ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR $M \subset E^n$ HİPERYÜZEYİ ÜZERİNDEKİ BİR EĞRİNİN EĞRİLİKLERİYLE BU EĞRİYE AİT ŞERİDİN EĞRİLİKLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Osman Zeki OKUYUCU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2010

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR $M \subset E^n$ HİPERYÜZEYİ ÜZERİNDEKİ BİR EĞRİNİN EĞRİLİKLERİYLE BU EĞRİYE AİT ŞERİDİN EĞRİLİKLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Osman Zeki OKUYUCU

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, eğrilerin temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, E^3 Öklid uzayın da bir M hiperyüzeyi üzerindeki α eğrisinin eğrilikleriyle bu eğriye ait şeridin eğrilikleri arasındaki ilişkiler ele alınmıştır.

Son bölümde ise üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayın da bilinen ilişkilerin n-boyutlu Öklid uzayında genellemeleri matrisler yardımıyla yapılmıştır. Dahası bu ilişkiler n=3 özel hali doğrulanmıştır.

Ocak 2010, 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Şerit, eğrilik, yüksek mertebeden şerit eğrilikleri.

ABSTRACT

Master Thesis

THE CONNECTIONS IN BETWEEN THE CURVATURES OF A CURVE α ON $M \subset E^n$ AND THE CURVATURES OF A STRIP $\{\alpha, M\}$

Osman Zeki OKUYUCU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, general properties of a curve have been given.

In the third chapter, the connections in between the curvatures of a curve α on M$\subset E^3$ and the curvatures of a strip $\{\alpha, M\}$ have been researched.

In the last chapter, the connections in between the curvatures of a curve α on M$\subset E^3$ and the curvatures of a strip $\{\alpha, M\}$ have been genaralized in E^n with using the matrixes. Also the connections have been proved the special case n=3.

January 2010, 46 pages

Key Words: Strip, curvatures, higher curvatures of a strip.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı ve destek olan sayın hocam Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na, hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen Araş.Gör. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'e ve çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Osman Zeki OKUYUCU
Ankara, Ocak 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER DİZİNİ v
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 2
2.1 Eğriler Teorisi 6
3. E^3 DE ŞERİDLER TEORİSİ 13
3.1 Şeridin Eğrilikleri 14
4. E^n DE ŞERİDLER TEORİSİ 28
4.1 E^n De Şeridin Eğriliklerinin Eğrinin Eğrilikleri Cinsinden İfadeleri 28
4.2 E^n De Eğrinin Eğriliklerinin Şeridin Eğrilikleri Cinsinden İfadeleri 38
KAYNAKLAR 45
ÖZGEÇMİŞ 46

SİMGELER DİZİNİ

a	Şeridin jeodezik burulması
b	Şeridin normal eğriliği
c	Şeridin jeodezik eğriliği
κ	Eğrinin birinci eğriliği
τ	Eğrinin ikinci eğriliği
h_{ij}	Dönme matrisinin bileşenleri
t_{ij}	Eğrinin yüksek mertebeden eğrilikleri
$\bar{t}_{ij}$	Şeridin yüksek mertebeden eğrilikleri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 E^n de eğri 6
Şekil 2.2 Parametre değişimi 7
Şekil 3.1 Eğri ve eğriye ait şeridin Frenet çatıları 13

1. GİRİŞ

E^n deki bir hiperyüzey üzerinde bir α eğrisinin $k_1, k_2, ..., k_n$ eğrilikleri ile eğriyi üzerinde taşıyan hiperyüzeye çizilmiş bir şeridin eğrilikleri iyi bilinmektedir. Özel olarak 3 boyutlu uzayda bir yüzey üzerindeki şeridin eğrilikleri ile eğrinin eğrilikleri arasındaki geçiş bağıntıları da iyi bilinmektedir. Yani $n = 3$ için şerit eğrilikleri a, b, c ve eğrinin eğrilikleri $\varkappa, \tau$ olmak üzere

$$\varkappa^2 = b^2 + c^2 \qquad\qquad \tau = a + \frac{bc' - b'c}{b^2 + c^2}$$

dir. Ancak $n > 3$ için bu geçiş bağıntıları hesaplanmamıştır. Bu tezin amacı $n = 3$ halindeki bu iki bağıntının $n > 3$ halindeki karşılıklarını bulmaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu γ olsun. γ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır;

i) $X, \emptyset \in \gamma$,

ii) $\forall\ A_1, A_2 \in \gamma \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \gamma$,

iii) $A_i \in \gamma,\ i \in I,\ \underset{i \in I}{\cup} A_i \in \gamma$

(Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.2. Bir X cümlesi ve üzerindeki γ topolojisinden oluşan (X, γ) ikilisine bir topolojik uzay denir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.3. (X, γ) bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı iki noktaları için, X de, sırası ile, P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.4. X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \longrightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizim (topolojik dönüşüm) denir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.5. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir $n-boyutlu$ topolojik manifold veya kısaca topolojik $(n-manifold)$ dur denir.

($\mathbf{M_1}$) M bir Hausdorff uzayıdır.
($\mathbf{M_2}$) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık altcümlesine homeomorftur.
($\mathbf{M_3}$) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.6. M bir topolojik manifold olsun. $P \in M$ noktasının M deki bir açık komşuluğu, E^n in bir U açık altcümlesine homeomorf olarak alınabilir. Bu homeomorfizmi

$$\psi : U \longrightarrow V$$

ile gösterelim. (U, ψ) ikilisine M nin P noktasındaki bir haritası veya koordinat komşuluğu denir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.7. M bir topolojik n-manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yazılır. E^n de U_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan bir açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, U_α) haritalarının

$$\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$$

koleksiyonuna bir atlas (koordinat komşuluğu sistemi) denir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.8. Bir topolojik n-manifold M ve M nin bir atlası $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall\alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.9. M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.10. Bir

$$\overrightarrow{V}_P : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü için

i) $\overrightarrow{V}_P(\lambda f + \mu g) = \lambda \overrightarrow{V}_P[f] + \mu \overrightarrow{V}_P[g]$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ii) $\overrightarrow{V}_P[f, g] = \overrightarrow{V}_P[f]\, g(P) + f(P)\, \overrightarrow{V}_P[g]$

aksiyomları sağlanıyorsa, $\overrightarrow{V}_P$ fonksiyonuna M nin P noktasındaki bir tanjant vektörü denir.

M manifoldunun bir $P \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini

$$T_M(P) = \left\{ \overrightarrow{V}_P \mid \overrightarrow{V}_P : C^\infty(M, \mathbb{R}) \overset{\text{tanjant uzay}}{\longrightarrow} \mathbb{R} \right\}$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama işlemini

$$\begin{array}{ccc} \oplus : T_M(P) \times T_M(P) & \longrightarrow & T_M(P) \\ \left(\vec{V}_P, \vec{W}_P\right) & \longrightarrow & \vec{V}_P + \vec{W}_P \end{array}$$

$$\left(\overrightarrow{V}_P + \overrightarrow{W}_P\right) = \overrightarrow{V}_P[f] + \overrightarrow{W}_P[g], \ \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olarak tanımlarsak $(T_M(P), +)$ ikilisi bir Abel grubu olur. Ayrıca

$$\begin{array}{ccc} \odot : \mathbb{R} \times T_M(P) & \longrightarrow & T_M(P) \\ \left(\lambda, \vec{V}_P\right) & \longrightarrow & \lambda \vec{V}_P \end{array}$$

$$\lambda \overrightarrow{V}_P[f] = \lambda \overrightarrow{V}_P[f], \ \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dış işlemi de bu Abel grubunu $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı yapar.

Bu uzay

$$\{T_M(P), \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$$

sisteminden ibaret olup M nin $P \in M$ noktasındaki tanjant uzayı adını alır ve kısaca $T_M(P)$ ile gösterilir (Kobayashi ve Nomizo 1963).

