ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MEVSİMSEL ZAMAN SERİLERİNDE PERİODOGRAM ANALİZİ VE SANAYİ ÜRETİM ENDEKSİ ÜZERİNE UYGULAMALARI

Keziban TEKİN

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Keziban TEKİN tarafından hazırlanan **"Mevsimsel Zaman Serilerinde Periodogram Analizi ve Sanayi Üretim Endeksi Üzerine Uygulamaları"** adlı tez çalışması 09/10/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Yılmaz AKDİ
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Mehmet Akif BAKIR
Gazi Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yılmaz AKDİ
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Nezir KÖSE
Gazi Üniversitesi Ekonometri Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Halil AYDOĞDU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Rukiye DAĞALP
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim DEMİR

Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

09/10/2015

Keziban TEKİN

ÖZET

Doktora Tezi

MEVSİMSEL ZAMAN SERİLERİNDE PERİODOGRAM ANALİZİ
VE SANAYİ ÜRETİM ENDEKSİ ÜZERİNE UYGULAMALARI

Keziban TEKİN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz AKDİ

Çalışmada simulasyon programıyla HEGY ve periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testlerinin güçlerinin karşılaştırılması araştırılmaktadır. $|\rho| < 1$ için HEGY testine göre periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin daha güçlü olduğu gözlenmiştir. Özellikle HEGY testinin gücünün küçük örneklemler için çok zayıf olduğu tespit edilmiştir. Anlamlılık düzeylerinde inceleme yapıldığında, büyük örneklemler için HEGY testinin performansının daha iyi olduğu söylenebilir. Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi modele bağlı değildir. Ayrıca, periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi için güç fonksiyonunun analitik ifadesi mevcuttur. Dolayısıyla özellikle küçük örneklem hacimleri için periodogram tabanlı birim kök testi HEGY yöntemine göre tercih edilebilir. Ancak mevsimsel frekanslarda birim kök araştırması yapılmak istenirse HEGY testi kullanılabilir.

Çalışmada testlerin uygulaması olarak, Türkiye ve Avrupa Birliği Ülkeleri için 1991:01-2013:04 sanayi üretim endeksi verileri kullanılarak, HEGY ve periodogram tabanlı birim kök testleri yardımıyla mevsimsel birim kök varlığı incelenmiştir. İki test sonucunda da serilerde 0 frekansta birim kök olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca, n=92 için HEGY ve periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testlerinin güçleri karşılaştırıldığında, periodogram tabanlı birim kök testinin gücünün daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Ekim 2015, 119 sayfa

Anahtar Kelimeler: HEGY testi, periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi, testin gücü.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

PERIODOGRAM ANALYSIS IN SEASONAL TIME SERIES AND APPLICATIONS TO THE INDUSTRIAL PRODUCTION INDEX

Keziban TEKİN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz AKDİ

This study investigates the power of HEGY and periodogram based seasonal unit root tests based on a simulation study. Periodogram based seasonal unit root test has been found to be stronger than HEGY test for $|\rho| < 1$. Especially, the power of HEGY test is found quite weak for small sample sizes and it is observed that HEGY method has a better performance according to the size of the test for large sample. However, the periodogram based test seems to be better for small sample. The periodograms are model-free (can be calculated without any model specification) and the analytic form of the power function is available. Therefore, this method can be preferable, especially for small sample sizes. However, if it is investigated unit root at seasonal frequencies, HEGY test should be used.

As an application of the tests, we investigate the presence of seasonal unit roots in the industrial production index of Turkey and EU for the period of 1991:01-2013:04 by using HEGY and periodogram based tests. It is found that series has a unit root at 0 frequency for both methods. We also simulated the power of HEGY method for n=92 and from the analytic form of the power function for the periodogram based method and it is observed that the periodogram gives better power than HEGY methods.

October 2015, 119 pages

Key Words: HEGY test, periodogram based seasonal unit root test, power of the test.

TEŞEKKÜR

Lisans öğrenimimden başlayarak doktora öğrenimimi tamamlayıncaya kadar sabırla beni yönlendiren, zaman ayıran, engin bilgisini ve tecrübesini paylaşan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, akademik ve insancıl kişiliğini örnek aldığım, değerli hocam, tez danışmanım Prof. Dr. Yılmaz AKDİ'ye (Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü) ve eşi Handan AKDİ'ye tezimde gösterdikleri büyük ilgiden ve hoşgörüden dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin uygulama bölümünün netleşmesinde önemli fikirler vererek büyük katkılar sağlayan, her zaman içtenlikle yardımcı olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Nezir KÖSE'ye (Gazi Üniversitesi Ekonometri Bölümü), tezimi ayrıntılı bir şekilde inceleyerek tamamlamamda önemli katkılar sağlayan değerli hocam Sayın Prof. Dr. M. Akif BAKIR'a (Gazi Üniversitesi İstatistik Bölümü), tez çalışmam süresince çeşitli önerilerini paylaşan, eleştirileri ile çalışmama yön veren değerli hocam Sayın Doç. Dr. Halil AYDOĞDU'ya (Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü), İstatistik Bilimini teoriden uygulamaya geçirmemde ufkumu açan, her zaman güler yüzünü ve desteğini gördüğüm değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Rukiye DAĞALP'e (Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü), tezimde yer alan sonuçların yayın olarak toplulaştırılmasında eleştirileriyle katkı sağlayan ve bu sürecin her aşamasında bana içtenlikle destek olan Sayın Doç. Dr. Afşin ŞAHİN'e (Gazi Üniversitesi Bankacılık ve Sigortacılık Yüksekokulu), yüksek lisans ve doktora dönemimde kader ortaklığı yaptığımız aynı zamanda makalemin yayınlanma aşamasında yol gösteren Sayın Araş. Gör. Dr. Anıl ERALP'e (Gazi Üniversitesi Ekonometri Bölümü) teşekkür ederim.

Tez çalışmalarım sırasında başarabileceğime inanan ve bana sonsuz destek olan değerli dostlarım Ebru ÜNAL, Eylül POLAT, Gülçin ERDOĞAN, Melike YALIN ALTUN, Pınar YILMAZ EKŞİ, Yüce YILMAZ AYKER'e, yoğun olduğum dönemlerde çalışmalarımı planlamama yardımcı olan değerli mesai arkadaşım Abdullah YÜKSEL'e çok teşekkür ederim.

Hayatım boyunca her zaman yanımda olan, bu zorlu yolda gerek sevgisi gerek bilgisi ile bana ışık tutan meslektaşım, değerli kardeşim Selin TEKİN'e, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, bana sonuna kadar güvenen, tüm zorlukları ve güzellikleriyle yaşamımın her anını paylaşan, üzerimde olan emeklerini asla ödeyemeyeceğim, her şeyim olan, annem Ayşe TEKİN - babam Mehmet TEKİN'e en içten teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Keziban TEKİN
Ankara, Ekim 2015

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK ..... **i**
ÖZET ..... **ii**
ABSTRACT ..... **iii**
TEŞEKKÜR ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **vii**
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **viii**
ÇİZELGELER DİZİNİ ..... **x**
1.GİRİŞ **1**
1.1 Motivasyon **2**
1.2 Amaç **3**
1.3 Literatür Taraması **3**
1.4 Endeks Hesaplama Yöntemleri **7**
1.5 Sanayi Üretim Endeksi **10**
1.5.1 Sanayi üretim endeksinin tarihçesi **10**
1.5.2 Sanayi üretim endeksi hesaplama yöntemleri **12**
1.5.3 TÜİK sanayi üretim endeksi **12**
1.5.4 Avrupa Birliği toplulaştırılmış sanayi üretim endeksi **12**
2. YÖNTEM **15**
2.1 Zaman Serilerinde Durağanlık **19**
2.2 Zaman Serilerinde Mevsimsellik ve Nedenleri **21**
2.3 Durağan ve Durağan Olmayan Zaman Serisi Modelleri **22**
2.3.1 Hareketli ortalama modelleri (MA modelleri) **23**
2.3.2 Otoregresif modeller (AR modelleri) **26**
2.3.3 Otoregresif hareketli ortalama modelleri ($ARMA$ modelleri) **29**
2.3.4 Mevsimsel otoregresif modeller (SAR modelleri) **33**
2.4 Sıklık Boyut Kavramları **41**
2.4.1 Periyodik Fonksiyonlar **42**
2.4.2 Periyodiklik **45**
2.4.3 Spektrum **49**

2.4.4 Periodogram 55
2.5 Birim Köklü Seriler 60
2.5.1 Birim kök testleri 60
2.5.1.1 Dickey-Fuller birim kök testi 60
2.5.1.2 Genişletilmiş Dickey-Fuller testi 63
2.5.1.3 Phillips-Perron birim kök testi 66
2.5.2 Mevsimsel birim kökün araştırılması 69
2.5.2.1 HEGY yöntemi 70
2.5.2.2 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi 75
2.6 Model Belirleme Kriterleri 83
2.6.1 Akaike Bilgi Kriteri (AIC) 83
2.6.2 Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICc) 84
2.6.3 Schwartz Bayesian Bilgi Kriteri (SBC) 84
2.6.4 Sonlu Hata Kestirim Kriteri (FPE) 85
3. UYGULAMALAR 86
3.1 Simülasyon Çalışması: Mevsimsel Birim Kök Testlerinin Karşılaştırılması 86
3.1.1 HEGY yöntemi 86
3.1.2 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi 93
3.1.3 HEGY ve Periodogram mevsimsel birim kök testlerinin karşılaştırılması 99
3.2 Türkiye ve Avrupa Birliği Sanayi Üretim Endeksi Üzerine Uygulamalar 101
3.2.1 Verilerin grafiksel sunumu 102
3.2.2 Model seçimi 104
3.2.3 Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi verileri ile HEGY testi 107
3.2.4 Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi verileri ile periodogram 109
4. TARTIŞMA VE SONUÇ 111
KAYNAKLAR 115
ÖZGEÇMİŞ 119

SİMGELER DİZİNİ

α	Anlamlılık Düzeyi
ϕ	Kısmi Otokorelasyon
ρ	Otokorelasyon
γ	Otokovaryans
n	Örneklem Hacmi
σ^2	Varyans

Kısaltmalar

ACF	Otokorelasyon
ANOVA	Varyans Analizi Tablosu
AR	Otoregresif
ARIMA	Otoregresif Bütünleşik Hareketli Ortalama
ARMA	Otoregresif Hareketli Ortalama
MA	Hareketli Ortalama
PACF	Kısmi Otokorelasyon
SAR	Mevsimsel Otoregresif Modeller
TÜİK	Türkiye İstatistik Kurumu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 MA(1) otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri.....25

Şekil 2.2 AR(1) otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri.....27

Şekil 2.3 ARMA(1,1) otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri.....31

Şekil 2.4 $SAR_4(1)$ otokorelasyon ve otokovaryans grafikleri.....35

Şekil 2.5 $SAR_4(1)$ ρ=0.80 otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri.....36

Şekil 2.6 $SAR_4(1)$ ρ=0.90 otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri.....36

Şekil 2.7 $SAR_4(1)$ ρ=0.95 otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri.....36

Şekil 2.8 $SAR_4(1)$ ρ=0.99 otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri.....36

Şekil 2.9 $SAR_4(2)$ otokorelasyon ve otokovaryans grafikleri.....38

Şekil 2.10 $SAR_4(2)$ otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri.....38

Şekil 2.11 Türkiye sanayi üretim endeksi öngörüleri.....40

Şekil 2.12 Türkiye sanayi üretim endeksi verilerine ilişkin grafikler.....41

Şekil 2.13 Türkiye sanayi üretim endeksi ve öngörüleri (1991:01-2023:04).....41

Şekil 2.14 Mevsim ve takvim etkilerinden arındırılmış sanayi üretim endeksi (2005:01-2013:04).....64

Şekil 3.1 HEGY testinin gücü (ρ=0.60, 0.80, 0.90).....93

Şekil 3.2 HEGY testinin gücü (n=100, 200, 500).....93

Şekil 3.3 Periodogram mevsimsel birim kök testin gücü (ρ=0.60, 0.80, 0.90).....98

Şekil 3.4 Periodogram mevsimsel birim kök testinin gücü (n=100, 200, 500).....99

Şekil 3.5 HEGY ve periodogram testlerinin gücünün karşılaştırılması.....100

Şekil 3.6 Anlamlılık düzeylerinde HEGY ve periodogram testleri.....100

Şekil 3.7 Türkiye sanayi üretim endeksi (1991:01-2013:04).....102

Şekil 3.8 Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi (1991:01-2013:04).....103

Şekil 3.9 Türkiye sanayi üretim endeksinin periodogramları 103

Şekil 3.10 Avrupa Birliği sanayi üretim endeksinin periodogramları 104

Şekil 3.11 Türkiye sanayi üretim endeksi otokorelasyonlar-kısmi korelasyonlar 105

Şekil 3.12 Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi otokorelasyonlar-kısmi korelasyonlar 105

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1 Ülkelere göre sanayi üretim endeksi türleri 10

Çizelge 1.2 Sanayi üretim endeksinin tarihi gelişimi 11

Çizelge 1.3 Avrupa Ülkeleri sanayi üretim endeksi ağırlıkları 13

Çizelge 2.1 Model 1 ANOVA sonuçları 47

Çizelge 2.2 Model 2 ANOVA sonuçları 48

Çizelge 2.3 Fisher Kappa, Kolmogorov-Smirnov istatistikleri 48

Çizelge 2.4 Varyans Analizi Tablosu 58

Çizelge 2.5 Regresyon analizi sonuçları 65

Çizelge 2.6 Katsayılara ilişkin tahmin değerleri 65

Çizelge 2.7 Dickey-Fuller birim kök testi 66

Çizelge 2.8 Regresyon analizi sonuçları 67

Çizelge 2.9 Katsayılara ilişkin tahmin değerleri 68

Çizelge 2.10 Katsayılara ilişkin tahmin değerleri 68

Çizelge 2.11 Phillips-Perron testi kritik değerleri 69

Çizelge 2.12 HEGY regresyon denklemine ilişkin tahmin sonuçları 74

Çizelge 3.1 Kritik değerlerin karşılaştırılması 88

Çizelge 3.2 HEGY mevsimsel birim kök testinin gücü (π_1, α=0.05) 89

Çizelge 3.3 HEGY mevsimsel birim kök testinin gücü (π_2, α=0.05) 90

Çizelge 3.4 HEGY mevsimsel birim kök testinin gücü (π_3 ve π_4, α=0.05) 91

Çizelge 3.5 HEGY testi anlamlılık düzeyleri (π_1) 92

Çizelge 3.6 HEGY testi anlamlılık düzeyleri (π_2) 92

Çizelge 3.7 HEGY testi anlamlılık düzeyleri (π_3 ve π_4) 92

Çizelge 3.8 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi kritik değerleri 94

Çizelge 3.9 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin gücü (k=1, α=0.05) 95
Çizelge 3.10 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin gücü (k=2, α=0.05) ...96
Çizelge 3.11 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin gücü (k=3, α=0.05) ...96
Çizelge 3.12 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin gücü (k=4, α=0.05) ...96
Çizelge 3.13 Periodogram mevsimsel birim kök testi anlamlılık düzeyleri (k=1) 97
Çizelge 3.14 Periodogram mevsimsel birim kök testi anlamlılık düzeyleri (k=2) 97
Çizelge 3.15 Periodogram mevsimsel birim kök testi anlamlılık düzeyleri (k=3) 97
Çizelge 3.16 Periodogram mevsimsel birim kök testi anlamlılık düzeyleri (k=4) 97
Çizelge 3.17 Model belirleme kriterlerine ilişkin değerler 106
Çizelge 3.18 Türkiye sanayi üretim endeksi HEGY testi 108
Çizelge 3.19 Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi HEGY testi 108
Çizelge 3.20 Testlerin anlamlılık düzeyleri 113

1.GİRİŞ

Zaman serileri istatistik ve ekonometrinin önemli bir uygulama alanı olmasının yanı sıra diğer bilim dallarında da uygulamaları mevcuttur. Sağlık, fen, eğitim, mühendislik gibi çeşitli alanlarda birim zaman aralıklarında toplanan verilerle zaman serileri tekniklerinden yararlanılarak istatistiki sonuç çıkarımları yapılabilir.

Kamu ve özel sektör alanında yapılan araştırmalarda da zaman serileri tekniklerine sıklıkla başvurulur. Bu teknikler yardımıyla gelecekte karşılaşılabilecek durumlar öngörülerek, gerekli önlemlerin alınması sağlanabilir.

Genel olarak serilerin çoğunda yıl içerisinde mevsimsel hareketler gibi sistematik dalgalanmalar olduğu görülür. Bu durumda serinin mevsimsellik içerdiği düşünülebilir. Dolayısıyla, öncelikle serilerin mevsimsellik içerip içermediğinin incelenmesi ve tespit edilen duruma uygun yöntemlerin kullanılması sonuçların kalitesini etkileyecektir.

Ekonomik zaman serilerinin büyük çoğunluğu durağan değildir. Zaman serilerinde durağanlık sağlanarak yapılan analizler güvenilir sonuçlar elde edilmesini sağlar. Bundan dolayı seri durağan değilse uygun bir yöntemle durağan hale getirildikten sonra istatistiki sonuç çıkarımı yapılmalıdır.

Araştırma öncesinde seriler incelenirken serinin durağan olup olmadığını tespit etmek için genellikle birim kök testleri kullanılır. Kullanılacak birim kök testleri serinin mevsimsellik içerip içermemesine göre farklılıklar gösterir.

Genel olarak zaman serilerinde durağanlık ve mevsimsellik kavramları oldukça önemlidir. Sonuçların kalitesini arttırmak amacıyla analiz edilecek serilerin bu anlamda detaylı bir şekilde incelenerek, analiz adımlarının belirlenmesi oldukça önemlidir.

1.1 Motivasyon

Zaman serileri durağan ve durağan olmayan seriler olarak iki ana başlık altında toplanabilir. Durağan olmayan serilerde fark alma gibi yöntemlerle serinin durağanlığı sağlanarak analiz aşamasına geçilmelidir. Durağanlık zaman serilerinin hem zaman boyutunda hem de sıklık boyutunda önemlidir.

Zaman serilerinde durağanlık kavramı araştırılırken otokovaryans fonksiyonu en önemli araçtır. Bazen otokovaryans fonksiyonunda periyodik dalgalanmalar gözlenebilir. Bu durumda, analizlerde spektral yöntemler öne çıkmaktadır.

Zaman boyut analizlerinde zaman serisini otokorelasyon ve otokovaryans fonksiyonu karakterize ederken, sıklık boyut analizlerinde spektral yoğunluk fonksiyonu karakterize eder. Spektral yoğunluk fonksiyonu serinin periodogramları kullanılarak tahmin edilebilir.

Periodogramlar spektral yoğunluk fonksiyonunun bir tahmin edicisi olmakla birlikte, bazen serilerin zaman boyutunda incelemesinde de önemli özelliklere sahiptir. Özellikle serilerin durağanlığının incelenmesinde, verilerde olabilecek gizli periyodikliklerin tespitinde de kullanılmaktadır.

Zaman serilerinde periodogramlar kullanılarak serinin birim kök içerip içermediği sınanabilir. Çalışmada periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi teorik ve uygulama yönünden incelenmiş olup, Hylleberg vd. (1990) tarafından önerilen literatürde HEGY yöntemi olarak bilinen yöntem ile karşılaştırması yapılmıştır.

Çalışmanın giriş bölümünde amaç ve önem üzerinde durulmuş, konunun literatürdeki yeri tartışılmıştır. Aynı zamanda endeks hesaplama yöntemleri hakkında kısa bilgilendirme yapılarak, sanayi üretim endeksi hakkında çeşitli bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm olan yöntem bölümünde zaman serilerindeki önemli kavramlardan, zaman serileri modellerinden, sıklık boyut kavramlarından ve birim kök testlerinden söz

edilmiştir. Üçüncü bölümde HEGY testinin ampirik güç değerleri ve periodogram testinin kritik değerleri ile güç değerleri tablolaştırılmış, aynı zamanda sanayi üretim endeksi verileri üzerinde sözü edilen yöntemler uygulanarak yorumlanmıştır. Çalışmanın en son bölümünde ise HEGY ve periodogram mevsimsel birim kök testlerinin avantaj ve dezavantajları tartışılmıştır.

1.2 Amaç

Bu çalışmada önemli ekonomik göstergeler arasında yer alan Türkiye ve Avrupa Birliği Ülkeleri sanayi üretim endeksi verileri kullanılarak, HEGY ve periodogram mevsimsel birim kök test yöntemlerinin teorik olarak incelenmesi ile iki yöntemin karşılaştırılması hedeflenmiştir.

1.3 Literatür Taraması

Literatürde Box ve Jenkins (1970), Fuller (1976), Brockwell ve Davis (1987) çalışmaları zaman serileri alanında oldukça önemli yer tutan çalışmalardır. Fuller (1976) tarafından yapılan inceleme öncesine kadar zaman serileri alanında yapılan çalışmaların genellikle durağan zaman serileri alanında olduğu görülmektedir. Fuller (1976) durağan olmayan zaman serilerinin özel bir sınıfında çalışma yapmıştır. Böylelikle zaman serileri alanında durağan olmayan seriler ile ilgili çalışmalar artmaya başlamıştır.

Durağan olmayan zaman serileri alanında önemli ve ilk çalışmalardan biri sayılabilecek olan Dickey (1976), $Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t$ veya $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + e_t$ zaman serisi modelini ele alarak $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezi altında ρ parametresinin en küçük kareler tahmininin dağılımını incelemiştir. Ayrıca, Dickey (1976) ve Fuller (1976) t-istatistiklerini $(\tau, \tau_\mu, \tau_\tau)$ türetmişlerdir. Bu test istatistiklerinin kritik değerleri Fuller (1976)'da verilmiştir. Çalışmada önerilen bir birim köklü otoregresif serilere uygulanan test ilerleyen yıllarda yine parametrelerin en küçük kareler tahmin edicilerine bağlı olarak çeşitli zaman serisi modelleri için genişletilmiştir.

Dickey ve Fuller (1979) birim köklü birinci dereceden otoregresif zaman serisi için tahmin edicilerin dağılımları hakkında bilgi vermişlerdir.

Said ve Dickey (1984) bilinmeyen dereceden bir birim köklü otoregresif hareketli ortalama modellerine ilişkin test prosedürünü incelemişlerdir.

Dickey, Hasza ve Fuller (1984) tarafından önerilen ve simetrik en küçük kareler yöntemi olarak bilinen DHF testi ile mevsimsel zaman serilerinde birim kök incelemesi ele alınmıştır.

Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde, istatistiki sonuç çıkarımları açısından analiz edilecek serilerin bazı durumlarda durağan olması gerekmektedir. Bundan dolayı, çalışmalardan da serinin durağan olmasının oldukça önemli olduğu anlaşılmaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi ekonomik verilerin büyük çoğunluğu durağan değildir. Dolayısıyla, incelenen serinin durağanlığını sınamak için birim kök test yöntemlerinden faydalanılır. Bunlardan Dickey-Fuller ve Phillips-Perron birim kök test yöntemleri en yaygın kullanılanlarıdır.

Birim köklü serilerde seriyi durağan hale getirmek için birim kök sayısı kadar fark alınır. Bu yöntemin seriyi durağan hale getiremediği durumlarla karşılaşılabilir. Böyle durumlarda seride mevsimsel etkiler bulunduğu düşünülür. Ayrıca, mevsimsel modellerde bu şekilde uygulanan fark alma işlemi modeli daha karmaşık hale getirebilir. Dolayısıyla, önce bir zaman serisinin mevsimsellik içerip içermediği incelenmelidir (Akdi 2014).

Mevsimsel zaman serilerinde, serilerin durağanlığının incelenmesinde mevsimsel birim kök testleri kullanılır. Mevsimsel birim kök testlerinden en yaygın olarak kullanılanı Hylleberg vd. (1990) tarafından geliştirilen testtir. HEGY testi olarak bilinen bu yöntem zaman serilerinde mevsimsel frekanslara karşılık gelen kökleri tespit etmek için kullanılır.

Hylleberg vd. (1990) yardımcı bir regresyon modeli ile geliştirdikleri mevsimsel birim kök test yöntemini İngiltere gelir ve tüketim serilerine uygulamışlar ve tüketim serisinde mevsimsel birim kök tespit etmişlerdir. Engle, Granger, Hylleberg ve Lee (1993) ise bu yöntemi revize ederek, Japonya gelir ve tüketim serileriyle çalışmışlardır. Çalışmada gelir ve tüketim serilerinde mevsimsel birim kök olduğunu ortaya çıkarmışlardır.

Hylleberg vd. (1990) tarafından önerilen HEGY testi çeyreklik seriler için geliştirilmiştir. Aylık serilerde ise Franses (1990) mevsimsel birim kök testi araştırması yapmıştır.

Aydın (2002) tek değişkenli durağan ve durağan olmayan zaman serileri ile mevsimsel zaman serileri hakkında detaylı bilgi vermiştir. Yazar bu çalışmasında birim köklü mevsimsel zaman serilerini incelemiş, HEGY ile DHF mevsimsel birim kök testlerini kullanmıştır. Kamu sanayi üretim endeks verilerini ele alarak, HEGY ve DHF mevsimsel birim kök testleriyle serinin mevsimsel birim kök içerip içermediğini araştırmıştır. HEGY testine göre serinin yarıyıllık mevsimsel birim kök ile yıllık mevsimsel birim kök ve ayrıca mevsimsel olmayan birim köke sahip olduğunu tespit etmiştir. Bununla birlikte DHF testi sonucunda da serinin durağan olmadığını ortaya koymuştur.

Türe ve Akdi (2005) 1987:1-2003:4 dönemi Türkiye'nin makroekonomik değişkenlerinden GSYİH ve tüketim serilerinde mevsimsel kointegre bir ilişki olup olmadığını incelemişlerdir. Çalışmada HEGY testi ile serilerin mevsimsel birim kök içerip içermediği araştırılmıştır. Bununla birlikte Hylleberg vd. (1990) ve Engle vd. (1993) yöntemleri ile yapılan mevsimsel kointegrasyon testleri sonucunda, serilerde 0, 1/4 ve 3/4 frekansta kointegre ilişki bulunduğunu ancak 1/2 frekansta ise kointegre ilişkiye rastlanamadığı tespit edilmiştir.

Ayvaz (2006) 1989:1-2004:4 dönemi Türkiye ekonomisine ait GSMH, tüketim, ihracat ve ithalat serilerinin gösterdiği mevsimsel yapıyı araştırmıştır. Serilerdeki mevsimselliğin stokastik veya deterministik olup olmadığını incelemiştir. Serilerin

mevsimsel birim kök içerip içermediğini araştırmak için HEGY testi uygulamıştır. Çalışmanın sonucunda tüketim serisinde stokastik mevsimsellik, GSMH ve ihracat serilerinde yarıyıllık ve yıllık frekanslarda mevsimsel birim kök ve ithalat serisinde mevsimsel olmayan birim kök olduğunu tespit etmiştir.

Literatürde genellikle HEGY testi mevsimsel birim kök tespiti için kullanılmış olup, testin gücü çok tartışılmamıştır. Ancak testin gücüne ilişkin çeşitli çalışmalar bulunmaktadır. Otero (1998) farklı modeller için veri üretim süreçlerini incelemiştir. Çalışmada bu süreçlerden üretilen verilerle HEGY testinin çeşitli durumlar için gücü hesaplanmıştır. Güç değerleri birim kök ve mevsimsel birim kök olarak iki grupta tablolaştırılmıştır.

Qianyi (2008) mevsimsel birim kök testleri hakkında karşılaştırma yapmıştır. Farklı modellere uygun veri üreterek, testlerin ampirik güçlerini karşılaştırmıştır. Ayrıca genişletilmiş mevsimsel birim kök modelleri hakkında bilgi vererek, İngiltere hanehalkı kullanılabilir geliri ve tüketim harcaması çeyreklik verileri üzerine uygulama yapmıştır.

Baum (2002) uygulamalı ekonomik araştırmalarda Stata programının kullanımı hakkında çalışma yapmıştır. Programda bulunan "hegy4" komutu ile çeyreklik veriler için HEGY testinin uygulanabileceğini belirtmiştir.

Zimmermann (2012) Almanya GSYH verileriyle mevsimsellik kavramı üzerine uygulamalı bir çalışma yapmıştır. Çalışmada Stata programı yardımıyla verilerin niteliğine uygun olarak Dickey-Fuller, Phillips Perron, DF-GLS, KPSS ve HEGY testlerini yapmıştır. Özellikle HEGY testini farklı durumlar için inceleyerek, her duruma ilişkin istatistiki sonuçları açıklamıştır.

Serilerin durağanlığını incelemek için otokovaryans fonksiyonu kullanılabilir. Bundan dolayı otokovaryans fonksiyonu zaman serileri analizinde önemli araçlardan biridir. Otokovaryans fonksiyonunun periyodik yapıya sahip olduğu durumlarda, serinin model

derecelerinin ve durağanlığının sezgisel olarak tespiti zordur. Bu tür durumlarda ise periodogram istatistiği kullanılır.

Akdi ve Dickey (1998) periodogramların birim kök sınamasında kullanılabileceğini göstermişlerdir. Çalışmada birim kök testine ilişkin periodogram istatistiğine dayalı test istatistiği geliştirilmiştir. Ayrıca test istatistiğinin dağılımı bulunarak, kritik değerler oluşturulmuştur. Daha sonra periodogram tabanlı birim kök testlerinin mevsimsel birim kök incelemelerinde de kullanılabileceği ortaya konmuştur (Akdi ve Dickey 1999). Çalışmada birim köklü otoregresif seriler için elde edilen normalleştirilmiş periodogramların asimptotik dağılımlarının birim köklü mevsimsel zaman serileri ile aynı olduğu gösterilmiştir.

Evans ve Dickey (2002) periodogram tabanlı birim kök test yönteminin sıfırdan farklı ortalamalar için değişmez olduğunu ortaya koymuştur. Bunlara ek olarak çalışmada trend ve mevsimsel bileşenler için modifikasyonlar verilmiştir.

Akdi, Kalafatçılar ve Özcan (2010) mal ve hizmet sektörlerinde olası uzun dönem ilişkiyi periodogram tabanlı birim kök testi ve kointegrasyon testleri ile incelemişlerdir. Çalışmada periodogram tabanlı birim kök testinin daha dayanıklı ve ortalamaya göre değişmez olduğu vurgulanmıştır.

1.4 Endeks Hesaplama Yöntemleri

Endeks hesaplama yöntemlerinde ağırlıklı olarak kullanılan yöntem Laspeyres endeksidir.

TÜİK tarafından yayınlamakta olan kısa dönemli iş istatistiklerine ilişkin endekslerde ağırlıklı olarak Laspeyres endeksi kullanılmaktadır, bu bağlamda sanayi üretim endeksi hesabı da sabit temel yıllı Laspeyres yöntemi kullanılarak yapılmaktadır (Anonim 2015).

Bu bölümde Laspeyres endeksine ek olarak Paasche endeksi ile Fisher endeksi hakkında kısa bilgi verilecektir.

Laspeyres endeksi

Laspeyres endeksi, Alman iktisatçı Etienne Laspeyres'in, cari fiyatları ya da miktarları seçilmiş bir temel dönemin verileriyle orantılı olarak ölçmek için önerdiği endekstir.

Laspeyres endeksi 0 temel dönemi ve t dönemi için aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Anonymous 2010):

$$L_t = \frac{\sum_{i=1} P_{i,0} Q_{i,t}}{\sum_{i=1} P_{i,0} Q_{i,0}} = \sum_{i=1} w_{i,0} \frac{Q_{i,t}}{Q_{i,0}} \tag{1.1}$$

Burada $P_{i,0}$, $Q_{i,0}$, $Q_{i,t}$ ve $w_{i,0}$ ifadeleri; i ürünü, ürün grubu veya faaliyeti için,

$P_{i,0}$: 0 temel dönemindeki fiyat
$Q_{i,0}$: 0 temel dönemindeki miktar
$Q_{i,t}$: t dönemindeki miktar
$w_{i,0}$: 0 temel dönemindeki göreceli oran (ürün/ürün grubu düzeyinde çıktı değeri veya faaliyet düzeyindeki katma değer)

şeklinde tanımlıdır.

Paasche endeksi

Paasche endeksi iki açıdan Laspeyres endeksinden farklıdır. Paasche endeksinin farklı olduğu ilk nokta aritmetik ortalama yerine harmonik ortalamayı kullanmasıdır. İkinci nokta ise sabit dönem hacimlerinin cari dönem hacimleri olmasıdır. Paasche endeksi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Anonymous 2010):

$$P_t = \frac{\sum_{i=1} P_{i,t} Q_{i,t}}{\sum_{i=1} P_{i,t} Q_{i,0}} = \frac{1}{\sum_{i=1} (w_{i,t} \frac{Q_{i,0}}{Q_{i,t}})} \quad (1.2)$$

Burada $P_{i,t}$, $Q_{i,0}$, $Q_{i,t}$ ve $w_{i,t}$ ifadeleri; i ürünü, ürün grubu veya faaliyeti için,

$P_{i,t}$: t dönemindeki fiyat

$Q_{i,0}$: 0 temel dönemindeki miktar

$Q_{i,t}$: t dönemindeki miktar

$w_{i,t}$: t dönemindeki göreceli oran (ürün/ürün grubu düzeyinde çıktı değeri veya faaliyet düzeyindeki katma değer)

şeklinde tanımlıdır.

Fisher endeksi

Fisher endeksi, her bir dönem için aynı dönemdeki Laspeyres ve Paasche endekslerinin geometrik ortalaması alınarak elde edilir. Fisher endeksi aşağıdaki şekilde ifade edilir (Anonymous 2010):

$$F_t = [L_t \text{ x } P_t]^{1/2} \quad (1.3)$$

Burada L_t , P_t ve F_t ifadeleri sırasıyla Laspeyres endeksini, Paasche endeksini ve Fisher endeksini göstermektedir.

Ülkelerin sanayi üretim endeksi hesaplamaları incelendiğinde, büyük çoğunluğunun Laspeyres endeksi kullandığı görülmektedir. Avrupa İstatistik Ofisi tarafından ana ekonomik göstergeler için yayınlanan dokümanda ülkelere göre endeks türleri verilmiştir. Özet bilgiler çizelge 1.1'de verilmiştir (Anonymous 2005).

