ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN SAÇILIM TEORİSİ

Güler Başak EREN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

30/09/2015

Güler Başak EREN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN SAÇILIM TEORİSİ

Güler Başak EREN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, spektral analizin temel tanımları ve önemli teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tüm eksende Sturm-Liouville denkleminin Jost çözümleri ve Jost çözümlerinin asimptotik gösterimlerinden yararlanarak saçılma teorisinin önemli özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise ters problemin temel integral denklemi elde edilmiştir. Ters problemin çözümleri incelenmiştir. Tüm eksende saçılma teorisinin ters probleminin temel teoremi ispatlanmıştır.

Son bölümde ise bu tezde yapılan çalışmalar ve bu çalışmaların sonuçları ifade edilmiştir.

Eylül 2015, 48 sayfa

Anahtar Kelimeler : Sturm-Liouville operatörü, Jost çözümü, Saçılım fonksiyonu, Saçılım verileri, Temel integral denklem.

ABSTRACT

Master Thesis

SCATTERİNG THEORY of STURM-LİOUVİLLE OPERATORS

Güler Başak EREN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definitions and main theorems of spectral analysis have been given.

In the third chapter, on the whole line the important properties of the scattering theory is examined by using jost solitions of Sturm-Liouville equation and their asymptotic representation.

In the fourth chapter, the basic integral equation of the inverse problem is obtained. The inverse problem's solutions are examined. On the whole line the basic theorem of the inverse problem of the scattering theory is proved.

In the last chapter, the studies performed in this thesis and the result of these studies are expressed.

September 2015, 48 pages

Key Words: Sturm-Liouville Operators, Jost solution, Scattering function, Scattering data, Basic integral equation

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmanın ilerlemesinde katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), hayatım boyunca yanımda olan aileme ve çalışmalarım süresince beni destekleyen Aydın ÖZNUR'a en içten duygularımla teşekkür ederim.

Güler Başak EREN
Ankara, Eylül 2015

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK ..... **i**
ÖZET ..... **ii**
ABSTRACT ..... **iii**
TEŞEKKÜR ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **vi**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER **2**
3. TÜM EKSENDE BİR BOYUTLU STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRLERİ İÇİN SAÇILMA TEORİSİNİN ÖNEMLİ ÖZELLİKLERİ **5**
4. SAÇILMA TEORİSİNİN TERS PROBLEMİ **24**
4.1 Genişleme Teoremi **24**
4.2 Ters Problemin Temel İntegral Denkleminin Elde Edilmesi **31**
4.3 Ters Problem **36**
4.4 Tüm Eksende Saçılma Teorisinin Ters Probleminin Temel Teoreminin İspatı **40**
5. SONUÇ **46**
KAYNAKLAR **47**
ÖZGEÇMİŞ **48**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
Im z	z kompleks sayısının sanal kısmı
Re z	z kompleks sayısının reel kısmı
$\arg(z)$	z kompleks sayısının argümanı
$L^2(0,\infty)$	$\left\{f:\ \int_0^\infty \lvert f(x)\rvert^2\,dx<\infty\right\}$
ρ	Spektral fonksiyon
m_n^-	Dalga fonksiyonlarının normlarının kareköklerinin tersi
ik_n	Jost fonksiyonunun sıfırları

1.GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisinin önemli dallarından bir tanesi ters problemler teorisidir. Diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin, özellikle spektral analizin ters probleminin fiziksel problemlerde geniş uygulamaları vardır. Operatörün spektrum kümesinin incelenmesi, özfonksiyonlarına göre ayrışım problemleri spektral analizin düz problemleri olarak bilinir. Spektral analizin ters problemleri ise operatörün spektral karakteristiklerine göre operatörün bulunmasıdır. Böyle spektral karakteristikler spektrum kümesi, spektral fonksiyon, Weyl fonksiyonu, saçılma verileri ve başka karakteristikler olabilir. Spektral karakteristiklere bağlı olarak farklı ters problemler ele alınır.

Ters problemler teorisinin önemli yönlerinden biri Kuantum mekaniğinde geniş kullanıma sahip saçılma teorisinin ters problemidir. Saçılma teorisinin ters problemi, dalga fonksiyonlarının sonsuzluktaki davranışlarına göre alanın potansiyelini belirtmek ve eğer bu mümkünse belirtme yöntemini vermek şeklinde tanımlanabilir. Saçılma teorisinin ters problemi matematiksel olarak denklemin katsayısının normlaştırılmış özfonksiyonların sonsuzlukta asimptotik biçimini belirleyen saçılma verilerine göre elde edilişidir.

Lineer olmayan denklemlerin çözümlerinde saçılmanın ters problemleri uygulanır ve bu ifadeye *Saçılmanın ters problemi yöntemi* denir.

Bu tez çalışmasında ise; hem yarım eksende hem tüm reel eksende tanımlı Sturm-Liouville operatörlerinin saçılım teorisinin düz ve ters problemleri incelenecektir. Çeşitli Sturm-Liouville operatörlerinin Jost çözümleri, Jost çözümlerinin asimptotikleri ve saçılım verilerinin özellikleri elde edilecektir.

İlk olarak temel kavramlar verilecek daha sonra tüm eksende bir boyutlu Sturm-Liouville operatörleri için saçılma teorisinin önemli özellikleri incelenecektir. Ters problemin temel integral denklemi elde edilecek ve ters problemin özellikleri öğrenilecektir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, ileride ihtiyaç duyulacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(x-u)\, du$$

şeklinde tanımlı olan fonksiyona $(-\infty, \infty)$ aralığında f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu denir (Kammler 2008) .

Tanım 2.2 f fonksiyonu her sonlu $[-L, L]$ aralığında parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ integrali yakınsak olsun. Bu durumda

$$\mathcal{F}\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt} dt = F(w)$$

ifadesine f fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir (Vretblad 2003) .

Tanım 2.3 $F(w)$' nun ters Fourier dönüşümü $\mathcal{F}^{-}\{F\}$ ile gösterilen ve

$$\mathcal{F}^{-}\{F\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt} dw = f(t)$$

ile tanımlanan $f(t)$ fonksiyonudur (Vretblad 2003) .

Tanım 2.4 f fonksiyonu z_0 noktasında analitik olsun.

$$f(z_0) = 0$$

durumunda

$$f'(z_0) \neq 0$$

oluyorsa z_0 basit köktür (Saff ve Snider 2003) .

Tanım 2.5 E R' nin boştan farklı bir alt kümesi ve f_k E uzayı üzerinde tanımlanmış reel fonksiyonların bir dizisidir.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad , \quad x \in E \ , \ n \in N$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

serisinin düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ için E uzayında $S_n(x)$ dizisinin düzgün yakınsak olmasıdır (Wade 2003) .

Teorem 2.1 $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri sırası ile $F(w)$, $G(w)$ ise $f*g$ konvolüsyonunun Fourier dönüşümü $F(w)G(w)$' ya eşittir (Kammler 2008) .

Teorem 2.2 (*Riemann Lebesgue Teoremi*) f $[a,b]$ aralığında Riemann integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_b^a f(t)\cos(\lambda t)\,dt = 0 \qquad \lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_b^a f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0$$

eşitlikleri gerçeklenir (Titchmarsh 1948) .

Teorem 2.3 E R' nin boştan farklı bir alt kümesi ve f_k da E uzayı üzerinde tanımlı reel fonksiyonların bir dizisidir. $E = [a,b]$ şeklinde ve her bir f_k $[a,b]$ aralığında integrallenebilir. Eğer

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

$[a, b]$ de düzgün yakınsak ise o zaman f fonksiyonu $[a, b]$ de integrallenebilir ve

$$\int_b^a \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_b^a f_k(x)\, dx$$

eşitliği gerçeklenir (Wade 2003) .