Tanım 2.11. $M \subset E^n$ bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bir

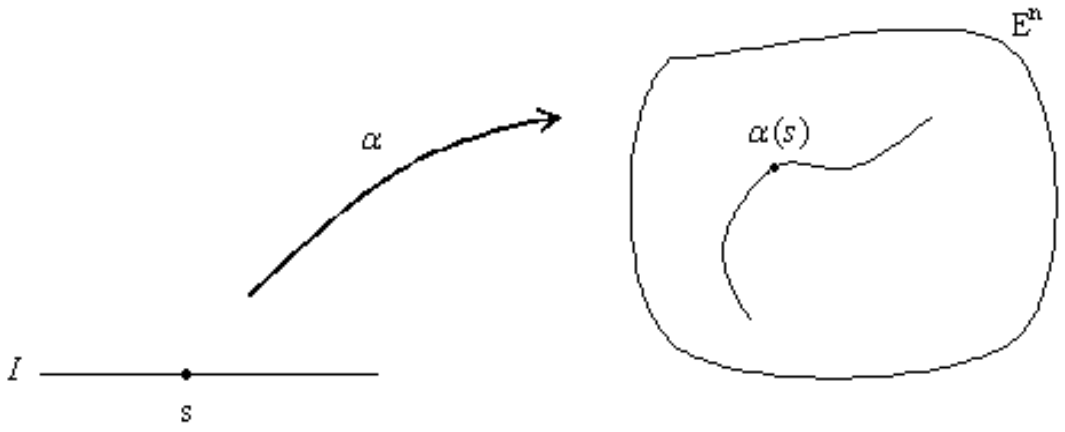
$$X : M \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} \bigcup_{P \in M} T_M(P)$$

operatörüne M üzerinde bir vektör alanı denir (Auslander 1967).

M üzerinde tanımlanan vektör alanları cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir. Bu cümle toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre bir reel vektör uzayıdır.

2.1 Eğriler Teorisi

Tanım 2.1.1 I, R nin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha : I \longrightarrow E^n$ biçiminde C^∞ sınıfından bir α dönüşümüne, E^n uzayı içinde bir eğri denir (Şekil 2.1), (Sabuncuoğlu 2004).



Şekil 2.1 E^n de eğri

Tanım 2.1.2. (Diferensiyellenebilir Eğri) M bir C^∞ manifold ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun.

$$\alpha : I \longrightarrow M \subseteq E^n$$

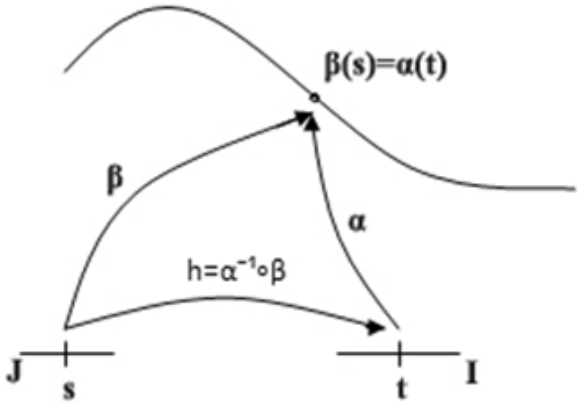
dönüşümü diferensiyellenebilir ise α ya M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri denir (Matsushima 1972).

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha(I) \subset E^n$ eğrisini bundan sonra α ile göstereceğiz. Buaradaki $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi diyeceğiz.

Tanım 2.1.3. (Parametre Değişimi) E^n de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \longrightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi (daha doğrusu M nin I daki parametresinin J deki parametre ile değişimi) denir (Şekil 2.2), (Hacısalihoğlu 2000a).



Şekil 2.2 Parametre değişimi

Tanım 2.1.4. (Hız Vektörü) E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \longrightarrow E^n$ fonksiyonunun Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ olmak üzere

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n),\ \alpha(t) \in M$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t, \quad \alpha_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \end{bmatrix} \\ \alpha'(t) &= \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \mid_t, ..., \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \mid_t \right) \end{aligned}$$

dır. $(\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{E^n}(\alpha(t))$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.1.5. (Birim Hızlı Eğri) M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\left\| \alpha'(s) \right\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α)' ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.1.6. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoğlu 2000a).

Teorem 2.1.1. E^n de regüler her eğrinin, birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.1.7 (Serret-Frenet r-ayaklı Alanı) $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\Psi = \{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$, için;

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$$

olmak üzere, Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), ..., V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. Herbir V_i, $1 \leq i \leq r$, ye Serret-Frenet vektör alanı adı verilir (Hacısalihoğlu 2000a).

Özel Hal: $n = 3$ özel halinde, E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet 2-ayaklısı ve Frenet 3-ayaklısı elde edilebilir. Bu özel halde; M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere,

$$\overrightarrow{T} = \alpha' \quad , \quad \alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\|\alpha''\|}\alpha''$$

ve

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N}$$

dir. Böylece,

$$\{\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s), \overrightarrow{B}(s)\}$$

sistemi, $\alpha(s)$ noktasında, M eğrisinin Frenet 3-ayaklısıdır (Hacısalihoğlu 2000a).

Teorem 2.1.2. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t), \overrightarrow{B}(t)\}$ ise

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T} &= \frac{1}{\|\alpha^{\cdot}(t)\|}\alpha^{\cdot}(t) \quad , \quad \alpha^{\cdot}(t) = \frac{d\alpha}{dt} \\ \overrightarrow{N} &= \overrightarrow{B}(t) \times \overrightarrow{T}(t) \\ \overrightarrow{B} &= \frac{1}{\|\alpha^{\cdot}(t) \times \alpha^{\cdot\cdot}(t)\|}(\alpha^{\cdot}(t) \times \alpha^{\cdot\cdot}(t)) \end{aligned}$$

dir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.1.8. (Eğrilikler) $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} k_i : I &\longrightarrow \mathbb{R}, \, 1 \leq i \leq r \\ s &\longrightarrow k_i(s) = \left\langle V_i^{'}(s), V_{i+1}(s) \right\rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir (Hacısalihoğlu 2000a).

Teorem 2.1.3. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ise

$$\begin{aligned} \mathbf{1})V_1^{'}(s) &= k_1(s)V_2(s) \\ \mathbf{2})V_i^{'}(s) &= -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), 1 < i < r \\ \mathbf{3})V_r^{'}(s) &= -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

dir (Hacısalihoğlu 2000a).

$\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ Frenet r-ayaklısının vektörlerinin eğri boyunca kovaryant türevleri ile ilgili eşitlikleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{r-2}' \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

şeklinde yazılabilir. (2.1.1) veya aynı şey demek olan (2.1.2) eşitliklerine Frenet formülleri denir.

$n = 3$ özel halinde (2.1.2) eşitliği

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \; veya \; \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu halde 1-inci eğrilik olan $k_1(s)$ değeri sadece eğrilik adıyla ve 2-inci eğrilik olan $k_2(s)$ değeri de burulma (torsiyon) adıyla bilinir.

Tanım 2.1.8 den $k_i(s)$ eğriliklerinin hesabı yapılabilir. Ancak eğrilikleri aşağıdaki teorem yardımıyla hesaplamanın pratik bakımdan değeri vardır.

Teorem 2.1.4. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı, $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ve

$$E_i(s) = \alpha^{(i)}(s) - \sum_{j<i} \left\langle \alpha^{(i)}(s), V_j(s) \right\rangle V_j(s) \quad , \quad 1 \leq i \leq r$$

olmak üzere

$$k_i(s) = \frac{\|E_{i+1}(s)\|}{\|E_i(s)\|} \quad , \quad 1 \leq i \leq r$$

dir (Hacısalihoğlu 2000a).

Teorem 2.1.5. $M \subset E^n$ eğrisi herhangi (I, β) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $t \in J$ ye karşılık gelen $\beta(t)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı, $\{V_1(t), V_2(t), ..., V_r(t)\}$ ve

$$F_i(t) = \beta^{(i)}(t) - \sum_{j<i} \left\langle \beta^{(i)}(t), V_j(t) \right\rangle V_j(t)$$

olmak üzere

$$k_i(t) = \frac{\|F_{i+1}(t)\|}{\|F_1(t)\| \, \|F_i(t)\|} \quad , \quad 1 \leq i \leq r$$

dir (Hacısalihoğlu 2000a).

Tanım 2.1.9. E^n, n-boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$-boyutlu bir yüzey, veya $(n-1)-$yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyleki bu M cümlesi

$$M = \left\{ x \in U \subset E^n \mid f : \underset{x}{U} \overset{\underset{\longrightarrow}{dif.bilir}}{\longrightarrow} \underset{f(x)=c}{\mathbb{R}}, \ U \text{ bir açık alt cümle} \right\}$$

$\nabla f \mid_P \neq 0$, $\forall P \in M$ biçiminde tanımlanır. E^2 de $1-$yüzeye düzlemsel eğri denir. E^3 de bir $2-$yüzeye ekseriya sadece yüzey denir. E^n de bir $(n-1)-$yüzey, $n > 3$ olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır.

