ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KARMA REGRESYON MODELLERİNDE DAYANIKLI PARAMETRE TAHMİNİ

Fatma Zehra DOĞRU

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Fatma Zehra DOĞRU tarafından hazırlanan **"Karma Regresyon Modellerinde Dayanıklı Parametre Tahmini"** adlı tez çalışması 29/09/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Olcay ARSLAN
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet Akif BAKIR
Gazi Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Olcay ARSLAN
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Halil AYDOĞDU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Vilda PURUTÇUOĞLU GAZİ
Orta Doğu Teknik Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

29.09.2015

Fatma Zehra DOĞRU

ÖZET

Doktora Tezi

KARMA REGRESYON MODELLERİNDE DAYANIKLI PARAMETRE TAHMİNİ

Fatma Zehra DOĞRU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Olcay ARSLAN

Bu tez çalışmasında, kalın kuyruklu ve/veya çarpık dağılımlı hata terimli karma regresyon modellerini modelleyebilmek için çarpık *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli önerilmiştir. Çarpık *t* dağılımının stokastik gösteriminden yararlanılarak ilgili parametreler için EM (Expectation-Maximization) algoritması kullanılarak en çok olabilirlik (ML) tahmin edicileri elde edilmiştir. Önerilen tahmin edicilerin performansları simülasyon çalışması ve gerçek veri üzerinde uygulaması yapılarak literatürde yer alan normal, *t* ve çarpık normal dağılımlara dayalı karma regresyon modelinden elde edilen tahmin edicilerin performansları ile karşılaştırılmıştır. Simülasyon sonuçları ve gerçek veri uygulaması sonuçlarına göre kalın kuyrukluluk ve çarpıklık olduğunda önerilen tahmin edicilerin daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Verideki grupların farklı kuyruk davranışlarına sahip olması durumunda farklı dağılımların karma regresyon modeli önerilmiştir. Özel olarak, normal-*t* ve çarpık *t*-çarpık normal dağılımlarının iki bileşenli karma regresyon modeli ele alınmıştır. EM algoritması kullanılarak ilgili parametreler için ML tahmin edicileri elde edilerek, tahmin edicilerin performansları simülasyon çalışması ve gerçek veri üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca, karma regresyon modeli için Bai (2010) ve Bai vd. (2012) tarafından önerilen M-tahmin yöntemine dayalı dayanıklı karma regresyon modeli x yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olmadığından, genelleştirilmiş M (GM)-tahmini yöntemine dayalı dayanıklı karma regresyon modeli önerilmiştir. Bu yeni yöntem x ve y yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olacaktır. GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli tahmin edicileri EM benzeri algoritma kullanılarak verilmiştir. Önerilen bu tahmin edicilerin performansları sümülasyon çalışması ve gerçek veri kullanılarak gösterilmiştir. Sonuçlara göre, x yönünde aykırı gözlem olduğunda GM-tahmin yöntemine dayalı tahmin ediciler M-tahmin yöntemine dayalı tahmin edicilere göre daha üstündür.

Eylül 2015, 159 sayfa

Anahtar Kelimeler: Karma regresyon modeli, dayanıklı regresyon, en çok olabilirlik, EM algoritması, çarpık *t*, GM-tahmin yöntemi

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ROBUST PARAMETER ESTIMATION IN MIXTURE REGRESSION MODELS

Fatma Zehra DOĞRU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Olcay ARSLAN

In this thesis, robust mixture regression model based on the skew *t* distribution was proposed to model heavy-tailed and/or skewed errors in a mixture regression setting. Using the scale mixture representation of skew *t* distribution, the maximum likelihood (ML) estimators were given using the Expectation Maximization (EM) algorithm. A simulation study and a real data example are provided to compare the performance of the proposed estimators with the estimators based on normal, *t* and skew normal distributions. The results confirm that when heavy-tailedness and skewness are present the proposed estimators behave better than the counterparts. The mixture regression model based on mixture of different type of distributions were examined when groups in the dataset have different tail behaivor. In particular, two-component mixture of normal-*t* distributions, and skew *t*-skew normal distributions were considered. Again, the ML estimators for the parameters of interest were obtained using the EM algorithm and the performance of proposed estimators were demonstrated with simulation study and real data example. Furthermore, since the estimation method proposed by Bai (2010) and Bai et al. (2012) is sensitive to the outliers in the x direction, robust mixture regression model based on the Generalized M (GM)-estimation method was proposed. The new estimation method will be resistant to the outliers in the x and y directions. The estimators for mixture regression model based on the GM-estimation method were given using an EM type algorithm. The performance of proposed estimators was illustrated using simulation study and real data example. The results show that the estimators based on the GM estimation method outperform the estimators based on the M-estimation method when there are outliers in x direction.

September 2015, 159 pages

Key Words: Mixture regression models, robust regression, maximum likelihood, EM algorithm, skew *t*, GM-estimation method

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında benimle büyük bir sabır ve titizlikle ilgilenen, öneri ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, değerli bilgileriyle yol gösteren ve her zaman yanımda olan değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Olcay ARSLAN'a (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) sonsuz teşekkür ederim.

Her zaman esprili ve sevecen kişiliğiyle tanıdığım, yardımlarını ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve TİK toplantılarındaki değerli katkılarından dolayı Sayın hocam Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU'na (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) çok teşekkür ederim. Ayrıca, TİK raporlarını titizlikle okuyarak yaptığı yorum ve katkılarından dolayı Sayın hocam Doç. Dr. Vilda PURUTÇUOĞLU'na (Orta Doğu Teknik Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) çok teşekkür ederim.

Üniversiteye başladığım andan itibaren aynı yolda yürüdüğüm bana iyi bir dost, iyi bir ev arkadaşı ve her şeyden öte kardeş olan, manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli arkadaşım Arş. Gör. Fatma Gül AKGÜL'e, tanıdığım ilk günden itibaren bana bir abla gibi davranıp yalnız olmadığımı hissettiren ve desteğini esirgemeyen değerli arkadaşım Yrd. Doç. Dr. Demet AYDIN'a, göstermiş olduğu manevi destek ile moralimi her zaman yüksek tutan değerli arkadaşım Arş. Gör. Özlem BATTAL'a ve tez çalışmam boyunca moral ve desteği ile her zaman yanımda olan değerli arkadaşım Arş. Gör. Dr. Yakup Murat BULUT'a göstermiş oldukları sevgi ve arkadaşlıkları için çok teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca varlıklarıyla, maddi ve manevi destekleriyle bugünlere gelmemde en büyük katkısı olan, her zaman yanımda olduklarını bildiğim en büyük destekçilerim annem Meryem DOĞRU, babam Nurhani DOĞRU, ablam Rukiye DOĞRU, abim Murat Osman DOĞRU ve eşi Deniz DOĞRU ve en önemlisi biricik yeğenim Alperen DOĞRU'ya sonsuz teşekkür ederim.

2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Fatma Zehra DOĞRU
Ankara, Eylül 2015

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK ..... **i**
ÖZET ..... **ii**
ABSTRACT ..... **iii**
TEŞEKKÜR ..... **iv**
KISALTMALAR DİZİNİ ..... **vii**
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **viii**
ÇİZELGELER DİZİNİ ..... **x**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Çoklu Lineer Regresyon Modeli **6**
1.1.1 Çoklu lineer regresyon modeli için parametre tahmini **6**
1.2 EM Algoritması **9**
1.3 *t* Dağılıma Dayalı Regresyon Modeli için Parametre Tahmini **10**
1.4 Çarpık Dağılımlar **15**
1.4.1 Çarpık normal dağılım **15**
1.4.1.1 Çarpık normal dağılıma dayalı regresyon modeli için parametre tahmini **19**
1.4.2 Çarpık *t* dağılımı **22**
1.4.2.1 Çarpık *t* dağılımına dayalı regresyon modeli için parametre tahmini **28**
2. DAYANIKLI İSTATİSTİK **34**
2.1 Dayanıklılığı ölçme **35**
2.1.1 Etki fonksiyonu **35**
2.1.2 Kırılma noktası **36**
2.2 Dayanıklı Regresyon Yöntemleri **37**
2.2.1 Regresyon M-tahmin yöntemi **37**
2.2.1.1 Regresyon M-tahmini için etki fonksiyonu **41**
2.2.1.2 Regresyon M-tahmini için kırılma noktası **41**
2.2.2 GM-tahmin yöntemi **42**
2.2.2.1 GM-tahmini için etki fonksiyonu **45**
2.2.2.2 GM-tahmini için kırılma noktası **47**
2.3 ρ ve ψ Fonksiyonu Seçimi **48**
3. KARMA REGRESYON MODELİ **52**
3.1 Karma Model **52**
3.1.1 Karma modelin parametre tahmini **54**
3.1.2 Karma modelin parametre tahmini için EM algoritması **55**
3.2 Dağılıma Dayalı Karma Regresyon Modeli **56**
3.2.1 Normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli **57**
3.2.2 Çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli **61**
4. DAYANIKLI KARMA REGRESYON MODELİ **67**
4.1 Dağılıma Dayalı Dayanıklı Karma Regresyon Modeli **68**
4.1.1 *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli **68**
4.1.2 Çarpık *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli **73**
4.2 Simülasyon Çalışması **80**
4.3 Farklı Dağılıma Dayalı Dayanıklı Karma Regresyon Modelleri **86**
4.3.1 Normal ve *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli **86**

4.3.2 Çarpık *t* ve çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli 93
4.4 Simülasyon Çalışması 103
4.5 Dayanıklı Regresyon Yöntemlerine Dayalı Karma Regresyon Modelleri 111
4.5.1 M-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli 111
4.5.2 GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli 116
4.5.2.1 Mallows tipi GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli 117
4.5.2.2 Schweppe tipi GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli 122
4.6 Simülasyon Çalışması 126
5. UYGULAMA 138
5.1 Bazı Model Seçme Kriterleri 138
5.2 Ses Tonu Algılama Verisi 140
5.3 Yaprak Biti Verisi 145
5.4 Ethanol Verisi 147
6. SONUÇ 151
KAYNAKLAR 153
EKLER 160
EK 1 Önerme 1.5'de Verilen Koşullu Beklenen Değerlerin İspatı 161
EK 2 MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST Modellerinin Karşılaştırılması için MATLAB R2013a Programında Yazılmış Olan Program Kodları 167
EK 3 MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe Modellerinin Karşılaştırılması için MATLAB R2013a Programında Yazılmış Olan Program Kodları 175
EK 4 Uygulamada Kullanılan Gerçek Veri Setleri 188
ÖZGEÇMİŞ 189

KISALTMALAR DİZİNİ

AIC	Akaike bilgi kriteri
BIC	Bayesian bilgi kriteri
CAIC	Tutarlı Akaike bilgi kriteri
EM	Expectation- Maximization
GM	Genelleştirilmiş M
ICL	Bütünleşik tam olabilirlik kriteri
$L_c(\cdot)$	Tam veri olabilirlik fonksiyonu
$\ell_c(\cdot)$	Tam veri log-olabilirlik fonksiyonu
MixregM-Huber	M-Huber yöntemine dayalı karma regresyon modeli
MixregM-Tukey	M-Tukey yöntemine dayalı karma regresyon modeli
MixregGM-Mallows	GM-Mallows yöntemine dayalı karma regresyon modeli
MixregGM-Schweppe	GM-Schweppe yöntemine dayalı karma regresyon modeli
MixregN	Normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli
MixregNt	Normal-*t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli
MixregSN	Çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli
MixregST	Çarpık *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli
MixregSTSN	Çarpık *t*-çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli
Mixregt	*t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli
ML	En çok olabilirlik
MSE	Hata kareler ortalaması

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 $\xi = 0,\ \sigma = 1$ ve farklı λ çarpıklık parametre değerleri için çarpık normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri 16

Şekil 1.2 $\xi = 0,\ \sigma = 1, \nu = 4$ ve farklı λ çarpıklık parametre değerleri için çarpık *t* dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri 24

Şekil 2.1 Huber M-tahmininin gözlemleri sınırlama şekli 46

Şekil 2.2 Mallows tipi GM-tahmininin gözlemleri sınırlama şekli 47

Şekil 2.3 Schweppe tipi GM-tahmininin gözlemleri sınırlama şekli 47

Şekil 2.4 Huber'ın ρ ve ψ fonksiyonu grafikleri 48

Şekil 2.5 Huber ağırlık fonksiyonu grafiği 49

Şekil 2.6 Tukey'in ρ ve ψ fonksiyonu grafikleri 50

Şekil 2.7 Tukey'in ağırlık fonksiyonu grafiği 51

Şekil 4.1 $n = 200$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Schweppe ve MixregM-Huber modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği 127

Şekil 4.2 $n = 400$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Schweppe ve MixregM-Huber modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği 128

Şekil 4.3 $n = 200$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Mallows, MixregGM-Schweppe, MixregM-Huber ve MixregM-Tukey modelleri tahmin edicilerinin adım sayıları 131

Şekil 4.4 $n = 400$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Mallows, MixregGM-Schweppe, MixregM-Huber ve MixregM-Tukey modelleri tahmin edicilerinin adım sayıları 131

Şekil 4.5 $n = 200$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumu 132

Şekil 4.6 $n = 400$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumu 133

Şekil 4.7 $n = 200$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Mallows, MixregGM-Schweppe, MixregM-Huber ve MixregM-Tukey modelleri tahmin edicilerinin adım sayıları 136

Şekil 4.8 $n = 400$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Mallows, MixregGM-Schweppe, MixregM-Huber ve MixregM-Tukey modelleri tahmin edicilerinin adım sayıları 137

Şekil 5.1.a. Ses tonu algılama verisinin saçılım grafiği, b. Esnetme oranının histogramı 140

Şekil 5.2 Ses tonu algılama verisi için MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği 141

Şekil 5.3 $(0,5)$ noktasına eklenmiş on aykırı gözlem içeren ses tonu algılama verisi için MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği 143

Şekil 5.4 $(0,5)$ noktasına eklenmiş on aykırı gözlem içeren ses tonu algılama verisi için MixregSN, MixregST ve MixregSTSN modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği 144

Şekil 5.5.a. Yaprak biti verisi saçılım grafiği, b. Hastalık bulaşmış bitkilerin sayısının histogramı 145

Şekil 5.6 Yaprak biti verisi için MixregN, Mixregt ve MixregNt modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği 146

Şekil 5.7 $(50,50)$ noktasına eklenmiş beş aykırı gözlem içeren yaprak biti verisi için MixregN, Mixregt ve MixregNt modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği 147

Şekil 5.8.a. Ethanol verisi saçılım grafiği, b. Eşdeğerlik oranının histogramı 148

Şekil 5.9 Ethanol verisi için MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği 149

Şekil 5.10 $(7,0.9)$ noktasına eklenmiş beş aykırı gözlem içeren ethanol verisi için MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği 150

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1 Çarpık normal dağılımın çarpıklık ve basıklık değerleri 16

Çizelge 1.2 Çarpık *t* dağılımın çarpıklık ve basıklık değerleri 23

Çizelge 4.1 $n = 200$ örneklem hacmi için tahmin edicilerin MSE ve yan değerleri..... 84

Çizelge 4.2 $n = 400$ örneklem hacmi için tahmin edicilerin MSE ve yan değerleri..... 85

Çizelge 4.3 İki bileşenli karma regresyon modeli ve hata terimi dağılımları 105

Çizelge 4.4 $n = 200$ örneklem hacmi için MixregN, Mixregt ve MixregNt modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri 107

Çizelge 4.5 $n = 400$ örneklem hacmi için MixregN, Mixregt ve MixregNt modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri 108

Çizelge 4.6 $n = 200$ örneklem hacmi için MixregSN, MixregST ve MixregSTSN modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri 109

Çizelge 4.7 $n = 400$ örneklem hacmi için MixregSN, MixregST ve MixregSTSN modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri 110

Çizelge 4.8 $n = 200$ örneklem hacmi için MixregM-Huber, MixregM-Tukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri..... 129

Çizelge 4.9 $n = 400$ örneklem hacmi için MixregM-Huber, MixregM-Tukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri..... 130

Çizelge 4.10 $n = 200$ örneklem hacmi için MixregM-Huber, MixregM-Tukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri..... 134

Çizelge 4.11 $n = 400$ örneklem hacmi için MixregM-Huber, MixregM-Tukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri 135

Çizelge 5.1 Ses tonu algılama verisine uydurulmuş MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST modellerinin ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri..... 142

Çizelge 5.2 $(0,5)$ noktasına eklenmiş on aykırı gözlem içeren ses tonu algılama verisine uydurulmuş MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST modellerinin ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri.....143

Çizelge 5.3 $(0,5)$ noktasına eklenmiş on aykırı gözlem içeren ses tonu algılama verisine uydurulmuş MixregSN, MixregST ve MixregSTSN modellerinin ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri.....144

Çizelge 5.4 Yaprak biti verisine uydurulmuş MixregN, Mixregt ve MixregNt modellerinin ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri.....146

Çizelge 5.5 $(50,50)$ noktasına eklenmiş beş aykırı gözlem içeren yaprak biti verisine uydurulmuş MixregN, Mixregt ve MixregNt modellerinin ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri 147

Çizelge 5.6 Ethanol verisine uydurulmuş MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modellerinin tahmin sonuçları ve ICL bilgi kriteri değeri 149

Çizelge 5.7 $(7,0.9)$ noktasına eklenmiş beş aykırı gözlem içeren ethanol verisine uydurulmuş MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modellerinin tahmin sonuçları ve ICL bilgi kriteri değeri 150

1. GİRİŞ

Regresyon analizi, homojen yapıya sahip bir veri setinde değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemek ve analiz etmek için yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Genelde regresyon analizi yapılırken verinin homojen yapıda olmaması analiz yapmayı zorlaştırmaktadır. Gerçek dünyada homojen olmayan veri yapıları ile karşılaşılabilir. Bai vd. (2012) tarafından kullanılan ses tonu algılama verisi, Turner (2000) tarafından yapılan çalışmada yer alan yaprak biti verisi, Hurvich vd. (1998) tarafından verilen ethanol verisi gibi veriler homojen olmayan veri tipi için örnektir. Homojenlik olmadığında yani veri farklı gruplardan oluştuğunda, verinin tamamına tek bir regresyon modeli uydurmak veride bilgi kaybına yol açabilir. Bu yüzden veriden daha sağlıklı bilgi elde edebilmek için her bir gruba ayrı regresyon modeli uydurmak gerekli olabilir. Bu tür veri yapılarında her bir model için hataların dağılımı farklı olarak yani tek bir dağılım yerine dağılımların karması varsayılabilir. Dolayısıyla veri seti heterojen yapıda olduğunda daha güvenilir tahmin ediciler elde etmek için karma regresyon modeline ihtiyaç duyulur.

Karma regresyon modeli birden fazla bilinmeyen kayıp (ya da gözlenemeyen) (latent) gruplardan gelen değişkenler arasındaki ilişkiyi araştırmak için kullanılır. İlk defa Quandt (1972) ve Quandt ve Ramsey (1978) tarafından "switching regresyon" modelinin genel bir formu olarak tanıtılan bu model mühendislik, genetik, biyoloji, ekonometri ve pazarlama gibi daha birçok uygulama alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Daha sonra Späth (1979) tarafından her bir gruptaki hataların kareleri toplamını minimum yapmak için daha etkili bir en küçük kareler yöntemi önerilmiştir. Aitkin ve Wilson (1980) tarafından aykırı gözlemlerin belirlenmesi esas alınarak karma regresyon modeli incelenmiştir ve iki bileşenli bir karma modelde bileşenlerden birinin sabit ortalamaya sahip olması durumunda, Dempster vd. (1977) tarafından seminer çalışmasında sunulan Expectation-Maximization (EM) algoritmasından yararlanılarak en çok olabilirlik (ML) yöntemi ile parametre tahmini yapılmıştır. Aitkin vd. (1981) karmaşık bir verinin analizi için EM algoritması kullanarak karma regresyon modeli için model uydurmuştur. Jones ve McLachlan (1992) karma regresyon modelinin veri analizinde uygulamasını yaparak model uydurmak için EM algoritması kullanmıştır.

Haughton (1997) ve Haughton ve Haughton (1995, 1996) çok değişkenli regresyonda iki bileşenli karma modeli içeren çalışma yapmışlardır. Aitkin (1996) rasgele etkileri modellemek için regresyon modelinin özel bir durumu olan genelleştirilmiş lineer modellerin karmasını incelemiştir ve EM algoritmasını kullanarak ML yöntemi ile model uydurmuştur. Turner (2000) bir veri seti için EM algoritması kullanarak, tek değişkenli lineer regresyon modelinin iki bileşenli karması için model uydurmuştur. Hawkins vd. (2001) olabilirlik eşitliğinden elde edilen yöntemleri kullanarak lineer regresyon modellerinin karması için bileşen sayısının belirlenmesi problemini ele almıştır. Zhu ve Zhang (2004) karma regresyon modellerinde ML tahmin edicileri için asimptotik teori oluşturmuştur.

Regresyon modellerinde hata terimlerinin dağılımının normal dağılım olduğu varsayımı altında ML tahmin edicisi en etkin tahmin edicidir. Ancak normalliğe dayalı ML tahmin edicisi aykırı gözlemlere ve kalın kuyruklu dağılıma sahip hata terimlerine karşı duyarlıdır. Bu durum söz konusu olduğunda dayanıklı parametre tahmini yöntemlerinin kullanılması önerilir. Dayanıklı parametre tahmini yöntemi iki şekilde yapılır. Hataların dağılımı kalın ve/veya kalın kuyruklu çarpık dağılımdan geldiği varsayımı altında veya bilinen dayanıklı yöntemler (M-tahmini, S-tahmini, LMS-tahmini, MM-tahmini, CM-tahmini, GM-tahmini,…) kullanılarak yapılır.

Karma regresyon modellerinin parametrelerinin dayanıklı olarak tahmin edildiği çalışmalar yapılmıştır. Markatou (2000) ve Shen vd. (2004) karma regresyon modellerinde her bir veri için ağırlık fonksiyonu kullanarak dayanıklı tahmin yöntemi önermişlerdir. Neykov vd. (2007) budanmış olabilirlik tahmin edicisi (trimmed likelihood estimator (TLE)) kullanarak karma modellerin parametrelerini dayanıklı olarak elde etmiştir. Bashir ve Carter (2012) lineer regresyon modelinin karması için dayanıklı yöntem olan S-tahmin yöntemini kullanmıştır. Bai (2010) ve Bai vd. (2012) hataların dağılımını normal dağılımın karması alarak regresyon parametrelerini ML yöntemi ve M-tahmin yöntemine dayalı dayanıklı parametre tahmini yöntemi ile tahmin etmişlerdir. Bu çalışmalarda dayanıklı yöntem olarak M adımda en küçük kareler kriteri bir dayanıklı kriter ile değiştirilerek EM benzeri algoritma önerilmiştir.

Normal dağılımın karması aykırı gözlemlere karşı duyarlı olduğundan Wei (2012) ve Yao vd. (2013) çalışmalarında Peel ve McLachlan (2000) tarafından önerilen *t* dağılımının karmasının genişletilmesi olarak *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli önermişlerdir. Bu çalışmalarda karma regresyon modeli için ML tahmin edicisi, TLE, Tukey'in fonksiyonuna dayalı uyarlanmış EM algoritması kullanılarak elde edilen dayanıklı tahmin edici, *t* dağılımına dayalı dayanıklı tahmin edici ve *t* dağılımına dayalı budanmış tahmin edici yöntemleri karşılaştırılmıştır. Ayrıca Wei (2012)'nin çalışmasının genişletilmesi olarak, Zhang (2013)'in çalışmasında hata terimlerinin dağılımını *t* dağılımı yerine Pearson Type VII dağılımının karması olarak varsayıp karma regresyon modeli için dayanıklı parametre tahmini yapmıştır.

Song vd. (2014) hataların dağılımını Laplace dağılımının karması olarak varsayıp karma regresyon modeli için dayanıklı parametre tahmini önermişlerdir. Bu çalışmada ML tahmin edicisi, TLE, *t* dağılımına dayalı budanmış karma regresyon, Laplace dağılımına dayalı budanmış karma regresyon, Tukey'in fonksiyonuna dayalı EM benzeri algoritma kullanılarak elde edilen dayanıklı tahmin edici ve *t* dağılımına dayalı dayanıklı tahmin edici yöntemleri karşılaştırılmıştır.

Bunun yanı sıra hataların dağılımının simetrik olmadığı durumlar için karma regresyon modeli ele alınmıştır. Liu ve Lin (2014) tarafından Azzalini tipi çarpık normal (Azzalini 1985, 1986) dağılıma dayalı karma regresyon modeli kullanılmıştır. Bu çalışmada normal olmayan hatalar ile karma regresyon modelleri için model seçmede kullanılan kriterlerin ne kadar hassas olduğu ve çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modelinin normallik varsayımı olmadığında sağladığı uyum incelenmiştir. Ayrıca gerçek veri üzerinde uygulama yapılmıştır.

Bu tez çalışmasının amacı, homojen olmayan veri gruplarında normallikten sapma ve/veya aykırı gözlem olduğunda regresyon parametreleri için bu problemlerden mümkün olduğunca az etkilenen tahmin ediciler elde etmektir. Yani, veride çarpıklık ve kalın kuyrukluluk olduğunda ve x yönünde aykırı gözlem olduğunda karma regresyon

modelleri için dayanıklı tahmin edicilerin elde edilmesi amaçlanmaktadır. Tez çalışmasında yer alan bölümler aşağıdaki gibidir:

Bu tez çalışmasında öncelikle regresyon modeli hakkında temel bilgiler verilip, hata terimlerinin farklı dağılıma sahip olması durumunda (normal, *t*, çarpık normal ve çarpık *t*) regresyon modelleri verilmiştir. İkinci bölümde dayanıklı istatistik ele alınarak bazı dayanıklı regresyon yöntemleri ve dayanıklılık ölçüleri hakkında bilgiler ele alınmıştır. Karma model ve karma regresyon modeli üçüncü bölümde detaylı olarak incelenmiştir. Bu bölümde ayrıca, normal ve çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modelleri ele alınmıştır. Literatürde yer alan bu modellerin normal dağılımdan dolayı verideki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olmadıkları bilinmektedir.

Tez çalışmasının dördüncü bölümü dayanıklı karma regresyon modellerine ayrılmıştır. Bu bölümde öncelikle dağılıma dayalı dayanıklı karma regresyon modeli ele alınmıştır. Literatürde yer alan *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli verildikten sonra, bu tez çalışmasında önerilen karma regresyon modelleri ele alınmıştır. İlk olarak dağılıma dayalı karma regresyon modelinde kalın kuyrukluluk ve çarpıklığı aynı anda modellemek için çarpık *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli önerilmiştir. Önerilen modelde ML tahmin edicilerinin elde edilmesi için gerekli olan EM algoritması detaylı olarak verilmiştir. Önerilen tahmin edicilerin performansları literatürde yer alan karma regresyon modeli (normal, *t* ve çarpık normal) tahmin edicilerinin performansları ile simülasyon çalışması sonucunda yan ve hata kareler ortalaması (mean square error (MSE)) değerlerine göre karşılaştırılmıştır. Veri setlerini modellemek için literatürde yapılan çalışmalardan aynı dağılımlara dayalı karma regresyon modellerinin kullanıldığı bilinmektedir. Ancak, gerçek hayatta verideki alt grupların dağılımı aynı olmayabilir. Veride grupların farklı dağılımdan gelebileceği söz konusu olduğunda bu tür verileri modellemek için farklı dağılımların karmasına dayalı dayanıklı karma regresyon modelleri önerilmiştir. Özel olarak, simetrik durum için normal ve *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli ve çarpıklık olduğunda ise çarpık *t* ve çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modelleri ele alınarak ML tahmin edicileri için EM algoritması verilmiştir. Simetrik durum için önerilen normal ve *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli tahmin edicilerinin etkinlikleri

literatürde yer alan karma regresyon modeli (normal ve *t*) tahmin edicilerinin etkinlikleriyle simülasyon çalışması sonucunda yan ve MSE değerlerine göre karşılaştırılmıştır. Çarpık durum için ise önerilen çarpık *t* ve çarpık normal dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli tahmin edicilerinin etkinlikleri literatürde yer alan karma regresyon modeli (çarpık normal ve çarpık *t*) tahmin edicilerinin etkinlikleriyle simülasyon çalışması yapılarak yan ve MSE değerlerine göre karşılaştırılmıştır.