3. TÜM EKSENDE BİR BOYUTLU STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRLERİ İÇİN SAÇILMA TEORİSİNİN ÖNEMLİ ÖZELLİKLERİ

$-\infty < x < \infty$ aralığında Sturm-Liouville denklemi

$$-y'' + q(x)\, y = k^2 y \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlıdır. Denklemde kullanılan $q(x)$ reel değerlidir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\, |q(x)|\, dx < \infty$$

şartını sağlar.

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t)\, e^{ikt} dt \tag{3.2}$$

$$g(x,k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} A^{-}(x,t)\, e^{-ikt} dt \tag{3.3}$$

Şeklinde tanımlı olan $f(x,k)$ ve $g(x,k)$ (3.1) denkleminin Jost çözümleridir. Bunların asimptotik gösterimleri $x \to \infty$ için

$$\begin{aligned} f(x,k) &= e^{ikx} + o(1) \\ f'(x,k) &= ike^{ikx} + o(1) \end{aligned}$$

şeklindedir. $x \to -\infty$ için

$$\begin{aligned} g(x,k) &= e^{-ikx} + o(1) \\ g'(x,k) &= -ike^{-ikx} + o(1) \end{aligned}$$

şeklindedir.

$k \neq 0$ reel sayıları için $f(x,k)$, $f(x,-k)$ ve $g(x,k)$, $g(x,-k)$ (3.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleridir.

$$f(x,k) = b(k)\, g(x,k) + a(k)\, g(x,-k) \tag{3.4}$$

$$g(x,k) = c(k)\, f(x,k) + d(k)\, f(x,-k) \tag{3.5}$$

Şeklinde yazılabilir.

Lemma 3.1 Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $a(-k) = \overline{a(k)} \qquad b(-k) = \overline{b(k)}$

2. $c(k) = -b(-k) \quad d(k) = a(k)$

3. $a(k) = -\dfrac{1}{2ik} W\{f(x,k), g(x,k)\}$

4. $b(k) = \dfrac{1}{2ik} W\{f(x,k), g(x.-k)\}$

5. $|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2$

İspat.

1. (3.4) denkleminde $k = -k$ alınırsa

$$f(x,-k) = b(-k)\, g(x,-k) + a(-k)\, g(x,k)$$

$$\overline{f(x,k)} = \overline{b(k) g(x,k)} + \overline{a(k) g(x,-k)}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$b(-k) = \overline{b(k)} \qquad a(-k) = \overline{a(k)}$$

elde edilir.

2.

$$W\{f(x,k), g(x,k)\} = f(x,k)\, g'(x,k) - g(x,k)\, f'(x,k)$$

(3.5) denkleminden

$$W\{f(x,k), g(x,k)\} = d(k)\, W\{f(x,k), f(x,-k)\}$$

$$W\{f(x,k), f(x,-k)\} = -2ik$$

olduğundan

$$W\{f(x,k), g(x,k)\} = -2ikd(k)$$

elde edilir. Lemma (3.1) in 3. özelliğinden

$$W\left\{f\left(x,k\right),g\left(x,k\right)\right\}=-2ikd\left(k\right)=-2ika\left(k\right)$$

olur. Buradan

$$a\left(k\right)=d\left(k\right)$$

elde edilir.

$$W\left\{f\left(x,-k\right),g\left(x,k\right)\right\}=f\left(x,-k\right)g'\left(x,k\right)-g\left(x,k\right)f'\left(x,-k\right)$$

(3.5) denkleminden

$$W\left\{f\left(x,-k\right),g\left(x,k\right)\right\}=-c\left(k\right)W\left\{f\left(x,k\right),f\left(x,-k\right)\right\}$$

eşitliği bulunur.

$$W\left\{f\left(x,k\right),f\left(x,-k\right)\right\}=-2ik$$

olduğu için

$$W\left\{f\left(x,-k\right),g\left(x,k\right)\right\}=2ikc\left(k\right)$$

olur. Lemma (3.1) in 4. özelliğinden

$$W\left\{f\left(x,-k\right),g\left(x,k\right)\right\}=2ikc\left(k\right)=-2ikb\left(-k\right)$$

elde edilir. Buradan

$$c(k) = -b(-k)$$

bulunur.

3.

$$W\{f(x,k), g(x,k)\} = f(x,k)\, g'(x,k) - f'(x,k)\, g(x,k)$$

(3.4) denkleminden

$$W\{f(x,k), g(x,k)\} = -a(k)\, W\{g(x,k), g(x,-k)\}$$

$$W\{g(x,k), g(x,-k)\} = 2ik$$

olduğu için

$$a(k) = -\frac{1}{2ik} W\{f(x,k), g(x,k)\}$$

elde edilir.

4.

$$W\{f(x,k), g(x,-k)\} = f(x,k)\, g'(x,-k) - g(x,-k)\, f'(x,k)$$

(3.4) denkleminden

$$W\{f(x,k), g(x,-k)\} = b(k)\, W\{g(x,k), g(x,-k)\}$$

olur. Buradan

$$b(k) = \frac{1}{2ik} W\{f(x,k), g(x.-k)\}$$

elde edilir.

5.

$$W\{f(x,k), f(x,-k)\} = -2ik = f(x,k) f'(x,-k) - f(x,-k) f'(x,k)$$

(3.4) denkleminden

$$-2ik = b(-k) b(k) W\{g(x,k), g(x,-k)\} + a(k) a(-k) W\{g(x,-k), g(x,k)\}$$

ifadesi yazılır.

$$W\{g(x,k), g(x,-k)\} = 2ik$$

eşitliğinden ve Lemma (3.1) in 1. özelliğinden

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2$$

bulunur.

$\operatorname{Im} k_0 > 0$ olacak şekilde $k = k_0$ kompleks değeri için

$$a(k_0) = 0$$

olur. $a(k)$ fonksiyonunun bütün sıfırları üst yarı düzlemde y ekseninin üzerindedir. Lemma (3.1) in 3. özelliğinden

$$W\left\{f\left(x,k_0\right),g\left(x,k_0\right)\right\}=0$$

olur. $f\left(x,k_0\right)$ ve $g\left(x,k_0\right)$ linner bağımlı olduğu için d sabit olacak şekilde

$$g\left(x,k_0\right)=df\left(x,k_0\right)=\Psi\left(x\right)$$

yazılabilir. Burada kullanılan $\Psi\left(x\right)$ fonksiyonu (3.1) denkleminin $-k_0^2$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur.

Lemma 3.2 (3.1) denklemi basit ve sonlu sayıda negatif özdeğere sahiptir.

İspat. (3.1) denkleminin k ya göre türevi

$$-\dot{y}''+q\left(x\right)\dot{y}=2ky+k^2\dot{y}$$

şeklindedir. $f\left(x,k\right)$ ve $g\left(x,k\right)$ (3.1) denkleminin birer çözümüdür.

$$-f''+g\left(x\right)f=k^2f$$

$$-\dot{g}''+q\left(x\right)\dot{g}=2kg+k^2\dot{g}$$

1. denklemi $\dot{g}$ ile 2. denklemi f ile çarpıp taraf tarafa çıkartıldığında

$$\left(f'\dot{g}-\dot{g}'f\right)'=\left(W\left\{\dot{g}\left(x,k\right),f\left(x,k\right)\right\}\right)'=f''\dot{g}-f\dot{g}''=2kgf$$

elde edilir. $-\beta'$ dan x' e kadar integral alınırsa

$$W\left\{f\left(x,k\right),g^{\cdot}\left(x,k\right)\right\}|_{-\beta}^{x}=-2k\int_{-\beta}^{x}f\left(x,k\right)g\left(x,k\right)dx \tag{3.6}$$

elde edilir.