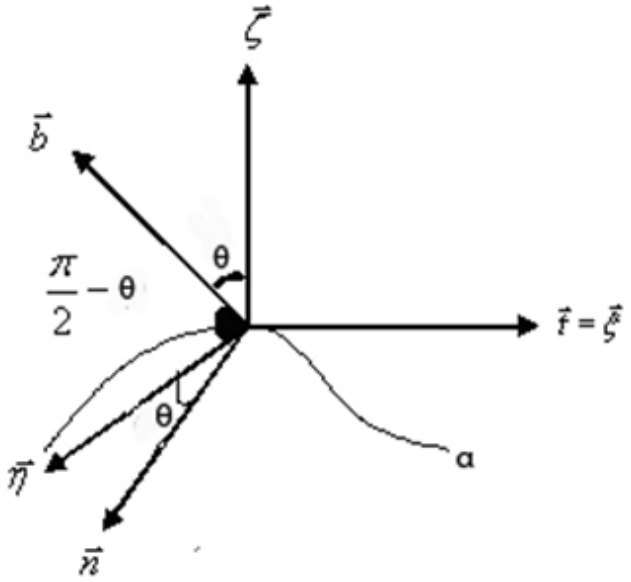
Manifoldlar olarak herbir M hiperyüzeyi bir $(n-1)-$manifolddur ve dolayısıyla $\forall P \in M$ noktasında M nin bir tanjant uzayı $T_M(P)$ tanımlı olup $(n-1)-$boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu tanjant uzay $T_{E^n}(P)$ tanjant uzayının bir alt uzayıdır. (Hacısalihoğlu 2000b)

3. E^3 DE ŞERİDLER TEORİSİ

Tanım 3.1. E^3 de bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir $\alpha : I \longrightarrow M$ eğrisi verilsin. Yüzeyin birim dik vektör alanı ζ olsun. α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere,

$$\zeta \times T = \eta$$

eşitliğiyle tanımlanan η vektör alanını göz önüne alalım.



Şekil 3.1 Eğri ve eğriye ait şeridin Frenet çatıları

Vektörel çarpımın özeliklerinden dolayı $\{T(s), \eta(s), \zeta(s)\}$ cümlesi, $T_{E^3}\alpha\,(s)$ uzayının ortonormal bir tabanı olur. α eğrisinin her noktasının komşuluğundaki tanjant düzlem parçalarının birleşimine şerid denir ve (α, M) eğri-yüzey ikilisi ile ifade edilir (Şekil 3.1), (Sabuncuoğlu 2004).

3.1 Şeridin Eğrilikleri

Tanım 3.1.1. E^3 de bir M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \longrightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\begin{aligned} K_n(s) &= -b(s) \\ &= \left\langle \alpha''(s), \zeta(s) \right\rangle \end{aligned}$$

eşitliğiyle belirli $K_n(s) = -b(s)$ sayısına, (α, M) şeridinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal eğriliği denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 3.1.2. E^3 de bir M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \longrightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\begin{aligned} K_g(s) &= c(s) \\ &= \left\langle \alpha''(s), \mu(s) \right\rangle \end{aligned}$$

eşitliğiyle belirli $K_g(s) = c(s)$ sayısına, (α, M) şeridinin $\alpha(s)$ noktasındaki jeodezik eğriliği denir (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 3.1.3. E^3 de bir M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \longrightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\begin{aligned} t_r(s) &= a(s) \\ &= \left\langle \zeta'(s), \mu(s) \right\rangle \end{aligned}$$

eşitliğiyle belirli $t_r(s) = a(s)$ sayısına, (α, M) şeridinin $\alpha(s)$ noktasındaki jeodezik burulması denir (Sabuncuoğlu 2004).

Teorem 3.1.1. (α, M) şeridinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\xi(s), \eta(s), \zeta(s)\}$ ve α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \xi(s) &= T(s) \\ \eta(s) &= \cos\theta.N(s) + \sin\theta.B(s) \\ \zeta(s) &= -\sin\theta.N(s) + \cos\theta.B(s) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \xi(s) \\ \mu(s) \\ \zeta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

dir.

İspat 3.1.1. η, N ile B nin gerdiği düzlemde olduğundan $\eta \in S_p\{N, B\}$ dir.Dolayısıyla,

$$\eta = a_1 N + a_2 B \tag{3.1}$$

olucak şekilde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ vardır. 3.1 eşitliğinin her iki yanı N ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \eta, N \rangle &= \langle a_1 N, N \rangle + \langle a_2 B, N \rangle \\ a_1 &= \|\eta\| \, \|N\| \cos\theta \\ a_1 &= \cos\theta \end{aligned}$$

dir.

3.1 eşitliğinin her iki yanı B ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \eta, B \rangle &= \langle a_1 N, B \rangle + \langle a_2 B, B \rangle \\ a_2 &= \|\eta\| \, \|B\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ a_2 &= \sin\theta \end{aligned}$$

olarak bulunur. 3.1 eşitliğinde a_1 ve a_2 değerleri yerlerine yazılırsa

$$\eta(s) = \cos\theta.N(s) + \sin\theta.B(s)$$

dir.

ζ, N ile B nin gerdiği düzlemde olduğundan $\zeta \in S_p\{N, B\}$ dir. Dolayısıyla,

$$\zeta = b_1 N + b_2 B \tag{3.2}$$

olucak şekilde $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ vardır. 3.2 eşitliğinin her iki yanı N ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \zeta, N \rangle &= \langle b_1 N, N \rangle + \langle b_2 B, N \rangle \\ b_1 &= \|\zeta\| \, \|N\| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ b_1 &= -\sin\theta \end{aligned}$$

dir.

3.2 eşitliğinin her iki yanı B ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \zeta, B \rangle &= \langle b_1 N, B \rangle + \langle b_2 B, B \rangle \\ b_2 &= \|\zeta\| \, \|B\| \cos\theta \\ b_2 &= \cos\theta \end{aligned}$$

olarak bulunur. 3.2 eşitliğinde b_1 ve b_2 değerleri yerlerine yazılırsa

$$\zeta(s) = -\sin\theta.N(s) + \cos\theta.B(s)$$

dir.

Teorem 3.1.2. α, M üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Şerit eğrisinin eğrilikleri $\varkappa$, τ ve (α, M) şeridinin eğrilikleri a, b, c olmak üzere

$$\begin{aligned} a &= \tau + \theta' \\ b &= \varkappa \sin\theta \\ c &= \varkappa \cos\theta \end{aligned}$$

ve şeridin Frenet vektörleri

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa\cos\theta & -\varkappa\sin\theta \\ -\varkappa\cos\theta & 0 & \tau+\theta' \\ \varkappa\sin\theta & -(\tau+\theta') & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

dir.

İspat 3.1.2. $\xi^{'} \in Sp\{\xi, \eta, \zeta\}$ olduğundan

$$\xi^{'} = a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta \tag{3.3}$$

olup burada $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ dir. 3.3 eşitliğinin her iki yanı ξ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \xi^{'}, \xi \right\rangle &= \langle a_1\xi, \xi\rangle + \langle a_2\eta, \xi\rangle + \langle a_3\zeta, \xi\rangle \\ \left\langle \xi^{'}, \xi \right\rangle &= a_1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

olup $T^{'} = \varkappa N$ ve $\xi = T$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\langle T^{'}, \xi \right\rangle &= \langle \varkappa N, T\rangle \\ &= \varkappa \langle N, T\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

dır. 3.4 ve 3.5 eşitlikleri yardımıyla

$$a_1 = 0$$

olarak bulunur.

3.3 eşitliğinin her iki yanı η ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \xi^{'}, \eta \right\rangle &= \langle a_1\xi, \eta\rangle + \langle a_2\eta, \eta\rangle + \langle a_3\zeta, \eta\rangle \\ \left\langle T^{'}, \eta \right\rangle &= a_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

olup $T^{'} = \varkappa N$ ve $\eta = \cos\theta.N + \sin\theta.B$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left\langle T^{'},\eta\right\rangle &= \langle \varkappa N,\cos\theta.N+\sin\theta.B\rangle \\ &= \varkappa\cos\theta\left\langle N,N\right\rangle+\varkappa\sin\theta\left\langle N,B\right\rangle \\ &= \varkappa\cos\theta \end{aligned} \tag{3.7}$$

dır. 3.6 ve 3.7 eşitlikleri yardımıyla

$$a_2=\varkappa\cos\theta$$

olarak bulunur.

