
0.3639	0.3508	0.3603	0.3931	0.3825
(0.0820)*	(0.0537)*	(0.0581)*	(0.0517)*	(0.0489)*
(0.1780,0.5295)**	(0.2516,0.4597)**	(0.2320,0.4685)**	(0.2744,0.4802)**	(0.2578,0.4609)**
$\hat{R}_{MML,SRS}$	$\hat{R}_{MML,RSS}$	$\hat{R}_{MML,ERSS}$	$\hat{R}_{MML,MRSS}$	$\hat{R}_{MML,PRSS}$
0.3545	0.3534	0.3367	0.3802	0.3765
(0.0809)*	(0.0554)*	(0.0638)*	(0.0685)*	(0.0523)*
(0.1770,0.5187)**	(0.2466,0.4532)**	(0.2110,0.4694)**	(0.2349,0.4959)**	(0.2448,0.4620)**

*: Bootstrap MSE
**: Bootstrap güven aralığı

Çizelge 5.9'dan açıktır ki, R'nin SRS'e dayalı dayalı bootstrap *MSE*'leri RSS ve modifikasyonlarına dayalı bootstrap *MSE*'lerinden daha büyüktür. Ayrıca, α =0.05 anlam düzeyinde, RSS ve modifikasyonlarına dayalı bootstrap güven aralıkları, SRS'e dayalı bootstrap güven aralıklarından daha dar olduğu görülmektedir.

RSS ve modifikasyonları kendi aralarında incelendiğinde, R'nin PRSS'e dayalı bootstrap *MSE*'sinin RSS, ERSS ve MRSS'e göre daha küçük olduğu görülmektedir. Veri seti I ve veri seti II'nin $(m_x = m_y = 4,\ r_x = r_y = 6,\ n = m = 16)$ şekil parametresi $p > 6$ olduğundan veri setleri çarpıktır (Çizelge 5.8). PRSS yöntemi çarpık dağılım varsayımı altında SRS ve RSS'e göre daha etkin olabildiğinden elde edilen sonuçlar teori ile uyum göstermektedir. Ayrıca PRSS'yöntemine dayalı bootstrap güven aralıkları daha dardır.

ML ve MML yöntemlerine dayalı olarak elde bootstrap *MSE*'ler karşılaştırıldığında SRS yöntemi dışında MML'e dayalı bootstrap *MSE*'lerin daha büyük olduğu görülmektedir. Bootstrap güven aralıkları incelendiğinde ise ML yöntemine dayalı olarak elde edilen güven aralıklarının MML yöntemine dayalı olarak elde edilen güven aralıklarından daha dar olduğu görülmektedir.

Bölüm 5.1'de olduğu gibi, $P(X < Y)$ olasılığı farklı örnekleme yöntemleri ve tahmin yöntemlerine göre 0.34 ile 0.39 arasında değer almaktadır. Bu durum, tekli karbon fiberlerin 20mm'lik mastar boyundaki dayanıklılığının 50mm'lik mastar boyundaki dayanıklılığından daha yüksek olduğunu göstermektedir.

5.3 *R*'nin Sansürlü Gözlem Durumunda Tahmini

Sistem güvenilirliği *R*'yi sansürlü gözlem durumunda tahmin edebilmek için çizelge 5.3 ve çizelge 5.4'de verilen SRS ve RSS'e dayalı tekli karbon fiberlerin 20 mm ve 50 mm lik mastar boyundaki dayanıklılığı verisi kullanılmıştır.

Bu amaçla, SRS ve RSS'e dayalı olarak elde edilen tekli karbon fiberlerin 20 mm lik mastar boyundaki dayanıklılığı veri setinde 2.90'dan büyük olan gözlemler ve tekli karbon fiberlerin 50 mm lik mastar boyundaki dayanıklılığı veri setinde ise 2.66'dan büyük gözlemler sansürlenmiştir. Sansürlenen gözlemler tam veri setinin yaklaşık %19'una tekabül etmektedir. Bu durumda, *R*'nin SRS ve RSS'e dayalı ML ve MML tahmin değerleri çizelge 5.10'da verilmiştir.

Çizelge 5.10 Sistem güvenilirliğinin II. tip sağdan %19 oranında sansürlenmiş veri için ML ve MML tahmin değerleri

$\hat{R}_{ML,SRS}$	$\hat{R}_{MML,SRS}$	$\hat{R}_{ML,RSS}$	$\hat{R}_{MML,RSS}$
0.3485	0.3486	0.3644	0.3627
(0.0884)*	(0.0819)*	(0.0573)*	(0.0674)*
(0.1946,0.5317)**	(0.2065,0.5270)**	(0.2520,0.4823)**	(0.2424,0.5013)**

*: Bootstrap *MSE*
**: Bootstrap güven aralığı

Çizelge 5.10'dan açıktır ki, RSS'e dayalı tahmin edicilerin bootstrap *MSE*'leri, SRS'e dayalı tahmin edicilerin bootstrap *MSE*'sinden daha küçüktür. RSS'e dayalı bootstrap güven aralığı uzunlukları SRS'e dayalı bootstrap güven aralıklarının uzunluğundan daha dardır. Ayrıca, SRS yöntemi kullanılarak elde edilen ML tahmin değerlerinin bootstrap *MSE*'leri, MML tahmin değerlerinin bootstrap *MSE*'lerinden daha büyüktür. Ancak, RSS yöntemi kullanılarak elde edilen ML tahmin değerlerinin bootstrap *MSE*'leri, MML tahmin değerlerinin bootstrap *MSE*'lerinden daha küçüktür.

6. SONUÇ

Stres dayanıklılık modelinde sistem güvenilirliği R'nin tahmini literatürde yaygın olarak ele alınan bir problemdir. Stres ve dayanıklılığın dağılımının farklı durumları için sistem güvenilirliğinin tahmin edildiği birçok çalışma mevcuttur, bkz. Kotz vd. (2003). Ancak bu çalışmaların ortak özelliği stres ve dayanıklılığa ilişkin örneklemin SRS yöntemine dayalı olarak elde edilmesidir.

McIntre (1952) tarafından önerilen RSS yöntemi, SRS yönteminin makul ve etkin bir alternatifidir. Bu yöntem, örneklem birimlerinin elde edilmesinin zor ve maliyetinin yüksek; ancak uzman görüşü, yardımcı bir değişken veya görsel karşılaştırmalar yapılarak ilgilenilen değişkene göre sıralamanın kolay olduğu durumda kullanılır. İstatistiğin birçok alanında kullanılan (çevre istatistikleri, kalite kontrol, güvenilirliği vb.) RSS yöntemi son yıllarda sistem güvenilirliği tahmini çalışmalarında da kendine yer bulmaktadır.

Bu tez çalışmasında, sistem güvenilirliği stres ve dayanıklılığın Weibull dağılımında geldiği varsayımı altında RSS'e dayalı olarak tahmin edilmiştir. Bu amaçla bölüm 2'de R'nin SRS ve RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiş ve Monte-Carlo simülasyon çalışması ile etkinlikleri karşılaştırılmıştır. Çizelge 2.1'de verilen simülasyon sonuçlarından açıktır ki, RSS döngü sayısı ve küme çapı ne olursa olsun SRS daha etkin bir yöntemdir. ML ve MML tahmin edici yöntemleri ise SRS altında hemen hemen aynı etkinliği sahiptir; ancak RSS'e dayalı tahmin ediciler incelendiğinde ML tahmin edicileri MML tahmin edicilerinden daha etkindir. Ayrıca bu bölümde, R'nin SRS ve RSS'e dayalı ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımı bulunmuş ve asimptotik dağılım kullanılarak asimptotik güven aralıkları hesaplanmıştır. Çizelge 2.2'de RSS'e dayalı asimptotik güven aralıklarının SRS'e dayalı asimptotik güven aralıklarından her durumda (şekil ve ölçek parametrelerinin değerleri, döngü ve küme sayısı vb.) daha dar olduğu görülmüştür.

Bölüm 3'de RSS yönteminin ERSS, MRSS ve PRSS gibi modifikasyonları kullanılarak R'nin ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu modifikasyonların kullanılmasının nedeni daha az sıralı istatistik kullanılarak sıralama hatalarını azaltmak ve böylelikle etkinliği arttırmaktır. Elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri Monte-Carlo simülasyon çalışması ile SRS'e dayalı tahmin ediciler ile karşılaştırılmıştır. RSS ve modifikasyonlarının SRS'den daha etkin sonuçlar verdiği görülmüştür. Eğer R'nin tahmin edicilerinde istenen özellik etkinlik ise RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicilerinin kullanılması gerektiği sonucuna varılmıştır. Diğer taraftan, eğer sıralama hatalarından kaçınılmak isteniyorsa ERSS, MRSS ve PRSS'e dayalı tahmin ediciler tercih edilmesi gerekmektedir.

Bölüm 4'de II. tip sağdan sansürlü gözlem durumunda R'nin SRS ve RSS'e dayalı ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Yapılan simülasyonlar sonucunda en etkin tahmin edicinin RSS'e dayalı ML tahmin edicisi olduğu görülmüştür. Bunu RSS'e dayalı MML tahmin edicisi takip etmektedir. Ayrıca, SRS'e dayalı tahmin edicilerin etkinliğinin en az olduğu görülmektedir. R'nin RSS'e dayalı tahmin edicileri karşılaştırıldığında eğer ölçek parametreleri birbirine eşit değilse tercih edilmesi gereken tahmin edici ML olmalıdır. Eğer tahmin edicilerin analitik ifadeleri elde edilmek isteniyorsa, ölçek parametreleri birbirine eşit ve küme çapları küçük ve orta ($m_x = m_y$ =6 veya 8) ise kullanılması gereken tahmin edici MML olmalıdır.

Tezin uygulama bölümünde, literatürden alınan gerçek veri seti kullanılarak önerilen yöntemlere uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar simülasyon çalışmaları ile paralellik göstermektedir.

Bu tez çalışmasının devamı olarak, RSS yönteminde karşılaşılabilecek sıralama hataları (imperfect ranking) Dell ve Clutter (1972) ve Bohn ve Wolfe (1994) tarafından önerilen yöntemlerle incelenecektir.

Tezin uygulama bölümde değinilmiş olsa da RSS'e dayalı bootstrap güven aralıkları teorik alt yapısı ile daha geniş bir şekilde ele alınacaktır. Bu çalışmada kullanılan

bootstrap-p yöntemine alternatif olarak bootstrap-t yöntemi kullanılarak güven aralıkları elde edilecektir.

Stres ve dayanıklılığın dağılımının literatürdeki alternatif dağılımlaradan geldiği varsayımı altında sistem güvenilirliği R tahmin edilecektir.

RSS yönteminin literatürdeki farklı modifikasyonlarına dayalı olarak sistem güvenilirliği R tahmin edilecetir.

Bu çalışmada, stres dayanıklılık modelinde sistem güvenilirliğinin tahmininde alternatif olarak önerilen RSS yöntemi, regresyon ve ANOVA gibi farklı modellere de uygulanacaktır.

KAYNAKLAR

Abu-Dayyeh, W.A., Al-Subh, S.A. and Muttlak, H.A. 2004. Logistic parameters estimation using simple random sampling and ranked set sampling. Applied Mathematics and Computation, 150, 543-554.

Abu-Dayyeh, W. and Al Sawi, E. 2009. Modified inference about the mean of the exponential distribution using moving extreme ranked set sampling. Stat Papers, 50, 249-259.

Abu-Dayyeh, W.A., Assrhani, A. and Ibrahim, K. 2013. Estimation of the shape and scale parameters of Pareto distribution using ranked set sampling. Statistical Papers, 54(1), 207-225.

Abujiya, M.R. and Muttlak, H.A. 2004. Quality control chart for the mean using double-ranked set sampling. Journal of Applied Statistics, 31(10), 1185–1201.

Adatia, A. 2000. Estimation of parameters of the half-logistic distribution using generalized ranked set sampling. Computational Statistics and Data Analysis, 3, 1-13.

Ahmad, K.E., Fakhry, M.E. and Jaheen, Z.F. 1997. Empirical Bayes estimation of $P(Y<X)$ and characterization of Burr-type X model. J. Statist. Plan. Inf., 64, 297-308.

Al-Nasser, A.D. 2007. L ranked set sampling: A generalization procedure for robust visual sampling, Communications in Statistics-Simulation and Computation, 36, 33-43.

Al-Omari, A.I. and Jaber, K.H. 2008. Percentile double ranked set sampling. Journal of Mathematics and Statistics, 4(1), 60-64.

Al-Sabah, W.S. 2010. Cumulative sum statistical control charts using ranked set sampling data, Pakistan Journal of Statistics. 26(2), 365–378.

Al-Saleh, M.F. and Al-Kadiri, M.A. 2000. Double ranked set sampling. Statistics and Probability Letters, 48(2), 205-212.

Al-Saleh, M.F. and Al-Hadrami, S.A. 2003a. Parametric estimation for the location parameter for symmetric distributions using moving extremes ranked set sampling with application to trees data, Environmetrics, 14, 651-664.

Al-Saleh, M.F. and Al-Hadrami, S.A. 2003b. Estimation of the mean of the exponential distribution using moving extremes ranked set sampling, 44(3), 367-382.

Asgharzadeh, A. 2009. Approximate MLE for the scaled generalized exponential distribution under progressive Type II censoring, Journal of the Korean Statistical Society, 38, 223–229.

Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M.Z. 2011. Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples. SORT, 35(2), 103-124.

Awad, A.M. and Gharraf, M.K. 1986. Estimation of $P(Y<X)$ in the Burr case: a comparative study. Commun. Statist. - Simul. Comp., 15, 389-403.

Azzalini, A. and Chiogna, M. 2004. Some results on the stress–strength model for skew-normal variates. Metron, 62(3), 315-326.

Badar, M.G. and Priest, A.M. 1982. Statistical aspects of fiber and bundle strength in hybrid composites. In Progress in Science and Engineering Composited, Hayashi, T., Kawata, K. and Umekawa, S., Eds., ICCM-IV, 1129-1139, Tokyo.

Barnett, V.D. 1966. Evaluation of the maximum-likelihood estimator where the likelihood equation has multiple roots, Biometrika, 151-165.

Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. 2000. Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications. Birkauser, Boston.

Balakrishnan, N. and Kundu, D. 2013. Hybrid censoring: Models, inferential results and applications. Computational Statistics & Data Analysis, 57,166-209.

Balakrishnan, N. and Zhu, X. 2014. On the existence and uniqueness of the maximum likelihood estimates of the parameters of Birnbaum-Saunders distribution based on Type-I, Type-II and hybrid censored samples. Statistics, 48(5), 1012-1032.

Beg, M. A. and Singh, N. 1979. Estimation of $P(Y<X)$ for the Pareto distribution. IEEE Trans. Reliab., 28, 411-414.

Beg, M. A. 1980a. On the estimation of $P(Y<X)$ for the two-parameter exponential distribution. Metrika, 27, 29-34.

Beg, M. A. 1980b. Estimation of $P(Y<X)$ for exponential family. IEEE Trans. Reliab., 29, 158-159.

Bhattacharyya, G.K. 1985. The asymptotics of maximum likelihood and related estimators based on type II censored data, J. Amer. Statist. Assoc. 80, 398-404.

Bhoj, D.S. 1997. Estimation of parameters of the Extreme Value distribution using ranked set sampling. Communications in Statistics: Theory and Methods, 26(3), 653-667.

Birnbaum, Z.W. 1956. On a use of Mann-Whitney statistics. Proc. Third Berkeley Symp. in Math. Statist. Probab., 1, 13-17.

Birnbaum, Z.W. and McCarty, B.C. 1958. A distribution-free upper confidence bounds for $P(Y<X)$ based on independent samples of X and Y. Ann. Math. Statist, 29, 558-562.

Bohn, L.L. and Wolfe, D.A. 1994. The effect of imperfect judgment rankings on properties of procedures based on the ranked set samples analog of the Mann-Whitney-Wilcoxon statistic. Journal of the American Statistical Association, 89(425), 168-176.

Casella, G. and Berger, R.L. 2002. Statistical Inference, Duxbury Thomson Learning, Duxbury, USA.

Chen, Z., Bai, Z.D. and Sinha, B.K. 2004. Ranked Set Sampling: Theory and Applications, Springer, New York, NY, USA.

Chen, W., Xie, M. and Wu, M. 2013. Parametric estimation for the scale parameter for scale distributions using moving extremes ranked set sampling. Statistical and Probability Letters, 83, 2060-2066.

Childs, A., Chandrasekar, B., Balakrishnan, N., and Kundu, D. 2003. Exact likelihood inference based on Type-I and Type-II hybrid censored samples from the exponential distribution. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 55, 319-330.

Church, J.D. and Harris, B. 1970. The estimation of reliability from stress-strength relationship. Technometrics, 12, 49-54.

Cohen, A.C. 1965. Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and censored samples. Technometrics, 7, 579-588.

Cohen, A.C. 1975. Multi-censored sampling in the three-parameter Weibull distribution. Technometrics, 17, 347-351.

Cohen, A.C. 1991. Truncated and Censored Samples (Statistics, a Series of Textbooks and Monographs) Marcel Dekker.

Constantine, K., Karson, M. and Tse, S.K. 1986. Estimators of $P(Y<X)$ in the gamma case. Commun. Statist. - Simul. Comput, 15, 365-388.

David, H.A. and Levine, D.N. 1972. Ranked set sampling in the presence of judgment error. Biometrics, 28, 553–555.

Dell, T.R. and Clutter, J.L. 1972. Ranked set sampling theory with order statistics background. Biometrics, 28, 545–553.

Diaz-Frances, E. and Montoya, J.A. 2013. The simplicity of likelihood based on inferences for $P(X < Y)$ and for the ratio of means in the exponential model. Stat Papers, 54, 499-522.

Dong, X., Cui, L. and Liu, F. 2012. A further study on reliable life estimation under ranked set sampling, Communications in Statistics – Theory and Methods, 41, 3888-3902.

Dong, X., Zhang, L. and Li, F. 2013. Estimation of reliability for exponential distributions using ranked set sampling with unequal samples. Quality Technology & Quantitative Management, 10(3), 319-328.

Downton, F. 1973. On the estimation of *Pr(Y<X)* in the normal case. Technometrics,15, 551-558.

El-Neweihi, E. and Sinha, B.K. 2000. Reliability estimation based on ranked set sampling. Communications in Statistics – Theory and Methods, 29(7), 1583-1595.

Elmahdy, E.E. 2015. A new approach for Weibull modeling for reliability life data analysis. Applied Mathematics and Computation, 250, 708-720.

Genç, A.İ. 2013. Estimation of *P(X>Y)* with Topp-Leone distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 83(2), 326-339.

Ghitany, M.E. 2005. On reliability estimation based on ranked set sampling, Communications in Statistics – Theory and Methods, 34(5), 1213-1216.

Ghitany, M.E., Al-Mutairi, D.K. and Aboukhamseen, S.M. 2015. Estimation of the reliability of a stress-strength system from power Lindley Distributions. Communications in Statistics – Simulation and Computation, 44(1), 118-136.

Govindarajulu, Z. 1967. Two sided confidence limits for *P(X>Y)* based on normal samples of X and Y. Sankhya: The Indian Journal of Statistics, 29, 35-40.

Gupta, C.G. and Brown, N. 2001. Reliability studies of the skew-normal distribution and its application to a strength-stress model. Commun. Statist. – Theory Meth., 30, 2427-2445.

Guttman, I., Johnson, R.A., Bhattacharyya, G.K. and Reiser, B. 1988. Confidence limits for stress-strength models with explanatory variables. Technometrics, 30, 161-168.

Halls, L.K. and Dell, T.R. 1966. Trial of ranked-set sampling for forage yields. Forest Science, 12, 22–26.

Halperin, M., Gilbert, P.R. and Lachin, J.M. 1987. Distribution-free confidence intervals for $\Pr(X_1 < X_2)$. Biometrics, 43, 71-80.

Halperin, M., Hamdy, M.I. and Thall, P.F. 1989. Distribution-free confidence intervals for a parameter of Wilcoxon-Mann-Whitney type for ordered categories and progressive censoring. Biometrics, 45, 509-521.

Helu, A., Abu-Salih M. and Alkam, O. 2010. Bayes estimation of Weibull distribution parameters using ranked set sampling, Communications in Statistics: Theory and Methods, 39, 2533-2551.

Hoeffding, W. 1953. On the distribution of the expected value of order statistics, Annals Math. Stat., 24, 93-100.

Hossain, S.S. and Muttlak, H.A. 2006. Hypothesis tests on the scale parameter using median ranked set sampling, Statistica, 66(4), 413-433.

Ismail, R., Jeyaratnam, S. and Panchapakesan, S. 1986. Estimation of $P(X>Y)$ for gamma distributions. J. Statist. Comput. Simul, 26, 253-267.

Ivshin, V.V. and Lumelskii, Y. 1995. Statistical Estimation Problems in Stress-Strength Models. Perm University Press, Perm, Russia.

Iwase, K. 1987. On UMVU estimators of $Pr(Y<X)$ in the two-parameter exponential case. Mem. Fac. Hiroshima Univ., 9, 21-24.

Joarder, A., Krishna, H. and Kundu, D. 2011. Inferences on Weibull parameters with conventional type-I censoring. Computational Statistics & Data Analysis, 55, 1-11.

Johnstone, M.A. 1983. Bayesian estimation of reliability in the stress-strength context. J. Washington Acad. of Sci., 73, 140-150.

Kaur, A., Patil, G.P., Sinha, A.K. and Taillie, C. 1995. Ranked set sampling: an annotated bibliography. Environmental and Ecological Statistical, 2(25), 25–54.

Kelley, G.D., Kelley, J.A. and Schucany, W.R. 1976. Efficient estimation of $P(Y<X)$ in the exponential case. Technometrics, 18, 359-360.

Kim, C. and Han, K. 2010. Estimation of the scale parameter of the half-logistic distribution under progressively type II censored sample, Stat Papers, 51, 375-387.

Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. 2003. The Stress-Strength Model and Its Generalizations. World Scientific Press, Singapore.

Krishna, H. and Kumar, K. 2011. Reliability estimation in Lindley distribution with progressively type II right censored sample. Mathematics and Computers in Simulation, 82, 281-294.

Krishna, H. and Kumar, K. 2013. Reliability estimation in generalized inverted exponential distribution with progressively type II censored sample. J Stat. Comput. Simul., 83, 1007-1019.

Krishna, H. and Malik, M. 2012. Reliability estimation in Mxwell distribution with progressively Type-II censored data. J Stat. Comput. Simul., 82, 623-641.

Kumar, K., Krishna, H. and Garg, R. 2014. Estimation of $P(Y < X)$ in Lindley distribution using progressively first failure censoring. Int. J. Syst. Assur. Eng. Manag., DOI: 10.1007/s13198-014-0267-9.

Kundu, D. and Gupta, R. D. 2006. Estimation of *P(Y<X)* for Weibull Distributions. IEEE Transactions On Reliability, 55(2), 270-280.

Kundu, D. and Raqab, M.Z. 2009. Estimation of *R=P(Y<X)* for three- parameter Weibull Distribution. Statistics and Probability Letters, 79, 1839-1846.

Kvam, P.H. and Samaniego, F.J. 1993. On maximum likelihood estimation based on ranked set sampling with application to reliability. In: Basu, A., ed. Advanced in Reliability, Amsterdam: North-Holland, 215–229.

Kvam, P.H. and Samaniego, F.J. 1994. Nonparametric maximum likelihood estimation based on ranked set sampling. Journal of American Statistical Association, 89, 526–537.

Lam, K., Sinha, B.K. and Wu, Z. 1994. Estimation of parameters in a two-parameter exponential distribution using ranked set sampling, Ann. Inst. Statist. Math. 46(4), 723-736.

Lawless, J.F. 2003. Statistical Models and Methods for Life Time Data, Second Edition, John Wiley & Sons, New Jersey.

Lio, Y.L. and Tsai, T.R. 2012. Estimation of $\delta=P(X<Y)$ for Burr XII distribution based on the progressively first failure-censored samples. J. Appl. Statist., 39(2), 309-322.

McCool, J. I. 1991. Inference on *P(Y<X)* in the Weibull case. Communications in Statistics-Simulation and Computations, 20, 129-148.