$$-g''+q\left(x\right)g=k^{2}g$$

$$-f^{\cdot\prime\prime}+q\left(x\right)f^{\cdot}=2kf+k^{2}f^{\cdot}$$

bu denklemlerede benzer işlemler uygulanırsa

$$W\left\{f^{\cdot}\left(x,k\right),g\left(x,k\right)\right\}|_{x}^{\beta}=2k\int_{x}^{\beta}f\left(x,k\right)g\left(x,k\right)dx \tag{3.7}$$

elde edilir. Lemma (3.1) in 3. özelliğinden

$$-2ika\left(k\right)=W\left\{f\left(x,k\right),g\left(x,k\right)\right\}=f\left(x,k\right)g'\left(x,k\right)-f'\left(x,k\right)g\left(x,k\right)$$

eşitliği yazılır. Bu ifadenin k' ya göre türevi alınırsa

$$2ia\left(k\right)+2ika^{\cdot}\left(k\right)=-W\left\{f^{\cdot}\left(x,k\right),g\left(x,k\right)\right\}-W\left\{f\left(x,k\right),g^{\cdot}\left(x,k\right)\right\} \tag{3.8}$$

ifadesi bulunur. $k=ik_{0}$ için

$$a\left(ik_{0}\right)=0$$

olur. (3.6) ve (3.7) denklemlerinde $x=\beta$ ve $\beta\rightarrow\infty$ durumu için denklemlerin sağ tarafı yakınsaktır. (3.7) denkleminin sağ tarafı 0 olur. (3.6) ve (3.8) denklemlerinden

$$-2ik_0 a^{\cdot}(ik_0) = 2ik_0 \int_{-\infty}^{\infty} f(x, ik_0)\, g(x, ik_0)\, dx$$

$$a^{\cdot}(ik_0) = -i \int_{-\infty}^{\infty} f(x, ik_0)\, g(x, ik_0)\, dx$$

elde edilir. $f(x, ik_0)$ ve $g(x, ik_0)$ lineer bağımlı olduğu için d sabit olacak şekilde

$$g(x, ik_0) = df(x, ik_0)$$

ifade edilebilir.

$$a^{\cdot}(ik_0) = -di \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, ik_0)\, dx = -\frac{i}{d} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x, ik_0)\, dx$$

$$m^{+} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, ik_0)\, dx = -\frac{a^{\cdot}(ik_0)}{di}$$

$$m^{-} = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x, ik_0)\, dx = -\frac{da^{\cdot}(ik_0)}{i}$$

m^{+} ve m^{-} yukarıda tanımlanmıştır. Buradan ise

$$m^{+}m^{-} = -a^{\cdot 2}(ik_0) \neq 0$$

olur.

$$a(ik_0) = 0$$

fakat

$$a^{\cdot}(ik_0) \neq 0$$

olduğu için (3.1) denkleminin negatif özdeğerleri basittir.

$$k = 0$$

için

$$g(x) = 1 + \int_x^{\infty} K(x,t)\, dt$$

(3.1) denkleminin bir çözümüdür. $t > a$ için

$$g(t) \neq 0$$

olmak üzere yeterince büyük a değerleri için (3.1) denkleminin diğer bir çözümü

$$h(x) = g(x) \int_a^x \frac{dt}{g^2(t)}$$

şeklindedir. $x \to \infty$ için asimptotik eşitlikler

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + o(1) \\ h(x) &= x + o(x) \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$k = 0$$

için (3.1) denkleminin herhangi bir çözümü $g(x)$ ve $h(x)$ in lineer kombinasyonudur. Bu yüzden (3.1) denkleminin sıfırları sonludur.

$$g(x, ik_0) = \Psi(x)$$

olacak şekilde $\Psi(x)$ fonksiyonu tanımlansın.

Lemma 3.3 $\Psi(x)$ in k' ya göre türevi olan $\Psi^{\cdot}(x)$ $x \to \infty$ durumu için aşağıdaki asimptotik eşitliği sağlar.

$$\Psi^{\cdot}(x) = he^{k_0 x}[1 + o(1)]$$

d sabit ve

$$g(x, ik_0) = df(x, ik_0)$$

eşitliği sağlanır ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(x)\, dx = ihd$$

olur.

İspat. (3.6) dan

$$W\{f(x,k), g^{\cdot}(x,k)\} = -2k \int_{-\beta}^{x} f(x,k)\, g(x,k)\, dx$$

ifadesi yazılır. $k = ik_0$ ve $\beta \to \infty$ durumu için

$$f(x,ik_0)\,g^{\cdot\prime}(x,ik_0)-g^{\cdot}(x,ik_0)\,f'(x,ik_0) \;=\; -\frac{2ik_0}{d}\int_{-\infty}^{x}\Psi^2(x)\,dx$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $x\to\infty$ için

$$f(x,ik_0)\,g^{\cdot\prime}(x,ik_0)-g^{\cdot}(x,ik_0)\,f'(x,ik_0)=-\frac{2ik_0}{d}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^2(x)\,dx=-\alpha+o(1) \quad (3.9)$$

bulunur. Burada kullanılan α

$$\alpha=\frac{2ik_0}{d}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^2(x)\,dx$$

şeklindedir. (3.9) denklemi

$$\left[\frac{\Psi^{\cdot}(x)}{f(x,ik_0)}\right]'=\frac{-\alpha+o(1)}{f^2(x,ik_0)}$$

şeklinde yazılabilir. $x\to\infty$ için $f(x,k)$ fonksiyonunun asimptotik gösterimi

$$f(x,k)=e^{ikx}\left[1+o(1)\right]$$

şeklindedir. Bu asimptotik gösterimden yararlanarak $x\to\infty$ için

$$\left[\frac{\Psi^{\cdot}(x)}{f(x,ik_0)}\right]'=-\alpha e^{2k_0x}\left[1+o(1)\right]$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte her iki tarafın integrali alınırsa

$$\Psi^{\cdot}(x) = -\alpha f(x, ik_0) \left\{ \int_a^x e^{2k_0 t} [1 + o(1)] \, dt \right\}$$

elde edilir. Bu eşitlik $e^{2k_0 x}$ ile çarpılıp bölündüğü zaman

$$\Psi^{\cdot}(x) = -\alpha e^{k_0 x} [1 + o(1)] \left\{ \int_a^x e^{-2k_o(x-t)} [1 + o(1)] \, dt \right\}$$

ifadesi bulunur. $x \to \infty$ için

$$\Psi^{\cdot}(x) = -\frac{\alpha}{2k_0} e^{k_0 x} [1 + o(1)]$$

asimptotik eşitlik elde edilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(x) \, dx = ihd \qquad \alpha = \frac{2ik_0}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(x) \, dx$$

Eşitliklerinden yararlanarak $x \to \infty$ için

$$\Psi^{\cdot}(x) = he^{k_0 x} [1 + o(1)]$$

istenilen asimptotik gösterim elde edilir. Bu Lemma' dan $x \to \infty$ durumu için $\Psi(x)$ fonksiyonu azalırken $k = ik_0$ noktasında $\Psi^{\cdot}(x)$ fonksiyonun artan olduğu görülür.

Lemma 3.4

$$a(k) = 1 + \frac{\alpha_1}{ik} + \int_0^\infty \varphi_1(t)\, e^{ikt} dt + \frac{1}{ik} \int_0^\infty \psi_1(t)\, e^{ikt} dt$$

$$b(k) = \frac{\alpha_2}{ik} + \int_{-\infty}^\infty \varphi_2(t)\, e^{ikt} dt + \frac{1}{ik} \int_{-\infty}^\infty \psi_2(t)\, e^{ikt} dt$$

Burada α_1, α_2 reel, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t) \in L(0,\infty)$ ve $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t) \in L(-\infty,\infty)$ gerçeklenir.