3.3 eşitliğinin her iki yanı ζ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle \xi^{'},\zeta\right\rangle &= \langle a_1\xi,\zeta\rangle+\langle a_2\eta,\zeta\rangle+\langle a_3\zeta,\zeta\rangle \\ \left\langle T^{'},\zeta\right\rangle &= a_3 \end{aligned} \tag{3.8}$$

olup $T^{'}=\varkappa N$ ve $\zeta=-\sin\theta.N+\cos\theta.B$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left\langle T^{'},\zeta\right\rangle &= \langle \varkappa N,-\sin\theta.N+\cos\theta.B\rangle \\ &= -\varkappa\sin\theta\left\langle N,N\right\rangle+\varkappa\cos\theta\left\langle N,B\right\rangle \\ &= -\varkappa\sin\theta \end{aligned} \tag{3.9}$$

dır. 3.8 ve 3.9 eşitlikleri yardımıyla

$$a_3=-\varkappa\sin\theta$$

olarak bulunur. 3.3 eşitliğinde a_1,a_2,a_3 değerleri yazılırsa

$$\xi^{'}=(\varkappa\cos\theta)\,\eta+(-\varkappa\sin\theta)\,\zeta$$

dır.

$\eta^{'} \in Sp\{\xi, \eta, \zeta\}$ olduğundan

$$\eta^{'} = b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta \tag{3.10}$$

olup burada $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ dir. 3.4 eşitliğinin her iki yanı sağdan ξ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \eta^{'}, \xi \right\rangle &= \langle b_1\xi, \xi\rangle + \langle b_2\eta, \xi\rangle + \langle b_3\zeta, \xi\rangle \\ \left\langle \eta^{'}, \xi \right\rangle &= b_1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

olup $\eta^{'} = (\cos\theta.N + \sin\theta.B)^{'}$ ve $\xi = T$ olduğundan

$$\left\langle \eta^{'}, \xi \right\rangle = \left\langle -\sin\theta.\theta^{'}.N + \cos\theta.N^{'} + \cos\theta.\theta^{'}.B + \sin\theta.B^{'}, T \right\rangle$$

dır. $N^{'} = -\varkappa T + \tau B$ ve $B^{'} = -\tau N$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\langle \eta^{'}, \xi \right\rangle &= \left\langle -\sin\theta.\theta^{'}.N + \cos\theta.\left(-\varkappa T + \tau B\right) + \cos\theta.\theta^{'}.B + \sin\theta.\left(-\tau N\right), T \right\rangle \\ &= -\varkappa\cos\theta\left\langle T, T\right\rangle \\ &= -\varkappa\cos\theta \end{aligned} \tag{3.12}$$

dır. 3.11 ve 3.12 eşitlikleri yardmıyla

$$b_1 = -\varkappa\cos\theta$$

olarak bulunur.
3.10 eşitliğinin her iki yanı η ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \eta^{'}, \eta \right\rangle &= \langle b_1\xi, \eta\rangle + \langle b_2\eta, \eta\rangle + \langle b_3\zeta, \eta\rangle \\ \left\langle \eta^{'}, \eta \right\rangle &= b_2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

olup $\eta^{'} = (\cos\theta.N + \sin\theta.B)^{'}$ ve $\eta = \cos\theta.N + \sin\theta.B$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left\langle \eta^{'}, \eta \right\rangle &= \left\langle -\sin\theta.\theta^{'}.N + \cos\theta.\left(-\varkappa T + \tau B\right) + \cos\theta.\theta^{'}.B + \sin\theta.\left(-\tau N\right)\right. \\ &\quad \left., \cos\theta.N + \sin\theta.B\right\rangle \\ &= -\sin\theta.\cos\theta.\theta^{'} + \tau\cos\theta.\sin\theta + \sin\theta.\cos\theta.\theta^{'} - \tau\cos\theta.\sin\theta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

dır. 3.13 ve 3.14 eşitlikleri yardımıyla

$$b_2 = 0$$

olarak bulunur.

3.10 eşitliğinin her iki yanı ζ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle \eta^{'}, \zeta \right\rangle &= \langle b_1\xi, \zeta\rangle + \langle b_2\eta, \zeta\rangle + \langle b_3\zeta, \zeta\rangle \\ \left\langle \eta^{'}, \zeta \right\rangle &= b_3 \end{aligned} \tag{3.15}$$

olup $\eta^{'} = (\cos\theta.N + \sin\theta.B)^{'}$ ve $\zeta = -\sin\theta.N + \cos\theta.B$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left\langle \eta^{'}, \zeta \right\rangle &= \left\langle -\sin\theta.\theta^{'}N + \cos\theta.\left(-\varkappa T + \tau B\right) + \cos\theta.\theta^{'}B + \sin\theta.\left(-\tau N\right)\right. \\ &\quad \left., -\sin\theta.N + \cos\theta.B\right\rangle \\ &= \tau\sin^2\theta + \tau\cos^2\theta + \cos^2\theta.\theta^{'} + \sin^2\theta.\theta^{'} \\ &= \tau\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + \theta^{'}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ &= \tau + \theta^{'} \end{aligned} \tag{3.16}$$

dır. 3.15 ve 3.16 eşitlikleri yardımıyla

$$b_3 = \tau + \theta^{'}$$

olarak bulunur.

3.10 eşitliğinde b_1, b_2, b_3 değerleri yerlerine yazılırsa

$$\eta' = (-\varkappa \cos\theta)\,\xi + \left(\tau + \theta'\right)\zeta$$

dır.

$\zeta' \in Sp\{\xi, \eta, \zeta\}$ olduğundan

$$\zeta' = c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta \tag{3.17}$$

olucak şekilde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ dir. 3.17 eşitliğinin her iki yanı sağdan ξ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \zeta', \xi \right\rangle &= \langle c_1\xi, \xi\rangle + \langle c_2\eta, \xi\rangle + \langle c_3\zeta, \xi\rangle \\ \left\langle \zeta', \xi \right\rangle &= c_1 \end{aligned} \tag{3.18}$$

olup $\zeta' = (-\sin\theta.N + \cos\theta.B)'$ ve $\xi = T$ olduğundan

$$\left\langle \zeta', \xi \right\rangle = \left\langle -\cos\theta.\theta'.N - \sin\theta.N' - \sin\theta.\theta'.B + \cos\theta.B', T \right\rangle$$

dır. $N' = -\varkappa T + \tau B$ ve $B' = -\tau N$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\langle \zeta', \xi \right\rangle &= \left\langle -\cos\theta.\theta'.N - \sin\theta.\left(-\varkappa T + \tau B\right) - \sin\theta.\theta'.B + \cos\theta.\left(-\tau N\right), T \right\rangle \\ &= \varkappa \sin\theta \end{aligned} \tag{3.19}$$

dır. 3.18 ve 3.19 eşitlikleri yardımıyla

$$c_1 = \varkappa \sin\theta$$

olarak bulunur.

3.17 eşitliğinin her iki yanı sağdan η ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \zeta^{'}, \eta \right\rangle &= \langle c_1\xi, \eta\rangle + \langle c_2\eta, \eta\rangle + \langle c_3\zeta, \eta\rangle \\ \left\langle \zeta^{'}, \eta \right\rangle &= c_2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

olup $\zeta^{'} = (-\sin\theta.N + \cos\theta.B)^{'}$ ve $\eta = \cos\theta.N + \sin\theta.B$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\langle \zeta^{'}, \eta \right\rangle &= \left\langle -\cos\theta.\theta^{'}.N - \sin\theta.\left(-\varkappa T + \tau B\right) - \sin\theta.\theta^{'}.B + \cos\theta.\left(-\tau N\right)\right. \\ &\quad \left., \cos\theta.N + \sin\theta.B\right\rangle \\ &= -\cos^2\theta.\theta^{'} - \tau\sin^2\theta - \sin^2\theta.\theta^{'} - \tau\cos^2\theta \\ &= -\tau\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) - \theta^{'}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ &= -\left(\tau + \theta^{'}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

dür. 3.20 ve 3.21 eşitlikleri yardımıyla

$$c_2 = -\left(\tau + \theta^{'}\right)$$

olarak bulunur.
3.17 eşitliğinin her iki yanı sağdan ζ çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \zeta^{'}, \zeta \right\rangle &= \langle c_1\xi, \zeta\rangle + \langle c_2\eta, \zeta\rangle + \langle c_3\zeta, \zeta\rangle \\ \left\langle \zeta^{'}, \zeta \right\rangle &= c_3 \end{aligned} \tag{3.22}$$

olup $\zeta^{'} = (-\sin\theta.N + \cos\theta.B)^{'}$ ve $\zeta = -\sin\theta.N + \cos\theta.B$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\langle \zeta^{'}, \zeta \right\rangle &= \left\langle -\cos\theta.\theta^{'}N - \sin\theta.\left(-\varkappa T + \tau B\right) - \sin\theta.\theta^{'}B + \cos\theta.\left(-\tau N\right)\right. \\ &\quad \left., -\sin\theta.N + \cos\theta.B\right\rangle \\ &= \sin\theta.\cos\theta.\theta^{'} - \tau\sin\theta.\cos\theta - \sin\theta.\cos\theta.\theta^{'} + \tau\sin\theta.\cos\theta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

dır.