Çizelge 1.1 Ülkelere göre sanayi üretim endeksi türleri

Ülke	Endeks Türü	Ülke	Endeks Türü
Türkiye	Laspeyres endeksi	Lüksemburg	Laspeyres endeksi
Belçika	Laspeyres endeksi	Macaristan	Paasche endeksi
Danimarka	Laspeyres endeksi	Hollanda	Laspeyres endeksi
Almanya	Laspeyres endeksi	Avusturya	Laspeyres endeksi
Estonya	Paasche endeksi	Polonya	Laspeyres endeksi
İspanya	Laspeyres endeksi	Slovenya	Laspeyres endeksi
Fransa	Laspeyres endeksi	Slovakya	Laspeyres endeksi
İrlanda	Laspeyres endeksi	Finlandiya	Laspeyres endeksi
İtalya	Laspeyres endeksi	Bulgaristan	Laspeyres endeksi
Kıbrıs	Laspeyres endeksi	Romanya	Laspeyres endeksi
Letonya	Laspeyres endeksi	Norveç	Laspeyres endeksi
Litvanya	Paasche endeksi	İsviçre	Laspeyres endeksi

1.5 Sanayi Üretim Endeksi

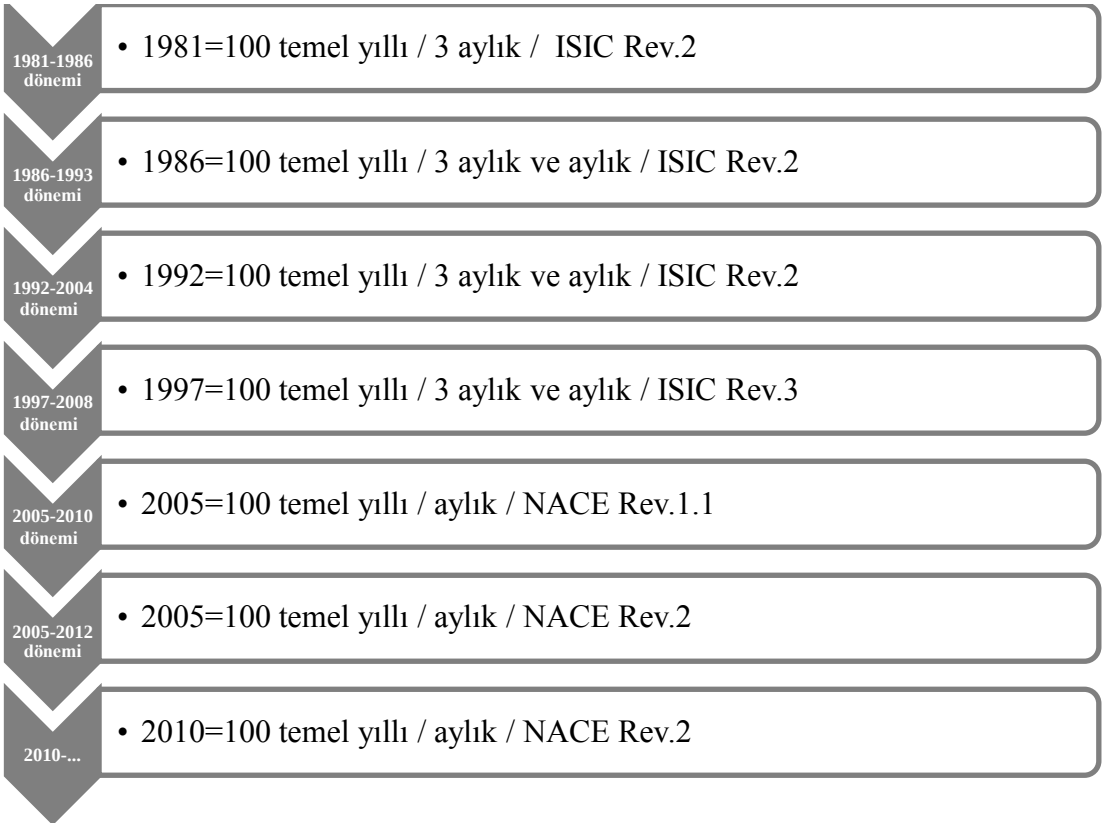
Sanayi üretim endeksi ekonomik gelişmenin önemli göstergelerinden biri olarak kabul edilmektedir. Endeks verilerinin kısa zaman aralıklarıyla yayınlanması ve detaylı veri sağlaması gibi özelliklerinden dolayı diğer göstergelere göre daha kullanışlıdır.

Sanayi üretim endeksinin geçmiş yıllara ilişkin değerlerinin mevcut olması, ekonomik gelişmelerin takibi için tutarlı sonuçlar elde edilmesinde önemli rol oynamaktadır.

1.5.1 Sanayi üretim endeksinin tarihçesi

Farklı sınıflama ve temel yıllara ait verilerde karşılaştırılabilirliği sağlamak için tarihsel sanayi üretim endeksleri, 2010 temel yıllı olarak, TÜİK tarafından birleştirilmiştir. Sanayi üretim endeksi, seride sınıflama ve temel yıl değişikliklerinden kaynaklanabilecek etkiler giderilerek, 1986 yılı Ocak ayına kadar hesaplanmış ve kamuoyu ile paylaşılmıştır. TÜİK tarafından yayınlanan sanayi üretim endeksinin periyodu, sınıflaması ve temel yıl değişikliği açısından tarihsel gelişimi çizelge 1.2'de özetlenmektedir (Anonim 2013).

Çizelge 1.2 Sanayi üretim endeksinin tarihi gelişimi



TÜİK tarafından sanayi üretim endeksinin farklı sınıflama ve temel yıllara ait verileri, eşleşen ilk ay oranları ile geriye çekilerek 1986'dan başlayan endeks serisi elde edilmiştir. 1981 temel yıllı endeksler çeyreklik üretildiği için kapsam dışı bırakılmıştır, sadece periyodu aylık olan seriler birleştirilmiştir. Endekslerin birleştirilme işlemi için değişen temel yıllara ilişkin bağlantı faktörü hesaplanmıştır. Bağlantı faktörü temel yılın değiştiği ilk ortak aydaki eski endekslerin yeni temel yıllı endekslerin ilk ayına bölünmesiyle hesaplanmıştır. Bağlantı faktörü,

$$Bağlantı\ faktörü = \frac{Eski\ temel\ yıllı\ endekslerin\ eşleşen\ ilk\ ayı}{Yeni\ temel\ yıllı\ endekslerin\ eşleşen\ ilk\ ayı} \tag{1.4}$$

şeklindedir. Farklı temel yıllı seriler 2010 temel yılına aktarıldığı için, geriye dönük bağlantı faktörlerinin çarpımı yeni serilere bölünerek 2010 temel yıllı seriler elde edilmiştir (Anonim 2013).

1.5.2 Sanayi üretim endeksi hesaplama yöntemleri

Sanayi üretim endeksi hesabında ülkeler çeşitli yöntemler kullanabilmektedir. Bazıları seçilen ürünlerin miktar cinsinden üretimini kullanırken, seçilen ürünlerin fiyat etkilerinden arındırılmış değerlerini veya fiyat etkilerinden arındırılmış ciro değerlerini kullanan ülkeler de bulunmaktadır. Ayrıca bazı ülkelerin göstergelerini çalışılan saat, elektrik tüketimi, işlenmemiş malzemeler gibi girdi değerlerine dayandırdığı da görülmektedir. Genel olarak, sanayi üretim endeksi hesaplaması miktar yaklaşımı, değer yaklaşımı ve ciro verileri kullanılarak yapılmaktadır (Yüksel 2010).

1.5.3 TÜİK sanayi üretim endeksi

TÜİK tarafından yayınlanan sanayi üretim endeksi genel olarak ekonomide meydana gelen gelişmeleri ve uygulanan ekonomik politikaların kısa dönemdeki etkilerini ölçmeyi amaçlamaktadır. Endeks 2010 temel yıllı ve Avrupa Topluluğunda Ekonomik Faaliyetlerin İstatistiki Sınıflaması olan NACE Rev.2 (Statistical Classification of Economic Activities in the European Community Rev.2) faaliyet sınıflamasına göre hesaplamaktadır. Sanayi üretim endeksi hesaplamasında, NACE Rev.2 faaliyet sınıflamasının Madencilik ve Taşocakçılığı (B), İmalat (C) ile Elektrik, Gaz, Buhar ve İklimlendirme Üretimi ve Dağıtımı (D) sektörleri kapsanmaktadır. Endeksin hesabında kullanılan veriler Aylık Sanayi Üretim Soru Formu ile derlenmektedir. Endeks kapsamında her ay 5067 işyeri, 1868 madde yer almaktadır. Sanayi üretim endeksi dolaylı hesaplama yöntemi kullanılarak mevsim ve takvim etkilerinden arındırılarak yayınlanmaktadır (Anonim 2015).

1.5.4 Avrupa Birliği toplulaştırılmış sanayi üretim endeksi

Ülkeler ürettikleri istatistiklerin uluslararası karşılaştırılabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla Avrupa İstatistik Ofisi'ne (Eurostat) verilerini göndermektedir. Bu verilere Avrupa İstatistik Ofisi'nin internet sitesinden kolaylıkla ulaşılmaktadır. Veriler araştırmacıların yanı sıra Avrupa İstatistik Ofisi tarafından da kullanılmaktadır. Avrupa İstatistik Ofisi tarafından ülkelerden gelen sanayi üretim endeksi verileri toplulaştırarak

her ay EA18 ve EU28 detayında endeks hesaplanmakta ve sektörün Avrupa Ülkeleri açısından durumu incelenmektedir. Ayrıca endeks rakamlarına ilişkin yorumlar haber bülteni olarak paylaşılıp, detaylı verileri ise veri tabanına aktarılmaktadır. Haber bülteni detaylarından EA18 ve EU28 grubunda yer alan ülkeler ile ülkelerin toplulaştırılmış sanayi üretim endeksindeki ağırlıkları çizelge 1.3'te verilmektedir. Çizelge 1.3'te yer alan ağırlıklar 2010 temel yılı endeks hesaplamalarında kullanılmakta olup, Avrupa İstatistik Ofisi'nin internet sitesinden elde edilmiştir (Anonymous 2014).

Çizelge 1.3 Avrupa Ülkeleri sanayi üretim endeksi ağırlıkları

Üye kodu	**Ülke**	**EA-18 (%)**	**EU-28 (%)**
BE	Belçika	3.91	2.92
BG	Bulgaristan	-	0.32
CZ	Çek Cumhuriyeti	-	1.94
DK	Danimarka	-	1.88
DE	Almanya	36.42	27.18
EE	Estonya	0.17	0.13
IE	İrlanda	2.38	1.77
EL	Yunanistan	1.45	1.08
ES	İspanya	8.92	6.66
FR	Fransa	15.56	11.61
HR	Hırvatistan	-	0.39
IT	İtalya	16.60	12.39
CY	Kıbrıs	0.11	0.08
LV	Letonya	0.15	0.11
LT	Litvanya	-	0.16
LU	Lüksemburg	0.19	0.14
HU	Macaristan	-	1.06
MT	Malta	0.05	0.04
NL	Hollanda	5.31	3.97
AT	Avusturya	3.63	2.71
PL	Polonya	-	3.63
PT	Portekiz	1.59	1.19
RO	Romanya	-	1.01
SI	Slovenya	0.50	0.37
SK	Slovakya	0.87	0.65
FI	Finlandiya	2.18	1.63
SE	İsveç	-	3.09
UK	Birleşik Krallık	-	11.88
EA-18		**100.00**	**74.64**
EU-28			**100.00**

Avrupa İstatistik Ofisi tarafından yayınlamakta olan toplulaştırılmış sanayi üretim endeksi NACE Rev.2 sınıflamasına göre 2010 temel yıllı olarak hesaplanmaktadır. Aynı zamanda mevsim ve takvim etkilerinden arındırılmış veriler de paylaşılmaktadır. Haber bülteninde aylık ve yıllık veriler üzerinden yorum yapılmaktadır; aynı zamanda endeksler toplam sanayi, ara malı imalatı, enerji, sermaye malı imalatı, dayanıklı tüketim malı imalatı, dayanıksız tüketim malı imalatı detayında tablolaştırılmaktadır. Haber bülteni ile ilgili daha detaylı istatistikler ise Avrupa İstatistik Ofisi'nin veri tabanında yer almaktadır.

2. YÖNTEM

Bir zaman serisi en basit hali ile birim zaman aralıklarındaki gözlemler topluluğu olarak tanımlanabilir. Birim zaman aralıkları saatlik, günlük, haftalık, aylık, üç aylık, yıllık gibi birim zaman aralıkları olabildiği gibi (0,1) veya reel sayıların sayılamayan bir alt kümesi de olabilir.

Zaman serileri çeşitli alanlarda karşımıza çıkabilmektedir. Örneğin, Meteoroloji Genel Müdürlüğü tarafından hava sıcaklığı ölçümleri saatlik, günlük, 5 günlük gibi belirli aralıklarla yapılmaktadır. Bu şekilde belli aralıklarla yapılan ölçümlerle günlük hayatta sıklıkla karşılaşılmaktadır. Türkiye İstatistik Kurumu tarafından da belli aralıklarla çeşitli araştırmalar yapılmaktadır: tüketici fiyat endeksi, sanayi üretim endeksi, perakende satış hacim endeksi vb. gibi çalışmalar aylık, gayri safi yurt içi hasıla, ticaret ve hizmet endeksleri vb. gibi çalışmalar çeyreklik, yıllık sanayi ürün istatistikleri ise yıllık olarak yapılmaktadır. Bu şekilde periyodik olarak yayınlanan endeksler birer zaman serisidir.

Bir zaman serisi, T indis kümesini göstermek üzere, $\{Y_t: t \in T\}$ şeklinde ifade edilebilir. Genellikle T indis kümesi N doğal sayılar kümesidir. Eğer incelenilen zaman serisi sanayi üretim endeksi ise Y_t ifadesi t zamanındaki sanayi üretim endeksinin ölçülen değerine karşılık gelir. Ayrıca zaman serileri analizi yapılırken $t = 1,2,3, \dots, n$ değerlerine karşılık gelen bütün gözlemler dikkate alınır.

Bir zaman serisi rasgele değişkenlerin bir koleksiyonu olarak da tanımlanabilir. Bu durumda zaman serisinin matematiksel tanımını vermek için öncelikle rasgele değişken ve ilgili tanımların verilmesi uygun olacaktır. Gerekli olan tanımlardan ilk olarak σ - cebir tanımı verilecektir.

Ω boş olmayan bir küme ve Ω'nın bazı alt kümelerinin oluşturduğu bir sınıf $\mathcal{U}$ olsun. Eğer bu $\mathcal{U}$ sınıfı,

(i) $\Omega \in \mathcal{U}$

(ii) $\forall A \in \mathcal{U}$ için $A^c \in \mathcal{U}$

(iii) $A_n \in \mathcal{U}$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$

özelliklerini sağlıyorsa, $\mathcal{U}$'ya Ω üzerinde bir σ - cebir denir. σ - cebirin her bir elemanına ise bir olay denir. Olasılık ve istatistiğin en temel kavramlarından biri olan olasılık ölçüsünün tanımı da aşağıda verilmiştir.

$\mathcal{U}$, Ω üzerinde bir σ - cebir olmak üzere,

$$P: \mathcal{U} \rightarrow [0,1]$$
$$A \rightarrow P(A)$$

şeklindeki P fonksiyonu,

(i) $\forall A \in \mathcal{U}$ $için$ $P(A) \geq 0$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) A_n'ler $\mathcal{U}$'da ayrık $\left(A_k \cap A_j = \emptyset, k \neq j\right)$ olayların bir dizisi olmak üzere,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{2.1}$$

özelliklerini sağlarsa P'ye $\mathcal{U}$ üzerinde bir olasılık ölçüsü denir (Öztürk 1993).

Yukarıda verilen σ - cebir, olasılık ölçüsü gibi tanımlamalar yardımıyla rasgele değişken kavramının matematiksel tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

$(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere,

$$Y: \Omega \to R$$
$$w \to Y(w)$$

şeklinde tanımlanan bir Y fonksiyonu, $\forall a \in R$ için $\{w: Y(w) \leq a\} \in \mathcal{U}$ özelliğini sağlıyor ise Y fonksiyonuna bir rasgele değişken denir (Öztürk 1993).

$(\Omega, \mathcal{U})$ bir olasılık uzayı, T de bir indis kümesi olsun. Bir zaman serisi Ω x T çarpım uzayından reel sayılara giden ve her sabit t için $Y(t, w)$ w'nın ölçülebilir bir fonksiyondur, yani rasgele değişkendir. Bu durumda bir zaman serisi,

$$Y(.,.): \Omega \; x \; T \to R$$
$$(w, t) \to Y_t(w)$$

şeklinde ifade edilir. Aslında gözlenen zaman serisi $Y_1(w), Y_2(w), \dots, Y_n(w)$ şeklinde olup, kısaca $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ biçiminde yazılabilir (Akdi 2014).

Zaman serilerinde birçok istatistiki sonuç çıkarımı serinin durağanlığı varsayımına dayanmaktadır. Eğer seri durağan değilse önce durağanlaştırma yapılır, daha sonra istatistiki sonuç çıkarımlar durağanlaştırılmış seri dikkate alınarak gerçekleştirilir. Birçok iktisadi zaman serisi durağan değildir. Bu bağlamda zaman serileri durağan ve durağan olmayan seriler olarak iki temel başlık altında incelenmektedir.

Bir zaman serisinin ortalaması zamana bağlı ise seri durağan değildir. Bu durumda serinin deterministik bir trend içerdiği söylenebilir. Ayrıca serinin otokorelasyonları zamanın bir fonksiyonu ise seri durağan değildir. Bu durumda seri stokastik bir trend içerebilir. Bu bağlamda serilerin içerdiği trendin deterministik mi yoksa stokastik mi olduğuna karar vermek uygulanacak dönüşümler hakkında araştırmacıya yardımcı olacaktır.

İstatistiki sonuç çıkarımlarında durağanlık kadar mevsimsellik kavramı da önemlidir. Örneğin, yaz aylarında otel sektörüne ait cirolar diğer aylara göre daha yüksek seyretmektedir. Bu gibi çeşitli durumlar söz konusu olduğundan dolayı zaman serilerinin sıklıkla mevsimsel etkiler içerdiği açıktır.

Zaman serilerinde önemli hususlardan bir diğeri ise zaman serilerinin temel amacı olan serinin gelecekte alacağı değerlerin öngörülmesidir. Örneğin, sanayi üretim endeksi serisini kullanarak öngörü yapılmak istendiğinde, öncelikle verilere uygun model tespit edilmelidir. Daha sonra gelecekteki aylarda sanayi üretim endeksinin alacağı değerler öngörülebilir.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ rasgele değişkenlerinin gözlenen değerleri kullanılarak, Y_{n+1} rasgele değişkeninin değeri için öngörü, $\hat{Y}_{n+1}$,

$$\hat{Y}_{n+1} = E(Y_{n+1}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \tag{2.2}$$

şeklinde verilen koşullu beklenen değer ile ifade edilir. Bu $\hat{Y}_{n+1}$ öngörüsü $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ rasgele değişkenlerinin bir fonksiyonu olup, $\hat{Y}_{n+1}$ bir kestirici veya istatistik olarak ele alınabilir. Buna göre de iyi bir öngörü için bazı istatistiki sonuç çıkarımları yapılabilir. $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ örneklemine bağlı olarak hesaplanan $\hat{Y}_{n+1}$ için öngörü hatası $Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$ ve öngörü hatasının varyansı da $Var(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1})$ şeklindedir (Akdi 2014).

Yapılan öngörülerin başarısını ölçmek için çeşitli ölçütler kullanılabilir. Swanson, Tayman ve Bryan (2011) tarafından yapılan çalışmada öngörü başarılarını değerlendirmek için MSE, $MAPE$, MAE gibi ölçütlerin kullanılabileceği belirtilmiştir.

MSE, $MAPE$, MAE ölçütlerinin matematiksel ifadeleri,

- Ortalama Hata Kareler

$$MSE = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \widehat{Y_t}\right)^2}{n-k} \tag{2.3}$$

- Ortalama Mutlak Hata Yüzdesi

$$MAPE = \frac{100}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|(Y_t - \widehat{Y_t})/Y_t\right| \tag{2.4}$$

- Ortalama Mutlak Hata

$$MAE = \sum_{t=1}^{n}\left|Y_t - \widehat{Y_t}\right|/n \tag{2.5}$$

- Maksimum Mutlak Hata Yüzdesi

$$MaxAPE = 100\, max(\left|(Y_t - \widehat{Y_t})/Y_t\right|) \tag{2.6}$$

şeklindedir. Öngörü başarı ölçütleri yardımıyla, hata miktarı en az olan öngörü değeri tespit edilebilir. Böylelikle başarılı öngörü yapılması sağlanmış olur.

2.1 Zaman Serilerinde Durağanlık

Türkiye ekonomisine ait yorumlar yapılmak istendiğinde, incelenilen iktisadi serilerin çoğunlukla durağan olmadığı görülür. Benzer şekilde Avrupa Birliği ülkelerine ait ekonomik verilerin de çoğu durağan değildir.

Durağanlığın sağlanması istatistiki sonuç çıkarımlarında güvenilir sonuçlar elde etmek için gerekli aşamalardan biridir. Bundan dolayı zaman serileri analizinde durağanlık en önemli kavramlar arasındadır.

Ülke ekonomisi hakkında istatistiki sonuçlar genellikle tahmin ve öngörü üzerinedir. Güvenilir yorumlar elde etmek için modellemeden önce analiz edilen iktisadi değişkenlerin durağanlığı ve mevsimsel etkiler içerip içermediği kontrol edilmelidir.

$\{Y_t: t \in T\}$ zaman serisi,

i) $E(Y_t) = \mu$ (beklenen değer zamana göre değişmiyor)

ii) $Cov(Y_t, Y_s)$ sadece $|t - s|$ nin bir fonksiyonudur

koşullarını sağlıyorsa durağandır denir. μ serinin beklenen değerini göstermek üzere serinin otokovaryans fonksiyonu ve otokorelasyon fonksiyonu sırasıyla,

$$\gamma(h) = Cov(Y_t, Y_{t+h}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+h} - \mu)]$$
$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+h})}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_{t+h})}} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır (Akdi 2014).

Serilerin durağanlığını test etmek için genellikle birim kök testleri kullanılmaktadır. Literatürde çeşitli birim kök testleri olmasına rağmen parametrelerin en küçük kareler tahmin edicisinin dağılımına bağlı olarak geliştirilen Dickey-Fuller, Genişletilmiş Dickey-Fuller birim kök testleri ile Phillips-Perron birim kök test yöntemleri diğer birim kök testlerine göre daha fazla kullanılmaktadır.

Zaman serilerinde birim kökler mevsimsel frekanslarda bulunabilmektedir. Bu durumda zaman serisinin mevsimsel birim kök içerdiği söylenebilir. Zaman serilerinin mevsimsel frekanslarda birim kök içerebileceği Box ve Jenkins (1976) tarafından öne sürülmüştür.

Serilerin mevsimsel birim kök içerip içermediğine ilişkin test yöntemleri Dickey, Hazsa ve Fuller (1984) ve Hylleberg vd. (1990) tarafından incelenmiş ve mevsimsel birim kök test yöntemleri önerilmiştir.

Mevsimsel birim kök incelemelerinde genellikle HEGY ve DHF birim kök testi kullanılmaktadır.

2.2 Zaman Serilerinde Mevsimsellik ve Nedenleri

Granger (1978) mevsimsellik konusunu nedenleri, yorumları ve uygulamaları olmak üzere üç ana başlık altında incelemiştir. Granger (1978) mevsimselliğin oluşma nedenlerini en az dört sınıfa ayırmış ve bu sınıfların da tam olarak ayrılabilir olmadığını vurgulamıştır. Granger bu çalışmasında mevsimselliğin nedenlerine ilişkin sınıflandırma yapmıştır. Yaptığı sınıflandırmada takvim, zamanlama kararları, hava koşulları, beklenti gibi başlıklar altında mevsimselliğin oluşum sebeplerini incelemiştir. Ayrıca mevsimselliğin oluşmasındaki nedenlere ilişkin verdiği bilgiler aşağıda verilmektedir.

i) Mevsimselliğin oluşmasında takvimin etkisi olabilir. Noel ve Paskalya gibi bazı resmi tatiller özellikle üretim sektörlerini anlamlı düzeyde etkileyebilir. Resmi tatillerin belli bir takvimde gerçekleşmesi mevsimselliğin oluşmasına sebebiyet verebilir.

ii) Üniversitenin tatil dönemleri, şirketin temettü ödemesi, vergi yılının bitmesi gibi örneklerden dolayı kişiler ve kuruluşlar tarafından alınan kararlarda önemli mevsimsel etkiler bulunabilir.

iii) Sıcaklık değişiklikleri, yağış ve diğer hava değişimlerinin ekonomik seriler üzerinde etkisi olabilmektedir. Bu tarım, üretim, inşaat, ulaşım gibi sektörlerde hava durumu değişikliğinden kaynaklı mevsimsel etkilerin izlenmesi oldukça muhtemeldir.

iv) Bir değişkendeki mevsimsel beklentisi gerçek mevsimselliğe neden olabilir. Beklentiler serinin daha önceki hareketleri doğrultusunda şekillenir. Örneğin Noel süresince oyuncak satışlarının artması beklentisi, oyuncak üretimini arttırması veya hava sıcaklıklarının beklentisine göre tatil planlanması gibi.

Zaman serilerinde mevsimsellik kavramı çeşitli yöntemler ile araştırılabilir. Serilerin grafikleri, otokovaryans ve otokorelasyonlarına ilişkin grafikleri yardımıyla sezgisel olarak mevsimsellik hakkında yorum yapılabilir. Daha güvenilir istatistiksel araştırmalar yapmak için ise serinin uyduğu model hakkında detaylı bir araştırma gerçekleştirilebilir. Mevsimsel etkiler içeren bir seriye mevsimsel bileşenler içeren model uygun olacaktır.

Mevsimsel zaman serisinin uyduğu model,

$$(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-4} - \mu) + e_t \tag{2.8}$$

şeklinde olsun. Burada, $\alpha = \mu(1-\rho)$ olarak alındığında verilen model,

$$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-4} + e_t \tag{2.9}$$

şeklinde yazılabilir. Burada α ve ρ model parametrelerini göstermek üzere, bu model bazı varsayımları sağlamasa da bir regresyon eşitliğine benzemektedir. Bundan dolayı verilen zaman serisinin modellenmesi ve istatistiki sonuç çıkarımlarının yapılabilmesi için regresyon teknikleri kullanılabilir.

2.3 Durağan ve Durağan Olmayan Zaman Serisi Modelleri

Hemen hemen bütün istatistiki sonuç çıkarımlar için öncelikle bir modele ihtiyaç duyulur. Zaman serisi modelleri başlangıçta regresyon modellerine benzemesine rağmen, regresyon analizi için gerekli olan temel varsayımları sağlamamaktadır. Basit

doğrusal regresyon modeli, $Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + e_t$, $t = 1,2,\dots,n$ şeklinde verildiğinde Y_t'ler bağımsız gözlem değerlerini, x_t'ler bilinen açıklayıcı değişkenleri, e_t'ler ise $E(e_t) = 0$, $Var(e_t) = \sigma^2$ olacak şekildeki hata terimlerini göstermektedir. Burada β_0 ve β_1 model parametreleridir. Diğer taraftan $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + e_t$ şeklinde verilen birinci dereceden otoregresif zaman serisi modeli de regresyon modeline benzemektedir. Oysa Y_t'ler bağımlı ve açıklayıcı değişken rolündeki Y_{t-1}'lerde bilinen değişkenler değildir. Dolayısıyla bu şekilde verilen bir model görünüşte bir regresyon modeline benzemesine rağmen regresyon varsayımlarını sağlamaz (Akdi 2014).

Bu kısımda uygulamada sıklıkla karşılaşılan bazı zaman serisi modelleri kısaca tanıtılacaktır. Bu modeller ve özellikleri hemen hemen bütün zaman serisi kaynaklarında bulunabilir. İncelenecek başlıca zaman serisi modelleri otoregresif modeller, hareketli ortalama modelleri ve otoregresif hareketli ortalama modelleridir.

Modellerde yer alan p, d, q parametreleri model parametreleri olup, p otoregresif modelinin derecesini, d fark alma işlemi sayısını, q ise hareketli ortalama modelinin derecesini göstermektedir. Daha sonraki bölümlerde mevsimsel zaman serisi modelleri de ayrıca incelenecektir.

2.3.1 Hareketli ortalama modelleri (MA modelleri)

Zaman serilerinin büyük çoğunluğu diğer bir serinin lineer birleşimi olarak yazılabilir. Bu bağlamda beyaz gürültü serileri hareketli ortalama modellerine örnek olarak verilebilir.

$\{e_t : t \in T\}$ zaman serisi $\forall\, t$ için $E(e_t) = 0$ ve otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & , \quad h = 0 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases} \tag{2.10}$$

şeklinde ise $\{e_t: t \in T\}$ zaman serisine beyaz gürültü serisi denir ve $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ ile gösterilir. Beyaz gürültü serisini tanımladıktan sonra diğer zaman serisi modelleri de buna bağlı olarak tanımlanır. Örneğin, birinci dereceden hareketli ortalama modeli $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$Y_t = \mu + e_t + \beta e_{t-1} \tag{2.11}$$

olarak verilir. Bu serinin beklenen değeri $E(Y_t) = \mu$, otokovaryansları,

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= Var(Y_t) = \sigma^2(1 + \beta^2) \\ \gamma(1) &= \sigma^2\beta \\ \gamma(h) &= 0 \ , \quad h > 1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

şeklinde olup, otokorelasyonları ise,

$$\begin{aligned} \rho(0) &= 1 \\ \rho(1) &= \beta/(1 + \beta^2) \\ \rho(h) &= 0 \ , \qquad h > 1 \end{aligned} \tag{2.13}$$

biçimindedir (Enders 2004). Görüldüğü gibi otokovaryanslar dolayısıyla otokorelasyonlar birinci gecikmeden sonra sıfırdır.

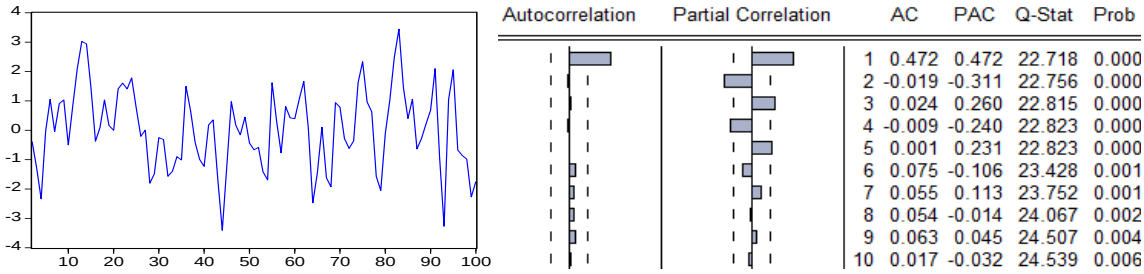
Hareketli ortalama modellerinin model derecesini belirlemede otokorelasyon fonksiyonundan faydalanılır. Zaman serisinin otokorelasyonları belli bir noktadan sonra sıfır oluyor ise seri hareketli ortalama modeline uygun olduğu söylenebilir.

q sonlu bir doğal sayı ve $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere q. dereceden hareketli ortalama modeli,

$$Y_t = \mu + e_t + \sum_{i=1}^{q} \beta_i e_{t-i} \qquad (2.14)$$

şeklinde verilir. Ayrıca q. dereceden hareketli ortalama serileri q sonlu bir doğal sayı olduğu durumda her zaman durağandır. q sonsuz olduğunda ise $\beta_0 = 1$, beklenen değer $E(Y_t) = \mu$ ve otokovaryans fonksiyonu $\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \beta_{i+h}$ şeklindedir. Dolayısıyla seri durağandır. Burada $|\beta_i| < 1$ olması gereklidir (Akdi 2014).

Serilerin uyduğu model hakkında bilgi edinmek için otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon grafikleri incelenebilir. Y_t zaman serisi olmak üzere Y_t'nin $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h}$ üzerine regresyonu yapıldığında Y_{t-h}'nin katsayısı serinin h. kısmi otokorelasyonudur. Otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafiklerine örnek olarak Eviews paket programında $Y_t = 0.8e_{t-1} + e_t$ modeline uygun rasgele 100 tane veri üretilmiş olup, veriye ait zaman serisi grafikleri şekil 2.1'de verilmiştir.



Şekil 2.1 MA(1) otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri

Şekil 2.1'den de görüldüğü gibi otokorelasyonlar birinci gecikmeden sonra sıfırdır. Kısmi korelasyonlar da ise mutlak değerce azalma gözlenmekle birlikte sıfıra yaklaşmaktadır. Dolayısı ile herhangi bir zaman serisinin grafikleri şekil 2.1'deki grafiklere benzer olduğunda verilerin $MA(1)$ olarak modellenmesi uygundur.

2.3.2 Otoregresif modeller (AR modelleri)

Otoregresif zaman serisi modelleri serinin geçmiş değerleri ve beyaz gürültünün lineer birleşimidir. İktisadi seriler genellikle otoregresif modellere uygundur. Birinci dereceden otoregresif model; $AR(1)$, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + e_t \tag{2.15}$$

şeklinde verilir. $AR(1)$ modeli, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + e_t \tag{2.16}$$

olarak yazıldığında, modele karşılık gelen karekteristik denklem $m - \rho = 0$ dır. Böylece denklemin kökü $m_1 = \rho$ olur. Bu durumda $AR(1)$ modeli, ρ mutlak değerce 1'den küçük ise durağan, aksi halde durağan değildir. $|\rho| < 1$ için $Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t$ zaman serisi modeli durağandır. $|\rho| < 1$ olduğundan $AR(1)$ modeli $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j e_{t-j}$ şeklinde $MA(\infty)$ modeli olarak yazılabilir. Ayrıca beklenen değer ile varyans ise $E(Y_t) = 0$ $Var(Y_t) = \sigma^2/(1 - \rho^2)$ ve $\gamma(h) = \rho^h \gamma(0)$ şeklindedir. Buradan modelin otokorelasyon fonksiyonu $\rho(h) = \rho^h$ şeklinde olur ve $|\rho| < 1$ iken otokorelasyonlar üstel azalır (Akdi 2014).