McIntyre, G.A. 1952. A method for unbiased selective sampling, using ranked sets. Australian Journal of Agricultural Research, 3, 385–390.

Meeker, W.Q. and Escobar, L. A. 1998, Statistical Methods for Reliability Data, New York: Wiley.

Mokhlis, N.A. 2005. Reliability of a stress-strength model with Burr Type III distributions. Communications in Statistics-Theory and Methods, 34, 1943-1957.

Muttlak, H.A. 1997. Median ranked set sampling. Journal of Applied Statistical Science, 6(4), 245–255.

Muttlak, H.A. 2003. Modified ranked set sampling methods. Pakistan Journal *of* Statistics, 19(3), 315-323.

Muttlak, H.A. and Al-Sabah, W. 2003. Statistical quality control based on pair and selected ranked set sampling, Pakistan Journal of Statistics, 19(1), 107–128.

Muttlak, H.A. and Abu-Dayyeh, W. 2004. Weighted modified ranked set sampling methods. Applied Mathematics and Computation, 151(3), 645-657.

Muttlak, H.A., Abu-Dayyeh, W. A., Saleh, M. F. and Al-Sawi, E. 2010. Estimating $P(Y<X)$ using ranked set sampling in case of the exponential distribution. Communications in Statistics: Theory and Methods, 39, 1855-1868.

Nelson, W. 1982. Applied Life Data Analysis, John Wiley & Sons, New Jersey.

Nelson, W. 1990. Accelerated Testing, John Wiley & Sons, New Jersey.

Omar, A. and Ibrahim, K. 2013. Estimation of the shape and scale parameters of the Pareto distribution using extreme ranked set sampling, Pak. J. Statist., 29(1), 33-47.

Owen, D.B., Craswell, K.J. and Hanson, D.L. 1964. Nonparametric upper confidence bounds for $P(Y<X)$ and confidence limits for $P(Y<X)$ when X and Y are normal. J. Amer. Statist. Assoc, 59, 906-924.

Panahi, H. and Sayyareh, A. 2014. Parameter estimation and prediction of order statistics for the Burr Type XII distribution with Type-II censoring. Journal of Applied Statistics,41(1), 215-232.

Patil, G.P., Sinha, A.K. and Taille C. 1993. Relative precision of ranked set sampling: a comparison with the regression estimator. Environmetrics, 4, 399–412.

Pham, T. and Almhana, J. 1995. The generalized gamma distribution: its hazard rate and stress-strength model. IEEE Trans. Reliab., 44, 392-397.

Puthenpura, S. and Sinha, N.K. 1986. Modified maximum likelihood method for the robust estimation of system parameters from very noisy data, Automatica, 22, 231–235.

Raqab, M.Z. and Kundu, D. Comparison of different estimators of $P(Y<X)$ for a scaled Burr Type X distribution , Commun. Stat. Simul. Comput. 34, 465-483.

Raqab, M.Z., Asgharzadeh, A. and Valiollahi, R. 2010. Prediction for Pareto distribution based on progressively Type-II censored samples. Computational Statistics and Data Analysis, 54, 1732-1743.

Reiser, B. and Guttman, I. 1986. Statistical inference for *Pr(Y<X):* the normal case. Technometrics, 28, 253-257.

Rezaei, S., Tahmasbi, R. and Mahmoodi, M. 2010. Estimation of *P(Y<X)* for generalized Pareto distribution. Journal of Statistical Planning and Inference,140, 480–494.

Salazar, R.D. and Sinha, A.K. 1997. Control chart X bar based on ranked set sampling. Comunicacion Tecica 1, 1–97.

Samawi, H.M., Abu-Dayyeh, W. and Ahmed, S. 1996. Extreme ranked set sampling. The Biometrical Journal, 30, 577-586.

Samawi, H.M. 2002. On double extreme rank set sample with application to regression estimator. Metron-International Journal of Statistics, 1(2), 53-66.

Samawi, H.M. and Tawalbeh, E.M. 2002. Double median ranked set sample: Comparison to other double ranked samples for mean and ratio estimators. Journal of Modern Applied Statistical Methods, 1, 428-442.

Saraçoğlu, B., Kınacı, İ. and Kundu, D. 2012. On estimation of $R = P(Y < X)$ for exponential distribution under progressive type-II censoring, J. Statist. Comput. and Simulat., 82(5), 729-744.

Sathe, Y.S. and Shah, S.P. 1981. On estimating *P(X>Y)* for the exponential distribution. Commun. Statist.- Theory Meth., 10, 39-47.

Sengupta, S. and Mukhuti, S. 2008a. Unbiased estimation of *P(X>Y)* for exponential populations using order statistics with application in ranked set sampling. Communications in Statistics: Theory and Methods, 37, 898-916.

Sengupta, S. and Mukhuti, S. 2008b. Unbiased estimation of $P(X > Y)$ using ranked set sample data, Statistics: J. Theor. Appl. Stat., 42(3), 223-230.

Shaibu, A.–B. and Muttlak, H.A. 2002. A comparison of the maximum likelihood estimators under ranked set sampling some of its modifications, Applied Mathematics and Computations, 129, 441-453.

Shaibu, A.–B. and Muttlak, H.A. 2004. Estimating the parameters of the normal, exponential and gamma distributions using median and extreme ranked set samples, Statistica, 64(1), 75-98.

Sinha, B.K., Sinha, B.K. and Purkayastha, S. 1996. On some aspects of ranked set sampling for estimation of normal and exponential parameters. Statistics and Decisions, 14, 223–240.

Smith, R.L. 1985. Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases, Biometrika, 72, 67–90.

Stokes, S.L. 1977. Ranked set sampling with concomitant variables. Communications in Statistics, 6, 1207–1211.

Strzalkowska-Kominiak, E. and Mahdizadeh, M. 2014. On the Kaplan–Meier estimator based on ranked set samples. J. Statist. Comput. Simulat., 84(12), 2577-2591.

Surles, J.G. and Padgett, W.J. 1998. Inference for $P(Y<X)$ in the Burr type X model. J. Appl. Statist. Sci., 7, 225-238.

Surles, J.G. and Padgett, W.J. 2001. Inference for reliability and stress-strength for a scaled Burr type X distribution. Lifetime Data Analysis, 7, 187-200.

Şenoğlu, B., Acitaş, Ş. and Kasap, P. 2012. Robust 2^k factorial designs: non-normal symmetric distributions, Pak. J. Statist., 28(1), 93-114.

Takahasi, K. 1969. On the estimation of the population mean based on ordered samples from an equicorrelated multivariate distribution. Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 21, 249-255.

Takahasi, K. and Wakimoto, K. 1968. On unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 20(1), 1–31.

Tiku, M.L. 1967. Estimating the mean and standard deviation from a censored normal sample, Biometrika, 54, pp. 155–165.

Tiku, M.L. 1968, Estimating the parameters of log-normal distribution from a censored sample, J. Amer. Stat. Assoc., 63, 134-140.

Tiku, M.L. and Akkaya, A.D. 2004. Robust estimation and Hypothesis testing. New Age International (P) Limited Publishers

Tiku, M.L. and Suresh, R.P. 1992. A new method of estimation for location and scale Parameters, J. Statistical Planning and Inference, 30, 281-292.

Tong, H. 1974. A note on the estimation of $P(Y<X)$ in the exponential case. Technometrics, 16, 625. Errata: Technometrics, 17, 395.

Voinov, V.G. 1984. On unbiased estimation of $P(Y<X)$ in the normal case. Zapiski Nauchn. Sem. LOMI, 136, 5 -12 (in Russian).

Valiollahi, R. Asgharzadeh, A. and Raqab, M.Z. 2013. Estimation of $P(Y < X)$ for Weibull Distribution under Progressive Type-II Censoring, Communications in Statistics: Theory and Methods, 42(24), 4476-4498.

Vaughan, D.C. 1992. On the Tiku–Suresh method of estimation, Communications in Statistics: Theory and Methods, 21, 391–404.

Vaughan, D.C. 2002. The generalized secant hyperbolic distribution and its properties, Communications in Statistics: Theory and Methods, 31, 219–238.

Vaughan, D.C. and Tiku, M.L. 2000. Estimation and hypothesis testing for a non-normal bivariate distribution and applications, J. Math. Comput. Modeling, 32, 53-67.

Weibull, W. 1939. A statistical theory of the strength of materials. Ingeniors Vetenskaps Akademien, Handlinger, 131(3), 45-55.

Wolfe, D.A. 2012. Ranked Set Sampling: Its Relevance and Impact on Statistical Inference. ISRN Probability and Statistics, 2012, 1-32.

Wong, A. 2012. Interval estimation of $P(Y<X)$ for generalized Pareto distribution. Journal of Statistical Planning and Inference, 142, 601–607.

Woodward, W.A. and Kelley, G.D. 1977. Minimum variance unbiased estimation of $P(X<Y)$ in the normal case. Technometrics, 19, 95-98.

Yu, P.L.H. and Lam, K. 1997. Regression estimator in ranked set sampling. Biometrics, 53(3), 1070–1080.

Yu, P.L.H. and Tam, C.Y.C. 2002. Ranked set sampling in the presence of censored data, Environmetrics, 13, 379-396.

EKLER

EK 1 Sistem Güvenilirliğinin SRS, RSS, ERSS, MRSS ve PRSS'e Dayalı ML ve MML Tahmin Edicilerinin Monte-Carlo Simülasyon Çalışması ile Elde Edildiği MATLAB Programı

EK 2 Sistem Güvenilirliğinin Sansürlü SRS ve RSS Verisine Dayalı ML ve MML Tahmin Edicilerinin Monte-Carlo Simülasyon Çalışması ile Elde Edildiği MATLAB Program