3.22 ve 3.23 eşitlikleri yardımıyla

$$c_3 = 0$$

olarak bulunur.

3.17 eşitliğinde c_1, c_2, c_3 değerleri yerine yazılırsa

$$\zeta' = (\varkappa \sin\theta)\,\xi - \left(\tau + \theta'\right)\eta$$

dır.

Teorem 3.1.3. α, M içinde birim hızlı bir eğri olsun. Şerid eğrisinin eğrilikleri. $\varkappa$, τ ve (α, M) şeridinin eğrilikleri a, b, c olmak üzere, eğrinin eğrilikleri ile şeridin eğrilikleri arasındaki geçiş bağıntıları

$$\varkappa^2 = b^2 + c^2 \qquad\qquad \tau = a + \frac{bc' - b'c}{b^2 + c^2}$$

dir.

İspat 3.1.3 E^3 de bir M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \longrightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 yardımıyla

$$\xi = T$$

olup

$$\xi' = T'$$

dür.

$\xi' = c\eta - b\zeta$ ve $T' = \varkappa N$ olduğundan

$$\varkappa N = c\eta - b\zeta$$

olup

$$\begin{aligned}
\varkappa N &= c\left(\frac{c}{\varkappa}N + \frac{b}{\varkappa}B\right) - b\left(-\frac{b}{\varkappa}N + \frac{c}{\varkappa}B\right) \\
\varkappa N &= \frac{c^2}{\varkappa}N + \frac{cb}{\varkappa}B + \frac{b^2}{\varkappa}N - \frac{bc}{\varkappa}B \\
\varkappa N &= \frac{b^2 + c^2}{\varkappa}N \\
\varkappa^2 &= b^2 + c^2
\end{aligned}$$

dir. Benzer mantıkla Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 η' vektör alanı için kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\eta' &= -c\xi + a\zeta \\
&= -cT + a\left(-\frac{b}{\varkappa}N + \frac{c}{\varkappa}B\right) \\
&= -cT - \frac{ab}{\varkappa}N + \frac{ac}{\varkappa}B \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\eta = \cos\theta.N + \sin\theta.B$ eşitliğinde her iki tarafın s parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\eta' &= \left(\frac{1}{\varkappa}\right)'(cN + bB) + \frac{1}{\varkappa}\left(c'N + cN' + b'B + bB'\right) \\
&= \left(\frac{1}{\varkappa}\right)'(cN + bB) + \frac{1}{\varkappa}\left[c'N + c\left(-\varkappa T + \tau B\right) + b'B + b\left(-\tau N\right)\right] \\
&= -cT + \left[\left(\frac{1}{\varkappa}\right)'c + \left(\frac{1}{\varkappa}\right)c' - \left(\frac{1}{\varkappa}\right)b\tau\right]N \\
&\quad + \left[\left(\frac{1}{\varkappa}\right)'b + \left(\frac{1}{\varkappa}\right)b' - \left(\frac{1}{\varkappa}\right)c\tau\right]B
\end{aligned} \tag{3.25}$$

bulunur.

3.24 ve 3.25 eşitliklerinden

$$-\frac{ab}{\varkappa} = \left(\frac{1}{\varkappa}\right)'c + \left(\frac{1}{\varkappa}\right)c' - \left(\frac{1}{\varkappa}\right)b\tau \tag{3.26}$$

ve

$$\frac{ac}{\varkappa} = \left(\frac{1}{\varkappa}\right)'b + \left(\frac{1}{\varkappa}\right)b' - \left(\frac{1}{\varkappa}\right)c\tau \tag{3.27}$$

dur. 3.26 ve 3.27 eşitliklerinde $\frac{1}{\varkappa} = \rho$ yazılırsa

$$-ab\rho = c\rho' + c'\rho - b\tau\rho \tag{3.28}$$

ve

$$ac\rho = b\rho' + b'\rho + c\tau\rho \tag{3.29}$$

eşitlikleri elde edilir.

3.28 eşitliğinin her iki yanı b ile, 3.29 eşitliğinin her iki yanı $-c$ ile çarpılıp toplanırsa

$$\begin{aligned} -ab^2 - ac^2 &= bc' - b'c - b^2\tau - c^2\tau \\ \left(b^2 + c^2\right)\tau &= bc' - b'c + a\left(b^2 + c^2\right) \\ \tau &= a + \frac{bc' - b'c}{b^2 + c^2} \end{aligned}$$

bulunur.

4. E^n DE ŞERİTLER TEORİSİ

4.1 E^n de Şeridin Eğriliklerinin Eğrinin Eğrilikleri Cinsinden İfadeleri

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^n$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin $\alpha(s)$ noktasında birinci Frenet vektörü $V_1(\alpha(s))$ olan, $\alpha(I)$ nın noktalarına oturtulmuş bütün ortonormal pozitif yönlü, çatıların cümlesini $F_0^{\perp}(\alpha)$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} F &= \{\alpha(s); Z_1, Z_2, ..., Z_n\} \\ &\quad \{Z_1(a(s)), Z_2(a(s)), ..., Z_{n-1}(a(s))\} \end{aligned}$$

sistemi $T_M(a(s))$ tanjant uzayının ortonormal bir bazı ve $Z_n(a(s))$ de α eğrisi boyunca yüzeyin birim normal vektör alanı olsun. $Z_1 = V_1$ olmak üzere,

$$Z_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}}_{Z} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{21} & \cdot & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{E}$$

veya

$$Z = G.E \tag{4.1.1}$$

yazılabilir.

4.1.1 eşitliğinde s parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{ds} &= \left(\frac{dG}{ds}\right)E + G\left(\frac{dE}{ds}\right)\ ,\ E = sbt \\ \frac{dZ}{ds} &= \left(\frac{dG}{ds}\right)E \\ \frac{dZ}{ds} &= \left(\frac{dG}{ds}G^T\right)Z \qquad (4.1.2)\end{aligned}$$

elde edilir.

G ortogonal matris olduğundan

$$G.G^T = I_n$$

olup eşitliğin her yanının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{dG}{ds}G^T + G\frac{dG^T}{ds} = 0$$

$$\frac{dG}{ds}G^T = -G\frac{dG^T}{ds}$$

olup. $\frac{dG}{ds}G^T = \overline{\Omega}$ denilirse $G\frac{dG^T}{ds} = \overline{\Omega}^T$ olur ve burada $\overline{\Omega}^T = -\overline{\Omega}$ dir. O halde $\overline{\Omega}$ antisimetrik bir matrisdir. 4.1.2 denkleminde $\frac{dG}{ds}G^T = \overline{\Omega}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\frac{dZ}{ds} = \overline{\Omega}Z$$

olur. $\overline{t}_{ij} \rightarrow \{\alpha(I), M\}$ şeridinin α eğrisi boyunca yüksek mertebeden eğrilikleri olmak üzere

$$\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{t}_{12} & \overline{t}_{13} & ... & \overline{t}_{1n} \\ -\overline{t}_{12} & 0 & \overline{t}_{23} & ... & \overline{t}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\overline{t}_{1n} & -\overline{t}_{2n} & -\overline{t}_{3n} & ... & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi eğrinin $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ Frenet çatısını standart baza göre ifade edelim.

$$V_i = \sum_{j=1}^{r} k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & ... & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & ... & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & ... & k_{rr} \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{E}$$