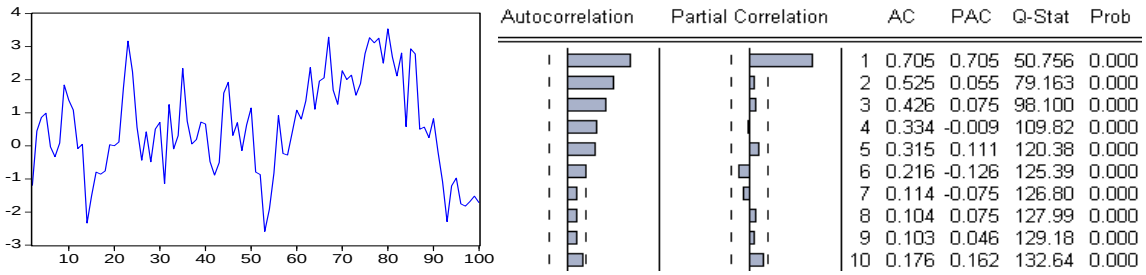
Genel olarak p. dereceden otoregresif model ise $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$Y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i Y_{t-i} + e_t \tag{2.17}$$

şeklindedir. Model $(Y_t - \mu) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (Y_{t-i} - \mu) + e_t$ şeklinde de yazılabilir. Burada $E(Y_t) = \mu$ olmak üzere $\alpha_0 = \mu(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_p)$ dir.

Durağan otoregresif seriler incelendiğinde otokorelasyonların mutlak değerce üstel olarak azaldığı görülür. Otokorelasyonlar hareketli ortalama modellerinin derecesini belirlerken daha kullanışlıdır. Otoregresif modeller için ise model derecesi tespit edilirken kısmi otokorelasyonlar kullanılır. Otoregresif serilerde kısmi otokorelasyonlar belli bir noktadan sonra sıfırlanmaktadır.

Eviews paket programı yardımıyla $Y_t = 0.8Y_{t-1} + e_t$ modeline uygun rasgele üretilen 100 birimlik verilere ait zaman serisi grafikleri şekil 2.2'de verilmektedir.



Şekil 2.2 AR(1) otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri

Şekil 2.2'de kısmi korelasyonlar birinci gecikmeden sonra sıfırlanmaktadır. Otokorelasyonların ise üstel olarak azaldığı görülmektedir. Dolayısıyla otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri şekil 2.2'deki gibi olan verilerin $AR(1)$ olarak modellemesi uygun olacaktır.

İkinci dereceden otoregresif model $Y_t = 0.8Y_{t-1} + 0.1Y_{t-2} + e_t$ ele alınsın. Modelin durağan olup olmadığını incelemek için karekteristik denkleme ihtiyaç duyulur. Bu modele karşılık gelen karekteristik denklem $m^2 - 0.8m - 0.1 = 0$ şeklinde olup verilen ikinci dereceden polinomun kökleri $|m_1| = \left|\frac{0.8+\sqrt{0.8^2+4(0.1)}}{2}\right| = 0.9 < 1$ ve $|m_2| = \left|\frac{0.8-\sqrt{0.8^2+4(0.1)}}{2}\right| = 0.1 < 1$ olduğundan model durağandır.

Zaman serilerinde önemli kavramlardan biri öngörüdür. Bu bağlamda mevcut veriler ile rasgele değişkenin gelecekte alacağı değer öngörülebilir. Modellerden faydalanarak öngörüler elde edilebilir. Örneğin $AR(1)$ modeli için öngörü,

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{n+s} &= E(Y_{n+s}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= E(\rho Y_{n+s-1} + e_{n+s}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= \rho E(Y_{n+s-1}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) + E(e_{n+s}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= \rho \hat{Y}_{n+s-1}\end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan da,

$$\begin{aligned}&s = 1 \text{ için } \hat{Y}_{n+1} = \rho Y_n \\ &s = 2 \text{ için } \hat{Y}_{n+2} = \rho \hat{Y}_{n+1} = \rho^2 Y_n \\ &s = 3 \text{ için } \hat{Y}_{n+3} = \rho \hat{Y}_{n+2} = \rho^3 Y_n\end{aligned} \tag{2.19}$$

şeklinde olup, öngörüler $\mu = 0$ için $\hat{Y}_{n+s} = \rho^s Y_n$ şeklindedir. Ayrıca, öngörü hatası $Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$ ifadesi ile hesaplanırken, öngörü hatalarının varyansı $Var(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1})$ olur. Bu durumda ilk öngörü hatasının varyansı $Var(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) = Var(e_{n+1}) = \sigma^2$ olur (Akdi 2014).

Birinci dereceden otoregresif zaman serisi modeli için öngörülerin nasıl hesaplanacağı aşağıda kısaca özetlenmiştir. Rasgele üretilen 100 veri için $Y_t = 0.7827 Y_{t-1} + e_t$ modelinin uyduğu gözlemlenmiştir. Bu model $(Y_t - \mu) = a(Y_{t-1} - \mu) + e_t$ olarak ele alındığında, μ kitle ortalaması $\bar{Y}_n$ ile tahmin edelir. Bu değer de, $\bar{y} = 0.045$ olarak gözlenmiştir. Burada $\alpha_0 = \mu(1 - \alpha)$ şeklinde olduğuna göre, $\hat{\alpha}_0 = 0.045(1 - 0.7827) = 0.0098$ olarak elde edilir. Böylece, kestirim denklemi, $\hat{Y}_t = 0.0098 + 0.7827 Y_{t-1}$ olarak verilir. Öngörülerin bazıları,

$$\hat{Y}_{101} = 0.0098 + 0.7827 Y_{100} = 0.0098 + 0.7827(0.9530) = 0.7557$$

$$\hat{Y}_{102} = 0.0098 + 0.7827 \hat{Y}_{101} = 0.0098 + 0.7827(0.7557) = 0.6013$$

olarak hesaplanmıştır. Ayrıca, MSE = 0.7635 olduğundan $\hat{\sigma}^2 = 0.7635$ şeklinde hesaplanmıştır.

2.3.3 Otoregresif hareketli ortalama modelleri ($ARMA$ modelleri)

$MA(q)$ modellerinde otokorelasyonlar belli bir yerden sonra sıfırdır. $AR(p)$ modellerinde ise kısmi otokorelasyonlar belli bir yerden sonra sıfırdır. Bazen bu fonksiyonlar belli bir yerden sonra sıfır olmazlar. Bu durumda verilerin otoregresif hareketli ortalama modeli ($ARMA$) ile modellenmesi uygun olacaktır.

Birinci dereceden otoregresif hareketli ortalama modeli $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + e_t + \beta_1 e_{t-1} \tag{2.20}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca model $(Y_t - \mu) = \alpha_1 (Y_{t-1} - \mu) + e_t + \beta_1 e_{t-1}$ şeklinde de yazılabilir.

Seriye ilişkin otokovaryans ve otokorelasyonlar,

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \frac{1+\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1}{(1-\alpha_1^2)}\sigma^2 \\ \gamma(1) &= \frac{(1+\alpha_1\beta_1)(\alpha_1+\beta_1)}{(1-\alpha_1^2)}\sigma^2 \end{aligned} \tag{2.21}$$

şeklinde olup,

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \frac{(1+\alpha_1\beta_1)(\alpha_1+\beta_1)}{(1+\beta_1^2+2\alpha_1\beta_1)} \\ \rho(h) &= \alpha_1\rho_{h-1} \quad , \qquad h \geq 2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

olarak elde edilir (Enders 2004).

Otoregresif hareketli ortalama modelinin genel hali $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$(Y_t - \mu) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, (Y_{t-i} - \mu) + e_t + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, e_{t-j} \tag{2.23}$$

şeklinde verilebilir. Ayrıca $B^k Y_t = Y_{t-k}$ gerileme operatörü yardımı ile model,

$$\left(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \cdots - \alpha_p B^p\right) Y_t = \left(1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \cdots + \beta_q B^q\right) e_t \tag{2.24}$$

şeklinde de yazılabilir. Otoregresif hareketli ortalama modellerinde durağanlık, serinin otoregresif kısmına karşılık gelen karekteristik denklemin köklerine bağlıdır. Yani, yukarıda verilen $ARMA(p,q)$ modeli için $m^p - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, m^{p-i} = 0$ denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçükse model durağandır.

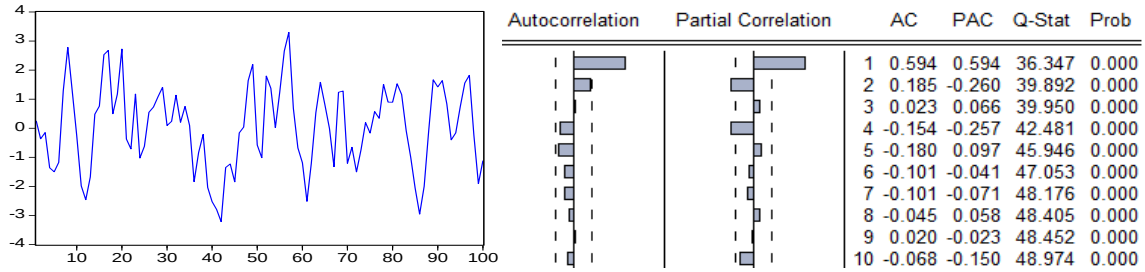
$B^k Y_t = Y_{t-k}$ olup, $\nabla = 1 - B$ fark operatörünü göstermek üzere, seri durağan olmamasına rağmen eğer $\nabla^d Y_t$ serisi durağan ise modele d.dereceden bütünleşiktir denir ve $Y_t \sim I(d)$ ile gösterilir. Ayrıca $\nabla^d Y_t$ fark serisi otoregresif hareketli ortalama modelli olarak yazılabiliyorsa, Y_t serisi otoregresif bütünleşik hareketli ortalama modeli olarak modellenebilir.

p, d ve q dereceli otoregresif bütünleşik hareketli ortalama modeli, $ARIMA(p,d,q)$, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$\left(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \cdots - \alpha_p B^p\right)(1 - B)^d Y_t = \left(1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \cdots + \beta_q B^q\right) e_t \tag{2.25}$$

biçiminde gösterilebilir. Burada $(1 - B)^d$ teriminin d. dereceden fark işlemini ifade etmektedir.

Eviews paket programında $Y_t = 0.9 Y_{t-1} + 0.8 e_{t-1} + e_t$ modeline uygun rasgele üretilen 100 veriye ilişkin grafikler şekil 2.3'teki gibi olmaktadır.



Şekil 2.3 ARMA(1,1) otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri

Araştırılan verilerin otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri şekil 2.3'te yer alan grafiklere benzediğinde, verilerin $ARMA(1,1)$ olarak modellenmesi uygun olacaktır.

Daha önce de bahsedildiği gibi zaman serilerinde en önemli amaç öngörülerde bulunmaktadır. Öngörülerin koşullu beklenen değer ile hesaplanabileceğini önceki kısımlarda belirtilmişti. Bu bağlamda $ARMA(1,1)$ modeline ilişkin öngörülerden bazıları aşağıda hesaplanmıştır.

$ARMA(1,1)$ serisi, $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + e_t + \beta_1 e_{t-1}$ biçiminde olup, bu modele göre, birinci öngörü,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n+1} = E(Y_{n+1}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) &= E(\alpha_0 + \alpha_1 Y_n + e_{n+1} + \beta_1 e_n|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_n + \beta_1 e_n + E(e_{n+1}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_n + \beta_1 e_n \end{aligned} \tag{2.26}$$

olacaktır. İkinci öngörü ise,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n+2} = E(Y_{n+2}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) &= E(\alpha_0 + \alpha_1 Y_{n+1} + e_{n+2} + \beta_1 e_{n+1}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \hat{Y}_n = \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 Y_n + \beta_1 e_n) \\ &= \alpha_0(1 + \alpha_1) + \alpha_1^2 Y_n + \alpha_1 \beta_1 e_n \end{aligned} \tag{2.27}$$

olur. Böyle devam edildiğinde öngörüler serinin gözlenen son değeri ile en son hata terimine bağlıdır (Akdi 2014).

Birinci dereceden otoregresif hareketli ortalama modelinde öngörü hesabı aşağıdaki şekilde yapılabilmektedir. Burada rasgele üretilen 100 veriye $Y_t = 0.2Y_{t-1} + 0.5e_{t-1} + e_t$ modelinin uyduğu gözlemlenmiştir. Bu model için birinci öngörü, $\hat{Y}_{n+1} = 0.2Y_n + 0.5e_n$ şeklindedir. Öngörü hatası ise,

$$Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} = [0.2Y_n + 0.5e_n + e_{n+1}] - [0.2Y_n + 0.5e_n] = e_{n+1}$$

dir. Benzer şekilde, $\hat{Y}_{n+2}$ öngörü değeri,

$$\hat{Y}_{n+2} = E(Y_{n+2}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = E(0.2Y_{n+1} + 0.5e_{n+1} + e_{n+2}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$
$$= 0.2\hat{Y}_{n+1} = 0.2[0.2Y_n + 0.5e_n] = 0.04Y_n + 0.1e_n$$

olur. İkinci öngörü hatası ise,

$$Y_{n+2} - \hat{Y}_{n+2} = [0.2Y_{n+1} + 0.5e_{n+1} + e_{n+2}] - [0.2\hat{Y}_{n+1} + 0.5e_n]$$
$$= 0.2[Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}] + e_{n+2} + 0.5e_{n+1} - 0.5e_n$$
$$= e_{n+2} + 0.7e_{n+1} - 0.5e_n$$

şeklindedir. Öngörülerin hesaplanabilmesi için e_n hata teriminin kestirilmesi gerekir. Bunun için önce $e_1 = 0$ alınır. Dolayısıyla ikinci öngörü, $\hat{Y}_{n+1} = 0.2Y_n + 0.5e_n$ eşitliği yardımıyla, $\hat{Y}_2 = 0.2Y_1 + 0.5e_1 = 0.2(0.1256) + 0.5(0) = 0.0251$ olur. Buradan e_2 için bir kestirim $\hat{e}_2 = Y_2 - \hat{Y}_2 = 0.1160 - 0.0251 = 0.0909$ şeklinde hesaplanır. Devam edildiğinde, $\hat{Y}_3 = 0.2Y_2 + 0.5\hat{e}_2 = 0.2(0.1160) + 0.5(0.0909) = 0.0687$ ve $\hat{e}_3 = Y_3 - \hat{Y}_3 = 2.0696 - 0.0687 = 2.009$ olarak bulunur. Son olarak, $\hat{Y}_4 = 0.2Y_3 + 0.5\hat{e}_3 = 0.2(2.0696) + 0.5(2.009) = 1.4184$ ve $\hat{e}_4 = Y_4 - \hat{Y}_4 = 0.0837 - 1.4184 = -1.3347$ şeklinde hesaplanır.

2.3.4 Mevsimsel otoregresif modeller (SAR modelleri)

Bu çalışmada 1991:01-2013:04 dönemi için çeyreklik sanayi üretim endeksi verileri incelenmiştir. Serinin mevsimsel etkiler içerdiği düşünülmektedir. Bu nedenle mevsimsel zaman serisi modelleri hakkında bilgi verilmesi faydalı olacaktır.

$e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-4} - \mu) + e_t \, , t = 1,2, \dots , n \tag{2.28}$$

şeklinde verilen zaman serisi modeli dördüncü dereceden otoregresif modele yani $AR(4)$ modeline benzemektedir. Aslında dördüncü dereceden otoregresif model, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$(Y_t - \mu) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \, (Y_{t-i} - \mu) + e_t \, , t = 1,2, \dots , n \tag{2.29}$$

şeklinde verilir. Bu modele karşılık gelen karekteristik denklem,

$$m^4 - \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \, m^{p-i} = 0 \tag{2.30}$$

şeklindedir. Bu denklemin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise model durağan, köklerden en az biri mutlak değerce 1 veya 1'den büyükse durağan değildir. Burada $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ve $\alpha_4 = \rho$ alınırsa model,

$$(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-4} - \mu) + e_t \, , t = 1,2, \dots , n \tag{2.31}$$

şekline dönüşür. Ortalama sıfır olduğunda, bu modele karşılık gelen karekteristik denklem $m^4 - \rho = 0$ olup, $\rho = 1$ ise model durağan değildir. $\rho = 1$ olduğu durumda

modele karşılık gelen karekteristik denklem, $m^4 - 1 = 0$ şeklinde yazılır. Ayrıca $m^4 = 1$ denkleminin kökleri $m_1 = 1$, $m_2 = -1, m_3 = i, m_4 = -i$ olmak üzere kökler mutlak değerce 1 dir. Yani serinin 4 tane birim kökü vardır. Bu durumda seriyi durağanlaştırmak için 4 defa fark almak gerekir. Oysa bu dönüşüm modeli daha karmaşık hale getirebileceği gibi uygun bir dönüşümde olmayabilir. Bundan dolayı $Z_t = \nabla^4 Y_t$ dönüşümü yerine $Z_t = \nabla_4 Y_t$ dönüşümü daha uygundur. Burada $\nabla_4 Y_t = (1 - B^4) Y_t$ şeklindedir (Akdi 2014).

Ayrıca yukarıda geçen karekteristik denklem, $m^4 - \rho = 0$ ifadesinde $z = m^4$ olarak alınırsa, $z - \rho = 0$ şekline dönüşür. Bu durumda birinci dereceden otoregresif modele yani $AR(1)$ modeline ilişkin karekteristik denklem elde edilmiş olur. Bu nedenle $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-4} - \mu) + e_t$ şeklinde verilen model $SAR_4(1)$ olarak adlandırılır. Birinci dereceden mevsimsel otoregresif modele karşılık gelen karekteristik denklemin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise model durağandır. Eğer $\rho = 1$ ise model durağan olmayıp $m^4 - 1 = 0$ denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'dir.
Genel olarak, mevsimsel otoregresif modeller $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$Y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, (Y_{t-d} - \mu) + e_t \tag{2.32}$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.32)'deki eşitlikte yer alan d mevsimsellik gecikmesini gösteren pozitif bir tamsayıdır. Bu modele karşılık gelen karekteristik denklemin kökleri mutlak değerce 1'den küçükse model durağandır. Aksi halde model durağan değildir.

Otokorelasyon ve otokovaryans fonksiyonlarının matematiksel olarak ifadesi aşağıda verilmektedir. $SAR_4(1)$ modeli $(Y_t - \mu) = \alpha(Y_{t-4} - \mu) + e_t$ veya $\mu = 0$ alarak $Y_t = \alpha Y_{t-4} + e_t$ şeklinde yazılabilir. Bu model $|\alpha| < 1$ için durağandır. Serinin otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları sırasıyla,

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 \alpha^{\frac{h}{4}}/(1-\alpha^2) & , \quad h = 4k \quad , \quad k = 0,1,2,3 \ldots \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases} \tag{2.33}$$

ve

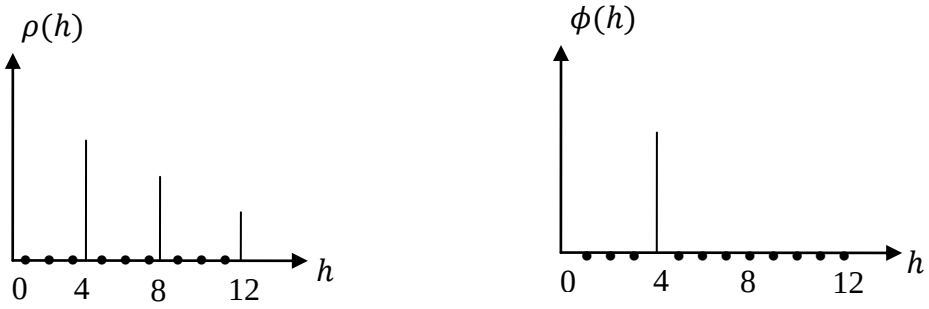
$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \tag{2.34}$$

eşitliğinden,

$$\rho(h) = \begin{cases} \alpha^{\frac{h}{4}} & , \quad h = 4k \quad , \quad k = 0,1,2,3 \ldots \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases} \tag{2.35}$$

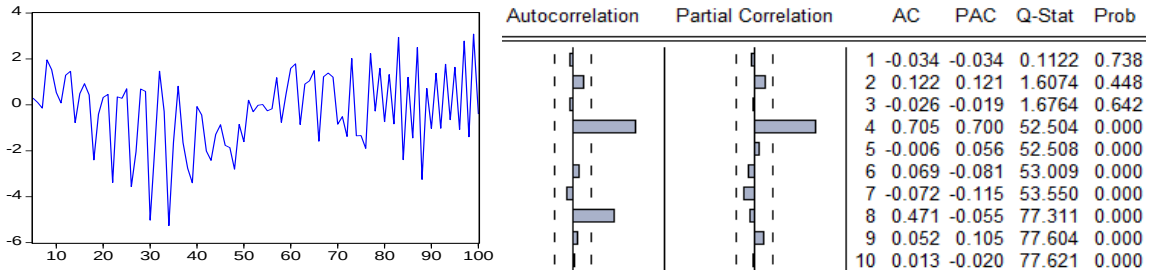
olarak bulunur. Ayrıca otokorelasyonlar periyodik olarak azalmakta olup, kısmi otokorelasyonlar $\phi(4) = \alpha$ ve $h > 4$ için $\phi(h) = 0$ şeklindedir (Akdi 2014).

$SAR_4(1)$ modeline ilişkin otokorelasyon ve otokovaryans grafikleri şekil 2.4'te verilmektedir.

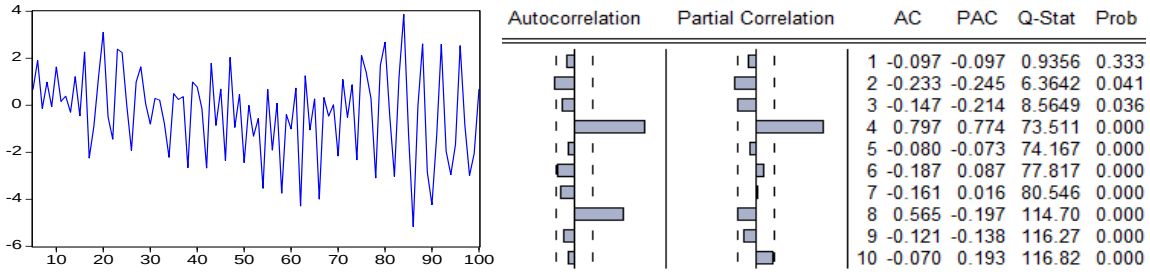


Şekil 2.4 $SAR_4(1)$ otokorelasyon ve otokovaryans grafikleri

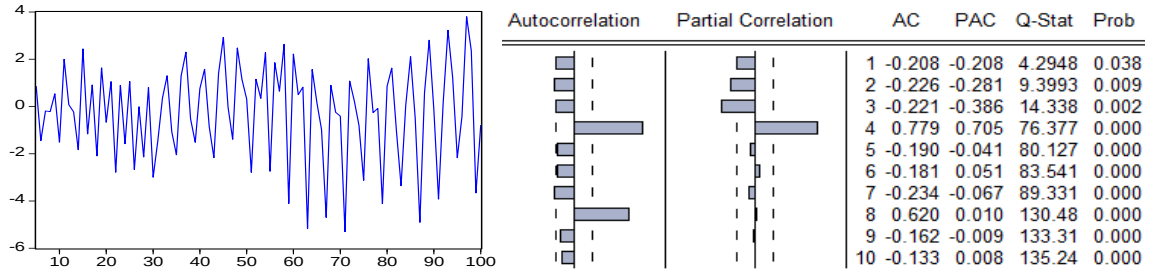
Eviews paket programında $Y_t = \rho Y_{t-4} + e_t$ modeline uygun ρ'nun farklı değerleri için 100 adet rasgele sayı üretilmiştir. Bu modellere ilişkin grafikler şekil 2.5-2.8'de verilmektedir.



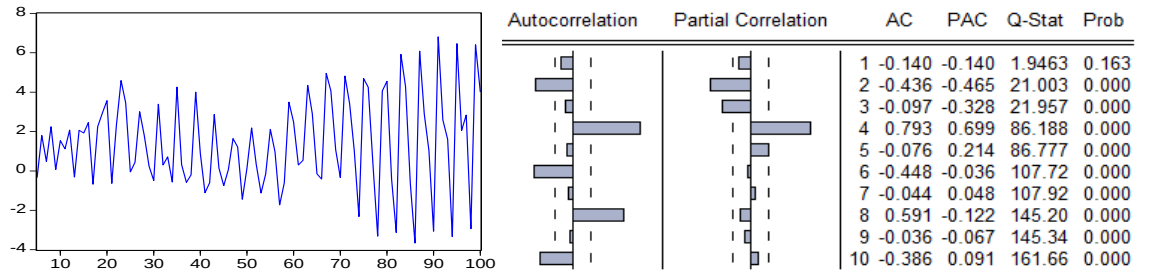
Şekil 2.5 $SAR_4(1)$ ρ=0.80 otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri



Şekil 2.6 $SAR_4(1)$ ρ=0.90 otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri



Şekil 2.7 $SAR_4(1)$ ρ=0.95 otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri



Şekil 2.8 $SAR_4(1)$ ρ=0.99 otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri

Şekillerde verilen ρ'nun farklı değerleri için $SAR_4(1)$ modelinden üretilen rasgele sayıların otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonları incelendiğinde, verilerdeki periyodik

etkiler göze çarpmaktadır. Buna benzer durumlarda verilerin mevsimsel modeller kullanılarak modellenmesi doğru olacaktır.

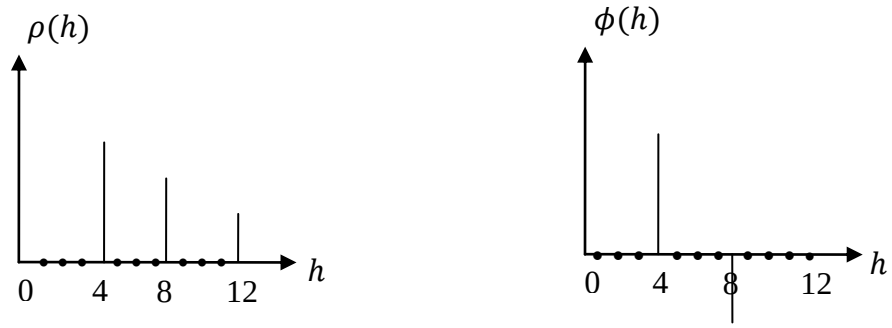
$\mu = 0$ olması halinde periyodu 4 olan birinci dereceden mevsimsel otoregresif model, $Y_t = \alpha_4 Y_{t-4} + e_t$ şeklinde iken periyodu 4 olan ikinci dereceden mevsimsel otoregresif model $Y_t = \alpha_4 Y_{t-4} + \alpha_8 Y_{t-8} + e_t$ şeklinde verilir. Bu modele karşılık gelen karekteristik denklem ise $m^8 - \alpha_4 m^4 - \alpha_8 = 0$'dır. $m^4 = z$ olarak alınırsa denklem $z^2 - \alpha_4 z - \alpha_8 = 0$ halini alır ki bu da ikinci dereceden otoregresif modele karşılık gelen karekteristik denklemdir. Burada modelin 1 tane birim kök içermesi durumunda, yani $z_1 = 1$ bu denklemin bir kökü ise $z = m^4 = 1$'den yine $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, $m_3 = i$ ve $m_4 = -i$'de periyodu 4 olan ikinci dereceden mevsimsel otoregresif modele karşılık gelen karekteristik denklemin kökleridir. Yani seride 4 tane birim kök vardır.

Mevsimsel otoregresif modellerde durağanlık serinin karekteristik denkleminin köklerine bağlıdır. Eğer mevsimsel zaman serisi birim kök içeriyorsa, bu birim kökler tekrar eder. Dolayısıyla bu seriyi durağan hale getirmek için dördüncü dereceden fark almak yerine mevsimsel fark alma yöntemi kullanılır.

Yukarıda $SAR_4(1)$ modelinin bazı özellikleri incelendi. Benzer incelemeler $SAR_4(2)$ modeli için de yapılabilir. $SAR_4(2)$ modeli $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

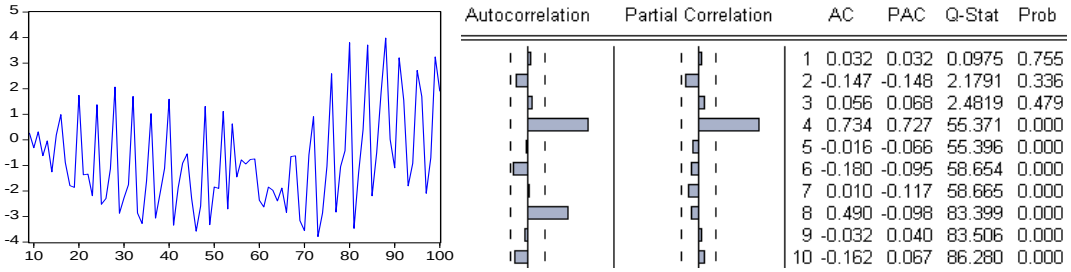
$$(Y_t - \mu) = \alpha_4 (Y_{t-4} - \mu) + \alpha_8 (Y_{t-8} - \mu) + e_t \qquad (2.36)$$

şeklinde verilir. Bu modelin $\rho(h)$ otokorelasyonları periyodik bir şekilde üstel olarak azalmasına rağmen, $\phi(h)$ kısmi otokorelasyonları 4. ve 8. gecikmeler haricinde sıfırdır. Bu modele ilişkin otokorelasyon ve otokovaryans grafikleri şekil 2.9'da verilmektedir.



Şekil 2.9 $SAR_4(2)$ otokorelasyon ve otokovaryans grafikleri

Otoregresif ve otoregresif hareketli ortalama modellerinde olduğu gibi durağan olmayan zaman serilerinde de otokorelasyonlardaki azalmanın hızı verilerin durağanlığı hakkında sezgisel de olsa bilgi verir. Bu durum mevsimsel modeller için de geçerlidir. Bunu görebilmek için Eviews paket programında $Y_t = 0.8Y_{t-4} + 0.1Y_{t-8} + e_t$ modeline uygun 100 adet rasgele sayı üretilmiştir. Bu modele ilişkin grafikler şekil 2.10'da verilmiştir.



Şekil 2.10 $SAR_4(2)$ otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri

$SAR_4(2)$ modelinden üretilen rasgele sayıların otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonları incelendiğinde de belli aralıklarla tekrarlayan gözlemlerin veride periyodiklik yarattığı ayrıca otokorelasyonlarında ve kısmi otokorelasyonlarında da benzer durumun olduğu görülmektedir.

Otoregresif ve otoregresif hareketli ortalama modellerinde olduğu gibi mevsimsel modellerde de öngörüler benzer şekilde hesaplanabilir. Tanım gereği öngörü koşullu beklenen değer olup, $Y_t = \rho Y_{t-4} + e_t$ modeli göz önüne alındığında $\hat{Y}_{n+s}$ ifadesi,

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{n+s} &= E(Y_{n+s}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= E(\rho Y_{n+s-4} + e_{n+s}|\, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= \rho \hat{Y}_{n+s-4}\end{aligned} \tag{2.37}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan da bazı öngörüler,

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{n+1} &= \rho Y_{n-3} \\ \hat{Y}_{n+2} &= \rho Y_{n-2} \\ \hat{Y}_{n+3} &= \rho Y_{n-1} \\ \hat{Y}_{n+4} &= \rho Y_n \\ \hat{Y}_{n+4} &= \rho \hat{Y}_{n+1} = \rho\rho Y_{n-3} = \rho^2 Y_{n-3}\end{aligned} \tag{2.38}$$

şeklindedir.

Türkiye için çeyreklik sanayi üretim endeksi verileri logaritmik dönüşüm altında $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$Y_t = 3.98 + Y_{t-4} + e_t \;\; t = 1,2,3, \dots 92$$

modelinin uygun olduğu varsayılsın. Bu seriye ilişkin gözlem değerleri,

$$\begin{aligned}&Y_1 = 3.77, Y_2 = 3.78, Y_3 = 3.87, Y_4 = 3.95, Y_5 = 3.85 \\ &\dots, \; Y_{89} = 4.69, Y_{90} = 4.78, \; Y_{91} = 4.76, Y_{92} = 4.80\end{aligned}$$

şeklinde olup öngörüler,

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{n+s} &= E(Y_{n+s}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= E(3.98 + Y_{n+s-4} + e_{n+s} \setminus X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &= 3.98 + Y_{n+s-4}\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $\hat{Y}_{n+1} = 3.98 + Y_{n-3}$ şeklinde olur.

Öngörü hatası ise $Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} = [3.98 + Y_{n-3} + e_{n+1}] - [3.98 + Y_{n-3}] = e_{n+1}$ olarak bulunur. Öngörü hatasının varyansı ise $Var(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) = Var(e_{n+1}) = \sigma^2$ şeklinde hesaplanır.

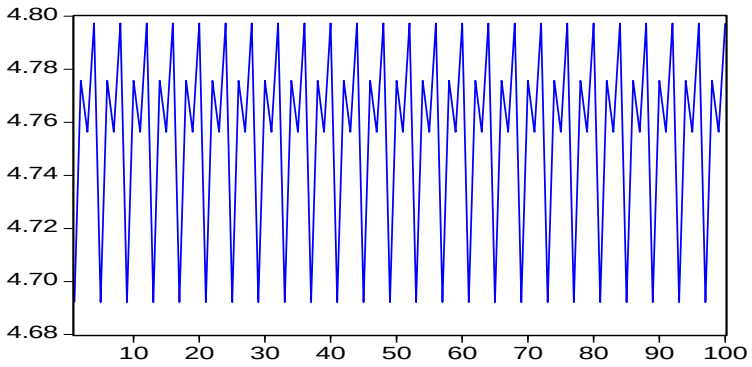
Öngörüler SAS, Eviews, Stata gibi programlarda kolaylıkla hesaplanabilir, logaritmik sanayi üretim endeksi serisine ilişkin öngörüler SAS programı yardımıyla hesaplanmıştır.

İlk 10 öngörü değerleri,

$\hat{Y}_{n+1} = 4.69$ $\hat{Y}_{n+2} = 4.78$ $\hat{Y}_{n+3} = 4.76$ $\hat{Y}_{n+4} = 4.80$ $\hat{Y}_{n+5} = 4.69$

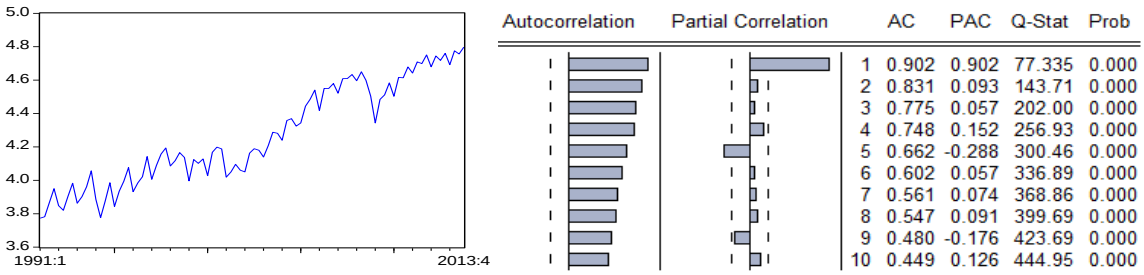
$\hat{Y}_{n+6} = 4.78$ $\hat{Y}_{n+7} = 4.76$ $\hat{Y}_{n+8} = 4.80$ $\hat{Y}_{n+9} = 4.69$ $\hat{Y}_{n+10} = 4.78$

olarak bulunmuştur. SAS programında elde edilen 100 öngörüye ilişkin grafik ise şekil 2.11'de yer almaktadır.