EK 1 Sistem Güvenilirliğinin SRS, RSS, ERSS, MRSS ve PRSS'e Dayalı ML ve MML Tahmin Edicilerinin Monte-Carlo Simülasyon Çalışması ile Elde Edildiği MATLAB Programı

```
clc
clear all
close all
rng('shuffle');
k1=4; k2=4; r=4; n=k1*r; m=k2*r;
s=fix(100000/min(n,m));
sekil=1.5; olcek1=1; olcek2=1; p=0.3; q=1-p;
a1=round(p*(k1+1)); b1=round(q*(k1+1)); a2=round(p*(k2+1)); b2=round(q*(k2+1));
if a1<1
   a1=1;
   b1=k1;
end
if a2<1
   a2=1;
   b2=k2;
end
for i=1:k1
     t1(i)=log(-1*log(1-i/(k1+1)));
end
  tn1=t1(1);   tnk=t1(k1);
for i=1:k2
     t2(i)=log(-1*log(1-i/(k2+1)));
end
  tm1=t2(1);   tmk=t2(k2);

%SRS YÖNTEMİ İLE ÖRNEKLEM OLUŞTURMA
  for l=1:s
   for i=1:n
       U=unifrnd(0,1);
       x(i,l)=((-log(1-U))*olcek1)^(1/sekil);
   end
   for i=1:m
       U=unifrnd(0,1);
       y(i,l)=((-log(1-U))*olcek2)^(1/sekil);
   end
 %weibull dağılımında üretilen SRS verisi
   xsrs(:,l)=x(:,l); ysrs(:,l)=y(:,l);
%weibull'dan ext-value geçiş
   X(:,l)=log(x(:,l)); Y(:,l)=log(y(:,l));
   xor(:,l)=sort(X(:,l));  yor(:,l)=sort(Y(:,l));
%RSS YÖNTEMİ İLE ÖRNEKLEM OLUŞTURMA
for c=1:r
   for j=1:k1
         for i=1:k1
            U=unifrnd(0,1);
            A1(i,j,c,l)=((-log(1-U))*olcek1)^(1/sekil);
         end
      end
end
for c=1:r
      for j=1:k2
         for i=1:k2
            U=unifrnd(0,1);
```

```
            A2(i,j,c,l)=((-log(1-U))*olcek2)^(1/sekil);
          end
        end
end
for c=1:r
        for i=1:k1
          B1(i,:,c,l)=sort(A1(i,:,c,l));
        end
end
for c=1:r
        for i=1:k2
          B2(i,:,c,l)=sort(A2(i,:,c,l));
        end
end
     C1(:,:,:,l)=log(A1(:,:,:,l));    C2(:,:,:,l)=log(A2(:,:,:,l));
for c=1:r
        for i=1:k1
          F1(i,:,c,l)=sort(C1(i,:,c,l));
        end
end
for c=1:r
        for i=1:k2
          F2(i,:,c,l)=sort(C2(i,:,c,l));
        end
end
for c=1:r
         E1(:,c,l)=diag(B1(:,:,c,l));
end
for c=1:r
         E2(:,c,l)=diag(B2(:,:,c,l));
end
for c=1:r
         G1(:,c,l)=diag(F1(:,:,c,l));
end
for c=1:r
         G2(:,c,l)=diag(F2(:,:,c,l));
end
         %rss ml
xrss(:,:,l)=E1(:,:,l);   yrss(:,:,l)=E2(:,:,l);   xr(:,:,l)=E1(:,:,l)';   yr(:,:,l)=E2(:,:,l)';
         %rss mml
urss(:,:,l)=sort(G1(:,:,l)',2);  vrss(:,:,l)=sort(G2(:,:,l)',2);
for i=1:k1
        tn(i,l)=log(-1*log(1-i/(k1+1)));
end
for i=1:k2
        tm(i,l)=log(-1*log(1-i/(k2+1)));
end
   oran(l)=olcek2/(olcek1+olcek2);

    %MML based on RSS
    %alpha1, beta1, alpha2, beta2, büyükdelta, delta, m, D, K, B, C nın %hesaplanması
    beta1_n(:,l)=(-1)*(((1-exp(tn(:,l))).*(exp(tn(:,l)).*exp(-exp(tn(:,l)))).*(1-exp(-exp(tn(:,l))))-
(exp(tn(:,l)).*exp(-exp(tn(:,l)))).^2)./(1-exp(-exp(tn(:,l)))).^2);
    alpha1_n(:,l)=(exp(tn(:,l)).*exp(-exp(tn(:,l)))./(1-exp(-exp(tn(:,l))))+tn(:,l).*beta1_n(:,l);
    beta2_n(:,l)=exp(tn(:,l));    alpha2_n(:,l)=exp(tn(:,l))-tn(:,l).*(exp(tn(:,l)));
    beta3_n(:,l)=exp(tn(:,l));    alpha3_n(:,l)=1-exp(tn(:,l))+tn(:,l).*exp(tn(:,l));
    beta1_m(:,l)=(-1)*(((1-exp(tm(:,l))).*(exp(tm(:,l)).*exp(-exp(tm(:,l)))).*(1-exp(-exp(tm(:,l))))-
(exp(tm(:,l)).*exp(-exp(tm(:,l)))).^2)./(1-exp(-exp(tm(:,l)))).^2);
```

```
   alpha1_m(:,l)=(exp(tm(:,l)).*exp(-exp(tm(:,l)))./(1-exp(-exp(tm(:,l))))+tm(:,l).*beta1_m(:,l);
   beta2_m(:,l)=exp(tm(:,l));
   alpha2_m(:,l)=exp(tm(:,l))-tm(:,l).*(exp(tm(:,l)));
   beta3_m(:,l)=exp(tm(:,l));
   alpha3_m(:,l)=1-exp(tm(:,l))+tm(:,l).*exp(tm(:,l));
   for i=1:k1
      hn(i,l)=i-1;
   end
   for i=1:k1
      gn(i,l)=k1-i;
   end
   for j=1:k2
      hm(j,l)=j-1;
   end
   for j=1:k2
      gm(j,l)=k2-j;
   end
     delta_n(:,l)=hn(:,l).*beta1_n(:,l)+gn(:,l).*beta2_n(:,l)+beta3_n(:,l);
     bdelta_n(:,l)=hn(:,l).*alpha1_n(:,l)-gn(:,l).*alpha2_n(:,l)+alpha3_n(:,l);
     delta_m(:,l)=hm(:,l).*beta1_m(:,l)+gm(:,l).*beta2_m(:,l)+beta3_m(:,l);
     bdelta_m(:,l)=hm(:,l).*alpha1_m(:,l)-gm(:,l).*alpha2_m(:,l)+alpha3_m(:,l);
     m1_n(l)=r*sum(delta_n(:,l));      m2_m(l)=r*sum(delta_m(:,l));
     D1(l)=r*sum(bdelta_n(:,l))./m1_n(l);    D2(l)=r*sum(bdelta_m(:,l))./m2_m(l);
     K1(l)=(sum(urss(:,:,l)*delta_n(:,l))./(m1_n(l));      K2(l)=sum(vrss(:,:,l)*delta_m(:,l))./(m2_m(l));
     A(l)=n+m;
     B(l)=sum((urss(:,:,l)-K1(l))*bdelta_n(:,l))+sum((vrss(:,:,l)-K2(l))*bdelta_m(:,l));
     C(l)=sum(((urss(:,:,l)-K1(l)).^2)*delta_n(:,l))+sum(((vrss(:,:,l)-K2(l)).^2)*delta_m(:,l));

  sigma(l)=(-B(l)+sqrt(B(l).^2+4*C(l).*(A(l))))./(2*(n+m));
  mu1(l)=K1(l)-D1(l).*sigma(l);  mu2(l)=K2(l)-D2(l).*sigma(l);
  shapeev(l)=1/sigma(l); teta1(l)=exp(mu1(l).*shapeev(l));  teta2(l)=exp(mu2(l).*shapeev(l));
  R(l)=teta2(l)./(teta1(l)+teta2(l)); biasRrssmml(l)=R(l)-oran(l);

  %RSS'e dayalı ML tahmin edicisi
 for i=1:k1
  cn(i,l)=(factorial(i-1).*factorial(k1-i));
 end
 for j=1:k2
  cm(j,l)=(factorial(j-1).*factorial(k2-j));
 end
 for c=1:r
  for i=1:k1
     is(i,c,l)=i-1;
  end
 end
 for c=1:r
    for i=1:k1
       ns(i,c,l)=k1-i+1;
    end
 end
 for c=1:r
     for j=1:k2
        js(j,c,l)=j-1;
     end
 end
for c=1:r
     for j=1:k2
        ms(j,c,l)=k2-j+1;
```

```
    end
 end
lnLrss=@(g) (-1)*((n+m).*log(g(1))-n*log(g(2))-m*log(g(3))+n*log(factorial(k1))+m*log(factorial(k2))-
r*sum(log(cn(:,l)))-r*sum(log(cm(:,l)))+...
(g(1)-1).*sum(sum(log((xrss(:,:,l))),2))+sum(sum((is(:,:,l).*log(1-exp(-(xrss(:,:,l).^g(1))./g(2)))),2))-
sum(sum((ns(:,:,l).*((xrss(:,:,l).^g(1))./g(2))),2))+...
(g(1)-1).*sum(sum(log((yrss(:,:,l))),2))+sum(sum((js(:,:,l).*log(1-exp(-(yrss(:,:,l).^g(1))./g(3)))),2))-
sum(sum((ms(:,:,l).*((yrss(:,:,l).^g(1))./g(3))),2)));
g0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[gmle,lnLrssval,kokvar] = fminsearch(lnLrss,g0,option);
if kokvar==1;
  mlerss=gmle;
end

%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmlerss(l,:)=mlerss(1);sigma1mlerss(l,:)=mlerss(2);sigma2mlerss(l,:)=mlerss(3);
RmleRSS(l,:)=sigma2mlerss(l,:)/(sigma1mlerss(l,:)+sigma2mlerss(l,:));
biasRrssml(l)=RmleRSS(l)-oran(l);

%ML based on SRS
lnL=@(f) (-1)*((n+m)*log(f(1))+(-n)*log(f(2))+(-m)*log(f(3))+(f(1)-1).*sum(log((xsrs(:,l))))-
sum((xsrs(:,l).^f(1))./f(2))+ (f(1)-1).*sum(log((ysrs(:,l))))-sum((ysrs(:,l).^f(1))./f(3)));
f0=[sekil;olcek1;olcek2];
options=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[f1,LnLval,kokvar2] = fminsearch(lnL,f0,options);
if kokvar2==1;
   mle=f1;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmle(l,:)=mle(1);sigma1mle(l,:)=mle(2);sigma2mle(l,:)=mle(3);
RmleSRS(l,:)=sigma2mle(l,:)/(sigma1mle(l,:)+sigma2mle(l,:));biasRsrsml(l)=RmleSRS(l)-oran(l);

'MML based on SRS';
   for i=1:n
      t1srs(i,l)=log(-1*log(1-i/(n+1)));
   end
   for i=1:m
      t2srs(i,l)=log(-1*log(1-i/(m+1)));
   end
   alpha_n(:,l)=exp(t1srs(:,l))-t1srs(:,l).*(exp(t1srs(:,l)));
   beta_n(:,l)=exp(t1srs(:,l));
   alpha_m(:,l)=exp(t2srs(:,l))-t2srs(:,l).*(exp(t2srs(:,l)));
   beta_m(:,l)=exp(t2srs(:,l));
   m11_n(l)=sum(beta_n(:,l));
   m11_m(l)=sum(beta_m(:,l));
   D1SRS(l)=sum(alpha_n(:,l)-1)./m11_n(l);
   D2SRS(l)=sum(alpha_m(:,l)-1)./m11_m(l);
   K1SRS(l)=sum(beta_n(:,l).*xor(:,l))./m11_n(l);
   K2SRS(l)=sum(beta_m(:,l).*yor(:,l))./m11_m(l);
   ASRS(l)=n+m;
   BSRS(l)=sum((alpha_n(:,l)-1).*(K1SRS(l)-xor(:,l)))+sum((alpha_m(:,l)-1).*(K2SRS(l)-yor(:,l)));
   CSRS(l)=sum((beta_n(:,l)).*(K1SRS(l)-xor(:,l)).^2)+sum((beta_m(:,l)).*(K2SRS(l)-yor(:,l)).^2);

 sigmaSRS(l)=(-BSRS(l)+sqrt(BSRS(l).^2+4*CSRS(l)*(ASRS(l))))./(2*(n+m));
 mu1SRS(l)=K1SRS(l)+D1SRS(l).*sigmaSRS(l);  mu2SRS(l)=K2SRS(l)+D2SRS(l).*sigmaSRS(l);
 shapeevSRS(l)=1/sigmaSRS(l);
 teta1SRS(l)=exp(mu1SRS(l).*shapeevSRS(l));  teta2SRS(l)=exp(mu2SRS(l).*shapeevSRS(l));
```

```
 RSRS(l)=teta2SRS(l)./(teta1SRS(l)+teta2SRS(l));
 biasRsrsmml(l)=RSRS(l)-oran(l);

   %-----PRSS, ERSS ve MRSS yöntemi-----%
 if mod(k1,2)==0 && mod(k2,2)==0
    'Küme boyutu mx ve my çift ise';
     tna=t1(a1);  tnb=t1(b1);  tma=t2(a2);  tmb=t2(b2);
    %PRSS ml ile örneklem oluşturma
    xaprss(:,:,l)=(B1(1:(k1/2),a1,:,l)); xbprss(:,:,l)=(B1((k1/2+1):k1,b1,:,l));
    yaprss(:,:,l)=(B2(1:(k2/2),a2,:,l)); ybprss(:,:,l)=(B2((k2/2+1):k2,b2,:,l));
%ML based od PRSS
lnLprss=@(k) (-1)*((n+m).*log(k(1))-n*log(k(2))-m*log(k(3))+(n/2)*log(factorial(k1)/(factorial(k1-
a1)*factorial(a1-1)))+(n/2)*log(factorial(k1)/(factorial(k1-b1)*factorial(b1-1)))+
(m/2)*log(factorial(k2)/(factorial(k2-a2)*factorial(a2-1)))+(m/2)*log(factorial(k2)/(factorial(k2-
b2)*factorial(b2-1)))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((xaprss(:,:,l))),2))+sum(sum((a1-1)*log(1-exp(-(xaprss(:,:,l).^k(1))./k(2)))))-
sum(sum(((k1-a1+1).*((xaprss(:,:,l).^k(1))./k(2))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((xbprss(:,:,l))),2))+sum(sum((b1-1)*log(1-exp(-(xbprss(:,:,l).^k(1))./k(2)))))-
sum(sum(((k1-b1+1).*((xbprss(:,:,l).^k(1))./k(2))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((yaprss(:,:,l))),2))+sum(sum((a2-1)*log(1-exp(-(yaprss(:,:,l).^k(1))./k(3)))))-
sum(sum(((k2-a2+1).*((yaprss(:,:,l).^k(1))./k(3))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((ybprss(:,:,l))),2))+sum(sum((b2-1)*log(1-exp(-(ybprss(:,:,l).^k(1))./k(3)))))-
sum(sum(((k2-b2+1).*((ybprss(:,:,l).^k(1))./k(3))),2)));
k0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[kmle,lnLprssval,kokvar] = fminsearch(lnLprss,k0,option);
if kokvar==1;
  mleprss=kmle;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmleprss(l,:)=mleprss(1); sigma1mleprss(l,:)=mleprss(2);sigma2mleprss(l,:)=mleprss(3);
RmlePRSS(l,:)=sigma2mleprss(l,:)/(sigma1mleprss(l,:)+sigma2mleprss(l,:));
biasRprssml(l)=RmlePRSS(l)-oran(l);

    %PRSS MML ile örneklem oluşturma%
      xa(:,:,l)=(F1(1:(k1/2),a1,:,l));  xb(:,:,l)=(F1((k1/2+1):k1,b1,:,l));
      ya(:,:,l)=(F2(1:(k2/2),a2,:,l));  yb(:,:,l)=(F2((k2/2+1):k2,b2,:,l));
     if k1==2
      xatop(:,:,l)=[xa(:,:,l) xb(:,:,l)];  sortxatop(:,:,l)=sort(xatop(:,:,l),2);
      xaor(:,:,l)=sortxatop(:,1,l);  xbor(:,:,l)=sortxatop(:,2,l);
     else
        xmmlprss(:,:,l)=[xa(:,:,l)'xb(:,:,l)'];   xmmlprssor(:,:,l)=sort(xmmlprss(:,:,l),2);
        xaor(:,:,l)=xmmlprssor(1:r,1:k1/2,l);  xbor(:,:,l)=xmmlprssor(1:r,k1/2+1:k1,l);
     end
     if k2==2
         yatop(:,:,l)=[ya(:,:,l) yb(:,:,l)];  sortyatop(:,:,l)=sort(yatop(:,:,l),2);
         yaor(:,:,l)=sortyatop(:,1,l);  ybor(:,:,l)=sortyatop(:,2,l);
     else
        ymmlprss(:,:,l)=[ya(:,:,l)'yb(:,:,l)'];  ymmlprssor(:,:,l)=sort(ymmlprss(:,:,l),2);
        yaor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,1:k2/2,l);  ybor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,(k2/2)+1:k2,l);
     end
'MML based on PRSS';
% beta ve alpha ların hesaplanması %1. örneklem için
beta1na_prss=((exp(tna)-1)*evpdf(tna,0,1)*evcdf(tna,0,1)+evpdf(tna,0,1).^2)/(evcdf(tna,0,1).^2);
alpha1na_prss=evpdf(tna,0,1)/evcdf(tna,0,1)+tna*beta1na_prss;
beta2na_prss=exp(tna);  alpha2na_prss=exp(tna)-tna.*exp(tna);
beta3na_prss=exp(tna);  alpha3na_prss=1-exp(tna)+tna.*exp(tna);
beta1nb_prss=((exp(tnb)-1)*evpdf(tnb,0,1)*evcdf(tnb,0,1)+evpdf(tnb,0,1).^2)/(evcdf(tnb,0,1).^2);
```

```
alpha1nb_prss=evpdf(tnb,0,1)/evcdf(tnb,0,1)+tnb*beta1nb_prss;
beta2nb_prss=exp(tnb);  alpha2nb_prss=exp(tnb)-tnb.*exp(tnb);
beta3nb_prss=exp(tnb);  alpha3nb_prss=1-exp(tnb)+tnb.*exp(tnb);
%2. örneklem için
beta1ma_prss=((exp(tma)-1)*evpdf(tma,0,1)*evcdf(tma,0,1)+evpdf(tma,0,1).^2)/(evcdf(tma,0,1).^2);
alpha1ma_prss=evpdf(tma,0,1)/evcdf(tma,0,1)+tma*beta1ma_prss;
beta2ma_prss=exp(tma);  alpha2ma_prss=exp(tma)-tma.*exp(tma);
beta3ma_prss=exp(tma);  alpha3ma_prss=1-exp(tma)+tma.*exp(tma);
beta1mb_prss=((exp(tmb)-1)*evpdf(tmb,0,1)*evcdf(tmb,0,1)+evpdf(tmb,0,1).^2)/(evcdf(tmb,0,1).^2);
alpha1mb_prss=evpdf(tmb,0,1)/evcdf(tmb,0,1)+tmb*beta1mb_prss;
beta2mb_prss=exp(tmb);  alpha2mb_prss=exp(tmb)-tmb.*exp(tmb);
beta3mb_prss=exp(tmb);  alpha3mb_prss=1-exp(tmb)+tmb.*exp(tmb);

%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_prss=(a1-1)*alpha1na_prss-(k1-a1)*alpha2na_prss+alpha3na_prss;
bdelta2n_prss=(b1-1)*alpha1nb_prss-(k1-b1)*alpha2nb_prss+alpha3nb_prss;
delta1n_prss=(a1-1)*beta1na_prss+(k1-a1)*beta2na_prss+beta3na_prss;
delta2n_prss=(b1-1)*beta1nb_prss+(k1-b1)*beta2nb_prss+beta3nb_prss;
bdelta1m_prss=(a2-1)*alpha1ma_prss-(k2-a2)*alpha2ma_prss+alpha3ma_prss;
bdelta2m_prss=(b2-1)*alpha1mb_prss-(k2-b2)*alpha2mb_prss+alpha3mb_prss;
delta1m_prss=(a2-1)*beta1ma_prss+(k2-a2)*beta2ma_prss+beta3ma_prss;
delta2m_prss=(b2-1)*beta1mb_prss+(k2-b2)*beta2mb_prss+beta3mb_prss;
%m D K A B C nin hesaplanması
m1n_prss=r*((k1/2)*(delta1n_prss)+(k1/2)*(delta2n_prss));
m1m_prss=r*((k2/2)*(delta1m_prss)+(k2/2)*(delta2m_prss));
D1_prss=(r*((k1/2)*(bdelta1n_prss)+(k1/2)*(bdelta2n_prss)))/m1n_prss;
D2_prss=(r*((k2/2)*(bdelta1m_prss)+(k2/2)*(bdelta2m_prss)))/m1m_prss;
K1_prss(l)=(sum(sum(delta1n_prss.*xaor(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2n_prss.*xbor(:,:,l)),2))/m1n_prss;
K2_prss(l)=(sum(sum(delta1m_prss.*yaor(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2m_prss.*ybor(:,:,l)),2))/m1m_prss;
A_prss(l)=n+m;
B_prss(l)=sum(sum(bdelta1n_prss.*xaor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2n_prss.*xbor(:,:,l)),2)-
K1_prss(l).*D1_prss.*m1n_prss+...
      sum(sum(bdelta1m_prss.*yaor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2m_prss.*ybor(:,:,l)),2)-
K2_prss(l).*D2_prss.*m1m_prss;
C_prss(l)=(sum(sum(delta1n_prss.*(xaor(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2n_prss.*(xbor(:,:,l).^2)),2))-
(K1_prss(l).^2).*m1n_prss+...
      (sum(sum(delta1m_prss.*(yaor(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2m_prss.*(ybor(:,:,l).^2)),2))-
(K2_prss(l).^2).*m1m_prss;

sigma_prss(l)=(-B_prss(l)+sqrt(B_prss(l).^2+4*C_prss(l).*(A_prss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_prss(l)=K1_prss(l)-D1_prss.*sigma_prss(l);mu2_prss(l)=K2_prss(l)-D2_prss.*sigma_prss(l);
shapeev_prss(l)=1/sigma_prss(l);
teta1_prss(l)=exp(mu1_prss(l).*shapeev_prss(l));teta2_prss(l)=exp(mu2_prss(l).*shapeev_prss(l));
R_prss(l)=teta2_prss(l)./(teta1_prss(l)+teta2_prss(l)); biasRprssmml(l)=R_prss(l)-oran(l);

        %ERSS mml ile örneklem oluşturma
   x1erss(:,:,l)=(B1(1:(k1/2),1,:,l));  xkerss(:,:,l)=(B1((k1/2+1):k1,k1,:,l));
   y1erss(:,:,l)=(B2(1:(k2/2),1,:,l));  ykerss(:,:,l)=(B2((k2/2+1):k2,k2,:,l));
   x1(:,:,l)=(F1(1:(k1/2),1,:,l));  xk(:,:,l)=(F1((k1/2+1):k1,k1,:,l));
   y1(:,:,l)=(F2(1:(k2/2),1,:,l));  yk(:,:,l)=(F2((k2/2+1):k2,k2,:,l));

   if k1==2
      x1top(:,:,l)=[x1(:,:,l) xk(:,:,l)];  sortx1top(:,:,l)=sort(x1top(:,:,l),2);
      x1or(:,:,l)=sortx1top(:,1,l);  xkor(:,:,l)=sortx1top(:,2,l);
   else
     xmmlerss(:,:,l)=[x1(:,:,l)'xk(:,:,l)'];   xmmlerssor(:,:,l)=sort(xmmlerss(:,:,l),2);
     x1or(:,:,l)=xmmlerssor(1:r,1:k1/2,l);  xkor(:,:,l)=xmmlerssor(1:r,k1/2+1:k1,l);
   end
```

```
    if k2==2
       y1top(:,:,l)=[y1(:,:,l) yk(:,:,l)];  sorty1top(:,:,l)=sort(y1top(:,:,l),2);
       y1or(:,:,l)=sorty1top(:,1,l);  ykor(:,:,l)=sorty1top(:,2,l);
    else
      ymmlerss(:,:,l)=[y1(:,:,l)'yk(:,:,l)'];  ymmlerssor(:,:,l)=sort(ymmlerss(:,:,l),2);
      y1or(:,:,l)=ymmlerssor(1:r,1:k2/2,l);  ykor(:,:,l)=ymmlerssor(1:r,k2/2+1:k2,l);
    end
'ML based on ERSS';
lnLerss=@(s) (-1)*((n+m).*log(s(1))-n*log(s(2))-m*log(s(3))+n*log(k1)+m*log(k2)+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((x1erss(:,:,l))),2))-k1*sum(sum((((x1erss(:,:,l).^s(1))./s(2))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((xkerss(:,:,l))),2))+sum(sum((k1-1)*log(1-exp(-(xkerss(:,:,l).^s(1))./s(2)))))-
sum(sum((((xkerss(:,:,l).^s(1))./s(2))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((y1erss(:,:,l))),2))-k2*sum(sum((((y1erss(:,:,l).^s(1))./s(3))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((ykerss(:,:,l))),2))+sum(sum((k2-1)*log(1-exp(-(ykerss(:,:,l).^s(1))./s(3)))))-
sum(sum((((ykerss(:,:,l).^s(1))./s(3))),2)));
s0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[smle,lnLerssval,kokvar] = fminsearch(lnLerss,s0,option);
if kokvar==1;
  mleerss=smle;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmleerss(l,:)=mleerss(1);sigma1mleerss(l,:)=mleerss(2);sigma2mleerss(l,:)=mleerss(3);
RmleERSS(l,:)=sigma2mleerss(l,:)/(sigma1mleerss(l,:)+sigma2mleerss(l,:));
biasRerssml(l)=RmleERSS(l)-oran(l);

'MML based on ERSS';
% beta ve alpha ların hesaplanması %1. örneklem için
beta31n_erss=((exp(tn1)-1)*evpdf(tn1,0,1)*evcdf(tn1,0,1)+evpdf(tn1,0,1).^2)/(evcdf(tn1,0,1).^2);
alpha31n_erss=evpdf(tn1,0,1)/evcdf(tn1,0,1)+tn1*beta31n_erss;
beta21n_erss=exp(tn1); alpha21n_erss=exp(tn1)-tn1.*exp(tn1);