İspat. Lemma (3.1) in 3. özelliğinden

$$-2ika(k) = W\{f(x,k), g(x,k)\} = f(x,k)\, g'(x,k) - f'(x,k)\, g(x,k)$$

yazılır. (3.2), (3.3) ve bunların türevlerinden yararlanarak bu eşitlik

$$\begin{aligned} -2ika(k) &= -2ik + A^-(x,x) + A^+(x,x) + e^{ikx} \int_{-\infty}^x A_x^-(x,t)\, e^{-ikt} dt \\ &\quad -e^{-ikx} \int_x^\infty A_x^+(x,t)\, e^{ikt} dt - ike^{-ikx} \int_x^\infty A^+(x,t)\, e^{ikt} dt \\ &\quad -ike^{ikx} \int_{-\infty}^x A^-(x,t)\, e^{-ikt} dt + A^-(x,x)\, e^{-ikx} \int_x^\infty A^+(x,t)\, e^{ikt} dt \\ &\quad +A^+(x,x)\, e^{ikx} \int_{-\infty}^x A^-(x,t)\, e^{-ikt} dt \\ &\quad + \int_x^\infty A^+(x,t)\, e^{ikt} dt \int_{-\infty}^x A_x^-(x,t)\, e^{-ikt} dt \\ &\quad - \int_x^\infty A_x^+(x,t)\, e^{ikt} dt \int_{-\infty}^x A^-(x,t)\, e^{-ikt} dt \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. $-\infty$' dan x' e kadar alınan integrallerde $t = -t$ dönüşümü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
-2ika(k) &= -2ik + A^-(x,x) + A^+(x,x) + e^{ikx}\int_{-x}^{\infty} A_x^-(x,-t)\,e^{ikt}dt \\
&\quad -e^{-ikx}\int_x^{\infty} A_x^+(x,t)\,e^{ikt}dt - ike^{-ikx}\int_x^{\infty} A^+(x,t)\,e^{ikt}dt \\
&\quad -ike^{ikx}\int_{-x}^{\infty} A^-(x,-t)\,e^{ikt}dt + A^-(x,x)\,e^{-ikx}\int_x^{\infty} A^+(x,t)\,e^{ikt}dt \\
&\quad +A^+(x,x)\,e^{ikx}\int_{-x}^{\infty} A^-(x,-t)\,e^{ikt}dt \\
&\quad +\int_x^{\infty} A^+(x,t)\,e^{ikt}dt\int_{-x}^{\infty} A_x^-(x,-t)\,e^{ikt}dt \\
&\quad -\int_x^{\infty} A_x^+(x,t)\,e^{ikt}dt\int_{-x}^{\infty} A^-(x,-t)\,e^{ikt}dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. $x \to 0$ durumu için

$$
\begin{aligned}
-2ika(k) &= -2ik + A^-(0,0) + A^+(0,0) + \int_0^{\infty} A_x^-(0,-t)\,e^{ikt}dt \\
&\quad -\int_0^{\infty} A_x^+(0,t)\,e^{ikt}dt - ik\int_0^{\infty} A^+(0,t)\,e^{ikt}dt \\
&\quad -ik\int_0^{\infty} A^-(0,-t)\,e^{ikt}dt + A^-(0,0)\int_0^{\infty} A^+(0,t)\,e^{ikt}dt \\
&\quad +A^+(0,0)\int_0^{\infty} A^-(0,-t)\,e^{ikt}dt + \int_0^{\infty} A^+(0,t)\,e^{ikt}dt\int_0^{\infty} A_x^-(0,-t)\,e^{ikt}dt \\
&\quad -\int_0^{\infty} A_x^+(0,t)\,e^{ikt}dt\int_0^{\infty} A^-(0,-t)\,e^{ikt}dt
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

şeklinde eşitlik bulunur.

$0 < t < \infty$ aralığında $A^+(0,t)$, $-\infty < t < 0$ aralığında 0 olacak şekilde bir $f_1(t)$ fonksiyonu ve $0 < t < \infty$ aralığında $A_x^-(0,t)$, $-\infty < t < 0$ aralığında 0 olacak şekilde bir $f_2(t)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Buradan

$$\int_0^\infty A^+(0,t)\,e^{ikt}dt \int_0^\infty A_x^-(0,-t)\,e^{ikt}dt \;=\; \int_{-\infty}^\infty f_1(t)\,e^{ikt}dt \int_{-\infty}^\infty f_2(t)\,e^{ikt}dt$$

yazılır. f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$(f_1 * f_2)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f_1(u)\, f_2(t-u)\, du$$

şeklinde tanımlıdır. f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyonunun Fourier dönüşümü f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Buradan

$$\int_{-\infty}^\infty f_1(t)\,e^{ikt}dt \int_{-\infty}^\infty f_2(t)\,e^{ikt}dt = \int_{-\infty}^\infty (f_1 * f_2)(t)\,e^{ikt}dt = \int_0^\infty (f_1 * f_2)(t)\,e^{ikt}dt$$

yazılır. Benzer şekilde $0 < t < \infty$ aralığında $A^-(0,-t)$, $-\infty < t < 0$ aralığında 0 olacak şekilde bir $g_1(t)$ ve $0 < t < \infty$ aralığında $A_x^+(0,t)$, $-\infty < t < 0$ aralığında 0 olacak şekilde bır $g_2(t)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Buradan

$$\int_0^\infty A_x^+(0,t)\,e^{ikt}dt \int_0^\infty A^-(0,-t)\,e^{ikt}dt = \int_0^\infty (g_1 * g_2)(t)\,e^{ikt}dt$$

elde edilir.

$$\alpha_1 = -A^+(0,0) = -A^-(0,0)$$

$$\Psi_1(t) = \frac{A^+(0,t) + A^-(0,-t)}{2} \tag{3.11}$$

$$\varphi_1(t) = -\frac{A_x^-(0,-t) - A_x^+(0,t) + A^+(0,0)A^+(0,t) + A^-(0,t)A^+(0,0) + f_1 * f_2 + g_1 * g_2}{2}$$

Bu eşitlikler (3.10) denkleminde yerine konulduğunda

$$-2ika(k) = -2ik - 2\alpha_1 - 2\int_0^\infty \varphi_1(t)e^{ikt}dt - 2ik\int_0^\infty \Psi_1(t)e^{ikt}dt$$

elde edilir. Gerekli işlemlerler yapıldıktan sonra

$$a(k) = 1 + \frac{\alpha_1}{ik} + \int_0^\infty \varphi_1(t)e^{ikt}dt + \frac{1}{ik}\int_0^\infty \psi_1(t)e^{ikt}dt$$

bulunur. Benzer işlemler yapılarak $b(k)$ fonksiyonu için eşitlik elde edilir.

Lemma 3.5 $k \to 0$ durumu için aşağıdaki eşitlik gerçeklenir.

$$k[a(k) + b(k)] = o(1)$$

İspat. (3.4) denkleminde $x = 0$ yazıldığında

$$f(0,k) = b(k)g(0,k) + a(k)g(0,-k)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğe $a(k)g(0,k)$ eklenip çıkartıldığında

$$f(0,k) = [b(k) + a(k)]g(0,k) + a(k)[g(0,-k) - g(0,k)] \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir. (3.3) denkleminden ve

$$\sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2ik}$$

ifadesinden yararlanarak (3.12) denklemi

$$f(0,k) = [b(k) + a(k)]\, g(0,k) + 2ia(k) \int_{-\infty}^{0} A^{-}(0,t) \sin kt dt$$

şeklinde yazılır.

$$\int_{-\infty}^{0} \left|A^{-}(0,t)\right| dt < \infty \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{0} |\sin kt|\, dt < \infty$$

olduğundan $k \to 0$ için

$$2ia(k) \int_{-\infty}^{0} A^{-}(0,t) \sin kt dt = o\left(\frac{1}{k}\right)$$

elde edilir. (3.12) denkleminden $g(0,0) \neq 0$ için

$$k\,[a(k) + b(k)] = o(1)$$

ifadesi gerçeklenir.

Lemma 3.6 $k \to 0$ için

$$a(k) = \lambda_1 + \frac{\alpha}{ik} + o\left(\frac{1}{k}\right) \qquad b(k) = \lambda_2 - \frac{\alpha}{ik} + o\left(\frac{1}{k}\right)$$

gerçeklenir. Burada λ_1, λ_2 ve α reel sabitlerdir.