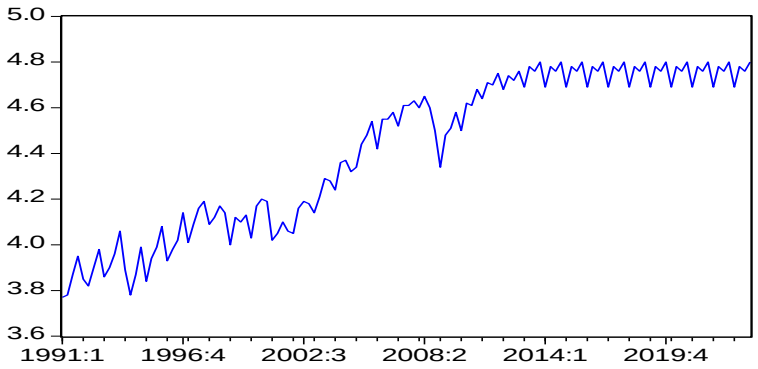
Şekil 2.11 Türkiye sanayi üretim endeksi öngörüleri

Logaritması alınmış sanayi üretim endeksine ilişkin grafikler şekil 2.12'de yer almaktadır. Şekilde verilen grafikten serinin yıllara göre hareketi hakkında bilgi edinilmektedir. Serinin pozitif trende sahip olduğu serinin grafiğinden anlaşılmaktadır.



Şekil 2.12 Türkiye sanayi üretim endeksi verilerine ilişkin grafikler

Sanayi üretim endeksi serisi ile 10 yıllık öngörüsüne ilişkin grafik şekil 2.13'te verilmiştir. 2014:01 - 2023:04 dönemi verilere ilişkin öngörü değerleridir.



Şekil 2.13 Türkiye sanayi üretim endeksi ve öngörüleri (1991:01-2023:04)

2.4 Sıklık Boyut Kavramları

Günlük hayatta yaşanılan olayların doğasında periyodiklik söz konusudur. Periyodik hareketlere ilişkin bilimsel çalışmalarda periyodik fonksiyonlar önemli rol oynamaktadır. Evde kullanılan elektrik akımı, kalp atışları, sezonluk işlerdeki nakit akışı gibi olayların yanı sıra çoğu iktisadi veride de periyodik dalgalanmalar mevcuttur.

Genel olarak belli zaman aralıklarıyla tekrar eden durumları içeren olguları tanımlamak için kullanılan fonksiyonlara periyodik fonksiyon denir. Periyodik fonksiyonların ifadesinde genellikle trigonometrik fonksiyonlar bulunur.

Periyodikliğin tespitinde kullanılan sıklık boyut analizlerinde kompleks sinusoidler önemli rol oynamaktadır. Trigonometrik fonksiyonlar ile kompleks sayılar arasındaki Euler formülü olarak adlandırılan formül ile zaman boyutundan sıklık boyutuna, sıklık boyutundan da zaman boyutuna geçişler sağlanır. Euler formülü,$\sqrt{-1} = i$ olmak üzere $e^{ix} = \cos(x) + isin(x)$ kullanılarak sinüs ve kosinüs fonksiyonları $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ ve $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ olarak yazılmaktadır (Bloomfield 1993).

Bu kısımda sıklık boyut analizlerinde önemli yer tutan aynı zamanda periyodik davranışlar içeren verilerin tanımlanmasında kullanılan periyodik fonksiyonlar ve bu fonksiyonlara ilişkin tanımlamalar üzerinde durulacaktır.

2.4.1 Periyodik Fonksiyonlar

Herhangi bir f fonksiyonu için her $x \in R$ için $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde bir p sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu periyodiktir denir. Bu şartı sağlayan en küçük p değerine f fonksiyonunun periyodu denir.

f fonksiyonu p periyodlu periyodik bir fonksiyon ise her $n \in N$ için,

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x) \\ f(x+2p) &= f[(x+p)+p] = f(x+p) = f(x) \\ f(x+3p) &= f[(x+2p)+p] = f(x+2p) = f(x) \\ &\vdots \\ f(x+np) &= f[(x+(n-1)p)+p] = f(x+(n-1)p) = f(x) \end{aligned} \tag{2.39}$$

eşitlikleri geçerlidir. Dolayısıyla n herhangi bir tamsayı olmak üzere $f(x+np) = f(x)$ eşitliği sağlanır. Böylelikle p, f fonsiyonunun periyodu ise, p'nin tüm katları da fonksiyonunun periyodudur (Altın 2011).

$f(x) = sin\, x$ ile tanımlanan f fonksiyonu periyodik olup periyodu 2π'dir. Çünkü her $x \in R$ ve her $k \in N$ için $sin(x + 2k\pi) = sin(x)$'dir.

Periyodikliği ifade etmede en önemli kavramlardan biri olan periyod kavramına özgü bazı özellikler aşağıda verilmektedir (Süray 1978).

i) Bir p sayısı f fonksiyonunun bir periyodu ise $-p$ sayısı da f fonksiyonunun bir periyodudur.
ii) Bir p sayısı f fonksiyonunun bir periyodu ise her $n \in N$ için np'de f fonksiyonunun bir periyodudur.
iii) Bir p sayısı f fonksiyonunun bir periyodu ise her negatif m tamsayısı için mp sayısı da f fonksiyonunun bir periyodudur.

f ile g aynı bir T periyoduna sahip periyodik fonksiyonlar olmak üzere,

i) $f + g$ fonksiyonu da T periyodlu periyodik bir fonksiyondur.
ii) $\alpha \neq 0$ sabiti için αf fonksiyonu T periyodlu periyodik bir fonksiyondur.
iii) $f.g$ fonksiyonu T periyodlu periyodik bir fonksiyondur.
iv) $g(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonu T periyodlu periyodik bir fonksiyondur.
v) $\alpha \neq 0$ için $f(\alpha x)$ fonksiyonu $\frac{T}{\alpha}$ periyodlu periyodik bir fonksiyondur (Süray 1978).

Periyodik fonksiyonlara en açık örnek,

$$f(t) = Rcos(2\pi ft + \phi) \tag{2.40}$$

şeklinde verilen sinüzoidlerdir. Trigonometrik fonksiyonların özelliklerinden (2.40)'ta verilen sinüzoid,

$$f(t) = Acos(2\pi ft) + Bsin(2\pi ft) \tag{2.41}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$A = Rcos(\phi)$$
$$B = -Rsin(\phi) \tag{2.42}$$

biçimindedir.

Zaman serisi analizlerinde, genellikle zaman boyutu kullanılmaktadır. Bununla birlikte sıklık boyutunda da analizler yapılmaktadır.

Trigonometrik fonksiyonlar ile kompleks sayılar arasında Euler formülü olarak adlandırılan formül,

$$e^{ix} = \cos(x) + isin(x) \tag{2.43}$$

ile zaman boyutundan sıklık boyutuna, sıklık boyutundan da zaman boyutuna geçişler sağlanmaktadır. Euler formülü kullanılarak sinüs ve kosinüs fonksiyonları

$$cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2 \tag{2.44}$$

$$sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i \tag{2.45}$$

olarak yazılmaktadır. Ayrıca,

$$\sum_{t=0}^{n-1} e^{i\alpha t} e^{-i\beta t} = \sum_{t=0}^{n-1} e^{i(\alpha-\beta)t} = \frac{e^{i(\alpha-\beta)n} - 1}{e^{i(\alpha-\beta)} - 1} \tag{2.46}$$

olup eğer $\alpha - \beta$ değeri 2π'nin bir katı ise,

$$\sum_{t=0}^{n-1} e^{i\alpha t} e^{-i\beta t} = \sum_{t=0}^{n-1} e^{i(\alpha-\beta)t} = \frac{e^{i(\alpha-\beta)n} - 1}{e^{i(\alpha-\beta)} - 1} = \begin{cases} n & , \quad \alpha = \beta \\ 0 & , \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{2.47}$$

dır (Bloomfield 1993).

2.4.2 Periyodiklik

Serinin kendisinin veya otokovaryans fonksiyonunun periyodik bir yapıya sahip olduğu durumlarda serinin türünü ve model derecesini tespit etmek zordur. Seri trigonometrik hareketler içerdiğinden, seriye ilişkin model parametrelerini tahmin etmek de oldukça zordur. Bu durumda sıklık boyut analizleri kullanılması güvenilir sonuçlar elde etmeyi sağlayacaktır.

Sıklık boyut analizlerinde, serideki periyodikliği tespit etmek ve tanımlamak için sinüzoidal fonksiyonlar önemli rol oynamaktadır. Herhangi bir periyodik zaman serisi $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$Y_t = \mu + Rcos(2\pi ft + \phi) + e_t \tag{2.48}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, R, f ve ϕ parametreleri sırası ile genlik, sıklık ve faz olarak adlandırılmaktadır. Bu kavramlar tanımlanmak istenirse $f(t) = R\cos(2\pi\, f\, t + \phi)$ eşitliği dikkate alınarak $\max\{f(t)\} = \max\{-f(t)\} = R$ veya $\max\{f(t)\} - \min\{f(t)\} = 2R$ elde edilir. Bir sinüzoidin sıklığı, birim zamanda ölçülen devir olarak tanımlanabilir. Faz ise fonksiyonun orijine göre davranışını göstermektedir.

Modelin (2.48)'deki şekli ile μ, R ve ϕ parametrelerinin tahmin edicilerinin bulunması zordur. Ayrıca, $w_k = \frac{2\pi k}{n}$ ve $\frac{k}{n} = f$ olarak alındığında,

$$Y_t = \mu + Rcos(w_k t + \phi) + e_t \tag{2.49}$$

şeklinde yazılır. Burada f serinin sıklığını, $\frac{1}{f}$ ise periyodunu ifade etmektedir. Trigonometrik fonksiyonların özelliklerinden, Y_t serisi $A = Rcos(\phi)$ ve $B = -Rsin(\phi)$ olmak üzere,

$$Y_t = \mu + Acos(w_k t) + Bsin(w_k t) + e_t, \quad t = 1,2,3,\dots,n \tag{2.50}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu model iki açıklayıcı değişkenli regresyon modeline benzemektedir. Dolayısıyla, Y_t'nin 1, $cos(w_k t)$ ve $sin(w_k t)$ üzerine regresyonundan A ve B parametrelerinin en küçük kareler tahmin edicileri,

$$\begin{aligned} \mu &= \bar{Y}_n \\ a_k &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y}_n)cos(w_k t) \\ b_k &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y}_n)sin(w_k t) \end{aligned} \tag{2.51}$$

şeklinde bulunur. $w_k = \frac{2\pi k}{n}$ alındığında Fourier katsayıları olarak bilinen a_k ve b_k en küçük kareler tahmin edicileri $\sum_{t=1}^{n} cos(w_k t) = \sum_{t=1}^{n} sin(w_k t) = 0$ olduğundan ortalamaya göre değişmezdir (Akdi 1995). Bu durumda analizler için önemli bir avantajdır.

Periyodik zaman serisi modelinin parametrelerinin en küçük kareler tahmin edicileri ise,

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}\,,\ tan(\phi) = -B/A \tag{2.52}$$

şeklindedir.

Zaman serilerinin çoğunda belli aralıklarla gözlenen periyodik hareketler mevcuttur. Serinin niteliğine göre de seride sezgisel olarak periyodik hareketler olabileceği düşünülebilir. Bu bağlamda Türkiye arındırılmamış çeyreklik sanayi üretim endeksi verileri ele alındığında, serinin periyodik hareketler içerebileceğinden şüphelenilir. Ancak bu durumun istatistiki yöntemler kullanılarak kanıtlanması yani seride periyodiklik olup olmadığına net bir şekilde karar verilmesi gereklidir.

Periyodiklik araştırması yapılırken çeşitli modeller denenebilir. Bundan dolayı Türkiye sanayi üretim endeksi serisi için ilk olarak $Y_{ij} = \mu_i + e_{ij},\ i = 1,2,3,4\ j = 1,2,\dots,n_i$ (Model 1) modeli dikkate alınsın (Bloomfield 1993). Modele ilişkin tahminler çizelge 2.1'de verilmektedir.

Çizelge 2.1 Model 1 ANOVA sonuçları

Kaynak	sd	SS	MS	F	Prob>F
Model	3	0.22113310	0.07371103	0.80	0.4954
Hata	88	8.07555678	0.09176769		
Toplam	91	8.29668989			
Dönem		Ortalama		Standart sapma	
1		4.19362893		0.30197600	
2		4.26359077		0.32865795	
3		4.29262585		0.29583422	
4		4.32684777		0.28345604	

Çizelge 2.1 incelendiğinde, $Y_{ij} = \mu_i + e_{ij},\ i = 1,2,3,4\ j = 1,2,\dots,n_i$ modelinin anlamlı olmadığı görülmektedir. Ayrıca amaç periyodikliği tespit etmek olduğundan dolayı bu model ile periyodikliği yakalamak kolay değildir. Bu noktada verideki periyodikliği yakalayabilecek, trigonometrik fonksiyonlar içeren başka model denenebilir. Dolayısıyla, daha az parametre içeren, $Y_t = Acos(w_k t) + Bsin(w_k t) + e_t$ (Model 2) gibi bir model dikkate alınabilir. Bu modelde tahmin edilmek istenen parametre sayısı bir önceki modele göre daha azdır (Bloomfield 1993). Model 2'ye ilişkin sonuçlar çizelge 2.2'de verilmektedir.

Çizelge 2.2 Model 2 ANOVA sonuçları

Kaynak	sd	SS	MS	F	Prob>F
Model	2	1676.99593	838.49797	9341.88	<.0001
Hata	90	8.07812	0.08976		
Toplam	92	1685.07405			

Değişken	sd	Parametre Tahminleri	SE	t	Prob>F
A	1	4.11257	0.07615	54.00	<.0001
B	1	1.34703	0.40380	3.34	0.0012

Çizelge 2.2'de sonuçları verilen $Y_t = Acos(w_k t) + Bsin(w_k t) + e_t$ modelinin istatistiksel olarak anlamlı olduğu görülmektedir. Bundan dolayı sanayi üretim endeksi verisindeki periyodikliği belirlemek için bu modele benzer modeller kullanılabilir. Verideki periyodikliğin tespitinde bu modellere ek olarak periyodiklik testi de yapılabilir. Bu test ile serideki periyodik bileşenin anlamlılığına karar verilerek seride periyodiklik olup olmadığına karar verilir. Türkiye sanayi üretim endeksi serisine ilişkin periyodiklik testi sonuçları çizelge 2.3'te verilmiştir (Bloomfield 1993).

Çizelge 2.3 Fisher Kappa, Kolmogorov-Smirnov istatistikleri

Fisher's Kappa	27.8045
Bartlett's Kolmogorov-Smirnov İstatistiği	
Test istatistiği	0.782436
p-değeri	<.0001

Sanayi üretim endeksi serisi için Fisher Kappa istatistiğinin değeri 27.8045, Bartlett's Kolmogorov-Smirnov istatistiğinin değeri ise 0.782436 olarak hesaplanmıştır. Bu sonuçlar ile verideki periyodik bileşenin anlamlı olduğu görülmektedir. Bu durumda serinin periyodik hareketler içerdiği söylenebilir.

Bu testler oldukça kullanışlıdır. Ancak hata terimlerinin ilişkili olduğu durumlarda spektrum kullanılması daha doğru sonuçlar elde edilmesini sağlayacaktır (Bloomfield 1993).

2.4.3 Spektrum

Zaman serilerinde modelleme yapılacağı zaman, model belirleme için çeşitli araçlar kullanılır. Genel anlamda otokovaryanslar ile kısmi otokorelasyonların grafikleri incelenebilir. Benzer şekilde spektrum ve grafiğinden de model hakkında bilgiler elde edilebilir. Bu araçların kullanımı yapılacak analizin niteliğine göre değişir. Eğer $ARIMA$ modeli ile ilgileniliyorsa, genellikle otokovaryanslar tercih edilir. Diğer taraftan sıklık boyutunda inceleme yapılacak ise spektrum daha kullanışlıdır.

Verilen bir zaman serisi için otokorelasyon fonksiyonu $\rho(h)$, integral Lebesque-Stieltjes integrali ve $G(w)$ istatistiksel dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$\rho(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwh}\, dG(w) \tag{2.53}$$

şeklinde ifade edilebilir. Otokovaryans fonksiyonu ise,

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwh}\, dF(w) \quad , \quad dF(w) = \gamma(0) dG(w) \tag{2.54}$$

şeklindedir. $G(w)$ ve $F(w)$ fonksiyonları zaman serilerinde spektral dağılım fonksiyonu olarak adlandırılır. $\gamma(h)$ fonksiyonu mutlak toplanabilir ise serinin spektral yoğunluk fonksiyonu otokovaryanslar yardımı ile,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-iwh} = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h)\, coswh \tag{2.55}$$

şeklinde ifade edilebilir. $f(w)$ sürekli negatif olmayan fonksiyondur, ayrıca $cos(h) = cos\,(-h)$ ve $\gamma(h) = \gamma(-h)$ olduğundan $f(w)$ çift fonksiyondur. Burada,

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(w)\, e^{iwh} dw \tag{2.56}$$

şeklinde yazılır. $dF(w) = f(w)dw$ olup, $f(w)$ spektral yoğunluk fonksiyonudur (Fuller 1996).

Spektral analizde kullanılan otokovaryans fonksiyonu hakkında gerek ve yeter koşulu veren Herglotz Teoremi aşağıda verilmektedir.

Herglotz Teoremi: Tam sayılar üzerinde tanımlı kompleks değerli bir $\gamma(h)$ fonksiyonunun negatif olmayan tanımlı olması için gerek ve yeter koşul,

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwh} dF(w) \quad , \; h = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \tag{2.57}$$

şeklinde yazılabilmesidir (Brockwell ve Davis 1987).

İspat: Öncelikle $\gamma(h)$ fonksiyonunun

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwh} dF(v) \quad , \; h = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \tag{2.58}$$

şeklinde yazıldığı varsayılsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j\, \gamma(h_j - h_k)\overline{a}_k &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j\, \overline{a}_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{iw(h_j - h_k)}\, dF(w) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j\, \overline{a}_k\, e^{iwh_j} e^{-iwh_k} dF(w) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j\, e^{iwh_j} \right|^2 dF(w) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.59}$$

olup fonksiyon negatif olmayan tanımlıdır. Tersine olarak, $\gamma(h)$ fonksiyonu negatif olmayan tanımlı ve

$$f_n(w) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e^{ijw}\gamma(j-k)e^{-ikw} \tag{2.60}$$

şeklinde olsun. Burada $f_n(w) \geq 0$ ve $j-k=m$ olarak alındığında,

$$f_n(w) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{|m|<n}(n-|m|)\,\gamma(m)\,e^{-imw} \tag{2.61}$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan, $F_n(w) = \int_{-\pi}^{w} f_n(w)dw$ fonksiyonu denirse,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iwh}dF_n(w) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwh} f_n(w)\,dw = \frac{1}{2\pi n}\sum_{|m|<n}(n-|m|)\,\gamma(n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h-m)w}\,dw \tag{2.62}$$

eşitliği elde edilir. Buradan da,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h-m)w}\,dw = \begin{cases} 2\pi & , \quad h=m \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases} \tag{2.63}$$

olduğundan, $n\to\infty$ iken

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iwh}\,dF_n(w) = \frac{1}{n}(n-|h|)\gamma(h) = \gamma(h) - \frac{|h|}{n}\gamma(h) \to \gamma(h) \tag{2.64}$$

yazılır. Buradan da, $n\to\infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\,wh} dF_n(w) = \gamma(h) \tag{2.65}$$

elde edilir (Brockwell ve Davis 1987). Böylelikle teoremin ispatı tamamlanır.

$\{e_t\}$ serisi ilişkisiz, ortalama ve varyansı $(0, \sigma^2)$ olan rasgele değişkenler olsun. $\{e_t\}$ serisinin spektral yoğunluğu,

$$f_e(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_e(h)\, cos wh = \frac{1}{2\pi}\sigma^2 \tag{2.66}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\gamma_e(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\sigma^2\, e^{iwh} dw = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\sigma^2\, cos wh\, dw = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{2.67}$$

dır (Fuller 1996).

Hareketli ortalama ve otoregresif zaman serilerinin spektral yoğunluk fonksiyonu

Hareketli ortalama süreci, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\, e_{t-j} \tag{2.68}$$

şeklinde ifade edildiğinde Y_t'nin spektral yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Y(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\, e^{-ijw} \right) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\, e^{ijw} \right) \tag{2.69}$$

şeklindedir. Burada a_j'ler mutlak toplanabilen bir dizidir. Sonlu hareketli ortalama süreci,

$$Y_t = \sum_{j=0}^{p} a_j \, e_{t-j} \tag{2.70}$$

şeklinde ifade edildiğinde, Y_t'nin spektral yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Y(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{p} a_j \, e^{-ijw}\right)\left(\sum_{j=0}^{p} a_j \, e^{ijw}\right) = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{h=-p}^{p} \gamma_Y(h) e^{-iwh}\right] \tag{2.71}$$

olarak gösterilebilir. Aynı zamanda, sonlu hareketli ortalama süreci spektral yoğunluk fonksiyonu, yardımcı denklemin kökleri açısından da ifade edilebilir. Bu durum için, $a_0 = 1$ ve $m^p + a_1 m^{p-1} + a_2 m^{p-2} + \cdots + a_p$ denkleminin kökleri m_j olmak üzere,

$$\sum_{j=0}^{p} a_j \, e^{-iwj} = e^{-iwp} \sum_{j=0}^{p} a_j \, e^{iw(p-j)} = e^{-iwp} \prod_{j=1}^{p} (e^{iw} - m_j) \tag{2.72}$$

dir. Bu durumda spektral yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left[\prod_{j=1}^{p} (e^{-iw} - m_j)\right]\left[\prod_{j=1}^{p} (e^{iw} - m_j)\right] \tag{2.73}$$

şeklinde yazılır (Fuller 1996).

Birinci dereceden otoregresif süreç,

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j e_{t-j} \;\; , \;\; |\rho| < 1 \tag{2.74}$$

şeklinde ifade edilsin. Burada $a_j = \rho^j$ şeklindedir. Ayrıca,

$$g_a(w) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j e^{-ijw} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{\infty}(\rho e^{-iw})^j = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{1}{1-\rho e^{-iw}} \tag{2.75}$$

olarak elde edilir. Kompleks eşleniği ise,

$$g_a^*(w) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j e^{ijw} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{1}{1-\rho e^{iw}} \tag{2.76}$$

şeklindedir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} f_Y(w) &= (2\pi)^2 f_e(w) g_a(w) g_a^*(w) \\ &= \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{1-\rho e^{-iw}}\right)\left(\frac{1}{1-\rho e^{iw}}\right) \\ &= \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right)\frac{1}{1-2\rho cos\, w+\rho^2} \end{aligned} \tag{2.77}$$

olarak yazılır. Burada, $\{e_t\}$ serisi ilişkisiz, ortalama ve varyansı $(0,\sigma^2)$ olan rasgele değişkenlerinin spektral yoğunluğu, bütün w'lar için $f_e(w) = \frac{1}{2\pi}\sigma^2$ şeklindedir (Fuller 1996).

p. dereceden otoregresif zaman serisi $\{Y_t\}$,

$$\sum_{j=0}^{p}\alpha_j Y_{t-j} = e_t \tag{2.78}$$

şeklindedir. Burada, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_p \neq 1$, $\{e_t\}$ serisi ilişkisiz, ortalama ve varyansı $(0,\sigma^2)$ olan rasgele değişkenler ve $R(m) = \sum_{j=0}^{p}\alpha_j m^{p-j} = 0$ denkleminin kökleri $\{m_j : j = 1,2,\dots,p\}$ mutlak değerce 1'den küçüktür, spektral yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Y(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left[\left(\sum_{j=0}^{p}\alpha_j\, e^{-iwj}\right)\left(\sum_{j=0}^{p}\alpha_j\, e^{iwj}\right)\right]^{-1}$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\pi}\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{(1-2m_j cosw + m_j^2)} \tag{2.79}$$

şeklindedir (Fuller 1996).

p. ve q. dereceden otoregresif hareketli ortalama süreci,

$$\sum_{j=0}^{p}\alpha_j\, Y_{t-j} = \sum_{k=0}^{q}\beta_k e_{t-k} \tag{2.80}$$

$\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\alpha_p \neq 0$, $\beta_q \neq 0$ ve $\{e_t\}$ serisi ilişkisiz, ortalama ve varyansı $(0, \sigma^2)$ olan rasgele değişkenler olmak üzere, $R(m) = \sum_{j=0}^{p}\alpha_j m^{p-j} = 0$ denkleminin kökleri $\{m_j : j = 1,2,\dots,p\}$ mutlak değerce 1'den küçüktür. Bu durumda p. ve q. dereceden otoregresif hareketli ortalama sürecinin spektral yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Y(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{(\sum_{k=0}^{q}\beta_k e^{iwk})(\sum_{k=0}^{q}\beta_k e^{-iwk})}{(\sum_{j=0}^{p}\alpha_j e^{iwj})(\sum_{j=0}^{p}\alpha_j e^{-iwj})}$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\prod_{k=1}^{q}(e^{iw}-r_k)\prod_{k=1}^{q}(e^{-iw}-r_k)}{\prod_{j=1}^{p}(e^{iw}-m_j)\prod_{j=1}^{p}(e^{-iw}-m_j)} \tag{2.81}$$

şeklindedir. Burada $\{r_k : k = 1,2,\dots,q\}$, $\sum_{k=0}^{q}\beta_k r^{q-k} = 0$ denkleminin kökleridir (Fuller 1996).

2.4.4 Periodogram

Periodogramların sıklık boyutunda önemli bir yeri vardır. Periodogramlar spektral yoğunluk fonksiyonunun tahmin edicisi olarak kullanılır. Ayrıca serilerin zaman boyutunda incelemesinde de önemli özelliklere sahiptir. Özellikle serilerin

durağanlığının ve verilerde olabilecek gizli periyodikliklerin araştırılmasında da kullanılmaktadır.

Periodogram istatistiğinin en önemli özelliklerinde biri de zaman serilerinde serinin birim kök içerip içermediğinin tespitinde kullanılabilmesidir. Bu çalışmada da periodogram istatistiğinin bu özelliğinden faydalanılmıştır.

$\{Y_t: t = 1,2,\dots,n\}$ olmak üzere Y_t periyodik hareketler gösteren bir seri olsun. Bu seri $Y_t = \mu + \alpha cos(w_k t) + \beta sin(w_k t) + e_t$ şeklinde ifade edilsin. Burada e_t terimleri sıfır ortalamalı, σ^2 varyanslı bağımsız rasgele değişkenlerdir. Bu modele uygun seri periyodik fonksiyonlar içerdiği için düzenli veya düzensiz periyodik hareketler sergileyebilir. Verilen modelde yer alan α ve β katsayılarının en küçük kareler tahmin edicileri sırasıyla,

i) Ortalamanın bilinmediği durumda yani μ bilinmiyor ise;

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y}_n)cos(w_k t)$$
$$b_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y}_n)sin(w_k t) \qquad (2.82)$$

ii) Ortalamanın bilindiği durumda yani μ biliniyor ise;

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \mu)cos(w_k t)$$
$$b_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \mu)sin(w_k t) \qquad (2.83)$$

şeklinde bulunur. Burada $w_k = \frac{2\pi k}{n}$ $k = 1,2,3,\dots,[n/2]$ şeklindedir. Ancak, $\sum_{t=1}^{n} cos\,(w_k t) = \sum_{t=1}^{n} sin(w_k t) = 0$ $k = 1,2,3,\dots,n$ olduğundan bu istatistikler

ortalamaya göre değişmezdir. Burada parametre sayısında azalma olduğundan tahmin problemi açısından önemli bir avantajdır (Akdi 1995).

Fourier katsayılarının yardımıyla Y_t zaman serisinin w_k periyodundaki periodogramı, $t = 1,2, \dots, n$ olmak üzere,

$$I_n(w_k) = \frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2) \tag{2.84}$$

biçiminde ifade edilir. Periodogram istatistiğinde yer alan a_k ve b_k Fourier katsayıları,

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t\, cos(w_k t) \quad ve \quad b_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t\, sin(w_k t) \tag{2.85}$$

veya $a_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y}_n)\, cos(w_k t)$, $b_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y}_n)\, sin\,(w_k t)$ şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak; Fourier katsayıları, periodogram istatistiği ve dolayısıyla periodogram tabanlı birim kök test istatistiği de ortalamaya göre değişmediği söylenir (Akdi 1995).

Bir zaman serisi,

$$Y_t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k cos(w_k t) + b_k sin(w_k t)) + e_t \tag{2.86}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada standart regresyon analizinden elde edilen regresyon katsayıları Fourier katsayılarıdır. n gözlem için genel kareler toplamı, Y_t'nin $cos(w_k t)$ üzerine regresyonundan elde edilen regresyon katsayılarının çapraz çarpımlarıdır. Yani, normalleştirilmiş a_k^2 ve b_k^2,

$$\frac{n}{2}a_k^2 = \frac{2}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t cos(w_k t)\right)^2$$
$$\frac{n}{2}b_k^2 = \frac{2}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t sin(w_k t)\right)^2 \qquad (2.87)$$

şeklinde ifade edilir. Buradan da $I_n(w_k)$ periodogram istatistiği,

$$I_n(w_k) = \frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{2}{n}\left[\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t cos(w_k t)\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} Y_t sin(w_k t)\right)^2\right] \qquad (2.88)$$

şeklinde yazılabilir (Fuller 1996). Aslında periodogram (2.88)'de verilen kareler toplamıdır.

Kareler toplamları w_k sıklıkları ile ilişkilendirilebilir. Birinci bileşen ortalamayla ilişkilendirilirken geriye kalan her bir m bileşen kareler toplamlarıyla ilişkilendirilir.

Çizelge 2.4'te $n = 2m + 1$ örneklem hacmi için oluşturulan varyans analizi tablosu yer almaktadır.

Çizelge 2.4 Varyans Analizi Tablosu

Kaynak	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı
Ortalama	1	$n\bar{x}_n$
Sıklık, $w_1 = 2\pi/n$	2	$(n/2)(a_1^2 + b_1^2)$
Sıklık, $w_2 = 4\pi/n$	2	$(n/2)(a_2^2 + b_2^2)$
⋮	⋮	⋮
Sıklık, $w_m = 2\pi m/n$	2	$(n/2)(a_m^2 + b_m^2)$
Toplam	n	$\sum_{t=1}^{n} Y_t^2$

Çizelge 2.4'te verilen kareler toplamları ilgili serbestlik derecelerine bölünerek ortalama hatalar elde edilebilir (Fuller 1996).

Y_t durağan bir zaman serisi olmak üzere, ortalaması μ, mutlak değerce toplanabilir otokovaryans fonksiyonu ise $\gamma(.)$ şeklinde olsun. Bu durumda,

(i) $EI_n(0) - n\mu^2 \to 2\pi f(0)$

(ii) $EI_n(w) \to 2\pi f(w)$, $w \neq 0$

şeklindedir. Ayrıca, $\mu = 0$ ise $[-\pi, \pi]$ aralığında $EI_n(w)$, $2\pi f(w)$ ifadesine düzgün yakınsar (Brockwell ve Davis 1987).

Y_t zaman serisi $(0, \sigma^2)$ olan bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerden oluştuğu varsayılsın. $I_n(w)$, $-\pi \leq w \leq \pi$ olmak üzere $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ zaman serisinin periodogramı olsun. Bu durumda,

(i) Eğer $0 < w_1 < \cdots < w_m < \pi$ olmak üzere $n \to \infty$ için $(I_n(w_1), \dots, I_n(w_m))'$ rasgele vektörü, birbirinden bağımsız σ^2 ortalamalı üstel dağılan rasgele değişkenlerin vektörüne dağılımda yakınsar.

(ii) Eğer $EY_1^4 = \eta\sigma^4 < \infty$ ve $w_j = \frac{2\pi j}{n} \epsilon\, [0, \pi]$ ise,

$$Var\left(I_n(w_j)\right) = \begin{cases} n^{-1}(\eta - 3)\sigma^4 + 2\sigma^4 & , \quad w_j = 0 \; veya \; \pi \\ n^{-1}(\eta - 3)\sigma^4 + \sigma^4 & , \quad 0 < w_j < \pi \end{cases}$$

$$Cov\left(I_n(w_j), I_n(w_k)\right) = n^{-1}(\eta - 3)\sigma^4 \quad , \quad w_j \neq w_k$$

şeklindedir (Brockwell ve Davis 1987).

Bu kısımda periodogramların istatistiksel özellikleri üzerinde durulmuştur. Çalışmanın amaçları arasında periodogramlardan faydalanarak birim kök araştırması yapılması yer almaktadır. Bundan dolayı bir sonraki bölümde birim köklü serilerle ilgili bilgi verilerek, periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi ve HEGY testi hakkında detaylı incelemeler yapılacaktır.

2.5 Birim Köklü Seriler

Zaman serilerinde istatistiki sonuç çıkarımı açısından serilerin durağan olması oldukça önemlidir. İktisadi serilerin büyük çoğunluğu durağanlık varsayımını sağlamamaktadır. Dolayısıyla serilerde durağanlığının dikkatli bir şekilde incelenmesi ve seriler durağan değilse uygun yöntem belirlenerek durağanlığın sağlanması öncelikli gereklilikler arasındadır.

2.5.1 Birim kök testleri

Zaman serilerinin durağanlığının sınanması için genellikle birim kök test yöntemleri kullanılır. Literatürde birim kök testleriyle ilgili çeşitli araştırmalar yapılmıştır. En yaygın kullanılan birim kök testleri parametrelerin en küçük kareler tahmin edicisinin dağılımına bağlı olarak geliştirilen Dickey-Fuller birim kök testi ile Phillips-Perron birim kök testidir. Phillips-Perron birim kök test istatistiği için Dickey-Fuller istatistiğinin kritik değerleri kullanılır.