Bu tez çalışmasında ele alınan karma regresyon modellerinden biri de dayanıklı yöntemlere dayalı karma regresyon modelleridir. Literatürde yapılan çalışmalar arasında dağılıma dayalı karma regresyon modelleri dışında dayanıklı regresyon yöntemlerinden M-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli Bai (2010) ve Bai vd. (2012) tarafından önerilmiştir. Önerilen bu yönteme dayalı karma regresyon modeli tahmin edicilerinin y yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı, ancak x yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olmadığı bilinmektedir. Bu tez çalışmasının diğer bir amacı x ve y yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olan karma regresyon modeli önermektir. Dayanıklı regresyon analizinde x ve y yönündeki aykırı gözlemlere karşı aynı anda dayanıklı olan M-tahmin yöntemine alternatif olarak verilen genelleştirilmiş M (GM)-tahmin yöntemi kullanılarak tanımlanmış olan dayanıklı karma regresyon modeli önerilmiştir. Önerilen modelde parametrelerin tahmini için EM benzeri algoritma verilmiştir. GM-tahmin yöntemine dayalı olarak önerilen karma regresyon modeli tahmin edicilerinin performansları, M-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli tahmin edicilerinin performansları ile simülasyon çalışması yapılarak yan ve MSE değerlerine göre karşılaştırılmıştır.

Tezin beşinci bölümünde ise önerilen karma regresyon modellerini literatürde yer alan diğer karma regresyon modelleri ile karşılaştırmak için gerçek veri üzerinde uygulamaları yapılmıştır. Bu bölümde üç farklı veri seti kullanılmıştır. Tahmin ediciler elde edildikten sonra modelleri karşılaştırmak için dağılım varsayımı yapıldığında Akaike bilgi kriteri (AIC), tutarlı AIC (CAIC) ve Bayesian bilgi kriteri (BIC) gibi bilgi kriterlerinden, dayanıklı regresyon yöntemi kullanıldığında ise bütünleşik tam olabilirlik (ICL) bilgi kriterinden yararlanılmıştır.

Tezin son bölümünde ise tez çalışmasında elde edilen sonuçlara ve yorumlara yer verilerek, daha sonra yapılacak olan çalışmalardan bahsedilmiştir.

1.1 Çoklu Lineer Regresyon Modeli

Regresyon analizi değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemek ve incelemek için kullanılan istatistiksel bir tekniktir. Regresyonun birçok uygulama alanı vardır, mühendislik, fizik ve kimya bilimleri, yaşam ve biyoloji bilimleri, iktisat, yönetim ve sosyal bilimler gibi hemen hemen bütün alanlarda kullanılmaktadır. Aslında, regresyon analizi en yaygın olarak kullanılan istatistiksel bir tekniktir (Montgomery vd. 2001).

Birden fazla bağımsız değişken içeren regresyon modeli çoklu regresyon modeli olarak adlandırılır. Genellikle y açıklayıcı değişkeni k sayıda bağımsız değişken ile lineer olarak ilişkili ise

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \epsilon \tag{1.1}$$

şeklinde ifade edilen modele çoklu lineer regresyon modeli denir. Burada $\beta_i, i = 1, \dots, k$ regresyon katsayıları veya parametreleri olarak adlandırılır. $k = 1$ olduğunda (1.1) ile gösterilen model basit doğrusal regresyon modelidir. Regresyon analizinin amaçlarından bir tanesi bilinmeyen regresyon parametrelerinin tahmin edilmesidir. Bunun için birçok yöntem önerilmiştir, ancak bunlardan en yaygın olarak kullanılan yöntem en küçük kareler yöntemidir. Bundan sonraki bölümlerde en küçük kareler yöntemi ve diğer yöntemlerden kısaca bahsedilecektir.

1.1.1 Çoklu lineer regresyon modeli için parametre tahmini

$\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ gözlemleri verilmiş olsun ve $n > k$ olduğu varsayılsın. y_j ile j. açıklayıcı değişken ve x_{ij} ile de $\boldsymbol{x}_i$ bağımsız değişkeninin j. gözlem değeri gösterilsin.

(1.1) modelinde hata terimi ϵ için $E(\epsilon) = 0$, $Var(\epsilon) = \sigma^2$ olduğu varsayılsın. (1.1) modeli örneklem için aşağıdaki gibi yazılır:

$$y_j = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{ij} + \epsilon_j, j = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Burada yukarıda verilen iki koşulun yanı sıra hata terimlerinin ilişkisiz olduğu varsayılsın. Çoklu regresyon modellerinde sonuçların daha kısa ve öz bir şekilde ifade edilmesi için matris biçiminde göstermek daha uygundur. Dolayısıyla (1.2) modeli $p = k + 1$ olmak üzere aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y_j = \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta} + \epsilon_j, j = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

Burada y_j bağımlı değişken, $\boldsymbol{x}_j$ ($p \times 1$ boyutlu) bağımsız değişken vektörü, $\boldsymbol{\beta}$ ($p \times 1$ boyutlu) bilinmeyen parametre vektörü ve ϵ_j hata terimidir. (1.3) modelinin matris gösterimi ise

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \tag{1.4}$$

şeklindedir. Burada $\boldsymbol{y}$ ($n \times 1$ boyutlu) bağımlı değişken vektörü, $\boldsymbol{X}$ ($n \times p$ boyutlu) tam ranklı ($rank(\boldsymbol{X}) = k$) bağımsız değişkenler matrisi (tasarım matrisi), $\boldsymbol{\beta}$ ($p \times 1$ boyutlu) bilinmeyen parametre vektörü ve $\boldsymbol{\epsilon}$ ($n \times 1$ boyutlu) hata terimleri vektörüdür. Buradan bilinmeyen parametre vektörü için en küçük kareler tahmin edicisi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j^2 = \boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\epsilon} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$$

fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre minimum yapılmasıyla

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{1.5}$$

olarak elde edilir. Hata varyansı σ^2 için yansız tahmin edici

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

olarak verilir.

(1.4) eşitliği ile verilen regresyon modelinde hata terimlerinin normal dağıldığı ($\boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$) varsayılsın. Bu varsayım altında $\boldsymbol{\beta}$ ve σ^2 parametreleri ML yöntemi ile tahmin edilir. ML tahmin edicilerini bulmak için log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

biçiminde bulunur. Bu fonksiyonun $\boldsymbol{\beta}$ ve σ^2 parametrelerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde ML tahmin edicileri

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}\ ,$$
$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

olarak elde edilir. Burada σ^2'nin tahmin edicisinin yanlı olduğu ve $\boldsymbol{\beta}$ için ML tahmin edicisi ile en küçük kareler tahmin edicisinin aynı olduğu görülür (ayrıntılı bilgi için bkz. Montgomery vd. 2001).

Hataların normal dağıldığı durumda $\boldsymbol{\beta}$ için en küçük kareler tahmin edicisi en iyi lineer yansız tahmin edicidir. Fakat hatalar normal dağılmadığında ve/veya veride aykırı gözlemler olduğunda $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$'nın etkinliğinin azaldığı bilinmektedir (bkz. Maronna vd. 2006).

Normallik varsayımının yapılamadığı durumlarda hatalar için alternatif dağılımlar önerilmiştir. Örneğin, hataların kalın kuyruklu simetrik bir dağılım olması durumunda normal dağılıma alternatif olarak *t* dağılımı kullanılmaktadır. Ancak, hataların *t* dağıldığı varsayımı yapıldığında ML tahmin edicileri analitik olarak bulunamamaktadır. Nümerik yöntemler yardımıyla tahmin ediciler elde edilebilmektedir. Bu tez çalışmasında nümerik yöntemlerden biri olan EM algoritması kullanılacaktır. EM algoritması ile ilgili kısa bilgi takip eden alt bölümde verilmiştir.

1.2 EM Algoritması

Dempster vd. (1977) tarafından önerilen EM algoritması kayıp değişkenlere bağlı olan olasılık modellerinin parametrelerinin ML yöntemi ile tahmin edilmesinde kullanılır. EM algoritması E (Expectation) ve M (Maximization) adımlarından oluşan iteratif bir yöntemdir. E adımda, kayıp değişkenler için dağılımın o anki parametre değerlerine göre log-olabilirlik fonksiyonun beklenen değeri hesaplanır. M adımda ise E adımda bulunan log-olabilirlik fonksiyonunun beklenen değerini maksimum yapan parametre değerleri hesaplanır. Daha sonra M adımda bulunan bu parametre değerleri bir sonraki E adımda kayıp değişkenlerin dağılımının belirlenmesinde kullanılır.

$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ verisi $g(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$ yoğunluk fonksiyonuna sahip dağılımdan gözlenmiş olsun. $\boldsymbol{\theta}$ parametresinin ML tahmin edicisi aşağıdaki gibidir:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \log L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{j=1}^{n} \log g\left(x_j; \boldsymbol{\theta}\right). \tag{1.6}$$

$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ tam verisi için $\log L_c(\boldsymbol{\theta})$ log-olabilirlik fonksiyonu ile ML tahmin edicisinin basit ya da kapalı bir formunun olduğu varsayılsın. Burada $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_n)$ kayıp veridir. $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ tahmin edicisini bulmak için kullanılan EM algoritması aşağıdaki adımlardan oluşur:

Adım 1. $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ parametresi için başlangıç değeri ve Δ durdurma koşulu belirlenir.

Adım 2. E adımı: $(k+1)$. adımda $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ parametrelerinin o anki tahmin değerleri kullanılarak, $\boldsymbol{x}$ verilmişken $\boldsymbol{z}$ kayıp değişkeninin koşullu dağılımına göre log-olabilirlik fonksiyonunun beklenen değeri hesaplanır:

$$Q\left(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\theta}^{(k)}\right) = E\left(\log L_c(\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{x},\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right). \tag{1.7}$$

Adım 3. M adımı: $Q\left(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\theta}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\theta}$ civarındaki maksimumu, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)}$ olarak belirlenir:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right). \tag{1.8}$$

Adım 4. Belirlenen yakınsaklık kriteri $\left\|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right\| < \Delta$ sağlanana kadar 2. ve 3. adımlar tekrarlanır.

1.3 *t* Dağılıma Dayalı Regresyon Modeli için Parametre Tahmini

Normalliğe dayalı regresyon modeli kalın kuyruklu hata terimlerine ve aykırı gözlemlere karşı duyarlı olduğundan, dayanıklı tahmin ediciler elde etmek için normal dağılıma alternatif olarak *t* dağılımına dayalı regresyon modeli önerilmiştir. (1.3) eşitliği ile verilen regresyon modeli ele alınsın. Burada ϵ_j hata terimleri 0 ortalamalı, σ^2 ölçek parametreli ve ν serbestlik dereceli *t* dağılımına sahip olsun ($\epsilon_j \sim t_\nu(0,\sigma^2)$). Bu varsayım altında hataların dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$f(\epsilon;\sigma^2,\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{\epsilon^2}{\sigma^2\nu}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, \tag{1.9}$$

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(f\left(y_j; \boldsymbol{x}_j{}'\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu\right)\right) \ , \ \ \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu) \tag{1.10}$$

şeklinde olacaktır. $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ gözlemleri verilmişken bilinmeyen $\boldsymbol{\theta}$ parametresinin ML tahmin edicisi log-olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla elde edilir. (1.10) eşitliği iteratif olarak çözülebilir. Ancak iteratif yönteme göre yakınsamayı garantileyen ve uygulama kolaylığından dolayı ML tahmin edicileri EM algoritması kullanılarak elde edilecektir.

EM algoritmasının adımlarının kolay yürütülmesi için *t* dağılımının normal dağılımın ölçek karması şeklinde yazılması özelliği kullanılacaktır. u kayıp değişken olmak üzere koşullu dağılım

$$y_j|u_j \sim N\left(\boldsymbol{x}_j'\,\boldsymbol{\beta}, \sigma^2/u_j\right) \ , \ \ u_j \sim Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \tag{1.11}$$

şeklindedir. Burada $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ kayıp veri ve $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})$ tam veri olmak üzere tam veri için olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları

$$L_c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/u_j}} e^{-\frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)^2}{2\sigma^2/u_j}} \frac{(\nu/2)^{\nu/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} u_j^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}u_j} \ , \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{n} & -\frac{\log(2\pi)}{2} + \frac{\log\left(u_j\right)}{2} - \frac{\log(\sigma^2)}{2} - \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)^2}{2\sigma^2/u_j} \\ & + \frac{\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right) - \log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) + \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\log\left(u_j\right) - \frac{\nu}{2}u_j \end{aligned} \tag{1.13}$$

olarak bulunur. Bu fonksiyon $\boldsymbol{\theta}$ parametresine göre maksimum yapılarak $\boldsymbol{\theta}$ için tahmin edici elde edilebilir. Ancak, u_j kayıp gözlem olarak alındığından elde edilen bu tahmin ediciler kullanılamaz. u_j'ler yerine y_j ve $\boldsymbol{\theta}$ verildiğinde u_j'lerin koşullu beklenen değerleri bulunarak elde edilen tahmin ediciler kullanılabilir. Bu koşullu beklenen

değerleri bulmak için log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri ve y_j'ler verildiğinde u_j'lerin koşullu dağılımı bulunmalıdır. Buradan tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri

$$E\left(\ell_c(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})|y_j\right) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - n\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) + n\frac{\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}E\left(\log u_j\,|y_j\right) - \frac{E\left(u_j|y_j\right)\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)^2}{2\sigma^2} + \left(\frac{\nu}{2}-1\right)E\left(\log u_j|y_j\right) - \frac{\nu}{2}\,E\left(u_j|y_j\right)\right) \tag{1.14}$$

şeklinde bulunur. Burada yukarıda verilen $E\left(u_j|y_j\right)$ koşullu beklenen değerinin hesaplatılması için $u_j|y_j$ koşullu dağılımının bulunması gerekir. Bu koşullu dağılım

$$u_j|y_j \sim Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{1}{2}\left(\nu + \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)^2}{\sigma^2}\right)\right) \tag{1.15}$$

şeklindedir. Ayrıca $E\left(\log u_j|y_j\right)$ koşullu beklenen değeri de

$$X \sim Gamma(\alpha,\beta) \text{ ise } E(\log X) = DG(\alpha) - \log(\beta) \tag{1.16}$$

özelliği yardımıyla hesaplanır. Burada $DG(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ digamma fonksiyonudur. Böylece

$$E\left(u_j|y_j\right) = \frac{\nu+1}{\nu + \left(\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)/\sigma\right)^2}\,, \tag{1.17}$$

$$E\left(\log u_j|y_j\right) = DG\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\left(\nu + \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)^2}{\sigma^2}\right)\right) \tag{1.18}$$

olarak elde edilir.

EM algoritması: Yukarıda verilen bilgiler doğrultusunda $\boldsymbol{\theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibidir:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ verilmişken aşağıdaki koşullu beklenen değerler hesaplanır:

$$\hat{u}_{1j}^{(k)} = E\left(u_j \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = \frac{\hat{v}^{(k)} + 1}{\hat{v}^{(k)} + \left(\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)/\hat{\sigma}^{(k)}\right)^2}\,, \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}\hat{u}_{2j}^{(k)} &= E\left(\log u_j \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) \\ &= DG\left(\frac{\hat{v}^{(k)}+1}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\left(\hat{v}^{(k)} + \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)^2}{\hat{\sigma}^{2(k)}}\right)\right).\end{aligned} \tag{1.20}$$

Hesaplanan koşullu beklenen değerler (1.14) eşitliğinde yerine yazılarak $Q\left(\boldsymbol{\theta}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = E\left(\ell_c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}) | y_j, \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}Q\left(\boldsymbol{\theta}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = &-\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - n\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) + n\frac{\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{u}_{2j}^{(k)}}{2} - \frac{\hat{u}_{1j}^{(k)}\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)^2}{2\sigma^2} + \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\hat{u}_{2j}^{(k)} - \frac{\nu}{2}\hat{u}_{1j}^{(k)}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

ii) M-adımı: $Q\left(\boldsymbol{\theta}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q\left(\boldsymbol{\theta}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{u}_{1j}^{(k)} \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{x}_j'\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{u}_{1j}^{(k)} \boldsymbol{x}_j y_j\right) \tag{1.22}$$

olarak bulunur.

2. $Q\left(\boldsymbol{\theta}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun σ^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\sigma}^{2(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{u}_{1j}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)^2}{n}. \tag{1.23}$$

3. $Q\left(\boldsymbol{\theta}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun ν parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\theta}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} + \frac{1}{2}\hat{u}_{2j}^{(k)} - \frac{1}{2}\hat{u}_{1j}^{(k)}\right) = 0$$

denklemi elde edilir. $\hat{\nu}^{(k+1)}$ aşağıdaki denklemin çözülmesiyle bulunur:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(DG\left(\frac{\nu}{2}\right) - \log\left(\frac{\nu}{2}\right) - 1 - \hat{u}_{2j}^{(k)} + \hat{u}_{1j}^{(k)}\right) = 0. \tag{1.24}$$

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right\| < \Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

Regresyon modelinde hataların dağılımının kalın kuyruklu olması durumunda normal dağılıma alternatif olarak *t* dağılımı kullanılmaktadır. Hataların dağılımının asimetrik olduğu durumda normal dağılıma alternatif olarak çarpık normal dağılımın kullanılması önerilmiştir. Hataların dağılımının kalın kuyruklu ve çarpık olması durumunda ise

çarpık normal dağılıma alternatif olarak çarpık *t* dağılımının kullanılması önerilmiştir. Aşağıda verilen alt bölümlerde hataların dağılımının çarpık dağılımdan geldiği varsayımı altında regresyon parametrelerinin elde edilmesi verilecektir.

1.4 Çarpık Dağılımlar

Bu bölümde, bu tez çalışmasında ilgilenilecek olan çarpık dağılımlardan çarpık normal ve çarpık *t* dağılımları yer almaktadır.

1.4.1 Çarpık normal dağılım

Y rasgele değişkeni $\xi \in \mathbb{R}$ konum parametresi, $\sigma^2 \in (0, \infty)$ ölçek parametresi ve $\lambda \in \mathbb{R}$ çarpıklık parametresi ile Azzalini (1985, 1986) tarafından geliştirilen çarpık normal dağılıma sahip olsun. Bu dağılım için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$f(y) = \frac{2}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\xi}{\sigma}\right)\Phi\left(\lambda\left(\frac{y-\xi}{\sigma}\right)\right), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

Burada $\phi(\cdot)$ ile $\Phi(\cdot)$ standart normal dağılımın olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Eğer Y rasgele değişkeni (1.25) ile gösterilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise $Y \sim SN(\xi, \sigma^2, \lambda)$ şeklinde yazılır.

Önerme 1.1. Eğer $Y \sim SN(\xi, \sigma^2, \lambda)$ ise bu dağılım için beklenen değer, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları aşağıdaki gibidir (Lin vd. 2007b):

$$E(Y) = \xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta_\lambda\sigma \ , \ Var(Y) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\delta_\lambda^2\right)\sigma^2 \ ,$$

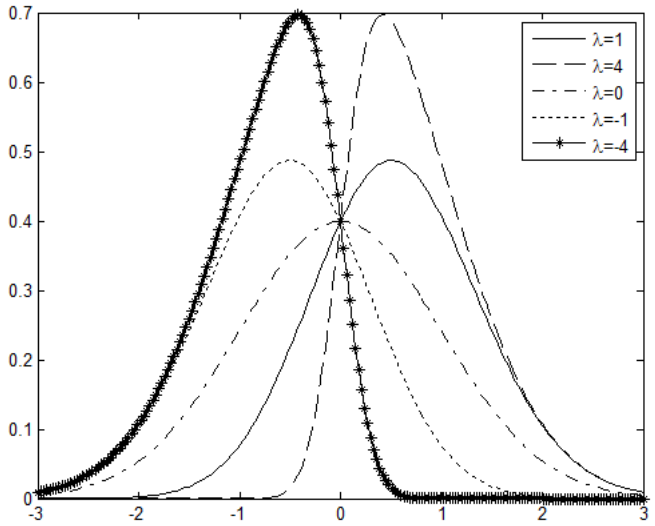
$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)\lambda^3}{(\pi+(\pi-2)\lambda^2)^{3/2}} \quad , \quad \gamma_2 = 3 + \frac{8(\pi-3)\lambda^4}{(\pi+(\pi-2)\lambda^2)^2}.$$

Burada $\delta_\lambda = \lambda/\sqrt{1+\lambda^2}$ olmak üzere γ_1 ile γ_2 çarpıklık ve basıklık katsayılarını göstermektedir. Çizelge 1.1'de çarpık normal dağılıma ait farklı çarpıklık parametresi değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları değerleri gösterilmektedir. Çizelgeden çarpıklık parametresinin (λ) arttıkça çarpıklık ve basıklık değerlerinin arttığı görülmektedir.

Çizelge 1.1 Çarpık normal dağılımın çarpıklık ve basıklık değerleri

λ	0	1	2	3	4
γ_1	0	0.1369	0.4538	0.6670	0.7844
γ_2	3	3.0617	3.3051	3.5098	3.6328

Çarpık normal dağılımın çarpıklığını çarpıklık parametresi λ belirlemektedir. Şekil 1.1'den görüldüğü gibi eğer $\lambda > 0$ ise dağılım sağa çarpık, $\lambda < 0$ ise dağılım sola çarpık ve $\lambda = 0$ ise dağılım normal dağılımdır.



Şekil 1.1 $\xi = 0$, $\sigma = 1$ ve farklı λ çarpıklık parametre değerleri için çarpık normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri

$Y \sim SN(\xi, \sigma^2, \lambda)$ rasgele değişkeni için Azalini (1986, s. 201) ve Henze (1986, Teorem 1) tarafından gösterilen stokastik gösterim aşağıdaki gibidir:

$$Y = \xi + \sigma\delta_\lambda |U_1| + \sigma\sqrt{1-\delta_\lambda^2}U_2. \tag{1.26}$$

Burada U_1 ve U_2 standart normal dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenlerdir. $\gamma = |U_1|$ olmak üzere

$$Y|\gamma \sim N\left(\xi + \sigma\delta_\lambda\gamma, \left(1-\delta_\lambda^2\right)\sigma^2\right) \ , \ \gamma \sim TN\left(0,1;(0,\infty)\right) \tag{1.27}$$

şeklindedir. Burada $TN(\cdot)$ kesilmiş normal dağılımı göstermektedir. Koşullu dağılımlardan yaralanılarak Y ve γ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y,\gamma) = \frac{1}{\pi\sqrt{\kappa^2}}\exp\left(-\frac{(y-\xi-\alpha\gamma)^2}{2\kappa^2} - \frac{\gamma^2}{2}\right)$$

olarak elde edilir. Burada $\alpha = \sigma\delta_\lambda$ ve $\kappa^2 = \sigma^2\left(1-\delta_\lambda^2\right)$ dır. Ayrıca $\gamma|y$ koşullu dağılımı

$$f(\gamma|y) = \frac{f(y,\gamma)}{f(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-\delta_\lambda^2\right)}\Phi\left(\lambda\left(\frac{y-\xi}{\sigma}\right)\right)}\exp\left(-\frac{\left(\gamma - \frac{\delta_\lambda(y-\xi)}{\sigma}\right)^2}{2\left(1-\delta_\lambda^2\right)}\right)$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$\gamma|y \sim TN\left(\left(\delta_\lambda\eta, 1-\delta_\lambda^2\right);(0,\infty)\right) \tag{1.28}$$

dır. Burada $\eta = (y - \xi)/\sigma$ dır.

Önerme 1.2. $X \sim TN\big((\xi, \sigma^2); (a_1, a_2)\big)$ dağılımına sahip bir rasgele değişken ise olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \xi, \sigma^2) = \{\Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1)\}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \xi)^2\right), a_1 < x < a_2,$$

ile tanımlanır. Burada $\alpha_i = (a_i - \xi)/\sigma, i = 1{,}2$ dır. O halde $E(X)$ ve $E(X^2)$ aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \xi - \sigma \frac{\phi(\alpha_2) - \phi(\alpha_1)}{\Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1)},$$
$$E(X^2) = \xi^2 + \sigma^2 - \sigma^2 \frac{\alpha_2\phi(\alpha_2) - \alpha_1\phi(\alpha_1)}{\Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1)} - 2\xi\sigma \frac{\phi(\alpha_2) - \phi(\alpha_1)}{\Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1)}.$$

Önerme 1.2'den yararlanılarak $Y = y$ verildiğinde γ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri

$$E(\gamma|y) = \delta_\lambda \eta + \sqrt{1 - \delta_\lambda^2} \frac{\phi(\lambda\eta)}{\Phi(\lambda\eta)} \tag{1.29}$$

ve $Y = y$ verildiğinde γ^2 rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri

$$E(\gamma^2|y) = 1 - \delta_\lambda^2 + \delta_\lambda \eta E(\gamma|y). \tag{1.30}$$

olarak elde edilir.

1.4.1.1 Çarpık normal dağılıma dayalı regresyon modeli için parametre tahmini

(1.3) denklemi ile verilen regresyon modeli ele alınsın. Bu regresyon modeli için hata terimleri dağılımı $\epsilon_j \sim SN(0, \sigma^2, \lambda)$ olsun. Burada simetrik dağılımlardan farklı olarak $E(\epsilon) \neq 0$ dır. Çarpık normal dağılım için $E(\epsilon) = \sqrt{2/\pi}\,\delta_\lambda \sigma$ olduğundan parametre tahmini yapılırken sadece kesim noktası etkilenir. Buna göre $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ gözlemleri verilmişken bilinmeyen $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \lambda)$ parametresinin ML tahmin edicisi

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(f\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \lambda\right)\right) \tag{1.31}$$

log-olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla elde edilir. Ancak bu fonksiyonu maksimum yapan nokta analitik olarak elde edilememektedir. Dolayısıyla EM algoritması kullanılarak parametre tahmini yapılır.

EM algoritmasının adımlarının kolaylaştırılması için çarpık normal dağılımın (1.26) eşitliği ile verilen stokastik gösteriminden yararlanılarak koşullu dağılım

$$y_j|\gamma_j \sim N\left(\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta} + \alpha\gamma_j, \kappa^2\right)\ ,\ \ \gamma_j \sim TN\left(0{,}1; (0, \infty)\right) \tag{1.32}$$

olarak elde edilir. Burada $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ kayıp veri ve $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\gamma})$ tam veri olmak üzere tam veri için olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları

$$L_c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\gamma}) = \prod_{=1}^{n} \frac{1}{\pi\sqrt{\kappa^2}} \exp\left(-\frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta} - \alpha\gamma_j\right)^2}{2\kappa^2} - \frac{\gamma_j^2}{2}\right), \tag{1.33}$$

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{j=1}^{n} \left(-\log\pi - \frac{1}{2}\log\kappa^2 - \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta} - \alpha\gamma_j\right)^2}{2\kappa^2} - \frac{\gamma_j^2}{2}\right) \tag{1.34}$$

olarak bulunur. Tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri ise

$$E\left(\ell_c(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma})|y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} -\frac{1}{2}\log\kappa^2 - \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)^2}{2\kappa^2} + \frac{\alpha\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)}{\kappa^2}E\left(\gamma_j|y_j\right)$$

$$-\frac{\alpha^2}{2\kappa^2}E\left(\gamma_j^2|y_j\right) \tag{1.35}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemde yer alan $E\left(\gamma_j|y_j\right)$ ve $E\left(\gamma_j^2|y_j\right)$ koşullu beklenen değerleri (1.29) ve (1.30) eşitliklerinden yararlanılarak hesaplanır.

EM algoritması: $\boldsymbol{\theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibidir:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ verilmişken aşağıdaki beklenen değerler hesaplanır:

$$\hat{t}_{1j}^{(k)} = E\left(\gamma_j|y_j,\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = \hat{\delta}_\lambda^{(k)}\hat{\eta}_j^{(k)} + \sqrt{1-\hat{\delta}_\lambda^{2(k)}}\,\frac{\phi\left(\hat{\lambda}^{(k)}\hat{\eta}_j^{(k)}\right)}{\Phi\left(\hat{\lambda}^{(k)}\hat{\eta}_j^{(k)}\right)}\,, \tag{1.36}$$

$$\hat{t}_{2j}^{(k)} = E\left(\gamma_j^2|y_j,\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = 1 - \hat{\delta}_\lambda^{2(k)} + \hat{\delta}_\lambda^{(k)}\hat{\eta}_j^{(k)}\hat{t}_{1j}^{(k)}. \tag{1.37}$$

Burada $\hat{\eta}_j^{(k)} = \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)}{\widehat{\sigma}^{(k)}}$ dır. Buradan hesaplanan beklenen değerler (1.35) eşitliğinde yerine yazıldıktan sonra $Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = E\left(\ell_c(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma})|y_j,\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ amaç fonksiyonu

$$Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\log\kappa^2 - \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)^2}{2\kappa^2} + \frac{\alpha\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)\hat{t}_{1j}^{(k)}}{\kappa^2}\right.$$

$$\left. -\frac{\alpha^2\hat{t}_{2j}^{(k)}}{2\kappa^2}\right) \tag{1.38}$$

olarak bulunur.

ii) M-adımı: $Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k+1)}$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{x}_j'\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \hat{\alpha}^{(k)} \hat{t}_{1j}^{(k)}\right) \boldsymbol{x}_j\right). \tag{1.39}$$

2. $Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun α parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\hat{\alpha}^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{t}_{1j}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)}{\sum_{j=1}^{n} \hat{t}_{2j}^{(k)}} \tag{1.40}$$

olarak elde edilir.