Buradaki K matrisi ortogonal olduğundan

$$V = KE$$

veya

$$E = K^T.V \tag{4.1.3}$$

olup 4.1.3 ifadesi 4.1.1 de yerine yazılırsa

$$Z = G.K^T.V$$

olur. Bu eşitlikte her iki yanın s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{dZ}{ds} = \frac{dG}{ds}K^T V + G\left(\frac{dK^T}{ds}V + K^T\frac{dV}{ds}\right)$$

$$\overline{\Omega}Z = \left(\frac{dG}{ds}K^T + G\frac{dK^T}{ds}\right)V + GK^T\frac{dV}{ds} \tag{4.1.4}$$

dır.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & ... & t_{1n} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} & ... & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -t_{1n} & -t_{2n} & -t_{3n} & ... & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{dV}{ds} = \Omega V \tag{4.1.5}$$

olduğundan 4.1.5 eşitliği 4.1.4 denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega}GE &= \left(\frac{dG}{ds}K^T + G\frac{dK^T}{ds} + GK^T\Omega\right)V \\
\overline{\Omega}GE &= \left(\frac{dG}{ds}K^T + G\frac{dK^T}{ds} + GK^T\Omega\right)KE \\
\overline{\Omega}G &= \left(\frac{dG}{ds}K^T + G\frac{dK^T}{ds} + GK^T\Omega\right)K \\
\overline{\Omega}G &= \frac{dG}{ds} + G\frac{dK^T}{ds}K + GK^T\Omega K \\
\overline{\Omega} &= \frac{dG}{ds}G^T + G\frac{dK^T}{ds}KG^T + GK^T\Omega KG^T \\
\overline{\Omega} &= \left(\frac{dG}{ds}K^T + G\frac{dK^T}{ds} + GK^T\Omega\right)KG^T \\
\overline{\Omega} &= \left(\frac{d(GK^T)}{ds}KG^T + GK^T\Omega KG^T\right) \text{ , } GK^T = H \\
\overline{\Omega} &= \frac{dH}{ds}.H^T + H\Omega H^T
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

4.1.6 ifadesi şeridin eğriliklerinin eğrinin eğrilikleri cinsinden ifadesidir.

Şimdi bu eşitliğin $n = 3$ özel hali için bilinen ifadeleri sağladığını gösterelim.

$$\overline{\Omega} = \frac{dH}{ds}.H^T + H\Omega H^T$$

olup buradaki H ve Ω matrisleri, sırasıyla,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ \Omega = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Dolayısıyla

$$\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta' \sin\theta & \theta' \cos\theta \\ 0 & -\theta' \cos\theta & -\theta' \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta' \\ 0 & -\theta' & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa\cos\theta & -\tau\sin\theta & \tau\cos\theta \\ \varkappa\sin\theta & -\tau\cos\theta & -\tau\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta' \\ 0 & -\theta' & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varkappa\cos\theta & -\varkappa\sin\theta \\ -\varkappa\cos\theta & 0 & \tau \\ \varkappa\sin\theta & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa\cos\theta & -\varkappa\sin\theta \\ -\varkappa\cos\theta & 0 & \tau+\theta^{'} \\ \varkappa\sin\theta & -\left(\tau+\theta^{'}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Açıkca görülüyorki bizim $n = 3$ için bulduğumuz yukarıdaki ilişkiler Sabuncuoğlu' nun bulduğu ilişkiler ile aynıdır. Dolayısıyla teorinin doğruluğu açıkca görülmektedir. Şimdi matrisler cinsinden bilinen bu ilişkileri herbir eğrilik için indisler kullanarak aşağıdaki teorem ile genelleyelim.

Teorem 4.1.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^n$ birim hızlı bir eğri ve M bir hiperyüzey olsun. $1 \leq k, m \leq n$ için, $\{\alpha, M\}$ şeridinin eğrilikleri $\overline{t}_{km}$ ve α eğrisinin eğrilikleri t_{km} olmak üzere

$$\overline{t}_{km} = \sum_{i=1}^{n} h_{ki}^{'} h_{mi} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ki} t_{ij} h_{mj}$$

dir.

İspat. Daha önce 4.1.6 eşitliğinde matrisler ile ifade ettiğimiz

$$\overline{\Omega} = \frac{dH}{ds}.H^T + H\Omega H^T$$

ifadesinde herbir matrisi yerine yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 0 & \overline{t}_{12} & \overline{t}_{13} & ... & \overline{t}_{1n} \\ -\overline{t}_{12} & 0 & \overline{t}_{23} & ... & \overline{t}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\overline{t}_{1n} & -\overline{t}_{2n} & -\overline{t}_{3n} & ... & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^{'} & h_{12}^{'} & ... & h_{1n}^{'} \\ h_{21}^{'} & h_{22}^{'} & ... & h_{2n}^{'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1}^{'} & h_{n2}^{'} & ... & h_{nn}^{'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & ... & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & ... & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & ... & h_{nn} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & ... & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & ... & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & ... & t_{1n} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} & ... & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -t_{1n} & -t_{2n} & -t_{3n} & ... & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & ... & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & ... & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & ... & h_{nn} \end{bmatrix}$$

matris eşitliği yardımıyla. $\overline{\Omega}$ matrisinin birinci satır elemanları

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{12} &= \sum_{i=1}^{n} h'_{1i} h_{2i} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{1i} t_{ij} h_{2j} \\
\bar{t}_{13} &= \sum_{i=1}^{n} h'_{1i} h_{3i} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{1i} t_{ij} h_{3j} \\
&\vdots \\
\bar{t}_{1n} &= \sum_{i=1}^{n} h'_{1i} h_{ni} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{1i} t_{ij} h_{nj} \ ,
\end{aligned}$$

$\overline{\Omega}$ matrisinin ikinci satır elemanları

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{21} &= \sum_{i=1}^{n} h'_{2i} h_{1i} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{2i} t_{ij} h_{1j} \\
\bar{t}_{22} &= \sum_{i=1}^{n} h'_{2i} h_{2i} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{2i} t_{ij} h_{2j} \\
&\vdots \\
\bar{t}_{2n} &= \sum_{i=1}^{n} h'_{2i} h_{ni} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{2i} t_{ij} h_{nj}
\end{aligned}$$

ve nihayet $\overline{\Omega}$ matrisinin n-inci satır elemanları

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{n1} &= \sum_{i=1}^{n} h'_{ni} h_{1i} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ni} t_{ij} h_{1j} \\
\bar{t}_{n2} &= \sum_{i=1}^{n} h'_{ni} h_{2i} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ni} t_{ij} h_{2j} \\
&\vdots \\
\bar{t}_{nn} &= \sum_{i=1}^{n} h'_{ni} h_{ni} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ni} t_{ij} h_{nj}
\end{aligned}$$

olup en genel ifade

$$\bar{t}_{km} = \sum_{i=1}^{n} h'_{ki} h_{mi} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ki} t_{ij} h_{mj}$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.1.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve M bir yüzey olsun. $\{\alpha, M\}$ şeridinin eğrilikleri a, b, c ve α eğrisinin eğrilikleri $\varkappa$, τ olmak üzere

$$\begin{aligned} a &= \theta^{'} + \tau \\ b &= \varkappa \sin\theta \\ c &= \varkappa \cos\theta \end{aligned}$$

dır.

İspat Daha önce ispatladığımız bu ilişkileri Teorem 4.1.1 i kullanarak $n = 3$ için bulalım

$$\bar{t}_{km} = \sum_{i=1}^{n} h_{ki}^{'} h_{mi} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ki} t_{ij} h_{mj}$$

ifadesi yardımıyla, $\bar{t}_{12}, \bar{t}_{23}, \bar{t}_{31}$ eğrilikleri

$$\begin{aligned} \bar{t}_{12} &= \sum_{i=1}^{n} h_{1i}^{'} h_{2i} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{1i} t_{ij} h_{2j} \\ \bar{t}_{23} &= \sum_{i=1}^{n} h_{2i}^{'} h_{3i} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{2i} t_{ij} h_{3j} \\ \bar{t}_{31} &= \sum_{i=1}^{n} h_{3i}^{'} h_{1i} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{3i} t_{ij} h_{1j} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$n = 3$ için