beta11n_erss=exp(tn1); alpha11n_erss=1-exp(tn1)+tn1.*exp(tn1);
beta3kn_erss=((exp(tnk)-1)*evpdf(tnk,0,1)*evcdf(tnk,0,1)+evpdf(tnk,0,1).^2)/(evcdf(tnk,0,1).^2);
alpha3kn_erss=evpdf(tnk,0,1)/evcdf(tnk,0,1)+tnk*beta3kn_erss;
beta2kn_erss=exp(tnk); alpha2kn_erss=exp(tnk)-tnk.*exp(tnk);
beta1kn_erss=exp(tnk); alpha1kn_erss=1-exp(tnk)+tnk.*exp(tnk);
%2. örneklem için
beta31m_erss=((exp(tm1)-1)*evpdf(tm1,0,1)*evcdf(tm1,0,1)+evpdf(tm1,0,1).^2)/(evcdf(tm1,0,1).^2);
alpha31m_erss=evpdf(tm1,0,1)/evcdf(tm1,0,1)+tm1*beta31m_erss;
beta21m_erss=exp(tm1); alpha21m_erss=exp(tm1)-tm1.*exp(tm1);
beta11m_erss=exp(tm1); alpha11m_erss=1-exp(tm1)+tm1.*exp(tm1);
beta3km_erss=((exp(tmk)-1)*evpdf(tmk,0,1)*evcdf(tmk,0,1)+evpdf(tmk,0,1).^2)/(evcdf(tmk,0,1).^2);
alpha3km_erss=evpdf(tmk,0,1)/evcdf(tmk,0,1)+tmk*beta3km_erss;
beta2km_erss=exp(tmk);  alpha2km_erss=exp(tmk)-tmk.*exp(tmk);
beta1km_erss=exp(tmk); alpha1km_erss=1-exp(tmk)+tmk.*exp(tmk);
%------%
%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_erss=alpha11n_erss-(k1-1)*alpha21n_erss;
bdelta2n_erss=alpha1kn_erss+(k1-1)*alpha3kn_erss;
delta1n_erss=beta11n_erss+(k1-1)*beta21n_erss;
delta2n_erss=beta1kn_erss+(k1-1)*beta3kn_erss;
bdelta1m_erss=alpha11m_erss-(k2-1)*alpha21m_erss;
bdelta2m_erss=alpha1km_erss+(k2-1)*alpha3km_erss;
delta1m_erss=beta11m_erss+(k2-1)*beta21m_erss;
delta2m_erss=beta1km_erss+(k2-1)*beta3km_erss;
%m D K A B C nin hesaplanması
m1n_erss=r*((k1/2)*(delta1n_erss)+(k1/2)*(delta2n_erss));
m1m_erss=r*((k2/2)*(delta1m_erss)+(k2/2)*(delta2m_erss));
```

```
D1_erss=(r*((k1/2)*(bdelta1n_erss)+(k1/2)*(bdelta2n_erss)))/m1n_erss;
D2_erss=(r*((k2/2)*(bdelta1m_erss)+(k2/2)*(bdelta2m_erss)))/m1m_erss;
K1_erss(l)=(sum(sum(delta1n_erss.*x1or(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2n_erss.*xkor(:,:,l)),2))/m1n_erss;
%K1_erss(l)=(sum(sum(delta1n_erss.*x1or(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2n_erss.*xkor(:,:,l)),2));
K2_erss(l)=(sum(sum(delta1m_erss.*y1or(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2m_erss.*ykor(:,:,l)),2))/m1m_erss;
A_erss(l)=n+m;
B_erss(l)=sum(sum(bdelta1n_erss.*x1or(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2n_erss.*xkor(:,:,l)),2)-
K1_erss(l).*D1_erss.*m1n_erss+...
      sum(sum(bdelta1m_erss.*y1or(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2m_erss.*ykor(:,:,l)),2)-
K2_erss(l).*D2_erss.*m1m_erss;
C_erss(l)=(sum(sum(delta1n_erss.*(x1or(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2n_erss.*(xkor(:,:,l).^2)),2))-
(K1_erss(l).^2).*m1n_erss+...
      (sum(sum(delta1m_erss.*(y1or(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2m_erss.*(ykor(:,:,l).^2)),2))-
(K2_erss(l).^2).*m1m_erss;

sigma_erss(l)=(-B_erss(l)+sqrt(B_erss(l).^2+4*C_erss(l).*(A_erss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_erss(l)=K1_erss(l)-D1_erss.*sigma_erss(l);mu2_erss(l)=K2_erss(l)-D2_erss.*sigma_erss(l);
shapeev_erss(l)=1/sigma_erss(l);
teta1_erss(l)=exp(mu1_erss(l).*shapeev_erss(l));teta2_erss(l)=exp(mu2_erss(l).*shapeev_erss(l));
R_erss(l)=teta2_erss(l)./(teta1_erss(l)+teta2_erss(l)); biasRerssmml(l)=R_erss(l)-oran(l);

                    %MRSS ml ile örneklem oluşturma
   ximrss(:,:,l)=(B1(1:(k1/2),(k1/2),:,l));  xsmrss(:,:,l)=(B1((k1/2+1):k1,(k1/2+1),:,l));
   yimrss(:,:,l)=(B2(1:(k2/2),(k2/2),:,l));  ysmrss(:,:,l)=(B2((k2/2+1):k2,(k2/2+1),:,l));
%ML based od MRSS
lnLmrss=@(y) (-1)*((n+m).*log(y(1))-n*log(y(2))-
m*log(y(3))+n*log(factorial(k1)/(factorial(k1/2)*factorial((k1/2)-
1)))+m*log(factorial(k2)/(factorial((k2/2)-1)*factorial(k2/2)))+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((ximrss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k1/2)-1)*log(1-exp(-(ximrss(:,:,l).^y(1))./y(2)))))-
sum(sum((((k1+2)/2).*((ximrss(:,:,l).^y(1))./y(2))),2))+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((xsmrss(:,:,l))),2))+sum(sum((k1/2)*log(1-exp(-(xsmrss(:,:,l).^y(1))./y(2)))))-
sum(sum(((k1/2).*((xsmrss(:,:,l).^y(1))./y(2))),2))+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((yimrss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k2/2)-1)*log(1-exp(-(yimrss(:,:,l).^y(1))./y(3)))))-
sum(sum((((k2+2)/2).*((yimrss(:,:,l).^y(1))./y(3))),2))+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((ysmrss(:,:,l))),2))+sum(sum((k2/2)*log(1-exp(-(ysmrss(:,:,l).^y(1))./y(3)))))-
sum(sum(((k2/2).*((ysmrss(:,:,l).^y(1))./y(3))),2)));
y0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[ymle,lnLmrssval,kokvar] = fminsearch(lnLmrss,y0,option);
if kokvar==1;
  mlemrss=ymle;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmlemrss(l,:)=mlemrss(1);sigma1mlemrss(l,:)=mlemrss(2);sigma2mlemrss(l,:)=mlemrss(3);
RmleMRSS(l,:)=sigma2mlemrss(l,:)/(sigma1mlemrss(l,:)+sigma2mlemrss(l,:));
biasRmrssml(l)=RmleMRSS(l)-oran(l);

                    %MRSS mml ile örneklem oluşturma
   x1mrss(:,:,l)=(F1(1:(k1/2),(k1/2),:,l));  xkmrss(:,:,l)=(F1((k1/2+1):k1,(k1/2+1),:,l));
   y1mrss(:,:,l)=(F2(1:(k2/2),(k2/2),:,l));  ykmrss(:,:,l)=(F2((k2/2+1):k2,(k2/2+1),:,l));
   if k1==2
      x1mrsstop(:,:,l)=[x1mrss(:,:,l) xkmrss(:,:,l)];  sortx1mrsstop(:,:,l)=sort(x1mrsstop(:,:,l),2);
      x1mor(:,:,l)=sortx1mrsstop(:,1,l);  xkmor(:,:,l)=sortx1mrsstop(:,2,l);
   else
     xmmlmrss(:,:,l)=[x1mrss(:,:,l)'xkmrss(:,:,l)'];   xmmlmrssor(:,:,l)=sort(xmmlmrss(:,:,l),2);
     x1mor(:,:,l)=xmmlmrssor(1:r,1:k1/2,l);  xkmor(:,:,l)=xmmlmrssor(1:r,k1/2+1:k1,l);
   end
```

```
    if k2==2
      y1mrsstop(:,:,l)=[y1mrss(:,:,l) ykmrss(:,:,l)];   sorty1mrsstop(:,:,l)=sort(y1mrsstop(:,:,l),2);
      y1mor(:,:,l)=sorty1mrsstop(:,1,l);  ykmor(:,:,l)=sorty1mrsstop(:,2,l);
    else
       ymmlmrss(:,:,l)=[y1mrss(:,:,l)'ykmrss(:,:,l)'];    ymmlmrssor(:,:,l)=sort(ymmlmrss(:,:,l),2);
       y1mor(:,:,l)=ymmlmrssor(1:r,1:k2/2,l);   ykmor(:,:,l)=ymmlmrssor(1:r,k2/2+1:k2,l);
    end
            ten1=t1(k1/2);  ten2=t1(k1/2+1);  tem1=t2(k2/2);  tem2=t2(k2/2+1);
% beta ve alpha ların hesaplanması %.1 örneklem için
beta11n_mrss=((exp(ten1)-1)*evpdf(ten1,0,1)*evcdf(ten1,0,1)+evpdf(ten1,0,1).^2)/(evcdf(ten1,0,1).^2);
alpha11n_mrss=evpdf(ten1,0,1)/evcdf(ten1,0,1)+ten1*beta11n_mrss;
beta21n_mrss=exp(ten1);  alpha21n_mrss=exp(ten1)-ten1.*exp(ten1);
beta31n_mrss=exp(ten1);  alpha31n_mrss=1-exp(ten1)+ten1.*exp(ten1);
beta1kn_mrss=((exp(ten2)-1)*evpdf(ten2,0,1)*evcdf(ten2,0,1)+evpdf(ten2,0,1).^2)/(evcdf(ten2,0,1).^2);
alpha1kn_mrss=evpdf(ten2,0,1)/evcdf(ten2,0,1)+ten2*beta1kn_mrss;
beta2kn_mrss=exp(ten2);  alpha2kn_mrss=exp(ten2)-ten2.*exp(ten2);
beta3kn_mrss=exp(ten2);  alpha3kn_mrss=1-exp(ten2)+ten2.*exp(ten2);
%.2 örneklem için
beta11m_mrss=((exp(tem1)-
1)*evpdf(tem1,0,1)*evcdf(tem1,0,1)+evpdf(tem1,0,1).^2)/(evcdf(tem1,0,1).^2);
alpha11m_mrss=evpdf(tem1,0,1)/evcdf(tem1,0,1)+tem1*beta11m_mrss;
beta21m_mrss=exp(tem1);  alpha21m_mrss=exp(tem1)-tem1.*exp(tem1);
beta31m_mrss=exp(tem1);  alpha31m_mrss=1-exp(tem1)+tem1.*exp(tem1);
beta1km_mrss=((exp(tem2)-
1)*evpdf(tem2,0,1)*evcdf(tem2,0,1)+evpdf(tem2,0,1).^2)/(evcdf(tem2,0,1).^2);
alpha1km_mrss=evpdf(tem2,0,1)/evcdf(tem2,0,1)+tem2*beta1km_mrss;
beta2km_mrss=exp(tem2);  alpha2km_mrss=exp(tem2)-tem2.*exp(tem2);
beta3km_mrss=exp(tem2);  alpha3km_mrss=1-exp(tem2)+tem2.*exp(tem2);
%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_mrss=((k1-2)/2)*alpha11n_mrss-(k1/2)*alpha21n_mrss+alpha31n_mrss;
bdelta2n_mrss=(k1/2)*alpha1kn_mrss-((k1-2)/2)*alpha2kn_mrss+alpha3kn_mrss;
delta1n_mrss=((k1-2)/2)*beta11n_mrss+(k1/2)*beta21n_mrss+beta31n_mrss;
delta2n_mrss=(k1/2)*beta1kn_mrss+((k1-2)/2)*beta2kn_mrss+beta3kn_mrss;
bdelta1m_mrss=((k2-2)/2)*alpha11m_mrss-(k2/2)*alpha21m_mrss+alpha31m_mrss;
bdelta2m_mrss=(k2/2)*alpha1km_mrss-((k2-2)/2)*alpha2km_mrss+alpha3km_mrss;
delta1m_mrss=((k2-2)/2)*beta11m_mrss+(k2/2)*beta21m_mrss+beta31m_mrss;
delta2m_mrss=(k2/2)*beta1km_mrss+((k2-2)/2)*beta2km_mrss+beta3km_mrss;
%m D K A B C nin hesaplanması
m1n_mrss=r*((k1/2)*(delta1n_mrss)+(k1/2)*(delta2n_mrss));
m1m_mrss=r*((k2/2)*(delta1m_mrss)+(k2/2)*(delta2m_mrss));
D1_mrss=(r*((k1/2)*(bdelta1n_mrss)+(k1/2)*(bdelta2n_mrss)))/m1n_mrss;
D2_mrss=(r*((k2/2)*(bdelta1m_mrss)+(k2/2)*(bdelta2m_mrss)))/m1m_mrss;
K1_mrss(l)=(sum(sum(delta1n_mrss.*x1mor(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2n_mrss.*xkmor(:,:,l)),2))/m1n_mr
ss;
K2_mrss(l)=(sum(sum(delta1m_mrss.*y1mor(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2m_mrss.*ykmor(:,:,l)),2))/m1m_
mrss;
A_mrss(l)=n+m;
B_mrss(l)=sum(sum(bdelta1n_mrss.*x1mor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2n_mrss.*xkmor(:,:,l)),2)-
K1_mrss(l).*D1_mrss.*m1n_mrss+...
       sum(sum(bdelta1m_mrss.*y1mor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2m_mrss.*ykmor(:,:,l)),2)-
K2_mrss(l).*D2_mrss.*m1m_mrss;
C_mrss(l)=(sum(sum(delta1n_mrss.*(x1mor(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2n_mrss.*(xkmor(:,:,l).^2)),2))-
(K1_mrss(l).^2).*m1n_mrss+...
       (sum(sum(delta1m_mrss.*(y1mor(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2m_mrss.*(ykmor(:,:,l).^2)),2))-
(K2_mrss(l).^2).*m1m_mrss;

sigma_mrss(l)=(-B_mrss(l)+sqrt(B_mrss(l).^2+4*C_mrss(l).*(A_mrss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_mrss(l)=K1_mrss(l)-D1_mrss.*sigma_mrss(l);mu2_mrss(l)=K2_mrss(l)-D2_mrss.*sigma_mrss(l);
```

```
shapeev_mrss(l)=1/sigma_mrss(l);
teta1_mrss(l)=exp(mu1_mrss(l).*shapeev_mrss(l));teta2_mrss(l)=exp(mu2_mrss(l).*shapeev_mrss(l));
R_mrss(l)=teta2_mrss(l)./(teta1_mrss(l)+teta2_mrss(l));  biasRmrssmml(l)=R_mrss(l)-oran(l);
'------------------------------------------------------------------------';

elseif mod(k1,2)==1 && mod(k2,2)==1
    % mx ve my tek ise
    %PRSS ml ile örneklem oluşturma%
    xaprss(:,:,l)=(B1(1:((k1-1)/2),a1,:,l));  xbprss(:,:,l)=(B1(((k1+1)/2+1):k1,b1,:,l));
    xmprss(:,:,l)=(B1(((k1+1)/2),((k1+1)/2),:,l));  yaprss(:,:,l)=(B2(1:((k2-1)/2),a2,:,l));
    ybprss(:,:,l)=(B2(((k2+1)/2+1):k2,b2,:,l));   ymprss(:,:,l)=(B2(((k2+1)/2),((k2+1)/2),:,l));
%ML based od PRSS
lnLprss=@(k) (-1)*((n+m).*log(k(1))-n*log(k(2))-m*log(k(3))+((n-r)/2)*log(factorial(k1)/(factorial(k1-
a1)*factorial(a1-1)))+((n-r)/2)*log(factorial(k1)/(factorial(k1-b1)*factorial(b1-1)))+...
((m-r)/2)*log(factorial(k2)/(factorial(k2-a2)*factorial(a2-1)))+((m-r)/2)*log(factorial(k2)/(factorial(k2-
b2)*factorial(b2-1)))+r*log(factorial(k1)/(factorial((k1-1)/2))^2)+r*log(factorial(k2)/(factorial((k2-
1)/2))^2)+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((xaprss(:,:,l))),2))+sum(sum((a1-1)*log(1-exp(-(xaprss(:,:,l).^k(1))./k(2)))))-
sum(sum(((k1-a1+1).*((xaprss(:,:,l).^k(1))./k(2))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((xbprss(:,:,l))),2))+sum(sum((b1-1)*log(1-exp(-(xbprss(:,:,l).^k(1))./k(2)))))-
sum(sum(((k1-b1+1).*((xbprss(:,:,l).^k(1))./k(2))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((yaprss(:,:,l))),2))+sum(sum((a2-1)*log(1-exp(-(yaprss(:,:,l).^k(1))./k(3)))))-
sum(sum(((k2-a2+1).*((yaprss(:,:,l).^k(1))./k(3))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((ybprss(:,:,l))),2))+sum(sum((b2-1)*log(1-exp(-(ybprss(:,:,l).^k(1))./k(3)))))-
sum(sum(((k2-b2+1).*((ybprss(:,:,l).^k(1))./k(3))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((xmprss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k1-1)/2)*log(1-exp(-(xmprss(:,:,l).^k(1))./k(2)))))-
sum(sum((((k1+1)/2).*((xmprss(:,:,l).^k(1))./k(2))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((ymprss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k2-1)/2)*log(1-exp(-(ymprss(:,:,l).^k(1))./k(3)))))-
sum(sum((((k2+1)/2).*((ymprss(:,:,l).^k(1))./k(3))),2)));
k0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[kmle,lnLprssval,kokvar] = fminsearch(lnLprss,k0,option);
if kokvar==1;
  mleprss=kmle;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmleprss(l,:)=mleprss(1); sigma1mleprss(l,:)=mleprss(2);sigma2mleprss(l,:)=mleprss(3);
RmlePRSS(l,:)=sigma2mleprss(l,:)/(sigma1mleprss(l,:)+sigma2mleprss(l,:));
biasRprssml(l)=RmlePRSS(l)-oran(l);

%PRSS MML için örneklem oluşturma
    tna=t1(a1);  tnb=t1(b1);  tma=t2(a2);  tmb=t2(b2);  tnm=t1((k1+1)/2);  tmm=t2((k2+1)/2);
    xa(:,:,l)=(F1(1:((k1-1)/2),a1,:,l));  xb(:,:,l)=(F1(((k1+1)/2+1):k1,b1,:,l));
    xm(:,:,l)=(F1(((k1+1)/2),((k1+1)/2),:,l));  ya(:,:,l)=(F2(1:((k2-1)/2),a2,:,l));
    yb(:,:,l)=(F2(((k2+1)/2+1):k2,b2,:,l));  ym(:,:,l)=(F2(((k2+1)/2),((k2+1)/2),:,l));
     if k1==3
          xatop(:,:,l)=[xa(:,:,l) xm(:,:,l) xb(:,:,l)];  sortxatop(:,:,l)=sort(xatop(:,:,l),2);
          xaor(:,:,l)=sortxatop(:,1,l);  xmor(:,:,l)=sortxatop(:,2,l);  xbor(:,:,l)=sortxatop(:,3,l);
     else
          xmmlprss(:,:,l)=[xa(:,:,l)'xm(:,:,l) xb(:,:,l)'];   xmmlprssor(:,:,l)=sort(xmmlprss(:,:,l),2);
          xaor(:,:,l)=xmmlprssor(1:r,1:(k1-1)/2,l);  xbor(:,:,l)=xmmlprssor(1:r,(k1+1)/2+1:k1,l);
          xmor(:,:,l)=xmmlprssor(1:r,((k1+1)/2),l);
     end
     if k2==3
           yatop(:,:,l)=[ya(:,:,l) ym(:,:,l) yb(:,:,l)];  sortyatop(:,:,l)=sort(yatop(:,:,l),2);
           yaor(:,:,l)=sortyatop(:,1,l);  ymor(:,:,l)=sortyatop(:,2,l); ybor(:,:,l)=sortyatop(:,3,l);
     else
          ymmlprss(:,:,l)=[ya(:,:,l)'ym(:,:,l) yb(:,:,l)'];  ymmlprssor(:,:,l)=sort(ymmlprss(:,:,l),2);
```

```
        yaor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,1:((k2-1)/2),l); ybor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,((k2+1)/2+1):k2,l);
        ymor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,((k2+1)/2),l);
    end
'MML YÖNTEMİ';
beta1na_prss=((exp(tna)-1)*evpdf(tna,0,1)*evcdf(tna,0,1)+evpdf(tna,0,1).^2)/(evcdf(tna,0,1).^2);
alpha1na_prss=evpdf(tna,0,1)/evcdf(tna,0,1)+tna*beta1na_prss;
beta2na_prss=exp(tna); alpha2na_prss=exp(tna)-tna.*exp(tna);
beta3na_prss=exp(tna); alpha3na_prss=1-exp(tna)+tna.*exp(tna);
beta1nb_prss=((exp(tnb)-1)*evpdf(tnb,0,1)*evcdf(tnb,0,1)+evpdf(tnb,0,1).^2)/(evcdf(tnb,0,1).^2);
alpha1nb_prss=evpdf(tnb,0,1)/evcdf(tnb,0,1)+tnb*beta1nb_prss;
beta2nb_prss=exp(tnb); alpha2nb_prss=exp(tnb)-tnb.*exp(tnb);
beta3nb_prss=exp(tnb); alpha3nb_prss=1-exp(tnb)+tnb.*exp(tnb);

beta1ma_prss=((exp(tma)-1)*evpdf(tma,0,1)*evcdf(tma,0,1)+evpdf(tma,0,1).^2)/(evcdf(tma,0,1).^2);
alpha1ma_prss=evpdf(tma,0,1)/evcdf(tma,0,1)+tma*beta1ma_prss;
beta2ma_prss=exp(tma); alpha2ma_prss=exp(tma)-tma.*exp(tma);
beta3ma_prss=exp(tma); alpha3ma_prss=1-exp(tma)+tma.*exp(tma);
beta1mb_prss=((exp(tmb)-1)*evpdf(tmb,0,1)*evcdf(tmb,0,1)+evpdf(tmb,0,1).^2)/(evcdf(tmb,0,1).^2);
alpha1mb_prss=evpdf(tmb,0,1)/evcdf(tmb,0,1)+tmb*beta1mb_prss;
beta2mb_prss=exp(tmb); alpha2mb_prss=exp(tmb)-tmb.*exp(tmb);
beta3mb_prss=exp(tmb); alpha3mb_prss=1-exp(tmb)+tmb.*exp(tmb);

beta1nm_prss=((exp(tnm)-1)*evpdf(tnm,0,1)*evcdf(tnm,0,1)+evpdf(tnm,0,1).^2)/(evcdf(tnm,0,1).^2);
alpha1nm_prss=evpdf(tnm,0,1)/evcdf(tnm,0,1)+tnm*beta1nm_prss;
beta2nm_prss=exp(tnm); alpha2nm_prss=exp(tnm)-tnm.*exp(tnm);
beta3nm_prss=exp(tnm); alpha3nm_prss=1-exp(tnm)+tnm.*exp(tnm);
beta1mm_prss=((exp(tmm)-
1)*evpdf(tmm,0,1)*evcdf(tmm,0,1)+evpdf(tmm,0,1).^2)/(evcdf(tmm,0,1).^2);
alpha1mm_prss=evpdf(tmm,0,1)/evcdf(tmm,0,1)+tmm*beta1mm_prss;
beta2mm_prss=exp(tmm); alpha2mm_prss=exp(tmm)-tmm.*exp(tmm);
beta3mm_prss=exp(tmm); alpha3mm_prss=1-exp(tmm)+tmm.*exp(tmm);

%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_prss=(a1-1)*alpha1na_prss-(k1-a1)*alpha2na_prss+alpha3na_prss;
bdelta2n_prss=(b1-1)*alpha1nb_prss-(k1-b1)*alpha2nb_prss+alpha3nb_prss;
bdelta3n_prss=((k1-1)/2)*alpha1nm_prss-((k1-1)/2)*alpha2nm_prss+alpha3nm_prss;
delta1n_prss=(a1-1)*beta1na_prss+(k1-a1)*beta2na_prss+beta3na_prss;
delta2n_prss=(b1-1)*beta1nb_prss+(k1-b1)*beta2nb_prss+beta3nb_prss;
delta3n_prss=((k1-1)/2)*beta1nm_prss+((k1-1)/2)*beta2nm_prss+beta3nm_prss;
bdelta1m_prss=(a2-1)*alpha1ma_prss-(k2-a2)*alpha2ma_prss+alpha3ma_prss;
bdelta2m_prss=(b2-1)*alpha1mb_prss-(k2-b2)*alpha2mb_prss+alpha3mb_prss;
bdelta3m_prss=((k2-1)/2)*alpha1mm_prss-((k2-1)/2)*alpha2mm_prss+alpha3mm_prss;
delta1m_prss=(a2-1)*beta1ma_prss+(k2-a2)*beta2ma_prss+beta3ma_prss;
delta2m_prss=(b2-1)*beta1mb_prss+(k2-b2)*beta2mb_prss+beta3mb_prss;
delta3m_prss=((k2-1)/2)*beta1mm_prss+((k2-1)/2)*beta2mm_prss+beta3mm_prss;

m1n_prss=r*(((k1-1)/2)*(delta1n_prss)+((k1-1)/2)*(delta2n_prss)+delta3n_prss);
m1m_prss=r*(((k2-1)/2)*(delta1m_prss)+((k2-1)/2)*(delta2m_prss)+delta3m_prss);
D1_prss=(r*(((k1-1)/2)*(bdelta1n_prss)+((k1-1)/2)*(bdelta2n_prss)+bdelta3n_prss))/m1n_prss;
D2_prss=(r*(((k2-1)/2)*(bdelta1m_prss)+((k2-1)/2)*(bdelta2m_prss)+bdelta3m_prss))/m1m_prss;
