ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKINSAKLIK ve İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ORANLARI

TUBA AYDOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2006

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAKINSAKLIK ve İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ORANLARI

Tuba AYDOĞAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde yakınsaklık oranlarına ilişkin temel kavramlar hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde dizilerin yakınsaklık oranlarıyla ilgili örnekler verilmiş ve bazı matris dönüşümleri yardımıyla yakınsaklığın hızlandırılması ya da yavaşlatılması incelenmiştir.

Son bölümde de istatistiksel ve T- istatistiksel yakınsaklık oranları ele alınmıştır.

2006, 34 sayfa

Anahtar Kelimeler: Yakınsaklık, İstatistiksel yakınsaklık, T-istatistiksel yakınsaklık, Yoğunluk, Toplanabilme, Regüler, Metod.

ABSTRACT

Master Thesis

RATES of CONVERGENCE and STATISTICAL CONVERGENCE

Tuba AYDOĞAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cihan ORHAN

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In Chapter two some basic concepts concerning the rates of convergence are recalled.

In Chapter three some examples related to rates of convergence of sequences are presented. Furthermore some summability methods which are speeding up or slowing down convergence of sequences are studied.

In the last chapter rates of satistical and T- statistical convergences are examined.

2006, 34 pages

Key Words: Convergence, Statistical convergence, T-statistical convergence, Density, Summability, Regular, Method.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a, çalışmalarımda yardım ve katkılarını esirgemeyen çok değerli hocam Araş. Gör. Özlem Atlıhan GİRGİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında beni her konuda destekleyip, her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Tuba AYDOĞAN
Ankara, Aralık 2006

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 2
3. YAKINSAKLIK ORANLARI VE TOPLANABİLME 4
3.1 Yakınsaklık Oranları 4
3.2 F- Yakınsaklık Oranları 13
4. İSTATİSTİKSEL VE *T*- İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ORANLARI 15
4.1 İstatistiksel Yakınsaklık Oranları 15
4.2 *T*- İstatistiksel Yakınsaklık Oranları 27
KAYNAKLAR 32
ÖZGEÇMİŞ 34

SIMGELER DIZINI

$Ax = ((Ax)_n)$	$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right)$ dönüşüm dizisi
c	Reel terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	Reel terimli sıfıra yakınsayan diziler uzayı
ℓ_1	Reel terimli sınırlı diziler uzayı
st	Reel terimli istatistiksel yakınsak diziler uzayı
N	Doğal sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
$\pm(K)$	K cümlesinin yoğunluğu
$\pm_T(K)$	K cümlesinin T- yoğunluğu
$\hat{\chi}_K$	K cümlesinin karakteristik fonksiyonu
$(C;1)$	Cesàro matrisi

1. GİRİŞ

$\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Eğer

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1} \to L$$

ise (s_n) dizisi L değerine $(C,1)$ yakınsaktır veya Cesàro Toplanabilirdir diyoruz.

Böylelikle yakınsaklık kavramının genelleştirilmesi görüşü ortaya çıkar. Örneğin $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisi ele alınsın. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi $(s_n) = (1,0,1,0,\ldots)$ olup genel terimi

$$(s_n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\right)$$

biçimindedir. (s_n) dizisinin aritmetik ortalamasına (t_n) dersek,

$$\begin{aligned}(t_n) &= \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1) + \frac{1+(-1)^n}{2}}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1+(-1)^n}{4(n+1)}\end{aligned}$$

olur. Burada $n \to \infty$ için $t_n \to \frac{1}{2}$ olup klasik anlamda yakınsak olmayan $(1,0,1,\ldots)$ dizisi $\frac{1}{2}$ değerine $(C,1)$ yakınsaktır.

Toplanabilme teorisi yukarıdaki örnekte de görüldüğü üzere, ıraksak bir seriye bir toplam karşılık getirmekle ilgilenir. En yaygın yöntem olarak sonsuz matrislerden yararlanılır.

İki sıfır dizisinden birinin diğerine göre daha hızlı yakınsak olamamasına rağmen istatiksel anlamda daha hızlı yakınsayabileceği yakın zamanda gösterilmiştir. Bu nedenle yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık oranlarının bilinmesi önemlidir.

Bu çalışmada yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık oranları tanıtılacak, aralarındaki ilişkiler incelenecektir. Ayrıca bu düşünceler toplanabilme metodlarına uygulanacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda tezde yararlanacağımız temel kavramları vereceğiz.

Tanım 2.1. $x_n \to L_1$, $y_n \to L_2$ olacak biçimde iki yakınsak dizi alalım. Her n için $y_n \neq L_2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - L_1}{y_n - L_2} = 0$$

sağlanıyorsa (x_n) dizisi, (y_n) dizisinden daha hızlı yakınsaktır denir (Miller 1973).

Örneğin

$$x_n = \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{1}{n+1}$$

olsun. $(x_n) \in c_0$ ve $(y_n) \in c_0$ olup

$$\lim_{n} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

bulunur. O halde (x_n) dizisi, (y_n) dizisinden daha hızlı yakınsaktır.

Tanım 2.2.

$$u_n = \left| \frac{x_n - L_1}{y_n - L_2} \right|$$

alalım.

$$0 < \underline{\lim}_{n\to\infty}\ u_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}\ u_n < \infty$$

ise (x_n) ile (y_n) aynı oranda yakınsaktır denir (Miller 1982).

Tanım 2.3. $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Her n için

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

yakınsak ise $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine $x = (x_n)$ dizisinin A dönüşümü denir. Eğer $Ax \in c$ ise x dizisine A- toplanabilirdir denir. c yakınsak diziler uzayı olmak üzere

$$c_A = \{x : Ax \in c\}$$

uzayına da A matrisinin toplanabilirlik alanı denir (Boos 2000).

Tanım 2.4. $Ax = ((Ax)_n)$ mevcut olsun. $x_n \to L_1$ ve $(Ax)_n \to L_2$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(Ax)_n - L_2}{x_n - L_1} = 0 \text{ (veya } \infty \text{ ise)}$$

A matrisi (x_n) dizisinin yakınsaklık hızını artırır (veya azaltır) denir. Ne (x_n) dizisi $((Ax)_n)$ dizisinden, ne de $((Ax)_n)$ dizisi (x_n) dizisinden daha hızlı yakınsak değilse bu durumda A dönüşümüne yakınsaklık hızını değiştirmeyen dönüşüm denir (Miller 1973).

Tanım 2.5. A ve B sonsuz matrisleri verilsin. Eğer her $x \in c_A \cap c_B$ için $\lim_{n\to\infty} (Ax)_n = \lim_{n\to\infty} (Bx)_n$ ise A ve B metodları tutarlıdır denir (Miller 1983).

Tanım 2.6. Yakınsak her diziyi yine yakınsak bir diziye limitleri koruyarak dönüştüren matrislere regüler matris denir (Boos 2000).

Regüler matrisler aşağıdaki teoremle karakterize edilir.

Teorem 2.1. Reel ya da kompleks terimli sonsuz bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

i) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

ii) Her k için $\lim_n a_{nk} = 0$

iii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

gerçeklenmesidir (Boos 2000).