2.5.1.1 Dickey-Fuller birim kök testi

Dickey-Fuller birim kök testi D. A. Dickey ve W. A. Fuller tarafından önerilmiştir. Otoregresif modellerde birim kök testinin nasıl yapılacağına ilişkin test yöntemini oluşturmuşlardır. Dickey-Fuller birim kök testleri, zaman serilerinde birim kök araştırmasını sağlayan ilk biçimsel yöntem olarak bilinir.

Birinci dereceden bir otoregresif zaman serisi modeli $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere $Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t \;\; t = 1,2, \dots, n$ şeklinde verilmiş olsun. $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezi altında ρ'nun en küçük kareler tahmin edicisi,

$$\hat{\rho}_n - 1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t Y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1}^2} \tag{2.89}$$

dır. (2.89)'daki eşitlik,

$$\hat{\rho}_n - 1 = \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n} e_t Y_{t-1}}{\frac{1}{n^2}\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1}^2} \tag{2.90}$$

şeklinde yazıldığında,

$$n(\hat{\rho}_n - 1) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t Y_{t-1}}{\frac{1}{n^2}\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1}^2} \tag{2.91}$$

olup, $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezi altında $n(\hat{\rho}_n - 1)$ istatistiğinin dağılımı normal değildir. Ayrıca t türü istatistiklerinin dağılımı da normal değildir. Bu durumda $n(\hat{\rho}_n - 1)$ test istatistiği $H_0: \rho = 1$ hipotezinin sınanması için kullanılabilir. Ayrıca $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezini test etmek için kullanılacak t türü istatistik de,

$$\hat{\tau}_n = \frac{\hat{\rho}_n - 1}{[s^2(\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1}^2)^{-1}]^{1/2}} \tag{2.92}$$

şeklinde verilir. Burada $s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{t=2}^{n} \hat{e}_t^2$ dir. $n(\hat{\rho}_n - 1)$ ve $\hat{\tau}$ test istatistiklerinin dağılımları literatürde Dickey-Fuller dağılımları olarak bilinir (Akdi 2014).

Dickey-Fuller dağılımlarına ilişkin kritik değerler birçok zaman serisi kitabında bulunduğu gibi, Eviews gibi paket programlarda da doğrudan hesaplanmaktadır. Burada serinin beklenen değerinin sıfır olduğu varsayımına göre $n \to \infty$ iken

$$|\rho| < 1 \text{ ise } \sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) \xrightarrow{D} N(0, 1 - \rho^2) \tag{2.93}$$

şeklindedir. Yani $\hat{\rho}_n$ en küçük kareler tahmin edicisinin dağılımları $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezi altında ve $H_1: |\rho| < 1$ alternatif hipotezi altında farklılık göstermektedir.

Ayrıca t-türü istatistiklerinin asimptotik dağılımları yazılabilir. Ancak serinin beklenen değeri sıfır değilse, yani verilen birinci dereceden otoregresif model ya da regresyon modeli,

$$(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + e_t \qquad t = 1,2,\dots,n \tag{2.94}$$

Ya da

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + e_t \quad t = 1,2,\dots,n \tag{2.95}$$

şeklinde verilmiş ise, $H_0: \rho = 1$ hipotezi altında serinin beklenen değeri modelden düşer. Burada $\alpha_0 = \mu(1-\rho)$ ve $\alpha_1 = \rho$ dur. Bu durumda ρ'nun en küçük kareler tahmin edicisi,

$$\hat{\rho}_{n,\mu} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(Y_t - \bar{Y}_{(0)})(Y_{t-1} - \bar{Y}_{(1)})}{\sum_{t=2}^{n}(Y_{t-1} - \bar{Y}_{(1)})^2} \tag{2.96}$$

şeklinde olup, $i = 0,1$ için $\bar{Y}_{(i)} = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} Y_{t-i}$ dir. Serinin birim kök içerip içermediğine karar verebilmek için gerekli olan kritik değerler Fuller (1976)'da mevcuttur. Benzer şekilde t-türü istatistik,

$$\hat{\tau}_{n,\mu} = \frac{\hat{\rho}_{n,\mu} - 1}{[s^2(\sum_{t=2}^{n}(Y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\rho}Y_{t-1})^2)^{-1}]^{1/2}} \tag{2.97}$$

şeklindedir (Akdi 2014).

$Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t \;\; t = 1,2,\dots,n$ modeli ele alınsın. Her iki taraftan da Y_{t-1} çıkartılırsa model $(Y_t - Y_{t-1}) = (\rho - 1)Y_{t-1} + e_t \;\; t = 1,2,\dots,n$ şekline dönüşür. Yani $\nabla Y_t = (\rho - 1)Y_{t-1} + e_t \;\; t = 1,2,\dots,n$'dir. Buradan ∇Y_t'nin Y_{t-1} üzerine regresyonu yapıldığında Y_{t-1}'in katsayısının sıfır olduğunu test etmek için hesaplanan t istatistiği $\hat{\tau}$

olsun. Hesaplanan $\hat{\tau}$ değeri $\hat{\tau}$ tablo değerinden küçük ise $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezi $H_1: |\rho| < 1$ alternatif hipotezine karşı red edilir.

2.5.1.2 Genişletilmiş Dickey-Fuller testi

Durağan olmayan seriler AR bileşeni içeren serilerdir. Yukarıda $AR(1)$ modelinin uygun olduğu serilerin durağanlığının nasıl sınanması gerektiği açıklandı. Bu kısımda ise daha yüksek dereceden AR modellerinde birim kök sınamasının nasıl yapılacağı hakkında bilgi verilecektir.

$e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere p.dereceden otoregresif zaman serisi modeli,

$$(Y_t - \mu) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, (Y_{t-i} - \mu) + e_t \qquad t = 1,2, \dots, n \tag{2.98}$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu model $\mu = 0$ varsayımı altında,

$$\nabla Y_t = (\beta_1 - 1) Y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \beta_i \, \nabla Y_{t-i} + e_t \tag{2.99}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\beta_1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$ ve $\beta_i = -\sum_{i=j}^{p} \alpha_i$, $i = 2,3, \dots, p$ dir. Burada p.dereceden otoregresif zaman serisi,

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + e_t \tag{2.100}$$

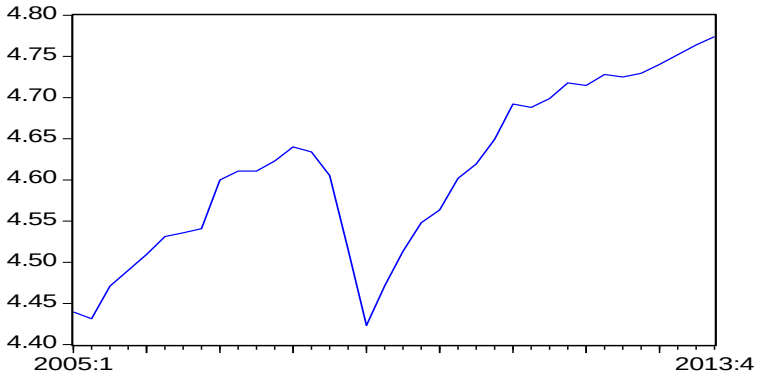
şeklinde verilsin. Bu modele karşılık gelen karekteristik denklem,

$$m^p - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, m^{p-i} = 0 \tag{2.101}$$

şeklinde olup köklerden en az biri mutlak değerce 1 olması için gerek ve yeter koşul $\sum \alpha_i = 1$ olmasıdır. Buna göre serinin birim köklü olup olmadığını sınamak için $H_0: \beta_1 = 1$ yokluk hipotezinin test edilmesi gerekir. Bunun için ∇Y_t'nin Y_{t-1} ve ∇Y_{t-j}'ler üzerine regresyonun yapıldığında, Y_{t-1}'in katsayısının en küçük kareler tahmin edicisinin dağılımı, serinin beklenen değerinin sıfır olup olmadığına ve seride lineer trend olup olmadığı durumlara göre yine Dickey-Fuller dağılımlarından biridir. $H_0: \beta_1 = 1$ yokluk hipotezinin testi için,

$$\hat{\tau} = \frac{(\hat{\beta}_1 - 1)}{S_{\hat{\beta}_1}} \tag{2.102}$$

test istatistiği kullanılır. Kritik değerler Dickey-Fuller testinde kullanılan değerler ile aynıdır (Akdi 2014). Bu yöntem Türkiye'nin mevsim ve takvim etkilerinden arındırılmış sanayi üretim endeksi verilerine uygulabilir. Verilerin periyodu çeyreklik olup, 2005 yılından başlamaktadır. Verilere ilişkin grafik şekil 2.14'te verilmektedir.



Şekil 2.14 Mevsim ve takvim etkilerinden arındırılmış sanayi üretim endeksi (2005:01-2013:04)

Türkiye'nin mevsim ve takvim etkilerinden arındırılmış sanayi üretim endeksi verilerine,

$$(Y_t - \mu) = \alpha(Y_{t-1} - \mu) + e_t \, , t = 1,2, \dots , n \tag{2.103}$$

şeklinde bir modelinin uygun olduğu varsayılsın. Model, $\alpha_0 = \mu(1-\alpha)$ olmak üzere,

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha Y_{t-1} + e_t \, , t = 1,2, \dots , n \qquad (2.104)$$

şeklinde yazılabilir. Stata paket programında ∇Y_t'in Y_{t-1} üzerine regresyonundan elde edilen sonuçlar çizelge 2.5 ve çizelge 2.6'da verilmektedir. Verilerin logaritması alınarak analizler yapılmıştır.

Çizelge 2.5 Regresyon analizi sonuçları

Kaynak	sd	SS	MS	F	Prob>F
Regresyon	1	0.000806116	0.000806116	0.84	0.3655
Hata	33	0.031598666	0.000957535		
Toplam	34	0.032404782	0.000953082		

Çizelge 2.6 Katsayılara ilişkin tahmin değerleri

	Katsayı	Standart hata	t	P > |t|	%95 Güven aralığı	
α	-0.0481961	0.0525279	-0.92	0.366	-0.1550649	0.0586728
α_0	0.2314275	0.2418792	0.96	0.346	-0.2606795	0.7235344

t-türü istatistiğin değeri $\hat{\tau}_{n,\mu} = -0.92$ şeklindedir. %5 anlam düzeyinde,

$$\hat{\tau}_{n,\mu} = -0.92 \; > \; -2.972 = \hat{\tau}_{\mu}(tablo)$$

olduğundan $H_0: \alpha = 1$ yokluk hipotezi red edilemez. Buna göre Türkiye'nin mevsimsel arındırılmış sanayi üretim endeksi serileri birim köklüdür.

Stata paket programında yapılan regresyon analizinde $\hat{\tau}_{n,\mu}$ = -0.92 olarak hesaplanmıştır. Aynı programda Dickey Fuller testi yapıldığında ise test istatistiği $\hat{\tau}_{n,\mu}$ = -0.918 olarak bulunmuştur, analize ilişkin sonuçlar çizelge 2.7'de verilmektedir.

Çizelge 2.7 Dickey-Fuller birim kök testi

	Test istatistiği	%1	%5	%10
Z(t)	-0.918	-3.682	-2.972	-2.618

Regresyon yardımıyla elde edilen $\hat{\tau}_{n,\mu}$ istatistiğinin değeri, programda yer alan Dickey-Fuller testinin yapılması sonucunda elde edilen test istatistiğinin değerine yakındır.

2.5.1.3 Phillips-Perron birim kök testi

Dickey-Fuller birim kök test yöntemi gerek birinci dereceden otoregresif modellerinde gerekse p.dereceden otoregresif modellerinde hata terimlerinin ilişkisiz olması varsayımına dayanır. Yani Dickey-Fuller test yönteminde hata terimleri için $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ varsayımı sağlanmalıdır.

Hata terimlerinin otokorelasyonlu olması halinde, Phillips ve Perron (1988) tarafından Dickey-Fuller test istatistiklerine bir düzeltme faktörü ekleyerek yeni bir birim kök testi önerilmiştir. Ayrıca Dickey-Fuller test yönteminin hata terimlerinin otokorelasyonlu olması durumunda hatalı sonuçlar verebileceği belirtilmiştir.

Birinci dereceden otoregresif model $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + u_t \quad t = 1,2,\dots,n$ şeklinde olsun. Burada $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere u_t hata terimlerinin $u_t = \psi(B)e_t$ şeklinde yazıldığı varsayılsın. Hata terimleri $u_t = \psi(B)e_t$ şeklinde olup, $\psi(B) = 1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \cdots + \beta_q B^q$ olarak verilsin. $\alpha_0 = \mu(1 - \alpha)$ olduğunda, model $Y_t = \alpha_0 + \alpha Y_{t-1} + u_t$ olur. Dickey-Fuller test istatistiklerine bir düzeltme faktörü eklenerek, $H_0: \alpha = 1$ yokluk hipotezi test edilir. Phillips-Perron birim kök test istatistiği,

$$Z_\mu = \left[\sqrt{\frac{\hat{\gamma}(0)}{\hat{\lambda}^2}}\right]\hat{\tau}_\mu - \left\{\frac{\frac{1}{2}\left(\hat{\lambda}^2 - \hat{\gamma}(0)\right)\left(\frac{n s_{\hat{\alpha}}}{S_n}\right)}{\hat{\lambda}}\right\} \tag{2.105}$$

şeklindedir. Formülde yer alan $s_{\hat{\alpha}}$ değeri, $\hat{\alpha}$ nın standart hatasını göstermektedir. Bu istatistiğin asimptotik dağılımı Dickey-Fuller dağılımı olup $H_0: \alpha = 1$ hipotezini test etmek için aynı kritik değerler kullanılır. Burada Y_t'nin Y_{t-1} üzerine regresyonundan elde edilen hata terimleri $\hat{u}_t$ olsun. Hataların hesaplanan otokovaryansları $\hat{\gamma}(h)$ olmak üzere, Z_μ istatistiğindeki $\hat{\lambda}$ terimi,

$$\hat{\lambda}^2 = \hat{\gamma}(0) + 2\sum_{j=1}^{q}[1 - j/(q+1)]\,\hat{\gamma}(j) \tag{2.106}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Y_t'nin Y_{t-1} üzerine regresyonundan elde edilen hata kareler ortalaması $S_n^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2$ dir (Akdi 2014).

TÜİK tarafından yayınlanmakta olan mevsimsel arındırılmış sanayi üretim endeksi verilerinin,

$$(Y_t - \mu) = \alpha(Y_{t-1} - \mu) + e_t\,, t = 1,2,\dots,n \tag{2.107}$$

şeklinde bir modelinin uygun olduğu varsayılsın. Veriler çeyreklik olup, 2005 yılından başlamaktadır. Bu modele ilişkin tahmin sonuçları çizelge 2.8 ve çizelge 2.9'da verilmektedir.

Çizelge 2.8 Regresyon analizi sonuçları

Kaynak	sd	SS	MS	F	Prob>F
Regresyon	1	0.314390372	0.314390372	328.33	0.0000
Hata	33	0.031598666	0.000957535		
Toplam	34	0.345989039	0.010176148		

Çizelge 2.9 Katsayılara ilişkin tahmin değerleri

	Katsayı	Standart hata	t	P > |t|	%95 Güven aralığı	
α	0.9518039	0.0525279	18.12	0.000	0.8449351	1.058673
α_0	0.2314275	0.2418792	0.96	0.346	-0.2606795	0.7235344

Benzer şekilde, ∇Y_t'in Y_{t-1} üzerine regresyonu yapıldığında, katsayılara ilişkin sonuçlar çizelge 2.10'daki şekilde olmaktadır.

Çizelge 2.10 Katsayılara ilişkin tahmin değerleri

	Katsayı	Standart hata	t	P > |t|	%95 Güven aralığı	
α	-0.0481961	0.0525279	-0.92	0.366	-0.1550649	0.0586728
α_0	0.2314275	0.2418792	0.96	0.346	-0.2606795	0.7235344

Phillips-Perron birim kök test yöntemi kullanılarak da $H_0: \alpha = 1$ yokluk hipotezi %5 anlam düzeyinde test edilebilir.

Hesaplanan bazı değerler, $q = 1$ için, $S_n = \sqrt{0.000957535}$ ve $S_{\tilde{\alpha}} = 0.0525279$ olup, artıklar serisine ilişkin otokovaryanslar $\hat{\gamma}(0) \cong 0.00093$ $\hat{\gamma}(1) \cong 0.00038$ olarak gözlenmiştir.

Y_t'nin Y_{t-1} üzerine regresyonundan elde edilen hata terimleri $\hat{u}_t$ olsun. Hataların hesaplanan otokovaryansları ise $\hat{\gamma}(h)$ olmak üzere, Z_μ istatistiğindeki $\hat{\lambda}$ terimi,

$$\hat{\lambda}^2 = \hat{\gamma}(0) + 2\sum_{j=1}^{q}\left[1 - \frac{j}{q+1}\right]\hat{\gamma}(j)$$

$$= \hat{\gamma}(0) + 2[1 - (1/2)]\hat{\gamma}(1)$$

$$= \hat{\gamma}(0) + \hat{\gamma}(1)$$

$$= 0.00093 + 0.00038$$

$$= 0.00131$$

şeklinde hesaplanmıştır. Buradan Phillips-Perron test istatistiğinin değeri,

$$Z_\mu = \left[\sqrt{\frac{\hat{\gamma}(0)}{\hat{\lambda}^2}}\right]\hat{\tau}_\mu - \left\{\frac{\frac{1}{2}\left(\hat{\lambda}^2 - \hat{\gamma}(0)\right)\left(\frac{ns_{\hat{\alpha}}}{S_n}\right)}{\hat{\lambda}}\right\}$$

$$= \left[\sqrt{\frac{0.00093}{0.00131}}\right](-2.972) - \left\{\frac{\frac{1}{2}(0.00131 - 0.00093)\left(\frac{36 \times 0.0525279}{0.030944}\right)}{\sqrt{0.00131}}\right\}$$

$$\cong -2.825$$

dir. Buna göre,

$$Z_\mu = -2.825 > -2.972 = \hat{\tau}_\mu(tablo)$$

olduğundan $H_0: \alpha = 1$ yokluk hipotezi, %5 anlam düzeyinde red edilemez. Yani, Türkiye'nin sanayi üretim endeksi serisinin, Phillips-Perron birim kök test yöntemine göre birim köklü olduğu söylenir. Stata paket programda yapılan Phillips-Perron birim kök testi kritik değerleri aşağıdaki şekildedir. Çizelge 2.11'de görüldüğü gibi Phillips-Perron birim kök testinin kritik değerleri, Dickey-Fuller birim kök testinin kritik değerleriyle aynıdır.

Çizelge 2.11 Phillips-Perron testi kritik değerleri

Anlamlılık düzeyi	% 1	% 5	% 10
Kritik değer	-3.682	-2.972	-2.618

Türkiye'nin sanayi üretim endeksi serisi $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + u_t$ olarak modellendiğinde $\hat{\rho} = 1$ olarak hesaplanmaktadır. Dolayısıyla yapılan Dickey-Fuller ve Phillips-Perron birim kök testi sonuçlarını doğrulamaktadır.

2.5.2 Mevsimsel birim kökün araştırılması

Ekonomik zaman serilerinin büyük bölümünde mevsimsel birim kök ile karşılaşmak muhtemeldir. Mevsimsel birim kökün göz ardı edilmesi, analizlerin güvenilirliğini

büyük ölçüde etkiler. Dolayısıyla zaman serilerinin yapısı incelenirken öncelikle varsa mevsimselliğin belirlenmesi gerekir. Ayrıca, eğer gerekiyorsa mevsimsellikten arındırılmalı veya mevsimsel etkiler dikkate alınarak istatistiki sonuç çıkarımlar yapılmalıdır. Daha önce de bahsedildiği gibi, mevsimsel birim kök varsa bu kökler tekrar eder. Dolayısıyla durağanlığın sağlanması için normal fark alma yerine mevsimsel fark alma işlemi yapılmalıdır. Mevsimsel fark alma işlemi ihmal edildiğinde analizler karışabileceği gibi yanıltıcı istatistiki çıkarımlar elde edilebilir.

Mevsimsel zaman serilerinin durağan olup olmadığını tespit etmek için mevsimsel birim kök testleri kullanılır. Literatürde, mevsimsel birim kök testleri ile ilgili çeşitli yöntemler olmasına rağmen, Hylleberg vd. (1990) tarafından önerilen HEGY testi en pratik mevsimsel birim kök test yöntemidir. Bununla birlikte Dickey, Hasza ve Fuller (1984) tarafından önerilen DHF yöntemi de kullanılmaktadır. Çalışmada HEGY ve periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testleri hakkında bilgi verilerek, sanayi üretim endeksi verileri üzerine çeşitli uygulamalar yapılacaktır.

2.5.2.1 HEGY yöntemi

Hylleberg vd. (1990) tarafından önerilen bu yöntem mevsimsel frekanslarda birim kök araştırması için kullanılmaktadır. HEGY yöntemi (2.108)'de verilen yardımcı regresyon denklemine dayanmaktadır.

$e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere, HEGY yöntemine göre $Y_t = \rho Y_{t-4} + e_t \quad t = 1,2, \dots, n$ şeklindeki $SAR_4(1)$ modeli için mevsimsel birim kök sınaması yapılırken,

$$\varphi(B)Y_{4,t} = \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + \pi_3 Y_{3,t-2} + \pi_4 Y_{3,t-1} + e_t \qquad (2.108)$$

şeklinde verilen yardımcı regresyon modelinden yararlanılır. Buradaki $Y_{1,t}$, $Y_{2,t}$, $Y_{3,t}$ ve $Y_{4,t}$ değişkenleri,

$$
\begin{aligned}
Y_{1,t} &= (1 + B + B^2 + B^3)X_t \\
Y_{2,t} &= -(1 - B + B^2 - B^3)X_t \\
Y_{3,t} &= -(1 - B^2)X_t \\
Y_{4,t} &= (1 - B^4)X_t
\end{aligned}
\tag{2.109}
$$

şeklinde ifade edilir.

HEGY testinin uygulanabilmesi için, kullanılan yardımcı regresyon denklemindeki değişkenler, gecikme operatörü yardımıyla elde edilmektedir. Denklemdeki π_i katsayıları ise mevsimsel köklerin katsayılarını göstermektedir.

Gecikme operatörünün yer aldığı $(1 - B^4)$,

$$
\begin{aligned}
(1 - B^4) &= (1 - B)(1 + B + B^2 + B^3) \\
&= (1 - B)(1 + B)(1 + B^2) \\
&= (1 - B)(1 + B)(1 - iB)(1 + iB)
\end{aligned}
\tag{2.110}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada 1, -1, i ve –i olarak dört tane birim kök vardır. Birim kökler sıfır sıklık, yılda 2 devir ve yılda 1 devir olarak dikkate alınır.

HEGY testine göre mevsimsel birim köklerin frekanslarını saptayabilmek için π_i katsayılarına ilişkin hipotez testleri kullanılır.

$H_0 : \pi_1 = 0$ yokluk hipotezi $H_1 : \pi_1 < 0$ alternatif hipotezine karşı test edilir. H_0 yokluk hipotezi red edilemez ise "seride 0 frekansta birim kök vardır" denir.

$H_0 : \pi_2 = 0$ yokluk hipotezi $H_1 : \pi_2 < 0$ alternatif hipotezine karşı test edilir. H_0 yokluk hipotezi red edilemez ise "seride 1/2 frekansta mevsimsel birim kök vardır" denir.

$H_0 : \pi_3 = \pi_4 = 0$ yokluk hipotezi $H_1 : \pi_3 \neq 0$ ve/veya $H_1 : \pi_4 \neq 0$ alternatif hipotezine karşı test edilir. H_0 yokluk hipotezi red edilemez ise "1/4 ve 3/4 frekanslarda mevsimsel birim kök vardır" denir.

Bu hipotezleri testi için gerekli olan kritik değerler Hylleberg vd. (1990) tarafından oluşturulmuştur.

Mevsimsel birim kök testi uygulanırken modele sabit, trend ve mevsimsel kukla değişkenleri gibi deterministik değişkenler dahil edilerek daha detaylı yardımcı regresyon modelleri kullanılabilir. Modeller aşağıda verilen denklemler şeklinde oluşturulabilir:

Sabit terim ve trendin olduğu model,

$$Y_{4,t} = \alpha_0 + \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + \pi_3 Y_{3,t-2} + \pi_4 Y_{3,t-1} + \delta t + \sum_{i=1}^{k} \beta_i Y_{4,t-i} + e_t \quad (2.111)$$

Sabit terim ve mevsimsel kukla değişkenlerin olduğu model,

$$Y_{4,t} = \alpha_0 + \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + \pi_3 Y_{3,t-2} + \pi_4 Y_{3,t-1} + \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \alpha_3 D_3 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i Y_{4,t-i} + e_t \quad (2.112)$$

Sabit terim, trend ve mevsimsel kukla değişkenlerin olduğu model,

$$Y_{4,t} = \alpha_0 + \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + \pi_3 Y_{3,t-2} + \pi_4 Y_{3,t-1} + \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \alpha_3 D_3 + \delta t + \sum_{i=1}^{k} \beta_i Y_{4,t-i} + e_t \quad (2.113)$$

şeklindedir (Ayvaz 2006).

Türkiye için çeyreklik sanayi üretim endeksi serisine,

$$(Y_t - \mu) = \alpha_4(Y_{t-4} - \mu) + e_t \qquad t = 1,2,3,\dots,n \tag{2.114}$$

modeli önerilmiş olsun.

HEGY yöntemi ile serinin mevsimsel birim köklü olup olmadığı incelenebilir. HEGY yöntemini uygulamak için ilk olarak,

$$\varphi(B)Y_{4,t} = \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + \pi_3 Y_{3,t-2} + \pi_4 Y_{3,t-1} + e_t \tag{2.115}$$

$$t = 1,2,3,\dots,n$$

regresyon modeli dikkate alınır. Burada,

$$\begin{aligned} Y_{1,t} &= (1 + B + B^2 + B^3)X_t \\ Y_{2,t} &= -(1 - B + B^2 - B^3)X_t \\ Y_{3,t} &= -(1 - B^2)X_t \\ Y_{4,t} &= (1 - B^4)X_t \end{aligned} \tag{2.116}$$

şeklindedir.

HEGY yönteminin uygulamasını göstermek amacıyla, Türkiye için 1991:01-2013:04 dönemi arındırılmamış sanayi üretim endeksi verileri ele alınmıştır. Verilerin logaritması alınarak analizler yapılmıştır. Öncelikle yukarıda verilen regresyon denklemini tahmin etmek için aşağıdaki değişkenler hesaplanmıştır. Denklemde verilen değişkenlerin açık hali,

$$\begin{aligned} Y_{1,t-1} &= (1 + B + B^2 + B^3)X_{t-1} &&= X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3} + X_{t-4} \\ Y_{2,t-1} &= -(1 - B + B^2 - B^3)X_{t-1} &&= -X_{t-1} + X_{t-2} - X_{t-3} + X_{t-4} \\ Y_{3,t-1} &= -(1 - B^2)X_{t-1} &&= -X_{t-1} + X_{t-3} \\ Y_{3,t-2} &= -(1 - B^2)X_{t-2} &&= -X_{t-2} + X_{t-4} \\ Y_{4,t} &= (1 - B^4)X_t &&= X_t - X_{t-4} \end{aligned} \tag{2.117}$$

şeklindedir.

Regresyon denklemine ilişkin tahmin sonuçları, Stata programı ile elde edilmiş olup parametrelerin tahminleri ile test istatistiklerinin değerleri, π_1 ve π_2 için çizelge 2.12'de verilmektedir.

Çizelge 2.12 HEGY regresyon denklemine ilişkin tahmin sonuçları

	$\boldsymbol{\pi_1}$	$\boldsymbol{\pi_2}$
Parametre tahmini	0.0007557	-0.3551604
t- istatistiği	1.54	-6.77

Bu değerler, HEGY tablo değerleri (n=100 için) ile karşılaştırılarak birim kök varlığına karar verilir.

$H_0 : \pi_1 = 0$ yokluk hipotezi için, t= 1.54 > -1.97 olup, H_0 red edilemez. Dolayısıyla, seri 0 sıklıkta birim köke sahiptir.

$H_1 : \pi_2 = 0$ yokluk hipotezi için, t= -6.77 < -1.97 H_0 red edilir. Dolayısıyla, seri $1/2$ sıklıkta birim köke sahip değildir.

$H_0 : \pi_3 = \pi_4 = 0$ yokluk hipotezini test etmek için,

$$\varphi(B)Y_{4,t} = \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + \pi_3 Y_{3,t-2} + \pi_4 Y_{3,t-1} + e_t \qquad (2.118)$$

regresyonundan $SSE(full)$ elde edilir. Ayrıca,

$$\varphi(B)Y_{4,t} = \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + e_t \qquad (2.119)$$

$SSE(red)$ elde edilir. Buradan F istatistiği,

$$F = \frac{\frac{SSE(red) - SSE(full)}{2}}{MSE(full)} = \frac{\frac{15.705756 - 0.522408079}{2}}{0.006074513} \cong 1250 \qquad (2.120)$$

$F \cong 1250 > F_{tablo} = 3.12$ olup, H_0 red edilir. Yani, seri (1/4 ve 3/4 sıklıklarında) mevsimsel birim köke sahip değildir.

Yardımcı regresyon modeline trend ve mevsimsel kuklalar eklenerek mevsimsel birim kök araştırması daha detaylı şekilde yapılabilir.

2.5.2.2 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi

Periodogramlar zaman boyutunda serilerin durağanlığının ve verilerde olabilecek gizli periyodikliklerin incelenmesinde kullanılmaktadır. Ayrıca periodogram istatistiğinden zaman serilerinde serinin birim kök içerip içermediğinin tespitinde de faydalanılmaktadır. Bu bağlamda Akdi ve Dickey (1998) periodogram istatistiğinin birim kök testinde kullanılabileceğini göstermişlerdir. Çalışmada birim kök testi için periodogram istatistiğine dayalı test istatistiği geliştirilerek, bu istatistiğin dağılımı bulunmuştur. Ayrıca birim kök testi için kritik değerler de oluşturulmuştur. Akdi ve Dickey (1999) ise mevsimsel birim kök incelemelerinde periodogram tabanlı birim kök testinin kullanılabileceğini belirtmişlerdir.

Periodogram istatistiğinin dağılımı

Periodogram istatistiği, Y_t serisi $t = 1,2, \dots, n$ olmak üzere,

$$I_n(w_k) = \frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2) \tag{2.121}$$

şeklindedir. Burada a_k ve b_k Fourier katsayıları,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \, cos(w_k t) \\ b_k &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \, sin(w_k t) \end{aligned} \tag{2.122}$$

biçimindedir (Akdi 1995). Burada $\sum_{t=1}^{n} \cos(w_k t) = \sum_{t=1}^{n} sin(w_k t) = 0$ olduğundan $a_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y}_n)cos(w_k t)$ ve $b_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y}_n)\, sin(w_k t)$ şeklinde de yazılabilir. Dolayısıyla yöntem ortalamaya göre değişmezdir.

Zaman serisi modeli, $e_t \sim iid\ (0, \sigma^2)$ olmak üzere,

$$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + e_t\,, \qquad t = 1,2,3,\dots,n \tag{2.123}$$

şeklinde olduğu varsayılsın.

$|\rho| < 1$ olduğunda normalleştirilmiş periodogram istatistiği asimptotik olarak 2 serbestlik dereceli ki-kare dağılır. Yani,

$$\frac{I_n(w_k)}{f(w_k)} \xrightarrow{D} \chi_2^2 \qquad n \to \infty \tag{2.124}$$

şeklinde olur. Burada,

$$f(w_k) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma^2}{1 + \rho^2 - 2\rho cos(w_k)} \tag{2.125}$$

olarak alınır (Akdi 1995).

$H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezi altında Akdi ve Dickey (1998) normalleştirilmiş periodogram istatistiğinin bir serbestlik dereceli bağımsız ki-kare rasgele değişkenlerinin toplamı olarak dağıldığını göstermişlerdir. Başka bir ifadeyle birinci dereceden otoregresif zaman serileri için, Z_1 ve Z_2 bağımsız standart normal dağılıma sahip rasgele değişkenleri göstermek üzere,

$$\frac{I_n(w_k)}{f(w_k)} \sim Z_1^2 + 3Z_2^2, \quad f(w_k) = \frac{\sigma^2}{2(1-\cos(w_k))} \tag{2.126}$$

şeklindedir. $H_0: |\rho| < 1$ hipotezi altında normalleştirilmiş periodogram istatistiğinin dağılımı asimptotik 2 serbestlik dereceli ki-kare olmasına rağmen $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezi altında normalleştirilmiş periodogramın dağılımı doğrudan elde edilmiştir. Aynı zamanda $Z \sim N(0,1)$ olduğunda Z^2 değişkeni serbestlik derecesi 1 olan ki-kare dağılımına sahip olduğundan asimptotik dağılım için,

$$\frac{I_n(w_k)}{f(w_k)} \sim \chi_1^2 + 3\chi_1^2, \quad f(w_k) = \frac{\sigma^2}{2(1-\cos(w_k))} \tag{2.127}$$

gösterimi de kullanılabilir (Akdi ve Dickey 1999).

Hata terimleri $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olduğunda ise aynı sonuçlar asimptotik olarak geçerlidir. Normalleştirilmiş periodogram istatistiğinin $(T_n(w_k))$ dağılımı $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezi altında ve $H_1: |\rho| < 1$ alternatif hipotezi altında mevcut olduğundan $T_n(w_k)$ istatistiği serinin birim köklü olup olmadığının sınanmasında kullanılabilir. Yani periodogram tabanlı birim kök test istatistiği,

$$T_n(w_k) = \frac{I_n(w_k)}{f(w_k)} = \frac{2(1-\cos(w_k))}{\hat{\sigma}^2} I_n(w_k) \tag{2.128}$$

şeklinde ifade edilir. Test istatistiği için üretilen kritik değerlerle $H_0: \rho = 1$ (seride birim kök vardır) yokluk hipotezi test edilebilir (Akdi ve Dickey 1998).