K1_prss(l)=(sum(sum(delta1n_prss.*xaor(:,:,l)))+sum(sum(delta2n_prss.*xbor(:,:,l)))+sum(sum(delta3n_
prss.*xmor(:,:,l))))/m1n_prss;
K2_prss(l)=(sum(sum(delta1m_prss.*yaor(:,:,l)))+sum(sum(delta2m_prss.*ybor(:,:,l)))+sum(sum(delta3
m_prss.*ymor(:,:,l))))/m1m_prss;
A_prss(l)=n+m;
B_prss(l)=sum(sum(bdelta1n_prss.*xaor(:,:,l)))+sum(sum(bdelta2n_prss.*xbor(:,:,l)))+sum(sum(bdelta3n
_prss.*xmor(:,:,l)))-K1_prss(l).*D1_prss.*m1n_prss+...
```

```
sum(sum(bdelta1m_prss.*yaor(:,:,l)))+sum(sum(bdelta2m_prss.*ybor(:,:,l)))+sum(sum(bdelta3m_prss.*y
mor(:,:,l)))-K2_prss(l).*D2_prss.*m1m_prss;
C_prss(l)=(sum(sum(delta1n_prss.*(xaor(:,:,l).^2)))+sum(sum(delta2n_prss.*(xbor(:,:,l).^2))))+sum(sum(
delta3n_prss.*(xmor(:,:,l).^2)))-(K1_prss(l).^2).*m1n_prss+...
(sum(sum(delta1m_prss.*(yaor(:,:,l).^2)))+sum(sum(delta2m_prss.*(ybor(:,:,l).^2))))+sum(sum(delta3m_
prss.*(ymor(:,:,l).^2)))-(K2_prss(l).^2).*m1m_prss;

sigma_prss(l)=(-B_prss(l)+sqrt(B_prss(l).^2+4*C_prss(l).*(A_prss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_prss(l)=K1_prss(l)-D1_prss.*sigma_prss(l);mu2_prss(l)=K2_prss(l)-D2_prss.*sigma_prss(l);
shapeev_prss(l)=1/sigma_prss(l);
teta1_prss(l)=exp(mu1_prss(l).*shapeev_prss(l));teta2_prss(l)=exp(mu2_prss(l).*shapeev_prss(l));
R_prss(l)=teta2_prss(l)./(teta1_prss(l)+teta2_prss(l));  biasRprssmml(l)=R_prss(l)-oran(l);

%ERSS mml ile örneklem oluşturma%
    x1erss(:,:,l)=(B1(1:((k1-1)/2),1,:,l));  xkerss(:,:,l)=(B1(((k1+1)/2+1):k1,k1,:,l));
    y1erss(:,:,l)=(B2(1:((k2-1)/2),1,:,l));  ykerss(:,:,l)=(B2(((k2+1)/2+1):k2,k2,:,l));
    xmerss(:,:,l)=(B1(((k1+1)/2),((k1+1)/2),:,l));  ymerss(:,:,l)=(B2(((k2+1)/2),((k2+1)/2),:,l));
    x1(:,:,l)=(F1(1:((k1-1)/2),1,:,l));  xk(:,:,l)=(F1(((k1+1)/2+1):k1,k1,:,l));
    y1(:,:,l)=(F2(1:((k2-1)/2),1,:,l));  yk(:,:,l)=(F2(((k2+1)/2+1):k2,k2,:,l));
    xm(:,:,l)=(F1(((k1+1)/2),((k1+1)/2),:,l));  ym(:,:,l)=(F2(((k2+1)/2),((k2+1)/2),:,l));
    if k1==3
        x1top(:,:,l)=[x1(:,:,l) xm(:,:,l) xk(:,:,l)];  sortx1top(:,:,l)=sort(x1top(:,:,l),2);
        x1or(:,:,l)=sortx1top(:,1,l);  xmor(:,:,l)=sortx1top(:,2,l);  xkor(:,:,l)=sortx1top(:,3,l);
     else
        xmmlerss(:,:,l)=[x1(:,:,l)'xm(:,:,l) xk(:,:,l)'];  xmmlerssor(:,:,l)=sort(xmmlerss(:,:,l),2);
        x1or(:,:,l)=xmmlerssor(1:r,1:(k1-1)/2,l);  xkor(:,:,l)=xmmlerssor(1:r,(k1+1)/2+1:k1,l);
        xmor(:,:,l)=xmmlerssor(1:r,((k1+1)/2),l);
     end
     if k2==3
        y1top(:,:,l)=[y1(:,:,l) ym(:,:,l) yk(:,:,l)];   sorty1top(:,:,l)=sort(y1top(:,:,l),2);
        y1or(:,:,l)=sorty1top(:,1,l);  ymor(:,:,l)=sorty1top(:,2,l);  ykor(:,:,l)=sorty1top(:,3,l);
     else
        ymmlerss(:,:,l)=[y1(:,:,l)'ym(:,:,l) yk(:,:,l)'];   ymmlerssor(:,:,l)=sort(ymmlerss(:,:,l),2);
        y1or(:,:,l)=ymmlerssor(1:r,1:(k2-1)/2,l); ykor(:,:,l)=ymmlerssor(1:r,(k2+1)/2+1:k2,l);
        ymor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,((k2+1)/2),l);
     end
'ML based on ERSS';
lnLerss=@(s) (-1)*((n+m).*log(s(1))-n*log(s(2))-m*log(s(3))+r*(k1-1)*log(k1)+r*(k2-
1)*log(k2)+r*log(factorial(k1)/(factorial((k1-1)/2))^2)+r*log(factorial(k2)/(factorial((k2-1)/2))^2)+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((x1erss(:,:,l))),2))-k1*sum(sum((((x1erss(:,:,l).^s(1))./s(2))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((xkerss(:,:,l))),2))+sum(sum((k1-1)*log(1-exp(-(xkerss(:,:,l).^s(1))./s(2)))))-
sum(sum((((xkerss(:,:,l).^s(1))./s(2))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((y1erss(:,:,l))),2))-k2*sum(sum((((y1erss(:,:,l).^s(1))./s(3))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((ykerss(:,:,l))),2))+sum(sum((k2-1)*log(1-exp(-(ykerss(:,:,l).^s(1))./s(3)))))-
sum(sum((((ykerss(:,:,l).^s(1))./s(3))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((xmerss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k1-1)/2)*log(1-exp(-(xmerss(:,:,l).^s(1))./s(2)))))-
sum(sum((((k1+1)/2).*((xmerss(:,:,l).^s(1))./s(2))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((ymerss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k2-1)/2)*log(1-exp(-(ymerss(:,:,l).^s(1))./s(3)))))-
sum(sum((((k2+1)/2).*((ymerss(:,:,l).^s(1))./s(3))),2)));
s0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[smle,lnLerssval,kokvar] = fminsearch(lnLerss,s0,option);
if kokvar==1;
  mleerss=smle;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmleerss(l,:)=mleerss(1);sigma1mleerss(l,:)=mleerss(2);sigma2mleerss(l,:)=mleerss(3);
RmleERSS(l,:)=sigma2mleerss(l,:)/(sigma1mleerss(l,:)+sigma2mleerss(l,:));
```

```
biasRerssml(l)=RmleERSS(l)-oran(l);

'MML based on ERSS';
% beta ve alpha ların hesaplanması
beta31n_erss=((exp(tn1)-1)*evpdf(tn1,0,1)*evcdf(tn1,0,1)+evpdf(tn1,0,1).^2)/(evcdf(tn1,0,1).^2);
alpha31n_erss=evpdf(tn1,0,1)/evcdf(tn1,0,1)+tn1*beta31n_erss;
beta21n_erss=exp(tn1); alpha21n_erss=exp(tn1)-tn1.*exp(tn1);
beta11n_erss=exp(tn1); alpha11n_erss=1-exp(tn1)+tn1.*exp(tn1);
beta3kn_erss=((exp(tnk)-1)*evpdf(tnk,0,1)*evcdf(tnk,0,1)+evpdf(tnk,0,1).^2)/(evcdf(tnk,0,1).^2);
alpha3kn_erss=evpdf(tnk,0,1)/evcdf(tnk,0,1)+tnk*beta3kn_erss;
beta2kn_erss=exp(tnk); alpha2kn_erss=exp(tnk)-tnk.*exp(tnk);
beta1kn_erss=exp(tnk); alpha1kn_erss=1-exp(tnk)+tnk.*exp(tnk);
beta3mn_erss=((exp(tnm)-1)*evpdf(tnm,0,1)*evcdf(tnm,0,1)+evpdf(tnm,0,1).^2)/(evcdf(tnm,0,1).^2);
alpha3mn_erss=evpdf(tnm,0,1)/evcdf(tnm,0,1)+tnm*beta3mn_erss;
beta2mn_erss=exp(tnm); alpha2mn_erss=exp(tnm)-tnm.*exp(tnm);
beta1mn_erss=exp(tnm); alpha1mn_erss=1-exp(tnm)+tnm.*exp(tnm);

beta31m_erss=((exp(tm1)-1)*evpdf(tm1,0,1)*evcdf(tm1,0,1)+evpdf(tm1,0,1).^2)/(evcdf(tm1,0,1).^2);
alpha31m_erss=evpdf(tm1,0,1)/evcdf(tm1,0,1)+tm1*beta31m_erss;
beta21m_erss=exp(tm1);  alpha21m_erss=exp(tm1)-tm1.*exp(tm1);
beta11m_erss=exp(tm1);  alpha11m_erss=1-exp(tm1)+tm1.*exp(tm1);
beta3km_erss=((exp(tmk)-1)*evpdf(tmk,0,1)*evcdf(tmk,0,1)+evpdf(tmk,0,1).^2)/(evcdf(tmk,0,1).^2);
alpha3km_erss=evpdf(tmk,0,1)/evcdf(tmk,0,1)+tmk*beta3km_erss;
beta2km_erss=exp(tmk);  alpha2km_erss=exp(tmk)-tmk.*exp(tmk);
beta1km_erss=exp(tmk);  alpha1km_erss=1-exp(tmk)+tmk.*exp(tmk);
beta3mm_erss=((exp(tmm)-
1)*evpdf(tmm,0,1)*evcdf(tmm,0,1)+evpdf(tmm,0,1).^2)/(evcdf(tmm,0,1).^2);
alpha3mm_erss=evpdf(tmm,0,1)/evcdf(tmm,0,1)+tmm*beta3mm_erss;
beta2mm_erss=exp(tmm);   alpha2mm_erss=exp(tmm)-tmm.*exp(tmm);
beta1mm_erss=exp(tmm);  alpha1mm_erss=1-exp(tmm)+tmm.*exp(tmm);

%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_erss=alpha11n_erss-(k1-1)*alpha21n_erss;
bdelta2n_erss=alpha1kn_erss+(k1-1)*alpha3kn_erss;
bdelta3n_erss=alpha1mn_erss-((k1-1)/2)*alpha2mn_erss+((k1-1)/2)*alpha3mn_erss;
delta1n_erss=beta11n_erss+(k1-1)*beta21n_erss;
delta2n_erss=beta1kn_erss+(k1-1)*beta3kn_erss;
delta3n_erss=beta1mn_erss+((k1-1)/2)*beta2mn_erss+((k1-1)/2)*beta3mn_erss;
bdelta1m_erss=alpha11m_erss-(k2-1)*alpha21m_erss;
bdelta2m_erss=alpha1km_erss+(k2-1)*alpha3km_erss;
bdelta3m_erss=alpha1mm_erss-((k2-1)/2)*alpha2mm_erss+((k2-1)/2)*alpha3mm_erss;
delta1m_erss=beta11m_erss+(k2-1)*beta21m_erss;
delta2m_erss=beta1km_erss+(k2-1)*beta3km_erss;
delta3m_erss=beta1mm_erss+((k2-1)/2)*beta2mm_erss+((k2-1)/2)*beta3mm_erss;
%m D K A B C nin hesaplanması
m1n_erss=r*(((k1-1)/2)*(delta1n_erss)+((k1-1)/2)*(delta2n_erss)+delta3n_erss);
m1m_erss=r*(((k2-1)/2)*(delta1m_erss)+((k2-1)/2)*(delta2m_erss)+delta3m_erss);
D1_erss=(r*(((k1-1)/2)*(bdelta1n_erss)+((k1-1)/2)*(bdelta2n_erss)+bdelta3n_erss))/m1n_erss;
D2_erss=(r*(((k2-1)/2)*(bdelta1m_erss)+((k2-1)/2)*(bdelta2m_erss)+bdelta3m_erss))/m1m_erss;
K1_erss(l)=(sum(sum(delta1n_erss.*x1or(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2n_erss.*xkor(:,:,l)),2)+sum(sum(delta
3n_erss.*xmor(:,:,l)),2))/m1n_erss;
K2_erss(l)=(sum(sum(delta1m_erss.*y1or(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2m_erss.*ykor(:,:,l)),2)+sum(sum(delt
a3m_erss.*ymor(:,:,l)),2))/m1m_erss;
A_erss(l)=n+m;
B_erss(l)=sum(sum(bdelta1n_erss.*x1or(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2n_erss.*xkor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelt
a3n_erss.*xmor(:,:,l)),2)-K1_erss(l).*D1_erss.*m1n_erss+...
sum(sum(bdelta1m_erss.*y1or(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2m_erss.*ykor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta3m_erss
.*ymor(:,:,l)),2)-K2_erss(l).*D2_erss.*m1m_erss;
```

```
C_erss(l)=(sum(sum(delta1n_erss.*(x1or(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2n_erss.*(xkor(:,:,l).^2)),2)+sum(su
m(delta3n_erss.*(xmor(:,:,l).^2)),2))-(K1_erss(l).^2).*m1n_erss+...
(sum(sum(delta1m_erss.*(y1or(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2m_erss.*(ykor(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta3
m_erss.*(ymor(:,:,l).^2)),2))-(K2_erss(l).^2).*m1m_erss;

sigma_erss(l)=(-B_erss(l)+sqrt(B_erss(l).^2+4*C_erss(l).*(A_erss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_erss(l)=K1_erss(l)-D1_erss.*sigma_erss(l);mu2_erss(l)=K2_erss(l)-D2_erss.*sigma_erss(l);
shapeev_erss(l)=1/sigma_erss(l);
teta1_erss(l)=exp(mu1_erss(l).*shapeev_erss(l));teta2_erss(l)=exp(mu2_erss(l).*shapeev_erss(l));
R_erss(l)=teta2_erss(l)./(teta1_erss(l)+teta2_erss(l)); biasRerssmml(l)=R_erss(l)-oran(l);

                %MRSS ml ile örneklem oluşturma
xmrss(:,:,l)=B1(1:k1,((k1+1)/2),:,l);  ymrss(:,:,l)=B2(1:k2,((k2+1)/2),:,l);
%ML based od MRSS
lnLmrss=@(y) (-1)*((n+m).*log(y(1))-n*log(y(2))-m*log(y(3))+n*log(factorial(k1)/(factorial((k1-
1)/2))^2)+m*log(factorial(k2)/(factorial((k2-1)/2))^2)+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((xmrss(:,:,l)))),2))+sum(sum((((k1-1)/2))*log(1-exp(-(xmrss(:,:,l).^y(1))./y(2)))))-
sum(sum((((k1+1)/2)*((xmrss(:,:,l).^y(1))./y(2))),2))+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((ymrss(:,:,l)))),2))+sum(sum((((k2-1)/2))*log(1-exp(-(ymrss(:,:,l).^y(1))./y(3)))))-
sum(sum((((k2+1)/2)*((ymrss(:,:,l).^y(1))./y(3))),2)));
y0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[ymle,lnLmrssval,kokvar] = fminsearch(lnLmrss,y0,option);
if kokvar==1;
  mlemrss=ymle;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmlemrss(l,:)=mlemrss(1);sigma1mlemrss(l,:)=mlemrss(2);sigma2mlemrss(l,:)=mlemrss(3);
RmleMRSS(l,:)=sigma2mlemrss(l,:)/(sigma1mlemrss(l,:)+sigma2mlemrss(l,:));
biasRmrssml(l)=RmleMRSS(l)-oran(l);

                %MRSS mml ile örneklem oluşturma
x1mrss(:,:,l)=F1(1:k1,((k1+1)/2),:,l);  y1mrss(:,:,l)=F2(1:k2,((k2+1)/2),:,l);
x1mor(:,:,l)=x1mrss(:,:,l);  y1mor(:,:,l)=y1mrss(:,:,l);
ten1=t1((k1+1)/2);  tem1=t2((k2+1)/2);
 % beta ve alpha ların hesaplanması
beta11n_mrss=((exp(ten1)-1)*evpdf(ten1,0,1)*evcdf(ten1,0,1)+evpdf(ten1,0,1).^2)/(evcdf(ten1,0,1).^2);
alpha11n_mrss=evpdf(ten1,0,1)/evcdf(ten1,0,1)+ten1*beta11n_mrss;
beta21n_mrss=exp(ten1);  alpha21n_mrss=exp(ten1)-ten1.*exp(ten1);
beta31n_mrss=exp(ten1);  alpha31n_mrss=1-exp(ten1)+ten1.*exp(ten1);

beta11m_mrss=((exp(tem1)-
1)*evpdf(tem1,0,1)*evcdf(tem1,0,1)+evpdf(tem1,0,1).^2)/(evcdf(tem1,0,1).^2);
alpha11m_mrss=evpdf(tem1,0,1)/evcdf(tem1,0,1)+tem1*beta11m_mrss;
beta21m_mrss=exp(tem1);  alpha21m_mrss=exp(tem1)-tem1.*exp(tem1);
beta31m_mrss=exp(tem1);  alpha31m_mrss=1-exp(tem1)+tem1.*exp(tem1);

%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_mrss=((k1-1)/2)*alpha11n_mrss-((k1-1)/2)*alpha21n_mrss+alpha31n_mrss;
delta1n_mrss=((k1-1)/2)*beta11n_mrss+((k1-1)/2)*beta21n_mrss+beta31n_mrss;
bdelta1m_mrss=((k2-1)/2)*alpha11m_mrss-((k2-1)/2)*alpha21m_mrss+alpha31m_mrss;
delta1m_mrss=((k2-1)/2)*beta11m_mrss+((k2-1)/2)*beta21m_mrss+beta31m_mrss;
%m D K A B C nin hesaplanması
m1n_mrss=r*((k1)*(delta1n_mrss));  m1m_mrss=r*((k2)*(delta1m_mrss));
D1_mrss=(r*((k1)*(bdelta1n_mrss)))/m1n_mrss;  D2_mrss=(r*((k2)*(bdelta1m_mrss)))/m1m_mrss;
K1_mrss(l)=(sum(sum(delta1n_mrss.*x1mor(:,:,l)),2))/m1n_mrss;
K2_mrss(l)=(sum(sum(delta1m_mrss.*y1mor(:,:,l)),2))/m1m_mrss;
A_mrss(l)=n+m;
```

```
B_mrss(l)=sum(sum(bdelta1n_mrss.*x1mor(:,:,l)),2)-K1_mrss(l).*D1_mrss.*m1n_mrss+...
        sum(sum(bdelta1m_mrss.*y1mor(:,:,l)),2)-K2_mrss(l).*D2_mrss.*m1m_mrss;
C_mrss(l)=sum(sum(delta1n_mrss.*(x1mor(:,:,l).^2)),2)-(K1_mrss(l).^2).*m1n_mrss+...
        sum(sum(delta1m_mrss.*(y1mor(:,:,l).^2)),2)-(K2_mrss(l).^2).*m1m_mrss;

sigma_mrss(l)=(-B_mrss(l)+sqrt(B_mrss(l).^2+4*C_mrss(l).*(A_mrss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_mrss(l)=K1_mrss(l)-D1_mrss.*sigma_mrss(l);mu2_mrss(l)=K2_mrss(l)-D2_mrss.*sigma_mrss(l);
shapeev_mrss(l)=1/sigma_mrss(l);
teta1_mrss(l)=exp(mu1_mrss(l).*shapeev_mrss(l));teta2_mrss(l)=exp(mu2_mrss(l).*shapeev_mrss(l));
R_mrss(l)=teta2_mrss(l)./(teta1_mrss(l)+teta2_mrss(l)); biasRmrssmml(l)=R_mrss(l)-oran(l);
'--------------------------------------------------------------------------';

elseif mod(k1,2)==0 && mod(k2,2)==1
   %mx çift my tek ise
tna=t1(a1);tnb=t1(b1); tma=t2(a2); tmb=t2(b2); tmm=t2((k2+1)/2);
xaprss(:,:,l)=(B1(1:(k1/2),a1,:,l));xbprss(:,:,l)=(B1((k1/2+1):k1,b1,:,l));
yaprss(:,:,l)=(B2(1:((k2-1)/2),a2,:,l));ybprss(:,:,l)=(B2(((k2+1)/2+1):k2,b2,:,l));
ymprss(:,:,l)=(B2(((k2+1)/2),((k2+1)/2),:,l));
%ML based od PRSS
lnLprss=@(k) (-1)*((n+m).*log(k(1))-n*log(k(2))-m*log(k(3))+(n/2)*log(factorial(k1)/(factorial(k1-
a1)*factorial(a1-1)))+(n/2)*log(factorial(k1)/(factorial(k1-b1)*factorial(b1-1)))+...
((m-r)/2)*log(factorial(k2)/(factorial(k2-a2)*factorial(a2-1)))+((m-r)/2)*log(factorial(k2)/(factorial(k2-
b2)*factorial(b2-1)))+r*log(factorial(k2)/(factorial((k2-1)/2))^2)+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((xaprss(:,:,l))),2))+sum(sum((a1-1)*log(1-exp(-(xaprss(:,:,l).^k(1))./k(2)))))-
sum(sum(((k1-a1+1).*((xaprss(:,:,l).^k(1))./k(2))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((xbprss(:,:,l))),2))+sum(sum((b1-1)*log(1-exp(-(xbprss(:,:,l).^k(1))./k(2)))))-
sum(sum(((k1-b1+1).*((xbprss(:,:,l).^k(1))./k(2))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((yaprss(:,:,l))),2))+sum(sum((a2-1)*log(1-exp(-(yaprss(:,:,l).^k(1))./k(3)))))-
sum(sum(((k2-a2+1).*((yaprss(:,:,l).^k(1))./k(3))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((ybprss(:,:,l))),2))+sum(sum((b2-1)*log(1-exp(-(ybprss(:,:,l).^k(1))./k(3)))))-
sum(sum(((k2-b2+1).*((ybprss(:,:,l).^k(1))./k(3))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((ymprss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k2-1)/2)*log(1-exp(-(ymprss(:,:,l).^k(1))./k(3)))))-
sum(sum((((k2+1)/2).*((ymprss(:,:,l).^k(1))./k(3))),2)));
k0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[kmle,lnLprssval,kokvar] = fminsearch(lnLprss,k0,option);
if kokvar==1;
  mleprss=kmle;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmleprss(l,:)=mleprss(1); sigma1mleprss(l,:)=mleprss(2);sigma2mleprss(l,:)=mleprss(3);
RmlePRSS(l,:)=sigma2mleprss(l,:)/(sigma1mleprss(l,:)+sigma2mleprss(l,:));
biasRprssml(l)=RmlePRSS(l)-oran(l);

'1. Örneklem';
xa(:,:,l)=(F1(1:(k1/2),a1,:,l));   xb(:,:,l)=(F1((k1/2+1):k1,b1,:,l));
if k1==2
     xatop(:,:,l)=[xa(:,:,l) xb(:,:,l)];   sortxatop(:,:,l)=sort(xatop(:,:,l),2);
     xaor(:,:,l)=sortxatop(:,1,l);  xbor(:,:,l)=sortxatop(:,2,l);
  else
     xmmlprss(:,:,l)=[xa(:,:,l)'xb(:,:,l)'];  xmmlprssor(:,:,l)=sort(xmmlprss(:,:,l),2);
     xaor(:,:,l)=xmmlprssor(1:r,1:k1/2,l);  xbor(:,:,l)=xmmlprssor(1:r,k1/2+1:k1,l);
end
'2. Örneklem';
ya(:,:,l)=(F2(1:((k2-1)/2),a2,:,l)); yb(:,:,l)=(F2(((k2+1)/2+1):k2,b2,:,l));
ym(:,:,l)=(F2(((k2+1)/2),((k2+1)/2),:,l));
if k2==3
          yatop(:,:,l)=[ya(:,:,l) ym(:,:,l) yb(:,:,l)];  sortyatop(:,:,l)=sort(yatop(:,:,l),2);
```

```
        yaor(:,:,l)=sortyatop(:,1,l);  ymor(:,:,l)=sortyatop(:,2,l);  ybor(:,:,l)=sortyatop(:,3,l);
    else
        ymmlprss(:,:,l)=[ya(:,:,l)'ym(:,:,l) yb(:,:,l)'];  ymmlprssor(:,:,l)=sort(ymmlprss(:,:,l),2);
        yaor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,1:((k2-1)/2),l);  ybor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,((k2+1)/2+1):k2,l);
        ymor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,((k2+1)/2),l);
end
beta1na_prss=((exp(tna)-1)*evpdf(tna,0,1)*evcdf(tna,0,1)+evpdf(tna,0,1).^2)/(evcdf(tna,0,1).^2);
alpha1na_prss=evpdf(tna,0,1)/evcdf(tna,0,1)+tna*beta1na_prss;
beta2na_prss=exp(tna);  alpha2na_prss=exp(tna)-tna.*exp(tna);
beta3na_prss=exp(tna);  alpha3na_prss=1-exp(tna)+tna.*exp(tna);
beta1nb_prss=((exp(tnb)-1)*evpdf(tnb,0,1)*evcdf(tnb,0,1)+evpdf(tnb,0,1).^2)/(evcdf(tnb,0,1).^2);
alpha1nb_prss=evpdf(tnb,0,1)/evcdf(tnb,0,1)+tnb*beta1nb_prss;
beta2nb_prss=exp(tnb);  alpha2nb_prss=exp(tnb)-tnb.*exp(tnb);
beta3nb_prss=exp(tnb);  alpha3nb_prss=1-exp(tnb)+tnb.*exp(tnb);