Tanım 2.7. Sınırlı dizileri yakınsak dizilere dönüştüren $A = (a_{nk})$ matrisine Schur matrisi denir. Schur matrisleri sınıfı τ_C^* ile gösterilir (Boos 2000).

3. YAKINSAKLIK ORANLARI VE TOPLANABİLME

Bu bölümde yakınsaklık hızlarının kıyaslanmasına değinilecek ve çeşitli metodlar yardımıyla yakınsaklığın hızlandırılması ya da yavaşlatılmasına ilişkin örnekler verilecektir.

3.1 Yakınsaklık Oranları

Önce aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.1.1. (a_n) dizisi verilsin. Eğer

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{x^n}{n!} = L$$

oluyorsa (a_n) dizisi L- değerine Borel Toplanabilirdir denir. Borel metoduna karşılık gelen matris regüler olup

$$c_{mn} = e^{-m}\frac{m^n}{n!} \quad ; \quad m,n = 0,1,2,\ldots$$

ile verilir.

$\sum a_n$ serisinin $n-$ inci kısmi toplamı $s_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ olacak biçimde seçilsin. Borel metodunu (s_n) dizisine uygularsak

$$\begin{aligned} t_m &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}s_n \\ &= e^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, m^n}{(n+1)\,n!} \\ &= e^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-m)^n}{(n+1)!}\left(\frac{-m}{-m}\right) \\ &= \frac{e^{-m}}{-m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-m)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= -\frac{e^{-m}}{m}\left(e^{-m}-1\right) \quad ; \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $m \to \infty$ için $t_m \to 0$ olduğu görülür.

Yakınsaklık oranlarına bakıldığında,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{t_m-0}{s_m-0} &= \lim_{m\to\infty}\frac{-\frac{e^{-m}\left(e^{-m}-1\right)}{m}}{\frac{(-1)^m}{m+1}}\\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Yani Borel metodu, (s_n) dizisinin yakınsaklığını hızlandırır.

Örnek 3.1.2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi verilsin. Euler metoduna karşılık gelen matris

$$c_{mn}=\begin{cases}2^{-m-1}\begin{pmatrix}m+1\\n+1\end{pmatrix} & ;\quad n\le m\\ 0 & ;\quad n>m\end{cases}$$

biçimindedir.

$\sum a_n$ serisi $n-$ inci kısmi toplamı

$$s_n=1-\frac{1}{2^{n+1}}$$

olacak biçimde seçilsin. Euler metodunu (s_n) dizisine uygularsak

$$\begin{aligned}t_m &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}s_n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-m-1}\begin{pmatrix}m+1\\n+1\end{pmatrix}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-m-1}\begin{pmatrix}m+1\\n+1\end{pmatrix}-\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-m-1}\begin{pmatrix}m+1\\n+1\end{pmatrix}\frac{1}{2^{n+1}}\\ &= 2^{-m-1}\left(2^{m+1}-1\right)-2^{-m-1}\left[-1\right]\\ &= 1-2^{-m-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{m+1}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $m \to \infty$ için $t_m \to 1$ olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \frac{s_m - 1}{t_m - 1} &= \lim_{m\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{m+1}} - 1}{-2^{-m-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{m+1}} \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yani Euler metodu (s_n) dizisinin yakınsaklığını yavaşlatır.

Teorem 3.1.1. Yakınsaklık hızını değiştirmeyen ve bazı sınırlı dizileri limitleyen regüler bir A matrisi vardır (Miller 1973).

İspat : Bir A matrisi

$$a_{mn} = \begin{cases} a_{2^n-1,2^n-1} = a_{2^n,2^n+1} = 1 & ; \quad n = 1, 2, \ldots \\ 0 & ; \quad m \geq 1 \text{ ve } n \geq 1 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu matris (x_n) dizisine uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_5 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\lim_n x_n = L$ olduğunda $\lim_n (Ax)_n = L$ olup A dönüşümünün regüler olduğu görülür. Ayrıca

$$\frac{(Ax)_n - L}{x_n - L} = \left\{ \frac{x_1 - L}{x_1 - L}, \frac{x_3 - L}{x_2 - L}, \frac{x_3 - L}{x_3 - L}, \ldots \right\}$$

olduğundan dizi sonsuz tane "1" içerir. Dolayısıyla sıfıra yakınsıyamaz. Benzer biçimde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - L}{(Ax)_n - L} \neq 0$$

olacağı gösterilebilir. Yani A dönüşümü yakınsaklık hızını değiştirmez. Eğer

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n=1}^{\infty} \\ &= (1,0,1,0,\ldots) \end{aligned}$$

ile tanımlanan diziye A dönüşümü uygulanırsa

$$Ax = (1,1,1,1,\ldots)$$

dizisi elde edilir. Burada $\lim Ax = 1$ olup verilen dönüşüm, ıraksak olan x dizisini limitler. ■

Teorem 3.1.2.

$$\limsup_m c_{mm} < 1$$

olacak biçimde bir negatif olmayan, regüler üçgensel matrislerin (c_{mn}) toplanabilme metodu, bazı sıfır dizilerinin yakınsaklığını yavaşlatır (Miller 1973).

İspat :

$$\left(\frac{1}{n!}\right)_{n=0}^{\infty}$$

dizisini ele alalım. $\limsup_m c_{mm} < 1$ koşulu gerçeklendiğinden en az bir $\varepsilon > 0$ ve pozitif bir M_1 tamsayısı bulunabilir öyle ki her $m \geq M_1$ için

$$c_{mm} < 1 - \varepsilon$$

gerçeklenir. (c_{mn}) metodu regüler olduğundan

$$\lim_m \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} = 1$$

olup her $m \geq M_2$ için

$$\sum_{n=0}^{m} c_{mn} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde pozitif bir M_2 sayısı vardır. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{m} c_{mn} = \sum_{n=0}^{m-1} c_{mn} + c_{mm} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

olup

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m-1} c_{mn} &> 1 - \frac{\varepsilon}{2} - c_{mm} \\ &> 1 - \frac{\varepsilon}{2} - 1 + \varepsilon \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

bulunur. Şimdi $m \geq maks(M_1, M_2)$ olmak üzere 3.1.1 den

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{m!} - 0}{\sum_{n=0}^{m} c_{mn}\frac{1}{n!} - 0} &\leq \frac{\frac{1}{m!}}{\sum_{n=0}^{m-1} c_{mn}\frac{1}{n!}} \\ &\leq \frac{\frac{1}{m!}}{\frac{\varepsilon}{2(m-1)!}} \\ &= \frac{\frac{1}{m(m-1)!}}{\frac{\varepsilon}{2(m-1)!}} \\ &= \frac{2}{m\varepsilon} \end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ sabit ve $\lim_{m} \frac{2}{m\varepsilon} = 0$ olduğundan (c_{mn}) metodu, $\left(\frac{1}{n!}\right)$ dizisinin yakınsaklığını yavaşlatır. ■

Teorem 3.1.3. Bir A Schur matrisi ve terimleri sıfırdan farklı olan bir x sıfır dizisi vardır öyle ki A matrisi, x in bir y altdizisinin yakınsaklık hızını ne artırır ne de yavaşlatır (Miller 1973).