Periodogram tabanlı birim kök test yönteminin ortalamaya göre değişmez olmasının yanında test için analitik güç fonksiyonu da mevcuttur. Testin güç fonksiyonu,

$$\beta_n(\rho) = P(H_0\ red \mid H_1)$$

$$= P_\rho(T_n < c \mid |\rho| < 1)$$

$$= P_\rho\left(\frac{2(1-\cos(w_k))}{\sigma^2} I_n(w_k) < c\right)$$

$$= P_\rho\left(\frac{2(1-\cos(w_k))}{1+\rho^2-2\rho\cos(w_k)} \frac{1+\rho^2-2\rho cos(w_k)}{\sigma^2} I_n(w_k) < c\right)$$

$$= P_\rho\left(\frac{(1+\rho^2-2\rho\cos(w_k))}{\sigma^2} I_n(w_k) < c\frac{1+\rho^2-2\rho\cos(w_k)}{2(1-\cos(w_k))}\right)$$

$$= P_\rho\left(\chi_2^2 < k_n(\rho)\right)$$

$$= \int_0^{k_n(\rho)} e^{-x} d_x$$

$$= 1 - e^{-k_n(\rho)} \qquad (2.129)$$

şeklindedir. Burada $k_n(\rho)$ ifadesi ise,

$$k_n(\rho) = c\left(\frac{1+\rho^2-2\rho\cos(w_k)}{2(1-\cos(w_k))}\right) \qquad (2.130)$$

biçiminde yazılır (Akdi 1995, Akdi ve Dickey 1998). Bu iki sonuç birim kök sınamasında, periodogram tabanlı yöntemin diğerlerine göre daha dayanıklı olduğu söylenebilir.

Mevsimsel zaman serileri için periodogram istatistiğinin dağılımı

Mevsimsel zaman serilerinde periodogram istatistiğinin dağılımını elde etmek için $e_t \sim iid(0,\sigma^2)$ olmak üzere $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-d} - \mu) + e_t\ ,\ t = 1,2,3,\dots,n$ modelini ele alalım. $\rho = 1$ ve d=4 için model $Y_t = Y_{t-4} + e_t$ şekline dönüşür. Yani $\rho = 1$ için serinin beklenen değeri μ modelden düşer. Buna göre sonlu rasgele değişkenlerin dizisi $\{Y_{i,t}\}_{t=1}^{n}$ ve $i = 1,2,3,4$ için bağımsız aynı dağılıma sahip hataların toplamı,

$$
\begin{aligned}
Y_{1,t} &= e_1 + e_5 + \cdots + e_{dt-3} \\
Y_{2,t} &= e_2 + e_6 + \cdots + e_{dt-2} \\
Y_{3,t} &= e_3 + e_7 + \cdots + e_{dt-1} \\
Y_{4,t} &= e_4 + e_8 + \cdots + e_{dt}
\end{aligned}
\tag{2.131}
$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla $Y_{1,t}$, $Y_{2,t}$, $Y_{3,t}$ ve $Y_{4,t}$ bağımsız rasgele değişkenlerdir. Bundan dolayı, bu değişkenlerle ilgili olan Fourier katsayıları da bağımsızdır. Genel olarak $i = 1,2,3,\ldots,d$ için,

$$
Y_{i,t} = \sum_{j=0}^{t-1} e_{i+dj} = e_i + e_{i+d} + e_{i+2d} + \cdots + e_{i+d(t-1)} \tag{2.132}
$$

olarak yazılabilir. Fourier katsayıları a_k ve b_k,

$$
a_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y}_n)\, cos(w_k t) \quad ve \quad b_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y}_n)\, sin(w_k t) \tag{2.133}
$$

bağımsız rasgele değişkenlerin toplamı olarak yazılabilir. Yani,

$$
\begin{aligned}
a_k &= a_{1,k} + a_{2,k} + \cdots + a_{d,k} \\
b_k &= b_{1,k} + b_{2,k} + \cdots + b_{d,k}
\end{aligned}
\tag{2.134}
$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$
\begin{aligned}
a_{i,k} &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_{i,dt-i+1}\, cos(w_k(dt - i + 1)) \\
b_{i,k} &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_{i,dt-i+1}\, sin(w_k(dt - i + 1))
\end{aligned}
\tag{2.135}
$$

şeklindedir. Ayrıca $\forall\ i \neq j$ için $a_{i,k}, a_{j,k}, b_{i,k}, b_{j,j}$ ve $a_{i,k}, b_{j,k}$ bağımsız değişkenlerdir. $E(a_{i,k}) = E(b_{i,k}) = 0$ ve $E(a_k) = E(b_k) = 0$ şeklinde olup $Var(a_k) = E(a_k^2)$ ve $Var(b_k) = E(b_k^2)$ dir. Beklenen değerlerin sıfır olduğu açıktır. Varyanslar ise,

$$Var(a_{i,k}) = \frac{4}{n^2}\sigma^2 \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} min(dt - i + 1, ds - i + 1)\, cos(w_k dt - i + 1) cos(w_k ds - i + 1)$$

$$= 4n\sigma^2 \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} min\left(\frac{dt - i + 1}{n}, \frac{ds - i + 1}{n}\right) cos\left(2\pi k \frac{dt - i + 1}{n}\right) cos\left(2\pi k \frac{ds - i + 1}{n}\right)\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu toplamların elde edilmesi biraz zordur. Bu nedenle bu toplamlar aşağıda belirtildiği gibi integraller ile ifade edilebilir. $a_{i,k}$ ve $b_{i,k}$ tahmin edicilerinin varyansları için,

$$\frac{1}{n} Var(a_{i,k}) \to 4\sigma^2 d \int_0^1 \int_0^1 min(x, y)\, cos(2\pi k dx)\, cos(2\pi k dy)\, dxdy = \frac{\sigma^2}{2\pi^2 k^2 d}$$

$$\frac{1}{n} Var(b_{i,k}) \to 4\sigma^2 d \int_0^1 \int_0^1 min(x, y)\, sin(2\pi k dx)\, sin(2\pi k dy)\, dxdy = \frac{3\sigma^2}{2\pi^2 k^2 d}$$

$$\frac{1}{n} Cov(a_{i,k}, b_{i,k}) \to 0$$

ifadeleri yazılabilir. Burada $n \to \infty$ iken $a_k^2 + b_k^2$ istatistiğinin asimptotik dağılımı katsayıların dağılımı,

$$\frac{1}{n}(a_k^2 + b_k^2) \xrightarrow{D} \frac{\sigma^2}{2\pi^2 k^2}(Z_1^2 + 3Z_2^2) \tag{2.136}$$

şeklinde yazılabilir. Burada Z_1 ile Z_2 standart normal dağılıma sahip değişkenler ve sabit k için, aşağıda belirtilen basit aritmetik işlemlerden sonra normalleştirilmiş periodogram istatistiğinin asimptotik dağılımı,

$$\frac{2\pi^2 k^2}{n\sigma^2}(a_k^2 + b_k^2) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2$$

$$\frac{2\pi^2 k^2}{n\sigma^2}\frac{2}{n}\frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2$$

$$\frac{4\pi^2 k^2}{n^2}\frac{1}{\sigma^2}\frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2$$

$$\left(\frac{2\pi k}{n}\right)^2 \frac{1}{\sigma^2} I_n(w_k) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2$$

$$\frac{w_k^2}{\sigma^2} I_n(w_k) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2$$

$$\frac{2(1 - cos(w_k))}{\sigma^2} I_n(w_k) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2 \qquad \left(n \to \infty \text{ iken } \frac{2(1 - cos(w_k))}{w_k^2} \to 1\right)$$

biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\frac{I_n(w_k)}{f(w_k)} \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2 \qquad n \to \infty \tag{2.137}$$

şeklindedir (Akdi ve Dickey 1999).

Birim köklü otoregresif seriler için elde edilen normalleştirilmiş periodogramların asimptotik dağılımları, birim köklü mevsimsel zaman serileri için de aynıdır. Dolayısıyla $H_0: \rho = 1$ (mevsimsel seride birim kök vardır) hipotezi $T_n(w_k)$ test istatistiği yardımıyla test edilebilir. İstatistiğin hesaplanan değeri ilgili tablo değerinden küçük ise yokluk hipotezi red edilir (Akdi ve Dickey 1999).

Mevsimsel zaman serisi $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-4} + e_t$ olarak dikkate alınsın. Burada, $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezi testi için, Akdi ve Dickey (1999) tarafından önerilen test istatistiğini,

$$T_{4,n}(w_k) = \frac{2(1 - \cos(4w_k))}{\hat{\sigma}_n^2} I_n(w_k) \tag{2.138}$$

şeklinde tanımlansın. Bu istatistiğin dağılımı da (2.137)'de verilen asimptotik dağılım ile aynıdır. Bu nedenle periodogram tabanlı yöntemin avantajları burada da geçerlidir. Örneğin testin güç fonksiyonu analitik olarak elde edilebilir. Bilindiği gibi, testin gücü alternatif hipotez altında H_0 yokluk hipotezinin red edilme olasılığıdır. Yani, $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-4} - \mu) + e_t$ şeklinde verilen $SAR_4(1)$ modelinin birim köklü olup olmadığını test etmek için önerilen testin gücü,

$$\begin{aligned}
\beta_n(\rho) &= P_\rho(H_0\ red) = P_\rho(T_n < c \mid |\rho| < 1) \\
&= P_\rho\left(\frac{2(1-cos(4w_k))}{\sigma^2} I_n(w_k) < c_\alpha(n)\right) \\
&= P_\rho\left(\frac{2(1-cos(4w_k))}{2\pi(1+\rho^2-2\rho\,cos(w_k))} \frac{2\pi(1+\rho^2-2\rho\,cos(w_k))}{\sigma^2} I_n(w_k) < c_\alpha(n)\right) \\
&= P_\rho\left(\frac{2(1-cos(4w_k))}{2\pi(1+\rho^2-2\rho\,cos(w_k))} \frac{I_n(w_k)}{f(w_k)} < c_\alpha(n)\right) \\
&= P_\rho\left(\frac{I_n(w_k)}{f(w_k)} < c_\alpha(n) \frac{2\pi(1+\rho^2-2\rho\,cos(w_k))}{2(1-cos(4w_k))}\right) \\
&= P_\rho\left(\chi_2^2 < k_n(\rho)\right) = \int_0^{k_n(\rho)} e^{-x} d_x = 1 - e^{-k_n(\rho)}
\end{aligned} \tag{2.139}$$

şeklinde elde edilir. Burada $k_n(\rho)$ ifadesi ise,

$$k_n(\rho) = c_\alpha(n)\left(\frac{2\pi(1+\rho^2-2\rho\,cos(w_k))}{2(1-\cos(4w_k))}\right) \tag{2.140}$$

dır. Görüldüğü gibi burada da önerilen test için analitik güç fonksiyonu mevcuttur. Ayrıca,

$$lim_{n\to\infty}\beta_n(\rho) = 1 \text{ ve } lim_{\rho\to 1}\beta_n(\rho) = \alpha \tag{2.141}$$

biçimindedir (Tekin ve Akdi 2014).

HEGY mevsimsel birim kök testlerini uygulamak için öncelikle verilere uygun modelin belirlenmesi gerekir. Aslında periodogramlar modele göre değişmediğinden periodogram tabanlı yöntem kullanabilmek için model belirlemeye gerek yoktur. Yani, yöntem modele göre değişmezdir. Uygun modeli belirlemek için çeşitli model belirleme kriterleri vardır. Bazı model belirleme kriterlerine ilişkin bilgiler Bölüm 2.6'da verilmektedir.

2.6 Model Belirleme Kriterleri

Zaman serilerinde verilerin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının grafikleri ile model ve dereceleri hakkında sezgisel bazı bilgilere ulaşılabilir. Ayrıca uygun modeli belirlerken çeşitli kriterlerden faydalanılır.

Literatürde Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Schwartz Bayesian Kriteri (SBC) en yaygın kullanılan istatistiklerdir. Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Schwartz Bayesian Kriteri (SBC) istatistiklerinin değerlerine göre verilere uygun bir model uydurulmaya çalışılır. En küçük AIC veya SBC istatistiği değerini veren p ve q değerleri en uygun model dereceleridir. Diğer model belirleme kriterlerinden bazıları ise düzeltilmiş Akaike bilgi kriterinin (AIC_c), sonlu hata kestirim kriteri FPE, Hannan ve Quinn kriteri (HQ) şeklinde sıralanabilir.

2.6.1 Akaike Bilgi Kriteri (AIC)

Akaike Bilgi Kriteri Akaike (1973) tarafından önerilmiştir. AIC istatistiği,

$$AIC(p,q) = -2log\left(\mathrm{L}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n\right)\right) + 2\mathrm{k} \tag{2.142}$$

şeklinde ifade edilebilir. Formülde yer alan p ve q model derecelerini göstermekte iken $k = p + q$ şeklindedir. Burada $\boldsymbol{\theta}$ vektörü; $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mu)'$ biçimindedir. AIC istatistiğinin formülündeki $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$, $\boldsymbol{\theta}$ nın en çok olabilirlik tahmin edicisidir. AIC istatistiğinin tahmin

değerini en küçük yapan p ve q değerleri uygun model dereceleri olarak alınır. Literatürde AIC istatistiğinin değişik gösterimleri bulunmaktadır. AIC istatistiği,

$$AIC(p,q) = n\, ln(\hat{\sigma}_n^2) + 2k \tag{2.143}$$

şeklinde de ifade edilebilir (Akdi 2014).

2.6.2 Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICc)

Akaike bilgi kriteri güçlü varsayımlara dayanır. Takeuchi (1976) bu varsayımların biraz daha esnek olabileceğini ortaya atmıştır. Sugiura (1978) tarafından sadece lineer regresyon için AIC_c kriterini önermiştir. Hurvich & Tsai (1989) tarafından bu konu araştırılmış ve AIC_c kriterinin uygulanabileceği durumlar genişletilmiştir. Brockwell ve Davis (1991), Burnham ve Anderson (2004) ve Cavanaugh (1997) çalışmalarında bu kriterin farklı türlerini incelenmiştir.

Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri AIC_c,

$$AIC_c = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1} \tag{2.144}$$

şeklinde ifade edilir. Burnham ve Anderson (2002) tarafından n küçük veya k büyük ise AIC yerine AIC_c kullanılması uygun görülmektedir. n yeterince büyük olduğunda AIC_c istatistiği AIC istatistiğine yakınsayacağından, büyük n'ler için AIC_c genellikle göz ardı edilmesi önerilir (Burnham ve Anderson 2004).

2.6.3 Schwartz Bayesian Bilgi Kriteri (SBC)

Schwartz Bayesian Bilgi Kriteri Schwartz (1978) tarafından önerilmiştir. Schwartz Bayesian Bilgi Kriteri,

$$SBC(p,q) = n\ ln(\hat{\sigma}_n^2) + k\ ln(n) \tag{2.145}$$

şeklinde tanımlanmıştır. AIC ve SBC istatistikleri ile model belirlenirken genellikle benzer sonuçlar elde edilir. Ancak durağan olmayan zaman serilerinde model belirleme kriteri olarak SBC istatistiğinin kullanılması önerilmektedir (Akdi 2014).

2.6.4 Sonlu Hata Kestirim Kriteri (FPE)

Otoregresif modeller için kullanılan sonlu hata kestirim kriteri FPE Akaike (1969) tarafından önerilmiştir. FPE istatistiği,

$$FPE(p) = \left(\frac{n+p}{n-p}\right)\hat{\sigma}_n^2 \tag{2.146}$$

şeklindedir. Burada $\hat{\sigma}_n^2$ ifadesi σ^2 parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisidir. FPE istatistiğinin değerini en küçük yapan p değeri otoregresif modelin derecesi olarak alınır (Cavanaugh 2012).

3. UYGULAMALAR

3.1 Simülasyon Çalışması: Mevsimsel Birim Kök Testlerinin Karşılaştırılması

Çalışmada HEGY ve periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testlerinin karşılaştırılması yapılmıştır. Karşılaştırmanın yapılabilmesi için testlere ilişkin güç değerleri simülasyon programları aracılığıyla tablolaştırılmıştır. SAS programı yardımıyla birim kök testlerinin gücünü hesaplayan programlar geliştirilmiştir. Bu kısımda tablolaştırılan güç değerleri karşılaştırılarak, birim kök testlerinin Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi verileri üzerine uygulamaları yapılmıştır.

3.1.1 HEGY yöntemi

Mevsimsel zaman serilerinde frekanslarda mevsimsel birim olup olmadığını tespit etmek için sıklıkla HEGY yöntemine başvurulmaktadır. HEGY yöntemi, Hylleberg vd. (1990) tarafından önerilen ve literatürde HEGY testi olarak bilinen mevsimsel birim kök araştırmalarında kullanılan bir metottur. HEGY testi Stata, Eviews gibi istatistik paket programlarında rahatlıkla uygulanabilmesinin yanında SAS gibi programlarda kod yazılarak da uygulanabilmektedir.

HEGY testiyle ilgili literatürde yapılan çalışmalar genellikle mevsimsel birim kökün tespiti üzerinedir. Literatürde HEGY testinin gücüne değinilen çalışmalardan biri Otero (1998)'dir. Otero (1998)'de HEGY testi farklı modellere dayanan veri üretme süreçleriyle incelenmiştir. Çalışmada verilen tabloda birim kök bölümünde π_1 birim kök katsayısına ilişkin hipotez testinin güç değerleri yer alırken, mevsimsel birim kök bölümünde ise π_2 ile π_3 ve π_4 mevsimsel birim kök katsayısına ilişkin hipotez testinin güç değerleri yer almaktadır. Tabloda mevsimsel birim köklere ilişkin testin gücü $H_0 : \pi_2 \geq 0$ ve $H_0 : \pi_3, \pi_4 = 0$ hipotez testlerinin red edilme sayısı dikkate alınarak hesaplanmıştır. Özet olarak güç değerlerinin tablosu birim kök ve mevsimsel birim kök başlığı altında iki bölümde toplulaştırılmıştır. 10000 tekrar uygulanarak güç değerleri oluşturulmuştur.

Çalışmamızda ise π_1, π_2 ile π_3 ve π_4 katsayıları için güç değerleri 50000 tekrar uygulanarak oluşturulmuştur. HEGY testinin küçük örneklemler için yeterince güçlü olmadığı gözlendiğinden periodogram tabanlı mevsimsel birim kök test yönteminde durum incelenmeye çalışılmıştır. Bundan dolayı periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi için kritik değerler üretilmiş, daha sonra testin güç değerleri hesaplanmıştır. Bu kısımda öncelikle HEGY testine ilişkin güç değerlerinin oluşturma süreci hakkında bilgi verilecek, ileri ki kısımlarda ise HEGY testinin periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi ile hangi noktada karşılaştırılabilir olduğu, testlerin güçlü ve zayıf yönleri tartışılacaktır.

Bu çalışmada HEGY testinin ampirik gücü SAS programında kod yazılarak hesaplanmıştır. Yapılan simülasyon çalışmasında n örneklem hacimli 50000 tekrarlı Monte-Carlo simülasyonu ile veri üretilmiştir. Veri sıklığı çeyreklik olarak varsayıldığından periyot 4 olarak alınmıştır. Programdaki veri üretim sürecinde kullanılan başlangıç değerleri $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = 0$ ve $Y_4 = 0$'dır. $Z \sim N(0,1)$ olmak üzere $Y_t = \rho Y_4 + Z$ eşitliği kullanılarak, mevsimsel zaman serisinin ilk değeri elde edilmiştir. Sonraki n tane değer üretilirken ise $Y_4 = Y_3$, $Y_3 = Y_2$, $Y_2 = Y_1$ ve $Y_1 = Y$ eşitlikleri dikkate alınmıştır. Üretilen verilerle $Y_{4,t}$ ve $Y_{1,t-1}, Y_{2,t-1}, Y_{3,t-1}, Y_{3,t-2}$ değişkenleri hesaplanmıştır. HEGY testini uygulamak için belirtilen değişkenler, mevsimsel kukla ve trend içeren model dikkate alınmıştır. HEGY testi mevsimsel katsayılara ilişkin hipotez testleri yardımıyla uygulandığından, mevsimsel katsayılara ilişkin hipotezler için test istatistiklerinin değerleri hesaplanmıştır. Hesaplanan test istatistiklerinin değerleri Hylleberg vd. (1990) çalışmasında verilen tablo değerleriyle karşılaştırılarak red edilen hipotez sayısı belirlenmiştir. Son aşamada ise red sayısı tekrar sayısına bölünerek HEGY testinin ampirik gücü elde edilmiştir.

Testin gücü için geliştirilen SAS simülasyon programının kontrolünü sağlamak amacıyla aynı programda üretilen kritik değerler ile Hylleberg vd. (1990) çalışmasındaki tablo değerleri karşılaştırılmıştır. Yani SAS simülasyon programı ile $\alpha = 0.05$ iken $n = 100$ ve $n = 200$ için kritik değerler üretilmiştir. Bu değerler

Hylleberg vd. (1990)'daki $\alpha = 0.05$ iken $n = 100$ ve $n = 200$ için karşılık gelen kritik değerlere yakın olup olmadığı araştırılmıştır.

Hylleberg vd. (1990) çalışmasında 24000 tekrar uygulanarak tablo değerleri elde edilmiştir. Mevsimsel kukla ve trendin dahil edildiği durumda $\alpha = 0.05$ ve $n = 100$ için π_1 parametresine ait kritik değer -3.53 olarak verilmiştir (π_2 parametresine ait kritik değer -2.94, π_3 ve π_4 parametrelerine ait kritik değer 6.60'dır). SAS programıyla 50000 tekrar uygulanarak kritik değerler tekrar oluşturulduğunda, $\alpha = 0.05$ ve $n = 100$ için π_1 parametresine ait kritik değer -3.33 olarak hesaplanmıştır (π_2 parametresine ait kritik değer -2.78, π_3 ve π_4 parametrelerine ait kritik değer 6.41'dir).

Aynı durum $n = 200$ için de incelenmiştir. Hylleberg vd. (1990) çalışmasında π_1 parametresine ait kritik değer -3.49 olarak verilmektedir (π_2 parametresine ait kritik değer -2.91, π_3 ve π_4 parametrelerine ait kritik değer 6.57'dir). SAS programında ise $\alpha = 0.05$ ve $n = 200$ için π_1 parametresine ait kritik değer -3.36 olarak hesaplanmıştır (π_2 parametresine ait kritik değer -2.82, π_3 ve π_4 parametrelerine ait kritik değer ise 6.47'dir).

Kritik değerlere ilişkin karşılaştırma çizelge 3.1'de verilmiştir. Çizelge incelendiğinde, Hylleberg vd. (1990) kritik değerleri ile SAS'da yeniden oluşturulan kritik değerlerin birbirine yakın olduğu gözlenmektedir. Böylelikle geliştirilen SAS simülasyon programının doğru sonuç verdiği kontrol edilmiştir.

Çizelge 3.1 Kritik değerlerin karşılaştırılması

		π_1	π_2	π_3 ve π_4
n=100	HEGY (1990)	-3.53	-2.94	6.60
	Tahmin edilen	-3.33	-2.78	6.41
n=200	HEGY (1990)	-3.49	-2.91	6.57
	Tahmin edilen	-3.36	-2.82	6.47

Çalışmada elde edilen kritik değerler Hylleberg vd. (1990) tarafından hesaplatılan kritik değerlere oldukça yakın çıkmıştır. Bundan dolayı çalışmamızda Hylleberg vd. (1990)'daki kritik değer tabloları dikkate alınmıştır.

HEGY testi için geliştirilen simulasyon programı faklı ρ ve n değerleri için tasarlanmıştır. Programda veri üretim süreci ilgili ρ değeri dikkate alınarak çalıştırılmıştır. Ayrıca $\alpha = 0.05$ için n değerlerine karşılık gelen Hylleberg vd. (1990)'daki tablo değerleri de ilgili durum için güncellenmiştir. Bu programın çalıştırılması sonucunda elde edilen mevsimsel birim kök katsayılarına ilişkin güç değerleri çizelge 3.2-3.4'te verilmiştir.

Çizelge 3.2'de π_1 mevsimsel birim kök katsayısına ilişkin hipotez testinin güç değerleri yer almaktadır. Yani $H_0 : \pi_1 = 0$ (seride 0 frekansta birim kök vardır) yokluk hipotezi $H_1 : \pi_1 < 0$ alternatif hipotezine karşı test edilmiştir. Bu test için hesaplanan t istatistikleri ile Hylleberg vd. (1990)'daki tablo değerleri karşılaştırılmıştır. Toplam red sayısı tekrar sayısına bölünerek çizelge 3.2'deki değerler oluşturulmuştur.

Çizelge 3.2 HEGY mevsimsel birim kök testinin gücü (π_1, α=0.05)

π_1	ρ=0.50	ρ=0.55	ρ=0.60	ρ=0.65	ρ=0.70	ρ=0.75	ρ=0.80	ρ=0.85	ρ=0.90	ρ=0.95	ρ=0.99
n=40	0.0280	0.0257	0.0238	0.0222	0.0207	0.0190	0.0180	0.0169	0.0163	0.0155	0.0146
n=60	0.0482	0.0423	0.0375	0.0329	0.0289	0.0263	0.0239	0.0215	0.0198	0.0180	0.0165
n=80	0.1206	0.1015	0.0857	0.0723	0.0618	0.0532	0.0456	0.0394	0.0345	0.0307	0.0287
n=100	0.1856	0.1535	0.1262	0.1030	0.0829	0.0672	0.0549	0.0455	0.0388	0.0330	0.0297
n=140	0.3710	0.3039	0.2421	0.1891	0.1443	0.1074	0.0791	0.0591	0.0448	0.0354	0.0323
n=200	0.7122	0.6172	0.5100	0.4033	0.3011	0.2138	0.1458	0.0961	0.0628	0.0436	0.0362
n=500	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9807	0.9192	0.7553	0.4864	0.2267	0.0817	0.0415

Çizelge 3.2 incelendiğinde örneklem hacmi arttıkça testin gücünün arttığı ancak ρ değeri arttıkça beklenildiği gibi testin gücünün azaldığı ortaya çıkmaktadır. Özellikle örneklem hacmi 40 olduğunda testin gücünün oldukça az olduğu dikkat çekmektedir. Bu durum HEGY testinin küçük örneklemler için başarısız olabileceği şüphesini uyandırmaktadır. Bundan dolayı π_2 ile π_3 ve π_4 mevsimsel birim kök katsayıları için de

güç değerleri hesaplatılmış, küçük örneklemler için testin gücü incelenmiştir. Sonuçlar çizelge 3.3 ve çizelge 3.4'te verilmektedir.

Çizelge 3.3'te π_2 mevsimsel birim kök katsayısına ilişkin hipotez testinin güç değerleri yer almaktadır. Yani, $H_0 : \pi_2 = 0$ (seride 1/2 frekansta mevsimsel birim kök vardır) yokluk hipotezi $H_1 : \pi_2 < 0$ alternatif hipotezine karşı test edilmiştir. Elde edilen t istatistiklerinin değerleri Hylleberg vd. (1990)'daki tablo değerleri ile karşılaştırılarak red sayıları tespit edilmiştir. Toplam red sayısı hesaplatılıp, tekrar sayısına bölünerek π_2 mevsimsel birim kök katsayısına ilişkin hipotez testinin güç değerleri oluşturulmuştur.

Çizelge 3.3 HEGY mevsimsel birim kök testinin gücü (π_2, α=0.05)

π_2	ρ=0.50	ρ=0.55	ρ=0.60	ρ=0.65	ρ=0.70	ρ=0.75	ρ=0.80	ρ=0.85	ρ=0.90	ρ=0.95	ρ=0.99
n=40	0.0515	0.0459	0.0406	0.0363	0.0323	0.0290	0.0265	0.0245	0.0227	0.0205	0.0186
n=60	0.1011	0.0856	0.0727	0.0611	0.0506	0.0423	0.0359	0.0311	0.0273	0.0241	0.0213
n=80	0.2339	0.1963	0.1630	0.1333	0.1076	0.0866	0.0691	0.0551	0.0443	0.0371	0.0321
n=100	0.3547	0.2958	0.2426	0.1948	0.1534	0.1177	0.0903	0.0681	0.0523	0.0403	0.0346
n=140	0.6308	0.5424	0.4524	0.3657	0.2821	0.2088	0.1472	0.0994	0.0662	0.0468	0.0390
n=200	0.9152	0.8563	0.7757	0.6673	0.5373	0.4037	0.2807	0.1748	0.1041	0.0599	0.0429
n=500	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9904	0.9422	0.7615	0.4247	0.1434	0.0512

Çizelge 3.3'te π_2 mevsimsel birim kök katsayısına ilişkin güç değerlerinde de benzer durum söz konusudur. Örneğin ρ=0.50 için testin gücü incelendiğinde $n = 40$ için 0.0515, $n = 100$ için 0.3547 iken $n = 500$ olduğunda güç 1'e ulaşmıştır. Dolayısıyla HEGY testinin küçük örneklemler için yeterince güçlü olmadığı söylenebilir.

Çizelge 3.4'te ise π_3 ve π_4 mevsimsel birim kök katsayılarına ilişkin hipotez testinin güç değerleri yer almaktadır. $H_0 : \pi_3 = \pi_4 = 0$ (1/4 ve 3/4 frekanslarda mevsimsel birim kök vardır) yokluk hipotezi $H_1 : \pi_3 \neq 0$ ve/veya $H_1 : \pi_4 \neq 0$ alternatif hipotezine karşı F-testi ile test edilmiştir. Hesaplanan test istatistiği değerleri tablo değerleri ile karşılaştırılarak toplam red sayısı oluşturulmuştur. Daha sonra toplam red sayısı tekrar sayısına bölünerek π_3 ve π_4 mevsimsel birim kök katsayılarına ilişkin hipotez testinin güç değerleri hesaplanmıştır.

Çizelge 3.4 HEGY mevsimsel birim kök testinin gücü (π_3 ve π_4, α=0.05)

π_3 ve π_4	ρ=0.50	ρ=0.55	ρ=0.60	ρ=0.65	ρ=0.70	ρ=0.75	ρ=0.80	ρ=0.85	ρ=0.90	ρ=0.95	ρ=0.99
n=40	0.1279	0.1133	0.0996	0.0880	0.0779	0.0687	0.0613	0.0549	0.0494	0.0434	0.0403
n=60	0.2684	0.2281	0.1926	0.1600	0.1319	0.1079	0.0878	0.0723	0.0601	0.0485	0.0428
n=80	0.4559	0.3872	0.3194	0.2563	0.2017	0.1543	0.1176	0.0895	0.0697	0.0540	0.0451
n=100	0.6529	0.5673	0.4758	0.3857	0.3017	0.2248	0.1629	0.1164	0.0826	0.0595	0.0466
n=140	0.9161	0.8601	0.7777	0.6700	0.5405	0.4029	0.2788	0.1806	0.1117	0.0698	0.0492
n=200	0.9975	0.9914	0.9762	0.9376	0.8558	0.7177	0.5279	0.3332	0.1779	0.0894	0.0533
n=500	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9993	0.9777	0.7546	0.2643	0.0687

Çizelge 3.4'te yer alan güç değerlerinde gözlenen durum çizelge 3.2 ve çizelge 3.3'teki güç değerleri ile benzerlik göstermektedir. Elde edilen bulgular küçük örneklem hacimleri için HEGY testinin başarısız olduğu görüşünü desteklemektedir.

Ayrıca çizelgelerde verilen güç değerleri incelendiğinde, örneklem hacmi artarken testin gücünün arttığı, ρ değeri artarken ise testin gücünün azaldığı hususunu da doğrulamaktadır.

Çizelge 3.2-3.4'te güç değerleri $\rho = 0.50$'den $\rho = 0.99$'a kadar tablolaştırılmıştır. Benzer şekilde $\rho = 1$ için güç değerleri araştırılabilir, bu durumda güç değerlerinin anlamlılık düzeylerine yaklaşması beklenir. Sözü edilen duruma ilişkin sonuçları elde edebilmek için SAS simülasyon programı kullanılmıştır.

Veri üretim sürecinde $\rho = 1$ olarak alındığında, $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ ve n değerleri için tablo değerleri güncellenerek program çalıştırıldığında anlamlılık düzeylerine ilişkin sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar çizelge 3.5-3.7'de verilmiştir.

Çizelge 3.5'te π_1 mevsimsel birim kök katsayısına ilişkin anlamlılık düzeyleri yer almaktadır.

Çizelge 3.5 HEGY testi anlamlılık düzeyleri (π_1)

$\boldsymbol{\pi_1}$	**n=40**	**n=60**	**n=80**	**n=100**	**n=140**	**n=200**	**n=500**
$\boldsymbol{\alpha = 0.01}$	0.0024	0.0015	0.0053	0.0060	0.0049	0.0064	0.0078
$\boldsymbol{\alpha = 0.05}$	0.0141	0.0158	0.0280	0.0294	0.0326	0.0354	0.0387
$\boldsymbol{\alpha = 0.10}$	0.0330	0.0404	0.0635	0.0650	0.0714	0.0774	0.0852

Çizelge 3.6'da π_2 mevsimsel birim kök katsayısına ilişkin anlamlılık düzeyleri verilmektedir.

Çizelge 3.6 HEGY testi anlamlılık düzeyleri (π_2)

$\boldsymbol{\pi_2}$	**n=40**	**n=60**	**n=80**	**n=100**	**n=140**	**n=200**	**n=500**
$\boldsymbol{\alpha = 0.01}$	0.0026	0.0025	0.0045	0.0043	0.0054	0.0064	0.0082
$\boldsymbol{\alpha = 0.05}$	0.0183	0.0210	0.0319	0.0329	0.0365	0.0396	0.0431
$\boldsymbol{\alpha = 0.10}$	0.0428	0.0515	0.0690	0.0720	0.0811	0.0835	0.0899

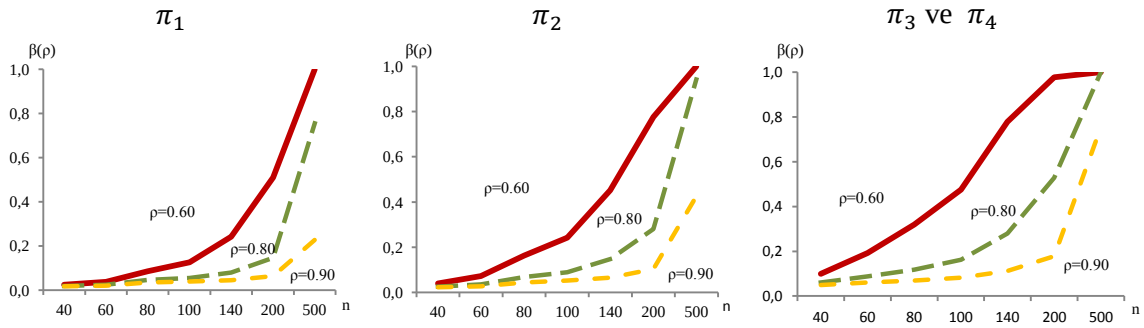
Çizelge 3.7'de ise π_3 ve π_4 mevsimsel birim kök katsayılarına ilişkin anlamlılık düzeyleri için hesaplatılan değerler bulunmaktadır.