beta1ma_prss=((exp(tma)-1)*evpdf(tma,0,1)*evcdf(tma,0,1)+evpdf(tma,0,1).^2)/(evcdf(tma,0,1).^2);
alpha1ma_prss=evpdf(tma,0,1)/evcdf(tma,0,1)+tma*beta1ma_prss;
beta2ma_prss=exp(tma); alpha2ma_prss=exp(tma)-tma.*exp(tma);
beta3ma_prss=exp(tma); alpha3ma_prss=1-exp(tma)+tma.*exp(tma);
beta1mb_prss=((exp(tmb)-1)*evpdf(tmb,0,1)*evcdf(tmb,0,1)+evpdf(tmb,0,1).^2)/(evcdf(tmb,0,1).^2);
alpha1mb_prss=evpdf(tmb,0,1)/evcdf(tmb,0,1)+tmb*beta1mb_prss;
beta2mb_prss=exp(tmb); alpha2mb_prss=exp(tmb)-tmb.*exp(tmb);
beta3mb_prss=exp(tmb); alpha3mb_prss=1-exp(tmb)+tmb.*exp(tmb);

beta1mm_prss=((exp(tmm)-
1)*evpdf(tmm,0,1)*evcdf(tmm,0,1)+evpdf(tmm,0,1).^2)/(evcdf(tmm,0,1).^2);
alpha1mm_prss=evpdf(tmm,0,1)/evcdf(tmm,0,1)+tmm*beta1mm_prss;
beta2mm_prss=exp(tmm); alpha2mm_prss=exp(tmm)-tmm.*exp(tmm);
beta3mm_prss=exp(tmm); alpha3mm_prss=1-exp(tmm)+tmm.*exp(tmm);

%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_prss=(a1-1)*alpha1na_prss-(k1-a1)*alpha2na_prss+alpha3na_prss;
bdelta2n_prss=(b1-1)*alpha1nb_prss-(k1-b1)*alpha2nb_prss+alpha3nb_prss;
delta1n_prss=(a1-1)*beta1na_prss+(k1-a1)*beta2na_prss+beta3na_prss;
delta2n_prss=(b1-1)*beta1nb_prss+(k1-b1)*beta2nb_prss+beta3nb_prss;
bdelta1m_prss=(a2-1)*alpha1ma_prss-(k2-a2)*alpha2ma_prss+alpha3ma_prss;
bdelta2m_prss=(b2-1)*alpha1mb_prss-(k2-b2)*alpha2mb_prss+alpha3mb_prss;
bdelta3m_prss=((k2-1)/2)*alpha1mm_prss-((k2-1)/2)*alpha2mm_prss+alpha3mm_prss;
delta1m_prss=(a2-1)*beta1ma_prss+(k2-a2)*beta2ma_prss+beta3ma_prss;
delta2m_prss=(b2-1)*beta1mb_prss+(k2-b2)*beta2mb_prss+beta3mb_prss;
delta3m_prss=((k2-1)/2)*beta1mm_prss+((k2-1)/2)*beta2mm_prss+beta3mm_prss;
%m,D,K,A,B,C
m1n_prss=r*((k1/2)*(delta1n_prss)+(k1/2)*(delta2n_prss));
m1m_prss=r*(((k2-1)/2)*(delta1m_prss)+((k2-1)/2)*(delta2m_prss)+delta3m_prss);
D1_prss=(r*((k1/2)*(bdelta1n_prss)+(k1/2)*(bdelta2n_prss)))/m1n_prss;
D2_prss=(r*(((k2-1)/2)*(bdelta1m_prss)+((k2-1)/2)*(bdelta2m_prss)+bdelta3m_prss))/m1m_prss;
K1_prss(l)=(sum(sum(delta1n_prss.*xaor(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2n_prss.*xbor(:,:,l)),2))/m1n_prss;
K2_prss(l)=(sum(sum(delta1m_prss.*yaor(:,:,l)))+sum(sum(delta2m_prss.*ybor(:,:,l)))+sum(sum(delta3
m_prss.*ymor(:,:,l))))/m1m_prss;
A_prss(l)=n+m;
B_prss(l)=sum(sum(bdelta1n_prss.*xaor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2n_prss.*xbor(:,:,l)),2)-
K1_prss(l).*D1_prss.*m1n_prss+...
sum(sum(bdelta1m_prss.*yaor(:,:,l)))+sum(sum(bdelta2m_prss.*ybor(:,:,l)))+sum(sum(bdelta3m_prss.*y
mor(:,:,l)))-K2_prss(l).*D2_prss.*m1m_prss;
C_prss(l)=(sum(sum(delta1n_prss.*(xaor(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2n_prss.*(xbor(:,:,l).^2)),2))-
(K1_prss(l).^2).*m1n_prss+...
(sum(sum(delta1m_prss.*(yaor(:,:,l).^2)))+sum(sum(delta2m_prss.*(ybor(:,:,l).^2))))+sum(sum(delta3m_
prss.*(ymor(:,:,l).^2)))-(K2_prss(l).^2).*m1m_prss;
```

```
sigma_prss(l)=(-B_prss(l)+sqrt(B_prss(l).^2+4*C_prss(l).*(A_prss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_prss(l)=K1_prss(l)-D1_prss.*sigma_prss(l);mu2_prss(l)=K2_prss(l)-D2_prss.*sigma_prss(l);
shapeev_prss(l)=1/sigma_prss(l);
teta1_prss(l)=exp(mu1_prss(l).*shapeev_prss(l));teta2_prss(l)=exp(mu2_prss(l).*shapeev_prss(l));
R_prss(l)=teta2_prss(l)./(teta1_prss(l)+teta2_prss(l)); biasRprssmml(l)=R_prss(l)-oran(l);

                %ERSS mml ile örneklem oluşturma%
   x1erss(:,:,l)=(B1(1:(k1/2),1,:,l));     xkerss(:,:,l)=(B1((k1/2+1):k1,k1,:,l));
   y1erss(:,:,l)=(B2(1:((k2-1)/2),1,:,l));   ykerss(:,:,l)=(B2(((k2+1)/2+1):k2,k2,:,l));
   ymerss(:,:,l)=(B2(((k2+1)/2),((k2+1)/2),:,l));
   x1(:,:,l)=(F1(1:(k1/2),1,:,l));  xk(:,:,l)=(F1((k1/2+1):k1,k1,:,l));
   y1(:,:,l)=(F2(1:((k2-1)/2),1,:,l));  yk(:,:,l)=(F2(((k2+1)/2+1):k2,k2,:,l));
   ym(:,:,l)=(F2(((k2+1)/2),((k2+1)/2),:,l));
   if k1==2
      x1top(:,:,l)=[x1(:,:,l) xk(:,:,l)];   sortx1top(:,:,l)=sort(x1top(:,:,l),2);
      x1or(:,:,l)=sortx1top(:,1,l);  xkor(:,:,l)=sortx1top(:,2,l);
   else
      xmmlerss(:,:,l)=[x1(:,:,l)'xk(:,:,l)'];   xmmlerssor(:,:,l)=sort(xmmlerss(:,:,l),2);
      x1or(:,:,l)=xmmlerssor(1:r,1:k1/2,l);  xkor(:,:,l)=xmmlerssor(1:r,k1/2+1:k1,l);
   end
    if k2==3
      y1top(:,:,l)=[y1(:,:,l) ym(:,:,l) yk(:,:,l)];   sorty1top(:,:,l)=sort(y1top(:,:,l),2);
      y1or(:,:,l)=sorty1top(:,1,l);   ymor(:,:,l)=sorty1top(:,2,l);   ykor(:,:,l)=sorty1top(:,3,l);
   else
       ymmlerss(:,:,l)=[y1(:,:,l)'ym(:,:,l) yk(:,:,l)'];   ymmlerssor(:,:,l)=sort(ymmlerss(:,:,l),2);
       y1or(:,:,l)=ymmlerssor(1:r,1:(k2-1)/2,l);   ykor(:,:,l)=ymmlerssor(1:r,(k2+1)/2+1:k2,l);
       ymor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,((k2+1)/2),l);
   end

'ML based on ERSS';
lnLerss=@(s) (-1)*((n+m).*log(s(1))-n*log(s(2))-m*log(s(3))+n*log(k1)+r*(k2-
1)*log(k2)+r*log(factorial(k2)/(factorial((k2-1)/2))^2)+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((x1erss(:,:,l))),2))-k1*sum(sum((((x1erss(:,:,l).^s(1))./s(2))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((xkerss(:,:,l))),2))+sum(sum((k1-1)*log(1-exp(-(xkerss(:,:,l).^s(1))./s(2)))))-
sum(sum((((xkerss(:,:,l).^s(1))./s(2))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((y1erss(:,:,l))),2))-k2*sum(sum((((y1erss(:,:,l).^s(1))./s(3))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((ykerss(:,:,l))),2))+sum(sum((k2-1)*log(1-exp(-(ykerss(:,:,l).^s(1))./s(3)))))-
sum(sum((((ykerss(:,:,l).^s(1))./s(3))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((ymerss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k2-1)/2)*log(1-exp(-(ymerss(:,:,l).^s(1))./s(3)))))-
sum(sum((((k2+1)/2).*((ymerss(:,:,l).^s(1))./s(3))),2)));
s0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[smle,lnLerssval,kokvar] = fminsearch(lnLerss,s0,option);
if kokvar==1;
  mleerss=smle;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmleerss(l,:)=mleerss(1);sigma1mleerss(l,:)=mleerss(2);sigma2mleerss(l,:)=mleerss(3);
RmleERSS(l,:)=sigma2mleerss(l,:)/(sigma1mleerss(l,:)+sigma2mleerss(l,:));
biasRerssml(l)=RmleERSS(l)-oran(l);

'MML based on ERSS';
% beta ve alpha ların hesaplanması
beta31n_erss=((exp(tn1)-1)*evpdf(tn1,0,1)*evcdf(tn1,0,1)+evpdf(tn1,0,1).^2)/(evcdf(tn1,0,1).^2);
alpha31n_erss=evpdf(tn1,0,1)/evcdf(tn1,0,1)+tn1*beta31n_erss;
beta21n_erss=exp(tn1); alpha21n_erss=exp(tn1)-tn1.*exp(tn1);
beta11n_erss=exp(tn1); alpha11n_erss=1-exp(tn1)+tn1.*exp(tn1);
beta3kn_erss=((exp(tnk)-1)*evpdf(tnk,0,1)*evcdf(tnk,0,1)+evpdf(tnk,0,1).^2)/(evcdf(tnk,0,1).^2);
```

```
alpha3kn_erss=evpdf(tnk,0,1)/evcdf(tnk,0,1)+tnk*beta3kn_erss;
beta2kn_erss=exp(tnk);  alpha2kn_erss=exp(tnk)-tnk.*exp(tnk);
beta1kn_erss=exp(tnk);  alpha1kn_erss=1-exp(tnk)+tnk.*exp(tnk);

beta31m_erss=((exp(tm1)-1)*evpdf(tm1,0,1)*evcdf(tm1,0,1)+evpdf(tm1,0,1).^2)/(evcdf(tm1,0,1).^2);
alpha31m_erss=evpdf(tm1,0,1)/evcdf(tm1,0,1)+tm1*beta31m_erss;
beta21m_erss=exp(tm1);  alpha21m_erss=exp(tm1)-tm1.*exp(tm1);
beta11m_erss=exp(tm1);  alpha11m_erss=1-exp(tm1)+tm1.*exp(tm1);
beta3km_erss=((exp(tmk)-1)*evpdf(tmk,0,1)*evcdf(tmk,0,1)+evpdf(tmk,0,1).^2)/(evcdf(tmk,0,1).^2);
alpha3km_erss=evpdf(tmk,0,1)/evcdf(tmk,0,1)+tmk*beta3km_erss;
beta2km_erss=exp(tmk);   alpha2km_erss=exp(tmk)-tmk.*exp(tmk);
beta1km_erss=exp(tmk);  alpha1km_erss=1-exp(tmk)+tmk.*exp(tmk);
beta3mm_erss=((exp(tmm)-
1)*evpdf(tmm,0,1)*evcdf(tmm,0,1)+evpdf(tmm,0,1).^2)/(evcdf(tmm,0,1).^2);
alpha3mm_erss=evpdf(tmm,0,1)/evcdf(tmm,0,1)+tmm*beta3mm_erss;
beta2mm_erss=exp(tmm);   alpha2mm_erss=exp(tmm)-tmm.*exp(tmm);
beta1mm_erss=exp(tmm);  alpha1mm_erss=1-exp(tmm)+tmm.*exp(tmm);

%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_erss=alpha11n_erss-(k1-1)*alpha21n_erss;
bdelta2n_erss=alpha1kn_erss+(k1-1)*alpha3kn_erss;
delta1n_erss=beta11n_erss+(k1-1)*beta21n_erss;
delta2n_erss=beta1kn_erss+(k1-1)*beta3kn_erss;
bdelta1m_erss=alpha11m_erss-(k2-1)*alpha21m_erss;
bdelta2m_erss=alpha1km_erss+(k2-1)*alpha3km_erss;
bdelta3m_erss=alpha1mm_erss-((k2-1)/2)*alpha2mm_erss+((k2-1)/2)*alpha3mm_erss;
delta1m_erss=beta11m_erss+(k2-1)*beta21m_erss;
delta2m_erss=beta1km_erss+(k2-1)*beta3km_erss;
delta3m_erss=beta1mm_erss+((k2-1)/2)*beta2mm_erss+((k2-1)/2)*beta3mm_erss;

m1n_erss=r*((k1/2)*(delta1n_erss)+(k1/2)*(delta2n_erss));
m1m_erss=r*(((k2-1)/2)*(delta1m_erss)+((k2-1)/2)*(delta2m_erss)+delta3m_erss);
D1_erss=(r*((k1/2)*(bdelta1n_erss)+(k1/2)*(bdelta2n_erss)))/m1n_erss;
D2_erss=(r*(((k2-1)/2)*(bdelta1m_erss)+((k2-1)/2)*(bdelta2m_erss)+bdelta3m_erss))/m1m_erss;
K1_erss(l)=(sum(sum(delta1n_erss.*x1or(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2n_erss.*xkor(:,:,l)),2))/m1n_erss;
K2_erss(l)=(sum(sum(delta1m_erss.*y1or(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2m_erss.*ykor(:,:,l)),2)+sum(sum(delt
a3m_erss.*ymor(:,:,l)),2))/m1m_erss;
A_erss(l)=n+m;
B_erss(l)=sum(sum(bdelta1n_erss.*x1or(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2n_erss.*xkor(:,:,l)),2)-
K1_erss(l).*D1_erss.*m1n_erss+...
sum(sum(bdelta1m_erss.*y1or(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2m_erss.*ykor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta3m_erss
.*ymor(:,:,l)),2)-K2_erss(l).*D2_erss.*m1m_erss;
C_erss(l)=(sum(sum(delta1n_erss.*(x1or(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2n_erss.*(xkor(:,:,l).^2)),2))-
(K1_erss(l).^2).*m1n_erss+...
(sum(sum(delta1m_erss.*(y1or(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2m_erss.*(ykor(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta3
m_erss.*(ymor(:,:,l).^2)),2))-(K2_erss(l).^2).*m1m_erss;

sigma_erss(l)=(-B_erss(l)+sqrt(B_erss(l).^2+4*C_erss(l).*(A_erss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_erss(l)=K1_erss(l)-D1_erss.*sigma_erss(l);mu2_erss(l)=K2_erss(l)-D2_erss.*sigma_erss(l);
shapeev_erss(l)=1/sigma_erss(l);
teta1_erss(l)=exp(mu1_erss(l).*shapeev_erss(l));teta2_erss(l)=exp(mu2_erss(l).*shapeev_erss(l));
R_erss(l)=teta2_erss(l)./(teta1_erss(l)+teta2_erss(l)); biasRerssmml(l)=R_erss(l)-oran(l);

                    %MRSS ML örneklem
ximrss(:,:,l)=(B1(1:(k1/2),(k1/2),:,l));  xsmrss(:,:,l)=(B1((k1/2+1):k1,(k1/2+1),:,l));
ymrss(:,:,l)=B2(1:k2,((k2+1)/2),:,l);

                %ML based od MRSS
```

```
lnLmrss=@(y) (-1)*((n+m).*log(y(1))-n*log(y(2))-
m*log(y(3))+n*log(factorial(k1)/(factorial(k1/2)*factorial((k1/2)-1)))+m*log(factorial(k2)/(factorial((k2-
1)/2))^2)+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((ximrss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k1/2)-1)*log(1-exp(-(ximrss(:,:,l).^y(1))./y(2)))))-
sum(sum((((k1+2)/2).*((ximrss(:,:,l).^y(1))./y(2))),2))+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((xsmrss(:,:,l))),2))+sum(sum((k1/2)*log(1-exp(-(xsmrss(:,:,l).^y(1))./y(2)))))-
sum(sum(((k1/2).*((xsmrss(:,:,l).^y(1))./y(2))),2))+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((ymrss(:,:,l))),2))+sum(sum((((k2-1)/2))*log(1-exp(-(ymrss(:,:,l).^y(1))./y(3)))))-
sum(sum((((k2+1)/2)*((ymrss(:,:,l).^y(1))./y(3))),2)));
y0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[ymle,lnLmrssval,kokvar] = fminsearch(lnLmrss,y0,option);
if kokvar==1;
  mlemrss=ymle;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmlemrss(l,:)=mlemrss(1);sigma1mlemrss(l,:)=mlemrss(2);sigma2mlemrss(l,:)=mlemrss(3);
RmleMRSS(l,:)=sigma2mlemrss(l,:)/(sigma1mlemrss(l,:)+sigma2mlemrss(l,:));
biasRmrssml(l)=RmleMRSS(l)-oran(l);

                    %MRSS mml ile örneklem oluşturma
x1mrss(:,:,l)=(F1(1:(k1/2),(k1/2),:,l)); xkmrss(:,:,l)=(F1((k1/2+1):k1,(k1/2+1),:,l));
    if k1==2
      x1mrsstop(:,:,l)=[x1mrss(:,:,l) xkmrss(:,:,l)];  sortx1mrsstop(:,:,l)=sort(x1mrsstop(:,:,l),2);
      x1mor(:,:,l)=sortx1mrsstop(:,1,l); xkmor(:,:,l)=sortx1mrsstop(:,2,l);
    else
      xmmlmrss(:,:,l)=[x1mrss(:,:,l)'xkmrss(:,:,l)'];   xmmlmrssor(:,:,l)=sort(xmmlmrss(:,:,l),2);
      x1mor(:,:,l)=xmmlmrssor(1:r,1:k1/2,l); xkmor(:,:,l)=xmmlmrssor(1:r,k1/2+1:k1,l);
    end
y1mrss(:,:,l)=F2(1:k2,((k2+1)/2),:,l); y1mor(:,:,l)=(y1mrss(:,:,l));
ten1=t1(k1/2); ten2=t1(k1/2+1);tem1=t2((k2+1)/2);
% beta ve alpha ların hesaplanması
beta11n_mrss=((exp(ten1)-1)*evpdf(ten1,0,1)*evcdf(ten1,0,1)+evpdf(ten1,0,1).^2)/(evcdf(ten1,0,1).^2);
alpha11n_mrss=evpdf(ten1,0,1)/evcdf(ten1,0,1)+ten1*beta11n_mrss;
beta21n_mrss=exp(ten1); alpha21n_mrss=exp(ten1)-ten1.*exp(ten1);
beta31n_mrss=exp(ten1); alpha31n_mrss=1-exp(ten1)+ten1.*exp(ten1);
beta1kn_mrss=((exp(ten2)-1)*evpdf(ten2,0,1)*evcdf(ten2,0,1)+evpdf(ten2,0,1).^2)/(evcdf(ten2,0,1).^2);
alpha1kn_mrss=evpdf(ten2,0,1)/evcdf(ten2,0,1)+ten2*beta1kn_mrss;
beta2kn_mrss=exp(ten2); alpha2kn_mrss=exp(ten2)-ten2.*exp(ten2);
beta3kn_mrss=exp(ten2); alpha3kn_mrss=1-exp(ten2)+ten2.*exp(ten2);

beta11m_mrss=((exp(tem1)-
1)*evpdf(tem1,0,1)*evcdf(tem1,0,1)+evpdf(tem1,0,1).^2)/(evcdf(tem1,0,1).^2);
alpha11m_mrss=evpdf(tem1,0,1)/evcdf(tem1,0,1)+tem1*beta11m_mrss;
beta21m_mrss=exp(tem1); alpha21m_mrss=exp(tem1)-tem1.*exp(tem1);
beta31m_mrss=exp(tem1); alpha31m_mrss=1-exp(tem1)+tem1.*exp(tem1);

%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_mrss=((k1-2)/2)*alpha11n_mrss-(k1/2)*alpha21n_mrss+alpha31n_mrss;
bdelta2n_mrss=(k1/2)*alpha1kn_mrss-((k1-2)/2)*alpha2kn_mrss+alpha3kn_mrss;
delta1n_mrss=((k1-2)/2)*beta11n_mrss+(k1/2)*beta21n_mrss+beta31n_mrss;
delta2n_mrss=(k1/2)*beta1kn_mrss+((k1-2)/2)*beta2kn_mrss+beta3kn_mrss;
bdelta1m_mrss=((k2-1)/2)*alpha11m_mrss-((k2-1)/2)*alpha21m_mrss+alpha31m_mrss;
delta1m_mrss=((k2-1)/2)*beta11m_mrss+((k2-1)/2)*beta21m_mrss+beta31m_mrss;
%m D K A B C nin hesaplanması
m1n_mrss=r*((k1/2)*(delta1n_mrss)+(k1/2)*(delta2n_mrss));
m1m_mrss=r*((k2)*(delta1m_mrss));
D1_mrss=(r*((k1/2)*(bdelta1n_mrss)+(k1/2)*(bdelta2n_mrss)))/m1n_mrss;
```

```
D2_mrss=(r*((k2)*(bdelta1m_mrss)))/m1m_mrss;
K1_mrss(l)=(sum(sum(delta1n_mrss.*x1mor(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2n_mrss.*xkmor(:,:,l)),2))/m1n_mr
ss;
K2_mrss(l)=(sum(sum(delta1m_mrss.*y1mor(:,:,l)),2))/m1m_mrss;
A_mrss(l)=n+m;
B_mrss(l)=sum(sum(bdelta1n_mrss.*x1mor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2n_mrss.*xkmor(:,:,l)),2)-
K1_mrss(l).*D1_mrss.*m1n_mrss+...
   sum(sum(bdelta1m_mrss.*y1mor(:,:,l)),2)-K2_mrss(l).*D2_mrss.*m1m_mrss;
C_mrss(l)=(sum(sum(delta1n_mrss.*(x1mor(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2n_mrss.*(xkmor(:,:,l).^2)),2))-
(K1_mrss(l).^2).*m1n_mrss+...
   sum(sum(delta1m_mrss.*(y1mor(:,:,l).^2)),2)-(K2_mrss(l).^2).*m1m_mrss;

sigma_mrss(l)=(-B_mrss(l)+sqrt(B_mrss(l).^2+4*C_mrss(l).*(A_mrss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_mrss(l)=K1_mrss(l)-D1_mrss.*sigma_mrss(l);mu2_mrss(l)=K2_mrss(l)-D2_mrss.*sigma_mrss(l);
shapeev_mrss(l)=1/sigma_mrss(l);
teta1_mrss(l)=exp(mu1_mrss(l).*shapeev_mrss(l));teta2_mrss(l)=exp(mu2_mrss(l).*shapeev_mrss(l));
R_mrss(l)=teta2_mrss(l)./(teta1_mrss(l)+teta2_mrss(l)); biasRmrssmml(l)=R_mrss(l)-oran(l);

elseif mod(k1,2)==1 && mod(k2,2)==0
   %mx tek my çift ise
            %PRSS ml ile örneklem oluşturma%
    xaprss(:,:,l)=(B1(1:((k1-1)/2),a1,:,l)); xbprss(:,:,l)=(B1(((k1+1)/2+1):k1,b1,:,l));
    xmprss(:,:,l)=(B1(((k1+1)/2),((k1+1)/2),:,l));
    yaprss(:,:,l)=(B2(1:(k2/2),a2,:,l));  ybprss(:,:,l)=(B2((k2/2+1):k2,b2,:,l));
            %ML based od PRSS
lnLprss=@(k) (-1)*((n+m).*log(k(1))-n*log(k(2))-m*log(k(3))+((n-r)/2)*log(factorial(k1)/(factorial(k1-
a1)*factorial(a1-1)))+((n-r)/2)*log(factorial(k1)/(factorial(k1-b1)*factorial(b1-1)))+...
(m/2)*log(factorial(k2)/(factorial(k2-a2)*factorial(a2-1)))+(m/2)*log(factorial(k2)/(factorial(k2-
b2)*factorial(b2-1)))+r*log(factorial(k1)/(factorial((k1-1)/2))^2)+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((xaprss(:,:,l))),2))+sum(sum((a1-1)*log(1-exp(-(xaprss(:,:,l).^k(1))./k(2)))))-
sum(sum(((k1-a1+1).*((xaprss(:,:,l).^k(1))./k(2))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((xbprss(:,:,l))),2))+sum(sum((b1-1)*log(1-exp(-(xbprss(:,:,l).^k(1))./k(2)))))-
sum(sum(((k1-b1+1).*((xbprss(:,:,l).^k(1))./k(2))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((xmprss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k1-1)/2)*log(1-exp(-(xmprss(:,:,l).^k(1))./k(2)))))-
sum(sum((((k1+1)/2).*((xmprss(:,:,l).^k(1))./k(2))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((yaprss(:,:,l))),2))+sum(sum((a2-1)*log(1-exp(-(yaprss(:,:,l).^k(1))./k(3)))))-
sum(sum(((k2-a2+1).*((yaprss(:,:,l).^k(1))./k(3))),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(log((ybprss(:,:,l))),2))+sum(sum((b2-1)*log(1-exp(-(ybprss(:,:,l).^k(1))./k(3)))))-
sum(sum(((k2-b2+1).*((ybprss(:,:,l).^k(1))./k(3))),2)));