İspat : $A = (c_{mn})$ matrisi

$$\begin{aligned} c_{2^m,\left[\left|\frac{2m}{4}\right|\right]} &= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \\ c_{2^m,\left[\left|\frac{5}{4}(2m+1)\right|\right]} &= \frac{1}{2^{\frac{2m+1}{4}}} \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \\ c_{m,n} &= 0 \quad ; \quad \text{diğer durumlarda} \end{aligned}$$

olacak biçimde tanımlansın. Bu matris (z_n) dizisine uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 2^{-\frac{1}{2}} & 2^{-\frac{1}{4}} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-\frac{3}{4}} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_0 \\ z_0 2^{-\frac{1}{2}} \\ z_1 2^{-\frac{1}{4}} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

elde edilir. (z_n) sınırlı dizi olduğunda $m \to \infty$ için $(Az)_m \to 0$ olup A matrisinin Schur matrisi olduğu görülür.

Şimdi

$$x = \left\{ \frac{1}{2^k} \right\}_{k=0}^{\infty}$$

ve x dizisinin y altdizisi de

$$y = \left\{ \frac{1}{2^{k_n}} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

olarak tanımlansın. Yakınsaklık hızlarına bakıldığında

$$\begin{aligned} \frac{(Ay)_{2^m} - 0}{y_{2^m} - 0} &= \frac{\frac{1}{2^{\frac{m}{2}} 2^{k\left[\left|\frac{2m}{4}\right|\right]}}}{\frac{1}{2^{k_{2^m}}}} \\ &= 2^{k_{2^m} - (\frac{m}{2}) - k\left[\left|\frac{2m}{4}\right|\right]} \\ &\geq 2^{2^m - \left[\left|\frac{2m}{4}\right|\right] - \frac{m}{2}} \to \infty \quad ; \quad m \to \infty \end{aligned}$$

bulunur. Yani $((Ay)_{2^m})$ alt-dizisi, (y_{2^m}) den daha hızlı yakınsak değildir. Ayrıca

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{(Ay)_{2^m+1} - 0}{y_{2^m+1} - 0} \\ &= \frac{2^{-\left[\left|\frac{2m+1}{4}\right|\right]} 2^{-k\left[\left|\frac{5}{4}(2m+1)\right|\right]}}{2^{-k_{2^m+1}}} \\ &= 2^{k_{2^m+1} - \left[\left|\frac{2m+1}{4}\right|\right] - k\left[\left|\frac{5}{4}(2m+1)\right|\right]} \\ &\leq 2^{-\frac{2m+1}{4}} \to 0 \quad ; \quad m \to \infty \end{aligned}$$

olduğundan A matrisinin, x dizisinin bir alt dizisinin yakınsaklığını ne hızlandırıp ne de yavaşlattığı görülür. ■

Teorem 3.1.4. Bir A Schur matrisi ve terimleri sıfırdan farklı aynı yakınsaklık oranına sahip x ve y sıfır dizileri vardır öyle ki A matrisi, x dizisinin yakınsaklık hızını artırırken y dizisinin yakınsaklık hızını yavaşlatır (Miller 1982).

İspat : $A = (c_{mn})$ matrisi

$$\begin{aligned} c_{m1} &= \frac{1}{m} \quad ; \text{ her } m \text{ için} \\ c_{m2} &= -\frac{1}{m} \quad ; \text{ her } m \text{ için} \\ c_{mn} &= 0 \quad ; \text{ her } m \text{ ve } n \geq 3 \text{ için} \end{aligned}$$

olacak biçimde tanımlansın. Bu dönüşüm bir (x_n) dizisine uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ \frac{x_1 - x_2}{2} \\ \frac{x_1 - x_2}{3} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

elde edilir. (x_m) sınırlı dizi olduğunda

$$\begin{aligned} \lim_m (Ax)_m &= \lim_m \frac{x_1 - x_2}{m} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan A, Schur matrisidir.

Şimdi (x_n) dizisini

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 1 \ \text{ ve } \ x_n = \frac{1}{n^2} \quad ; \quad n > 2$$

ve (y_n) dizisini

$$y_1 = 1 \ , \ y_2 = -1 \ \text{ ve } \ y_n = \frac{1}{n^2} \quad ; \quad n > 2$$

olacak biçimde tanımlayalım. Böylece

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(Ax)_m-0}{(x_m)-0} = \lim_{m\to\infty}\frac{0}{\frac{1}{m^2}} = 0$$

olduğundan A dönüşümü, (x_n) dizisinin yakınsaklığını hızlandırmıştır. Diğer yandan

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(Ay)_m-0}{(y_m)-0} = \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{2}{m}}{\frac{1}{m^2}} = \infty$$

olup A dönüşümü, (y_n) dizisinin yakınsaklığını yavaşlatmıştır. ■

Teorem 3.1.5. Bir regüler A matrisi ve terimleri sıfırdan farklı aynı yakınsaklık oranına sahip x ve y sıfır dizileri vardır öyle ki A matrisi, x dizisinin yakınsaklık hızını artırırken y dizisinin yakınsaklık hızını yavaşlatır (Miller 1982).

İspat : A matrisini $(C,1)$ Cesàro matrisi olarak alalım. Burada

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

olup böylece A matrisinin regüler olduğu açıktır.

$x=(x_n)$ dizisini

$$x=\left(1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\cdots\right)$$

ve $y=(y_n)$ dizisini

$$y=\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\cdots\right)$$

olacak biçimde seçelim. Burada $x \in c_0$ ve $y \in c_0$ olup dönüşüm bu dizilere uygulanırsa

$$\begin{aligned} Ax &= \left(1, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{(n+1)(2n+1)}, 0, \cdots\right) \\ Ay &= (1, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2.3}, \cdots) \end{aligned}$$

elde edilir.

Yakınsaklık oranını tek ve çift indisli terimler olarak iki kısımda inceleyeceğiz.

$$\begin{aligned} \frac{(Ax)_{2n}-0}{x_{2n}-0} &= \frac{0}{-\frac{1}{n}} \to 0 \qquad ; \quad n \to \infty \\ \frac{(Ax)_{2n+1}-0}{x_{2n+1}-0} &= \frac{\frac{1}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{1}{(n+1)}} \to 0 \quad ; \quad n \to \infty \end{aligned}$$

olduğundan A dönüşümü (x_n) dizisinin yakınsaklık hızını artırır. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \frac{(Ay)_{2n}-0}{y_{2n}-0} &= \frac{\frac{2}{2n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \\ &\cong \log n \to \infty \qquad ; \quad n \to \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(Ay)_{2n+1}-0}{y_{2n+1}-0} &= \frac{\left[2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n+1}\right]\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n+1}} \\ &= \left[2(n+1)(2n+1)^{-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]+\frac{1}{2n+1} \to \infty \quad ; \quad n \to \infty \end{aligned}$$

olduğundan A dönüşümü (y_n) dizisinin yakınsaklık hızını yavaşlatır. ■

Teorem 3.1.6. *A metodu (x_n) dizisinin yakınsaklık hızını yavaşlatırken B metodu (x_n) dizisinin yakınsaklık hızını artıracak şekilde regüler A ve B denk toplanabilme metodları ve tüm terimleri sıfırdan farklı olan bir x sıfır dizisi vardır (Miller 1983).*

Bu teorem ispatsız verilecektir.