3. $Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun κ^2 parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle $\hat{\kappa}^{2(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\hat{\kappa}^{2(k+1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big(\left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)^2 - 2\hat{\alpha}^{(k)} \hat{t}_{1j}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right) + \hat{\alpha}^{2(k)} \hat{t}_{2j}^{(k)} \Big) \tag{1.41}$$

şeklinde bulunur. Buradan $\hat{\alpha}^{(k+1)}$ ve $\hat{\kappa}^{2(k+1)}$ parametre tahmin edicileri kullanılarak $\hat{\sigma}^{2(k+1)}$ ve $\hat{\lambda}^{(k+1)}$ tahmin edicileri

$$\hat{\sigma}^{2(k+1)} = \hat{\kappa}^{2(k+1)} + \hat{\alpha}^{2(k+1)} \ , \tag{1.42}$$

$$\hat{\lambda}^{(k+1)} = \hat{\delta}_{\lambda}^{(k+1)}\left(1 - \hat{\delta}_{\lambda}^{2(k+1)}\right)^{-1/2} \tag{1.43}$$

olarak elde edilir ve $\hat{\delta}_{\lambda}^{(k+1)} = \hat{\alpha}^{(k+1)}/\hat{\sigma}^{(k+1)}$ dır.

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right\| < \Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

1.4.2 Çarpık *t* dağılımı

Y rasgele değişkeni $\xi \in \mathbb{R}$ konum parametresi, $\sigma^2 \in (0, \infty)$ ölçek parametresi, $\lambda \in \mathbb{R}$ çarpıklık parametresi ve $\nu \in (0, \infty)$ serbestlik derecesi parametresi ile Gupta vd. (2002), Azzalini ve Capitanio (2003) ve Gupta (2003) tarafından geliştirilen çarpık *t* dağılımına sahip olsun. Çarpık *t* dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$f(y) = \frac{2}{\sigma} t_{\nu}(\eta) T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right) \ , \ \eta = \left(\frac{y-\xi}{\sigma}\right). \tag{1.44}$$

Burada $t_{\nu}(\cdot)$ ve $T_{\nu}(\cdot)$ ifadeleri ν serbestlik dereceli *t* dağılımının olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Eğer Y rasgele değişkeni (1.44) ile gösterilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise $Y \sim ST(\xi, \sigma^2, \lambda, \nu)$ şeklinde yazılır.

Önerme 1.3. Eğer $Y \sim ST(\xi, \sigma^2, \lambda, \nu)$ ise bu dağılım için beklenen değer, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları aşağıdaki gibidir (Azzalini ve Capitanio 2003):

$$E(Y) = \xi + \sigma c, \nu > 1 \ ,$$

$$Var(Y) = \sigma^2\left(\frac{\nu}{\nu-2} - c^2\right) \ , \ \nu > 2 \ ,$$

$$\gamma_1 = c\left(\frac{\nu\left(3-\delta_\lambda^2\right)}{\nu-3} - \frac{3\nu}{\nu-2} + 2c^2\right)\left(\frac{\nu}{\nu-2} - c^2\right)^{-3/2}, \quad \nu > 3,$$

$$\gamma_2 = \frac{\left(\frac{3\nu^2}{(\nu-2)(\nu-4)} - \frac{4c^2\nu\left(3-\delta_\lambda^2\right)}{\nu-3} + \frac{6c^2\nu}{\nu-2} - 3c^4\right)}{\left(\frac{\nu}{\nu-2} - c^2\right)^2} - 3, \quad \nu > 4.$$

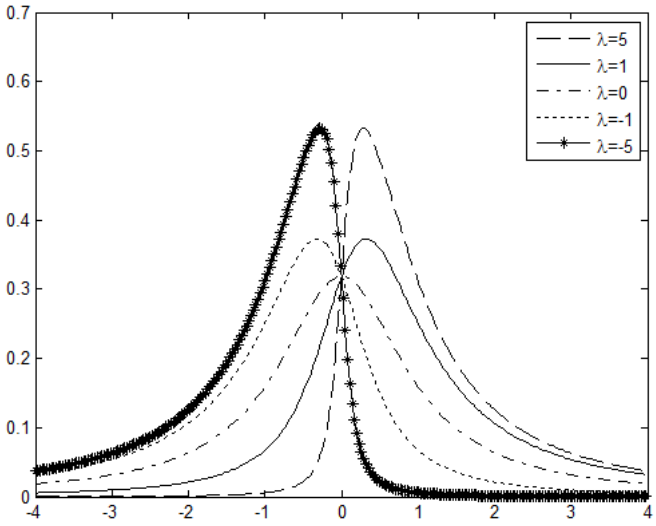
Burada $\delta_\lambda = \lambda/\sqrt{1+\lambda^2}$ ve $c = \delta_\lambda\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ dır. Ayrıca γ_1 ile γ_2 çarpıklık ve basıklık katsayılarını göstermektedir.

Çizelge 1.2'de çarpık *t* dağılıma ait farklı çarpıklık parametresi değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları değerleri gösterilmektedir.

Çizelge 1.2 Çarpık *t* dağılımın çarpıklık ve basıklık değerleri

λ	0		1		2		3		4		5	
ν	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
4	0	-	1.9245	-	2.9938	-	3.4537	-	3.6665	-	3.7777	-
5	0	6	1.0758	8.9208	1.7902	13.5284	2.1268	16.2559	2.2885	17.6763	2.3746	18.4594
6	0	3	0.7797	4.1626	1.3705	6.2975	1.6663	7.6593	1.8120	8.3906	1.8904	8.7996
8	0	1.5	0.5335	1.9705	1.0211	3.0353	1.2843	3.7777	1.4179	4.1908	1.4908	4.4257
10	0	1	0.4243	1.2909	0.8658	2.0439	1.1149	2.5955	1.2436	2.9085	1.3143	3.0881

Çarpık t dağılımının çarpıklığı λ parametresi tarafından belirlenmektedir. Şekil 1.2'den de görüldüğü gibi eğer $\lambda > 0$ ise dağılım sağa çarpık, $\lambda < 0$ ise dağılım sola çarpık ve $\lambda = 0$ ise dağılım *t* dağılımıdır.



Şekil 1.2 $\xi = 0,\ \sigma = 1,\ \nu = 4$ ve farklı λ çarpıklık parametre değerleri için çarpık *t* dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri

$Y \sim ST(\xi, \sigma^2, \lambda, \nu)$ rasgele değişkeni için stokastik gösterim aşağıdaki gibidir (Gupta vd. 2002, Azzalini ve Capitanio 2003 ve Gupta 2003)

$$Y = \xi + \sigma \frac{Z}{\sqrt{\tau}}, Z \sim SN(\lambda)\ ,\quad \tau \sim Gamma(\nu/2, \nu/2) \tag{1.45}$$

burada Z ve τ rasgele değişkenleri bağımsızdır. Ayrıca standart çarpık normal dağılıma sahip Z rasgele değişkeni için stokastik gösterim

$$Z = \delta_\lambda |U_1| + \sqrt{1 - \delta_\lambda^2} U_2$$

olduğuna göre ve $\gamma = \frac{|U_1|}{\sqrt{\tau}}$ olmak üzere (1.45) ile verilen gösterimden koşullu dağılımlar

$$Y|\gamma, \tau \sim N\left(\xi + \sigma\delta_\lambda\gamma, \frac{1 - \delta_\lambda^2}{\tau}\sigma^2\right), \tag{1.46}$$

$$\gamma|\tau \sim TN\left(0, \frac{1}{\tau}; (0,\infty)\right) \ , \quad \tau \sim Gamma(\nu/2\,, \nu/2) \tag{1.47}$$

olarak elde edilir. (1.46) ve (1.47) ile verilen koşullu dağılımlardan yararlanılarak $Y,\ \gamma$ ve τ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y,\gamma,\tau) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{1-\delta_\lambda^2}} \frac{(\nu/2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\nu/2)} \tau^{\frac{\nu}{2}} \exp\left(-\frac{\tau\eta^2}{2\left(1-\delta_\lambda^2\right)} - \frac{\nu\tau}{2}\right)$$
$$\exp\left(-\frac{\gamma^2\tau}{2\left(1-\delta_\lambda^2\right)} + \frac{\gamma\tau\delta_\lambda(y-\xi)}{\left(1-\delta_\lambda^2\right)\sigma}\right) \tag{1.48}$$

şeklinde bulunur. $f(y,\gamma,\tau)$ fonksiyonunun γ üzerinden integralinin alınmasıyla

$$f(y,\tau) = \int_{\gamma=0}^{\infty} \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{1-\delta_\lambda^2}} \frac{(\nu/2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\nu/2)} \tau^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\tau\eta^2}{2\left(1-\delta_\lambda^2\right)} - \frac{\nu\tau}{2} - \frac{\gamma^2\tau}{2\left(1-\delta_\lambda^2\right)} + \frac{\gamma\tau\delta_\lambda(y-\xi)}{\left(1-\delta_\lambda^2\right)\sigma}} d\gamma$$
$$= \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{1-\delta_\lambda^2}} \frac{(\nu/2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\nu/2)} \tau^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\nu\tau}{2} - \frac{\tau\eta^2}{2\left(1-\delta_\lambda^2\right)} + \frac{\tau\delta_\lambda^2\eta^2}{2\left(1-\delta_\lambda^2\right)}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{2\left(1-\delta_\lambda^2\right)}\left(\gamma - \delta_\lambda\frac{(y-\xi)}{\sigma}\right)^2} d\gamma$$

ve $t = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{1-\delta_\lambda^2}}\left(\gamma - \delta_\lambda \frac{(y-\xi)}{\sigma}\right)$ dönüşümünün kullanılmasıyla

$$f(y,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau^{\frac{\nu-1}{2}}}{\sigma} \frac{(\nu/2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\nu/2)} \exp\left(-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)\right) \Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)$$

olarak elde edilir. Buradan $\gamma|\tau, y$ koşullu dağılımı

$$f(\gamma|\tau,y)=\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi\left(1-\delta_\lambda^2\right)}}e^{-\frac{\tau\left(\gamma-\delta_\lambda\frac{(y-\xi)}{\sigma}\right)^2}{2\left(1-\delta_\lambda^2\right)}}\Phi^{-1}\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)$$

şeklinde bulunur. Böylece τ ve y verilmişken γ rasgele değişkeninin koşullu dağılımı

$$\gamma|\tau,y\sim TN\left(\delta_\lambda\frac{(y-\xi)}{\sigma},\frac{\left(1-\delta_\lambda^2\right)}{\tau};(0,\infty)\right). \tag{1.49}$$

olur. Ayrıca, $\tau|y$ koşullu dağılımı $b=\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)\right\}^{-1}$ normalleştirme sabiti olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$f(\tau|y)=b\tau^{\frac{\nu-1}{2}}e^{-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)}\Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right). \tag{1.50}$$

Önerme 1.4. Eğer $\tau\sim Gamma(\alpha,\beta)$ ise herhangi bir $a\in\mathbb{R}$ için

$$E\left(\Phi\left(a\sqrt{\tau}\right)\right)=T_{2\alpha}\left(a\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \tag{1.51}$$

dır (Azzalini ve Capitanio 2003).

Önerme 1.5. $Y=y$ verildiğinde τ, $\gamma\tau$, $\gamma^2\tau$ ve $\log(\tau)$ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri aşağıdaki gibidir (Lin vd. 2007a) (ispat için bkz. EK1):

$$\boldsymbol{i})\ E(\tau|y) = \left(\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}\right)\frac{T_{\nu+3}\left(M\sqrt{\frac{\nu+3}{\nu+1}}\right)}{T_{\nu+1}(M)}\ , \tag{1.52}$$

$$\boldsymbol{ii})\ E(\gamma\tau|y) = \delta_\lambda\frac{(y-\xi)}{\sigma}E(\tau|y) + \frac{\sqrt{1-\delta_\lambda^2}}{\pi\sigma f(y)}\left(\frac{\eta^2}{\nu\left(1-\delta_\lambda^2\right)}+1\right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}\ , \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{iii})\ E(\gamma^2\tau|y) &= \delta_\lambda^2\frac{(y-\xi)^2}{\sigma^2}E(\tau|y) + \left(1-\delta_\lambda^2\right)\\ &+\frac{\delta_\lambda\sqrt{1-\delta_\lambda^2}(y-\xi)}{\pi\sigma^2 f(y)}\left(\frac{\eta^2}{\nu\left(1-\delta_\lambda^2\right)}+1\right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}\ ,\end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{iv})\ E(\log\tau|y) &= DG\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \log\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)\\ &+\left(\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}\right)\left(\frac{T_{\nu+3}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+3}{\eta^2+\nu}}\right)}{T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)}-1\right)\\ &+\frac{\lambda\eta(\eta^2-1)}{\sqrt{(\nu+1)(\eta^2+\nu)^3}}\frac{t_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)}{T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)}\\ &+\frac{1}{T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)}\int_{-\infty}^{M} g_\nu(x)t_{\nu+1}(x)dx.\end{aligned} \tag{1.55}$$

Burada

$$M = \lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\ ,$$

$$g_\nu(x) = DG\left(\frac{\nu+2}{2}\right) - DG\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \log\left(1+\frac{x^2}{\nu+1}\right) + \frac{x^2(\nu+1)-\nu-1}{(\nu+1)(\nu+1+x^2)}$$

dır.

1.4.2.1 Çarpık *t* dağılımına dayalı regresyon modeli için parametre tahmini

(1.3) eşitliği ile verilen regresyon modeli ele alınsın. Bu regresyon modeli için hata terimleri dağılımı $\epsilon_j \sim ST(0,\sigma^2,\lambda,\nu)$ olsun. Burada $E(\epsilon) \neq 0$ dır. Yani $E(\epsilon) = \sigma\delta_\lambda\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$, $\nu > 1$ olmak üzere $E(y) = \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta} + E(\epsilon)$ olduğundan sadece kesim noktası etkilenir. Kesim noktası β_0 tahmin edilirken $\widehat{E(\epsilon)}$ ifadesi de dikkate alınmalıdır. Böylece, $\{(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)\}$ gözlemleri verilmişken bilinmeyen $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta},\sigma^2,\nu,\lambda)$ parametresinin ML tahmin edicisi

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(f\left(y_j;\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta},\sigma^2,\nu,\lambda\right)\right) \tag{1.56}$$

log-olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla bulunur. Ancak bu fonksiyonu maksimum yapan nokta analitik olarak bulunamaz. Bu nedenle parametre tahminleri EM algoritması kullanılarak yapılır.

EM algoritmasının adımlarının kolaylaştırılması için çarpık *t* dağılımının (1.45) ile verilen stokastik gösteriminden yararlanılarak koşullu dağılımlar

$$\begin{aligned} &y_j|\gamma_j,\tau_j \sim N\left(\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta} + \alpha\gamma_j, \frac{\kappa^2}{\tau_j}\right), \\ &\gamma_j|\tau_j \sim TN\left(0,\frac{1}{\tau_j};(0,\infty)\right), \quad \tau_j \sim Gamma(\nu/2\,,\nu/2) \end{aligned} \tag{1.57}$$

olarak elde edilir. Burada $\alpha = \sigma\delta_\lambda$ ve $\kappa^2 = \sigma^2\left(1-\delta_\lambda^2\right)$ dır. $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ ve $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1,\dots,\tau_n)$ kayıp veri olmak üzere $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau})$ tam verisi için olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları

$$L_c(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{(\nu/2)^{\nu/2}\tau_j^{\nu/2}}{\pi\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\kappa^2}} e^{-\frac{\nu\tau_j}{2}-\frac{\tau_j\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}-\alpha\gamma_j\right)^2}{2\kappa^2}-\frac{\tau_j\gamma_j^2}{2}}, \tag{1.58}$$

$$\begin{aligned}\ell_c(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau}) = {} & \frac{n\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right) - n\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) + \frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^{n}\log(\tau_j) - \frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^{n}\tau_j \\ & -n\log\pi - \frac{n}{2}\log\kappa^2 - \sum_{j=1}^{n}\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}-\alpha\gamma_j\right)^2}{2\kappa^2/\tau_j} - \frac{\gamma_j^2}{2/\tau_j}\end{aligned} \tag{1.59}$$

olarak elde edilir. Tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri ise

$$\begin{aligned}E\left(\ell_c(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau})|y_j\right) = {} & \frac{n\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right) - n\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) + \frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^{n}E\left(\log(\tau_j)|y_j\right) \\ & -\frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^{n}E(\tau_j|y_j) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha^2E(\gamma_j^2\tau_j|y_j)}{2\kappa^2} \\ & -\sum_{j=1}^{n}\frac{E(\tau_j|y_j)\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)^2}{2\kappa^2} - \frac{n}{2}\log\kappa^2 \\ & +\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha E(\gamma_j\tau_j|y_j)\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)}{\kappa^2}\end{aligned} \tag{1.60}$$

şeklinde bulunur. Burada $E\left(\log(\tau_j)|y_j\right)$, $E(\tau_j|y_j)$, $E(\gamma_j^2\tau_j|y_j)$ ve $E(\gamma_j\tau_j|y_j)$ koşullu beklenen değerleri (1.53)-(1.55) eşitlikleri kullanılarak hesaplanır.

EM algoritması: $\boldsymbol{\theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibidir:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ verilmişken aşağıdaki beklenen değerler hesaplanır:

$$\hat{s}_{1j}^{(k)} = E\left(\tau_j \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = \left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}+1}{\hat{\eta}_j^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}}\right)\frac{T_{\hat{\nu}^{(k)}+3}\left(\widehat{M}_j^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)}+3}{\hat{\nu}^{(k)}+1}}\right)}{T_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\widehat{M}_j^{(k)}\right)}, \tag{1.61}$$

$$\hat{s}_{2j}^{(k)} = E\left(\gamma_j\tau_j \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = \hat{\delta}_\lambda^{(k)}\frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)}{\hat{\sigma}^{(k)}}\hat{s}_{1j}^{(k)} + \frac{\sqrt{1-\hat{\delta}_\lambda^{2(k)}}}{\pi\hat{\sigma}^{(k)}\hat{f}\left(y_j\right)^{(k)}}\left(\frac{\hat{\eta}_j^{2(k)}}{\hat{\nu}^{(k)}\left(1-\hat{\delta}_\lambda^{2(k)}\right)}+1\right)^{-\left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}}{2}+1\right)}, \tag{1.62}$$

$$\hat{s}_{3j}^{(k)} = E\left(\gamma_j^2\tau_j \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = \hat{\delta}_\lambda^{2(k)}\frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)^2}{\hat{\sigma}^{2(k)}}\hat{s}_{1j}^{(k)} + \left(1-\hat{\delta}_\lambda^{2(k)}\right) + \frac{\hat{\delta}_\lambda^{(k)}\sqrt{1-\hat{\delta}_\lambda^{2(k)}}\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)}{\pi\hat{\sigma}^{2(k)}\hat{f}\left(y_j\right)^{(k)}}\left(\frac{\hat{\eta}_j^{2(k)}}{\hat{\nu}^{(k)}\left(1-\hat{\delta}_\lambda^{2(k)}\right)}+1\right)^{-\left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}}{2}+1\right)}, \tag{1.63}$$

$$\begin{aligned}\hat{s}_{4j}^{(k)} = E\left(\log(\tau_j) \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) &= DG\left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}+1}{2}\right) - \log\left(\frac{\hat{\eta}_j^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}+1}{\hat{\eta}_j^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}}\right)\left(\frac{T_{\hat{\nu}^{(k)}+3}\left(\hat{\lambda}^{(k)}\hat{\eta}_j^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)}+3}{\hat{\eta}_j^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}}}\right)}{T_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}^{(k)}\hat{\eta}_j^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)}+1}{\hat{\eta}_j^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}}}\right)}-1\right) \\ &+ \frac{\hat{\lambda}^{(k)}\hat{\eta}_j^{(k)}\left(\hat{\eta}_j^{2(k)}-1\right)}{\sqrt{\left(\hat{\nu}^{(k)}+1\right)\left(\hat{\eta}_j^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}\right)^3}}\frac{t_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}^{(k)}\hat{\eta}_j^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)}+1}{\hat{\eta}_j^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}}}\right)}{T_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}^{(k)}\hat{\eta}_j^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)}+1}{\hat{\eta}_j^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}}}\right)} \\ &+ \frac{1}{T_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}^{(k)}\hat{\eta}_j^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)}+1}{\hat{\eta}_j^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}}}\right)}\int_{-\infty}^{\widehat{M}_j^{(k)}} g_{\hat{\nu}^{(k)}}(x)t_{\hat{\nu}^{(k)}+1}(x)dx.\end{aligned} \tag{1.64}$$

Burada

$$\hat{\eta}_j^{(k)} = \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)}{\hat{\sigma}^{(k)}}, \quad \hat{\delta}_\lambda^{(k)} = \frac{\hat{\lambda}^{(k)}}{\sqrt{1+\hat{\lambda}^{2(k)}}},$$

$$\widehat{M}_j^{(k)} = \hat{\lambda}^{(k)}\hat{\eta}_j^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)}}{\hat{\eta}_j^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}}}, \quad \hat{f}\left(y_j\right)^{(k)} = \frac{2}{\hat{\sigma}^{(k)}} t_{\hat{\nu}^{(k)}}\left(\hat{\eta}_j^{(k)}\right) T_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\widehat{M}_j^{(k)}\right),$$

$$g_{\hat{\nu}^{(k)}}(x) = DG\left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}+2}{2}\right) - DG\left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}+1}{2}\right) - \log\left(1+\frac{x^2}{\hat{\nu}^{(k)}+1}\right) + \frac{x^2\left(\hat{\nu}^{(k)}+1\right)-\hat{\nu}^{(k)}-1}{\left(\hat{\nu}^{(k)}+1\right)\left(\hat{\nu}^{(k)}+1+x^2\right)}$$

dır. Hesaplanan bu koşullu beklenen değerler (1.60) denkleminde yerine yazılarak $Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = E\left(\ell_c(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau})|y_j,\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) = \frac{n\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right) - n\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) - \frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^{n}\hat{s}_{1j}^{(k)} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha\hat{s}_{2j}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)}{\kappa^2}$$
$$+\frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^{n}\hat{s}_{4j}^{(k)} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha^2\hat{s}_{3j}^{(k)}}{2\kappa^2} - \frac{n}{2}\log\kappa^2 - \sum_{j=1}^{n}\frac{\hat{s}_{1j}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}\right)^2}{2\kappa^2}. \quad (1.65)$$

ii) M-adımı: $Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k+1)}$ tahmin edicisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n}\hat{s}_{1j}^{(k)}\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j'\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{s}_{1j}^{(k)}y_j - \hat{\alpha}^{(k)}\hat{s}_{2j}^{(k)}\right)\boldsymbol{x}_j\right). \quad (1.66)$$

2. $Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun α parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek ve gerekli düzenlemeler yapılarak α için $(k+1)$. adımdaki tahmin edici

$$\hat{\alpha}^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{2j}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)}{\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{3j}^{(k)}} \tag{1.67}$$

şeklinde bulunur.

3. $Q\left(\boldsymbol{\theta}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun κ^2 parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle gerekli düzenlemeler yapıldığında $\hat{\kappa}^{2(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\hat{\kappa}^{2(k+1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\hat{s}_{1j}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)^2 - 2\hat{\alpha}^{(k)} \hat{s}_{2j}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right) + \alpha^2 \hat{s}_{3j}^{(k)} \right) \tag{1.68}$$

olarak elde edilir. Buradan, $\hat{\alpha}^{(k+1)}$ ve $\hat{\kappa}^{2(k+1)}$ tahmin edicileri kullanılarak $\hat{\sigma}^{2(k+1)}$ parametre tahmin edicisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\hat{\sigma}^{2(k+1)} = \hat{\kappa}^{2(k+1)} + \hat{\alpha}^{2(k+1)} . \tag{1.69}$$

4. $Q\left(\boldsymbol{\theta}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun δ_λ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek ve gerekli düzenlemeler yapılarak

$$n\delta_\lambda\left(1 - \delta_\lambda^2\right) - \delta_\lambda \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{1j}^{(k)} \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)^2}{\hat{\sigma}^{2(k)}} + \sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{3j}^{(k)} \right) + \left(1 + \delta_\lambda^2\right) \sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{2j}^{(k)} \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}\right)}{\hat{\sigma}^{(k)}} = 0 \tag{1.70}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem λ parametresine göre çözülerek $\hat{\lambda}^{(k+1)}$ elde edilir. $\hat{\lambda}^{(k+1)}$ tahmin edicisi hesaplamaların daha kolay yürütülmesi için

$$\hat{\lambda}^{(k+1)} = \hat{\delta}_{\lambda}^{(k+1)} / \sqrt{1 - \hat{\delta}_{\lambda}^{2(k+1)}} \ , \tag{1.71}$$

olarak da hesaplanabilir. Burada $\hat{\delta}_{\lambda}^{(k+1)} = \hat{\alpha}^{(k+1)} / \hat{\sigma}^{(k+1)}$ dır.

5. Serbestlik derecesi (ν) parametresinin $(k+1)$. tahmin edicisi aşağıdaki denklemin çözümünden elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\theta}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)}{\partial \nu} &= \frac{n}{2} \log\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{4j}^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{1j}^{(k)} \\ &= \log\left(\frac{\nu}{2}\right) + 1 - DG\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\hat{s}_{4j}^{(k)} - \hat{s}_{1j}^{(k)}\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.72}$$

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\| \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} \right\| < \Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

2. DAYANIKLI İSTATİSTİK

On sekizinci yüzyılda, “robust” kelimesi birisinin güçlü, dayanıklı, dirençli, sağlam olduğunu belirtmek için kullanılıyordu. Ancak 1953 yılında ilk defa Box tarafından istatistiksel olarak anlamlandırılarak istatistik literatürüne kazandırılmıştır.

Dayanıklı yöntemlerin tarihi 19. yüzyılın sonlarına kadar uzanmaktadır. İlk büyük ilerleme 1960’lar ve 1970’lerin başlarında Tukey (1960, 1962), Huber (1964, 1967) ve Hampel (1971, 1974) tarafından yapılan çalışmalar ile yeni yöntemlerin önerilmesiyle sağlanmıştır. Bu yöntemler gelişen bilgisayar teknolojisi sayesinde günümüzde de yaygın olarak kullanılmaktadır. Son kırk yıldır dayanıklı istatistik bir araştırma alanı olarak büyük bir ilerleme kaydedip, bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Bu alanda basılan en etkili kitapların başında Huber (1981), Hampel vd. (1986), Rousseeuw ve Leroy (1987), Staudte ve Sheather (1990) tarafından yapılan çalışmalar yer almaktadır.

Bütün istatistiksel yöntemler bir dizi açık ya da kesin varsayımlara dayanmaktadır. En çok kullanılan varsayımlardan biri verinin normal dağılıma sahip olduğudur. Bu varsayım birçok yöntemde regresyonda, varyans analizinde ve çok değişkenli analizde temel varsayım olarak yer almaktadır. Normal dağılım varsayımının asıl amacı istatistiki sonuç çıkarımı açısından teorik olarak oldukça uygun olmasıdır. Ancak uygulamada veri her zaman normal dağılmayabilir. Verinin küçük bir kısmı verinin tamamından farklı dağılım gösterebilir. Bu şekilde davranan veriye aykırı ya da sapan gözlem denir. Aykırı gözlemler yaklaşık normal dağılım görüntüsüne sebep olur, merkez bölgesi normal dağılım şeklinde ama kuyrukları normal dağılımdan daha kalın olan bir dağılım olur. Bu durumda normallik varsayımına göre yapılan istatistiki sonuç çıkarımları doğru olmayacaktır. Çünkü eğer verinin dağılımı kalın kuyruklu olduğu halde normal dağılım olarak varsayılırsa, eğer kuyruklar simetrik ise en çok olabilirlik yöntemine göre elde edilen tahmin edicilerin varyansı oldukça büyük ve eğer kuyruklar asimetrik ise yanı oldukça büyük olacaktır. Böylece istatistiksel modelleme ve veri analizinde dayanıklı yaklaşımın temel amacı hem dağılım kesin olarak verildiğinde hem

de yukarıdaki gibi ifade edilen yaklaşık dağılım durumlarında bile güvenilir tahmin ediciler elde edebilmektir (Bai 2010).

Dayanıklı yöntemler veride aykırı gözlem olmadığında ve varsayımlar sağlandığında klasik tahmin ediciler ile benzer sonuçlar verirken, veri aykırı gözlem içerdiğinde klasik yöntemlerden daha güvenilir sonuçlar vermektedir.

2.1 Dayanıklılığı ölçme

Dayanıklı yöntemler sonucunda elde edilen tahmin edicilerin tek bir noktaya göre dayanıklılığını ölçmek için kullanılan en önemli ölçüler arasında etki fonksiyonu (influence function (IF)) ve kırılma noktası (breakdown point (BP)) yer almaktadır.