$$\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa\cos\theta & -\varkappa\sin\theta \\ -\varkappa\cos\theta & 0 & \tau+\theta^{\shortmid} \\ \varkappa\sin\theta & -\left(\tau+\theta^{\shortmid}\right) & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \bar{t}_{12} &= \sum_{i=1}^{3} h_{1i}^{\shortmid} h_{2i} + \sum_{i,j=1}^{3} h_{1i} t_{ij} h_{2j} \\ &= h_{11}^{\shortmid} h_{21} + h_{12}^{\shortmid} h_{22} + h_{13}^{\shortmid} h_{23} + h_{11} t_{11} h_{21} + h_{12} t_{21} h_{21} + h_{13} t_{31} h_{21} + h_{11} t_{12} h_{22} \\ &\quad + h_{12} t_{22} h_{22} + h_{13} t_{32} h_{22} + h_{11} t_{13} h_{23} + h_{12} t_{23} h_{23} + h_{13} t_{33} h_{23} \\ &= h_{11} t_{12} h_{22} \\ &= \varkappa\cos\theta \\ &= c \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} \bar{t}_{23} &= \sum_{i=1}^{3} h_{2i}^{\shortmid} h_{3i} + \sum_{i,j=1}^{3} h_{2i} t_{ij} h_{3j} \\ &= h_{21}^{\shortmid} h_{31} + h_{22}^{\shortmid} h_{32} + h_{23}^{\shortmid} h_{33} + h_{21} t_{11} h_{31} + h_{22} t_{21} h_{31} + h_{23} t_{31} h_{31} + h_{21} t_{12} h_{32} \\ &\quad + h_{22} t_{22} h_{32} + h_{23} t_{32} h_{32} + h_{21} t_{13} h_{33} + h_{22} t_{23} h_{33} + h_{23} t_{33} h_{33} \\ &= h_{22}^{\shortmid} h_{32} + h_{23}^{\shortmid} h_{33} + h_{23} t_{32} h_{32} + h_{22} t_{23} h_{33} \\ &= \theta^{\shortmid} + \tau \\ &= a \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{31} &= \sum_{i=1}^{3} h'_{3i} h_{1i} + \sum_{i,j=1}^{3} h_{3i} t_{ij} h_{1j} \\
&= h'_{31} h_{11} + h'_{32} h_{12} + h'_{33} h_{13} + h_{31} t_{11} h_{11} + h_{32} t_{21} h_{11} + h_{33} t_{31} h_{11} + h_{31} t_{12} h_{12} \\
&\quad + h_{32} t_{22} h_{12} + h_{33} t_{32} h_{12} + h_{31} t_{13} h_{13} + h_{32} t_{23} h_{13} + h_{33} t_{33} h_{13} \\
&= h_{32} t_{21} h_{11} \\
&= \varkappa \sin\theta \\
&= b
\end{aligned}$$

dir.

4.2 E^n de Eğrinin Eğriliklerinin Şeridin Eğrilikleri Cinsinden İfadeleri

H ortogonal matris olduğundan Bölüm 4.1 de matrisler yardımıyla bulunan

$$\overline{\Omega} = \frac{dH}{ds}.H^T + H\Omega H^T$$

ifadesi sağdan H, soldan H^T ile çarpılırsa

$$\Omega = H^T \overline{\Omega} H - H^T \frac{dH}{ds} \tag{4.2.1}$$

4.2.1 ifadesi bulunur. Bu ifade eğrinin eğriliklerinin şeridin eğrilikleri cinsinden ifadesidir.

Şimdi bu eşitliğin $n = 3$ özel hali için bilinen ifadeleri sağladığını gösterelim.

$$\Omega = H^T \overline{\Omega} H - H^T \frac{dH}{ds}$$

olup buradaki H ve $\overline{\Omega}$ matrisleri, sırasıyla,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ \overline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa\cos\theta & -\varkappa\sin\theta \\ -\varkappa\cos\theta & 0 & \tau+\theta^{\prime} \\ \varkappa\sin\theta & -\left(\tau+\theta^{\prime}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

Dolayısıyla

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varkappa\cos\theta & -\varkappa\sin\theta \\ -\varkappa\cos\theta & 0 & \tau+\theta^{\prime} \\ \varkappa\sin\theta & -\left(\tau+\theta^{\prime}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta^{\prime}\sin\theta & \theta^{\prime}\cos\theta \\ 0 & -\theta^{\prime}\cos\theta & -\theta^{\prime}\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa\cos\theta & -\varkappa\sin\theta \\ -\varkappa & \sin\theta.\left(\tau+\theta^{\prime}\right) & \cos\theta.\left(\tau+\theta^{\prime}\right) \\ 0 & -\cos\theta.\left(\tau+\theta^{\prime}\right) & \sin\theta.\left(\tau+\theta^{\prime}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^{\prime} \\ 0 & -\theta^{\prime} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau+\theta^{\prime} \\ 0 & -\left(\tau+\theta^{\prime}\right) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^{\prime} \\ 0 & -\theta^{\prime} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi matrisler cinsinden bilinen bu ilişkileri herbir eğrilik için indisler kullanarak aşağıdaki teorem ile genelleyelim.

Teorem 4.2.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^n$ birim hızlı bir eğri ve M bir hiperyüzey olsun. $1 \leq k, m \leq n$ için, $\{\alpha, M\}$ şeridinin eğrilikleri $\overline{t}_{km}$ ve α eğrisinin eğrilikleri t_{km} olmak üzere

$$t_{km} = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ik}\overline{t}_{ij}h_{jm} - \sum_{i=1}^{n} h_{ik}h'_{im}$$

dir.

İspat. Daha önce 4.2.1 eşitliğinde matrisler ile ifade ettiğimiz

$$\Omega = H^T\overline{\Omega}H - H^T\frac{dH}{ds}$$

ifadesinde herbir matrisi yerine yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & ... & t_{1n} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} & ... & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -t_{1n} & -t_{2n} & -t_{3n} & ... & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & ... & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & ... & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & ... & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} & ... & h'_{1n} \\ h'_{21} & h'_{22} & ... & h'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h'_{n1} & h'_{n2} & ... & h'_{nn} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & ... & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & ... & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & ... & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \overline{t}_{12} & \overline{t}_{13} & ... & \overline{t}_{1n} \\ -\overline{t}_{12} & 0 & \overline{t}_{23} & ... & \overline{t}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\overline{t}_{1n} & -\overline{t}_{2n} & -\overline{t}_{3n} & ... & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & ... & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & ... & h_{nn} \end{bmatrix}$$

matris eşitliği yardımıyla Ω matrisinin birinci satır elemanları

$$\begin{aligned} t_{11} &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{i1}\bar{t}_{ij}h_{j1} - \sum_{i=1}^{n} h_{i1}h'_{i1} \\ t_{12} &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{i1}\bar{t}_{ij}h_{j2} - \sum_{i=1}^{n} h_{i1}h'_{i2} \\ &\vdots \\ t_{1n} &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{i1}\bar{t}_{ij}h_{jn} - \sum_{i=1}^{n} h_{i1}h'_{in} \ , \end{aligned}$$

Ω matrisinin ikinci satır elemanları

$$\begin{aligned} t_{21} &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{i2}\bar{t}_{ij}h_{j1} - \sum_{i=1}^{n} h_{i2}h'_{i1} \\ t_{22} &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{i2}\bar{t}_{ij}h_{j2} - \sum_{i=1}^{n} h_{i2}h'_{i2} \\ &\vdots \\ t_{2n} &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{i2}\bar{t}_{ij}h_{jn} - \sum_{i=1}^{n} h_{i2}h'_{in} \end{aligned}$$

ve nihayet Ω matrisinin n-inci satır elemanları

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{in}\bar{t}_{ij}h_{j1} - \sum_{i=1}^{n} h_{in}h'_{i1} \\ t_{n2} &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{in}\bar{t}_{ij}h_{j2} - \sum_{i=1}^{n} h_{in}h'_{i2} \\ &\vdots \\ t_{nn} &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{in}\bar{t}_{ij}h_{jn} - \sum_{i=1}^{n} h_{ik}h'_{in} \end{aligned}$$

olup en genel ifade

$$t_{km} = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ik}\bar{t}_{ij}h_{jm} - \sum_{i=1}^{n} h_{ik}h'_{im}$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.2.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve M bir hiperyüzey olsun. $\{\alpha, M\}$ şeridinin eğrilikleri a, b, c ve α eğrisinin eğrilikleri $\varkappa$ ve τ olmak üzere

$$t_{12} = \varkappa \quad \text{ve} \quad t_{23} = \tau$$

olur.