3.2 F- Yakınsaklık Oranları

$\frac{x_n}{y_n}$ oranında paydada bazı terimlerin sıfır olması halinde birinci kısımda verilen tanımların kullanılmayacağı açıktır. Bu yüzden Fridy (1978) aşağıdaki tanımları geliştirmiştir.

Tanım 3.2.1. $\lim_n x_n = L_1$ ve $\lim_n y_n = L_2$ iken

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{x_n - L_1}{y_n - L_2}\right| = 0 \quad \text{ve} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{x_n - L_1}{y_n - L_2}\right| = +\infty$$

oluyorsa (x_n) ve (y_n) dizilerinin yakınsaklık oranları kıyaslanamıyordu, bu durumda

$$\lim_n t_n = L \quad \text{ve} \quad \rho_m t = \underset{n>m}{maks} |t_n - L|$$

olmak üzere

$$\lim_n \frac{\rho_n x}{\rho_n y} = 0 \text{ ise } x \text{ dizisi, } y \text{ dizisinden (F) hızlı yakınsar} \tag{3.2.1}$$

$$\lim_n \frac{\rho_n x}{\rho_n y} = +\infty \text{ ise } x \text{ dizisi, } y \text{ dizisinden (F) yavaş yakınsar} \tag{3.2.2}$$

$$0 < \underline{\lim}_n \frac{\rho_n x}{\rho_n y} \leq \overline{\lim}_n \frac{\rho_n x}{\rho_n y} < +\infty \text{ ise}$$
$$x \text{ ve } y \text{ dizileri aynı oranda yakınsar} \tag{3.2.3}$$

$$\underline{\lim}_n \frac{\rho_n x}{\rho_n y} = 0 \text{ ve } \overline{\lim}_n \frac{\rho_n x}{\rho_n y} = +\infty \text{ ise}$$
$$x \text{ ve } y \text{ dizileri kıyaslanamaz} \tag{3.2.4}$$

denir (Fridy 1978).

Şimdi de klasik anlamda hızlı yakınsamanın Fridy anlamında hızlı yakınsamayı gerektireceğini gösterelim.

Tanım 2.1.den tüm terimleri sıfırdan farklı olan (x_n) ve (y_n) dizileri için $n \to \infty$ olmak üzere $x_n \to L_1$ ve $y_n \to L_2$ olduğunda

$$\lim_n \frac{x_n - L_1}{y_n - L_2} = 0$$

oluyorsa (x_n) dizisinin (y_n) dizisinden daha hızlı yakınsak olduğunu biliyoruz. Burada

$$\frac{x_n - L_1}{y_n - L_2} = \varepsilon_n$$

alırsak

$$\lim_n \varepsilon_n = 0$$

olacaktır. O halde $x_n - L_1 = \varepsilon_n (y_n - L_2)$ olduğunda

$$\begin{aligned} \rho_m x &= \underset{n>m}{maks} |x_n - L_1| \\ &= \underset{n>m}{maks} |\varepsilon_n (y_n - L_2)| \\ &\leq \underset{n>m}{maks} |\varepsilon_n| \underset{n>m}{maks} |y_n - L_2| \\ &= \rho_m \varepsilon . \rho_m y \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\frac{\rho_m x}{\rho_m y} \leq \rho_m \varepsilon$$

olup her iki yanın limiti alınırsa

$$\lim_m \frac{\rho_m x}{\rho_m y} \leq \lim_m \rho_m \varepsilon = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_m \frac{\rho_m x}{\rho_m y} = 0$$

gerçeklendiği için (x_n) dizisinin (y_n) dizisinden (F) hızlı yakınsak olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 3.2.1. *A regüler matris ve reel terimli azalmayan bir t sıfır dizisi için bir y sıfır dizisi vardır öyle ki t dizisi Ay dizisinden daha hızlı yakınsaktır (Fridy 1978).*

Bu teorem ispatsız olarak verilecektir.

4. İSTATİSTİKSEL VE T- İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ORANLARI

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık tanımı verilecek ve buna bağlı olarak istatistiksel yakınsaklık oranları incelenecektir.Ayrıca T- istatistiksel yakınsaklık oranları da yine bu bölümde ele alınacaktır.

4.1 İstatistiksel Yakınsaklık Oranları

Tanım 4.1.1. $\mathbb{N}$ nin bir E alt cümlesi için $E_n := \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$ olmak üzere E_n cümlesinin eleman sayısı $|E_n|$ ile gösterilsin.

$$\lim_n \frac{1}{n} |E_n|$$

limiti mevcut ise bu limit değerine E cümlesinin yoğunluğu denir ve $\delta(E)$ ile gösterilir (Niven and Zuckerman 1980).

Örneğin

$$\delta(\mathbb{N}) = 1$$
$$\delta\{n^2 : n \in \mathbb{N}\} = 0$$
$$\delta\{2n : n \in \mathbb{N}\} = \tfrac{1}{2}$$

olduğu gösterilebilir.

Bundan sonra $\delta(E) \neq 0$ durumunu, E kümesinin sıfırdan farklı yoğunluğa sahip olduğu ya da bir yoğunluğa sahip olmadığı anlamında düşüneceğiz.

Eğer bir P özelliğini gerçeklemeyen k indislerinin kümesi sıfır yoğunluklu ise x_k, P özelliğini hemen her k için gerçekler denir.

Tanım 4.1.2. (x_k) reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı varsa bu durumda x dizisi L değerine istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_\lim x = L$$

ile gösterilir (Fast 1951).

Aslında bu tanım Zygmund (1979) tarafından "hemen hemen yakınsaklık" olarak adlandırılmıştır.

İstatistiksel diziler uzayı st olmak üzere $c \subset st$ sağlanır. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} x_k = L &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0 \text{ olmak üzere } |x_n - L| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ E_\varepsilon = \{n : |x_n - L| \geq \varepsilon\} \text{ sonludur.} \end{aligned}$$

O halde her ε için $\delta(E_\varepsilon) = 0$ gerçeklenir. Böylece $st_\lim_k x_k = L$ elde edilir.

Ancak karşıt içerme her zaman doğru değildir. Şimdi buna ilişkin bir örnek verilecektir.

Örnek 4.1.1.

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

dizisini ele alalım.

$$\overline{\lim_k} x_k = 1 \quad \text{ve} \quad \underline{\lim_k} x_k = 0$$

olduğundan (x_k) dizisinin yakınsak olmadığı görülür. Buradan

$$E_\varepsilon = \{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $\delta(E_\varepsilon) = 0$ olup $st_\lim x = 0$ elde edilir. Yani $(x_k) \in st$ bulunur.

Ayrıca uyaralım ki istatistiksel yakınsaklık sınırlılığı gerektirmez ancak klasik anlamda yakınsaklık sınırlılığı gerektirir.