k0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[kmle,lnLprssval,kokvar] = fminsearch(lnLprss,k0,option);
if kokvar==1;
  mleprss=kmle;
end

%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmleprss(l,:)=mleprss(1); sigma1mleprss(l,:)=mleprss(2);sigma2mleprss(l,:)=mleprss(3);
RmlePRSS(l,:)=sigma2mleprss(l,:)/(sigma1mleprss(l,:)+sigma2mleprss(l,:));
biasRprssml(l)=RmlePRSS(l)-oran(l);

%PRSS MML için örneklem oluşturma
tna=t1(a1);tnb=t1(b1);tnm=t1((k1+1)/2);tma=t2(a2);tmb=t2(b2);

xa(:,:,l)=(F1(1:((k1-1)/2),a1,:,l));xb(:,:,l)=(F1(((k1+1)/2+1):k1,b1,:,l));
xm(:,:,l)=(F1(((k1+1)/2),((k1+1)/2),:,l));
ya(:,:,l)=(F2(1:(k2/2),a2,:,l));yb(:,:,l)=(F2((k2/2+1):k2,b2,:,l));
   if k1==3
```

```
      xatop(:,:,l)=[xa(:,:,l) xm(:,:,l) xb(:,:,l)];  sortxatop(:,:,l)=sort(xatop(:,:,l),2);
      xaor(:,:,l)=sortxatop(:,1,l);  xmor(:,:,l)=sortxatop(:,2,l);  xbor(:,:,l)=sortxatop(:,3,l);
   else
      xmmlprss(:,:,l)=[xa(:,:,l)'xm(:,:,l) xb(:,:,l)'];  xmmlprssor(:,:,l)=sort(xmmlprss(:,:,l),2);
      xaor(:,:,l)=xmmlprssor(1:r,1:(k1-1)/2,l);  xbor(:,:,l)=xmmlprssor(1:r,(k1+1)/2+1:k1,l);
      xmor(:,:,l)=xmmlprssor(1:r,((k1+1)/2),l);
   end
   if k2==2
      yatop(:,:,l)=[ya(:,:,l) yb(:,:,l)];  sortyatop(:,:,l)=sort(yatop(:,:,l),2);
      yaor(:,:,l)=sortyatop(:,1,l);  ybor(:,:,l)=sortyatop(:,2,l);
   else
      ymmlprss(:,:,l)=[ya(:,:,l)'yb(:,:,l)'];  ymmlprssor(:,:,l)=sort(ymmlprss(:,:,l),2);
      yaor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,1:k2/2,l);   ybor(:,:,l)=ymmlprssor(1:r,k2/2+1:k2,l);
   end
'MML YÖNTEMİ';
beta1na_prss=((exp(tna)-1)*evpdf(tna,0,1)*evcdf(tna,0,1)+evpdf(tna,0,1).^2)/(evcdf(tna,0,1).^2);
alpha1na_prss=evpdf(tna,0,1)/evcdf(tna,0,1)+tna*beta1na_prss;
beta2na_prss=exp(tna); alpha2na_prss=exp(tna)-tna.*exp(tna);
beta3na_prss=exp(tna); alpha3na_prss=1-exp(tna)+tna.*exp(tna);
beta1nb_prss=((exp(tnb)-1)*evpdf(tnb,0,1)*evcdf(tnb,0,1)+evpdf(tnb,0,1).^2)/(evcdf(tnb,0,1).^2);
alpha1nb_prss=evpdf(tnb,0,1)/evcdf(tnb,0,1)+tnb*beta1nb_prss;
beta2nb_prss=exp(tnb); alpha2nb_prss=exp(tnb)-tnb.*exp(tnb);
beta3nb_prss=exp(tnb); alpha3nb_prss=1-exp(tnb)+tnb.*exp(tnb);
beta1nm_prss=((exp(tnm)-1)*evpdf(tnm,0,1)*evcdf(tnm,0,1)+evpdf(tnm,0,1).^2)/(evcdf(tnm,0,1).^2);
alpha1nm_prss=evpdf(tnm,0,1)/evcdf(tnm,0,1)+tnm*beta1nm_prss;
beta2nm_prss=exp(tnm); alpha2nm_prss=exp(tnm)-tnm.*exp(tnm);
beta3nm_prss=exp(tnm); alpha3nm_prss=1-exp(tnm)+tnm.*exp(tnm);

beta1ma_prss=((exp(tma)-1)*evpdf(tma,0,1)*evcdf(tma,0,1)+evpdf(tma,0,1).^2)/(evcdf(tma,0,1).^2);
alpha1ma_prss=evpdf(tma,0,1)/evcdf(tma,0,1)+tma*beta1ma_prss;
beta2ma_prss=exp(tma); alpha2ma_prss=exp(tma)-tma.*exp(tma);
beta3ma_prss=exp(tma); alpha3ma_prss=1-exp(tma)+tma.*exp(tma);
beta1mb_prss=((exp(tmb)-1)*evpdf(tmb,0,1)*evcdf(tmb,0,1)+evpdf(tmb,0,1).^2)/(evcdf(tmb,0,1).^2);
alpha1mb_prss=evpdf(tmb,0,1)/evcdf(tmb,0,1)+tmb*beta1mb_prss;
beta2mb_prss=exp(tmb); alpha2mb_prss=exp(tmb)-tmb.*exp(tmb);
beta3mb_prss=exp(tmb); alpha3mb_prss=1-exp(tmb)+tmb.*exp(tmb);

%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_prss=(a1-1)*alpha1na_prss-(k1-a1)*alpha2na_prss+alpha3na_prss;
bdelta2n_prss=(b1-1)*alpha1nb_prss-(k1-b1)*alpha2nb_prss+alpha3nb_prss;
bdelta3n_prss=((k1-1)/2)*alpha1nm_prss-((k1-1)/2)*alpha2nm_prss+alpha3nm_prss;
delta1n_prss=(a1-1)*beta1na_prss+(k1-a1)*beta2na_prss+beta3na_prss;
delta2n_prss=(b1-1)*beta1nb_prss+(k1-b1)*beta2nb_prss+beta3nb_prss;
delta3n_prss=((k1-1)/2)*beta1nm_prss+((k1-1)/2)*beta2nm_prss+beta3nm_prss;
bdelta1m_prss=(a2-1)*alpha1ma_prss-(k2-a2)*alpha2ma_prss+alpha3ma_prss;
bdelta2m_prss=(b2-1)*alpha1mb_prss-(k2-b2)*alpha2mb_prss+alpha3mb_prss;
delta1m_prss=(a2-1)*beta1ma_prss+(k2-a2)*beta2ma_prss+beta3ma_prss;
delta2m_prss=(b2-1)*beta1mb_prss+(k2-b2)*beta2mb_prss+beta3mb_prss;

m1n_prss=r*(((k1-1)/2)*(delta1n_prss)+((k1-1)/2)*(delta2n_prss)+delta3n_prss);
m1m_prss=r*((k2/2)*(delta1m_prss)+(k2/2)*(delta2m_prss));
D1_prss=(r*(((k1-1)/2)*(bdelta1n_prss)+((k1-1)/2)*(bdelta2n_prss)+bdelta3n_prss))/m1n_prss;
D2_prss=(r*((k2/2)*(bdelta1m_prss)+(k2/2)*(bdelta2m_prss)))/m1m_prss;
K1_prss(l)=(sum(sum(delta1n_prss.*xaor(:,:,l)))+sum(sum(delta2n_prss.*xbor(:,:,l)))+sum(sum(delta3n_
prss.*xmor(:,:,l))))/m1n_prss;
K2_prss(l)=(sum(sum(delta1m_prss.*yaor(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2m_prss.*ybor(:,:,l)),2))/m1m_prss;
A_prss(l)=n+m;
```

```
B_prss(l)=sum(sum(bdelta1n_prss.*xaor(:,:,l)))+sum(sum(bdelta2n_prss.*xbor(:,:,l)))+sum(sum(bdelta3n
_prss.*xmor(:,:,l)))-K1_prss(l).*D1_prss.*m1n_prss+...
sum(sum(bdelta1m_prss.*yaor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2m_prss.*ybor(:,:,l)),2)-
K2_prss(l).*D2_prss.*m1m_prss;
C_prss(l)=(sum(sum(delta1n_prss.*(xaor(:,:,l).^2)))+sum(sum(delta2n_prss.*(xbor(:,:,l).^2))))+sum(sum(
delta3n_prss.*(xmor(:,:,l).^2)))-(K1_prss(l).^2).*m1n_prss+...
(sum(sum(delta1m_prss.*(yaor(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2m_prss.*(ybor(:,:,l).^2)),2))-
(K2_prss(l).^2).*m1m_prss;

sigma_prss(l)=(-B_prss(l)+sqrt(B_prss(l).^2+4*C_prss(l).*(A_prss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_prss(l)=K1_prss(l)-D1_prss.*sigma_prss(l);mu2_prss(l)=K2_prss(l)-D2_prss.*sigma_prss(l);
shapeev_prss(l)=1/sigma_prss(l);
teta1_prss(l)=exp(mu1_prss(l).*shapeev_prss(l));teta2_prss(l)=exp(mu2_prss(l).*shapeev_prss(l));
R_prss(l)=teta2_prss(l)./(teta1_prss(l)+teta2_prss(l));  biasRprssmml(l)=R_prss(l)-oran(l);

% ERSS
x1erss(:,:,l)=(B1(1:((k1-1)/2),1,:,l));xkerss(:,:,l)=(B1(((k1+1)/2+1):k1,k1,:,l));
xmerss(:,:,l)=(B1(((k1+1)/2),((k1+1)/2),:,l));
y1erss(:,:,l)=(B2(1:(k2/2),1,:,l));ykerss(:,:,l)=(B2((k2/2+1):k2,k2,:,l));
x1(:,:,l)=(F1(1:((k1-1)/2),1,:,l));xk(:,:,l)=(F1(((k1+1)/2+1):k1,k1,:,l));
xm(:,:,l)=(F1(((k1+1)/2),((k1+1)/2),:,l));
y1(:,:,l)=(F2(1:(k2/2),1,:,l));yk(:,:,l)=(F2((k2/2+1):k2,k2,:,l));
if k1==3
   x1top(:,:,l)=[x1(:,:,l) xm(:,:,l) xk(:,:,l)];   sortx1top(:,:,l)=sort(x1top(:,:,l),2);
   x1or(:,:,l)=sortx1top(:,1,l);   xmor(:,:,l)=sortx1top(:,2,l);
   xkor(:,:,l)=sortx1top(:,3,l);
else
   xmmlerss(:,:,l)=[x1(:,:,l)'xm(:,:,l) xk(:,:,l)'];  xmmlerssor(:,:,l)=sort(xmmlerss(:,:,l),2);
   x1or(:,:,l)=xmmlerssor(1:r,1:(k1-1)/2,l);  xkor(:,:,l)=xmmlerssor(1:r,(k1+1)/2+1:k1,l);
   xmor(:,:,l)=xmmlerssor(1:r,((k1+1)/2),l);
end
if k2==2
   y1top(:,:,l)=[y1(:,:,l) yk(:,:,l)]; sorty1top(:,:,l)=sort(y1top(:,:,l),2);
   y1or(:,:,l)=sorty1top(:,1,l); ykor(:,:,l)=sorty1top(:,2,l);
else
   ymmlerss(:,:,l)=[y1(:,:,l)'yk(:,:,l)'];  ymmlerssor(:,:,l)=sort(ymmlerss(:,:,l),2);
   y1or(:,:,l)=ymmlerssor(1:r,1:k2/2,l);  ykor(:,:,l)=ymmlerssor(1:r,k2/2+1:k2,l);
end

'ML based on ERSS';
lnLerss=@(s) (-1)*((n+m).*log(s(1))-n*log(s(2))-m*log(s(3))+r*(k1-
1)*log(k1)+r*log(factorial(k1)/(factorial((k1-1)/2))^2)+m*log(k2)+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((x1erss(:,:,l))),2))-k1*sum(sum((((x1erss(:,:,l).^s(1))./s(2))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((xkerss(:,:,l))),2))+sum(sum((k1-1)*log(1-exp(-(xkerss(:,:,l).^s(1))./s(2)))))-
sum(sum((((xkerss(:,:,l).^s(1))./s(2))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((xmerss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k1-1)/2)*log(1-exp(-(xmerss(:,:,l).^s(1))./s(2)))))-
sum(sum((((k1+1)/2).*((xmerss(:,:,l).^s(1))./s(2))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((y1erss(:,:,l))),2))-k2*sum(sum((((y1erss(:,:,l).^s(1))./s(3))),2))+...
(s(1)-1).*sum(sum(log((ykerss(:,:,l))),2))+sum(sum((k2-1)*log(1-exp(-(ykerss(:,:,l).^s(1))./s(3)))))-
sum(sum((((ykerss(:,:,l).^s(1))./s(3))),2)));
s0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[smle,lnLerssval,kokvar] = fminsearch(lnLerss,s0,option);
if kokvar==1;
  mleerss=smle;
end
```

```
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmleerss(l,:)=mleerss(1);sigma1mleerss(l,:)=mleerss(2);sigma2mleerss(l,:)=mleerss(3);
RmleERSS(l,:)=sigma2mleerss(l,:)/(sigma1mleerss(l,:)+sigma2mleerss(l,:));
biasRerssml(l)=RmleERSS(l)-oran(l);

'MML based on ERSS';
% beta ve alpha ların hesaplanması
beta31n_erss=((exp(tn1)-1)*evpdf(tn1,0,1)*evcdf(tn1,0,1)+evpdf(tn1,0,1).^2)/(evcdf(tn1,0,1).^2);
alpha31n_erss=evpdf(tn1,0,1)/evcdf(tn1,0,1)+tn1*beta31n_erss;
beta21n_erss=exp(tn1); alpha21n_erss=exp(tn1)-tn1.*exp(tn1);
beta11n_erss=exp(tn1); alpha11n_erss=1-exp(tn1)+tn1.*exp(tn1);
beta3kn_erss=((exp(tnk)-1)*evpdf(tnk,0,1)*evcdf(tnk,0,1)+evpdf(tnk,0,1).^2)/(evcdf(tnk,0,1).^2);
alpha3kn_erss=evpdf(tnk,0,1)/evcdf(tnk,0,1)+tnk*beta3kn_erss;
beta2kn_erss=exp(tnk); alpha2kn_erss=exp(tnk)-tnk.*exp(tnk);
beta1kn_erss=exp(tnk); alpha1kn_erss=1-exp(tnk)+tnk.*exp(tnk);
beta3mn_erss=((exp(tnm)-1)*evpdf(tnm,0,1)*evcdf(tnm,0,1)+evpdf(tnm,0,1).^2)/(evcdf(tnm,0,1).^2);
alpha3mn_erss=evpdf(tnm,0,1)/evcdf(tnm,0,1)+tnm*beta3mn_erss;
beta2mn_erss=exp(tnm); alpha2mn_erss=exp(tnm)-tnm.*exp(tnm);
beta1mn_erss=exp(tnm); alpha1mn_erss=1-exp(tnm)+tnm.*exp(tnm);

beta31m_erss=((exp(tm1)-1)*evpdf(tm1,0,1)*evcdf(tm1,0,1)+evpdf(tm1,0,1).^2)/(evcdf(tm1,0,1).^2);
alpha31m_erss=evpdf(tm1,0,1)/evcdf(tm1,0,1)+tm1*beta31m_erss;
beta21m_erss=exp(tm1); alpha21m_erss=exp(tm1)-tm1.*exp(tm1);
beta11m_erss=exp(tm1); alpha11m_erss=1-exp(tm1)+tm1.*exp(tm1);
beta3km_erss=((exp(tmk)-1)*evpdf(tmk,0,1)*evcdf(tmk,0,1)+evpdf(tmk,0,1).^2)/(evcdf(tmk,0,1).^2);
alpha3km_erss=evpdf(tmk,0,1)/evcdf(tmk,0,1)+tmk*beta3km_erss;
beta2km_erss=exp(tmk); alpha2km_erss=exp(tmk)-tmk.*exp(tmk);
beta1km_erss=exp(tmk); alpha1km_erss=1-exp(tmk)+tmk.*exp(tmk);

%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_erss=alpha11n_erss-(k1-1)*alpha21n_erss;
bdelta2n_erss=alpha1kn_erss+(k1-1)*alpha3kn_erss;
bdelta3n_erss=alpha1mn_erss-((k1-1)/2)*alpha2mn_erss+((k1-1)/2)*alpha3mn_erss;
delta1n_erss=beta11n_erss+(k1-1)*beta21n_erss;
delta2n_erss=beta1kn_erss+(k1-1)*beta3kn_erss;
delta3n_erss=beta1mn_erss+((k1-1)/2)*beta2mn_erss+((k1-1)/2)*beta3mn_erss;
bdelta1m_erss=alpha11m_erss-(k2-1)*alpha21m_erss;
bdelta2m_erss=alpha1km_erss+(k2-1)*alpha3km_erss;
delta1m_erss=beta11m_erss+(k2-1)*beta21m_erss;
delta2m_erss=beta1km_erss+(k2-1)*beta3km_erss;

%m D K A B C nin hesaplanması
m1n_erss=r*(((k1-1)/2)*(delta1n_erss)+((k1-1)/2)*(delta2n_erss)+delta3n_erss);
m1m_erss=r*((k2/2)*(delta1m_erss)+(k2/2)*(delta2m_erss));
D1_erss=(r*(((k1-1)/2)*(bdelta1n_erss)+((k1-1)/2)*(bdelta2n_erss)+bdelta3n_erss))/m1n_erss;
D2_erss=(r*((k2/2)*(bdelta1m_erss)+(k2/2)*(bdelta2m_erss)))/m1m_erss;
K1_erss(l)=(sum(sum(delta1n_erss.*x1or(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2n_erss.*xkor(:,:,l)),2)+sum(sum(delta
3n_erss.*xmor(:,:,l)),2))/m1n_erss;
K2_erss(l)=(sum(sum(delta1m_erss.*y1or(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2m_erss.*ykor(:,:,l)),2))/m1m_erss;
A_erss(l)=n+m;
B_erss(l)=sum(sum(bdelta1n_erss.*x1or(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2n_erss.*xkor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelt
a3n_erss.*xmor(:,:,l)),2)-K1_erss(l).*D1_erss.*m1n_erss+...
   sum(sum(bdelta1m_erss.*y1or(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2m_erss.*ykor(:,:,l)),2)-
K2_erss(l).*D2_erss.*m1m_erss;
C_erss(l)=(sum(sum(delta1n_erss.*(x1or(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2n_erss.*(xkor(:,:,l).^2)),2)+sum(su
m(delta3n_erss.*(xmor(:,:,l).^2)),2))-(K1_erss(l).^2).*m1n_erss+...
   (sum(sum(delta1m_erss.*(y1or(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2m_erss.*(ykor(:,:,l).^2)),2))-
(K2_erss(l).^2).*m1m_erss;
```

```
sigma_erss(l)=(-B_erss(l)+sqrt(B_erss(l).^2+4*C_erss(l).*(A_erss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_erss(l)=K1_erss(l)-D1_erss.*sigma_erss(l);mu2_erss(l)=K2_erss(l)-D2_erss.*sigma_erss(l);
shapeev_erss(l)=1/sigma_erss(l);
teta1_erss(l)=exp(mu1_erss(l).*shapeev_erss(l));teta2_erss(l)=exp(mu2_erss(l).*shapeev_erss(l));
R_erss(l)=teta2_erss(l)./(teta1_erss(l)+teta2_erss(l)); biasRerssmml(l)=R_erss(l)-oran(l);

%MRSS ml ile örneklem oluşturma%
xmrss(:,:,l)=B1(1:k1,((k1+1)/2),:,l); yimrss(:,:,l)=(B2(1:(k2/2),(k2/2),:,l));
ysmrss(:,:,l)=(B2((k2/2+1):k2,(k2/2+1),:,l));

lnLmrss=@(y) (-1)*((n+m).*log(y(1))-n*log(y(2))-m*log(y(3))+n*log(factorial(k1)/(factorial((k1-
1)/2))^2)+m*log(factorial(k2)/(factorial((k2/2)-1)*factorial(k2/2)))+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((xmrss(:,:,l))),2))+sum(sum((((k1-1)/2))*log(1-exp(-(xmrss(:,:,l).^y(1))./y(2)))))-
sum(sum((((k1+1)/2)*((xmrss(:,:,l).^y(1))./y(2))),2))+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((yimrss(:,:,l))),2))+sum(sum(((k2/2)-1)*log(1-exp(-(yimrss(:,:,l).^y(1))./y(3)))))-
sum(sum((((k2+2)/2).*((yimrss(:,:,l).^y(1))./y(3))),2))+...
(y(1)-1).*sum(sum(log((ysmrss(:,:,l))),2))+sum(sum((k2/2)*log(1-exp(-(ysmrss(:,:,l).^y(1))./y(3)))))-
sum(sum(((k2/2).*((ysmrss(:,:,l).^y(1))./y(3))),2)));
y0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[ymle,lnLmrssval,kokvar] = fminsearch(lnLmrss,y0,option);
if kokvar==1;
  mlemrss=ymle;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmlemrss(l,:)=mlemrss(1);sigma1mlemrss(l,:)=mlemrss(2);sigma2mlemrss(l,:)=mlemrss(3);
RmleMRSS(l,:)=sigma2mlemrss(l,:)/(sigma1mlemrss(l,:)+sigma2mlemrss(l,:));
biasRmrssml(l)=RmleMRSS(l)-oran(l);

          %MRSS mMl ile örneklem oluşturma%
x1mrss(:,:,l)=F1(1:k1,((k1+1)/2),:,l);
y1mrss(:,:,l)=(F2(1:(k2/2),(k2/2),:,l)); ykmrss(:,:,l)=(F2((k2/2+1):k2,(k2/2+1),:,l));
    if k2==2
       y1mrsstop(:,:,l)=[y1mrss(:,:,l) ykmrss(:,:,l)];  sorty1mrsstop(:,:,l)=sort(y1mrsstop(:,:,l),2);
       y1mor(:,:,l)=sorty1mrsstop(:,1,l);  ykmor(:,:,l)=sorty1mrsstop(:,2,l);
    else
      ymmlmrss(:,:,l)=[y1mrss(:,:,l)'ykmrss(:,:,l)'];  ymmlmrssor(:,:,l)=sort(ymmlmrss(:,:,l),2);
      y1mor(:,:,l)=ymmlmrssor(1:r,1:k2/2,l);   ykmor(:,:,l)=ymmlmrssor(1:r,k2/2+1:k2,l);
    end
x1mor(:,:,l)=x1mrss(:,:,l); ten1=t1((k1+1)/2);tem1=t2(k2/2);tem2=t2(k2/2+1);

beta11n_mrss=((exp(ten1)-1)*evpdf(ten1,0,1)*evcdf(ten1,0,1)+evpdf(ten1,0,1).^2)/(evcdf(ten1,0,1).^2);
alpha11n_mrss=evpdf(ten1,0,1)/evcdf(ten1,0,1)+ten1*beta11n_mrss;
beta21n_mrss=exp(ten1); alpha21n_mrss=exp(ten1)-ten1.*exp(ten1);
beta31n_mrss=exp(ten1); alpha31n_mrss=1-exp(ten1)+ten1.*exp(ten1);

beta11m_mrss=((exp(tem1)-
1)*evpdf(tem1,0,1)*evcdf(tem1,0,1)+evpdf(tem1,0,1).^2)/(evcdf(tem1,0,1).^2);
alpha11m_mrss=evpdf(tem1,0,1)/evcdf(tem1,0,1)+tem1*beta11m_mrss;
beta21m_mrss=exp(tem1); alpha21m_mrss=exp(tem1)-tem1.*exp(tem1);
beta31m_mrss=exp(tem1); alpha31m_mrss=1-exp(tem1)+tem1.*exp(tem1);
beta1km_mrss=((exp(tem2)-
1)*evpdf(tem2,0,1)*evcdf(tem2,0,1)+evpdf(tem2,0,1).^2)/(evcdf(tem2,0,1).^2);
alpha1km_mrss=evpdf(tem2,0,1)/evcdf(tem2,0,1)+tem2*beta1km_mrss;
beta2km_mrss=exp(tem2); alpha2km_mrss=exp(tem2)-tem2.*exp(tem2);
beta3km_mrss=exp(tem2); alpha3km_mrss=1-exp(tem2)+tem2.*exp(tem2);
```

```
%büyük delta ve delta nın hesaplanması
bdelta1n_mrss=((k1-1)/2)*alpha11n_mrss-((k1-1)/2)*alpha21n_mrss+alpha31n_mrss;
delta1n_mrss=((k1-1)/2)*beta11n_mrss+((k1-1)/2)*beta21n_mrss+beta31n_mrss;
bdelta1m_mrss=((k2-2)/2)*alpha11m_mrss-(k2/2)*alpha21m_mrss+alpha31m_mrss;
bdelta2m_mrss=(k2/2)*alpha1km_mrss-((k2-2)/2)*alpha2km_mrss+alpha3km_mrss;
delta1m_mrss=((k2-2)/2)*beta11m_mrss+(k2/2)*beta21m_mrss+beta31m_mrss;
delta2m_mrss=(k2/2)*beta1km_mrss+((k2-2)/2)*beta2km_mrss+beta3km_mrss;

%m D K A B C nin hesaplanması
m1n_mrss=r*((k1)*(delta1n_mrss));
m1m_mrss=r*((k2/2)*(delta1m_mrss)+(k2/2)*(delta2m_mrss));
D1_mrss=(r*((k1)*(bdelta1n_mrss)))/m1n_mrss;
D2_mrss=(r*((k2/2)*(bdelta1m_mrss)+(k2/2)*(bdelta2m_mrss)))/m1m_mrss;
K1_mrss(l)=(sum(sum(delta1n_mrss.*x1mor(:,:,l)),2))/m1n_mrss;
K2_mrss(l)=(sum(sum(delta1m_mrss.*y1mor(:,:,l)),2)+sum(sum(delta2m_mrss.*ykmor(:,:,l)),2))/m1m_
mrss;
A_mrss(l)=n+m;
B_mrss(l)=sum(sum(bdelta1n_mrss.*x1mor(:,:,l)),2)-K1_mrss(l).*D1_mrss.*m1n_mrss+...
sum(sum(bdelta1m_mrss.*y1mor(:,:,l)),2)+sum(sum(bdelta2m_mrss.*ykmor(:,:,l)),2)-
K2_mrss(l).*D2_mrss.*m1m_mrss;
C_mrss(l)=sum(sum(delta1n_mrss.*(x1mor(:,:,l).^2)),2)-(K1_mrss(l).^2).*m1n_mrss+...
(sum(sum(delta1m_mrss.*(y1mor(:,:,l).^2)),2)+sum(sum(delta2m_mrss.*(ykmor(:,:,l).^2)),2))-
(K2_mrss(l).^2).*m1m_mrss;

sigma_mrss(l)=(-B_mrss(l)+sqrt(B_mrss(l).^2+4*C_mrss(l).*(A_mrss(l)))./(2*sqrt((n+m)*(n+m)));
mu1_mrss(l)=K1_mrss(l)-D1_mrss.*sigma_mrss(l);mu2_mrss(l)=K2_mrss(l)-D2_mrss.*sigma_mrss(l);
shapeev_mrss(l)=1/sigma_mrss(l);
teta1_mrss(l)=exp(mu1_mrss(l).*shapeev_mrss(l));teta2_mrss(l)=exp(mu2_mrss(l).*shapeev_mrss(l));
R_mrss(l)=teta2_mrss(l)./(teta1_mrss(l)+teta2_mrss(l)); biasRmrssmml(l)=R_mrss(l)-oran(l);

end
end
```