Çizelge 3.7 HEGY testi anlamlılık düzeyleri (π_3 ve π_4)

$\boldsymbol{\pi_3}$ **ve** $\boldsymbol{\pi_4}$	**n=40**	**n=60**	**n=80**	**n=100**	**n=140**	**n=200**	**n=500**
$\boldsymbol{\alpha = 0.01}$	0.0081	0.0073	0.0099	0.0096	0.0090	0.0082	0.0088
$\boldsymbol{\alpha = 0.05}$	0.0387	0.0421	0.0442	0.0438	0.0458	0.0466	0.0507
$\boldsymbol{\alpha = 0.10}$	0.0804	0.0903	0.0887	0.0912	0.0968	0.0944	0.1009

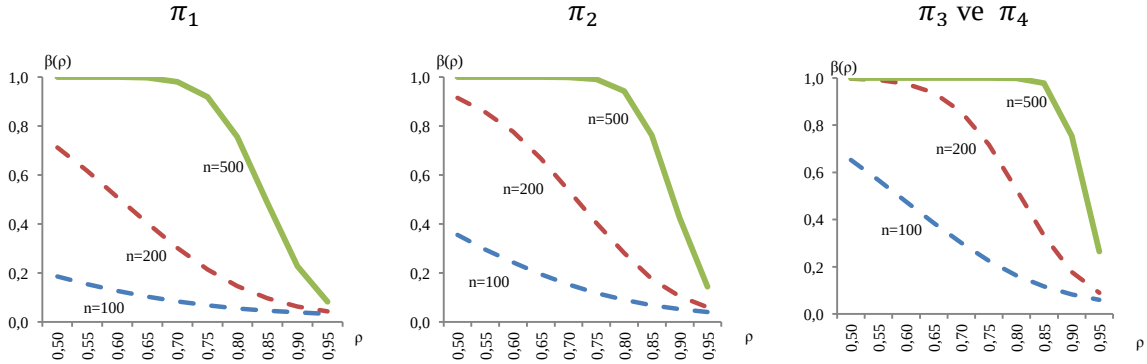
Çizelgelerde verilen güç değerlerinin görsel yorumu için grafikler verilmiştir. Grafiklerde farklı örneklem hacimleri ve ρ katsayıları için HEGY testinin güç değerleri kullanılmıştır. Böylelikle HEGY testinin gücünün örneklem hacimlerine ve ρ katsayılarına göre hareketi daha net gözlenmektedir.

Şekil 3.1'de $\rho = 0.60, 0.80, 0.90$ katsayıları ve farklı örneklem hacimleri için testin gücüne ilişkin grafikler yer almaktadır. Grafikler hipotez testlerinde yer alan mevsimsel birim kök katsayıları için verilmiştir.



Şekil 3.1 HEGY testinin gücü (ρ=0.60, 0.80, 0.90)

Şekil 3.1'de yer alan güç grafikleri incelendiğinde, örneklem hacmi arttıkça testin gücünün arttığı gözlenmektedir. Ancak ρ katsayısı büyüdükçe artış hızının daha az olduğu görülmektedir. Daha önce çizelgelerde bahsedilen küçük örneklemler için HEGY testinin gücünün düşük olması durumu grafiklerden de görülmektedir. Şekil 3.2'de ise HEGY testine ait farklı ρ katsayıları ve $n = 100, 200, 500$ için güç değerlerinin grafikleri yer almaktadır. Grafikler incelendiğinde, ρ katsayı arttıkça testin gücü beklenildiği gibi azalmaktadır. Ancak örneklem hacmi küçüldükçe azalış hızının daha az olduğu görülmektedir.



Şekil 3.2 HEGY testinin gücü (n=100, 200, 500)

3.1.2 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi

Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi için Monte-Carlo simülasyonu yardımıyla tablo kritik değerleri hesaplanmıştır. SAS paket programında yapılan

simülasyon çalışmasında 50000 tekrar kullanılmıştır. Örneklem hacmi n değeri değiştirilerek, kritik değerler çeşitli anlamlılık düzeyleri için oluşturulmuştur. Seride mevsimsel birim kök vardır şeklindeki yokluk hipotezi $T_{4,n}(w_k) < c_\alpha(n)$ ise α anlamlılık düzeyinde red edilir. Aksi halde α anlamlılık düzeyinde seride mevsimsel birim kökün mevcut olduğu söylenebilir (Tekin ve Akdi 2014).

HEGY testinin gücüne ilişkin simülasyon programındaki veri üretim sürecinin aynısı periodogram mevsimsel birim kök testinin kritik değerlerini ve gücünü hesaplamak için geliştirilen programda da kullanılmıştır. SAS programındaki veri üretim süreci bölümünde başlangıç değerleri $Y_1 = 0,\ Y_2 = 0,\ Y_3 = 0$ ve $Y_4 = 0$ olarak alınmıştır. $Z \sim N(0,1)$ olmak üzere, $Y_t = \rho Y_4 + Z$ eşitliği kullanılarak mevsimsel zaman serisinin ilk değeri elde edilmiştir. Sonraki n tane değer $Y_4 = Y_3,\ Y_3 = Y_2,\ Y_2 = Y_1$ ve $Y_1 = Y$ eşitlikleri yardımıyla hesaplatılmıştır. Sonuçta 50000 tekrarlı n uzunluğunda mevsimsel zaman serisi üretilmiştir. Eşitlik (2.138)'de verilen serinin mevsimsel birim içerip içermediğini sınayan test istatistiği kullanılarak kritik değerler oluşturulmuştur. Çizelge 3.8'de (2.138)'deki şekilde modifiye edilen mevsimsel birim kök araştırması için kullanılan test istatistiğinde k=1,2,3,4 alınarak hesaplatılan kritik değerler yer almaktadır.

Çizelge 3.8 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi kritik değerleri

	k=1			**k=2**			**k=3**			**k=4**		
	α=0.01	**α=0.05**	**α=0.10**	**α=0.01**	**α=0.05**	**α=0.10**	**α=0.01**	**α=0.05**	**α=0.10**	**α=0.01**	**α=0.05**	**α=0.10**
n=40	0.0356	0.1856	0.3791	0.1287	0.6715	1.3716	0.2438	1.2721	2.5984	0.3369	1.7579	3.5909
n=60	0.0388	0.1832	0.3720	0.1483	0.7009	1.4236	0.3097	1.4638	2.9730	0.4951	2.3399	4.7523
n=80	0.0382	0.1952	0.3930	0.1491	0.7615	1.5337	0.3218	1.6436	3.3103	0.5393	2.7552	5.5490
n=100	0.0337	0.1842	0.3847	0.1327	0.7253	1.5146	0.2908	1.5892	3.3187	0.4981	2.7217	5.6836
n=120	0.0354	0.1800	0.3822	0.1399	0.7122	1.5120	0.3090	1.5734	3.3400	0.5353	2.7258	5.7864
n=140	0.0341	0.1838	0.3780	0.1353	0.7291	1.4997	0.3004	1.6186	3.3292	0.5241	2.8236	5.8075
n=160	0.0370	0.1858	0.3816	0.1471	0.7385	1.5170	0.3276	1.6447	3.3782	0.5740	2.8818	5.9194
n=180	0.0344	0.1785	0.3753	0.1371	0.7105	1.4941	0.3060	1.5856	3.3344	0.5378	2.7868	5.8605
n=200	0.0342	0.1773	0.3716	0.1362	0.7063	1.4806	0.3044	1.5787	3.3094	0.5362	2.7808	5.8292
n=500	0.0366	0.1805	0.3758	0.1463	0.7217	1.5021	0.3288	1.6222	3.3763	0.5837	2.8797	5.9934

Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin güç fonksiyonu $k_n(\rho) = c_\alpha(n)\left(\frac{2\pi(1+\rho^2-2\rho\, cos(w_k))}{2(1-\cos(4w_k))}\right)$ olmak üzere, $\beta_n(\rho) = 1 - e^{-k_n(\rho)}$ şeklinde elde edilmişti.

Testin gücünün analitik ifade dikkate alınarak, güç fonksiyonunun farklı ρ ve n için aldığı değerler SAS programıyla hesaplatılmıştır. k=1 durumu için SAS programı aracılığıyla elde edilen güç değerleri çizelge 3.9'da verilmektedir.

Çizelge 3.9 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin gücü (k=1, α=0.05)

k=1	**ρ=0.50**	**ρ=0.55**	**ρ=0.60**	**ρ=0.65**	**ρ=0.70**	**ρ=0.75**	**ρ=0.80**	**ρ=0.85**	**ρ=0.90**	**ρ=0.95**	**ρ=0.99**
n=40	0.5510	0.4829	0.4135	0.3448	0.2792	0.2190	0.1666	0.1242	0.0935	0.0760	0.0720
n=60	0.8174	0.7504	0.6700	0.5780	0.4780	0.3754	0.2772	0.1908	0.1238	0.0823	0.0703
n=80	0.9580	0.9242	0.8713	0.7950	0.6932	0.5687	0.4304	0.2935	0.1770	0.0994	0.0748
n=100	0.9904	0.9770	0.9498	0.9001	0.8189	0.7006	0.5484	0.3789	0.2209	0.1087	0.0712
n=140	0.9999	0.9993	0.9970	0.9883	0.9625	0.8997	0.7757	0.5810	0.3458	0.1466	0.0725
n=200	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9885	0.9439	0.8076	0.5365	0.2156	0.0732
n=500	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9895	0.6958	0.1087

Çizelge 3.9'da yer alan güç değerlerine göre, $|\rho| < 1$ için periodogram birim kök testinin gücünün HEGY testinin gücüne göre daha iyi olduğu söylenebilir.

Çizelge 3.2'de verilen HEGY testi güç değerleri $\rho = 0.50$ iken $n = 40$ için 0.0280, $n = 100$ için 0.1856, $n = 200$ için 0.7122 olarak bulunmuştu. Periodogram birim kök yöntemi için güç değerleri $\rho = 0.50$ iken $n = 40$ için 0.5510, $n = 100$ için 0.9904, $n = 200$ için 1.000 olup, bu değerler HEGY yöntemine göre elde edilen değerlerden daha yüksektir. Bu bağlamda $\rho = 0.50$ için iki testi karşılaştırdığımızda periodogram testinin gücünün HEGY testine göre anlamlı düzeyde fazla olduğu göze çarpmaktadır. Periodogram testinin gücünün 1'e ulaşması HEGY testinin gücünün 1'e ulaşmasına göre daha hızlıdır.

Çizelge 3.10 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin gücü (k=2, α=0.05)

k=2	**ρ=0.50**	**ρ=0.55**	**ρ=0.60**	**ρ=0.65**	**ρ=0.70**	**ρ=0.75**	**ρ=0.80**	**ρ=0.85**	**ρ=0.90**	**ρ=0.95**	**ρ=0.99**
n=40	0.5985	0.5428	0.4872	0.4335	0.3837	0.3396	0.3032	0.2758	0.2588	0.2529	0.2563
n=60	0.8362	0.7786	0.7104	0.6337	0.5518	0.4696	0.3928	0.3277	0.2799	0.2540	0.2507
n=80	0.9626	0.9332	0.8880	0.8236	0.7390	0.6373	0.5266	0.4196	0.3316	0.2770	0.2641
n=100	0.9914	0.9796	0.9559	0.9133	0.8445	0.7457	0.6206	0.4839	0.3596	0.2753	0.2513
n=140	0.9999	0.9994	0.9973	0.9898	0.9678	0.9148	0.8114	0.6515	0.4618	0.3055	0.2517
n=200	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9986	0.9902	0.9526	0.8390	0.6160	0.3569	0.2465
n=500	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9913	0.7515	0.2780

Çizelge 3.10'da k=2 için güç değerleri yer almaktadır. Bezer şekilde k=3 için üretilen güç değerleri ise çizelge 3.11'de tablolaştırılmıştır.

Çizelge 3.11 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin gücü (k=3, α=0.05)

k=3	**ρ=0.50**	**ρ=0.55**	**ρ=0.60**	**ρ=0.65**	**ρ=0.70**	**ρ=0.75**	**ρ=0.80**	**ρ=0.85**	**ρ=0.90**	**ρ=0.95**	**ρ=0.99**
n=40	0.6658	0.6263	0.5884	0.5536	0.5232	0.4984	0.4803	0.4697	0.4671	0.4726	0.4827
n=60	0.8633	0.8184	0.7668	0.7103	0.6518	0.5953	0.5450	0.5052	0.4795	0.4704	0.4757
n=80	0.9691	0.9459	0.9110	0.8625	0.8005	0.7280	0.6518	0.5811	0.5268	0.4979	0.4967
n=100	0.9928	0.9833	0.9645	0.9315	0.8793	0.8062	0.7160	0.6206	0.5377	0.4862	0.4769
n=140	0.9999	0.9995	0.9978	0.9920	0.9750	0.9350	0.8587	0.7436	0.6111	0.5071	0.4766
n=200	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9989	0.9924	0.9641	0.8802	0.7193	0.5380	0.4662
n=500	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9937	0.8225	0.4917

k=4 için güç değerleri ise çizelge 3.12'de verilmiştir.

Çizelge 3.12 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin gücü (k=4, α=0.05)

k=4	**ρ=0.50**	**ρ=0.55**	**ρ=0.60**	**ρ=0.65**	**ρ=0.70**	**ρ=0.75**	**ρ=0.80**	**ρ=0.85**	**ρ=0.90**	**ρ=0.95**	**ρ=0.99**
n=40	0.7398	0.7162	0.6952	0.6776	0.6641	0.6554	0.6518	0.6535	0.6604	0.6722	0.6849
n=60	0.8935	0.8620	0.8272	0.7906	0.7545	0.7217	0.6948	0.6763	0.6679	0.6704	0.6802
n=80	0.9764	0.9597	0.9354	0.9029	0.8627	0.8178	0.7728	0.7340	0.7074	0.6977	0.7033
n=100	0.9944	0.9873	0.9738	0.9507	0.9153	0.8673	0.8104	0.7530	0.7065	0.6820	0.6826
n=140	0.9999	0.9996	0.9984	0.9942	0.9824	0.9555	0.9056	0.8330	0.7530	0.6948	0.6823
n=200	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9948	0.9757	0.9208	0.8189	0.7091	0.6704
n=500	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9960	0.8892	0.6890

Çizelgelerdeki güç değerleri incelendiğinde, periodogram tabanlı birim kök testi için örneklem hacmi arttığında testin gücünün arttığı ancak ρ'nun değeri arttıkça testin gücünün azaldığı gözlenmektedir. Daha önceki bölümde HEGY testine ilişkin çizelgelerde de bu durumun varlığından bahsedilmişti.

$\rho = 1$ için testin gücünün ilgili anlamlılık düzeyine yakınsaması beklenmektedir. $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ anlamlılık düzeylerinde farklı örneklem hacimleri için sonuçlar çizelge 3.13-16'da verilmektedir.

Çizelge 3.13 Periodogram mevsimsel birim kök testi anlamlılık düzeyleri (k=1)

k=1	**n=40**	**n=60**	**n=80**	**n=100**	**n=140**	**n=200**	**n=500**
α=0.01	0.0143	0.0153	0.0150	0.0132	0.0133	0.0134	0.0143
α=0.05	0.0724	0.0703	0.0743	0.0701	0.0698	0.0673	0.0684
α=0.10	0.1423	0.1377	0.1440	0.1409	0.1383	0.1359	0.1372

Çizelge 3.14 Periodogram mevsimsel birim kök testi anlamlılık düzeyleri (k=2)

k=2	**n=40**	**n=60**	**n=80**	**n=100**	**n=140**	**n=200**	**n=500**
α=0.01	0.0557	0.0597	0.0586	0.0518	0.0523	0.0523	0.0559
α=0.05	0.2583	0.2524	0.2654	0.2521	0.2512	0.2433	0.2470
α=0.10	0.4569	0.4461	0.4627	0.4548	0.4484	0.4425	0.4459

Çizelge 3.15 Periodogram mevsimsel birim kök testi anlamlılık düzeyleri (k=3)

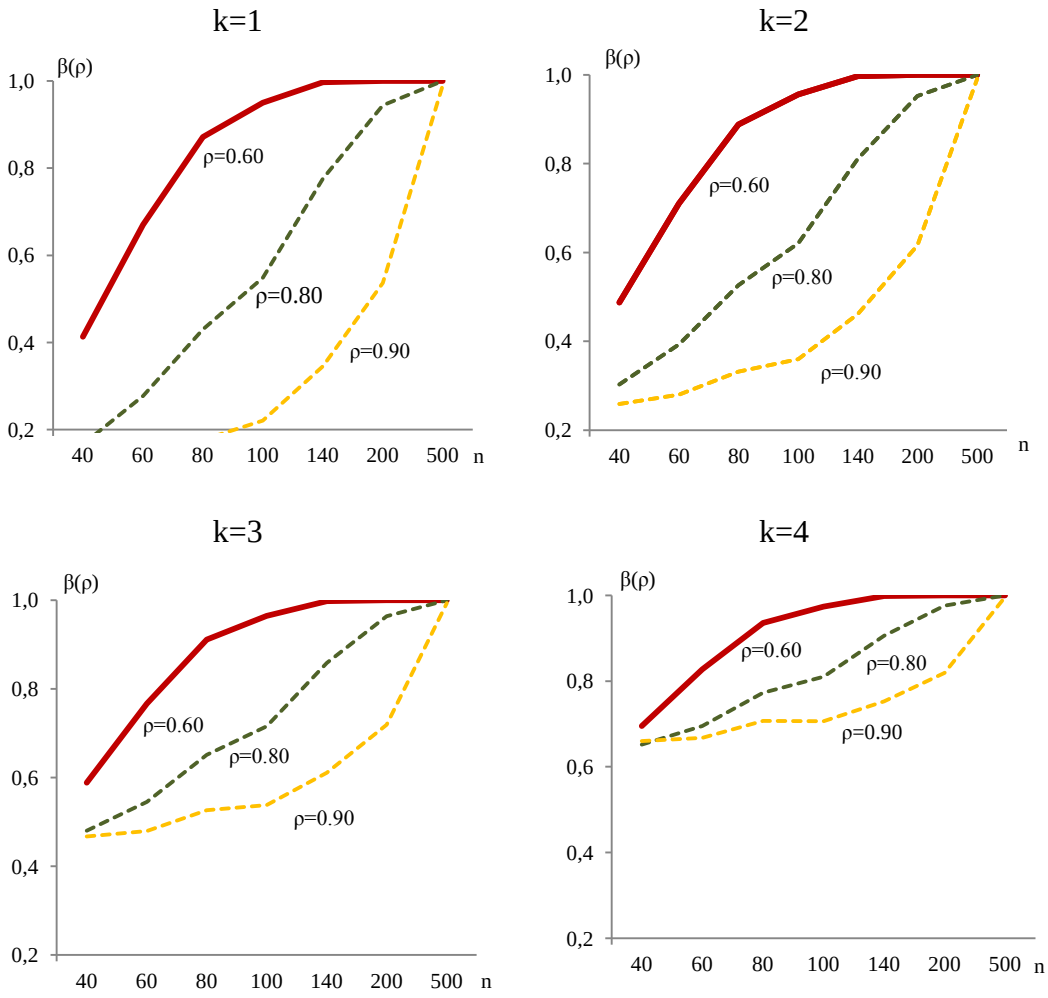
k=3	**n=40**	**n=60**	**n=80**	**n=100**	**n=140**	**n=200**	**n=500**
α=0.01	0.1198	0.1288	0.1267	0.1126	0.1137	0.1139	0.1213
α=0.05	0.4860	0.4783	0.4995	0.4793	0.4781	0.4658	0.4717
α=0.10	0.7432	0.7337	0.7520	0.7440	0.7375	0.7313	0.7351

Çizelge 3.16 Periodogram mevsimsel birim kök testi anlamlılık düzeyleri (k=4)

k=4	**n=40**	**n=60**	**n=80**	**n=100**	**n=140**	**n=200**	**n=500**
α=0.01	0.2003	0.2161	0.2134	0.1909	0.1929	0.1933	0.2054
α=0.05	0.6884	0.6836	0.7066	0.6857	0.6848	0.6717	0.6784
α=0.10	0.9076	0.9034	0.9154	0.9108	0.9070	0.9032	0.9057

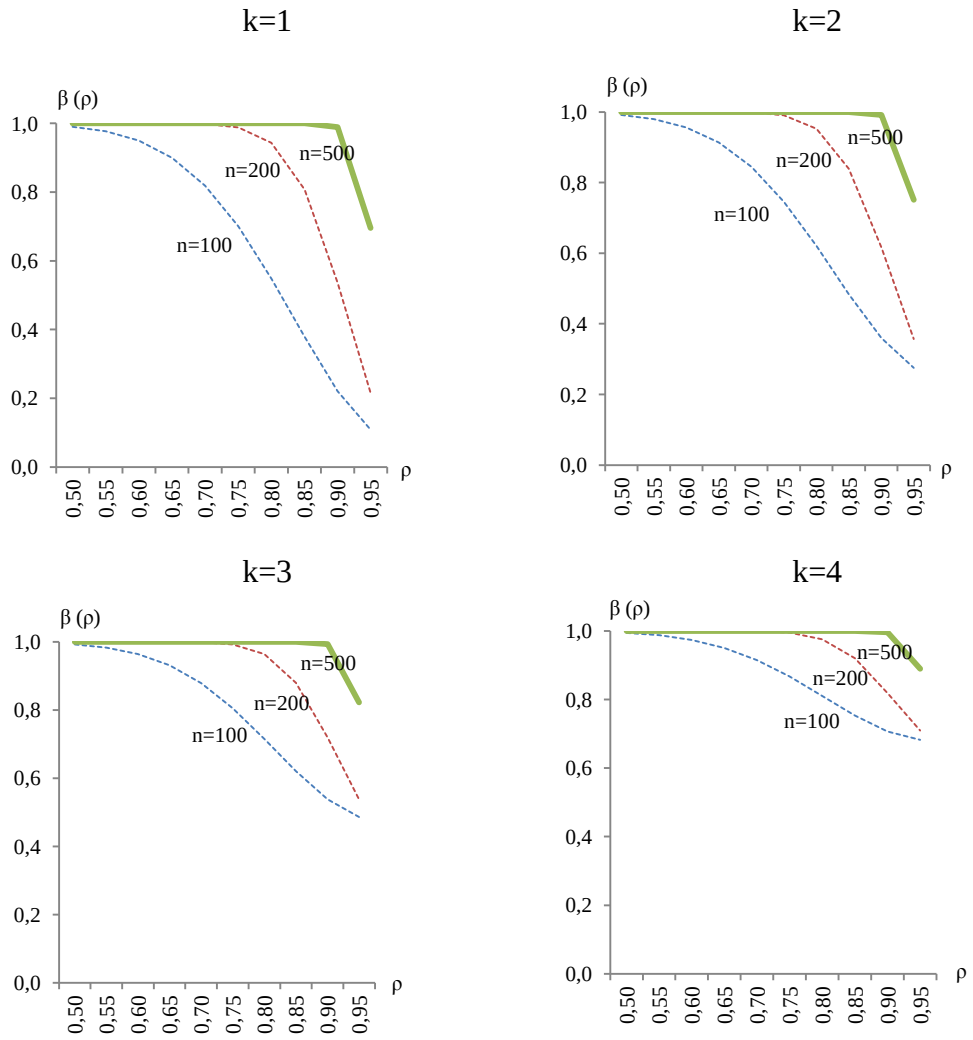
Anlamlılık düzeylerine ilişkin hesaplamalar k=2, k=3 ve k=4 için de yapılmıştır. Bu durumlarda anlamlık düzeylerinde çok oynaklık olduğu görülmüştür. k=1 için anlamlılık düzeyleri tahminlerinin diğerlerine göre daha yakın olduğu görülmektedir. Anlamlılık düzeylerine ilişkin yorumları daha net yapabilmek için grafiklerden faydalanılabilir.

Testin gücü k=1,2,3,4 için hesaplatılarak, k değerlerine ve örneklem hacimlerine göre güç grafikleri şekil 3.3'te, ρ parametresine göre güç grafikleri ise şekil 3.4'te verilmektedir. Şekil 3.3'teki grafikler incelendiğinde örneklem hacmi arttıkça periodogram mevsimsel birim kök testinin gücünün arttığı görülmektedir.



Şekil 3.3 Periodogram mevsimsel birim kök testinin gücü (ρ=0.60, 0.80, 0.90)

Şekil 3.4'te yer alan grafikler incelendiğinde, ρ değeri arttıkça testin gücünün azaldığı görülmektedir.

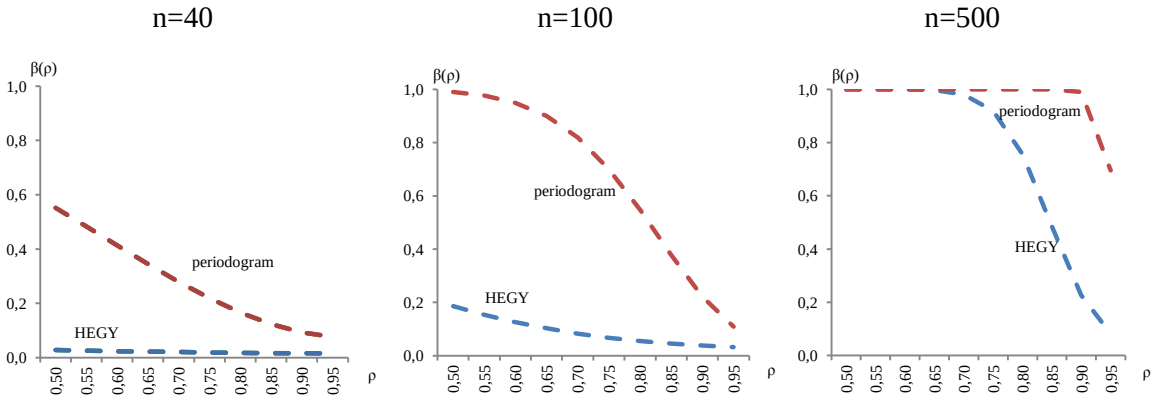


Şekil 3.4 Periodogram mevsimsel birim kök testinin gücü (n=100, 200, 500)

3.1.3 HEGY ve Periodogram mevsimsel birim kök testlerinin karşılaştırılması

HEGY ve periodogram mevsimsel birim kök testlerinin güçlerinin karşılaştırması grafiklerle net şekilde yapılabilmektedir. Bu karşılaştırma için şekil 3.5 ve şekil 3.6'da verilen grafikler kullanılabilir.

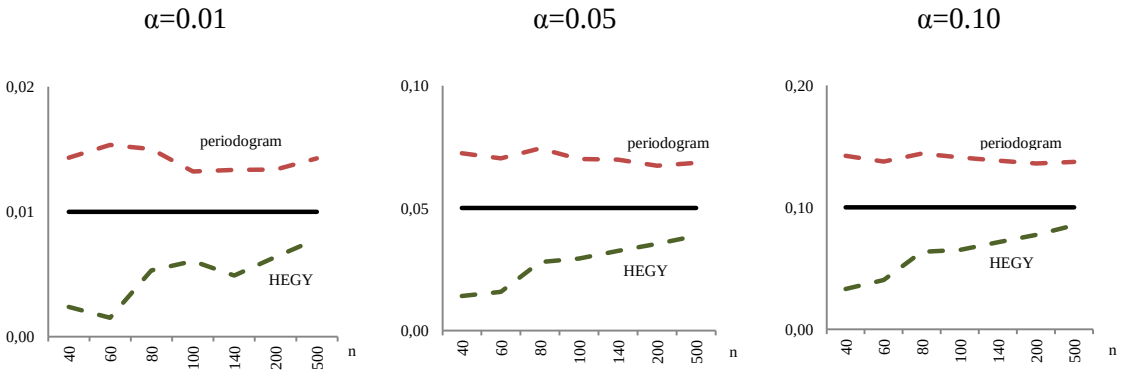
Şekil 3.5'te $n = 40, 100, 500$ örneklem hacimleri için farklı ρ değerlerine karşılık gelen güç değerlerinin grafikleri verilmektedir.



Şekil 3.5 HEGY ve periodogram testlerinin gücünün karşılaştırılması

Şekil 3.5'te verilen grafikler incelendiğinde, $|\rho| < 1$ iken periodogram mevsimsel birim kök testinin HEGY testine göre daha güçlü olduğu söylenebilir. Küçük örneklem hacimlerinde olduğu gibi büyük örneklem hacimlerinde de periodogram mevsimsel birim kök testinin daha güçlü olduğu görülmektedir.

Şekil 3.6'da HEGY ve periodogram testlerinin anlamlılık düzeyi detayında grafikleri verilmektedir.



Şekil 3.6 Anlamlılık düzeylerinde HEGY ve periodogram testleri

Şekil 3.6'da verilen grafikler $\rho = 1$ için çizdirilmiş olup, iki testen hangisinin anlamlılık düzeyine daha hızlı yakınsadığı görülmektedir. Grafikler incelendiğinde örneklem

hacmi büyüdükçe HEGY testinin anlamlılık düzeyine daha hızlı yaklaştığı söylenebilir. Ayrıca anlamlılık düzeylerine HEGY testi alttan yakınsarken, periodogram testi üstten yakınsamaktadır.

3.2 Türkiye ve Avrupa Birliği Sanayi Üretim Endeksi Üzerine Uygulamalar

Türkiye sanayi üretim endeksi, TÜİK[1] tarafından aylık periyotlarla arındırılmamış, takvim etkisinden arındırılmış, mevsim ve takvim etkisinden arındırılmış olarak yayınlanmaktadır. Endeksler 2010 temel yıllı NACE Rev.2 faaliyet sınıflamasına göre hesaplanmaktadır. Endekslerin kapsamında NACE Rev.2 faaliyet sınıflamasının Madencilik ve Taşocakçılığı (B), İmalat (C) ile Elektrik, Gaz, Buhar ve İklimlendirme Üretimi ve Dağıtımı (D) sektörleri yer almaktadır (Anonim 2015).

Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi ise Avrupa İstatistik Ofisi (Eurostat) tarafından Avrupa Birliği'ne üye 28 ülkenin sanayi üretim endeksleri toplulaştırılarak elde edilmektedir. Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi de aylık periyotlarla arındırılmamış, takvim etkisinden arındırılmış, mevsim ve takvim etkisinden arındırılmış olarak yayınlanmaktadır.

Veriler TÜİK ve Avrupa İstatistik Ofisi'ne ait internet sayfalarından elde edilmiştir. 1991:01-2013:04 dönemi için arındırılmamış çeyreklik sanayi üretim endeksi verileri kullanılmıştır.

Serilerde mevsimsel birim kök varlığını incelemek için arındırılmamış verilerin kullanılması önerilmektedir. Bu konuyla ilgili Depalo (2009) arındırılmamış verilerle analiz yapmanın mevsimsel arındırılmış verilerle analiz yapmaya göre daha karmaşık olmasına rağmen, her zaman arındırılmamış verinin kullanılmasının daha uygun olacağını önermiştir.

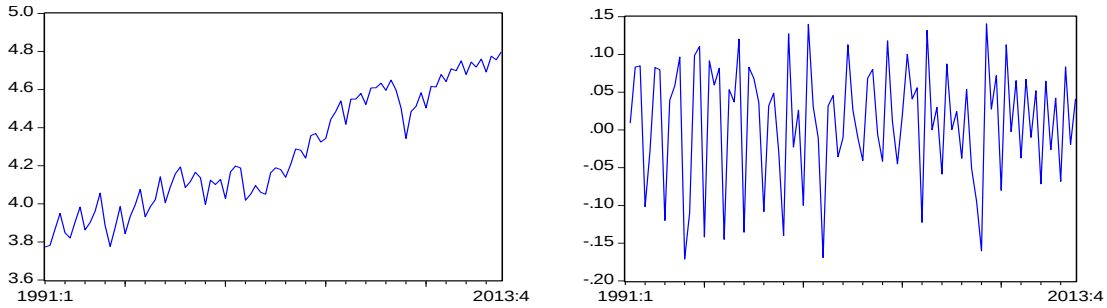
[1] Bulgular ve değerlendirmeler yazarların kişisel görüşleri olup, hiçbir şekilde TÜİK'i bağlamaz.

Ayrıca ekonomistler birim kök araştırmalarında genellikle logaritması alınmış arındırılmamış verilerin kullanılmasının daha sağlıklı olacağı görüşündedir. Bu şekilde yapılan analizlerde sonuçlar küçük farklılıklar dışında daha dayanıklı sonuçlar vermektedir (Zimmermann, 2012). Dolayısıyla bu çalışmada da analizlerin dayanıklı sonuçlar vermesi için arındırılmamış verilerin doğal logaritması alınmıştır.

3.2.1 Verilerin grafiksel sunumu

Sanayi üretim endeksi verilerine ait zaman serisi grafikleri ile incelenerek seride olabilecek mevsimsel etkiler ve trend hakkında sezgisel olarak bilgi edinilebilir. Ancak bu grafiklerden elde edilen bilgileri destekleyecek istatistiksel kanıtlara ihtiyaç vardır.

Türkiye'nin 1991-2013 dönemine ait çeyreklik sanayi üretim endeksi verileri şekil 3.7'de verilmiştir. Şekil 3.7.a'daki grafik logaritması alınmış sanayi üretim endeksi verilerine aittir, şekil 3.7.b'de ise aynı verilerin birinci farkı alınarak elde edilen grafik yer almaktadır.

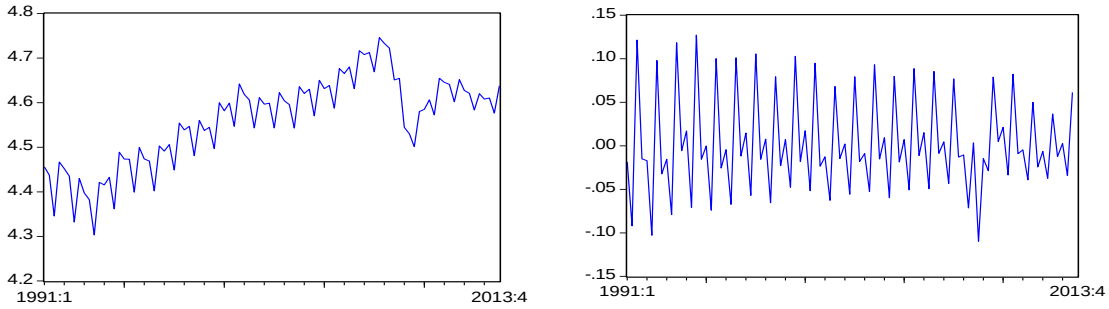


(a) (b)

Şekil 3.7 Türkiye sanayi üretim endeksi (1991:01-2013:04)

Bu şekillerden; sanayi üretim endeksi verilerinin pozitif trende sahip olduğu göze çarpmaktadır. Birinci farkı alınan serinin grafiği (Şekil 3.7.b) ise serinin mevsimsel etkiler içerdiğini göstermektedir.