Tanım 4.1.3. (x_n) ve (y_n) sıfır dizileri için

$$st_\lim_n \frac{x_n}{y_n} = 0$$

ise (x_n) dizisi (y_n) dizisinden istatistiksel daha hızlı yakınsaktır (Fridy *et. al.* 2003).

Teorem 4.1.1.

$$st_\lim_k x_k = L \Leftrightarrow \delta\left\{n_k : k \in \mathbb{N}\right\} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_k x_k = L$$

olacak biçimde en az bir (n_k) indis dizisi vardır (Salat 1980, Fridy 1985).

Teorem 4.1.2. $\mathcal{A}$ terimleri sıfırdan farklı sıfır dizilerinin bir sınıfı olsun. O halde terimleri sıfırdan farklı bir $z = (z_n)$ sıfır dizisi vardır ve bu (z_n) dizisinin $\mathcal{A}$ daki her bir (x_n) dizisinden istatistiksel daha hızlı yakınsak olması için gerek ve yeter şart

(i) Hemen her $\mathcal{A}_n$ ve her $x \in \mathcal{A}$ için $\lim_n \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : x \in \mathcal{A}_k\}\right| = 1$

(ii) Her bir n için $y_n = \inf\left\{|x_n| : x \in \mathcal{A}_n\right\} > 0$

koşullarını gerçekleyecek şekilde $\mathcal{A}$ nın bir alt sınıfının bir $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$dizisinin mevcut olmasıdır (Fridy *et al.* 2003).

İspat :

Gereklilik :

$$st_\lim_n \frac{z_n}{x_n} = 0$$

olsun ve

$$\mathcal{A}_n = \{x \in \mathcal{A} : |x_n| > |z_n|\}$$

tanımlansın. Hemen her n ve $\mathcal{A}_n$ deki her x için $x \in \mathcal{A}$ olup $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ bulunur. Hipotezden her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : \left|\frac{z_k}{x_k}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

gerçeklenir. $\varepsilon = 1$ alındığında

$$\lim_n \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |z_k| < |x_k|\}\right| = 1$$

olur, böylece (i) şartı sağlanır. Şimdi bir $y = (y_n)$ dizisi

$$y_n = \inf \{|x_n| : x \in \mathcal{A}_n\}$$

olacak biçimde tanımlansın. Eğer

$$\begin{cases} \mathcal{A}_n \neq \emptyset \text{ ise } y_n \geq |z_n| > 0 \\ \mathcal{A}_n = \emptyset \text{ ise } y_n = \inf \emptyset = \infty > 0 \end{cases}$$

olup (ii) şartı elde edilir.

Yeterlilik : $\mathcal{A}$ terimleri sıfırdan farklı sıfır dizilerinin bir sınıfı olsun. Ayrıca (i) ve (ii) şartları sağlansın.

$$z_n = \begin{cases} \min\left\{\frac{y_n}{n}, \frac{1}{n}\right\} & ; \text{eğer } \mathcal{A}_n \neq \emptyset \text{ ise} \\ \frac{1}{n} & ; \text{eğer } \mathcal{A}_n = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan (z_n) pozitif terimli bir sıfır dizisidir.

Eğer $x \in \mathcal{A}$ ise hemen hemen her n için $x \in \mathcal{A}_n$ olur. Yani hemen her n için $0 < y_n \leq |x_n|$ gerçeklenir. Böylece hemen her n için

$$\frac{z_n}{|x_n|} \leq \frac{y_n}{n \cdot |x_n|} < \frac{1}{n}$$

sağlanır. $n \to \infty$ için limit alınırsa $st_\lim \frac{z_n}{|x_n|} = 0$ bulunur. Bu da z dizisinin x dizisinden istatistiksel hızlı yakınsadığını gösterir. ■

Teorem 4.1.3. $\mathcal{A}$ terimleri sıfır olmayan sıfır dizilerinin bir sınıfı olsun. $\mathcal{A}$ daki her bir x dizisinden istatistiksel daha yavaş yakınsak olan ve negatif olmayan bir z sıfır dizisinin var olması için gerek ve yeter şart bir $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ pozitif terimli sıfır dizisi ve artan $(N_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

(i) $\forall n$ için $\sup \{|x_k| : x \in \mathcal{A}_n,\ N_{n-1} < k < N_n\} \leq \varepsilon_n^2$

(ii) $\forall x \in \mathcal{A}$, $\delta(n_x) = 1$; $n_x = \bigcup \{(N_{n-1}, N_n] ;\ x \in \mathcal{A}_n\}$

koşulları gerçeklenecek şekilde $\mathcal{A}$ nın bir alt sınıfının bir $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin mevcut olmasıdır (Fridy *et al.* 2003).

İspat :

Gereklilik : $z \in c_0$ olmak üzere her k için $z_k \neq 0$ olsun. $z = (z_k)$, $\mathcal{A}$ daki her $x = (x_k)$ dizisinden istatistiksel olarak daha yavaş yakınsasın.

$$\begin{aligned} N_n &= n \quad ; \ n = 0, 1, 2, \ldots \\ \varepsilon_n^2 &= |z_n| \quad ; \ n \geq 1 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \{x \in \mathcal{A} : |x_n| < |z_n|\} \\ &= \{x \in \mathcal{A} : |x_k| < |z_k| \,,\ N_{n-1} < k < N_n\} \end{aligned}$$

sınıfı tanımlansın. Eğer $\mathcal{A}_n \neq \emptyset$ ise

$$\begin{aligned} \sup\{|x_k| : x \in \mathcal{A}_n,\ N_{n-1} < k < N_n\} &= \sup\{|x_n| : x \in \mathcal{A}_n\} \\ &\leq |z_n| \\ &= \varepsilon_n^2 \end{aligned}$$

olur. Eğer $\mathcal{A}_n = \emptyset$ ise $-\infty < \varepsilon^2$ elde edilir. Yani (i) gerçeklenir.

$x \in \mathcal{A}$ alalım.

$$st_\lim \left| \frac{x_n}{z_n} \right| = 0$$

olduğunu kabul etmiştik, böylece

$$\delta\{n \in \mathbb{N} : |x_n| < |z_n|\} = 1$$

olup dolayısıyla

$$\delta\{n \in \mathbb{N} : x \in \mathcal{A}_n\} = 1$$

elde edilir. O halde

$$\delta\left[\bigcup\{(N_{n-1}, N_n] : x \in \mathcal{A}_n\}\right] = 1$$

olup (ii) gerçeklenmiştir.