2.1.1 Etki fonksiyonu

Bir F_θ parametrik ailesinin parametresinin tahmin edicisi $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta}_\infty(F_\theta) = \theta \tag{2.1}$$

tutarlı bir tahmin edici olsun. F dağılım ailesinin yaklaşık olarak bilindiği varsayıldığından, F'in F_0 dağılımının bir komşuluğu civarında değiştiğinde $\hat{\theta}_\infty$'ın davranışı ile ilgilenilir. Burada $\hat{\theta}_\infty(F)$, F dağılım ailesinde tahminin asimptotik değeridir. Kontaminasyon komşuluğu

$$\mathcal{F}(F, \epsilon) = \{(1-\epsilon)F + \epsilon G : G \in \mathcal{G}\} \tag{2.2}$$

ile gösterilir. Burada $\mathcal{G}$ uygun dağılımların kümesini göstermektedir ve bazı durumlarda noktada yoğunlaşmış (point mass) dağılımları ifade eder. Yani $P(x = x_0) = 1$ iken x_0 noktasında yoğunlaşmış dağılım δ_{x_0} ile gösterilir.

Örneklem küçük bir ϵ oranı gibi aykırı gözlem içerdiğinde, $\hat{\theta}_\infty$ tahmin edicisinin etki fonksiyonu (Hampel 1974)

$$IF_{\hat{\theta}}(x_0, F) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\hat{\theta}_\infty\left((1-\epsilon)F + \epsilon\delta_{x_0}\right) - \hat{\theta}_\infty(F)}{\epsilon}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \epsilon}\hat{\theta}_\infty\big((1-\epsilon)F + \epsilon\delta_0\big)\big|_{\epsilon=0} \qquad (2.3)$$

ile tanımlanır. Burada ↓ sağdan limiti göstermektedir. Temel dağılım F ve aykırı gözlem oranının (ϵ) değeri x_0'a eşit olduğunda $\hat{\theta}_\infty\left((1-\epsilon)F + \epsilon\delta_{x_0}\right)$ miktarı tahminin asimptotik değeri olacaktır. Böylece eğer ϵ küçük ise bu değer

$$\hat{\theta}_\infty\left((1-\epsilon)F + \epsilon\delta_{x_0}\right) \approx \hat{\theta}_\infty(F) + \epsilon IF_{\hat{\theta}}(x_0, F)$$

olur ve $yan\ \hat{\theta}_\infty\left((1-\epsilon)F + \epsilon\delta_{x_0}\right) - \hat{\theta}_\infty(F)$ yaklaşık olarak $\epsilon IF_{\hat{\theta}}(x_0, F)$'dır (Maraonna vd. 2006).

2.1.2 Kırılma noktası

Donoho ve Huber (1983) tarafından tanıtılan kırılma noktası dayanıklılığı ölçmek için kullanılan önemli bir araçtır. θ parametresinin tahmin edicisi $\hat{\theta}$ için kırılma noktası $\hat{\theta}$ tahmin edicisinin θ hakkında hala bilgi verebildiği en büyük bulaşma (contamination) (aykırı noktaların oranı) miktarıdır.

$\epsilon < \epsilon^*$ için eğer G fonksiyonu değiştikçe $\hat{\theta}_\infty\big((1-\epsilon)F + \epsilon G\big)$ ifadesi sınırlı kalıyorsa $\hat{\theta}$ tahmin edicisinin kırılma noktası en büyük $\epsilon^* \in (0,1)$ değeridir. Kırılma noktası $\epsilon^*\big(\hat{\theta}, F\big)$ ile gösterilir (Maronna v.d. 2006).

2.2 Dayanıklı Regresyon Yöntemleri

Dayanıklı regresyon, parametrik ve parametrik olmayan yöntemlerin bazı sınırlamalarını aşmak için düzenlenen regresyon analizinin bir formudur. Ayrıca dayanıklı regresyon aykırı gözlemleri belirlemek ve aykırı gözlem içeren veriyi analiz etmek için kullanılan en önemli araçtır.

Dayanıklı regresyonun amacı aykırı gözlem olduğunda, aykırı gözlemlerin etkisini sınırlayarak güvenilir sonuçlar elde etmektir. Dayanıklı regresyon tekniklerinin karşılaştığı üç tip aykırı gözlem problemi vardır:

y-yönündeki aykırı gözlem problemi,
x-uzayında aykırı gözlem problemi (uç (leverage) noktalar),
y-yönünde ve x-uzayında aykırı gözlem problemi (Chen 2002).

Yaygın olarak kullanılan dayanıklı regresyon yöntemlerinden bazıları M-tahmini (Huber 1973), LTS-tahmini (Rousseeuw 1984), LMS-tahmini (Rousseeuw 1984), S-tahmini (Rousseeuw ve Yohai 1984), MM-tahmini (Yohai 1987) ve genelleştirilmiş M-tahmini (GM-tahmini) (Mallows 1975, Hampel 1978, Krasker 1980, Krasker ve Welsch 1982, Hampel vd. 1986) olarak verilebilir. Kullanılan bu yöntemlerin temel amacı aykırı gözlem durumunda güvenilir sonuçlar elde etmektir. Bu bölümde tez çalışmasında kullanılacak olan dayanıklı yöntemlerden M-tahmin ve GM-tahmin yöntemlerinden bahsedilecektir.

2.2.1 Regresyon M-tahmin yöntemi

En çok kullanılan dayanıklı yöntemlerden biri M-tahmin yöntemidir. En küçük kareler yöntemine dayanıklı yaklaşım yapan regresyon M-tahmini Huber (1973) tarafından tanıtılmıştır. M-tahmini en küçük kareler fonksiyonundan daha az bir hızla artış gösteren artıkların bir ρ fonksiyonunu minimum yapmayı amaçlar. M-tahmini uç

değerlere karşı dayanıklı olmamasına rağmen, verilerin analizi için aykırı gözlemlerin ağırlıklı olarak y yönünde olduğu varsayılarak hala yaygın olarak kullanılmaktadır. (1.3) ile verilen regresyon modeli ele alınsın. ϵ_j hata terimi

$$\frac{1}{\sigma} f_0 \left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)$$

yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. Burada σ ölçek parametresidir. (1.3) ile verilen lineer regresyon modeli için y_j

$$\frac{1}{\sigma} f_0 \left(\frac{y - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)$$

yoğunluk fonksiyonuna sahip olur. Böylece σ ölçek parametresinin sabit bir değeri varsayılarak $\boldsymbol{\beta}$ için olabilirlik fonksiyonu

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{\sigma^n} \prod_{j=1}^{n} f_0 \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)$$

ile verilir. $\boldsymbol{\beta}$ parametresi için ML tahmin edicisinin hesaplanması $L(\boldsymbol{\beta})$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla elde edilir. Aynı zamanda $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_0 \left(\frac{r_j(\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{\sigma}\right) + \log \sigma = min$$

ifadesinin minimum yapılmasıyla elde edilir. Burada $\rho_0 = -\log f_0$ ve $r_j(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}$ dır. Buradan σ parametresinin bilindiği varsayıldığında, $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türev alınarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_0\left(\frac{r_j(\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{\sigma}\right)\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0}$$

burada $\psi_0 = \rho_0' = -f_0'/f_0$ dır. Böylece $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ için regresyon M-tahmini

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{j=1}^{n} \rho\left(\frac{r_j(\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{\hat{\sigma}}\right) \tag{2.4}$$

ile tanımlanır. Burada $\hat{\sigma}$ ölçek tahminidir. (2.4) eşitliğinin türevi alınarak

$$\sum_{j=1}^{n} \psi\left(\frac{r_j(\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{\hat{\sigma}}\right)\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0} \tag{2.5}$$

eşitliğinin çözümünden $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ elde edilir ve $\psi = \rho'$ dır. Burada $\hat{\sigma}$ önceden hesaplanarak işlemler yürütülür, ancak eş anlı olarak ölçek M-tahmini kullanılarak hesaplanması da mümkündür. Önceden tahmin edilen ölçek tahmini, normalleştirilmiş medyandan mutlak sapma (Median Absolute Deviation (MAD)) olarak bilinen dayanıklı bir tahmin edici

$$\hat{\sigma} = 1.4826\, medyan_j\left(\left|r_j\right|\right), r_j \neq 0 \tag{2.6}$$

kullanılabilir (Maronna vd. 2006).

$\boldsymbol{\beta}$ ve σ parametrelerinin eş anlı olarak tahmin edilebilmesi için

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \sigma) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) + a\right]\sigma \tag{2.7}$$

amaç fonksiyonu oluşturulur. Burada $\rho(0) = 0$ ve $a > 0$'dır. Böylece $\boldsymbol{\beta}$ ve σ parametrelerine göre türev alınarak

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\frac{r_j(\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right)\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0}\ , \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\chi\left(\frac{r_j(\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right) = a \tag{2.9}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada $\chi(x) = x\psi(x) - \rho(x)$ dır. $\chi'(x) = x\psi'(x)$ fonksiyonu $x \leq 0$ için negatif, $x \geq 0$ için pozitiftir, dolayısıyla χ fonksiyonu $x = 0$ noktasında mutlak minimuma sahiptir, yani $\chi(0) = -\rho(0) < 0$'dır. Normal modelde ölçek tahmininin tutarlılığını sağlamak ve $\rho(x) = \frac{1}{2}x^2$ klasik seçimi için

$$a = \frac{n-p}{n}\,E_{\Phi}\big(\chi(X)\big)$$

olarak seçilmesi önerilmektedir. Ölçek parametresi için tahmin edici iteratif olarak

$$\big(\sigma^{(m+1)}\big)^2 = \frac{1}{na}\sum_{j=1}^{n}\chi\left(\frac{r_j\big(\boldsymbol{\beta}^{(m)}\big)}{\sigma^{(m)}}\right)\big(\sigma^{(m)}\big)^2 \tag{2.10}$$

eşitliğinin çözümünden elde edilir (Huber ve Ronchetti 2009). Burada, Huber fonksiyonunun seçilmesiyle Huber'in 2. Yaklaşımına (bkz. Huber 1981, s.137) göre $\chi(x) = \big(\psi_c(x)\big)^2$ olmak üzere

$$\chi_c(x) = \begin{cases} x^2/2, & |x| < c \\ c^2/2, & d.d \end{cases} \tag{2.11}$$

olarak elde edilir ve böylece Huber sabiti (Huber 1981, s.179)

$$a = \frac{n-p}{n} E_{\phi}\big(\chi(X)\big) = \frac{n-p}{n} E_{\Phi}\left(\big(\psi_c(x)\big)^2\right)$$
$$= \frac{n-p}{n}\big(c^2 + (1-c^2)\Phi(c) - 0.5 - c\phi(c)\big) \tag{2.12}$$

şeklindedir.

2.2.1.1 Regresyon M-tahmini için etki fonksiyonu

(2.3) eşitliğinde verilen formül kullanılarak regresyon M-tahmini için etki fonksiyonu

$$IF\big((\boldsymbol{x}_0, y_0), F\big) = \frac{\sigma}{b}\psi\left(\frac{y_0 - \boldsymbol{x}_0'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) V_{\boldsymbol{x}}^{-1}\boldsymbol{x}_0 \tag{2.13}$$

şeklinde elde edilir. Burada $b = E\left(\psi'\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)\right)$ ve $V_{\boldsymbol{x}} = E(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')$ olmak üzere M-tahmini için (2.13) eşitliği ile verilen etki fonksiyonunun y yönündeki aykırı gözlemlere karşı sınırlı, ancak x yönündeki aykırı gözlemlere karşı sınırsız olduğu görülmektedir (Maronna vd. 2006).

2.2.1.2 Regresyon M-tahmini için kırılma noktası

Regresyon M-tahmini için kırılma noktası

$$\epsilon^* = \frac{m^*}{n}\ , \tag{2.14}$$

eşitliği ile verilir. Burada

$$m^* = \max\{m \geq 0 : \widehat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{y}_m)\ , \qquad \forall \boldsymbol{y}_m \in \mathcal{Y}_m\}$$

dır ve $\mathcal{Y}_m$ en az $n-m$ elemanı $\boldsymbol{y}$ ile ortak olan n boyutlu vektörlerin kümesidir. En küçük kareler tahmin edicisinin bir tek aykırı gözlemden bile etkilendiği bilindiğinden kırılma noktası $1/n$'dir ve $n \to \infty$ iken $\epsilon^* = 0$ olduğu açıktır (Maronna vd. 2006).

2.2.2 GM-tahmin yöntemi

Monoton bir M-tahmin edicisini x yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı yapmanın en basit yolu tahmin denklemleri üzerinde bu gözlemlerin etkisini azaltmaktır. Bu tür tahmin edicileri bulma yollarından bir tanesi, M-tahmin edicilerinin genelleştirilmesi olan GM-tahmin yöntemini kullanmaktır. GM-tahmin yöntemi x yönündeki aykırı gözlemlerin etkisini azaltmak için sadece $\boldsymbol{x}$'lerin fonksiyonu olan ağırlıklar yardımıyla M-tahmin yöntemine benzer olarak hesaplanır. Yani GM-tahmin edicileri aşağıdaki fonksiyonunun minimum yapılmasıyla elde edilir:

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma\, w\big(d(\boldsymbol{x}_j)\big)\rho\left(\frac{r_j(\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right) = min,\ \ \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p,\ \ \sigma > 0. \tag{2.15}$$

Eğer ρ fonksiyonu türevlenebilir ise GM-tahmin edicileri aşağıdaki denklemin çözümü olarak tanımlanmaktadır:

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma\, w\big(d(\boldsymbol{x}_j)\big)\psi\left(\frac{r_j(\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right)\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0}\,,\ \ \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p,\ \ \sigma > 0. \tag{2.16}$$

Burada $d(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}$'in büyüklüğünün bir ölçüsüdür. GM-tahmin edicilerindeki w ise $d(\boldsymbol{x})$'in azalan bir fonksiyonudur. Dolayısıyla aykırı gözlemler için $d(\boldsymbol{x})$'ler büyük olacağından bu gözlemler için w ağırlıkları küçük olacak ve bu gözlemlerin etkisini tahmin denklemleri üzerinden kaldıracaktır. Daha genel olarak GM-tahmini

$$\sum_{j=1}^{n} \eta\left(d(\boldsymbol{x}_j), \frac{r_j(\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{\hat{\sigma}}\right)\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0}$$

ile tanımlanır. Verilmiş n gözlem için $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_n$ ve $\hat{\Sigma}_n^{-1}$ örneklem ortalama vektörü ve varyans kovaryans matrisinin tahminini göstermek üzere

$$d_n(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_n)'\hat{\Sigma}_n^{-1}(\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_n) \tag{2.17}$$

olarak tanımlanır. Buradan $\sqrt{d_n(\boldsymbol{x})}$ Mahalanobis uzaklığıdır. Ayrıca, her s için $\eta(s,r)$ fonksiyonu r'nin azalmayan ve sınırlı bir ψ fonksiyonudur ve $\hat{\sigma}$ tahmini M-ölçek tahmini eşitliğinin

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{\text{ölçek}}\left(\frac{r_j(\boldsymbol{\beta})}{\hat{\sigma}}\right) = \delta \tag{2.18}$$

eş anlı olarak çözümünden elde edilir. Ya da iteratif olarak (2.10) eşitliği ile hesaplanır.

GM-tahmininin özellikle literatürde kullanılan iki formu mevcuttur. Bunlardan ilki $\eta(s,r) = w(s)\psi(r)$ seçilmesiyle

$$\sum_{j=1}^{n} w\left(d(\boldsymbol{x}_j)\right)\psi\left(\frac{r_j(\boldsymbol{\beta})}{\hat{\sigma}}\right)\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0} \tag{2.19}$$

ile verilen eşitlikten elde edilen tahmin edicidir ve "Mallows tahmini" (Mallows 1975) olarak adlandırılır. İkinci tip tahmin edici ise ilk defa Schweppe vd. (1970) tarafından önerilen

$$\eta(s,r) = w(s)\psi\left(\frac{r}{w(s)}\right) \tag{2.20}$$

fonksiyonun seçilmesiyle elde edilen formdur (bkz. Handschin vd. 1975, Hample vd. 1986). Böylece (2.20) eşitliği ile verilen Schweppe fonksiyonu yardımıyla

$$\sum_{j=1}^{n} w\left(d(\boldsymbol{x}_j)\right)\psi\left(\frac{r_j(\boldsymbol{\beta})}{w\left(d(\boldsymbol{x}_j)\right)\hat{\sigma}}\right)\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0} \tag{2.21}$$

elde edilen GM-tahmini "Hample-Krasker-Welsch tahmini" (Krasker ve Welsch 1982) olarak da adlandırılır (Maranno vd. 2006).

(2.19) ve (2.21) eşitliklerinin çözümü için ağırlıkların hesaplanması gereklidir. Schweppe (Handschin vd. 1975) tarafından

$$w(\boldsymbol{x}_j) = \sqrt{1 - h_{jj}} \tag{2.22}$$

alınması önerilmiştir. Burada $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)'$ olmak üzere $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ şapka matrisinin j. köşegen elemanı h_{jj} ile gösterilmektedir. Rousseeuw ve Leroy (1987) tarafından

$$h_{jj} = n^{-1} + (n-1)^{-1} d_n(\boldsymbol{x})_j \tag{2.23}$$

olduğu gösterilmiştir. Burada, Mahalanobis uzaklığında yer alan örneklem ortalaması ve örneklem varyans kovaryans matrisi aykırı gözlemlere karşı duyarlıdır. Dolayısıyla örneklem ortalaması ve varyans kovaryans matrisinin dayanıklı tahmin edicileri $m(\boldsymbol{X})$ ve $C(\boldsymbol{X})$ minimum kovaryans determinant (MCD) tahmin edicileri Rousseeuw ve Van

Driessen (1999) tarafından önerilen Fast MCD algoritması ile hesaplanarak uyarlanmış (modified) Mahalanobis uzaklığı

$$d_n(\boldsymbol{x}) = \big(\boldsymbol{x} - m(\boldsymbol{X})\big)' C(\boldsymbol{X})^{-1}\big(\boldsymbol{x} - m(\boldsymbol{X})\big) \tag{2.24}$$

olarak elde edilir. Bu tez çalışmasında Simpson vd. (1992) tarafından

$$w(\boldsymbol{x}_j) = \min\left(1, \left(\frac{b}{d_n(\boldsymbol{x}_j)}\right)^{1/2}\right) \tag{2.25}$$

olarak alınması önerilen ağırlıklar kullanılacaktır. b sayısı $(p-1)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımının $(1-\gamma)$ yüzdeliğine eşittir. Burada $\gamma = 0.1$ ya da 0.05'dir.

2.2.2.1 GM-tahmini için etki fonksiyonu

$\hat{\boldsymbol{\mu}}_n \underset{p}{\to} \boldsymbol{\mu}$ ve $\hat{\Sigma}_n \underset{p}{\to} \Sigma$ olduğu varsayılsın. Eğer hataların dağılımı simetrik ise (1.3) modeli göz önüne alınarak GM-tahmini için etki fonksiyonu

$$IF\big((\boldsymbol{x}_0, y_0), F\big) = \sigma\eta\left(d(\boldsymbol{x}_0), \frac{y_0 - \boldsymbol{x}_0'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{x}_0 \tag{2.26}$$

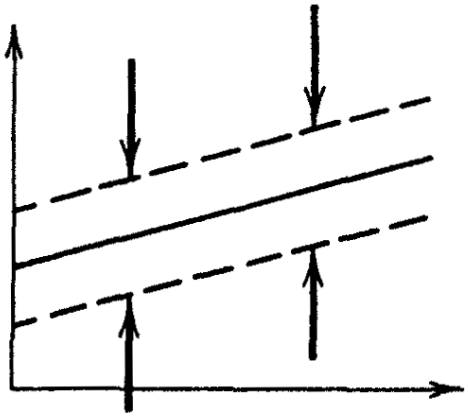
ile tanımlanır. Burada $\boldsymbol{B} = -E\left(\dot{\eta}\left(d(\boldsymbol{x}), \frac{\epsilon}{\sigma}\right)\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'\right)$, $\dot{\eta}(s,r) = \frac{\partial\eta(s,r)}{\partial r}$ ve $d(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})$ dır (Maronna vd. 2006). (2.26) eşitliği ile verilen etki fonksiyonu kullanılarak Mallows ve Schweppe tipi GM tahmini için etki fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur:

$$IF\big((\boldsymbol{x}_0, y_0), F\big) = \sigma w\big(d(\boldsymbol{x}_0)\big)\psi\left(\frac{y_0 - \boldsymbol{x}_0'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{x}_0\ , \tag{2.27}$$

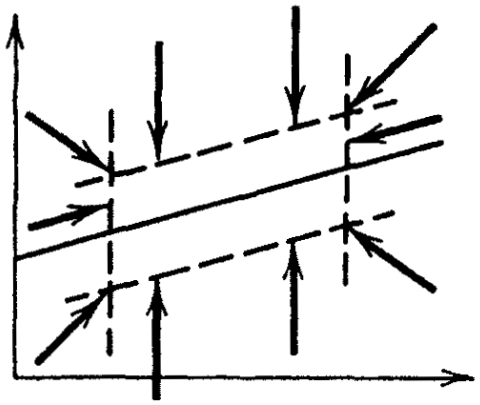
$$IF\big((\boldsymbol{x}_0, y_0), F\big) = \sigma w\big(d(\boldsymbol{x}_0)\big)\psi\left(\frac{y_0 - \boldsymbol{x}_0'\boldsymbol{\beta}}{w\big(d(\boldsymbol{x}_0)\big)\sigma}\right)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{x}_0\,. \tag{2.28}$$

Burada GM tahmini için etki fonksiyonunun x yönündeki aykırı gözlemlerin etkisini ağırlık fonksiyonu ile ortadan kaldırdığı için sınırlı olduğu görülmektedir.

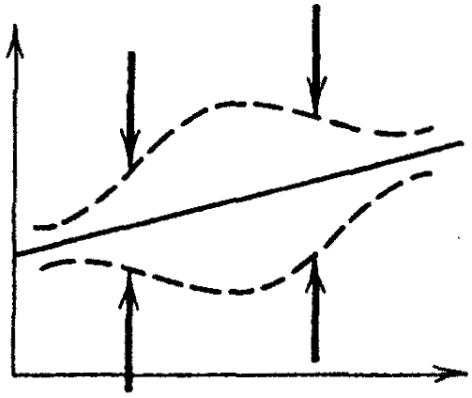
Şekil 2.1-2.3 (Hampel vd. 1986) grafiklerinden M-tahmin ve GM-tahmin yöntemlerinin gözlemleri sınırlama şekilleri görülmektedir. Huber M-tahmin yöntemi sadece y yönündeki gözlemleri etkisiz hale getirirken, x yönündeki gözlemlere karşı duyarlıdır. Mallows tipi GM-tahmin yöntemi ise x yönündeki gözlemlerin etkisini ortadan kaldırır, ancak iyi huylu gözlemleri de aykırı gözlem gibi algılar. Schweppe tipi GM-tahmin yöntemi x yönündeki gözlemleri etkisiz hale getirir ve gözlemleri sınırlama şeklinden dolayı iyi huylu gözlemlere aykırı gözlem gibi davranmaz.



Şekil 2.1 Huber M-tahmininin gözlemleri sınırlama şekli



Şekil 2.2 Mallows tipi GM-tahmininin gözlemleri sınırlama şekli



Şekil 2.3 Schweppe tipi GM-tahmininin gözlemleri sınırlama şekli

2.2.2.2 GM-tahmini için kırılma noktası

GM-tahmininin kırılma noktası, p regresyon katsayılarının sayısını göstermek üzere

$$\epsilon^* = \frac{1}{p} \tag{2.29}$$

olarak tanımlanır (Maronna vd. 1979).

2.3 ρ ve ψ Fonksiyonu Seçimi

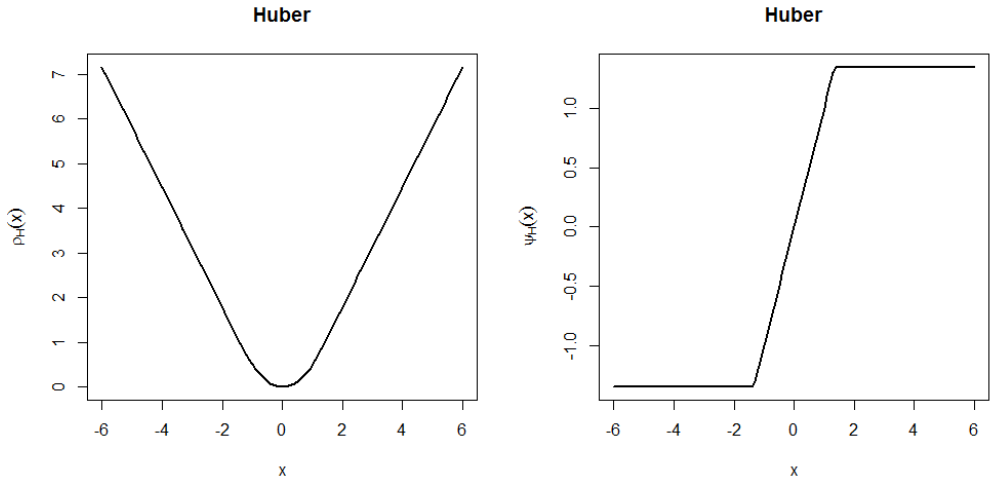
Bu bölümde M-tahmin ve GM-tahmin yöntemleri için kullanılacak olan ρ ve ψ fonksiyonlarından bahsedilecektir. Literatürde çok farklı ρ fonksiyonları tanımlanmaktadır. En çok kullanılan ρ fonksiyonlarından biri Huber (1964) tarafından önerilen monoton ρ fonksiyonudur:

$$\rho_c(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq c, \\ 2c|x| - c^2, & |x| > c. \end{cases} \tag{2.30}$$

Buradan $\rho'(x) = 2\psi(x)$ olmak üzere

$$\psi_c(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq c \\ sgn(x)c, & |x| > c \end{cases} \tag{2.31}$$

olarak elde edilir. Burada hatalar normal dağıldığında yaklaşık olarak %95'lik etkinlik sağlamak için $c = 1.345$ alınması önerilir. Bu fonksiyon $[-c, c]$ aralığında sınırlı, bu aralık dışında sabittir. Şekil 2.4 ile $c = 1.345$ için Huber'ın ρ ve ψ fonksiyonları grafikleri gösterilmektedir.

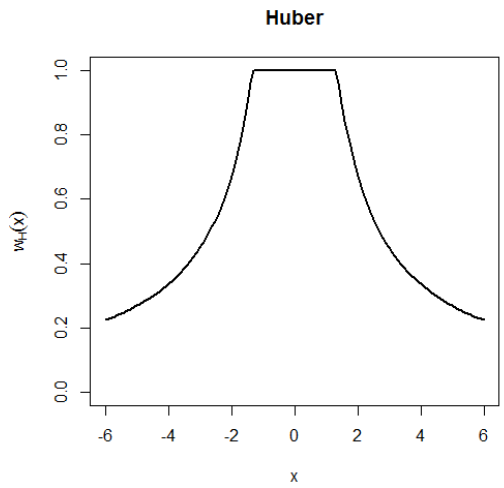


Şekil 2.4 Huber'ın ρ ve ψ fonksiyonu grafikleri

Ayrıca Huber ψ fonksiyonu göz önüne alınarak ağırlık fonksiyonu

$$W_c(x) = \min\left(1, \frac{c}{|x|}\right) \tag{2.32}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla şekil 2.5 ile de $c = 1.345$ için Huber'ın ağırlık fonksiyonunun grafiği gösterilmektedir.



Şekil 2.5 Huber ağırlık fonksiyonu grafiği

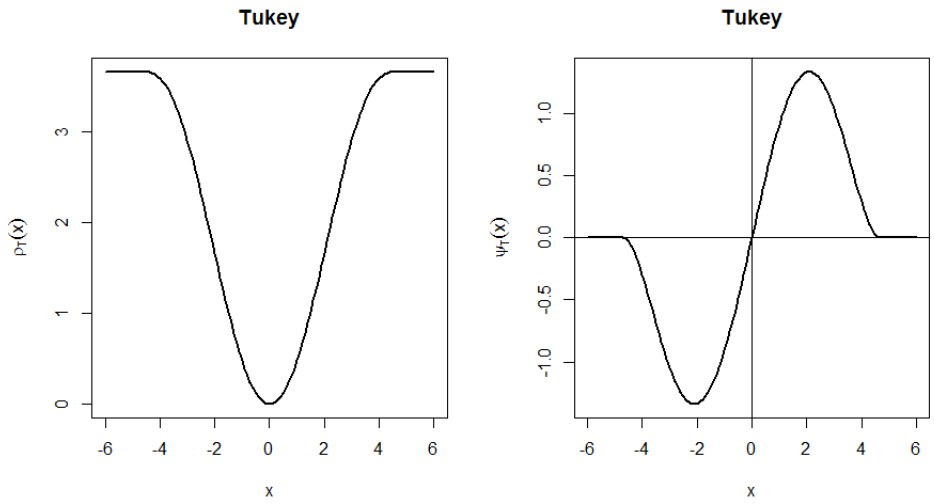
Diğer bir ρ fonksiyonu ise Tukey tarafından önerilen azalan (redesending) ya da Tukey'in (bisquare) fonksiyonudur (Beaton ve Tukey 1974)

$$\rho_c(x) = \begin{cases} 1 - (1 - (x/c)^2)^3, & |x| \le c, \\ 1, & |x| > c. \end{cases} \tag{2.33}$$

Buradan $\rho'(x) = 6\psi(x)/k^2$ olmak üzere

$$\psi_c(x) = x\left(1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2\right)^2 I(|x| \le c) \tag{2.34}$$

olur. Burada yaklaşık olarak %95'lik etkinlik sağlamak için $c = 4.685$ alınması önerilir. Bu fonksiyon $[-c, c]$ aralığının dışında sıfır değerini alır. Şekil 2.6 ile $c = 4.685$ için Tukey'in ρ ve ψ fonksiyonlarının grafikleri gösterilmektedir.