İspat Bu ifadenin doğruluğunu Teorem 4.2.1 in $n = 3$ özel hali için gösterelim.

$$t_{km} = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ik}\bar{t}_{ij}h_{jm} - \sum_{i=1}^{n} h_{ik}h'_{im}$$

ifadesi yardımıyla, t_{12} ve t_{23} eğrilikleri

$$\begin{aligned} t_{12} &= \sum_{i,j=1}^{3} h_{i1}\bar{t}_{ij}h_{j2} - \sum_{i=1}^{3} h_{i1}h'_{i2} \\ t_{23} &= \sum_{i,j=1}^{3} h_{i2}\bar{t}_{ij}h_{j3} - \sum_{i=1}^{3} h_{i2}h'_{i3} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$n = 3$ için

$$\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa\cos\theta & -\varkappa\sin\theta \\ -\varkappa\cos\theta & 0 & \tau + \theta' \\ \varkappa\sin\theta & -\left(\tau + \theta'\right) & 0 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \; \Omega = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
t_{12} &= \sum_{i,j=1}^{3} h_{i1}\bar{t}_{ij}h_{j2} - \sum_{i=1}^{3} h_{i1}h'_{i2} \\
&= h_{11}\bar{t}_{11}h_{11} + h_{11}\bar{t}_{12}h_{22} + h_{11}\bar{t}_{13}h_{32} + h_{21}\bar{t}_{21}h_{12} + h_{21}\bar{t}_{12}h_{22} + h_{21}\bar{t}_{23}h_{32} \\
&\quad + h_{31}\bar{t}_{31}h_{12} + h_{31}\bar{t}_{32}h_{22} + h_{31}\bar{t}_{33}h_{32} - h_{11}h'_{12} - h_{21}h'_{22} - h_{31}h'_{32} \\
&= h_{11}\bar{t}_{12}h_{22} + h_{11}\bar{t}_{13}h_{32} \\
&= \varkappa\cos^2\theta + \varkappa\sin^2\theta \\
&= \varkappa
\end{aligned}
$$

dır.

$$
\begin{aligned}
t_{23} &= \sum_{i,j=1}^{3} h_{i2}\bar{t}_{ij}h_{j3} - \sum_{i=1}^{3} h_{i2}h'_{i3} \\
&= h_{12}\bar{t}_{11}h_{13} + h_{12}\bar{t}_{12}h_{23} + h_{12}\bar{t}_{13}h_{33} + h_{22}\bar{t}_{21}h_{13} + h_{22}\bar{t}_{22}h_{23} + h_{22}\bar{t}_{23}h_{33} \\
&\quad + h_{32}\bar{t}_{31}h_{13} + h_{32}\bar{t}_{32}h_{23} + h_{32}\bar{t}_{33}h_{33} - h_{12}h'_{13} - h_{22}h'_{23} - h_{32}h'_{33} \\
&= h_{22}\bar{t}_{23}h_{33} + h_{32}\bar{t}_{32}h_{23} - h_{22}h'_{23} - h_{32}h'_{33} \\
&= \left(\tau + \theta'\right)\cos^2\theta + \left(\tau + \theta'\right)\sin^2\theta - \theta'\cos^2\theta - \theta'\sin^2\theta \\
&= \tau
\end{aligned}
$$

dur.

Teorem 4.2.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve M bir hiperyüzey olsun. $1 \leq k, m \leq 3$ olmak üzere, $\{\alpha, M\}$ şeridinin eğrilikleri $\bar{t}_{km}$ ve α eğrisinin eğrilikleri t_{km} olmak üzere

$$\left(\bar{t}_{31}\right)^2 + \left(\bar{t}_{12}\right)^2 = \left(t_{12}\right)^2$$

ve

$$t_{23} = \bar{t}_{23} + \frac{\bar{t}_{31}\left(\bar{t}_{12}\right)' - \left(\bar{t}_{31}\right)'\bar{t}_{12}}{\left(\bar{t}_{31}\right)^2 + \left(\bar{t}_{12}\right)^2}$$

dir. $\bar{t}_{31} = b$, $\bar{t}_{12} = c$ ve $t_{12} = \varkappa$, $t_{23} = \tau$, $\bar{t}_{23} = a$ olmak üzere bu son iki bağıntı

$$b^2 + c^2 = \varkappa^2 \qquad\qquad \tau = a + \frac{bc' - b'c}{b^2 + c^2}$$

yazılabilir.

İspat Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.2.1 den $n = 3$ için

$$\begin{aligned} t_{12} &= \sum_{i,j=1}^{3} h_{i1}\bar{t}_{ij}h_{j2} - \sum_{i=1}^{3} h_{i1}h'_{i2} \\ t_{23} &= \sum_{i,j=1}^{3} h_{i2}\bar{t}_{ij}h_{j3} - \sum_{i=1}^{3} h_{i2}h'_{i3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{t}_{12} &= \sum_{i=1}^{3} h'_{1i}h_{2i} + \sum_{i,j=1}^{3} h_{1i}t_{ij}h_{2j} \\ \bar{t}_{23} &= \sum_{i=1}^{3} h'_{2i}h_{3i} + \sum_{i,j=1}^{3} h_{2i}t_{ij}h_{3j} \\ \bar{t}_{31} &= \sum_{i=1}^{3} h'_{3i}h_{1i} + \sum_{i,j=1}^{3} h_{3i}t_{ij}h_{1j} \end{aligned}$$

olup

$$\left(\bar{t}_{31}\right)^2 + \left(\bar{t}_{12}\right)^2 = \left(t_{12}\right)^2 \tag{4.2.2}$$

ve

$$t_{23} = \bar{t}_{23} + \frac{\bar{t}_{31}\left(\bar{t}_{12}\right)' - \left(\bar{t}_{31}\right)'\bar{t}_{12}}{\left(\bar{t}_{31}\right)^2 + \left(\bar{t}_{12}\right)^2} \tag{4.2.3}$$

dir.

Sonuç 4.1.1 ve Sonuç 4.2.1 den

$$\bar{t}_{31} = b,\ \bar{t}_{12} = c,\ \bar{t}_{23} = a$$

ve

$$t_{12} = \varkappa,\ t_{23} = \tau$$

olduğundan 4.2.2 ve 4.2.3 denklemleri aslında sırasıyla

$$b^2 + c^2 = \varkappa^2 \quad \text{ve} \quad \tau = a + \frac{bc' - b'c}{b^2 + c^2}$$

dir.

O halde $\alpha : I \longrightarrow M$ olmak üzere genel halde bir (α, M) şeridi için

$$\left(\bar{t}_{31}\right)^2 + \left(\bar{t}_{12}\right)^2 = \left(t_{12}\right)^2$$

ve

$$t_{23} = \bar{t}_{23} + \frac{\bar{t}_{31}\left(\bar{t}_{12}\right)' - \left(\bar{t}_{31}\right)'\bar{t}_{12}}{\left(\bar{t}_{31}\right)^2 + \left(\bar{t}_{12}\right)^2}$$

dir.

KAYNAKLAR

Auslander, L. 1967. Differential Geometry, A Harper İnternational Edition. Harper Row. New York, London. LCCCN : 67-10789.

Hacısalihoğlu, H.H. 2000a. Diferensiyel Geometri Cilt I. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Beşevler, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H. 2000b. Diferensiyel Geometri Cilt II. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Beşevler, Ankara.

Kobayashi, S. and Nomizo, K. "Foundations of Diferential Geometry" Vol. I, Vol. II. Copyright © 1963 by John Wiley sons incs. LCCCN : 63-192009.

Matsushima, Y. 1972. "Differentiable Manifold" Marcel Dekker, Inc. New York. (Translated by E.T. Kobayashi). pp : 25-80

Sabuncuoğlu A. 2004. Diferensiyel Geometri, 73s., Nobel Yayın No:258, Yenişehir, Ankara.

Sabuncuoğlu, A. and Hacısalihoğlu, H.H. 1975. "On Higher Curvatures of A Curve", Communications de la Faculté des Sciences De L' Université d' Ankar Série A1, Tome 24, pp: 33-46.

Sabuncuoğlu, A. and Hacısalihoğlu, H.H. 1975. Higher Curvatures of A Strip, Communications de la Faculté des Sciences De L' Université d' Ankar Série A1, Tome 24, pp: 25-33.

Sabuncuoğlu, A. 1976. "E^n de $(n-1)$ Manifoldlar için Joachimsthal Teoremi", (Doktora Tezi).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Osman Zeki OKUYUCU

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 31.08.1984

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Alparslan Lisesi (2002)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2007)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2008-Şubat 2010)