İspat. Lemma (3.4) den $a(k)$ ve $b(k)$

$$a(k) = 1 + \frac{\alpha_1}{ik} + \int_0^\infty \varphi_1(t) e^{ikt} dt + \frac{1}{ik} \int_0^\infty \psi_1(t) e^{ikt} dt$$

$$b(k) = \frac{\alpha_2}{ik} + \int_{-\infty}^\infty \varphi_2(t) e^{ikt} dt + \frac{1}{ik} \int_{-\infty}^\infty \psi_2(t) e^{ikt} dt$$

şeklinde elde edilmişti. (3.11) de tanımlı olan α, Ψ ve φ fonksiyonları sınırlı olduğundan $k \to 0$ için $a(k)$ ve $b(k)$' nın asimptotik eşitlikleri bulunur.

4. SAÇILMA TEORİSİNİN TERS PROBLEMİ

Bu bölümde $x < y$ ve $y < x$ için ters problemin temel integral denklemleri elde edilecek ve ters problemin özellikleri incelenecektir.

4.1 Genişleme Teoremi

$k \neq 0$ reel sayı, A ve B keyfi pozitif sayı olmak üzere sonlu aralıkta Sturm-Liouville problemi

$$-y'' + q(x)\, y = k^2 y \qquad (-A \leq x \leq B) \tag{4.1}$$

$$-y(-A) = y(B) = 0 \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlıdır.

$$y_1 = f(x,k) \qquad \text{ve} \qquad y_2 = f(x,-k)$$

(4.1) denkleminin temel iki çözümüdür. Bunların lineer kombinasyonunu

$$\varphi_A(x,k) = f(x,k)\, f(-A,-k) - f(x,-k)\, f(-A,k)$$

şeklinde yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\varphi_A(x,k) = 2\,\mathrm{Im}\left[f(x,k)\, f(-A,-k)\right]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (4.2) şartını sağladığı için

$$\mathrm{Im}\left[f(B,k)\, f(-A,-k)\right] = 0 \tag{4.3}$$

yazılır.

$$f(B,k) = e^{ikB} + \int_B^{\infty} A^{+}(B,t)\, e^{ikt} dt$$

eşitliğinin $B \to \infty$ durumunda asimptotik gösterimi

$$f(B,k) = e^{ikB} + o(1)$$

şeklindedir.

$$\arg\{f(-A,-k)\} = \theta$$

alınırsa (4.3) denklemi

$$\mathrm{Im}\left[e^{i(k\beta+\theta)}\right] = 0$$

şeklinde kutupsal şekilde ifade edilebilir.

Buradan da $\beta \to \infty$ için

$$\sin(k\beta + \theta) = o(1)$$

olur. k_1 ve k_2 bu denklemin peş peşe iki kökleri olsun.

$$k_1\beta + \theta = m\pi + o(1)$$

$$k_2\beta + \theta = (m+1)\pi + o(1)$$

eşitlikleri yazılır. Birinci denklem $-$ ile çarpılıp taraf tarafa toplandığı zaman

$$k_2 - k_1 = \frac{\pi}{\beta} + o\left(\frac{1}{\beta}\right) \tag{4.4}$$

elde edilir.

$k > 0$, $\delta > 0$ olmak üzere $\Delta = (k, k+\delta)$ şeklinde tanımlıdır. $\rho_A(\Delta)$ ile (3.1) denkleminin spektral fonksiyonunu, $\rho_{A,B}(\Delta)$ ile de $[-A, \infty]$ aralığında

$$y(-A) = 0$$

şartını sağlayan (4.1)$-$(4.2) probleminin spektral fonksiyonu gösterilmektedir. $\rho_{A,B}(\Delta)$ spektral fonksiyonu

$$\rho_{A,B}(\Delta) = \sum_{k \le k_n \le k+\delta} \frac{1}{\int_{-A}^{B} \left|\varphi_{A(x,k_n)}\right|^2 dx}$$

şeklinde tanımlıdır. $(k_{n+1} - k_n)$ ile çarpılıp bölünerek ve (4.4) eşitliğinden yararlanılarak

$$\rho_{A,B}(\Delta) = \frac{1}{\pi}\left(\sum_{k \le k_n \le k+\delta} \frac{1}{\frac{1}{\beta}\int_{-A}^{B} \left|\varphi_{A(x,k_n)}\right|^2 dx} + o(1)\right)(k_{n+1} - k_n)$$

ifadesi yazılır.

$$\frac{1}{\beta}\int_{-A}^{B} |\varphi_A(x, k_n)|^2 dx = \frac{1}{2}|f(-A, -k)|^2 + \frac{1}{2}|f(-A, k)|^2$$

ifadesi kullanılarak (3.1) denkleminin spektral fonksiyonu olan $\rho_A(\Delta)$

$$\rho_A(\Delta) = \frac{1}{2\pi}\int_{k}^{k+\delta} \frac{dk}{|f(-A, k)|^2} + o(1)$$

elde edilir.

(3.1) denklemi için $(-A,\infty)$ aralığında pozitif spektrumun Parseval eşitliği

$$J=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\left|\int_{-A}^{\infty}h\left(x\right)\overline{\varphi_A\left(x,k\right)}dx\right|^2\right]\frac{dk}{\left|f\left(-A,k\right)\right|^2}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada kullanılan $h\left(x\right)$ keyfi sınırlı bir fonksiyondur. $A\to\infty$ durumu için bu eşitlik

$$J=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}h\left(x\right)\overline{\varphi_A\left(x,k\right)}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h\left(x\right)}\varphi_A\left(x,k\right)dx\right)\frac{dk}{\left|f\left(-A,k\right)\right|^2}$$

şeklinde yazılır.

$$\varphi_A\left(x,k\right)=f\left(x,k\right)f\left(-A,-k\right)-f\left(x,-k\right)f\left(-A,k\right)$$

eşitliğinden yararlanarak

$$J=\int_0^{\infty}\left[\begin{array}{c}\int_{-\infty}^{\infty}h\left(x\right)f\left(x,-k\right)f\left(-A,k\right)dx\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h\left(x\right)}f\left(x,k\right)f\left(-A,-k\right)dx\\-\int_{-\infty}^{\infty}h\left(x\right)f\left(x,-k\right)f\left(-A,k\right)dx\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h\left(x\right)}f\left(x,-k\right)f\left(-A,k\right)dx\\-\int_{-\infty}^{\infty}h\left(x\right)f\left(x,k\right)f\left(-A,-k\right)dx\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h\left(x\right)}f\left(x,k\right)f\left(-A,-k\right)dx\\+\int_{-\infty}^{\infty}h\left(x\right)f\left(x,k\right)f\left(-A,-k\right)dx\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h\left(x\right)}f\left(x,-k\right)f\left(-A,k\right)dx\end{array}\right]\frac{dk}{2\pi\left|f\left(-A,k\right)\right|^2}$$

elde edilir.

$$H\left(k\right)=\int_{-\infty}^{\infty}h\left(x\right)\overline{f\left(x,k\right)}dx$$

eşitliği yukarıdaki denklemde kullanılırsa

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |H(k)|^2\,dk + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |H(-k)|^2\,dk \tag{4.5}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty H(-k)\,\overline{H(k)}\frac{f(-A,-k)}{f(-A,k)}dk - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty H(k)\,\overline{H(-k)}\frac{f(-A,k)}{f(-A,-k)}dk$$

ifadesi elde edilir.

(4.5) denkleminin sağ tarafındaki 1. ve 2. integraller $A^{'}$ dan bağımsızdır. 3. ve 4. integraller A' ya bağlıdır.