Yeterlilik : Kabul edelim ki $\mathcal{A}$, $(\mathcal{A}_n)$, (ε_n) ve (N_n) için hipotezdeki koşullar sağlansın. z dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccccccccc}
z_1 & = & z_2 & = & \dots & = & z_{N_1} & = & \varepsilon_1 \\
z_{1+N_1} & = & z_{2+N_1} & = & \dots & = & z_{N_2} & = & \varepsilon_2 \\
z_{1+N_2} & = & z_{2+N_2} & = & \dots & = & z_{N_3} & = & \varepsilon_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

x, $\mathcal{A}$ daki sabit bir dizi olarak alındığında, $N_{n_0-1} < k < N_{n_0}$ olmak üzere $x \in \mathcal{A}_{n_0}$ için

$$|x_k| \leq \varepsilon_{n_0}^2$$

sağlansın. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_k}{x_k}\right| &= \frac{\varepsilon_{n_0}}{|x_k|} \\
&\geq \frac{\varepsilon_{n_0}}{\varepsilon_{n_0}^2} \\
&= \frac{1}{\varepsilon_{n_0}}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\lim_k \left|\frac{z_k}{x_k}\right| = \infty$$

olur. (ii) den

$$\delta(n_x) = 1$$

olduğundan her $x \in \mathcal{A}$ için

$$st_\lim_n \left|\frac{z_n}{x_n}\right| = +\infty$$

bulunur. Böylece z, x den istatistiksel daha yavaş yakınsar. ■

Tanım 4.1.4. N_1, $N_2 \subset \mathbb{N}$ olmak üzere N_1 ve N_2 cümleleri sıfır yoğunluklu olmasın.

$$\lim_n x_n = L_1 \quad \text{ve} \quad \lim_n y_n = L_2$$

olacak biçimdeki (x_n) ve (y_n) dizileri için

$$\lim_{n\in N_1} \left| \frac{x_n - L_1}{y_n - L_2} \right| = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\in N_2} \left| \frac{x_n - L_1}{y_n - L_2} \right| = +\infty$$

sağlanıyorsa bu iki dizinin yakınsaklığı istatistiksel olarak kıyaslanamaz denir (Fridy *et al.* 2003).

Örnek 4.1.2. $x, y, z \in c_0$ olacak biçimdeki diziler aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & ;\ n \text{ tam kare} \\ \frac{1}{n^2} & ;\ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$z_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & ;\ n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{n^2} & ;\ n\text{çift ise} \end{cases}$$

$$y_n = \frac{1}{n} \ ;\ \text{her } n \text{ için}$$

İlk olarak

$$\frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} \sqrt{n} & ;\ n \text{ tam kare} \\ \frac{1}{n} & ;\ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup

$$\underline{\lim_n} \left| \frac{x_n}{y_n} \right| = 0 \quad \text{ve} \quad \overline{\lim_n} \left| \frac{x_n}{y_n} \right| = +\infty$$

elde edilir ki bu (x_n) ve (y_n) dizilerinin klasik anlamda kıyaslanamaz olduğunu gösterir. Diğer yandan

$$st_\lim \left| \frac{x_n}{y_n} \right| = 0$$

olup diziler istatistiksel anlamda kıyaslanabilirdir.

Ayrıca

$$\frac{z_n}{y_n} = \begin{cases} \sqrt{n} & ;\ n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{n} & ;\ n\text{çift ise} \end{cases}$$

olup

$$N_1 = \{2n-1;\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{için } \delta(N_1) = \frac{1}{2} \neq 0$$

ve

$$N_2 = \{2n;\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{için } \delta(N_2) = \frac{1}{2} \neq 0$$

sağlanır. Buradan

$$\lim_{n \in N_1} \left| \frac{z_n}{y_n} \right| = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n \in N_2} \left| \frac{z_n}{y_n} \right| = 0$$

elde edilir ki bu (z_n) ve (y_n) dizilerinin hem klasik hem de istatiksel anlamda kıyaslanamaz olduğunu gösterir.

Tanım 4.1.5. x ve y negatif olmayan sıfır dizileri olsun. $N \subseteq \mathbb{N}$ ve $\delta(N) = 1$ olacak biçimdeki bir N cümlesi için

$$\overline{\lim_{n \in N}} \left| \frac{x_n}{y_n} \right| < +\infty \quad \text{ve} \quad \underline{\lim_{n \in N}} \left| \frac{x_n}{y_n} \right| > 0$$

şartları sağlanıyorsa bu iki dizi istatistiksel anlamda aynı oranda yakınsar denir ve $st_(x \sim y)$ ile gösterilir (Fridy *et al.* 2003).

Teorem 4.1.4. $\mathcal{A}$ terimleri sıfırdan farklı sıfır dizilerinin bir sınıfı olsun. $\mathcal{A}$ daki her bir x dizisi ile aynı oranda istatistiksel yakınsayan terimleri sıfırdan farklı bir z sıfır dizisinin var olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{A}$ daki her bir x, y dizileri için $st_(x \sim y)$ olmasıdır (Fridy *et al.* 2003).

İspat :

Gereklilik : $\mathcal{A}$ daki her bir diziyle istatistiksel anlamda aynı oranda yakınsayan bir

u dizisi mevcut olsun. O halde

$$\left.\begin{array}{ll} st_(x \sim u) & , \ x \in \mathcal{A} \\ st_(y \sim u) & , \ y \in \mathcal{A} \end{array}\right\} \text{ ise } st_(x \sim y) \text{ elde edilir.}$$

Yeterlilik : Bu kısım açıktır.

Teorem 4.1.5. Bir A Schur matrisi ve terimleri sıfırdan farklı bir (x_n) sıfır dizisi vardır öyle ki A dönüşümü (x_n) dizisinin bir alt dizisinin istatistiksel yakınsaklığını ne hızlandırır ne de yavaşlatır (Fridy *et al.* 2003).

İspatı klasiktekine benzer biçimde yapılacağından burada yer verilmeyecektir.

Teorem 4.1.6. Terimleri sıfırdan farklı bir (x_n) sıfır dizisinin yeniden düzenlemesinin yakınsaklık hızını istatistiksel anlamda ne artıracak ne de yavaşlatacak biçimde bir A Schur matrisi vardır (Fridy *et al.* 2003).

İspat : $A = (a_{mn})$ matrisi

$$\begin{array}{ll} a_{2m+1,2m+1} = \frac{1}{2(m+1)} & ; \ m = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ a_{2m,1} = \frac{1}{2m} & ; \ m = 1, 2, 3, \ldots \\ a_{nk} = 0 & ; \text{ diğer durumlarda} \end{array}$$

olacak biçimde tanımlansın. (z_m) dizisinin A dönüşümü

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \ldots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_1}{2} \\ \frac{z_1}{2} \\ \frac{z_3}{2} \\ \frac{z_1}{2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

olacaktır. $(z_m) \in \ell_\infty$ olduğunda

$$\lim_m (Az)_m = 0$$

olup $A \in \tau_C^*$ elde edilir.

Her n için

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

olarak alalım. x dizisinin bir yeniden düzenlemesini

$$y = \left\{x_{\sigma(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$$

olarak alalım. O halde

$$\begin{aligned} \lim_m \frac{(Ay)_{2m+1} - 0}{y_{2m+1} - 0} &= \lim_m \frac{\frac{1}{2(m+1)} y_{2m+1}}{y_{2m+1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olması A matrisinin y dizisinin istatistiksel yakınsaklık hızını yavaşlatmadığını gösterir.