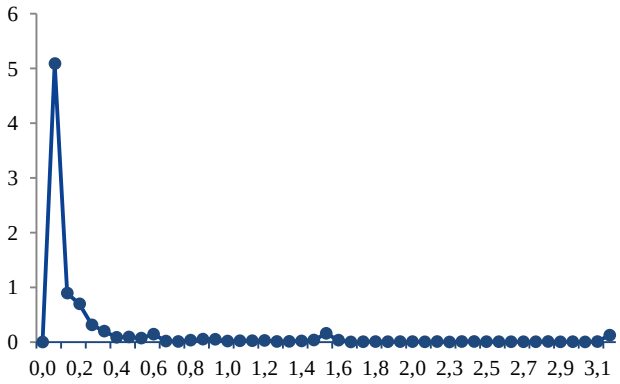
Benzer şekilde Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi için de aynı grafikler (Şekil 3.8) incelendiğinde, Türkiye sanayi üretim endeksi ile benzer yapı gözlendiği tespit edilmiştir.



(a) (b)

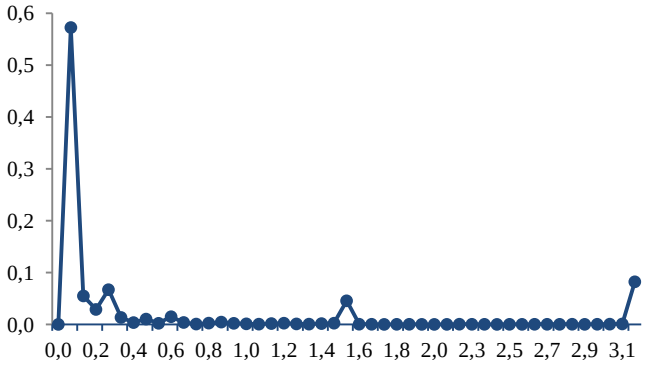
Şekil 3.8 Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi (1991:01-2013:04)

Verilerde periyodiklik tespiti için periodogramların grafiğinde beklenilen bir sıklıkta yeterince büyük bir zıplama gerçekleşiyorsa periyodiklik için yeterli bir belirteçtir. Bundan dolayı verilere ilişkin periodogramlar şekil 3.9 ve şekil 3.10'da verilmiştir. Grafiklerde zıplama hareketleri gözlenmektedir. Dolayısıyla serilerin periyodiklik içerdiğinden söz edilebilir.



Şekil 3.9 Türkiye sanayi üretim endeksinin periodogramları

Şekil 3.9'da yer alan Türkiye sanayi üretim endeksi verilerine ilişkin periodogram grafiği incelendiğinde, zıplamanın 0.07 sıklığında 5.09 büyüklüğünde olduğu göze çarpmaktadır.



Şekil 3.10 Avrupa Birliği sanayi üretim endeksinin periodogramları

Şekil 3.10'da Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi verilerinin periodogram grafiği yer almaktadır. Periodogram grafiğindeki zıplama 0.07 sıklığında 0.57 büyüklüğünde gerçekleşmiştir.

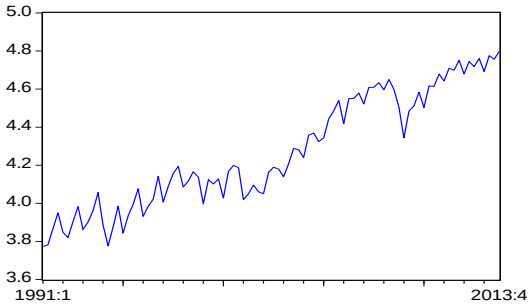
3.2.2 Model seçimi

Zaman serilerinin modellenmesinde serinin modelinin türü hakkında ön bilgi edinmek için serinin otokorelasyonları ve kısmi otokorelasyonları incelenir. Serinin otokorelasyonları belli bir gecikmeden sonra sıfıra yaklaşıyorsa, serinin hareketli ortalama modeli olarak modellenmesi uygundur. Serinin kısmi otokorelasyonlarının belli bir gecikmeden sonra sıfır olmasıdır. Bu durumda ise serinin otoregresif model olarak modellenmesi daha doğru olur. Sözü edilen durumların dışında serinin otokorelasyonları ve kısmi otokorelasyonları belli bir gecikmeden sonra sıfır olmuyor ise serinin model türünün otoregresif hareketli ortalama modeli olabileceği düşünülebilir. Serinin otokorelasyonları belli bir periyodiklik içeriyorsa bu tür serileri mevsimsel zaman serisi modelleri ile modellemek uygun olacaktır. Ancak bunlar yeterli olmayıp istatistiksel olarak model hakkında bir şey söyleyebilmek için AIC veya SBC

istatistiklerinin değerlerine bakmak gerekir. En küçük AIC ve SBC değerini veren model ve/veya model dereceleri en uygun modeldir.

Zaman serilerinin modellenmesinde model türü ve derecesi sezgisel olarak otokorelasyonlar ve kısmi otokorelasyon aracılığı ile tespit edilebileceği gibi, AIC ve SBC gibi model belirleme kriterlerinden de faydalanılabilir.

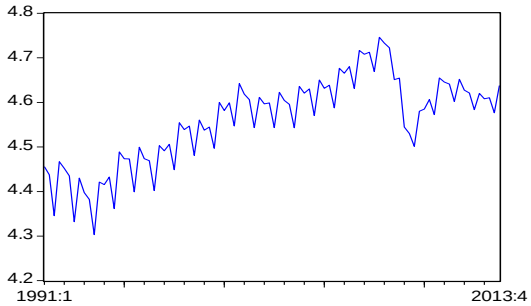
Türkiye çeyreklik sanayi üretim endeksi serisine ilişkin otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri, Eviews paket programında elde edilmiş olup, grafikler şekil 3.11'de verilmektedir.



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.902	0.902	77.335	0.000
		2	0.831	0.093	143.71	0.000
		3	0.775	0.057	202.00	0.000
		4	0.748	0.152	256.93	0.000
		5	0.662	-0.288	300.46	0.000
		6	0.602	0.057	336.89	0.000
		7	0.561	0.074	368.86	0.000
		8	0.547	0.091	399.69	0.000
		9	0.480	-0.176	423.69	0.000
		10	0.449	0.126	444.95	0.000

Şekil 3.11 Türkiye sanayi üretim endeksi otokorelasyonlar-kısmi korelasyonlar

Türkiye sanayi üretim endeksinin otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafiklerinin bulunduğu şekil 3.11 incelendiğinde, serinin periyodiklik içerdiği düşünülebilir. Benzer şekilde Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi serisine ilişkin otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafikleri ise şekil 3.12'de verilmektedir.



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.828	0.828	65.077	0.000
		2	0.817	0.418	129.16	0.000
		3	0.730	-0.036	180.92	0.000
		4	0.820	0.508	247.02	0.000
		5	0.635	-0.667	287.10	0.000
		6	0.622	0.230	326.01	0.000
		7	0.548	0.201	356.54	0.000
		8	0.645	0.014	399.38	0.000
		9	0.497	-0.050	425.15	0.000
		10	0.504	0.010	451.99	0.000

Şekil 3.12 Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi otokorelasyonlar-kısmi korelasyonlar

Avrupa Birliği sanayi üretim endeksinin otokorelasyon ve kısmi korelasyon grafiklerinin verildiği şekil 3.12 incelendiğinde, Türkiye serisinde olduğu gibi Avrupa Birliği serisinin de periyodiklik içerdiği düşünülebilir. Bundan dolayı Avrupa Birliği için sanayi üretim endeksi serisinin modellemesinde sezgisel olarak mevsimsel zaman serisi modellerinden yararlanılması daha uygun olabilir.

Türkiye ve Avrupa Birliği için sanayi üretim endeksi serisinin otokorelasyon ve kısmi korelasyonlarının incelenmesi sonucunda serilerin modellenmesinde mevsimsel modellerin daha uygun olacağı düşünülmüştür.

Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi serileri için çeşitli zaman serisi modelleri incelenmiş, sezgisel bulguların ışığı altında bazı modellere ilişkin AIC ve SBC değerleri hesaplanmıştır. Model belirleme kriterlerine ilişkin değerler çizelge 3.17'de verilmektedir.

Çizelge 3.17 Model belirleme kriterlerine ilişkin değerler

	Türkiye sanayi üretim endeksi		
Model/Kriter	$SAR_4(1)$	$SAR_4(2)$	$SAR_4(3)$
AIC	-193.1631	-181.6664	-167.7280
SBC	-188.2084	-174.3739	-158.1999

	Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi		
Model/Kriter	$SAR_4(1)$	$SAR_4(2)$	$SAR_4(3)$
AIC	-292.7378	-278.0159	-282.1487
SBC	-287.7832	-270.7234	-272.6206

Model belirleme kriterlerine bakıldığında Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim serisi için $SAR_4(1)$ modelinin uygun olduğu görülmektedir.

Türkiye sanayi üretim endeksi serisine uygun model olan mevsimsel otoregresif zaman serisi modeli $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-4} + e_t$ dikkate alındığında, SAS'da proc arima aracılığıyla $\hat{\rho}$ =1 olarak gözlenmiştir. Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi verileri de $SAR_4(1)$ olarak modellendiğinde, $\hat{\rho}$ = 0.98096 ≅ 1 olarak hesaplanmıştır.

3.2.3 Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi verileri ile HEGY testi

Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi serilerine uygun modellerin belirlenmesi için çizelge 3.17'de verilen SBC ve AIC istatistiklerinin değerleri kullanılmıştır. Verilere uygun modelin $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere, $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-4} + e_t$ olduğu gözlenmiştir.

Seride mevsimlerin trendi benzer ise modele sabit terim, trend ve mevsimsel kukla değişkenleri dahil edilerek HEGY mevsimsel birim kök test yöntemi uygulanması daha uygun olacaktır (Zimmermann, 2012). Bu çalışmada da sanayi üretim endeksi serisinde mevsimlerin trendinin genel anlamda benzerlik gösterdiği için modele sabit terim, trend ve mevsimsel kukla değişkenleri dahil edilerek mevsimsel birim kök incelemesi yapılmıştır.

Depalo (2009) Stata programında mevsimsel birim kök testini Hylleberg vd. (1990) çalışmasını dikkate alarak incelemiştir. İngiltere Ulusal İstatistik Enstitüsü'nden alınan 1955-2006 yılları arasında İngiltere'ye ait çeyreklik tüketim verileri kullanılmıştır. Stata programında bulunan "hegy4" ve geliştirdiği "sroot" komutu ile HEGY testini uygulamıştır. Sonuç olarak iki komutun genel olarak benzer olduğunu ortaya koymuştur.

Çalışmada HEGY testi için analizler Stata programı ile elde edilmiştir. Gecikme uzunluğu Schwarz Bilgi Kriteri'ne göre 4 olarak hesaplanmıştır.

HEGY testi sonucunda elde edilen test istatistikleri ve $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyi için kritik değerler çizelge 3.18 ve çizelge 3.19'da verilmektedir. Çizelgelerin birinci satırında π_1, ikinci satırında π_2, üçüncü satırında ise π_3 ve π_4 katsayılarının testi için gerekli test istatistiklerinin değerleri ile kritik değerler bulunmaktadır.

Çizelge 3.18 Türkiye sanayi üretim endeksi HEGY testi

	Test İstatistiği	**Kritik değer**
$\boldsymbol{\pi_1}$	-2.144	-3.585
$\boldsymbol{\pi_2}$	-5.786 *	-2.983
$\boldsymbol{\pi_3}$ **ve** $\boldsymbol{\pi_4}$	21.583 *	6.585

* : İlgili yokluk hipotezi 0.05 anlamlılık düzeyinde red edilmiştir.

HEGY testi Türkiye sanayi üretim endeksi verilerine uygulandığında elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

$H_0 : \pi_1 = 0$ yokluk hipotezi $H_1 : \pi_1 < 0$ alternatif hipotezine karşı test edildiğinde, $t_h = -2.144 > t_t = -3.585$ olduğundan "π_1 katsayısına ait yokluk hipotezi red edilemez yani 0 frekansta mevsimsel birim kök vardır". Bu durumda fark alınarak serinin durağanlığının sağlanması gerekir.

$H_0 : \pi_2 = 0$ yokluk hipotezi $H_1 : \pi_2 < 0$ alternatif hipotezine karşı test edildiğinde, $t_h = -5.786 < t_t = -2.983$ olduğundan "π_2 katsayısına ait yokluk hipotezi red edilir yani 1/2 frekansta mevsimsel birim kök yoktur". Birim kök tespit edilmediği için fark alma işleminin yapılmasına gerek yoktur.

Son olarak $H_0 : \pi_3 = \pi_4 = 0$ yokluk hipotezi $H_1 : \pi_3 \neq 0$ ve/veya $H_1 : \pi_4 \neq 0$ alternatif hipotezine karşı test edildiğinde, $F_h = 21.583 > F_t = 6.585$ olduğundan "π_3 ve π_4 katsayılarına ait yokluk hipotezi red edilir, 1/4 ve 3/4 frekanslarda mevsimsel birim kök yoktur". Birim kök olmadığı için fark alma işlemine gerek yoktur (Tekin ve Akdi 2014).

Çizelge 3.19 Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi HEGY testi

	Test İstatistiği	**Kritik değer**
$\boldsymbol{\pi_1}$	-0.896	-3.585
$\boldsymbol{\pi_2}$	-4.183*	-2.983
$\boldsymbol{\pi_3}$ **ve** $\boldsymbol{\pi_4}$	57.691*	6.585

* : İlgili yokluk hipotezi 0.05 anlamlılık düzeyinde red edilmiştir.

HEGY testi Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi verilerine uygulandığında elde edilen sonuçlar benzer şekilde aşağıda özetlenmiştir.

$H_0 : \pi_1 = 0$ yokluk hipotezi $H_1 : \pi_1 < 0$ alternatif hipotezine karşı test edildiğinde, $t_h = -0.896 > t_t = -3.585$ olduğundan, "π_1 katsayısına ait yokluk hipotezi red edilemez yani 0 frekansta mevsimsel birim kök vardır". Dolayısıyla fark alınarak serinin durağanlığının sağlanması gerekir.

$H_0 : \pi_2 = 0$ yokluk hipotezi $H_1 : \pi_2 < 0$ alternatif hipotezine karşı test edildiğinde, $t_h = -4.183 < t_t = -2.983$ olduğundan, "π_2 katsayısına ait yokluk hipotezi red edilir, 1/2 frekansta mevsimsel birim kök yoktur". Birim kök olmadığı için fark alma işlemine gerek yoktur.

$H_0 : \pi_3 = \pi_4 = 0$ yokluk hipotezi $H_1 : \pi_3 \neq 0$ ve/veya $H_1 : \pi_4 \neq 0$ alternatif hipotezine karşı test edildiğinde, $F_h = 57.691 > F_t = 6.585$ olduğundan, "π_3 ve π_4 katsayılarına ait yokluk hipotezi red edilir, 1/4 ve 3/4 frekanslarda mevsimsel birim kök yoktur". Birim kök tespit edilmediği için fark alma işleminin yapılmasına gerek yoktur.

HEGY yöntemi sonuçlarına göre Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi verilerinin 0 frekansta birim köklü olduğu tespit edilmiştir. Farklı bir yaklaşım olarak, iki seri için $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezinin testi periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testiyle de incelenebilir.

3.2.4 Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi verileri ile periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi

HEGY testi sonucunda Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi verilerinin 0 frekansta birim köklü olduğu tespit edilmiştir. Yani her iki veri seti için HEGY yöntemine göre $H_0: \rho = 1$ hipotezi red edilememiştir. Çalışmada aynı verilere periodogram tabanlı mevsimsel birim kök test metodu uygulanmıştır. Yani, $H_0: \rho = 1$ hipotezi periodogramlara bağlı olarak geliştirilen yöntem ile de test edilmiştir.

İlk olarak SAS programında "*proc spectra"* komutu yardımıyla Türkiye sanayi üretim endeksi serisi için periodogram değeri $I_n(w_1) \cong 5.0878$ olarak hesaplanmıştır. Bu durumda $H_0: \rho = 1$ şeklindeki seride mevsimsel birim kök olduğunu iddia eden yokluk hipotezini test etmek için,

$$T_{4,n}(w_k) = \frac{2(1 - cos(4w_k))}{\hat{\sigma}_n^2} I_n(w_k) \tag{3.1}$$

şeklinde verilen test istatistiğinin değeri hesaplanır. $T_{4,n}(w_k)$' nın değeri kritik değerden küçük ise $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezi α anlamlılık düzeyinde red edilecektir. Buradaki $\hat{\sigma}_n^2$ hata teriminin varyansının herhangi bir tutarlı tahmin edicisidir. Metodu uygulayabilmek için σ^2 haricinde başka bir parametre tahmini yapmaya gerek yoktur. Burada $n = 92$ olduğunda $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyi için kritik değer $k = 1$ için 0.1546'dır. Hesaplanan test istatistiğinin değeri $T_{4,n}(w_1) \cong 4.1387$ olup, 0.1546 kritik değerinden büyüktür. Dolayısıyla $H_0: \rho = 1$ veya açık ifade ile mevsimsel birim kök vardır şeklindeki yokluk hipotezi red edilemez, yani Türkiye sanayi üretim endeksi serisinde mevsimsel birim köke sahiptir

Benzer şekilde, Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi serisi için SAS programında *proc spectra* komutuyla periodogram değeri $I_n(w_1) \cong 0.5723$ olarak bulunmuştur. Bu durumda, $H_0: \rho = 1$ şeklindeki seride mevsimsel birim kök olduğunu iddia eden yokluk hipotezi, k=1 için, $T_{4,n}(w_1) \cong 4.3729 > 0.1546$ red edilemez sonucuna ulaşılır. Yani Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi serisinde mevsimsel birim köklüdür.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Zaman serileri analizinde birim kök testleri önemli yer tutmaktadır. Birim kök testlerinin güvenilir şekilde uygulanabilmesi istatistiki sonuç çıkarımı açısından önemlidir. Bu bağlamda uygulanan birim kök testinin seriye uygun olup olmadığı, testin ne kadar güçlü olduğu gibi çeşitli soruların cevabının bilinmesi faydalı olacaktır.

Çalışmada HEGY ve periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testleri hakkında inceleme yapılmıştır. Bu testlerin hangi nitelikteki serilere uygulandığı ve ne kadar güçlü olduğu hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca literatürde yapılan çalışmaların büyük çoğunluğu birim köklerin tespiti üzerine olup, testin gücüne ilişkin çalışmaların kısıtlı olmasından dolayı çalışmada her iki teste ilişkin güç değerleri oluşturulmuş ve karşılaştırması yapılmıştır.

HEGY testinin güç değerleri simulasyon çalışması ile tahmin edilmiştir. SAS simülasyon programının kontrolü üretilen kritik değerlerin Hylleberg vd. (1990)'daki tablo değerleriyle karşılaştırılarak sağlanmıştır. Program yardımıyla elde edilen kritik değerlerin Hylleberg vd. (1990)'daki tablo değerlerine oldukça yakın olduğu gözlenmiştir. Ayrıca Hylleberg vd. (1990)'daki tablo değerleri 24000 tekrar uygulanarak elde edilmişken, çalışmada kullanılan programda 50000 tekrar uygulanmıştır. Geliştirilen SAS programı farklı örneklem hacimleri ve ρ katsayıları için güncellenerek, elde edilen sonuçlar çizelgelerle ve şekillerle toplulaştırılmıştır. İncelemeler sonucunda HEGY testinde küçük örneklem hacimleri için sorun yaşandığı gözlenmiştir. Bundan dolayı küçük örneklem hacimlerinde periodogram birim kök testine başvurulmasının daha güvenilir sonuçlar verebileceği düşünülmüştür. Bundan dolayı serilerde birim kök araştırması periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testiyle de yapılmıştır.

Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testini uygulayabilmek için Akdi ve Dickey (1999) tarafından önerilen test istatistiği modifiye edilmiştir ve yeni bir test istatistiği önerilmiştir. Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi için SAS programı

kullanılarak kritik değerler ve testin gücüne ilişkin tablolar oluşturulmuştur. Bu teste ilişkin güç değerleri incelendiğinde genel olarak HEGY testine göre daha güçlü olduğu gözlenmiştir.

Şekil 3.1 ve şekil 3.3 incelendiğinde HEGY ve periodogram testlerinin örneklem hacmi arttıkça gücünün arttığı görülmektedir. Benzer şekilde şekil 3.2 ve şekil 3.4'te yer alan grafiklerden HEGY ve periodogram testleri için ρ'nun değeri arttıkça testlerin gücünün beklenildiği gibi azaldığı gözlenmiştir. HEGY ve periodogram testlerinin farklı örneklem hacimleri ve $|\rho| < 1$ için çizilen grafikler ise şekil 3.5'te verilmektedir. Grafikler yardımıyla $|\rho| < 1$ için HEGY testine göre periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin daha güçlü olduğu gözlenmektedir.

Birim kök testlerinin karşılaştırması anlamlılık düzeyleri için de incelenmiştir. Şekil 3.6'da HEGY ve periodogram testlerinin anlamlılık düzeyine yakınsama durumları verilmektedir. Anlamlılık düzeylerine HEGY testi alttan, periodogram testi üstten yakınsamaktadır. Büyük örneklem hacimleri için HEGY testinin anlamlılık düzeyine daha fazla yakınsadığı görülmüştür. Bu noktada örneklem oldukça büyük ise anlamlılık düzeylerinde HEGY testi periodogram mevsimsel birim kök testine göre daha güçlüdür.

Çalışmada Türkiye ve Avrupa Birliği için 1991:01-2013:04 çeyreklik sanayi üretim endeksi serilerinin, HEGY yöntemi kullanılarak mevsimsel birim kök içerip içermediği hakkında araştırma yapılmıştır. Her iki seri için 0 frekansta birim kök tespit edilirken, 1/2 frekansta ve 1/4 ile 3/4 frekanslarında mevsimsel birim kök tespit edilmemiştir. Serilere periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi uygulandığında, iki serinin de mevsimsel birim köklü olduğu gözlenmiştir.

Model seçimi aşamasında Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi serileri için uygun model $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-4} + e_t$ olarak tespit edilmiş olup, Türkiye sanayi üretim endeksi serisi için $\hat{\rho}$ =1, Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi serisi için ise $\hat{\rho}$ = 0.98096 $\cong$ 1 olarak hesaplanmıştır. HEGY testinin ampirik gücü için yazılan programda yer

alan veri üretme sürecinde Türkiye serisi için $\hat{\rho}$ =1, Avrupa Birliği serisi için $\hat{\rho}$ = 0.98096 değerleri kullanılarak, $n = 92$ örneklem büyüklüğünde 50000 tekrar uygulanmıştır. Her iki seri için yapılan mevsimsel birim kök testinin ampirik gücü hesaplanmış, HEGY testinin gücü Türkiye serisi için 0.0288, Avrupa Birliği serisi için 0.0287 olarak bulunmuştur. Benzer şekilde, sanayi üretim endeksi serileri kullanılarak periodogram tabanlı birim kök testinin gücünü hesaplamak için verilerin uyduğu modelde yer alan ρ parametresinin tahmininin elde edilmesi gereklidir. Türkiye sanayi üretim endeksi serisi için $\hat{\rho}$ =1 olarak elde edilmişti. Dolayısıyla, bu seri için periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin gücü $\beta_n(\rho) = 1 - e^{-k_n(\rho)} \cong 0.0592$ şeklindedir. Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi serisi için ise $\hat{\rho}$ = 0.98096 ≅ 1 olarak hesaplanmıştı. Bu durumda periodogram mevsimsel birim kök testinin gücü ise; k=1 için, $\beta_n(\rho) \cong 0.0626$ olarak gözlenmiştir. Çizelge 3.20'de HEGY ve periodogram mevsimsel birim kök testlerinin $n = 92$ ve k=1 için güç değerleri verilmiştir. Türkiye ve Avrupa Birliği sanayi üretim endeksi verileri kullanılarak yapılan simülasyon çalışması sonucunda $n = 92$ için periodogram mevsimsel birim kök testinin HEGY testine göre anlamlılık düzeyine daha yakın sonuç verdiği söylenebilir.

Çizelge 3.20 Testlerin anlamlılık düzeyleri

	HEGY	**Periodogram**
Türkiye	0.0288	0.0592
Avrupa Birliği	0.0287	0.0626

HEGY ve periodogram mevsimsel birim kök testlerinin uygulaması ve özellikleri birbirinden farklıdır. HEGY testi yardımcı regresyona dayanan, belli frekanslarda seride birim kök olup olmadığını tespit etmeyi sağlayan bir yöntemdir. Bu test mevsimsel birim kök incelemelerinde sıklıkla kullanılır. Ayrıca testin paket programlarda kolaylıkla uygulanabilir olması HEGY testinin tercih edilebilirliğini arttırmaktadır.

Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin ise diğer testlere göre çeşitli avantajları bulunmaktadır. Testin modele dayalı olmaması önemli avantajlarından biridir. Periodogram tabanlı birim kök testinin uygulanması için HEGY testinde olduğu

gibi yardımcı regresyon denklemi kullanılmasına gerek yoktur. Bu durum testin uygulanması açısından oldukça kolaylık sağlamaktadır.

Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin güç fonksiyonu analitik olarak mevcuttur. Bundan dolayı testin gücü kolaylıkla hesaplanabilir. Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi daha az parametre içermektedir. Bahsedilen bu avantaj ile yöntemin istatistiksel anlamda dayanıklı sonuçlar verdiği söylenebilir.

KAYNAKLAR

Akaike, H., 1969. Fitting autoregressive models for prediction, Annals of the Institute of Statistical Mathematics 21, 243–247.

Akaike, H., 1973. Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. In: B. N. Petrov and F. Csaki, eds. Second International Symposium on Information Theory. Budapest: Akademiai Kiado, 267–281.

Akdi, Y. 1995. Periodogram Analysis for Unit Roots. Ph.D. Dissertation. North Carolina State University.

Akdi, Y. and Dickey, D.A. 1998. Periodograms of Unit Root Time Series: Distributions and Tests. Commun.Statist-Theory Meth., 27(1); 69-87.

Akdi, Y. and Dickey, D.A. 1999. Periodograms for Seasonal Time Series with a Unit Root. Journal of the Turkish Statitical Association, 2(3); 153-164.

Akdi, Y., Kalafatçılar, K. and Metin Özcan, K. 2010. Application of Periodogram-Based Cointegration Test for the Analysis of Services and Goods Sector Inflations, International Econometric Review, 2(1); 3-10.

Akdi, Y. 2014. Zaman Serileri Analizi, Birim Kökler ve Kointegrasyon. Bıçaklar Kitabevi, Ankara.

Altın, A. 2011. Fourier Analizi. Gazi Kitabevi, 126 s., Ankara.

Anonim, 2013. Farklı Temel Yıl ve Faaliyet Sınıflamasına Ait Tarihsel Sanayi Üretim Endekslerinin Birleştirilmesi (1986-2010). Türkiye İstatistik Kurumu, Ankara.

Anonim, 2015. Sanayi Üretim Endeksi Metaveri Dokümanları. Türkiye İstatistik Kurumu, Ankara.

Anonymous, 2005. PEEIs in Focus - A Summary for the Industrial Production Index. Office for Official Publications of European Communities, Eurostat, Luxembourg.

Anonymous, 2010. International Recommendations for the Index of Industrial Production. United Nations Statistics Division, UN, New York.

Anonymous, 2014. Newsrelease euro indicators, Eurostat, Luxembourg.

Aydın, N. 2002. Mevsimsel Zaman Serilerinde Birim Kökler. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Ayvaz, Ö. 2006. Mevsimsel Birim Kök Testi. İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi, 20(1); 71-87.

Baum, C.F. 2002. Facilitating Applied Economic Research with Stata, Boston College.

Burnham, K.P. and Anderson, D.R. 2002. Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach (2nd ed.). Springer-Verlag, 488 p., New York.

Burnham, K.P. and Anderson, D.R. 2004. Multimodel Inference: Understanding AIC and BIC in Model Selection. Sociological Methods and Research, 33(2); 261–304.

Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. 1970. Time Series Analysis: Forcasting and Control. Holden Day, 537 p., San Francisco.

Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. 1976. Time Series Analysis: Forcasting and Control Revised Edition. Holden Day, 573 p., San Francisco.

Bloomfield, P. 1993. Applied Time Series Analysis Frequency Domain Methods, Statistics 518.

Brockwell, P.J. and Davis, R.A. 1987. Time Series: Theory and Methods. Springer-Verlag, 519 p., New York.

Brockwell, P.J. and Davis, R.A. 1991. Time Series: Theory and Methods (2nd ed.). Springer, 580 p., New York.

Cavanaugh, J.E. 1997. Unifying the derivations of the Akaike and corrected Akaike information criteria. Statistics and Probability Letters, 31; 201–208.

Cavanaugh, J.E. 2012. 290-Lecture Notes: Model Selection, Department of Biostatistics. Department of Statistics and Actuarial Science, The University of Iowa.

Depalo, D. 2009. A Seasonal Unit Root Test with Stata, Bank of Italy, Roma.

Dickey, D.A. 1976. Estimation and hypothesis testing in nonstationary time series, Iowa State University, Ames, Iowa.

Dickey, D.A. and Fuller, W.A. 1976. Distribution of First Order Autoregressive Estimator, Proceedings of the Business and Economic Statistics Section. American Statistical Association, 278-281.

Dickey, D.A. and Fuller, W.A. 1979. Distrubition of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. Journal of the American Statistical Association, 74(366), 427-431.

Dickey, D.A., Hasza H.P. and Fuller, W.A. 1984. Testing for Unit Roots in Seasonal Time Series. Journal of the American Statistical Association, 79, 355-367.

Dickey, D.A. and Pantula S.G. 1987. Determining the Order of Differencing in Autoregressive Process. Journal of Economics Statistics, 5, 455-461.

Enders, W. 2004. Applied Econometric Time Series, Second Edition. John Wiley and Sons, 460 p., New York.

Engle, R.F., Granger, C.W.J., Hylleberg, S. and Lee, H.S. 1993. Seasonal Cointegration: The Japanese Consumption Function. Journal of Econometrics, 55, 275-298.

Evans, B.A. and Dickey, D.A. 2002. Normalizations for Periodogram-Based Unit Root Tests. Statistics & Probability Letters, 60, 343-350.

Fuller, W.A. 1976. Introduction to Statistical Time Series. Wiley Series in Probability and Statistics, New York.

Fuller, W.A. 1996. Introduction to Statistical Time Series. Wiley Series in Probability and Statistics, 698 p., New York.

Franses, P.H. 1990. Testing for Seasonal Unit Roots in Monthly Data, Econometric Institute Report. Nm: 9032/A, Erasmus University, Rotterdam.

Granger, C.W.J. 1978. Seasonality: Causation İnterpretation, and Implications in Seasonal Analysis of Economic Time Series, Proceedings of the Conference on the Seasonal Analysis of Economic Time Series, 9-10 Sept. 1976 (A. Zellner, ed.). US Department of Commerce, Bureau of the Census, Washington DC.

Hurvich, C.M. and Tsai, C.L. 1989. Regression and time series model selection in small samples. Biometrika, 76, 297–307.

Hylleberg, S., Engle, R.F., Granger, C.W.J. and Yoo, B.S. 1990. Seasonal Integration and Cointegration. Journal of Econometrics, 44, 215-238.

Otero, J.G. 1998. Coffee, The Money Market, The Real Exchange Rate and Economic Fluctuations in Colombia. Ph.D. Dissertation. The University of Warwick, Department of Economics.

Öztürk, F. 1993. Matematiksel İstatistik. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:10, 302 s., Ankara.

Phillips, P.C.B and Perron, P. 1988. Testing for a Unit Root in Time Series Regression. Biometrika, 75, 335–346.

Qianyi, Z. 2008. Seasonal Unit Root Test: A Comprasion. Ph.D. Dissertation, North Carolina State University.

Said, E.S. and Dickey, D.A. 1984. Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order. Biometrika, 71, 599-607.

Schwarz, G. 1978. Estimating the dimension of a model, The Annals of Statistics 6, 461– 464.

Sugiura, N. 1978. Further analysis of the data by Akaike's information criterion and the finite corrections. Communications in Statistics, Theory and Methods A7, 13-26.

Swanson D.A., Tayman J. and Bryan T.M. 2011. MAPE-R: A Rescaled Measure of Accuracy for Cross-Sectional Subnational Population Forecasts. Journal of Population Research.

Süray S. 1978. Teori ve Problemlerle İleri Analiz. Güven Kitabevi Yayınları, Ankara.

Takeuchi, K. 1976. Distribution of informational statistics and a criterion of model fitting. Suri-Kagaku (Mathematical Sciences), 153, 12-18.

Tekin, K. ve Akdi, Y. 2014. Mevsimsel Birim Kök Testleri: Türkiye Sanayi Üretim Endeksi Üzerine Bir Uygulama. Gazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, Vol/Cilt:1, No/Sayı:1.

Türe, H. ve Akdi, Y. 2005. Mevsimsel Kointegrasyon: Türkiye Verilerine Bir Uygulama, Ankara.

Yüksel, A. 2010. Sanayi Üretim Endeksinde Miktar Yerine Değer Yaklaşımı. Uzmanlık Tezi. Türkiye İstatistik Kurumu, Ankara.

Zimmermann, S. 2012. Seasonality in German GDP: Testing for Stationarity and Non-Stationarity. Department of Economics, University of Vienna.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Keziban TEKİN
Doğum Yeri	: Uşak
Doğum Tarihi	: 02/10/1982
Medeni Hali	: Bekar
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	: Anıttepe Lisesi (1999)
Lisans	: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2005)
Yüksek Lisans	: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (2008)

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, Araştırma Görevlisi, 2005 - 2009
Devlet Planlama Teşkilatı Müsteşarlığı Bilgi Toplumu Daire Bşk., İstatistikçi, 2009
Türkiye İstatistik Kurumu Başkanlığı, TÜİK Uzmanı, 2009 - …

Hakemli Dergiler

Tekin, K. ve Akdi, Y. 2014. Mevsimsel Birim Kök Testleri: Türkiye Sanayi Üretim Endeksi Üzerine Bir Uygulama, Gazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Sosyal Bilimler Dergisi, Ankara.

Ulusal Kongre Sunum

Tekin, K., Özdemir, Z. A, Berument, H. ve Akdi, Y. 2007. Türkiye'de Döviz Kuru Geçişi: Şokların Lineer Olmayan Yayılımı, 5. İstatistik Kongresi, Antalya.

Diğerleri (Uluslarası Eğitim Programları)

Quality Reporting on Data from Administrative or Mixed Data Sources, 26-27.10.2011, Eurostat, Luxembourg.
Seasonal Adjustment, 22-24.01.2014, Insee, Paris.