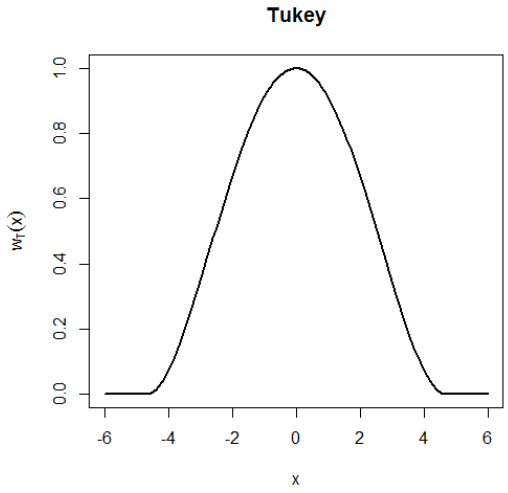


Şekil 2.6 Tukey'in ρ ve ψ fonksiyonu grafikleri

Ayrıca Tukey'in ψ fonksiyonu için ağırlık fonksiyonu

$$W_c(x) = \left[1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2\right]^2 I(|x| \leq c) \tag{2.35}$$

olarak elde edilir. Buradan şekil 2.7 ile Tukey'in ağırlık fonksiyonu gösterilmektedir.



Şekil 2.7 Tukey'in ağırlık fonksiyonu grafiği

Burada verilen ρ fonksiyonları aşağıda verilen özelliklere sahiptir:

i) $\rho(x)$ fonksiyonu $|x|$'in azalmayan bir fonksiyonudur.

ii) $\rho(0) = 0$'dır.

iii) $\rho(x)$ fonksiyonu $x > 0$ için artandır öyle ki $\rho(x) < \rho(\infty)$'dır.

iv) Eğer ρ fonksiyonu sınırlı ise $\rho(\infty) = 1$ olduğu varsayılır (Maronna vd. 2006).

3. KARMA REGRESYON MODELİ

Bu bölümde öncelikle karma model ele alınarak regresyon üzerine uygulaması olan dağılıma dayalı karma regresyon modeli verilecektir.

3.1 Karma Model

Sonlu karma modelin tarihi 100 yıl öncesine dayanmaktadır. İstatistik literatüründe karma model ilk olarak 19. yüzyılda Newcomb (1886) tarafından yapılan yayın ile ortaya çıkmıştır. Daha sonra Holmes (1892) kitlelerin karması kavramını tanıtmıştır. Karma model ile ilgili yapılan ilk önemli analizlerden biri ünlü biyometrisyen Karl Pearson tarafından yapılmıştır. Pearson (1894) farklı ortalamalı (μ_1 ve μ_2), farklı varyanslı (σ_1^2 ve σ_2^2) ve π_1 ile π_2 oranlarına sahip olan iki normal dağılımın karmasını 1000 yengecin alnının vücuduna göre uzunluklarının oranını içeren veri setini (Weldon 1892, 1893) moment tabanlı bir yöntem kullanarak modellemiştir. Bu yöntem ile 9. dereceden polinomların çözülmesiyle 5 parametre için (μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2, π_1) tahmin edici elde edilmiştir.

Pearson'ın kullandığı yöntem çok fazla işlem gerektirmesine rağmen, yeni bir yaklaşım bulunana yani 20. yüzyıla kadar yaklaşık otuz yıl kullanılmıştır. Ancak bu süre içinde yöntem daha basit hale getirilmeye çalışılmıştır. Charlier ve Wicksell (1924) iki değişkenli normal bileşen durumu için genişletmiş, Doetsch (1928) ikiden fazla tek değişkenli normal bileşen durumunu ele almış ve Strömgen (1934) kümülantları kullanmıştır. Cohen (1967) Pearson'ın 9.dereceden polinomunu çözmek için iteratif yaklaşım önermiştir.

Sonlu karma modellerin parametre tahmini için ML yöntemi 60'lı yılların sonlarına doğru kullanılan en yaygın yöntemlerden biri olmuştur. Bu yöntem Wolfe (1965, 1967, 1970) ve Day (1969) tarafından kullanılmıştır. EM algoritması yaklaşımının bulunuşu ile ML yöntemi EM algoritmasına dayanılarak sonlu karma modelleri fit edilmeye başlanmıştır.

Sonlu karma modelleri sınıflandırma, kümeleme, yoğunluk tahmini, veri madenciliği, görüntü analizi ve örüntü tanıma (patern recognation) problemi gibi daha birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Karma modeller hakkında daha detaylı bilgilerin bulunduğu başlıca kitaplardan bazıları McLachlan ve Basford (1988), McLachlan ve Peel (2000), Bishop (2006) ve Frühwirth-Schnatter (2006) tarafından yazılmış kitaplardır. Karma modelin kullanıldığı uygulamaların çoğunda, daha geniş uygulama alanı ve özelliklerinden dolayı bileşenler için normal dağılım varsayımı yapılmıştır. Normallik varsayımının yanında asimetriklikten yararlanılmıştır. Lin vd. (2007b) tarafından çarpık normal dağılımın (Azzalini 1985, 1986) sonlu karmasını analiz etme problemi ele alınmıştır. Ayrıca, Lin (2009) tarafından çok değişkenli çarpık normal dağılımın karması tanımlanmıştır. Ancak birçok durumda bileşenlerin dağılımı normal dağılım olmayabilir, aksine asimetrik ve normal dağılımdan daha kalın kuyruklu bir dağılım olabilir. Bu tür problemlerden dolayı son yıllarda karma modelde bileşen dağılımının asimetrik olduğu varsayılarak bazı çalışmalar yapılmıştır. Lin vd. (2007a) çarpık *t* (Azzalini ve Capitanio 2003) dağılımının karması için dağılımın çarpık ve kalın kuyruklu olmasından yararlanarak dayanıklı çıkarımlar yapmıştır. Pyne vd. (2009) ve Lin (2010) çarpık *t* dağılımının karmasını, çok değişkenli çarpık *t* (Azzalini ve Capitanio 2003 ve Sahu vd. 2003) dağılımının karmasına genişletmişlerdir. Karlis ve Santourian (2009) normal inverse Gaussian dağılımı ve çok değişkenli hali için sonlu karma modelini kullanmayı önermişlerdir. Frühwirth-Schnatter ve Pyne (2010) tek ve çok değişkenli çarpık normal ve çarpık *t* dağılımlarının karmasının Bayesian analizini incelemişlerdir. Ho vd. (2012) çarpık Student *t* normal dağılımının karmasını kullanarak veride çarpıklık ve kalın kuyrukluk olması durumunda ML tahmini problemini ele almıştır.

Tanım 3.1. $y_1, \dots, y_n$ g-bileşenli karma modelden alınmış rasgele örneklem olsun. Y rasgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu

$$f(y;\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{g} w_i \, f_i(y;\lambda_i) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada g bileşen sayısını ve w_i her i. bileşenin oranını ya da ağırlığını göstermektedir. Her bir i. bileşen λ_i parametreli $f_i(y;\lambda_i)$ yoğunluk fonksiyonuna sahip olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{g} w_i = 1\,,\;\; 0 \leq w_i \leq 1$$

dır. Ayrıca, $\boldsymbol{\theta} = \left(w_1, \ldots, w_g, \lambda_1, \ldots, \lambda_g\right)'$ parametre vektörüdür. Karma modelde g bilindiğinde sadece $\boldsymbol{\theta}$ için parametre tahmini yapılır. Bileşen sayısı g bilinmediğinde ise tahmin edilmelidir. Bu çalışmada bileşen sayısı g'nin bilindiği varsayılarak işlemler bu varsayım altında yürütülecektir.

3.1.1 Karma modelin parametre tahmini

Sonlu karma modelin parametre tahmini için genellikle ML yöntemi kullanılır. $\boldsymbol{\theta}$ parametresini ML yöntemi ile tahmin edebilmek için

$$\log L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} \log f\left(y_j; \boldsymbol{\theta}\right) = \sum_{j=1}^{n} \log \sum_{i=1}^{g} w_i f_i\left(y_j; \lambda_i\right) \tag{3.2}$$

fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılması gerekir. Burada $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ dır. Yani

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \log L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}) \tag{3.3}$$

şeklindedir. (3.2) denklemini maksimum yapan açık bir çözüm yoktur ve genellikle EM algoritması kullanılarak parametre tahmini yapılır.

3.1.2 Karma modelin parametre tahmini için EM algoritması

Karma modelin parametre tahmininde kullanılan EM algoritması için öncelikle tam ve kayıp verinin oluşturulması gerekir. Kayıp değişken aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & j.\,gözlem\ i.\,bileşene\ ait\ ise\ , \\ 0, & diğer\ durumlarda. \end{cases}$$

Burada $j = 1, \dots, n$ ve $i = 1, \dots, g$ dır. Böylece $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ gözlenen rasgele örneklemi ve $\boldsymbol{z} = (z_{11}, \dots, z_{gn})$ kayıp verisi tam veriyi oluşturur. Buradan tam veri $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ için olabilirlik fonksiyonu

$$L_c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{g} \left(w_i f_i(y_j; \lambda_i) \right)^{z_{ij}} \tag{3.4}$$

olmak üzere tam veri log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= \sum_{j=1}^{n} \log \prod_{i=1}^{g} \left(w_i f_i(y_j; \lambda_i) \right)^{z_{ij}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{g} z_{ij} \log \left(w_i f_i(y_j; \lambda_i) \right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak elde edilir. Böylece EM algoritması için gerekli adımlar aşağıdaki gibi yürütülür:

Adım 1. Başlangıç değeri $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlenir.

Adım 2. E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için

$$Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)=E\left(\ell_c(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|\boldsymbol{y},\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right) \tag{3.6}$$

tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri hesaplanır. Burada $E\left(z_{ij}|y_j\right)$ beklenen değeri y_j gözleminin i. bileşenden gelmesi olasılığına eşittir. Bayes teoremine göre

$$E\left(z_{ij}|y_j,\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)=P\left(z_{ij}=1|y_j\right)=\frac{\widehat{w}_i^{(k)}f_i\left(y_j;\hat{\lambda}_i^{(k)}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\widehat{w}_i^{(k)}f_i\left(y_j;\hat{\lambda}_i^{(k)}\right)} \tag{3.7}$$

olmak üzere amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}E\left(z_{ij}|y_j,\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right)\left\{\log\left(w_i f_i\left(y_j;\lambda_i\right)\right)\right\}. \tag{3.8}$$

Adım 3. M-adımı: $(k+1)$. iterasyonda E adımında hesaplanan tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değerini maksimum yapan parametre değeri hesaplanır:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)}=\arg\max_{\boldsymbol{\theta}}Q\left(\boldsymbol{\theta};\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right). \tag{3.9}$$

Adım 4. Belirlenen yakınsaklık ölçütü $\left\|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)}-\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}\right\|<\Delta$ sağlanana kadar E ve M adımları tekrarlanır.

3.2 Dağılıma Dayalı Karma Regresyon Modeli

Z kayıp sınıf değişkeni için $Z=i$ verildiğinde y değişkeni ile p boyutlu $\boldsymbol{x}$ değişkeninin lineer bir şekilde ilişkili olduğu varsayılsın:

$$y = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta}_i + \epsilon_i \ , \quad i = 1,2, \dots, g \ , \tag{3.10}$$

burada $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ip})$ parametre vektörü, g kitlede bulunan grupların sayısı (ya da karma modeldeki bileşen sayısı) ve $\epsilon_i \sim f_i(\cdot)$ hata teriminin ortalaması 0 olup açıklayıcı değişken vektörü $\boldsymbol{x}$ ile bağımsızdır. Modelin kesim noktasını da içermesi için $\boldsymbol{x}$'in ilk elemanının 1 olduğu varsayılmıştır. $P(Z = i|\boldsymbol{x}) = w_i \ , \ i = 1,2, \dots, g$ olmak üzere g bileşenli karma regresyon modeli aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$f(y; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Theta}) = \sum_{i=1}^{g} w_i \, f_i(y; \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta}_i, \lambda_i). \tag{3.11}$$

Burada $f_i(y; \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta}_i, \lambda_i)$ fonksiyonu λ_i (vektör de olabilir) parametreli i. bileşenin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $\sum_{i=1}^{g} w_i = 1 \ , \ 0 \leq w_i \leq 1$ olmak üzere her bir w_i karma modelin oranını göstermektedir. Ayrıca, $\boldsymbol{\theta}_i = (w_i, \boldsymbol{\beta}_i, \lambda_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_g)'$ parametre vektörüdür.

3.2.1 Normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli

$\{(\boldsymbol{x}_1, y_1), \dots, (\boldsymbol{x}_n, y_n)\}$ gözlemleri verilmişken, (3.10) modeli için hataların dağılımının 0 ortalamalı ve σ_i^2 varyansı ile normal dağılıma sahip olduğu varsayıldığında (3.11) eşitliği ile verilen karma regresyon modelinin $\boldsymbol{\Theta}$ parametresi için ML tahmin edicisi

$$\ell(\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(\sum_{i=1}^{g} w_i \, \phi_i\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2\right) \right) \tag{3.12}$$

log-olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla elde edilir. Burada $\boldsymbol{\theta}_i = (w_i, \boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2)$ olmak üzere $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_g)'$ parametre vektörünü

göstermektedir. (3.12) denkleminin açık bir çözümü olmadığından EM algoritması kullanılarak parametre tahmini yapılır.

EM algoritması için karma regresyon modelinde j. gözlemin hangi bileşene ait olduğunu gösteren z_{ij} , $j = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, g$ kayıp değişkeni aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & j.\text{gözlem } i.\text{bileşene ait ise} , \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Burada $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ve $\boldsymbol{z}_j = (z_{1j}, \dots, z_{gj})$ tam veri olmak üzere tam veri $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j)$ için olabilirlik fonksiyonu

$$L_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{g} \left(w_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2}{2\sigma_i^2}} \right)^{z_{ij}} \tag{3.14}$$

şeklinde elde edilir. Buradan tam veri log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j) = & \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{g} z_{ij} \left(\log(w_i) - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\sigma_i^2) \right) \\ & - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{g} z_{ij} \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2}{2\sigma_i^2} \end{aligned} \tag{3.15}$$

olarak bulunur. EM algoritmasının adımlarının yürütebilmesi için tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri

$$E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}_j)\middle|y_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}E\left(z_{ij}\middle|y_j\right)\left(\log(w_i)-\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log\sigma_i^2\right)$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}E\left(z_{ij}\middle|y_j\right)\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2}{2\sigma_i^2}. \qquad (3.16)$$

şeklinde elde edilir. Burada $E\left(z_{ij}\middle|y_j\right)$ beklenen değeri (3.7) eşitliğine benzer olarak hesaplanır.

EM algoritması: Yukarıda verilen bilgiler doğrultusunda $\boldsymbol{\Theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibidir:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}$ verilmişken aşağıdaki koşullu beklenen değer hesaplanır:

$$\hat{z}_{ij}^{(k)}=E\left(z_{ij}\middle|y_j,\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)=\frac{\widehat{w}_i^{(k)}\phi\left(y_j;\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)},\hat{\sigma}_i^{2(k)}\right)}{\sum_{i=1}^{g}\widehat{w}_i^{(k)}\phi\left(y_j;\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)},\hat{\sigma}_i^{2(k)}\right)}\cdot \qquad (3.17)$$

Bu koşullu beklenen değer (3.16) eşitliğinde yerine yazılarak $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)=E\left(\ell_c\left(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}_j\right)\middle|y_j,\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ amaç fonksiyonu

$$Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left(\log(w_i)-\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log\sigma_i^2\right)$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}\hat{z}_{ij}^{(k)}\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2}{2\sigma_i^2} \qquad (3.18)$$

olarak elde edilir.

ii) M-adımı: $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun w_i parametresine göre Lagrange çarpanı yardımıyla türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial w_i} = \frac{\partial}{\partial w_i}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left\{\log w_i + \vartheta\left(1-\sum_{i=1}^{g}w_i\right)\right\} = 0$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\frac{1}{w_i} - \vartheta = 0$$

denklemi elde edilir, burada $\vartheta = \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}$ dır. Bu denklemin çözümünden w_i için $(k+1)$. adımdaki tahmin edici

$$\widehat{w}_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}}{n} \tag{3.19}$$

olarak bulunur.

2. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_i} = \sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left(-\frac{(-2)\boldsymbol{x}_j\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)}{2\sigma_i^2}\right) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{i}}^{(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{x}_j'\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \boldsymbol{x}_j y_j\right) \tag{3.20}$$

biçiminde bulunur.

3. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun σ_i^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial \sigma_i^2} = \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \left(-\frac{1}{2\sigma_i^2} + \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_i\right)^2}{2\sigma_i^4}\right) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin σ_i^2'ye göre çözülmesiyle σ_i^2 için tahmin edici

$$\hat{\sigma}_i^{2(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)}} \cdot \tag{3.21}$$

şeklinde bulunur.

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k+1)} - \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right\| < \Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

3.2.2 Çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli

Karma regresyon modellerinde hatalardaki çarpıklığı modellemek için Liu ve Lin (2014) tarafından simetrik normal dağılımın karması yerine çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modelinin kullanılması önerilmiştir. Bu çalışmada hataların yoğunluk fonksiyonu için (1.25) ile verilen yoğunluk fonksiyonuna sahip Azzalini tipi çarpık normal dağılım (Azzalini 1985, 1986) kullanılmıştır.

$\{(\boldsymbol{x}_1, y_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_n, y_n)\}$ gözlemleri verilmişken, (3.10) modeli için hataların dağılımının çarpık normal dağılım ($\epsilon_i \sim SN(0, \sigma_i^2, \lambda_i)$) olduğu varsayıldığında (3.11) eşitliği ile verilen karma regresyon modelinin $\boldsymbol{\Theta}$ parametresi için ML tahmin edicisi

$$\ell(\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(\sum_{i=1}^{g} w_i \, f_i\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2, \lambda_i\right) \right) \tag{3.22}$$

log-olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla elde edilir. Burada simetrik dağılımlardan farklı olarak $E(\epsilon) \neq 0$ dır. Çarpık normal dağılım için $E(\epsilon_i) = \sqrt{2/\pi}\,\delta_{\lambda_i}\sigma_i$ ve $\delta_{\lambda_i} = \lambda_i / \sqrt{1+\lambda_i^2}$ olduğundan parametre tahmini yapılırken sadece kesim noktası etkilenir. Yani kesim noktası tahmin edilirken $\widehat{E(\epsilon_\iota)}$ ifadesi de dikkate alınmalıdır. Ayrıca, $\boldsymbol{\theta}_i = (w_i, \boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2, \lambda_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{\Theta} = \left(\boldsymbol{\theta}_1, \ldots, \boldsymbol{\theta}_g\right)'$ parametre vektörünü göstermektedir. Ancak bu fonksiyonu maksimum yapan açık bir çözüm yoktur. Dolayısıyla EM algoritması kullanılarak parametre tahmini yapılır.

EM algoritmasının adımlarının daha kolay yürütebilmesi için (1.26) ile verilen stokastik gösterimden yararlanılarak γ kayıp değişkeni tanımlandıktan sonra aşağıda verilen koşullu dağılım

$$y_j | \gamma_j \sim N\left(\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i + \alpha_i\gamma_j, \kappa_i^2\right), \;\; \gamma_j \sim TN\left(0,1;(0,\infty)\right)$$

elde edilir. Burada $\alpha_i = \sigma_i\delta_{\lambda_i}$ ve $\kappa_i^2 = \sigma_i^2\left(1-\delta_{\lambda_i}^2\right)$ dır. Karma regresyon modeli için $z_{ij}, j = 1, \ldots, n\,;\; i = 1, \ldots, g$ kayıp değişkeni (3.13) eşitliğindeki gibi tanımlansın. Burada $\boldsymbol{\gamma}$ ile $\boldsymbol{z}_j$ bağımsız ve kayıp veriler ve $\left(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{z}_j\right)$ tam veri olmak üzere, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\boldsymbol{z}_j = \left(z_{1j}, \ldots, z_{gj}\right)$, tam veri için olabilirlik fonksiyonu

$$L_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{z}_j)=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{g}\left(\frac{w_i}{\pi\sqrt{\kappa_i^2}}\exp\left(-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i-\alpha_i\gamma_j\right)^2}{2\kappa_i^2}-\frac{\gamma_j^2}{2}\right)\right)^{z_{ij}} \tag{3.23}$$

şeklinde elde edilir. Tam veri log-olabilirlik fonksiyonu ise

$$\ell_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{z}_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}z_{ij}\left(\log w_i-\log\pi-\frac{\log\kappa_i^2}{2}-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i-\alpha_i\gamma_j\right)^2}{2\kappa_i^2}-\frac{\gamma_j^2}{2}\right) \tag{3.24}$$

olarak bulunur. EM algoritmasını uygulayabilmek için (3.24) eşitliğindeki log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri

$$E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{z}_j)|y_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}E(z_{ij}|y_j)\left(\log w_i-\frac{1}{2}\log\kappa_i^2-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2}{2\kappa_i^2}+\frac{\alpha_i\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)}{\kappa_i^2}E(\gamma_j|y_j)-\frac{\alpha_i^2}{2\kappa_i^2}E(\gamma_j^2|y_j)\right) \tag{3.25}$$

olur. Bu fonksiyonda yer alan $E(z_{ij}|y_j)$, $E(\gamma_j|y_j)$ ve $E(\gamma_j^2|y_j)$ koşullu beklenen değerleri (3.7), (1.29) ve (1.30) eşitliklerinden yararlanarak hesaplanır.

EM algoritması: $\boldsymbol{\Theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra yukarıdaki bilgiler kullanılarak EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibidir:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}$ verilmişken aşağıda verilen beklenen değerler hesaplanır:

$$\hat{z}_{ij}^{(k)} = E\left(z_{ij}\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \frac{\widehat{w}_i^{(k)} f_i\left(y_j\middle|\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}, \hat{\sigma}_i^{2(k)}, \hat{\lambda}_i^{(k)}\right)}{f\left(y_j\middle|\boldsymbol{x}_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}\ , \tag{3.26}$$

$$\hat{t}_{1ij}^{(k)} = E\left(\gamma_j\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \hat{\delta}_{\lambda_i}^{(k)}\hat{\eta}_{ij}^{(k)} + \sqrt{1-\hat{\delta}_{\lambda_i}^{2(k)}}\,\frac{\phi\left(\hat{\lambda}_i^{(k)}\hat{\eta}_{ij}^{(k)}\right)}{\Phi\left(\hat{\lambda}_i^{(k)}\hat{\eta}_{ij}^{(k)}\right)}\ , \tag{3.27}$$

$$\hat{t}_{2ij}^{(k)} = E\left(\gamma_j^2\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = 1 - \hat{\delta}_{\lambda_i}^{2(k)} + \hat{\delta}_{\lambda_i}^{(k)}\hat{\eta}_{ij}^{(k)}\hat{t}_{1ij}^{(k)}\ . \tag{3.28}$$

Burada $\hat{\eta}_{ij}^{(k)} = \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}$ dır. Bu beklenen değerler (3.25) eşitliğinde yerine yazılarak $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = E\left(\ell_c\left(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{z}_j\right)\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ amaç fonksiyonu

$$Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left(\log w_i - \frac{1}{2}\log\kappa_i^2 - \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2}{2\kappa_i^2} + \frac{\alpha_i\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)\hat{t}_{1j}^{(k)}}{\kappa_i^2} - \frac{\alpha_i^2\hat{t}_{2ij}^{(k)}}{2\kappa_i^2}\right) \tag{3.29}$$

olarak elde edilir.

ii) M-adımı: $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun w_i parametresine göre Lagrange çarpanı yardımıyla türevinin alınmasıyla ve (3.19) eşitliğinin elde edilişine benzer olarak yapılan düzenlemelerden sonra

$$\widehat{w}_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}}{n} \tag{3.30}$$

olarak elde edilir.

2. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_i}=\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left(-\frac{(-2)\boldsymbol{x}_j\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)+2\alpha_i\boldsymbol{x}_j\hat{t}_{1ij}^{(k)}}{2\kappa_i^2}\right)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{i}}^{(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k+1)}=\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j'\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left(y_j-\hat{\alpha}_i^{(k)}\hat{t}_{1ij}^{(k)}\right)\boldsymbol{x}_j\right) \tag{3.31}$$

biçiminde bulunur.

3. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun α_i parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial \alpha_i}=\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left(\frac{2\hat{t}_{1ij}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)-2\alpha_i\hat{t}_{2ij}^{(k)}}{2\kappa_i^2}\right)=0$$

denklemi bulunur. Bu denklemden $\hat{\alpha}_i^{(k+1)}$ tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\alpha}_i^{(k+1)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\hat{t}_{1ij}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\hat{t}_{2ij}^{(k)}}\ . \tag{3.32}$$

4. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun κ_i^2 parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial \kappa_i^2}=\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left(-\frac{1}{\kappa_i^2}+\frac{1}{2\kappa_i^4}\left(\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2-2\alpha_i\hat{t}_{1ij}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\alpha_i^2\hat{t}_{2ij}^{(k)}\right)\right)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden $\hat{\kappa}_i^{2(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\hat{\kappa}_i^{2(k+1)}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}}\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left(\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)^2\right.$$
$$\left.-2\hat{\alpha}_i^{(k)}\hat{t}_{1ij}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)+\hat{\alpha}_i^{2(k)}\hat{t}_{2ij}^{(k)}\right) \tag{3.33}$$

şeklinde bulunur. $\hat{\delta}_{\lambda_i}^{(k+1)}=\hat{\alpha}_i^{(k+1)}/\hat{\sigma}_i^{(k+1)}$ olmak üzere $\hat{\alpha}_i^{(k+1)}$ ve $\hat{\kappa}_i^{2(k+1)}$ tahmin edicileri kullanılarak $\hat{\sigma}_i^{2(k+1)}$ ve $\hat{\lambda}_i^{(k+1)}$ tahmin edicileri

$$\hat{\sigma}_i^{2(k+1)}=\hat{\kappa}_i^{2(k+1)}+\hat{\alpha}_i^{2(k+1)}\ , \tag{3.34}$$

$$\hat{\lambda}_i^{(k+1)}=\hat{\delta}_{\lambda_i}^{(k+1)}\left(1-\hat{\delta}_{\lambda_i}^{2(k+1)}\right)^{-1/2} \tag{3.35}$$

olarak bulunur.

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k+1)}-\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right\|<\Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

4. DAYANIKLI KARMA REGRESYON MODELİ

Bu bölümde, üç amaç üzerinde durularak tez çalışmasının literatüre olan katkısına yer verilmiştir. Öncelikle bu çalışmada dağılım varsayımı yapılarak veride çarpıklık ve kalın kuyrukluluk olduğunda karma regresyon modelleri için dayanıklı tahmin edicilerin elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda verideki kalın kuyrukluluk ve çarpıklığı aynı anda modellemek için çarpık *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli önerilmiştir. Önerilen bu model için tahmin ediciler EM algoritması yardımıyla hesaplanmıştır. Önerilen bu model için elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri ile literatürde yer alan diğer karma regresyon modelleri (normal, çarpık normal ve *t* dağılımına dayalı) için elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri simülasyon çalışması ile yan ve MSE değerlerine göre karşılaştırılmıştır.

Literatürde yer alan karma regresyon modelleri için aynı dağılıma dayalı karma regresyon modelleri önerilmiştir. Bu çalışmada veride yer alan alt grupların farklı dağılım gösterebileceği düşüncesiyle (bir kısmı simetrik (çarpık kalın kuyruklu) ve diğer kısmı simetrik kalın kuyruklu (çarpık) gibi) farklı dağılımlara dayalı karma regresyon modeli önerilerek dayanıklı tahmin edicilerin elde edilmesi amaçlanmıştır. Dolayısıyla bu düşünceyle farklı dağılımların karmasına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli önerilmiştir. Önerilen bu modeller için tahmin ediciler EM algoritması kullanılarak elde edilmiştir. Daha sonra modelleme sonucunda elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri ile literatürde yer alan diğer karma regresyon modelleri için elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri simülasyon çalışması yapılarak yan ve MSE değerlerine göre karşılaştırılmıştır.