(3.4) denkleminden

$$f(-A,-k) = b(-k)\,g(-A,-k) + a(-k)\,g(-A,k)$$

yazılır. $x \to -\infty$ durumunda

$$g(x,k) = e^{-ikx} + o(1)$$

asimptotik eşitlik gerçeklenir. Bundan yararlanarak $x \to -\infty$ için

$$f(-A,-k) = b(-k)\,e^{-ikA} + a(-k)\,e^{ikA} + o(1)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$f(-A,k) = b(k)\,e^{ikA} + a(k)\,e^{-ikA} + o(1)$$

yazılır.

$$\frac{f(-A,k)}{f(-A,-k)} = \frac{b(k)\,e^{ikA} + a(k)\,e^{-ikA} + o(1)}{b(-k)\,e^{-ikA} + a(-k)\,e^{ikA} + o(1)}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik $\frac{a(k)}{a(-k)}$ ile çarpılıp bölünürse, pay ve payda e^{ikA} parantezine alınırsa

$$\frac{f\left(-A,k\right)}{f\left(-A,-k\right)}=\frac{\frac{b(k)+a(k)e^{-2ikA}+o(1)}{a(k)}}{\frac{b(-k)e^{-2ikA}+a(-k)+o(1)}{a(-k)}}\frac{a\left(k\right)}{a\left(-k\right)}$$

ifadesi elde edilir. Gerekli işlemler yapılınca

$$\frac{f\left(-A,k\right)}{f\left(-A,-k\right)}=\frac{\frac{b(k)}{a(k)}+e^{-2ikA}+o\left(1\right)}{\frac{b(-k)}{a(-k)}e^{-2ikA}+1+o\left(1\right)}\frac{a\left(k\right)}{a\left(-k\right)}$$

elde edilir. $A\rightarrow\infty$ için

$$\frac{f\left(-A,k\right)}{f\left(-A,-k\right)}=\frac{b\left(k\right)}{a\left(-k\right)}+o\left(1\right)$$

asimptotik eşitliği bulunur.

Riemann Lebesgue Teoreminden (4.5) eşitliğinin sağ tarafında ki 4. integralin yerine

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}H\left(k\right)\overline{H\left(-k\right)}\frac{b\left(k\right)}{a\left(-k\right)}dk$$

ifadesi yazılabilir. Benzer şekilde 3. integralin yerinede

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}H\left(-k\right)\overline{H\left(k\right)}\frac{b\left(-k\right)}{a\left(k\right)}dk$$

yazılabilir.

Discrete spektrum için Parseval eşitliği

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}dx &= \sum_{J=1}^{n}\frac{1}{m_j^+}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\psi_j(x)\,dx\overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\psi_j(x)\,dx} \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\,\overline{G(k)}dk-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(-k)\,\overline{G(k)}\frac{b(-k)}{a(k)}dk\end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklindedir. Burada ki $f(x)$ ve $g(x)$ kompleks değerlidir.

$$\lambda_j=-k_j^2$$

negatif özdeğerlerdir ve

$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{f(x,k)}dx \qquad G(k)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\overline{f(x,k)}dx$$

$$\psi_j(x)=f(x,ik_j) \qquad m_j^+=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_j^2(x)\,dx$$

şeklinde eşitlikler tanımlıdır.

$f(x,k)$ ve $f(x,-k)$ fonksiyonları için (4.6) denkleminin sembolik gösterimi

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\,\overline{f(y,k)}dk \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\,f(y,k)\,\frac{b(-k)}{a(k)}dk+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j^+}f(x,ik_j)\,f(y,ik_j)\end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklindedir.

$g(x,k)$ ve $g(x,-k)$ fonksiyonları için de (4.6) denkleminin sembolik gösterimi

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,k)\,\overline{g(y,k)}dk \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,k)\,g(y,k)\,\frac{b(k)}{a(k)}dk+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j^-}g(x,ik_j)\,g(y,ik_j)\end{aligned} \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.2 TERS PROBLEMİN TEMEL İNTEGRAL DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİ

$y > x$ durumunda

$$\delta(x-y)=0$$

olduğu için (4.7) sembolik denklemi

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\,\overline{f(y,k)}dk \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\,f(y,k)\,\frac{b(-k)}{a(k)}dk+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j^+}f(x,ik_j)\,f(y,ik_j)\end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

$$f(y,k)=e^{iky}$$

alınırsa bu eşitlik

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\, e^{-iky} dk$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\, e^{iky}\frac{b(-k)}{a(k)} dk + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j^+} f(x,ik_j)\, e^{-k_j y} = 0$$

şeklinde yazılır. (3.2) eşitliğinden yararlanılarak

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j^+} e^{-kj(x+y)} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j^+}\int_x^{\infty} A^+(x,t)\, e^{-kj(t+y)} dt \tag{4.9}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_x^{\infty} A^+(x,t)\, e^{ik(t-y)} dt\right\} dk$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(-k)}{a(k)} e^{ik(x+y)} dk - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(-k)}{a(k)}\int_x^{\infty} A^+(x,t)\, e^{ik(t+y)} dt dk = 0$$

ifadesi elde edilir.

Dirac Delta fonksiyon tanımından

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dk = \delta(x-y)$$

yazılır. Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt} dt = F(w)$$

ve Ters Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}^-\{F\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt} dt = f(t)$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{\infty}A^{+}(x,t)\,e^{ik(t-y)}dtdk$$

ifadesine bir düz bir de ters Fourier dönüşümü uygulandığı zaman $A^{+}(x,y)$ elde edilir. Buradan yararlanarak (4.9) denklemi

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j^{+}}e^{-kj(x+y)}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j^{+}}\int_{x}^{\infty}A^{+}(x,t)\,e^{-kj(t+y)}dt\\&+\delta(x-y)+A^{+}(x,y)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(-k)}{a(k)}e^{ik(x+y)}dk\\&-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(-k)}{a(k)}\int_{x}^{\infty}A^{+}(x,t)\,e^{ik(t+y)}dtdk=0\end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

$x<y$ için ters problemin temel integral denklemi

$$F^{+}(x+y)+A^{+}(x,y)+\int_{x}^{\infty}A^{+}(x,t)\,F^{+}(t+y)\,dt=0 \tag{4.10}$$

şeklinde olur. Burada kullanılan $F^{+}(x)$ geçiş fonksiyonu

$$F^{+}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j^{+}}e^{-k_jx}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(-k)}{a(k)}e^{ikx}dk \tag{4.11}$$

gibi tanımlıdır.

k_j ler verildiğinde bunlar yardımı ile geçiş fonksiyonu bulunur. F^{+} fonksiyonu yardımı ile (4.10) denkleminde A^{+} fonksiyonu bulunur.

Benzer işlemler (4.8) sembolik denklemine uygulanarak $x>y$ için ters problemin temel integral denklemi

$$F^{-}(x+y)+A^{-}(x,y)+\int_{-\infty}^{x}A^{-}(x,t)\,F^{-}(t+y)\,dt=0 \tag{4.12}$$

şeklinde elde edilir. Burada kullanılan $F^{-}(x)$ geçiş fonksiyonu

$$F^{-}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j^{-}}e^{k_j x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(k)}{a(k)}e^{-ikx}dk \tag{4.13}$$

şeklinde tanımlıdır.

$(-\infty<x<\infty)$ aralığında $q_1(x)$ ve $q_2(x)$ potansiyel fonksiyonları

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|q(x)|\,dx<\infty$$

eşitsizliğini sağlamak üzere

$$-y''+q_1(x)\,y=k^2y$$

$$-y''+q_2(x)\,y=k^2y$$

denklemleri yazılabilir. 1. ve 2. denklemin saçılma verileri sırası ile

$$\left\{a_1(k),\ b_1(k);\ ik_1^{(1)},\ ik_2^{(1)}...,\ ik_{n1}^{(1)};\ m_1^{(1)^-},\ m_2^{(1)^-}...,\ m_{n1}^{(1)^-}\right\}$$

$$\left\{a_2(k),\ b_2(k);\ ik_1^{(2)},\ ik_2^{(2)}...,\ ik_{n2}^{(2)};\ m_1^{(2)^-},\ m_2^{(2)^-}...,\ m_{n2}^{(2)^-}\right\}$$

şeklindedir. $g_j(x,k)$ ile bu denklemlerin Jost çözümleri gösterilirse $x\to-\infty$ için asimptotik gösterimi

$$g_j(x,k) = e^{-ikx} + o(1)$$

şeklindedir.