Şimdi sıfır yoğunluklu olmayan bir $\mathbb{N}$ cümlesinde (m_k) dizisini

$$\lim_m \frac{(Ay)_{2m_k} - 0}{y_{2m_k} - 0} = \infty$$

olacak şekilde seçilebileceğini göstereceğiz. Burada

$$\begin{aligned} \frac{(Ay)_{2m_k} - 0}{y_{2m_k} - 0} &= \frac{\frac{1}{2m_k} x_{\sigma(1)}}{x_{\sigma(2m_k)}} \\ &= \frac{\left[\sigma(2m_k)\right]^2}{2m_k} x_{\sigma(1)} \end{aligned}$$

olur. Öncelikle

$$L = \left\{2m : \frac{\sigma(2m)}{2m} < \frac{1}{10}\right\} \text{ ve } M = \{2m : m \in \mathbb{N}\}$$

kümeleri tanımlansın. Burada

$$\delta\left\{(M \setminus L)\right\} \neq 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$$L_k = \{2m \in L : 2m \leq k\}$$

ile tanımlansın. Eğer $2m \in L_k$ ise

$$\frac{\sigma(2m)}{2m} < \frac{1}{10}$$

olup buradan da

$$\sigma(2m) < \frac{2m}{10} < \frac{k}{10}$$

elde edilir yani

$$\frac{|L_k|}{k} < \frac{1}{10}$$

olur. O halde

$$M \setminus L = \left\{2m : m \in \mathbb{N} \text{ ve } \frac{\sigma(2m)}{2m} \geq \frac{1}{10}\right\}$$

olup

$$\delta\left\{(M \setminus L)\right\} \neq 0$$

bulunur. $M \setminus L$ kümesini $(2m_k)$ dizisi olarak yazabiliriz, böylece

$$\frac{(Ay)_{2m_k}}{y_{2m_k}} \geq \frac{\left(\frac{2m_k}{10}\right)^2 x_{\sigma(1)}}{2m_k} \to \infty \ ; \ k \to \infty$$

olacaktır. Bu da A matrisinin, y dizisinin istatistiksel yakınsaklığını hızlandırmadığını gösterir. Yani A dönüşümü, y dizisinin istatistiksel yakınsaklığını ne artırır ne de yavaşlatır.. ■

Sonuç 4.1.1. Keyfi $x, y \in c_0$ alalım. y dizisinden istatistiksel anlamda daha hızlı yakınsak olacak biçimde x dizisinin bir x_σ yeniden düzenlemesi vardır (Fridy *et al.* 2003).

İspat : İlk olarak klasik anlamda yakınsaklık söz konusu olduğunda bunun mümkün olmadığını gösterelim. Çünkü,

$$x_n = y_n = \frac{1}{n}$$

biçiminde seçilen diziler için

I. Durum : $\{n : \sigma(n) = n\}$ sonsuz ise bu durumda sonsuz çokluktaki n ler için

$$\frac{x_{\sigma(n)}}{y_n} = 1$$

olduğundan x_σ, y dizisinden daha hızlı yakınsak değildir.

II. Durum : $\{n : \sigma(n) = n\}$ sonlu ise

$$E = \{n : \sigma(n) < n\} \text{ ve } F = \{n : \sigma(n) > n\}$$

cümleleri sonsuz olmak zorundadır (Miller 1983).

$$\text{Her bir } n \in E \text{ için } \frac{x_{\sigma(n)}}{y_n} > 1 \text{ ve her bir } n \in F \text{ için } \frac{x_{\sigma(n)}}{y_n} < 1$$

olduğundan x_σ, y dizisinden daha hızlı yakınsayamaz.

Bu iki durum bize yeniden düzenlemenin klasik anlamda y den daha hızlı yakınsak olamayacağını gösterir.

Şimdi bunun istatistiksel anlamda mümkün olabileceğini gösterelim. $\mathbb{N}$ cümlesinin

$$N_0 = \{s_1, s_2, \ldots\} \text{ için } \delta(N_0) = 0 \text{ ve } N_1 = \{t_1, t_2, \ldots\} \text{ için } \delta(N_1) = 1$$

olacak biçimde iki ayrık parçalanmasını alalım. Burada

$$1 < m_1 < m_2 < \ldots < \infty$$

olacak biçimde pozitif tamsayıların artan bir $\{m_k\}$ indis dizisi ele alınsın ve her k için

$$\frac{x_{m_k}}{y_{t_k}} < \frac{1}{k} \tag{4.1.1}$$

sağlansın. σ yeniden düzenlemesini

$$\sigma(t_1) = m_1,\ \sigma(t_2) = m_2, \ldots$$

biçiminde oluşturalım. Ayrıca

$$\mathbb{N} \setminus (m_k) = (n_k)$$

ile tanımlarsak, (n_k) artandır. Şimdi her k için $\sigma(s_k) = n_k$ tanımlayalım. Böylece $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ birebir ve örtendir. 4.1.1 den her k için

$$\frac{x_{\sigma(t_k)}}{y_{t_k}} = \frac{x_{m_k}}{y_{t_k}} < \frac{1}{k}$$

olup

$$\lim_k \frac{x_{\sigma(t_k)}}{y_{t_k}} = 0$$

elde edilir. $\delta(N_1) = 1$ olduğundan x dizisinin yeniden düzenlemesi olan x_σ, y dizisinden istatistiksel daha hızlı yakınsaktır.

4.2 T- İstatistiksel Yakınsaklık Oranları

Bu kısımda, $T = (t_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere T- istatistiksel yakınsaklık tanıtılacak ve T- istatistiksel yakınsaklık hızları incelenecektir.

İlk olarak bazı hatırlatmalar yapmakta yarar vardır. Hatırlanacağı gibi

$$\begin{aligned} st_\lim_k x_k = L \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \\ &\qquad \text{kümesini sıfır yoğunluklu olmasıdır.} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(C_1 \chi_{K(\varepsilon)}\right)_n \to 0\ ;\ n \to \infty \end{aligned}$$

olmasıdır. Yukarıdaki ifadede Cesàro matrisi yerine herhangi negatif olmayan, regüler T matrisleri de alınabilir.

O halde aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

Tanım 4.2.1. $K \subseteq \mathbb{N}$ cümlesi için

$$\delta_T(K) = \lim \sum_{n \in K} t_{mn}$$

mevcut ise K cümlesi T yoğunlukludur denir (Freedman and Sember 1981).
Eğer bir P özelliğini gerçeklemeyen k indislerinin kümesinin T- yoğunluğu sıfır ise x_k, P özelliğini T- hemen her k için gerçekler denir.

Tanım 4.2.2. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_m \sum_{n=1}^{m} \{t_{mn} : |x_n - L| \geq \varepsilon\} = 0$$

sağlanıyorsa (x_n) dizisinin L değerine T- istatistiksel yakınsaktır denir ve
$st_T\text{-}\lim x = L$ ile gösterilir (Connor 1989, Kolk 1993, Miller 1995).

Tanım 4.2.3. (x_n) dizisinin T- istatistiksel yakınsak olması,

$$\delta_T\left(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| < \varepsilon\}\right) = 1$$

olmasına denktir (Kolk 1993, Miller 1995).