Literatürde dağılım varsayımının dışında dayanıklı regresyon yöntemi kullanarak (M-tahmin yöntemi) y yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı karma regresyon modeli Bai (2010) ve Bai vd. (2012) tarafından önerilmiştir. Bu tez çalışmasının diğer amaçlarından biri ise literatüde yer alan bu yönteme alternatif olarak x yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olan karma regresyon modeli için dayanıklı tahmin ediciler elde etmektir. Dolayısıyla bu tez çalışmasında, x yönündeki aykırı gözlemlere karşıda

dayanıklı olan GM-tahmin yöntemine dayalı dayanıklı karma regresyon modeli önerilmiştir. Önerilen bu modelin tahmin edicilerinin hesaplanabilmesi için EM benzeri algoritma önerilmiştir. Daha sonra, GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli için elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri, M-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli için elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri ile simülasyon çalışması sonucunda yan ve MSE değerlerine göre karşılaştırılmıştır.

4.1 Dağılıma Dayalı Dayanıklı Karma Regresyon Modeli

Bu bölüm dağılıma dayalı dayanıklı karma regresyon modellerine ayrılmıştır. Öncelikle bu modellerden literatürde yer alan dayanıklı karma regresyon modellerinden *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeline yer verilecektir. Daha sonra, bu tez çalışmasında önerilen çarpıklık ve kalın kuyrukluluğa karşı dayanıklı olan çarpık *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli ele alınacaktır.

4.1.1 *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli

Normal dağılıma dayalı karma regresyon modelinden elde edilen parametre tahminleri aykırı gözlemlere ve kalın kuyruklu hata terimi dağılımlarına duyarlı olduğundan, Wei (2012) ve Yao vd. (2014) tarafından *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli önerilmiştir. $\{(\boldsymbol{x}_1, y_1), \dots, (\boldsymbol{x}_n, y_n)\}$ gözlemleri verilmişken, (3.10) modeli için hataların dağılımının ν_i serbestlik dereceli, 0 ortalamalı ve σ_i^2 ölçek parametreli *t* dağılımına sahip olduğu varsayıldığında (3.11) eşitliği ile verilen karma regresyon modelinin $\boldsymbol{\Theta}$ parametresi için ML tahmin edicisi, aşağıda verilen log-olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla bulunur:

$$\ell(\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(\sum_{i=1}^{g} w_i \, f_i\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2, \nu_i\right) \right). \tag{4.1}$$

Burada $\boldsymbol{\theta}_i = (w_i, \boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2, \nu_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_g)'$ parametre vektörünü göstermektedir. Hataların yoğunluk fonksiyonu ise (1.9) eşitliğindeki gibi verilmiştir. Ancak (4.1) ile verilen log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan analitik nokta bulunamayacağından EM algoritması kullanılarak parametre tahmini yapılır.

EM algoritmasının adımlarının daha kolay yürütülmesi için t dağılımının normal dağılımın ölçek karması şeklinde yazılması özelliği kullanılacaktır. u kayıp değişken olmak üzere koşullu dağılım

$$y_j|u_j \sim N(\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2/u_j) \ , \ u_j \sim Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}, \frac{\nu_i}{2}\right) \tag{4.2}$$

olur. Ayrıca karma regresyon modeli için z_{ij} , $j = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, g$ kayıp değişkeni (3.13) eşitliğindeki gibi tanımlansın. Burada $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ile $\boldsymbol{z}_j = (z_{1j}, \dots, z_{gj})$ bağımsız ve kayıp veri ve $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_j)$ tam veri olmak üzere tam veri için olabilirlik fonksiyonu

$$L_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_j) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{g}\left(w_i \frac{(\nu_i/2)^{\nu_i/2} u_j^{\frac{\nu_i}{2}-1} e^{-\frac{\nu_i u_j}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right)\sqrt{2\pi\sigma_i^2/u_j}} \ e^{-\frac{u_j\left(y_j - x_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2}{2\sigma_i^2}} \right)^{z_{ij}} \tag{4.3}$$

ve tam veri log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} z_{ij} \Big(& \log(w_i) - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma_i^2) + \frac{1}{2}\log(u_j) \\ & - \frac{u_j(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i)^2}{2\sigma_i^2} - \log\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right) - \frac{\nu_i}{2}\log\left(\frac{\nu_i}{2}\right) \\ & + \frac{\nu_i}{2}(\log u_j - u_j) - \log u_j \Big) \end{aligned} \tag{4.4}$$

olarak elde edilir. Buradan tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z}_j)|y_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}E\left(z_{ij}|y_j\right)\Big(\log(w_i)-\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log\sigma_i^2$$
$$+\frac{1}{2}E\left(\log u_j|y_j\right)-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2E\left(u_j|y_j\right)}{2\sigma_i^2}-\frac{\nu_i}{2}E\left(u_j|y_j\right)$$
$$-\log\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right)+\frac{\nu_i}{2}\log\left(\frac{\nu_i}{2}\right)$$
$$+\left(\frac{\nu_i}{2}-1\right)E\left(\log u_j|y_j\right)\Big). \qquad (4.5)$$

$E\left(z_{ij}|y_j\right)$ beklenen değeri (3.7) eşitliği kullanılarak, $E\left(u_j|y_j\right)$ ve $E\left(\log u_j|y_j\right)$ koşullu beklenen değerleri, (1.15) ile verilen koşullu dağılım ve (1.16) ile verilen özellik kullanılarak

$$E\left(u_j|y_j\right)=\frac{\nu_i+1}{\nu_i+\left(\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)/\sigma_i\right)^2}\,, \qquad (4.6)$$

$$E\left(\log u_j|y_j\right)=DG\left(\frac{\nu_i+1}{2}\right)-\log\left(\frac{1}{2}\left(\nu_i+\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2}{\sigma_i^2}\right)\right) \qquad (4.7)$$

olarak bulunur.

EM algoritması: $\boldsymbol{\Theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra yukarıdaki bilgiler kullanılarak EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibi verilir:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}$ verilmişken aşağıdaki koşullu beklenen değerler hesaplanır:

$$\hat{z}_{ij}^{(k)} = E\left(z_{ij}\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \frac{\widehat{w}_i^{(k)} f\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}, \hat{\sigma}_i^{2(k)}, \hat{v}_i^{(k)}\right)}{\sum_{i=1}^{g} \widehat{w}_i^{(k)} f\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}, \hat{\sigma}_i^{2(k)}, \hat{v}_i^{(k)}\right)}\,, \tag{4.8}$$

$$\hat{u}_{1ij}^{(k)} = E\left(u_j\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \frac{\hat{v}_i^{(k)} + 1}{\hat{v}_i^{(k)} + \left(\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)/\hat{\sigma}_i^{(k)}\right)^2}\,, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\hat{u}_{2ij}^{(k)} &= E\left(\log(u_j)\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)\\ &= DG\left(\frac{\hat{v}_i^{(k)} + 1}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\left(\hat{v}_i^{(k)} + \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)^2}{\hat{\sigma}_i^2}\right)\right).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Bu koşullu beklenen değerler (4.5) eşitliğinde yerine yazılarak $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = E\left(\ell_c\left(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}_j\right)\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ amaç fonksiyonu

$$\begin{aligned}Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} \hat{z}_{ij}^{(k)} \Bigg(&\log w_i - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\sigma_i^2\\ &+ \frac{1}{2}\hat{u}_{2ij}^{(k)} - \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2 \hat{u}_{1ij}^{(k)}}{2\sigma_i^2} - \frac{\nu_i}{2}\hat{u}_{1ij}^{(k)}\\ &- \log\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right) + \frac{\nu_i}{2}\log\left(\frac{\nu_i}{2}\right) + \left(\frac{\nu_i}{2} - 1\right)\hat{u}_{2ij}^{(k)}\Bigg)\end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklinde bulunur.

ii) M-adımı: $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun w_i parametresine göre Lagrange çarpanı yardımıyla türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle ve (3.19) eşitliğinin elde edilişine benzer düzenlemeler yapıldıktan sonra w_i için $(k+1)$. adımdaki tahmin edici

$$\widehat{w}_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)}}{n} \tag{4.12}$$

olarak elde edilir.

2. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_i} = \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \left(-\frac{(-2)\boldsymbol{x}_j\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)\hat{u}_{1ij}^{(k)}}{2\sigma_i^2} \right) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresine göre çözülmesiyle $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{i}}^{(k+1)}$ tahmin edicisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \hat{u}_{1ij}^{(k)} \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{x}_j' \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \hat{u}_{1ij}^{(k)} \boldsymbol{x_j} y_j \right). \tag{4.13}$$

3. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun σ_i^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial \sigma_i^2} = \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \left(-\frac{1}{2\sigma_i^2} + \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2 \hat{u}_{1ij}^{(k)}}{2\sigma_i^4} \right) = 0.$$

Bu denklemin σ_i^2 parametresine göre çözülmesiyle $(k+1)$. adımdaki tahmin edici

$$\hat{\sigma}_i^{2(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \hat{u}_{1ij}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)}}. \tag{4.14}$$

olarak bulunur.

4. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun ν_i parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{z}_{ij}^{(k)}\right)\left(DG\left(\frac{\nu_i}{2}\right)-\log\left(\frac{\nu_i}{2}\right)-1-\hat{u}_{2ij}^{(k)}+\hat{u}_{1ij}^{(k)}\right)=0. \tag{4.15}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden $\hat{\nu}_i^{(k+1)}$ bulunur.

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k+1)}-\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right\|<\Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

4.1.2 Çarpık *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli

Bu tez çalışmasında, Lin vd. (2007a) tarafından önerilen çarpık *t* dağılımına dayalı karma modelin genişletilmesi olarak çarpık ve kalın kuyruklu hata terimlerini modellemek için çarpık *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli önerilmektedir. Bunun yapılmasıyla karma regresyon modeli için çarpıklık ve kalın kuyrukluluk aynı anda modellenecek ve parametreler için daha dayanıklı tahmin ediciler elde edilecektir. Burada hata terimlerinin dağılımı için Azzalini tipi çarpık *t* dağılımı (bkz. Gupta vd. 2002, Azzalini ve Capitanio 2003, Gupta 2003, Arslan 2011) kullanılacaktır.

$\{(\boldsymbol{x}_1,y_1),\ldots,(\boldsymbol{x}_n,y_n)\}$ gözlemleri verilmişken, (3.10) modeli için hataların dağılımının (1.44) ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip 0 konum, σ_i^2 ölçek, λ_i çarpıklık ve ν_i serbestlik derecesi parametreleri ile çarpık *t* dağılımına ($\epsilon_i \sim ST(0,\sigma_i^2,\lambda_i,\nu_i)$) sahip olduğu varsayıldığında (3.11) eşitliği ile verilen karma regresyon modelinin $\boldsymbol{\Theta}$ parametresi için ML tahmin edicisi

$$\ell(\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(\sum_{i=1}^{g} w_i \, f_i\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2, \lambda_i, \nu_i\right) \right) \tag{3.36}$$

log-olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla bulunur. Burada simetrik dağılımların aksine $E(\epsilon) \neq 0$ dır. Yani $E(\epsilon_i) = \sigma_i \delta_{\lambda_i} \sqrt{\frac{\nu_i}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_i - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right)}$, $\nu_i > 1$ ve $\delta_{\lambda_i} = \lambda_i / \sqrt{1 + \lambda_i^2}$ dır. Böylece, $E\left(y_j\right) = \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i + E(\epsilon_i)$ olduğundan sadece kesim noktası etkilenir. Kesim noktası tahmin edilirken $\widehat{E(\epsilon_i)}$ ifadesi de dikkate alınmalıdır. $\boldsymbol{\theta}_i = (w_i, \boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2, \lambda_i, \nu_i)$ olmak üzere $\boldsymbol{\Theta} = \left(\boldsymbol{\theta}_1, \ldots, \boldsymbol{\theta}_g\right)'$ parametre vektörünü göstermektedir. Ancak log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan nokta analitik olarak elde edilememektedir. Dolayısıyla EM algoritması kullanılarak parametreler için tahmin ediciler elde edilir.

Çarpık *t* dağılımının çarpık normal dağılımın ölçek karması şeklinde yazılabilmesi, karma regresyon modelinin ilgili parametreleri için ML tahmin edicilerini elde ederken EM algoritmasının adımlarının kolay yürütülmesini sağlar. Dolayısıyla, γ ve τ kayıp değişkenler olmak üzere (1.45) ile verilen çarpık *t* dağılımının stokastik gösteriminden yararlanılarak koşullu dağılımlar

$$y_j | \gamma_j, \tau_j \sim N\left(\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i + \alpha_i \gamma_j, \frac{\kappa_i^2}{\tau_j} \right),$$

$$\gamma_j | \tau_j \sim TN\left(0, \frac{1}{\tau_j}; (0, \infty) \right), \quad \tau_j \sim Gamma(\nu_i/2, \nu_i/2)$$

olarak bulunur. Burada $\alpha_i = \sigma_i \delta_{\lambda_i}$ ve $\kappa_i^2 = \sigma_i^2\left(1 - \delta_{\lambda_i}^2\right)$ dır. Karma regresyon modeli için z_{ij} , $j = 1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, g$ kayıp değişkeni (3.13) eşitliğindeki gibi tanımlansın. Burada $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ve $\boldsymbol{z}_j = \left(z_{1j}, \ldots, z_{gj}\right)$ bağımsız ve kayıp veri ve $\left(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{z}_j\right)$ tam veri olmak üzere tam veri için olabilirlik fonksiyonu

$$L_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z}_j)=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{g}\left(w_i\frac{(\nu_i/2)^{\nu_i/2}\tau_j^{\nu_i/2}}{\pi\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right)\sqrt{\kappa_i^2}}\right.$$
$$\left.e^{-\nu_i\frac{\tau_j}{2}-\frac{\tau_j\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i-\alpha_i\gamma_j\right)^2}{2\kappa_i^2}-\frac{\tau_j\gamma_j^2}{2}}\right)^{z_{ij}} \tag{4.16}$$

olarak elde edilir. Buradan tam veri log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z}_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}z_{ij}\left\{\log w_i-\log\pi-\frac{\log\kappa_i^2}{2}+\frac{\nu_i}{2}\log\left(\frac{\nu_i}{2}\right)+\frac{\nu_i\log\tau_j}{2}\right.$$
$$\left.-\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right)\right)-\frac{\nu_i\tau_j}{2}-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i-\alpha_i\gamma_j\right)^2}{2\kappa_i^2/\tau_j}-\frac{\gamma_j^2}{2/\tau_j}\right\} \tag{4.17}$$

şeklindedir. Tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri ise

$$E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z}_j)|y_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}E\left(z_{ij}|y_j\right)\left\{\log w_i-\frac{\log\kappa_i^2}{2}+\frac{\nu_i}{2}\log\left(\frac{\nu_i}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right)\right)\right\}+\frac{\nu_i}{2}E\left(z_{ij}\log\tau_j|y_j\right)-\frac{\nu_i}{2}E\left(z_{ij}\tau_j|y_j\right)$$
$$-\frac{E\left(z_{ij}\tau_j|y_j\right)\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2}{2\kappa_i^2}-\frac{\alpha_i^2E\left(z_{ij}\gamma_j^2\tau_j|y_j\right)}{2\kappa_i^2}$$
$$+\frac{\alpha_iE\left(z_{ij}\gamma_j\tau_j|y_j\right)\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)}{\kappa_i^2} \tag{4.18}$$

olur. Burada $E\left(z_{ij}|y_j\right)$, $E\left(\log\left(\tau_j\right)|y_j\right)$, $E\left(\tau_j|y_j\right)$, $E\left(\gamma_j^2\tau_j|y_j\right)$ ve $E\left(\gamma_j\tau_j|y_j\right)$ koşullu beklenen değerleri (3.7) ve (1.53)-(1.55) eşitlikleri kullanılarak hesaplanır.

EM algoritması: $\boldsymbol{\Theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra yukarıdaki bilgiler kullanılarak EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibi verilir:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}$ verilmişken aşağıdaki beklenen değerler hesaplanır:

$$\hat{z}_{ij}^{(k)} = E\left(z_{ij}\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \frac{\widehat{w}_i^{(k)} f_i\left(y_j\middle|\boldsymbol{x}_j{}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}, \hat{\sigma}_i^{2(k)}, \hat{\lambda}_i^{(k)}, \hat{v}_i^{(k)}\right)}{f\left(y_j\middle|\boldsymbol{x}_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}\,, \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}\hat{s}_{1ij}^{(k)} &= E\left(z_{ij}\tau_j\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)\\ &= \hat{z}_{ij}^{(k)}\left(\frac{\hat{v}_i^{(k)}+1}{\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}+\hat{v}_i^{(k)}}\right)\frac{T_{\hat{v}_i^{(k)}+3}\left(\widehat{M}_{ij}^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{v}_i^{(k)}+3}{\hat{v}_i^{(k)}+1}}\right)}{T_{\hat{v}_i^{(k)}+1}\left(\widehat{M}_{ij}^{(k)}\right)}\,,\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}\hat{s}_{2ij}^{(k)} &= E\left(z_{ij}\gamma_j\tau_j\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \frac{1}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\hat{\delta}_{\lambda_i}^{(k)}\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)\hat{s}_{1ij}^{(k)}\\ &+\hat{z}_{ij}^{(k)}\frac{\sqrt{1-\hat{\delta}_{\lambda_i}^{2(k)}}}{\pi\hat{\sigma}_i^{(k)}\hat{f}\left(y_j\right)^{(k)}}\left(\frac{\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}}{\hat{v}_i^{(k)}\left(1-\hat{\delta}_{\lambda_i}^{2(k)}\right)}+1\right)^{-\left(\frac{\hat{v}_i^{(k)}}{2}+1\right)}\,,\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\hat{s}_{3ij}^{(k)} &= E\left(z_{ij}\gamma_j^2\tau_j\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \hat{\delta}_{\lambda_i}^{2(k)}\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i{}^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)^2\hat{s}_{1ij}^{(k)} + \hat{z}_{ij}^{(k)}\left\{\left(1-\hat{\delta}_{\lambda_i}^{2(k)}\right)\right.\\ &\left.+\frac{\hat{\delta}_{\lambda_i}^{(k)}\left(y_j - x_j'\hat{\beta}_i{}^{(k)}\right)\sqrt{1-\hat{\delta}_{\lambda_i}^{2(k)}}}{\pi\hat{\sigma}_i^{2(k)}\hat{f}\left(y_j\right)^{(k)}}\left(\frac{\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}}{\hat{v}_i^{(k)}\left(1-\hat{\delta}_{\lambda_i}^{2(k)}\right)}+1\right)^{-\left(\frac{\hat{v}_i^{(k)}}{2}+1\right)}\right\}\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\hat{s}_{4ij}^{(k)} = E\left(z_{ij}\log\left(\tau_j\right)\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \hat{z}_{ij}^{(k)}\left\{DG\left(\frac{\hat{v}_i^{(k)}+1}{2}\right) - \log\left(\frac{\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}+\hat{v}_i^{(k)}}{2}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{\hat{v}_i^{(k)}+1}{\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}+\hat{v}_i^{(k)}}\right)\left(\frac{T_{\hat{v}_i^{(k)}+3}\left(\hat{\lambda}_i^{(k)}\hat{\eta}_{ij}^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{v}_i^{(k)}+3}{\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}+\hat{v}_i^{(k)}}}\right)}{T_{\hat{v}_i^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}_i^{(k)}\hat{\eta}_{ij}^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{v}_i^{(k)}+1}{\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}+\hat{v}_i^{(k)}}}\right)}-1\right)$$

$$+\frac{\hat{\lambda}_i^{(k)}\hat{\eta}_{ij}^{(k)}\left(\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}-1\right)}{\sqrt{\left(\hat{v}_i^{(k)}+1\right)\left(\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}+\hat{v}_i^{(k)}\right)^3}}\frac{t_{\hat{v}_i^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}_i^{(k)}\hat{\eta}_{ij}^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{v}_i^{(k)}+1}{\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}+\hat{v}_i^{(k)}}}\right)}{T_{\hat{v}_i^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}_i^{(k)}\hat{\eta}_{ij}^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{v}_i^{(k)}+1}{\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}+\hat{v}_i^{(k)}}}\right)}$$

$$+\frac{1}{T_{\hat{v}_i{}^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}_i^{(k)}\hat{\eta}_{ij}^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{v}_i^{(k)}+1}{\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}+\hat{v}_i^{(k)}}}\right)}\int_{-\infty}^{\widehat{M}_{ij}^{(k)}} g_{\hat{v}_i^{(k)}}(x)t_{\hat{v}_i^{(k)}+1}(x)dx\Bigg\}. \qquad (4.23)$$

Burada

$$\hat{\eta}_{ij}^{(k)}=\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i{}^{(k)}\right)}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\ ,\quad \hat{\delta}_{\lambda_i}^{(k)}=\frac{\hat{\lambda}_i^{(k)}}{\sqrt{1+\hat{\lambda}_i^{2(k)}}}\ ,\widehat{M}_{ij}^{(k)}=\hat{\lambda}_i{}^{(k)}\hat{\eta}_{ij}^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{v}_i^{(k)}}{\hat{\eta}_{ij}^{2(k)}+\hat{v}_i^{(k)}}}\ ,$$

$$\hat{f}\left(y_j\right)^{(k)}=\sum_{i=1}^{g}\widehat{w}_i^{(k)}\frac{2}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}t_{\hat{v}_i{}^{(k)}}\left(\hat{\eta}_{ij}^{(k)}\right)T_{\hat{v}_i{}^{(k)}+1}\left(\widehat{M}_{ij}^{(k)}\right)\ ,$$

$$g_{\hat{v}_i^{(k)}}(x)=DG\left(\frac{\hat{v}_i^{(k)}+2}{2}\right)-DG\left(\frac{\hat{v}_i^{(k)}+1}{2}\right)-\log\left(1+\frac{x^2}{\hat{v}_i^{(k)}+1}\right)+\frac{x^2\left(\hat{v}_i^{(k)}+1\right)-\hat{v}_i^{(k)}-1}{\left(\hat{v}_i^{(k)}+1\right)\left(\hat{v}_i^{(k)}+1+x^2\right)}$$

dır. Hesaplanan koşullu beklenen değerler (4.18) eşitliğinde verilen ifadede yerine yazılarak $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)=E\left(\ell_c\left(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z}_j\right)\middle|y_j,\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ amaç fonksiyonu

$$Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left\{\log w_i-\frac{1}{2}\log\kappa_i^2+\frac{\nu_i}{2}\log\left(\frac{\nu_i}{2}\right)-\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right)\right)\right\}$$
$$+\frac{\nu_i}{2}\hat{s}_{4ij}^{(k)}-\frac{\nu_i}{2}\,\hat{s}_{1ij}^{(k)}-\frac{\hat{s}_{1ij}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)^2}{2\kappa_i^2}$$
$$+\frac{\alpha_i\hat{s}_{2ij}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)}{\kappa_i^2}-\frac{\alpha_i^2\hat{s}_{3ij}^{(k)}}{2\kappa_i^2} \tag{4.24}$$

olarak bulunur.

ii) M-adımı: $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun w_i parametresine göre Lagrange çarpanı yardımıyla türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle ve (3.19) eşitliğinin elde edilişine benzer düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\widehat{w}_i^{(k+1)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}}{n} \tag{4.25}$$

şeklinde bulunur.

2. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_i}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{(-2)\boldsymbol{x}_j\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)\hat{s}_{1ij}^{(k)}}{2\kappa_i^2}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_i\hat{s}_{2ij}^{(k)}\boldsymbol{x}_j}{\kappa_i^2}=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözülmesiyle $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k+1)}$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{1ij}^{(k)} \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{x}_j' \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\hat{s}_{1ij}^{(k)} y_j - \hat{\alpha}_i^{(k)} \hat{s}_{2ij}^{(k)} \right) \boldsymbol{x}_j \right). \tag{4.26}$$

biçiminde elde edilir.

3. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun α_i parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle ve elde edilen denklemin çözülmesiyle

$$\hat{\alpha}_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{2ij}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)} \right)}{\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{3ij}^{(k)}} \tag{4.27}$$

olarak bulunur.

4. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun κ_i^2 parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle ve elde edilen denklemin κ_i^2 parametresine göre çözülmesiyle

$$\hat{\kappa}_i^{2(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{1ij}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)} \right)^2 - 2\hat{\alpha}_i^{(k)} \hat{s}_{2ij}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)} \right) + \alpha_i^2 \hat{s}_{3ij}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)}} \tag{4.28}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, $\hat{\alpha}_i^{(k+1)}$ ve $\hat{\kappa}_i^{2(k+1)}$ tahmin edicileri kullanılarak $\hat{\sigma}_i^{2(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}_i^{2(k+1)} = \hat{\kappa}_i^{2(k+1)} + \hat{\alpha}_i^{2(k+1)} \tag{4.29}$$

şeklindedir.

5. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun δ_{λ_i} parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\delta_{\lambda_i}\left(1-\delta_{\lambda_i}^2\right)\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}-\delta_{\lambda_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{s}_{1ij}^{(k)}\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i^{(k)}\right)^2}{\sigma_i^{2(k)}}+\sum_{j=1}^{n}\hat{s}_{3ij}^{(k)}\right)$$
$$+\left(1+\delta_{\lambda_i}^2\right)\sum_{j=1}^{n}\hat{s}_{2ij}^{(k)}\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i^{(k)}\right)}{\sigma_i^{(k)}}=0 \tag{4.30}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin λ_i parametresine göre çözümünden $\hat{\lambda}_i^{(k+1)}$ elde edilir. Ayrıca, hesaplamaların daha kolay yürütülebilmesi için $\hat{\delta}_{\lambda_i}^{(k+1)}=\hat{\alpha}_i^{(k+1)}/\hat{\sigma}_i^{(k+1)}$ olmak üzere $\hat{\lambda}_i^{(k+1)}$

$$\hat{\lambda}_i^{(k+1)}=\hat{\delta}_{\lambda_i}^{(k+1)}/\sqrt{1-\hat{\delta}_{\lambda_i}^{2(k+1)}} \tag{4.31}$$

eşitliği yardımıyla da hesaplanabilir.

6. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun ν_i parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\log\left(\frac{\nu_i}{2}\right)+1-DG\left(\frac{\nu_i}{2}\right)+\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{s}_{4j}^{(k)}-\hat{s}_{1j}^{(k)}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}}=0 \tag{4.32}$$

denklemi bulunur. Bu denklemin çözümünden $\hat{\nu}_i^{(k+1)}$ elde edilir.

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k+1)}-\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right\|<\Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

4.2 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, çarpıklık ve kalın kuyrukluluğu modellemek için önerilen çarpık *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli (MixregST) için elde edilen tahmin edicilerin

etkinlikleri ile karma regresyon modeli için hata terimlerinin dağılımı normal dağılım (MixregN), *t* dağılımı (Mixregt) ve çarpık normal dağılım (MixregSN) varsayıldığında elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri simülasyon çalışması ile yan ve MSE değerlerine göre karşılaştırılacaktır. Herhangi bir θ parametresi için simülasyon çalışması sonucunda elde edilen yan ve MSE değerlerinin tahmini aşağıda verilen formüller yardımıyla hesaplanır:

$$\widehat{yan}(\hat{\theta}) = \bar{\theta} - \theta \,, \tag{4.33}$$

$$\widehat{MSE}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{\theta}_i - \theta)^2 \tag{4.34}$$

burada θ gerçek parametre değerini, $\hat{\theta}_i$ $i.$ simülasyonda elde edilen tahmin değerini, $\bar{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\theta}_i$ ve $N = 500$ tekrar sayısını göstermektedir. Simülasyon çalışması için örneklem hacmi $n = 200$ ve 400 olarak alınmıştır. Bütün simülasyon çalışmaları MATLAB R2013a programı kullanılarak yürütülmüştür.

Örnek 4.1 Simülasyon çalışması için $\{(x_{1j}, x_{2j}, y_j), j = 1, \dots, n\}$ verisi aşağıda verilen iki bileşenli karma regresyon modelinden üretilmiştir (Bai vd. 2012):

$$y = \begin{cases} 0 + x_1 + x_2 + \epsilon_1 \,, & z = 1 \,, \\ 0 - x_1 - x_2 + \epsilon_2 \,, & z = 2 \,, \end{cases}$$

burada $P(z = 1) = 0.25 = w_1$ ve $x_1 \sim N(0,1)$, $x_2 \sim N(0,1)$ dır. Ayrıca, model katsayıları $\beta_1 = (\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{12})' = (0,1,1)'$ ve $\beta_2 = (\beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{22})' = (0, -1, -1)'$ dır.

Hata terimlerinin (ϵ_1 ve ϵ_2) dağılımı için aşağıda verilen dört durum ele alınacaktır:

Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$, standart normal dağılım,
Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_3$, 3 serbestlik dereceli *t* dağılımı,

Durum III: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim 0.95N(0,1) + 0.05N(0,25)$, bozulmuş normal dağılımın karması,
Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim ST(0,1,0.5,3)$, çarpık *t* dağılımı.
Durum V: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ (%5 aykırı gözlem ile $x_1 = 20, x_2 = 20$ ve $y = 100$).

Hata terimlerinin dağılımı normal ve aykırı gözlem olmadığı durum yani Durum I tahmin edicilerin klasik tahmin edici olan MixregN ile karşılaştırılması için kullanılacaktır. Durum II kalın kuyruklu hata terimi dağılımına örnektir. Durum III ise aykırı gözlem modeli olarak kullanılan modeldir ve tahmin edicilerin bozulmuş normal dağılıma karşı davranışı incelenecektir. Durum IV'de hata terimleri dağılımının kalın kuyruklu ve çarpık olması durumu ele alınacaktır. Son durum ise veride $x_1 = 20, x_2 = 20$ ve $y = 100$ noktalarında %5 oranında aykırı gözlem olması durumunda tahmin edicilerin performansları değerlendirilecektir.