$x < \infty$ için

$$l_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + q_1(x) \qquad l_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + q_2(x)$$

l_1 ve l_2 operatör çifti arasındaki dönüşüm operatörü

$$g_2(x,k) = g_1(x,k) + \int_{-\infty}^{x} B(x,y)\, g_1(y,k)\, dy \tag{4.14}$$

gibi tanımlıdır. Bu dönüşüm operatörünün çekirdeği olan $B(x,y)$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - q_2(x) B = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - q_1(y) B$$

probleminin bir çözümüdür. Ve

$$B(x,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} (q_2(t) - q_1(t))\, dt$$

şartını sağlar.

(4.14) dönüşüm operatörünün çekirdeği $B(x,y)$ için ters problemin temel integral denklemi

$$B(x,y) + F(x+y) + \int_{-\infty}^{x} B(x,t)\, F(t+y)\, dt = 0$$

olur. Burada kullanılan $F(x,y)$ geçiş fonksiyonu

$$F(x+y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x,k)\, g_2(y,k)\left[\frac{b_2(k)}{a_2(k)} - \frac{b_1(k)}{a_1(k)}\right] dk + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{1}{m_j^{(2)^-}} g_1\left(x, ik_j^{(2)}\right) g_1\left(y, ik_j^{(2)}\right) - \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{m_j^{(1)^-}} g_1\left(x, ik_j^{(1)}\right) g_1\left(y, ik_j^{(1)}\right)$$

gibi tanımlıdır.

4.3 TERS PROBLEM

$a(k)$ ve $b(k)$ birer fonksiyon, m_1^-, m_2^-... m_n^-; m_1^+, m_2^+... m_n^+ pozitif sayılar, k_1, k_2... k_n keyfi pozitif sayılardır. $F^+(x)$ ve $F^-(x)$ (4.11) ve (4.13) de tanımlı olmak üzere ters problemin temel integral denklemleri

$$F^+(x+y) + A^+(x,y) + \int_x^{\infty} A^+(x,t)\, F^+(t+y)\, dt = 0 \qquad (y > x) \tag{4.15}$$

$$F^-(x+y) + A^-(x,y) + \int_{-\infty}^{x} A^-(x,t)\, F^-(t+y)\, dt = 0 \qquad (x > y) \tag{4.16}$$

şeklindedir.

Lemma 4.3.1 $k \neq 0$ olmak üzere

$$\left|\frac{b(-k)}{a(k)}\right| < 1 \qquad \left|\frac{b(k)}{a(k)}\right| < 1$$

eşitsizlikleri sağlandığı sürece her sonlu x değeri için (4.15) ve (4.16) denklemlerinin tek bir çözümü vardır.

İspat.

$$\varphi(y) + \int_x^\infty \varphi(t) F^+(t+y)\, dt = 0 \quad (y > x) \tag{4.17}$$

temel denklemin homogen denklemi biçimindedir.

(4.17) denkleminin $L^2(x,\infty)$ da sıfırdan farklı hiç bir çözümü yoktur. Kabul edelim sıfırdan farklı bir çözümü olsun.

(4.17) eşitliği $\varphi(y)$ ile çarpılırsa

$$\varphi^2(y) + \varphi(y) \int_x^\infty \varphi(t) F^+(t+y)\, dt = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin integrali alınırsa

$$\int_x^\infty \varphi^2(y)\, dy + \int_x^\infty \varphi(y) \int_x^\infty \varphi(t) F^+(t+y)\, dtdy = 0$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikten ve (4.11) denkleminden yararlanarak

$$\int_x^\infty \varphi^2(y)\, dy + \int_x^\infty \varphi(y) \int_x^\infty \sum_{j=1}^n \frac{1}{m_j} e^{-k_j(t+y)} \varphi(t)\, dtdy$$
$$-\frac{1}{2\pi} \int_x^\infty \varphi(y) \int_x^\infty \varphi(t) \int_{-\infty}^\infty \frac{b(-k)}{a(k)} e^{ik(t+y)} dkdtdy = 0$$

ifadesi elde edilir. Eşitlikte integrallerin sırası değiştirilir ve

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{m_j} e^{-k_j(t+y)} \varphi(t)$$

serisi düzgün yakınsak olduğu için terim terime integrallenebilir. Bu ifadelerden

yararlanarak

$$\int_x^\infty \varphi^2(y)\,dy + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j^+} \left(\int_x^\infty \varphi(t)\, e^{-k_j t} dt \right)^2 \qquad (4.18)$$
$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(-k)}{a(k)} \left(\int_x^\infty \varphi(t)\, e^{ikt} dt \right)^2 dk = 0$$

ifadesi elde edilir.

$$\Phi^+(k) = \int_x^\infty \varphi(t)\, e^{ikt} dt$$

olacak şekilde Fourier dönüşümün Parseval denklemi

$$\int_x^\infty \varphi^2(y)\,dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Phi^+(k)\right|^2 dk$$

şeklinde tanımlıdır. Parseval eşitliği (4.18) denkleminde kullanıldığında

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Phi^+(k)\right|^2 dk + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j^+} \left(\int_x^\infty \varphi(t)\, e^{-k_j t} dt \right)^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(-k)}{a(k)} \left[\Phi^+(k)\right]^2 dk = 0 \qquad (4.19)$$

elde edilir.

$$\arg\left(\Phi^+(k)\right) = \theta(k) \qquad \arg\frac{b(-k)}{a(k)} = \eta(k)$$

olmak üzere (4.19) denkleminde

$$\frac{b(-k)}{a(k)} \left[\Phi^+(k)\right]^2$$

ifadesi kutupsal biçimde yazılarak

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j^+} \left(\int_x^\infty \varphi(t)\, e^{-k_j t} dt \right)^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Phi^+(k) \right|^2 \left(1 - \left| \frac{b(-k)}{a(k)} \right| e^{i(\eta(k)+2\theta(k))} \right) dk = 0 \tag{4.20}$$

eşitliği elde edilir.

$$\mathrm{Re}\left(e^{i(\eta(k)+2\theta(k))} \right) = \cos\left(\eta(k) + 2\theta(k)\right)$$

olduğu için (4.20) eşitliğinin reel kısmı

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j^+} \left(\int_x^\infty \varphi(t)\, e^{-k_j t} dt \right)^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Phi^+(k) \right|^2 \left(1 - \left| \frac{b(-k)}{a(k)} \right| \cos\left(\eta(k) + 2\theta(k)\right) \right) dk = 0$$

şeklindedir.

$$\left| \frac{b(-k)}{a(k)} \right| < 1$$

şartı altında bu denklemin 0 olması için tek durum

$$\Phi^+(k) = 0 \qquad \varphi(t) = 0$$

olmasıdır. Buradan çelişki elde edilir ve (4.15) denkleminin her sonlu x değeri için tek bir çözümü vardır. Benzer işlemler (4.16) için de yapılarak elde edilir.