Uyarı 4.2.1. Bu bölümde T matrisi aşağıdaki gibi seçilecektir.

$$\begin{cases} t_{mn} > 0 \quad ; \ n \leq m \\ t_{mn} = 0 \quad ; \ n > m \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_{mn} = 1 \quad ; \text{ her } m \text{ için}$$

$$\lim_m t_{mn} = 0 \quad ; \text{ her } n \text{ için}$$

Tanım 4.2.4. $x \neq 0$, $z \neq 0$, $\lim_n x_n = 0$, $\lim_n z_n = 0$ olacak biçimde alınan (x_n) ve (z_n) dizileri için

$$st_T\text{-}\lim \frac{z_n}{x_n} = 0$$

ise (z_n) dizisi, (x_n) dizisinden T- istatistiksel daha hızlı yakınsaktır denir (Miller and Orhan 2004).

Aşağıdaki örnekle T- istatistiksel yakınsaklık hızının, seçilen T matrisine bağlı olduğunu göstereceğiz.

Örnek 4.2.1.

$$x_n = \frac{1}{n} \quad ; \text{ her } n \text{ için}$$

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & ; \ n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & ; \ n\text{çift ise} \end{cases}$$

olacak biçimde x ve y sıfır dizilerini ele alalım. Her m için T_1 metodunu

$$\left(t_{mn}{}^{(1)}\right) = \sum_{n=1}^{m} \left[t_{mn}{}^{(1)} : n\text{çift}\right] = 1 - \frac{1}{m}$$

$$\left(t_{mn}{}^{(1)}\right) = \sum_{n=1}^{m} \left[t_{mn}{}^{(1)} : n \text{ tek}\right] = \frac{1}{m}$$

olarak seçelim. Her m için T_2 metodunu da benzer biçimde ancak tek ve çift indisli terimler yer değiştirilerek oluşturulsun. Bu şekilde alınan T_1 ve T_2 metodları için

x dizisi T_1- istatistiksel olarak y dizisinden daha hızlı,

y dizisi T_2- istatistiksel olarak x dizisinden daha hızlı

yakınsaktır.

Aşağıdaki teorem, bir önceki bölümde verilen Teorem 4.1.2. nin bir benzeridir.

Teorem 4.2.1. $\mathcal{A}$ tüm terimleri sıfır olmayan sıfır dizilerinin bir sınıfı olsun ve T regüler matrisi yukarıdaki gibi alınsın. $\mathcal{A}$ daki her bir x dizisinden T- istatistiksel olarak daha hızlı yakınsayan bir z (her n için $z_n \neq 0$) sıfır dizisinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{A}$ daki $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ dizileri için

(i) $\mathcal{A}$ daki her bir x, T- hemen her A_n kümesine aittir, yani

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} [t_{nk} : x \in A_k] = 1$$

(ii) Her n için

$$y_n = \inf \{|x_n| : x \in A_n\} > 0$$

olacak biçimde $\mathcal{A}$ nın bir alt sınıfının bir (A_n) dizisinin mevcut olmasıdır (Miller and Orhan 2004).

İspat :

Gereklilik : z dizisi, $\mathcal{A}$ daki her bir x dizisinden T- istatistiksel olarak daha hızlı yakınsak olsun.

$$A_n = \{x \in \mathcal{A} : |x_n| > |z_n|\}$$

tanımlayalım. Her n ve her $x \in \mathcal{A}$ için $A_n \subseteq \mathcal{A}$ olmak üzere

$$\delta_T \left(\left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{z_n}{x_n} \right| < \varepsilon = 1 \right\} \right) = 1$$

olduğu hipotezden biliniyor. Yani

$$\delta_T \left(\{n \in \mathbb{N} : |z_n| < |x_n|\} \right) = 1$$

olup buradan

$$\delta_T \left(\{k : x \in A_k\} \right) = 1$$

bulunur. Yani

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} [t_{nk} : x \in A_k] = 1$$

geçeklenir. Ayrıca

$$\begin{aligned} A_n &\neq \emptyset \text{ ise } y_n = \inf \{|x_n| : x \in A_n\} \geq |z_n| > 0 \\ A_n &= \emptyset \text{ ise } y_n = \inf \emptyset = \infty > 0 \end{aligned}$$

olup (ii) şartı sağlanır.

Yeterlilik : $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi için (i) ve (ii) şartları sağlansın. (z_n) dizisi

$$z_n = \begin{cases} \min(y_n t_n, t_n) & ; \ A_n \neq \emptyset \\ t_n & ; \ A_n = \emptyset \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlansın, burada

$$t_n = \min(t_{n1}, t_{n2}, \ldots, t_{nn})$$

ile verilir.

$$0 < t_n \leq \frac{1}{n}$$

olduğu açıktır. Böylece (z_n) dizisinin terimleri sıfır olmayan bir sıfır dizisi olduğu açıktır.

Eğer $x \in \mathcal{A}$ ise T- hemen her n için $x \in A_n$ olup

$$0 < y_n \leq |x_n|$$

sağlanır. Böylece T- hemen her n için

$$\begin{aligned} \frac{z_n}{|x_n|} &\leq \frac{y_n t_n}{|x_n|} \\ &\leq t_n \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$st_T\text{-}\lim \frac{z_n}{|x_n|} = 0$$

olup z dizisi, x dizisinden T- istatistiksel daha hızlı yakınsaktır. ■

Hemen belirtelim ki istatistiksel yakınsaklık oranları için verilen sonuçların hemen hepsi T- istatistiksel yakınsaklık oranları için de verilebilirdi. Ancak burada sadece bir örnek olarak Teorem 4.2.1 verilmiştir.

KAYNAKLAR

Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Science Publications, 46-47.

Connor, J. 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canad. Math. Soc, 32, 194-198.

Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. Colloq. Math, 2, 241-244.

Freedman, A. R. and Sember, J. J. 1981. Densities and Summability. Pasific J. Math, 95, 293-305.

Fridy, J. 1978. Minimal rates of summability. Canad. J. Math, 30, 808-816.

Fridy, J. 1985. On statistical convergence. Analysis, 5, 301-313.

Fridy, J. A, Miller, H. I. and Orhan, C. 2003. Statistical Rates of Convergence. Acta Sci. Math. (Szeged), 69, 147-157.

Kolk, E. 1993. Matrix summability of statistically convergent sequences. Analysis, 13, 77-83.

Miller, H. I. 1973. Rates of Convergence and Summability. Radovi XLV, 85-92.

Miller, H. I. 1982. Futher Results About Rates of Convergence and Summability. Radovi LXIX, 79-85.

Miller, H. I. 1983. Rates of Convergence and Summability Theory. Radovi LXXIV, 39-55.

Miller, H. I. 1995. A measure theoritical subsequence characterization of statistical convergence. Trans. Amer. Math. Soc, 347, 1811-1819.

Miller, H. I. and Orhan, C. 2004. Statistical (T) Rates of Convergence. Glasnik Matematički, Vol. (39) 59, 101-110.

Niven, I. and Zuckerman, H. S. 1980. An Introduction to the Theory of Numbers. John Waley and Sons, 4^{th} ed. New York.

Salat, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. Math. Slovaco, 30, 139-150.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuba AYDOĞAN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 22. 09.1982

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Çankaya Cumhuriyet Lisesi (Süper Lise), 1996 – 2000

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü , 2000 – 2004

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2004 – 2006