Çizelge 4.1 ve çizelge 4.2'de $n = 200$ ve $n = 400$ örneklem hacmi için parametre tahminlerinin MSE ve yan değerleri gösterilmektedir. Çizelge 4.1 ve çizelge 4.2'den hata terimlerinin dağılımı normal ($\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$) olduğunda normal dağılım varsayımı altında elde edilen tahmin edicilerin (MixregN) MSE değerlerinin diğer tahmin edicilerin MSE değerlerinden daha düşük olduğu görülmektedir, yani en etkindir. Bunun yanında diğer tahmin ediciler (Mixregt, MixregSN ve MixregST) benzer sonuçlar vermiştir. Durum II'de yani hata terimlerinin dağılımı kalın kuyruklu dağılım ($\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_3$) olduğunda beklendiği gibi en düşük yan ve MSE değerlerine Mixregt modeli sahiptir. Bunun yanısıra, MixregN ve MixregSN modellerinden elde edilen tahmin edicilerin MSE ve yan değerleri oldukça yüksek çıkmıştır. Ayrıca, MixregST modeli durumların çoğunda MixregN ve MixregSN modellerine göre daha düşük yan ve MSE değerlerine sahiptir. Durum III'de MixregN ve MixregSN modelleri kontaminasyondan etkilenmiştir. Bunun aksine, Mixregt ve MixregST modelleri diğer tahmin edicilere göre daha iyi performans göstererek kontaminasyondan etkilenmemiştir. Hata terimlerinin dağılımı kalın kuyruklu çarpık olduğunda ise Mixregt ile MixregST modelleri benzer sonuçlar verirken MixregN ve MixregSN modellerinden elde edilen tahmin ediciler bozulmuştur. Durum V'de, hata terimlerinin dağılımı normal olduğunda ve veriye %5 oranında aykırı gözlem (Çizelge 4.1'de 10 ve Çizelge 4.2'de 20 aykırı gözlem) eklendiğinde bütün tahmin ediciler aykırı gözlemlerden etkilenmiştir.

Ancak, Mixregt ve MixregST modellerinden elde edilen tahmin ediciler neredeyse bütün durumlarda daha küçük yan ve MSE değerlerine sahiptir.

Özet olarak, diğer tahmin edicilerle karşılaştırıldığında Mixregt ve MixregST modelleri veride yer alan çarpıklık ve kalın kuyrukluluğa karşı dayanıklıdır ve aykırı gözlemlere karşı MixregN ve MixregSN modellerine göre daha iyi performans göstermektedir.

Çizelge 4.1 $n = 200$ örneklem hacmi için tahmin edicilerin MSE ve yan değerleri

	MixregN	Mixregt	MixregSN	MixregST
	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan
	Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$			
$\beta_{10}: 0$	0.0456 (0.0150)	0.0587 (0.0134)	0.1726 (-0.3560)	0.1317 (0.2306)
$\beta_{20}: 0$	0.0090 (0.0019)	0.0098 (0.0039)	0.1447 (-0.3678)	0.0575 (-0.2084)
$\beta_{11}: 1$	0.0348 (-0.0013)	0.0495 (-0.0064)	0.0349 (-0.0016)	0.0546 (-0.0036)
$\beta_{21}: -1$	0.0085 (-0.0004)	0.0103 (0.0031)	0.0085 (-0.0004)	0.0118 (0.0212)
$\beta_{12}: 1$	0.0401 (-0.0243)	0.0483 (-0.0308)	0.0401 (-0.0242)	0.0617 (-0.0296)
$\beta_{22}: -1$	0.0089 (-0.0062)	0.0107 (0.0024)	0.0089 (-0.0062)	0.0125 (0.0201)
$w_1: 0.25$	0.0021 (0.0079)	0.0023 (0.0059)	0.0021 (0.0079)	0.0035 (-0.0063)
	Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_3$			
$\beta_{10}: 0$	11.5674 (-0.2939)	0.0930 (-0.0121)	11.6586 (-0.9305)	0.3151 (0.2406)
$\beta_{20}: 0$	1.2217 (0.0796)	0.0136 (-0.0050)	1.3914 (-0.5527)	0.1397 (-0.3327)
$\beta_{11}: 1$	7.6108 (0.4273)	0.0959 (-0.0180)	7.6526 (0.3704)	0.1415 (0.0036)
$\beta_{21}: -1$	1.2984 (-0.0331)	0.0145 (-0.0064)	1.2011 (0.0192)	0.0171 (0.0259)
$\beta_{12}: 1$	8.2789 (0.1660)	0.0981 (0.0027)	8.2956 (0.2624)	0.1678 (0.0282)
$\beta_{22}: -1$	1.9409 (0.1250)	0.0137 (-0.0031)	1.6075 (0.0762)	0.0167 (0.0283)
$w_1: 0.25$	0.0226 (-0.0372)	0.0033 (0.0112)	0.0214 (-0.0352)	0.0055 (-0.0067)
	Durum III: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim 0.95N(0,1) + 0.05N(0,25)$			
$\beta_{10}: 0$	6.0158 (-0.0052)	0.0634 (-0.0062)	6.1249 (-0.6206)	0.1517 (0.2053)
$\beta_{20}: 0$	0.6299 (0.0054)	0.0118 (-0.0080)	0.6282 (-0.5670)	0.0911 (-0.2711)
$\beta_{11}: 1$	4.5781 (0.2371)	0.0599 (0.0078)	4.8849 (0.2067)	0.0727 (0.0119)
$\beta_{21}: -1$	0.2236 (0.0418)	0.0106 (-0.0068)	0.1302 (0.0649)	0.0124 (0.0155)
$\beta_{12}: 1$	2.9126 (-0.0271)	0.0620 (0.0021)	2.7706 (0.0830)	0.0774 (0.0192)
$\beta_{22}: -1$	0.1607 (0.0628)	0.0090 (0.0033)	0.0614 (0.0778)	0.0108 (0.0250)
$w_1: 0.25$	0.0167 (-0.0472)	0.0026 (0.0039)	0.0136 (-0.0526)	0.0034 (-0.0098)
	Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim ST(0,1,0.5,3)$			
$\beta_{10}: 0$	8.4499 (1.0601)	0.2783 (0.4422)	6.1264 (0.3167)	0.9691 (0.7550)
$\beta_{20}: 0$	0.3472 (0.4787)	0.1524 (0.3759)	0.1323 (-0.0886)	0.0231 (0.0590)
$\beta_{11}: 1$	2.9291 (0.2448)	0.0851 (-0.0296)	2.7053 (0.2225)	0.1605 (-0.0107)
$\beta_{21}: -1$	0.0600 (0.0432)	0.0120 (-0.0133)	0.0540 (0.0381)	0.0146 (0.0230)
$\beta_{12}: 1$	5.9774 (-0.1412)	0.0862 (-0.0195)	5.6460 (-0.0863)	0.1911 (0.0005)
$\beta_{22}: -1$	0.0789 (0.0798)	0.0115 (-0.0029)	0.0731 (0.0715)	0.0154 (0.0336)
$w_1: 0.25$	0.0125 (-0.0296)	0.0033 (0.0118)	0.0116 (-0.0260)	0.0050 (-0.0156)
	Durum V: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ (%5 aykırı gözlem)			
$\beta_{10}: 0$	2.2247 (0.1553)	1.3245 (0.1820)	2.5926 (-0.4879)	5.9114 (2.1745)
$\beta_{20}: 0$	0.0146 (0.0111)	0.0106 (0.0072)	0.2401 (-0.4728)	0.0392 (-0.1678)
$\beta_{11}: 1$	3.2773 (1.5211)	2.8341 (1.5030)	3.3162 (1.5107)	2.6095 (1.4250)
$\beta_{21}: -1$	0.0833 (0.2528)	0.0234 (0.1077)	0.0826 (0.2519)	0.0296 (0.1283)
$\beta_{12}: 1$	3.1162 (1.4674)	2.7897 (1.4869)	3.2436 (1.4870)	2.7237 (1.4655)
$\beta_{22}: -1$	0.0798 (0.2482)	0.0225 (0.1055)	0.0786 (0.2472)	0.0281 (0.1244)
$w_1: 0.25$	0.0093 (-0.0937)	0.0061 (-0.0751)	0.0094 (-0.0939)	0.0112 (-0.1029)

Çizelge 4.2 $n = 400$ örneklem hacmi için tahmin edicilerin MSE ve yan değerleri

	MixregN	Mixregt	MixregSN	MixregST
	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan
	Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$			
$\beta_{10}: 0$	0.0203 (0.0088)	0.0265 (0.0114)	0.1564 (-0.3687)	0.0782 (0.2081)
$\beta_{20}: 0$	0.0043 (0.0044)	0.0050 (0.0058)	0.1427 (-0.3716)	0.0565 (-0.2211)
$\beta_{11}: 1$	0.0149 (0.0008)	0.0192 (-0.0019)	0.0149 (0.0009)	0.0227 (0.0034)
$\beta_{21}: -1$	0.0040 (-0.0028)	0.0048 (0.0016)	0.0040 (-0.0027)	0.0057 (0.0197)
$\beta_{12}: 1$	0.0160 (-0.0100)	0.0213 (-0.0185)	0.0161 (-0.0100)	0.0245 (-0.0110)
$\beta_{22}: -1$	0.0044 (0.0009)	0.0053 (0.0070)	0.0044 (0.0010)	0.0065 (0.0247)
$w_1: 0.25$	0.0012 (0.0035)	0.0013 (0.0006)	0.0012 (0.0035)	0.0018 (-0.0123)
	Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_3$			
$\beta_{10}: 0$	14.3296 (-0.3312)	0.0365 (-0.0137)	14.2254 (-0.9701)	0.0830 (0.1669)
$\beta_{20}: 0$	0.6052 (0.0125)	0.0066 (-0.0066)	0.6330 (-0.6752)	0.1411 (-0.3601)
$\beta_{11}: 1$	10.6597 (0.4839)	0.0321 (-0.0054)	10.1135 (0.4010)	0.0427 (0.0239)
$\beta_{21}: -1$	0.5987 (0.0527)	0.0068 (-0.0052)	0.1809 (0.0921)	0.0083 (0.0272)
$\beta_{12}: 1$	12.1779 (0.3384)	0.0334 (0.0052)	11.8293 (0.5888)	0.0421 (0.0288)
$\beta_{22}: -1$	1.5732 (0.0903)	0.0062 (-0.0041)	0.9058 (0.0454)	0.0078 (0.0273)
$w_1: 0.25$	0.0161 (-0.0602)	0.0014 (0.0049)	0.0143 (-0.0591)	0.0020 (-0.0134)
	Durum III: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim 0.95N(0,1) + 0.05N(0,25)$			
$\beta_{10}: 0$	4.6683 (-0.0431)	0.0287 (0.0004)	5.1651 (-0.7278)	0.0729 (0.1830)
$\beta_{20}: 0$	0.0088 (0.0037)	0.0056 (-0.0012)	0.3555 (-0.5817)	0.0848 (-0.2769)
$\beta_{11}: 1$	4.2093 (0.1003)	0.0229 (0.0038)	4.2202 (0.0962)	0.0278 (0.0214)
$\beta_{21}: -1$	0.0313 (0.0872)	0.0053 (0.0024)	0.0319 (0.0875)	0.0066 (0.0243)
$\beta_{12}: 1$	3.2445 (0.1817)	0.0251 (0.0166)	3.1090 (0.1611)	0.0327 (0.0303)
$\beta_{22}: -1$	0.0328 (0.0886)	0.0054 (0.0064)	0.0325 (0.0878)	0.0069 (0.0292)
$w_1: 0.25$	0.0093 (-0.0572)	0.0014 (-0.0020)	0.0093 (-0.0570)	0.0019 (-0.0160)
	Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim ST(0,1,0.5,3)$			
$\beta_{10}: 0$	7.8868 (0.9770)	0.2082 (0.4344)	5.1906 (0.0754)	0.4395 (0.6371)
$\beta_{20}: 0$	0.2110 (0.4604)	0.1461 (0.3853)	0.0373 (-0.1476)	0.0105 (0.0455)
$\beta_{11}: 1$	5.0109 (0.1370)	0.0247 (-0.0192)	5.6461 (0.1695)	0.0400 (0.0140)
$\beta_{21}: -1$	0.0280 (0.0717)	0.0053 (-0.0065)	0.0259 (0.0686)	0.0066 (0.0263)
$\beta_{12}: 1$	6.6126 (0.3814)	0.0301 (-0.0120)	7.0245 (0.3604)	0.0485 (0.0140)
$\beta_{22}: -1$	0.0308 (0.0723)	0.0049 (-0.0044)	0.0276 (0.0691)	0.0069 (0.0290)
$w_1: 0.25$	0.0081 (-0.0459)	0.0014 (0.0040)	0.0073 (-0.0436)	0.0021 (-0.0168)
	Durum V: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ (%5 aykırı gözlem)			
$\beta_{10}: 0$	1.5208 (0.2485)	1.0975 (0.2305)	1.6056 (-0.3105)	6.9413 (2.5194)
$\beta_{20}: 0$	0.0094 (0.0158)	0.0059 (0.0056)	0.2483 (-0.4883)	0.0419 (-0.1880)
$\beta_{11}: 1$	2.6872 (1.4449)	2.4663 (1.4533)	2.6444 (1.4307)	2.3970 (1.4530)
$\beta_{21}: -1$	0.0783 (0.2591)	0.0175 (0.1066)	0.0770 (0.2572)	0.0239 (0.1284)
$\beta_{12}: 1$	2.9720 (1.5383)	2.7078 (1.5341)	3.0209 (1.5560)	2.3044 (1.4204)
$\beta_{22}: -1$	0.0813 (0.2646)	0.0176 (0.1072)	0.0810 (0.2639)	0.0230 (0.1279)
$w_1: 0.25$	0.0098 (-0.0974)	0.0069 (-0.0814)	0.0098 (-0.0976)	0.0138 (-0.1159)

4.3 Farklı Dağılıma Dayalı Dayanıklı Karma Regresyon Modelleri

Bu zamana kadar normal dağılım ya da *t* dağılımı gibi aynı dağılımların sonlu karması kullanılarak karma regresyon modeli düşünülmüştür. Bu bölümde farklı dağılımların karması için karma regresyon modeli problemi incelenecektir. Bunun sebebi ise bazı veri setlerinin aynı tip dağılıma sahip olmayabileceğinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, verideki bazı alt gruplar kalın kuyruklu, çarpık ya da kalın kuyruklu çarpık dağılımlara sahip olabilirler, bazıları ise simetrik, kalın kuyruklu ya da normal dağılıma benzer bir dağılıma sahip olabilirler. Böyle heterojen yapıya sahip olan verinin aynı dağılımın karması ile modellenmesi doğru olmayabilir. Dolayısıyla bu tipteki bir veriyi doğru bir şekilde modellemek için farklı dağılımların karmasına gerek duyulur. Bu bölümde iki farklı dağılım için karma regresyon modeli ele alınmıştır, ancak istenilen sayıda dağılım kullanmak mümkündür. Burada öncelikle verinin bir kısmı simetrik, diğer kısmı da simetrik ve kalın kuyruklu olduğunda verinin normal ve *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli ile modellenmesi problemi ele alınacaktır. Ayrıca diğer bir problem olarak verinin bir kısmının çarpık ve kalın kuyruklu, diğer kısmının ise çarpık olması halinde veri çarpık *t* ve çarpık normal dağılıma dayalı dayanıklı karma regresyon modeli ile modellenecektir.

4.3.1 Normal ve *t* dağılımına dayalı dayanıklı karma regresyon modeli

$\{(\boldsymbol{x}_1, y_1), \dots, (\boldsymbol{x}_n, y_n)\}$ gözlemleri verilmişken

$$y_j = \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i + \epsilon_i \ , \quad i = 1,2 \tag{4.35}$$

regresyon modeli için ilk hata terimi dağılımının 0 ortalamalı ve σ_1^2 varyansı ile normal dağılıma ve ikinci hata terimi dağılımının 0 ortalamalı, σ_2^2 ölçek ve ν serbestlik derecesi parametreleri ile *t* dağılımına sahip olduğu varsayıldığında iki bileşenli karma regresyon modeli aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f\left(y_j; \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{\Theta}\right) = w\phi\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1, \sigma_1^2\right) + (1-w)f\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2, \sigma_2^2, \nu\right) \tag{4.36}$$

burada w karma modelin oranını göstermek üzere $\boldsymbol{\Theta} = (w, \boldsymbol{\beta}_1, \sigma_1^2, \boldsymbol{\beta}_2, \sigma_2^2, \nu)'$ bilinmeyen parametre vektörüdür. Daha önceki bölümlerde bileşen sayısı ikiden fazla olduğu için karma model oranı w_i olarak alınmıştır.

Bilinmeyen $\boldsymbol{\Theta}$ parametresi için ML tahmin edicisi

$$\ell(\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(w\phi\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1, \sigma_1^2\right) + (1-w)f\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2, \sigma_2^2, \nu\right)\right) \tag{4.37}$$

log-olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla elde edilir. Ancak (4.37) ile verilen log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan açık bir çözüm olmadığından EM algoritması kullanılarak parametre tahmini yapılır.

Karma regresyon modeli için z_j kayıp değişkeni aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$z_j = \begin{cases} 1, & j.gözlem\ 1.bileşene\ ait\ ise\ , \\ 0, & diğer\ durumlarda. \end{cases} \tag{4.38}$$

Buradan dağılımın normal ya da t olduğuna karar verebilmek için z_j kayıp değişkeninden yararlanarak ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$f\left(y_j, z_j\right) = \left(w\phi\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1, \sigma_1^2\right)\right)^{z_j}\left((1-w)f\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2, \sigma_2^2, \nu\right)\right)^{1-z_j}. \tag{4.39}$$

EM algoritmasının adımlarının kolaylaştırılması için t dağılımının normal dağılımın ölçek karması şeklinde yazılması özelliği kullanılacaktır. (4.2) eşitliğindeki gibi t

dağılımı için kayıp değişken u olsun. Ölçek karması şeklinde yazıldıktan sonra (4.39) ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y_j, u_j, z_j) = \left(w \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1\right)^2}{2\sigma_1^2}} \right)^{z_j} \cdot \left((1-w) \frac{(\nu/2)^{\nu/2} u_j^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}u_j}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{2\pi\sigma_2^2/u_j}} e^{-\frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2\right)^2}{2\sigma_2^2/u_j}} \right)^{1-z_j} \tag{4.40}$$

olarak elde edilir. Böylece, $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ve $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_n)$ bağımsız ve kayıp veri ve $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$ tam veri olmak üzere tam veri için olabilirlik fonksiyonu

$$L_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) = \prod_{j=1}^{n} \left(w \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1\right)^2}{2\sigma_1^2}} \right)^{z_j} \cdot \left((1-w) \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\nu/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{2\pi\sigma_2^2/u_j}} u_j^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}u_j - \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2\right)^2}{2\sigma_2^2/u_j}} \right)^{1-z_j} \tag{4.41}$$

şeklinde yazılarak tam veri log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} z_j \left(\log w - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\sigma_1^2 - \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1\right)^2}{2\sigma_1^2} \right) \\ + (1 - z_j) \left(\log(1-w) - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\sigma_2^2 + \frac{1}{2}\log u_j \right. \\ \left. - \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2\right)^2}{2\sigma_2^2/u_j} - \frac{\nu}{2}u_j - \log\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$+\frac{\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right)+\left(\frac{\nu}{2}-1\right)\log u_j\Big) \tag{4.42}$$

olarak elde edilir. EM algoritmasından dolayı tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri

$$\begin{aligned}E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z})|y_j\right)=\sum_{j=1}^{n}E\left(z_j|y_j\right)\Big(&\log w-\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log\sigma_1^2\\&-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1\right)^2}{2\sigma_1^2}\Big)+\left(1-E\left(z_j|y_j\right)\right)(\log(1-w)-\frac{\log 2\pi}{2}\\&-\frac{1}{2}\log\sigma_2^2+\frac{1}{2}E\left(\log u_j|y_j\right)-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2\right)^2E\left(u_j|y_j\right)}{2\sigma_2^2}\\&-\frac{\nu}{2}E\left(u_j|y_j\right)-\log\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right)\\&+\left(\frac{\nu}{2}-1\right)E\left(\log u_j|y_j\right)\Big)\end{aligned} \tag{4.43}$$

olur. Burada $E\left(z_j|y_j\right)$ beklenen değeri (3.7) eşitliği kullanılarak, $E\left(u_j|y_j\right)$ ve $E\left(\log u_j|y_j\right)$ koşullu beklenen değerleri ise (1.15) ile verilen koşullu dağılım ve (1.16) ile verilen özellik kullanılarak

$$E\left(u_j|y_j\right)=\frac{\nu+1}{\nu+\left(\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2\right)/\sigma_2\right)^2}\,, \tag{4.44}$$

$$E\left(\log u_j|y_j\right)=DG\left(\frac{\nu+1}{2}\right)-\log\left(\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right)\right) \tag{4.45}$$

şeklinde bulunur.

EM algoritması: $\boldsymbol{\Theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra yukarıdaki bilgiler kullanılarak EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibi verilir:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}$ verilmişken aşağıda verilen beklenen değerler hesaplanır:

$$\hat{z}_j^{(k)} = E\left(z_j \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \frac{\widehat{w}^{(k)} \phi\left(y_j; \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}, \hat{\sigma}_1^{2(k)}\right)}{\widehat{w}^{(k)} \phi\left(y_j \middle| \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}, \hat{\sigma}_1^{2(k)}\right) + (1-\widehat{w}^{(k)}) f\left(y_j \middle| \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k)}, \hat{\sigma}_2^{(k)}, \hat{\nu}^{(k)}\right)}, \quad (4.46)$$

$$\hat{u}_{1j}^{(k)} = E\left(u_j \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \frac{\hat{\nu}^{(k)} + 1}{\hat{\nu}^{(k)} + \left(\left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k)}\right) / \hat{\sigma}_2^{(k)}\right)^2}, \quad (4.47)$$

$$\hat{u}_{2j}^{(k)} = E\left(\log u_j \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = DG\left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}+1}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\left(\hat{\nu}^{(k)} + \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k)}\right)^2}{\hat{\sigma}_2^{2(k)}}\right)\right). \quad (4.48)$$

Bu koşullu beklenen değerler (4.43) eşitliğinde yerine yazılarak $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) | y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ amaç fonksiyonu

$$\begin{aligned} Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_j^{(k)} & \left(\log w - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log \sigma_1^2 - \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_1\right)^2}{2\sigma_1^2}\right) \\ & + \left(1 - \hat{z}_j^{(k)}\right)\left(\log(1-w) - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log \sigma_2^2 + \frac{1}{2}\hat{u}_{2j}^{(k)}\right. \\ & - \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_2\right)^2}{2\sigma_2^2}\hat{u}_{1j}^{(k)} - \frac{\nu}{2}\hat{u}_{1j}^{(k)} - \log\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \\ & \left. + \frac{\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right) + \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\hat{u}_{2j}^{(k)}\right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

olarak bulunur.

ii) M-adımı: $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun w parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial w}=\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{z}_j^{(k)}\frac{1}{w}+\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)\frac{(-1)}{1-w}\right)=0$$

ve yukarıda verilen denklemin çözülmesiyle

$$\widehat{w}^{(k+1)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_j^{(k)}}{n} \tag{4.50}$$

olarak elde edilir.

2. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}_1$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_j^{(k)}\left(-\frac{(-2)\boldsymbol{x}_j\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1\right)}{2\sigma_1^2}\right)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k+1)}$ tahmin edicisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k+1)}=\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_j^{(k)}\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j'\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_j^{(k)}\boldsymbol{x}_j y_j\right). \tag{4.51}$$

3. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun σ_1^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial \sigma_1^2}=\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_j^{(k)}\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1\right)^2}{2\sigma_1^4}\right)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden $\hat{\sigma}_1^{2(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}_1^{2(k+1)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_j^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_j^{(k)}} \tag{4.52}$$

biçiminde bulunur.

4. Benzer olarak $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}_2$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek ve elde edilen denklemin $\boldsymbol{\beta}_2$ parametresine göre çözülmesiyle $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k+1)}=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)\hat{u}_{1j}^{(k)}\right)\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j'\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)\hat{u}_{1j}^{(k)}\right)\boldsymbol{x}_j y_j\right) \tag{4.53}$$

olarak elde edilir.

5. Aynı şekilde $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun σ_2^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek ve elde edilen denklemin σ_2^2'ye göre çözülmesiyle $\hat{\sigma}_2^{2(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}_2^{2(k+1)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)\hat{u}_{1j}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k)}\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)} \tag{4.54}$$

şeklinde bulunur.

6. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun ν parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla aşağıdaki denkleme ulaşılır:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)\left(DG\left(\frac{\nu}{2}\right)-\log\left(\frac{\nu}{2}\right)-1-\hat{u}_{2j}^{(k)}+\hat{u}_{1j}^{(k)}\right)=0. \tag{4.55}$$

Bu denklemin çözümünden $\hat{\nu}^{(k+1)}$ elde edilir.

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k+1)}-\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right\|<\Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

4.3.2 Çarpık *t* ve çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli

$\{(\boldsymbol{x}_1,y_1),\ldots,(\boldsymbol{x}_n,y_n)\}$ gözlemleri verilmişken (4.35) ile verilen regresyon modeli göz önüne alınarak ilk hata terimi dağılımı 0 konum, σ_1^2 ölçek, λ_1 çarpıklık ve ν serbestlik derecesi parametreleri ile çarpık *t* dağılımına (Gupta vd. 2002, Azzalini ve Capitanio 2003, Gupta 2003, Arslan 2011) ve ikinci hata terimi dağılımı 0 konum, σ_2^2 ölçek ve λ_2 çarpıklık parametreleri ile çarpık normal dağılıma (Azzalini 1985, 1986) sahip olduğu varsayıldığında bu dağılımların karmasına dayalı iki bileşenli karma regresyon modeli aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f\left(y_j;\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{\Theta}\right)=wf\left(y_j;\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1,\sigma_1^2,\lambda_1,\nu\right)+(1-w)f\left(y_j;\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2,\sigma_2^2,\lambda_2\right) \tag{4.56}$$

burada $\boldsymbol{\Theta}=(w,\boldsymbol{\beta}_1,\sigma_1^2,\lambda_1,\nu,\boldsymbol{\beta}_2,\sigma_2^2,\lambda_2)'$ bilinmeyen parametre vektörüdür. Burada not edilmelidir ki $E(\epsilon)\neq 0$ olduğundan kesim noktası tahmin edilirken $\widehat{E(\epsilon)}$ ifadesi de dikkate alınmalıdır. Böylece bilinmeyen $\boldsymbol{\Theta}$ parametresi için ML tahmin edicisi

$$\ell(\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(wf\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1, \sigma_1^2, \lambda_1, \nu\right) + (1-w)f\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2, \sigma_2^2, \lambda_2\right)\right) \quad (4.57)$$

log-olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla elde edilir. Ancak (4.57) ile verilen log-loabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan açık bir çözüm olmadığından EM algoritması kullanılarak parametre tahmini yapılır.