4.4. TÜM EKSENDE SAÇILMA TEORİSİNİN TERS PROBLEMİNİN TEMEL TEOREMİNİN İSPATI

$x > -\infty$ için

$$-y'' + q^{+}(x)\, y = k^2 y$$

ve $x < \infty$ için

$$-y'' + q^{-}(x)\, y = k^2 y$$

denklemleri için geçiş fonksiyonları

$$\begin{aligned} F_1^{+}(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(-k)}{a(k)} e^{ikx} dk \\ F_1^{-}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(k)}{a(k)} e^{-ikx} dk \end{aligned} \tag{4.21}$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 4.4.1 $a(k)$ ve $b(k)$

$$a(-k) = \overline{a(k)} \qquad b(-k) = \overline{b(k)} \qquad |a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2$$

eşitliklerini sağlayan iki fonksiyondur. Geçiş fonksiyonları (4.21) de tanımlı olmak üzere ters problemin temel integral denklemleri

$$F_1^- (x+y) + A^- (x,y) + \int_{-\infty}^{x} A^- (x,t) F_1^- (t+y)\, dt = 0 \qquad (y<x) \quad (4.22)$$
$$F_1^+ (x+y) + A^+ (x,y) + \int_{x}^{\infty} A^+ (x,t) F_1^+ (t+y)\, dt = 0 \qquad (x<y)$$

şeklindedir ve

$$q^+ (x) = -2\frac{d}{dx} A^+ (x,x) \qquad q^- (x) = -2\frac{d}{dx} A^- (x,x)$$

fonksiyonları için

$$q^+ (x) \equiv q^- (x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_{x}^{\infty} A^+ (x,t)\, e^{ikt} dt$$

şeklinde tanımlı olan $f(x,k)$

$$-y'' + q^+ (x)\, y = k^2 y$$

denkleminin bir çözümüdür. Benzer şekilde

$$g(x,k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} A^- (x,t)\, e^{-ikt} dt$$

şeklinde tanımlı olan $g(x,k)$

$$-y'' + q^{-}(x)\, y = k^2 y$$

denkleminin bir çözümüdür. Bu ifadelerden yararlanarak

$$-f'' + q^{+}(x)\, f = k^2 f \tag{4.23}$$

$$-g'' + q^{-}(x)\, g = k^2 g \tag{4.24}$$

eşitlikleri yazılır.

$A^{-}(x,y)$ fonksiyonu $x > y$ için tanımlıdır. $y > x$ için

$$A^{-}(x,y) = 0$$

alınarak $A^{-}(x,y)$ fonksiyonu tüm R' ye genişletilebilir.

$$\Phi^{-}(x,y) = F_1^{-}(x+y) + A^{-}(x,y) + \int_{-\infty}^{x} A^{-}(x,t)\, F_1^{-}(t+y)\, dt \tag{4.25}$$

$x > y$ için ters problemin temel integral denkleminden

$$\Phi^{-}(x,y) = 0$$

olur. (4.25) denklemi e^{iky} ile çarpılıp $-\infty$ ' dan ∞ 'a kadar integrali alındığında

$$\begin{aligned}\int_{x}^{\infty} \Phi^{-}(x,y)\, e^{iky} dy &= \int_{-\infty}^{x} A^{-}(x,y)\, e^{iky} dy + \int_{-\infty}^{\infty} F_1^{-}(x+y)\, e^{iky} dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} A^{-}(x,t)\, F_1^{-}(t+y)\, e^{iky} dt dy\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. F_1^- fonksiyonu için ters Fourier dönüşümünden ve konvolüsyondan yararlanılarak

$$\begin{aligned}\int_x^\infty \Phi^-(x,y)\, e^{iky} dy &= \int_{-\infty}^x A^-(x,y)\, e^{iky} dy + \frac{b(k)}{a(k)} e^{-ikx} \\ &\quad + \frac{b(k)}{a(k)} \int_{-\infty}^x A^-(x,t)\, e^{-ikt} dt\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafına e^{ikx} eklenirse

$$\begin{aligned}e^{ikx} + \int_x^\infty \Phi^-(x,y)\, e^{iky} dy &= e^{ikx} + \int_{-\infty}^x A^-(x,y)\, e^{iky} dy + \frac{b(k)}{a(k)} e^{-ikx} \\ &\quad + \frac{b(k)}{a(k)} \int_{-\infty}^x A^-(x,t)\, e^{-ikt} dt\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $g(x,k)$ nın tanımından yararlanılarak bu eşitlik

$$e^{ikx} + \int_x^\infty \Phi^-(x,y)\, e^{iky} dy = g(x,-k) + \frac{b(k)}{a(k)} g(x,k)$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlik düzenlenerek

$$a(k)\left(e^{ikx} + \int_x^\infty \Phi^-(x,y)\, e^{iky} dy\right) = a(k)\, g(x,-k) + b(k)\, g(x,k)$$

formunda yazılabilir.

$$f(x,k) = b(k)\, g(x,k) + a(k)\, g(x,-k)$$

olduğu için

$$a(k)\left(e^{ikx}+\int_x^\infty \Phi^-(x,y)\,e^{iky}dy\right)=f(x,k)$$

eşitliği yazılır.

$$\begin{aligned} f(x,k) &= b(k)\,g(x,k)+a(k)\,g(x,-k) \\ f(x,-k) &= b(-k)\,g(x,-k)+a(-k)\,g(x,k) \end{aligned}$$

ilk denklem $-b(-k)$ ile ikinci denklem $a(k)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanıldığı zaman

$$a(k)\,f(x,-k)-b(-k)\,f(x,k)=\left(a(k)\,a(-k)-b(k)\,b(-k)\right)g(x,k)$$

ifadesi elde edilir.

$$a(-k)=\overline{a(k)} \qquad b(-k)=\overline{b(k)} \qquad |a(k)|^2=1+|b(k)|^2$$

eşitliklerinden yararlanılarak

$$g(x,k)=a(k)\,f(x,-k)-b(-k)\,f(x,k)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik $-$ ile çarpılıp x 'e göre türevi alınırsa

$$-g''(x,k)=b(-k)\,f''(x,k)-a(k)\,f''(x,-k)$$

ifadesi elde edilir. (4.23) eşitliğinden yararlanılarak bu ifade

$$-g^{''}(x,k) = -\left(q^{+}(x) - k^{2}\right) g(x,k)$$

şeklinde yazılır. Gerekli işlemler yapılarak

$$-g^{''}(x,k) + q^{+}(x)\, g(x,k) = k^{2} g(x,k)$$

eşitliği elde edilir. (4.24) eşitliğinden de yararlanılarak

$$q^{+}(x) \equiv q^{-}(x)$$

olur.

5. SONUÇ

Saçılım teorisinin matematiğin ve kuantum mekaniğinin çeşitli alanlarda uygulamaları olduğundan bu tez önem arz etmektedir. Bu tezde çeşitli Sturm-Liouville operatörlerinin Jost çözümleri, Jost çözümlerinin asimptotikleri ve saçılım verilerinin özellikleri incelenmiştir. Hem yarım eksende hem de tüm reel eksende tanımlı Sturm-Liouville operatörlerinin saçılım teorisinin düz ve ters problemleri incelenmiştir. Ters problemin temel integral denklemi elde edilmiştir. Belirli bir koşul altında ters problemin temel integral denkleminin tek bir çözümü olduğu gösterilmiştir. Son olarak tüm eksende saçılma teorisinin ters probleminin temel teoremi ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

Degasperis, A. 1970. On the inverse problem for the Klein Gordon s wave equation. J. Math. 11, 551-567.

Jaulent, M. 1972. On an inverse scattering problem with an energy- dependent potential. Ann. Inst. Sec. A 17, 363-378.

Jaulent, M. and Jean, C. 1972. The inverse s wave scattering problem for a class of potentials depending an energy. Math. Phys. 28, 177-220.

Jaulent, M. and Jean, C. 1976. The inverse problem for the one dimensional Scrödinger equation with an energy- dependent potential. Ann. Inst. Sec A 25, 105-118.

Kammler, D.W. 2008. A first course in Fourier analysis. New York, 102-149.

Levitan, B. M. 1987. Inverse Sturm-Liouville problems, 121-152.

Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S. 1975. Introduction to Spektral theory selfadjoint ordinary differential operators, 101-165.

Marchenko, V.A. 1986. Sturm-Liouville operators and applications. Boston,

200-284.

Naimark, M. A. 1968. Linear differantial operators I, II. New York.

Saff, E.B. and Snider, A.D. 2003. Fundamentals of complex analysis, 143-150.

Titchmarsh, E.C. 1948. Introduction to the theory of Fourier integrals, 115-130.

Vretblad, A. 2003. Fourier analysis and its applications. New York, 167-197.

Wade, W.R. 2003. An introduction to analysis. New Jersey, 102-119.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Güler Başak EREN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 02 /02/1989

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (**Kurum ve Yıl**) :

Lise : Mustafa Kemal Lisesi (2007)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2012)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2013 - Ekim 2015)