EK 2 Sistem Güvenilirliğinin Sansürlü SRS ve RSS Verisine Dayalı ML ve MML Tahmin Edicilerinin Monte-Carlo Simülasyon Çalışması ile Elde Edildiği MATLAB Program

```
clc
clear all
close all
rng('shuffle');
mx=10; my=10; c=5; n=mx*c; m=my*c;
sekil=1.5; olcek1=1; olcek2=2;
s=fix(100000/min(n,m));

p=0.1; % sansürlenme oranı
r1=fix(p*n+0.5); r2=fix(p*m+0.5); r1rss=fix(p*mx+0.5); r2rss=fix(p*my+0.5);
for l=1:s
   oran(l)=olcek2/(olcek1+olcek2);
   %srs ile örneklem belirleme
   for i=1:n
      U=unifrnd(0,1);
      x(i,l)=((-log(1-U))*olcek1)^(1/sekil);
   end
   for i=1:m
      U=unifrnd(0,1);
      y(i,l)=((-log(1-U))*olcek2)^(1/sekil);
   end
   x1(:,l)=sort(x(:,l)); y1(:,l)=sort(y(:,l));
   xsrs(:,l)=x(:,l);    ysrs(:,l)=y(:,l);

   a(l)=x1(n-r1,l)+0.001;    b(l)=y1(m-r2,l)+0.001; %sanrüleme noktası

   %weibull dağılımı için
    for i=1:n
       if xsrs(i,l)>=a(l)
         xsrs(i,l)=a(l);
       end
    end
    for i=1:m
       if ysrs(i,l)>=b(l)
          ysrs(i,l)=b(l);
       end
    end
    for i=1:n
       deltai(i,l)=1;
    end
    for i=1:n
       if xsrs(i,l)==a(l)
          deltai(i,l)=0;
       end
    end
    for i=1:m
       deltaj(i,l)=1;
    end
    for i=1:m
       if ysrs(i,l)==b(l)
          deltaj(i,l)=0;
       end
    end
```

```
%EV dağılımı için

  X(:,l)=log(x(:,l));    Y(:,l)=log(y(:,l));
  Xmml(:,l)=sort(X(:,l),'ascend');   Ymml(:,l)=sort(Y(:,l),'ascend');
  Xmml1(:,l)=Xmml(:,l);   Ymml1(:,l)=Ymml(:,l);
  a1(l)=Xmml1(n-r1,l)+0.001;   b1(l)=Ymml1(m-r2,l)+0.001;

   for i=1:n
      if Xmml(i,l)>a1(l)
         Xmml(i,l)=a1(l);
       end
   end
   for i=1:m
      if Ymml(i,l)>b1(l)
         Ymml(i,l)=b1(l);
      end
   end
   for i=1:n
      deltaimml(i,l)=1;
   end
   for i=1:n
      if Xmml(i,l)==a1(l)
         deltaimml(i,l)=0;
      end
   end
   for i=1:m
      deltajmml(i,l)=1;
   end
   for i=1:m
      if Ymml(i,l)==b1(l)
         deltajmml(i,l)=0;
      end
   end
%MML SRS için kullandığım veri
   xor(:,l)=(Xmml(:,l));    yor(:,l)=(Ymml(:,l));

%RSS ile örneklem oluşturma
 for k=1:c
      for j=1:mx
         for i=1:mx
            U=unifrnd(0,1);
            A1(i,j,k,l)=((-log(1-U))*olcek1)^(1/sekil);
         end
      end
   end
   for k=1:c
      for j=1:my
         for i=1:my
            U=unifrnd(0,1);
            A2(i,j,k,l)=((-log(1-U))*olcek2)^(1/sekil);
         end
      end
   end
   for k=1:c
      for i=1:mx
         B1(i,:,k,l)=sort(A1(i,:,k,l));
      end
   end
```

```
for k=1:c
   for i=1:my
      B2(i,:,k,l)=sort(A2(i,:,k,l));
   end
end
for k=1:c
    C1(:,k,l)=diag(B1(:,:,k,l));
end
for k=1:c
    C2(:,k,l)=diag(B2(:,:,k,l));
end
    %RSS ML
    xrssa(:,:,l)=(C1(:,:,l));  yrssa(:,:,l)=(C2(:,:,l));
    xrss1(:,:,l)=C1(:,:,l)';   yrss1(:,:,l)=C2(:,:,l)';
    xrss2(:,:,l)=sort(xrss1(:,:,l),2);  yrss2(:,:,l)=sort(yrss1(:,:,l),2);
    arss(:,l)=xrss2(:,mx-r1rss,l)+0.001;  brss(:,l)=yrss2(:,my-r2rss,l)+0.001;
    xrss1a(:,:,l)=xrss1(:,:,l);   yrss1a(:,:,l)=yrss1(:,:,l);
   for j=1:c
       for i=1:mx
       if xrss1a(j,i,l)>=arss(j,l)
          xrss1a(j,i,l)=arss(j,l);
       end
       end
    end
  for j=1:c
    for i=1:my
       if yrss1a(j,i,l)>=brss(j,l)
          yrss1a(j,i,l)=brss(j,l);
       end
    end
   end
  for j=1:c
       for i=1:mx
        deltaic(j,i,l)=1;
       end
   end
  for j=1:c
       for i=1:mx
           if xrss1a(j,i,l)==arss(j,l)
             deltaic(j,i,l)=0;
           end
       end
    end
    for j=1:c
       for i=1:my
        deltajl(j,i,l)=1;
       end
    end
    for j=1:c
       for i=1:my
           if yrss1a(j,i,l)==brss(j,l)
             deltajl(j,i,l)=0;
           end
       end
    end
   %ML için kullandığım sansürlü veri RSS
   xrss(:,:,l)=xrss1a(:,:,l);   yrss(:,:,l)=yrss1a(:,:,l);
```

```
%MML için kullandığım sansürlü veri RSS
urss1(:,:,l)=log(xrss1(:,:,l));  vrss1(:,:,l)=log(yrss1(:,:,l));
urss2(:,:,l)=sort(urss1(:,:,l),2);  vrss2(:,:,l)=sort(vrss1(:,:,l),2);
a1rss(:,l)=urss2(:,mx-r1rss,l)+0.001; b1rss(:,l)=vrss2(:,my-r2rss,l)+0.001;
urss3(:,:,l)=urss2(:,:,l); vrss3(:,:,l)=vrss2(:,:,l);
for j=1:c
          for i=1:mx
          if urss3(j,i,l)>=a1rss(j,l)
             urss3(j,i,l)=a1rss(j,l);
          end
          end
end
for j=1:c
       for i=1:my
          if vrss3(j,i,l)>=b1rss(j,l)
             vrss3(j,i,l)=b1rss(j,l);
          end
       end
end
for j=1:c
          for i=1:mx
           deltaicmml(j,i,l)=1;
          end
end
for j=1:c
          for i=1:mx
              if urss3(j,i,l)==a1rss(j,l)
                deltaicmml(j,i,l)=0;
              end
          end
end
for j=1:c
          for i=1:my
           deltajlmml(j,i,l)=1;
          end
end
for j=1:c
          for i=1:my
              if vrss3(j,i,l)==b1rss(j,l)
                deltajlmml(j,i,l)=0;
              end
          end
end
%MML için kullandığım sansürlü veri
urss(:,:,l)=urss3(:,:,l);   vrss(:,:,l)=vrss3(:,:,l);

%SRS'e dayalı ML tahmin edicisi
    sdi(l)=sum(deltai(:,l));  sdj(l)=sum(deltaj(:,l));
lnL=@(f) (-1)*((sdi(l)+sdj(l)).*log(f(1))+(-sdi(l)).*log(f(2))+(-sdj(l)).*log(f(3))+...
           (f(1)-1).*sum(deltai(:,l).*log((xsrs(:,l))))-sum((xsrs(:,l).^f(1))./f(2))+...
           (f(1)-1).*sum(deltaj(:,l).*log((ysrs(:,l))))-sum((ysrs(:,l).^f(1))./f(3)));

f0=[sekil;olcek1;olcek2];
options=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[f1,LnLval,kokvar2] = fminsearch(lnL,f0,options);
if kokvar2==1;
   mle=f1;
end
```

```
%p, sigma1, sigma2  ml tahmini
pmle(l,:)=mle(1); sigma1mle(l,:)=mle(2); sigma2mle(l,:)=mle(3);
RmleSRS(l,:)=sigma2mle(l,:)/(sigma1mle(l,:)+sigma2mle(l,:)); RmleSRSbias(l)=RmleSRS(l)-oran(l);

%SRS'e dayalı MML tahmini
   for i=1:n
      t1(i,l)=log(-1*log(1-i/(n+1)));
   end
   for i=1:m
      t2(i,l)=log(-1*log(1-i/(m+1)));
   end
   tt1(l)=t1(n-r1,l);    tt2(l)=t2(m-r2,l);
   alpha1_n(:,l)=1-exp(t1(:,l))+t1(:,l).*(exp(t1(:,l)));     beta1_n(:,l)=exp(t1(:,l));
   alpha2_n(l)=exp(tt1(l))-tt1(l).*exp(tt1(l));    beta2_n(l)=exp(tt1(l));
   alpha1_m(:,l)=1-exp(t2(:,l))+t2(:,l).*(exp(t2(:,l)));    beta1_m(:,l)=exp(t2(:,l));
   alpha2_m(l)=exp(tt2(l))-tt2(l).*exp(tt2(l));    beta2_m(l)=exp(tt2(l));

   gamma1i(:,l)=deltaimml(:,l).*beta1_n(:,l);    gamma2i(:,l)=(1-deltaimml(:,l)).*beta2_n(l);
   bdelta1i(:,l)=deltaimml(:,l).*alpha1_n(:,l);    bdelta2i(:,l)=(1-deltaimml(:,l)).*alpha2_n(l);
   gamma1j(:,l)=deltajmml(:,l).*beta1_m(:,l);    gamma2j(:,l)=(1-deltajmml(:,l)).*beta2_m(l);
   bdelta1j(:,l)=deltajmml(:,l).*alpha1_m(:,l);    bdelta2j(:,l)=(1-deltajmml(:,l)).*alpha2_m(l);

   m1SRS(l)=sum(gamma1i(:,l))+sum(gamma2i(:,l));
   m2SRS(l)=sum(gamma1j(:,l))+sum(gamma2j(:,l));
   D1SRS(l)=(sum(bdelta1i(:,l)-bdelta2i(:,l)))/m1SRS(l);
   D2SRS(l)=(sum(bdelta1j(:,l)-bdelta2j(:,l)))/m2SRS(l);
   K1SRS(l)=(sum(gamma1i(:,l).*xor(:,l))+sum(gamma2i(:,l).*xor(:,l)))/m1SRS(l);
   K2SRS(l)=(sum(gamma1j(:,l).*yor(:,l))+sum(gamma2j(:,l).*yor(:,l)))/m2SRS(l);
   ASRS(l)=sum(deltaimml(:,l))+sum(deltajmml(:,l));
   BSRS(l)=sum(bdelta1i(:,l).*(xor(:,l)-K1SRS(l)))-sum(bdelta2i(:,l).*(xor(:,l)-K1SRS(l)))+...
         sum(bdelta1j(:,l).*(yor(:,l)-K2SRS(l)))-sum(bdelta2j(:,l).*(yor(:,l)-K2SRS(l)));
   CSRS(l)=sum(gamma1i(:,l).*((xor(:,l)-K1SRS(l)).^2))+sum(gamma2i(:,l).*((xor(:,l)-
K1SRS(l)).^2))+...
         sum(gamma1j(:,l).*((yor(:,l)-K2SRS(l)).^2))+sum(gamma2j(:,l).*((yor(:,l)-K2SRS(l)).^2));

 sigmaSRS(l)=(-BSRS(l)+sqrt((BSRS(l).^2)+4*CSRS(l).*(ASRS(l)))./(2*sqrt(ASRS(l)*(ASRS(l))));
 mu1SRS(l)=K1SRS(l)-D1SRS(l).*sigmaSRS(l);  mu2SRS(l)=K2SRS(l)-D2SRS(l).*sigmaSRS(l);

 shapeevSRS(l)=1/sigmaSRS(l);
 teta1SRS(l)=exp(mu1SRS(l).*shapeevSRS(l));  teta2SRS(l)=exp(mu2SRS(l).*shapeevSRS(l));

 RSRS(l)=teta2SRS(l)./(teta1SRS(l)+teta2SRS(l));   RmmlSRSbias(l)=RSRS(l)-oran(l);

  %RSS'e dayalı ML tahmin edicisi
 for j=1:c
    for i=1:mx
      cn(j,i,l)=factorial(mx)./(factorial(i-1).*factorial(mx-i));
      is(j,i,l)=i-1;
      ns(j,i,l)=mx-i+1;
      iss(j,i,l)=i;
    end
 end
for j=1:c
    for i=1:my
      cm(j,i,l)=factorial(my)./(factorial(i-1).*factorial(my-i));
      js(j,i,l)=i-1;
      ms(j,i,l)=my-i+1;
      jss(j,i,l)=i;
```

```
    end
 end
di(l)=sum(sum(deltaic(:,:,l))); dj(l)=sum(sum(deltajl(:,:,l)));
lnLrss=@(k) (-1)*((di(l)+dj(l)).*log(k(1))-di(l)*log(k(2))-
dj(l)*log(k(3))+sum(sum(deltaic(:,:,l).*log(cn(:,:,l)),2))+sum(sum(deltajl(:,:,l).*log(cm(:,:,l)),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(deltaic(:,:,l).*log((xrss(:,:,l))),2))+sum(sum((deltaic(:,:,l).*is(:,:,l).*log(1-exp(-
(xrss(:,:,l).^k(1))./k(2)))),2))-...
sum(sum((deltaic(:,:,l).*ns(:,:,l).*((xrss(:,:,l).^k(1))./k(2))),2))+...
sum(sum((1-deltaic(:,:,l)).*log(betainc(1-exp(-(xrss(:,:,l).^k(1))./k(2)),iss(:,:,l),ns(:,:,l),'upper')),2))+...
(k(1)-1).*sum(sum(deltajl(:,:,l).*log((yrss(:,:,l))),2))+sum(sum((deltajl(:,:,l).*js(:,:,l).*log(1-exp(-
(yrss(:,:,l).^k(1))./k(3)))),2))-...
sum(sum((deltajl(:,:,l).*ms(:,:,l).*((yrss(:,:,l).^k(1))./k(3))),2))+...
sum(sum((1-deltajl(:,:,l)).*log(betainc(1-exp(-(yrss(:,:,l).^k(1))./k(3)),jss(:,:,l),ms(:,:,l),'upper')),2)));
k0=[sekil;olcek1;olcek2];
option=optimset('display','off','MaxFunEvals',5000,'MaxIter',5000);   % Option to display output;
[kmle,lnLrssval,kokvar] = fminsearch(lnLrss,k0,option);
if kokvar==1;
  mlerss=kmle;
end
%p, sigma1, sigma2  mle tahmini
pmlerss(l,:)=mlerss(1); sigma1mlerss(l,:)=mlerss(2); sigma2mlerss(l,:)=mlerss(3);
RmleRSS(l,:)=sigma2mlerss(l,:)/(sigma1mlerss(l,:)+sigma2mlerss(l,:));
RmleRSSbias(l)=RmleRSS(l)-oran(l);

%RSS'e dayalı MML tahmin edicisi
for j=1:c
   for i=1:mx
      tn(j,i,l)=log(-1*log(1-i/(mx+1)));
   end
 end
for j=1:c
   for i=1:my
      tm(j,i,l)=log(-1*log(1-i/(my+1)));
   end
 end
tncens1(:,l)=tn(:,mx-r1rss,l);  tmcens1(:,l)=tm(:,my-r2rss,l);
tncens(:,:,l)=repmat(tncens1(:,l),1,mx);  tmcens(:,:,l)=repmat(tmcens1(:,l),1,my);

beta1ic(:,:,l)=exp(tn(:,:,l));   alpha1ic(:,:,l)=1-exp(tn(:,:,l))+tn(:,:,l).*exp(tn(:,:,l));
beta2ic(:,:,l)=((exp(tn(:,:,l))-
1).*evpdf(tn(:,:,l),0,1).*evcdf(tn(:,:,l),0,1)+evpdf(tn(:,:,l),0,1).^2)./(evcdf(tn(:,:,l),0,1).^2);
alpha2ic(:,:,l)=evpdf(tn(:,:,l))./evcdf(tn(:,:,l))+beta2ic(:,:,l).*tn(:,:,l);
beta3ic(:,:,l)=exp(tn(:,:,l));   alpha3ic(:,:,l)=exp(tn(:,:,l))-tn(:,:,l).*exp(tn(:,:,l));
for j=1:c
    for i=1:mx
      cnmml(j,i,l)=factorial(mx)./(factorial(i-1).*factorial(mx-i));
      ismml(j,i,l)=i-1;
      nsmml(j,i,l)=mx-i;
      imml(j,i,l)=i;
    end
end

fit(:,:,l)=cnmml(:,:,l).*(evcdf(tn(:,:,l),0,1).^(ismml(:,:,l))).*((1-
evcdf(tn(:,:,l),0,1)).^(nsmml(:,:,l))).*evpdf(tn(:,:,l),0,1);
fitdiff(:,:,l)=fit(:,:,l).*(ismml(:,:,l).*evpdf(tn(:,:,l),0,1).*(evcdf(tn(:,:,l),0,1)).^(-1)-
nsmml(:,:,l).*evpdf(tn(:,:,l),0,1).*...
          (1-evcdf(tn(:,:,l),0,1)).^(-1)+(1-exp(tn(:,:,l))));
Fit(:,:,l)=betainc(evcdf(tn(:,:,l)),imml(:,:,l),nsmml(:,:,l)+1);
```

```
beta4ic(:,:,l)=(fitdiff(:,:,l).*(1-Fit(:,:,l))+fit(:,:,l).^2)./((1-Fit(:,:,l)).^2);
alpha4ic(:,:,l)=fit(:,:,l)./(1-Fit(:,:,l))-beta4ic(:,:,l).*tn(:,:,l);

beta1jl(:,:,l)=exp(tm(:,:,l));   alpha1jl(:,:,l)=1-exp(tm(:,:,l))+tm(:,:,l).*exp(tm(:,:,l));
beta2jl(:,:,l)=((exp(tm(:,:,l))-
1).*evpdf(tm(:,:,l),0,1).*evcdf(tm(:,:,l),0,1)+evpdf(tm(:,:,l),0,1).^2)./(evcdf(tm(:,:,l),0,1).^2);
alpha2jl(:,:,l)=evpdf(tm(:,:,l))./evcdf(tm(:,:,l))+beta2jl(:,:,l).*tm(:,:,l);
beta3jl(:,:,l)=exp(tm(:,:,l));   alpha3jl(:,:,l)=exp(tm(:,:,l))-tm(:,:,l).*exp(tm(:,:,l));
for j=1:c
    for i=1:my
      cmmml(j,i,l)=factorial(my)./(factorial(i-1).*factorial(my-i));
      jsmml(j,i,l)=i-1;
      msmml(j,i,l)=my-i;
      jmml(j,i,l)=i;
    end
end
fjt(:,:,l)=cmmml(:,:,l).*(evcdf(tm(:,:,l),0,1).^(jsmml(:,:,l))).*((1-
evcdf(tm(:,:,l),0,1)).^(msmml(:,:,l))).*evpdf(tm(:,:,l),0,1);
fjtdiff(:,:,l)=fjt(:,:,l).*(jsmml(:,:,l).*evpdf(tm(:,:,l),0,1).*(evcdf(tm(:,:,l),0,1)).^(-1)-
msmml(:,:,l).*evpdf(tm(:,:,l),0,1).*...
          (1-evcdf(tm(:,:,l),0,1)).^(-1)+(1-exp(tm(:,:,l))));
Fjt(:,:,l)=betainc(evcdf(tm(:,:,l)),jmml(:,:,l),msmml(:,:,l)+1);
beta4jl(:,:,l)=(fjtdiff(:,:,l).*(1-Fjt(:,:,l))+fjt(:,:,l).^2)./((1-Fjt(:,:,l)).^2);
alpha4jl(:,:,l)=fjt(:,:,l)./(1-Fjt(:,:,l))-beta4jl(:,:,l).*tm(:,:,l);

 gamma1ic(:,:,l)=deltaicmml(:,:,l).*(beta1ic(:,:,l)+ismml(:,:,l).*beta2ic(:,:,l)+nsmml(:,:,l).*beta3ic(:,:,l));
 gamma2ic(:,:,l)=(1-deltaicmml(:,:,l)).*beta4ic(:,:,l);
 gamma1jl(:,:,l)=deltajlmml(:,:,l).*(beta1jl(:,:,l)+jsmml(:,:,l).*beta2jl(:,:,l)+msmml(:,:,l).*beta3jl(:,:,l));
 gamma2jl(:,:,l)=(1-deltajlmml(:,:,l)).*beta4jl(:,:,l);
 m1(l)=sum(sum(gamma1ic(:,:,l)))+sum(sum(gamma2ic(:,:,l)));
 m2(l)=sum(sum(gamma1jl(:,:,l)))+sum(sum(gamma2jl(:,:,l)));
 K1(l)=(sum(sum(gamma1ic(:,:,l).*urss(:,:,l)))+sum(sum(gamma2ic(:,:,l).*urss(:,:,l)))./m1(l);
 K2(l)=(sum(sum(gamma1jl(:,:,l).*vrss(:,:,l)))+sum(sum(gamma2jl(:,:,l).*vrss(:,:,l)))./m2(l);

 bdelta1ic(:,:,l)=deltaicmml(:,:,l).*(alpha1ic(:,:,l)+ismml(:,:,l).*alpha2ic(:,:,l)-nsmml(:,:,l).*alpha3ic(:,:,l));
 bdelta2ic(:,:,l)=(1-deltaicmml(:,:,l)).*alpha4ic(:,:,l);
 bdelta1jl(:,:,l)=deltajlmml(:,:,l).*(alpha1jl(:,:,l)+jsmml(:,:,l).*alpha2jl(:,:,l)-msmml(:,:,l).*alpha3jl(:,:,l));
 bdelta2jl(:,:,l)=(1-deltajlmml(:,:,l)).*alpha4jl(:,:,l);
 D1(l)=(sum(sum(bdelta1ic(:,:,l)))-sum(sum(bdelta2ic(:,:,l)))./m1(l);
 D2(l)=(sum(sum(bdelta1jl(:,:,l)))-sum(sum(bdelta2jl(:,:,l)))./m2(l);
 A(l)=sum(sum(deltaicmml(:,:,l)))+sum(sum(deltajlmml(:,:,l)));
 B(l)=sum(sum(bdelta1ic(:,:,l).*(urss(:,:,l)-K1(l))))-sum(sum(bdelta2ic(:,:,l).*(urss(:,:,l)-K1(l))))+...
     sum(sum(bdelta1jl(:,:,l).*(vrss(:,:,l)-K2(l))))-sum(sum(bdelta2jl(:,:,l).*(vrss(:,:,l)-K2(l))));
 C(l)=sum(sum(gamma1ic(:,:,l).*((urss(:,:,l)-K1(l)).^2)))+sum(sum(gamma2ic(:,:,l).*((urss(:,:,l)-
K1(l)).^2)))+...
     sum(sum(gamma1jl(:,:,l).*((vrss(:,:,l)-K2(l)).^2)))+sum(sum(gamma2jl(:,:,l).*((vrss(:,:,l)-K2(l)).^2)));

  sigma(l)=(-B(l)+sqrt((B(l).^2)+4*C(l).*(A(l))))./(2*sqrt(A(l)*(A(l))));
  mu1(l)=K1(l)-D1(l).*sigma(l);   mu2(l)=K2(l)-D2(l).*sigma(l);
  shapeev(l)=1/sigma(l);
  teta1(l)=exp(mu1(l).*shapeev(l));   teta2(l)=exp(mu2(l).*shapeev(l));
  R(l)=teta2(l)./(teta1(l)+teta2(l));    RmmlRSSbias(l)=R(l)-oran(l);
end
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatma Gül AKGÜL

Doğum Yeri : Trabzon

Doğum Tarihi: 30.08.1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Trabzon Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı), 2001-2005

Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, 2005-2009

Yüksek Lisans: Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, 2009-2011

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Artvin Çoruh Üniversitesi, İstatistik Bölümü, 2010-2011

Karadeniz Teknik Üniversitesi, İstatistik Bilgisayar Bilimleri Bölümü, 2011-2012

Ankara Üniversitesi, İstatistik Bölümü, 2012-devam

Yayınlar (Hakemli Dergiler)

Akgül, F.G. ve Başkır, M.B. 2013. Bankaların 2008-2012 Yılları Arasında Aktif Büyüklüklerini Etkileyen Kriterler Bakımından Hiyerarşik Kümeleme ve PAM Algoritması ile Sınıflandırılması. BSAD Bankacılık ve Sigortacılık Araştırmaları Dergisi, 1, 5-6, 48-63.

Ulusal Kongre Sunum

Akgül, F.G., Doğru, F.Z., Şenoğlu, B. ve Arslan O. 2013. GA0 Dağılımının Parametrelerinin Dayanıklı Tahmini, 1. Genç İstatistikçiler Sempozyumu, 42, Ankara.

Uluslararası Kongre Sunum

Akgül, F.G. ve Şenoğlu, B. 2013. Burr XII dağılımının Konum ve Ölçek parametrelerinin Tahmini: Monte-Carlo Simülasyon Çalışması, 8. Uluslararası İstatistik Kongresi, 228-229, Antalya.

Akgül, F.G. ve Başkır, M.B. 2013. Bankaların Aktif Büyüklüklerini Etkileyen Kriterler Bakımından Sınıflandırılması ve Bu Sınıfların Lojistik Regresyon Yöntemi ile İncelenmesi, XIVth International Symposium on Econometrics, Operations Research and Statistics, 303, Saraybosna.

Akgül, F.G., Doğru, F.Z., Şenoğlu, B. ve Arslan O. 2013. GA0 Dağılımının Parametrelerinin Dayanıklı Tahmini, 1. Genç İstatistikçiler Sempozyumu, 42, Ankara.

Akgül, F.G. and Şenoğlu, B. 2014. Estimation of System Reliability using Ranked Set Sampling for Weibull Distribution, 15th International Symposium on Econometrics, Operations Research and Statistics, 93, Isparta.

Akgül, F.G. and Şenoğlu, B. 2014. Estimation of the reliability in the stress-strength models under the modifications of the ranked set sampling: Weibull distribution, 11th International Conference on Ordered Statistical Data, 22-23, Bedlewo, Poznan.

Akgül, F.G. and Şenoğlu, B. 2015. Estimation of the system reliability under type-II right censored the ranked set sampling data, International Conference on Mathematics and Mechanics, Paris.

Akgül, F.G. and Şenoğlu, B. 2015. Estimating the parameters in one-way ANOVA based on ranked set sampling, The 8th Conference of Eastern Mediterranean Region of the International Biometric Society, 56, Nevşehir.

Aydın, D., Şenoğlu, B., **Akgül, F.G.** 2015. Robust estimation of the parameters of the shifted Gompertz distribution, The 8th Conference of Eastern Mediterranean Region of the International Biometric Society, 108, Nevşehir.