Karma regresyon modeli için z_j kayıp değişkeni (4.38) eşitliğindeki gibi tanımlansın. Buradan dağılımın çarpık *t* veya çarpık normal olduğuna karar verebilmek için z_j kayıp değişkeninden yararlanarak ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f\left(y_j, z_j\right) = \left(wf\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1, \sigma_1^2, \lambda_1, \nu\right)\right)^{z_j} . \left((1-w)f\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2, \sigma_2^2, \lambda_2\right)\right)^{1-z_j}. \quad (4.58)$$

Yukarıda verilen karma regresyon modelinde EM algoritmasının adımlarının daha kolay yürütülebilmesi için çarpık normal ve çarpık *t* dağılımının (1.26) ve (1.45) ile verilen stokastik gösterimleri kullanılacaktır. Bu gösterimlerden kayıp değişkenler γ ve τ olsun. Böylece bu gösterimler yardımıyla koşullu dağılımlar

$$y_j|\gamma_j, \tau_j \sim N\left(\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1 + \alpha_1\gamma_j, \frac{\kappa_1^2}{\tau_j}\right),$$

$$\gamma_j|\tau_j \sim TN\left(0, \frac{1}{\tau_j}; (0,\infty)\right), \quad \tau_j \sim Gamma(\nu/2\,, \nu/2)\,,$$

$$y_j|\gamma_j \sim N\left(\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2 + \alpha_2\gamma_j, \kappa_2^2\right), \quad \gamma_j \sim TN\left(0,1; (0,\infty)\right)$$

olarak elde edilir. Burada $\delta_{\lambda_1} = \lambda_1/\sqrt{1+\lambda_1^2}$, $\delta_{\lambda_2} = \lambda_2/\sqrt{1+\lambda_2^2}$, $\alpha_1 = \sigma_1\delta_{\lambda_1}$, $\alpha_2 = \sigma_2\delta_{\lambda_2}$, $\kappa_1^2 = \sigma_1^2\left(1-\delta_{\lambda_1}^2\right)$ ve $\kappa_2^2 = \sigma_2^2\left(1-\delta_{\lambda_2}^2\right)$ dır. Yukarıda verilen koşullu

dağılımlar kullanılarak (4.58) eşitliği ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$f(y_j,\gamma_j,\tau_j,z_j)=\left(w\frac{(\nu/2)^{\nu/2}\tau_j^{\nu/2}}{\pi\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\kappa_1^2}}e^{-\nu\frac{\tau_j}{2}-\frac{\tau_j\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1-\alpha_1\gamma_j\right)^2}{2\kappa_1^2}-\frac{\tau_j\gamma_j^2}{2}}\right)^{z_j}$$
$$\cdot\left(\frac{(1-w)}{\pi\sqrt{\kappa_2^2}}e^{-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2-\alpha_2\gamma_j\right)^2}{2\kappa_2^2}-\frac{\gamma_j^2}{2}}\right)^{1-z_j}. \tag{4.59}$$

Dolayısıyla $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\dots,\gamma_n),\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\dots,\tau_n)$ ve $\boldsymbol{z}=(z_1,\dots,z_n)$ bağımsız ve kayıp veri ve $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z})$ tam veri olmak üzere tam veri için olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki denklemlerle verilir:

$$L_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z})=\prod_{j=1}^{n}\left(w\frac{(\nu/2)^{\nu/2}\tau_j^{\nu/2}}{\pi\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\kappa_1^2}}e^{-\nu\frac{\tau_j}{2}-\frac{\tau_j\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1-\alpha_1\gamma_j\right)^2}{2\kappa_1^2}-\frac{\tau_j\gamma_j^2}{2}}\right)^{z_j}$$
$$\cdot\left(\frac{(1-w)}{\pi\sqrt{\kappa_2^2}}e^{-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2-\alpha_2\gamma_j\right)^2}{2\kappa_2^2}-\frac{\gamma_j^2}{2}}\right)^{1-z_j}, \tag{4.60}$$

$$\ell_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z})=\sum_{j=1}^{n}z_j\left(\log w-\log\pi-\frac{\log\kappa_1^2}{2}+\frac{\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\nu}{2}\log\tau_j\right.$$
$$\left.-\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)-\frac{\nu\tau_j}{2}-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1-\alpha_1\gamma_j\right)^2}{2\kappa_1^2/\tau_j}-\frac{\tau_j\gamma_j^2}{2}\right)$$
$$+\left(1-z_j\right)\left(\log(1-w)-\log\pi-\frac{\log\kappa_2^2}{2}\right.$$
$$\left.-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2-\alpha_2\gamma_j\right)^2}{2\kappa_2^2}-\frac{\gamma_j^2}{2}\right). \tag{4.61}$$

EM algoritmasında gerekli olan tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri ise

$$E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z})|y_j\right)=\sum_{j=1}^{n}E\left(z_j|y_j\right)\Bigg\{\log w-\frac{\log\kappa_1^2}{2}+\frac{\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right)$$
$$-\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)\Bigg\}+\frac{\nu}{2}E\left(z_j\log\tau_j|y_j\right)-\frac{\nu}{2}E\left(z_j\tau_j|y_j\right)$$
$$-\frac{E\left(z_j\tau_j|y_j\right)\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1\right)^2}{2\kappa_1^2}-\frac{\alpha_1^2E\left(z_j\gamma_j^2\tau_j|y_j\right)}{2\kappa_1^2}$$
$$+\frac{\alpha_1E\left(z_j\gamma_j\tau_j|y_j\right)\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1\right)}{\kappa_1^2}+\left(1-E\left(z_j|y_j\right)\right)$$
$$\Bigg(\log(1-w)-\frac{\log\kappa_2^2}{2}-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2\right)^2}{2\kappa_2^2}$$
$$+\frac{\alpha_2E\left(\gamma_j|y_j\right)\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2\right)}{\kappa_2^2}-\frac{\alpha_2^2E\left(\gamma_j^2|y_j\right)}{2\kappa^2}\Bigg) \qquad (4.62)$$

şeklinde elde edilir. Burada $E\left(z_j|y_j\right)$ koşullu beklenen değeri (3.7) eşitliğinden, $E\left(\gamma_j|y_j\right)$ ve $E\left(\gamma_j^2|y_j\right)$ koşullu beklenen değerleri (1.29) ve (1.30) eşitliklerinden, $E\left(\log(\tau_j)|y_j\right)$, $E\left(\tau_j|y_j\right)$, $E\left(\gamma_j^2\tau_j|y_j\right)$ ve $E\left(\gamma_j\tau_j|y_j\right)$ koşullu beklenen değerleri ise (1.53)-(1.55) eşitliklerinden yararlanarak hesaplanır.

EM algoritması: Yukarıda verilen bilgiler doğrultusunda $\boldsymbol{\Theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibi verilir:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}$ verilmişken aşağıda verilen beklenen değerler hesaplanır:

$$\hat{z}_j^{(k)}=E\left(z_j|y_j,\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) \qquad (4.63)$$

$$= \frac{\widehat{w}^{(k)} f\left(y_j \middle| \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}, \hat{\sigma}_1^{2(k)}, \hat{\lambda}_1^{(k)}, \hat{\nu}^{(k)}\right)}{\widehat{w}^{(k)} f\left(y_j \middle| \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}, \hat{\sigma}_1^{2(k)}, \hat{\lambda}_1^{(k)}, \hat{\nu}^{(k)}\right) + (1 - \widehat{w}^{(k)}) f\left(y_j \middle| \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k)}, \hat{\sigma}_2^{2(k)}, \hat{\lambda}_2^{(k)}\right)},$$

$$\hat{s}_{1j}^{(k)} = E\left(z_j \tau_j \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$$

$$= \hat{z}_j^{(k)} \left(\frac{\hat{\nu}^{(k)} + 1}{\hat{\eta}_{1j}^{2(k)} + \hat{\nu}^{(k)}}\right) \frac{T_{\hat{\nu}^{(k)}+3}\left(\widehat{M}_j^{(k)} \sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)} + 3}{\hat{\nu}^{(k)} + 1}}\right)}{T_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\widehat{M}_j^{(k)}\right)}, \tag{4.64}$$

$$\hat{s}_{2j}^{(k)} = E\left(z_j \gamma_j \tau_j \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \frac{1}{\hat{\sigma}_1^{(k)}} \hat{\delta}_{\lambda_1}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}\right) \hat{s}_{1j}^{(k)}$$

$$+ \hat{z}_j^{(k)} \frac{\sqrt{1 - \hat{\delta}_{\lambda_1}^{2(k)}}}{\pi \hat{\sigma}_1^{(k)} \hat{f}\left(y_j\right)^{(k)}} \left(\frac{\hat{\eta}_{1j}^{2(k)}}{\hat{\nu}^{(k)}\left(1 - \hat{\delta}_{\lambda_1}^{2(k)}\right)} + 1\right)^{-\left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}}{2}+1\right)}, \tag{4.65}$$

$$\hat{s}_{3j}^{(k)} = E\left(z_j \gamma_j^2 \tau_j \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \hat{\delta}_{\lambda_1}^{2(k)} \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}}{\hat{\sigma}_1^{(k)}}\right)^2 \hat{s}_{1j}^{(k)} + \hat{z}_j^{(k)} \left\{\left(1 - \hat{\delta}_{\lambda_1}^{2(k)}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\hat{\delta}_{\lambda_1}^{(k)}\left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}\right) \sqrt{1 - \hat{\delta}_{\lambda_1}^{2(k)}}}{\pi \hat{\sigma}_1^{2(k)} \hat{f}\left(y_j\right)^{(k)}} \left(\frac{\hat{\eta}_{1j}^{2(k)}}{\hat{\nu}^{(k)}\left(1 - \hat{\delta}_{\lambda_1}^{2(k)}\right)} + 1\right)^{-\left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}}{2}+1\right)}\right\}, \tag{4.66}$$

$$\hat{s}_{4j}^{(k)} = E\left(z_j \log\left(\tau_j\right) \middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \hat{z}_j^{(k)} \left\{DG\left(\frac{\hat{\nu}^{(k)} + 1}{2}\right) - \log\left(\frac{\hat{\eta}_{1j}^{2(k)} + \hat{\nu}^{(k)}}{2}\right)\right.$$

$$+ \left(\frac{\hat{\nu}^{(k)} + 1}{\hat{\eta}_{1j}^{2(k)} + \hat{\nu}^{(k)}}\right) \left(\frac{T_{\nu^{(k)}+3}\left(\hat{\lambda}_1^{(k)} \hat{\eta}_{1j}^{(k)} \sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)} + 3}{\hat{\eta}_{1j}^{2(k)} + \hat{\nu}^{(k)}}}\right)}{T_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}_1^{(k)} \hat{\eta}_{1j}^{(k)} \sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)} + 1}{\hat{\eta}_{1j}^{2(k)} + \hat{\nu}^{(k)}}}\right)} - 1\right)$$

$$\left. + \frac{\hat{\lambda}_1^{(k)} \hat{\eta}_{1j}^{(k)}\left(\hat{\eta}_{1j}^{2(k)} - 1\right)}{\sqrt{\left(\hat{\nu}^{(k)} + 1\right)\left(\hat{\eta}_{1j}^{2(k)} + \hat{\nu}^{(k)}\right)^3}} \frac{t_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}_1^{(k)} \hat{\eta}_{1j}^{(k)} \sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)} + 1}{\hat{\eta}_{1j}^{2(k)} + \hat{\nu}^{(k)}}}\right)}{T_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}_1^{(k)} \hat{\eta}_{1j}^{(k)} \sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)} + 1}{\hat{\eta}_{1j}^{2(k)} + \hat{\nu}^{(k)}}}\right)}\right\}$$

$$+\frac{1}{T_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\hat{\lambda}_1^{(k)}\hat{\eta}_{1j}^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)}+1}{\hat{\eta}_{1j}^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}}}\right)}\int_{-\infty}^{\widehat{M}_j^{(k)}} g_{\nu^{(k)}}(x)t_{\hat{\nu}^{(k)}+1}(x)dx\Bigg\}, \qquad (4.67)$$

$$\hat{t}_{1j}^{(k)} = E\left(\gamma_j|y_j,\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \hat{\delta}_{\lambda_2}^{(k)}\hat{\eta}_{2j}^{(k)} + \sqrt{1-\hat{\delta}_{\lambda_2}^{2(k)}}\frac{\phi\left(\hat{\lambda}_2^{(k)}\hat{\eta}_{2j}^{(k)}\right)}{\Phi\left(\hat{\lambda}_2^{(k)}\hat{\eta}_{2j}^{(k)}\right)}, \qquad (4.68)$$

$$\hat{t}_{2j}^{(k)} = E\left(\gamma_j^2|y_j,\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = 1-\hat{\delta}_{\lambda_2}^{2(k)} + \hat{\delta}_{\lambda_2}^{(k)}\hat{\eta}_{2j}^{(k)}\hat{t}_{1j}^{(k)}. \qquad (4.69)$$

Burada

$$\hat{\eta}_{1j}^{(k)} = \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}\right)}{\hat{\sigma}_1^{(k)}}, \quad \hat{\delta}_{\lambda_1}^{(k)} = \frac{\hat{\lambda}_1^{(k)}}{\sqrt{1+\hat{\lambda}_1^{2(k)}}}, \quad \hat{\eta}_{2j}^{(k)} = \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k)}\right)}{\hat{\sigma}_2^{(k)}},$$

$$\hat{\delta}_{\lambda_2}^{(k)} = \frac{\hat{\lambda}_2^{(k)}}{\sqrt{1+\hat{\lambda}_2^{2(k)}}}, \quad \widehat{M}_j^{(k)} = \hat{\lambda}_1^{(k)}\hat{\eta}_{1j}^{(k)}\sqrt{\frac{\hat{\nu}^{(k)}}{\hat{\eta}_{1j}^{2(k)}+\hat{\nu}^{(k)}}},$$

$$\hat{f}\left(y_j\right)^{(k)} = \widehat{w}_1^{(k)}\frac{2}{\hat{\sigma}_1^{(k)}}t_{\hat{\nu}^{(k)}}\left(\hat{\eta}_{1j}^{(k)}\right)T_{\hat{\nu}^{(k)}+1}\left(\widehat{M}_j^{(k)}\right)$$

$$+\left(1-\widehat{w}_1^{(k)}\right)\frac{2}{\hat{\sigma}_2^{(k)}}\phi\left(\hat{\eta}_{2j}^{(k)}\right)\Phi\left(\hat{\lambda}_2^{(k)}\hat{\eta}_{2j}^{(k)}\right),$$

$$g_{\hat{\nu}^{(k)}}(x) = DG\left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}+2}{2}\right) - DG\left(\frac{\hat{\nu}^{(k)}+1}{2}\right) - \log\left(1+\frac{x^2}{\hat{\nu}^{(k)}+1}\right) + \frac{x^2\left(\hat{\nu}^{(k)}+1\right)-\hat{\nu}^{(k)}-1}{\left(\hat{\nu}^{(k)}+1\right)\left(\hat{\nu}^{(k)}+1+x^2\right)}$$

dır. Hesaplanan beklenen değerler (4.62) eşitliğinde verilen koşullu beklenen değerde yerine yazılarak $Q\left(\boldsymbol{\Theta}|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z})|y_j,\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ amaç fonksiyonu

$$Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\hat{z}_j^{(k)}\left(\log w - \frac{1}{2}\log\kappa_1^2 + \frac{\nu}{2}\log\left(\frac{\nu}{2}\right) - \log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{\nu\hat{s}_{4j}^{(k)}}{2}-\frac{\nu\hat{s}_{1j}^{(k)}}{2}-\frac{\hat{s}_{1j}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1\right)^2}{2\kappa_1^2}+\frac{\alpha_1\hat{s}_{2j}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1\right)}{\kappa_1^2}-\frac{\alpha_1^2\hat{s}_{3j}^{(k)}}{2\kappa_1^2}$$
$$+\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)\left(\log(1-w)-\frac{1}{2}\log\kappa_2^2-\frac{\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2\right)^2}{2\kappa_2^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_2\hat{t}_{1j}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2\right)}{\kappa_2^2}-\frac{\alpha_2^2\hat{t}_{2j}^{(k)}}{2\kappa_2^2}\right) \tag{4.70}$$

elde edilir.

ii) M-adımı: $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun w parametresine göre türevi alınarak (4.50) eşitliğinin elde edilişine benzer olarak yapılan düzenlemelerden sonra

$$\widehat{w}^{(k+1)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_j^{(k)}}{n} \tag{4.71}$$

olarak elde edilir.

2. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}_1$ parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{(-2)\boldsymbol{x}_j\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_1\right)\hat{s}_{1j}^{(k)}}{2\kappa_1^2}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_1\hat{s}_{2j}^{(k)}\boldsymbol{x}_j}{\kappa_1^2}=0.$$

Bu denklemin $\boldsymbol{\beta}_1$ parametresine göre çözülmesiyle $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{1j}^{(k)} \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{x}_j' \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\hat{s}_{1j}^{(k)} y_j - \hat{\alpha}_1^{(k)} \hat{s}_{2j}^{(k)} \right) \boldsymbol{x}_j \right) \tag{4.72}$$

olarak elde edilir.

3. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun α_1 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial \alpha_1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{s}_{2j}^{(k)}}{\kappa_1^2} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_1 \right) - 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_1}{2\kappa_1^2} \hat{s}_{3j}^{(k)} = 0$$

denklemi bulunur. Bu denklemin α_1 parametresine göre çözülmesiyle $\hat{\alpha}_1^{(k+1)}$

$$\hat{\alpha}_1^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{2j}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)} \right)}{\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{3j}^{(k)}} \tag{4.73}$$

olarak elde edilir.

4. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun κ_1^2 parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial \kappa_1^2} = & - \sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{z}_{ij}^{(k)}}{2\kappa_1^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{s}_{1j}^{(k)}}{2\kappa_1^4} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)} \right)^2 \\ & - \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_1 \hat{s}_{2j}^{(k)}}{\kappa_1^4} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)} \right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_1^2}{2\kappa_1^4} \hat{s}_{3j} = 0. \end{aligned}$$

Bu denklemin κ_1^2 parametresine göre çözülmesiyle $\hat{\kappa}_1^{2(k+1)}$

$$\hat{\kappa}_1^{2(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{1j}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}\right)^2 - 2\hat{\alpha}_1^{(k)} \hat{s}_{2j}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}\right) + \hat{\alpha}_1^2 \hat{s}_{3j}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_j^{(k)}}. \tag{4.74}$$

şeklinde bulunur. Buradan $\hat{\alpha}_1^{(k+1)}$ ve $\hat{\kappa}_1^{2(k+1)}$ tahmin edicileri kullanılarak $\hat{\sigma}_1^{2(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}_1^{2(k+1)} = \hat{\kappa}_1^{2(k+1)} + \hat{\alpha}_1^{2(k+1)} \tag{4.75}$$

olarak elde edilir.

5. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun δ_{λ_1} parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek ve gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda_1}\left(1 - \delta_{\lambda_1}^2\right) \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_j^{(k)} - \delta_{\lambda_1} \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{1j}^{(k)} \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}\right)^2}{\hat{\sigma}_1^{2(k)}} + \sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{3j}^{(k)} \right) \\ + \left(1 + \delta_{\lambda_1}^2\right) \sum_{j=1}^{n} \hat{s}_{2j}^{(k)} \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^{(k)}\right)}{\hat{\sigma}_1^{2(k)}} = 0. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Bu denklemin λ_1 parametresine göre çözülmesiyle $\hat{\lambda}_1^{(k+1)}$ bulunur. Ayrıca, $\hat{\lambda}_1^{(k+1)}$ aşağıdaki eşitlik yardımıyla da hesaplanabilir:

$$\hat{\lambda}_1^{(k+1)} = \hat{\delta}_{\lambda_1}^{(k+1)} \Big/ \sqrt{1 - \hat{\delta}_{\lambda_1}^{2(k+1)}}. \tag{4.77}$$

Burada $\hat{\delta}_{\lambda_1}^{(k+1)} = \hat{\alpha}_1^{(k+1)} \big/ \hat{\sigma}_1^{(k+1)}$ dır.

6. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun ν parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla

$$\log\left(\frac{\nu}{2}\right)+1-DG\left(\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{s}_{4j}^{(k)}-\hat{s}_{1j}^{(k)}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_j^{(k)}}=0 \tag{4.78}$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemin çözümünden $\hat{\nu}^{(k+1)}$ elde edilir.

7. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}_2$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{j=1}^{n}\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)\left(-\frac{(-2)\boldsymbol{x}_j\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_2\right)+2\alpha_2\boldsymbol{x}_j\hat{t}_{1j}^{(k)}}{2\kappa_2^2}\right)=0.$$

Bu denklemin $\boldsymbol{\beta}_2$'ye göre çözülmesiyle $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k+1)}$ tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k+1)}=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j'\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)\left(y_j-\hat{\alpha}_2^{(k)}\hat{t}_{1j}^{(k)}\right)\boldsymbol{x}_j\right) \tag{4.79}$$

8. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun α_2 parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle ve elde edilen denklemin α_2'ye göre çözülmesiyle $\hat{\alpha}_2^{(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}_2^{(k+1)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(1-\hat{z}_i^{(k)}\right)\hat{t}_{1j}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k)}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)\hat{t}_{2j}^{(k)}}. \tag{4.80}$$

olarak bulunur.

9. $Q\left(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun κ_2^2 parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle ve elde edilen denklemin κ_2^2'ye göre çözülmesiyle $\hat{\kappa}^{2(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\hat{\kappa}_2^{2(k+1)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)}\sum_{j=1}^{n}\left(1-\hat{z}_j^{(k)}\right)\left(\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k)}\right)^2 - 2\hat{\alpha}_2^{(k)}\hat{t}_{1j}^{(k)}\left(y_j-\boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^{(k)}\right)+\hat{\alpha}_2^{2(k)}\hat{t}_{2j}^{(k)}\right) \quad (4.81)$$

şeklinde bulunur. $\hat{\alpha}_2^{(k+1)}$ ve $\hat{\kappa}_2^{2(k+1)}$ tahmin edicileri kullanılarak $\hat{\sigma}_2^{2(k+1)}$ ve $\hat{\lambda}_2^{(k+1)}$ tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\sigma}_2^{2(k+1)} = \hat{\kappa}_2^{2(k+1)} + \hat{\alpha}_2^{2(k+1)}\ , \quad (4.82)$$

$$\hat{\lambda}_2^{(k+1)} = \hat{\delta}_{\lambda_2}^{(k+1)}\left(1-\hat{\delta}_{\lambda_2}^{2(k+1)}\right)^{-1/2}. \quad (4.83)$$

Burada $\hat{\delta}_{\lambda_2}^{(k+1)} = \hat{\alpha}_2^{(k+1)}/\hat{\sigma}_2^{(k+1)}$ dır.

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k+1)} - \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right\| < \Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

4.4 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, farklı dağılıma dayalı karma regresyon modeli için önerilen tahmin edicilerin performansı literatürde var olan karma regresyon modeli tahmin edicilerinin performansı ile karşılaştırılacaktır. Burada simetrik ve çarpık durum için simülasyon çalışması yapılacaktır. Simetrik durum için önerilen normal-*t* dağılımlarının karmasına dayalı karma regresyon modelinden (MixregNt) elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri, normal ve *t* dağılımına dayalı karma regresyon modellerinden ((MixregN) ve (Mixregt)) elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri ile simülasyon çalışması

sonucunda yan ve MSE değerlerine göre karşılaştırılacaktır. Çarpık durum için önerilen çarpık *t*-çarpık normal dağılımlarının karmasına dayalı karma regresyon modelinden (MixregSTSN) elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri, çarpık *t* ve çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modellerinden ((MixregST) ve (MixregSN)) elde edilen tahmin edicilerin etkinlikleri ile simülasyon çalışması yapılarak yan ve MSE değerlerine göre karşılaştırılacaktır. Yan ve MSE değerleri (4.33) ve (4.34) eşitlikleri ile verilen formüller yardımıyla hesaplanacaktır. Simülasyon çalışması için örneklem hacmi $n = 200{,}400$ ve tekrar sayısı 500 olarak alınmıştır. Bütün simülasyon çalışmaları MATLAB R2013a programı kullanılarak yürütülmüştür.

Örnek 4.2. Simülasyon çalışması için $\{(x_{1j}, x_{2j}, y_j), j = 1, \dots, n\}$ verisi Örnek 4.1'de verilen iki bileşenli karma regresyon modelinden üretilmiştir.

Simülasyon çalışması karşılaştırmaları yapılırken simetrik ve çarpık durum için aşağıda verilen hata terimleri dağılımı (i ve ii) ve çizelge 4.3'de verilen karma regresyon modelleri kullanılacaktır.

i) Hata terimlerinin dağılımı için aşağıda verilen dört durum ele alınacaktır:

Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0{,}1)$, standart normal dağılım,
Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_3$, 3 serbestlik dereceli *t* dağılımı,
Durum III: $\epsilon_1 \sim N(0{,}1)$ ve $\epsilon_2 \sim t_3$,
Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0{,}1)$ (%5 aykırı gözlem ile $x_1 = 20, x_2 = 20$ ve $y = 100$).

ii) Hata terimlerinin dağılımı için aşağıda verilen dört durum ele alınacaktır:

Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim SN(0{,}1{,}0.5)$,
Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim ST(0{,}1{,}0.5{,}3)$,
Durum III: $\epsilon_1 \sim ST(0{,}1{,}0.5{,}3)$ ve $\epsilon_2 \sim SN(0{,}1{,}0.5)$,
Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0{,}1)$ (%5 aykırı gözlem ile $x_1 = 20, x_2 = 20$ ve $y = 100$).

Çizelge 4.3 İki bileşenli karma regresyon modeli ve hata terimi dağılımları

İki bileşenli karma model	Hata terimi dağılımı
Normal+Normal (MixregN) *t*+*t* (Mixregt) Normal+*t* (MixregNt)	i numaralı hata terimi dağılımları simetrik durum için kullanılacaktır.
Çarpık Normal+Çarpık Normal (MixregSN) Çarpık *t*+Çarpık *t* (MixregST) Çarpık *t*+Çarpık Normal (MixregSTSN)	ii numaralı hata terimi dağılımları çarpık durum için kullanılacaktır.

Simülasyon sonuçları çizelge 4.4-4.7'de gösterilmektedir. Çizelge 4.4 ve çizelge 4.5'de durum (i) ile verilen hata terimleri kullanılarak MixregNt modeli için elde edilen tahmin sonuçları yer almaktadır. Hata terimlerinin dağılımı normal ($\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$) olduğunda yani Durum I'de normallik varsayımı altında elde edilen tahmin edicilerin (MixregN) en etkin olduğu görülmektedir. Bu durum için Mixregt ve MixregNt modellerinden elde edilen tahmin ediciler benzer sonuçlar vermiştir. Hata terimlerinin dağılımı 3 serbestlik dereceli *t* dağılımına ($\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_3$) sahip olduğunda beklendiği gibi en düşük yan ve MSE değerlerine Mixregt modeli sahiptir. Ancak MixregN modelinden elde edilen tahmin edicilerin MSE ve yan değerlerinin yüksek çıktığı yani kalın kuyruklu hata terimi dağılımına karşı duyarlı olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra MixregNT modelinden elde edilen tahmin ediciler Mixregt modeli ile benzer sonuçlar vermekte olup kalın kuyruklu hata teriminden etkilenmemiştir. Durum III'de yan ve MSE değerlerine göre en iyi sonucu MixregNt modeli verirken, Mixregt modeli benzer davranış göstermiştir. Bunun aksine MixregN modelinden elde edilen tahmin ediciler bozulmuştur. Durum IV'de hata terimlerinin dağılımı normal olduğunda ve veriye %5 oranında aykırı gözlem (Çizelge 4.4'de 10 ve Çizelge 4.5'de 20 aykırı gözlem $x_1 = 20, x_2 = 20$ ve $y = 100$ ile değiştirilmiştir) eklendiğinde MixregN modelinden elde edilen tahmin ediciler durumların neredeyse hepsinde en yüksek yan ve MSE değerlerine sahipken, Mixregt modelinden elde edilen tahmin edicilerde aykırı gözlemlerden etkilenmiştir. Ancak MixregNt modelinden elde edilen tahmin ediciler aykırı gözlemlerden etkilenmemiştir.

Benzer olarak, durum (ii) ile verilen hata terimleri kullanılarak MixregSTSN modelinden elde edilen tahmin ediciler için çizelge 4.6 ve çizelge 4.7'de MSE ve yan değerleri verilmektedir. Durum I'de iki hata teriminin de dağılımı çarpık normal dağılım ($\epsilon_1, \epsilon_2 \sim SN(0,1,0.5)$) olduğunda en iyi performansı MixregSN modelinden elde edilen tahmin ediciler göstermektedir. Ancak iki hata teriminin dağılımı çarpık *t* dağılımı ($\epsilon_1, \epsilon_2 \sim ST(0,1,0.5,3)$) olduğunda MixregSN modelinden elde edilen tahmin ediciler bozulmuştur. Bunun yanı sıra MixregST modelinden elde edilen tahmin ediciler durumların çoğunda en düşük yan ve MSE değerlerine sahiptir. Durum III'de ilk hata terimi dağılımı çarpık *t* ve ikinci hata terimi dağılımı çarpık normal ($\epsilon_1 \sim ST(0,1,0.5,3),\ \epsilon_2 \sim SN(0,1,0.5)$) olduğunda MixregSTSN modelinden elde edilen tahmin edicilerin MSE ve yan değerleri durumların neredeyse hepsinde en küçük çıkmıştır. Bunun aksine MixregSN modelinden elde edilen tahmin ediciler durumların neredeyse hepsinde en yüksek yan ve MSE değerlerine sahiptir. Durum IV'de hata terimlerinin dağılımı normal olduğunda ve veriye %5 oranında aykırı gözlem (Çizelge 4.6'da 10 ve Çizelge 4.7'de 20 aykırı gözlem $x_1 = 20, x_2 = 20$ ve $y = 100$ ile değiştirilmiştir) eklendiğinde bütün tahmin ediciler aykırı gözlemlerden etkilenmiştir. Ayrıca, MixregST ve MixregSTSN modellerinden elde edilen tahmin ediciler, MixregSN modelinden elde edilen tahmin edicilere göre durumların neredeyse hepsinde daha düşük yan ve MSE değerlerine sahiptir.

Simülasyon çalışması sonuçlarından görülmektedir ki, iki bileşen dağılımını farklı dağılımlardan almak tahmin edicilerde iyileşmeye sebep olmuştur. Böylece, gruplardan biri simetrik ve kalın kuyruklu olduğunda, iki bileşenin dağılımının normal dağılım olması yerine bir bileşenin normal ve diğer bileşenin *t* dağılımdan gelmesiyle elde edilen tahmin edicilerin kullanılması önerilebilir. Benzer şekilde, gruplardan biri çarpık ve kalın kuyruklu dağılıma sahipse, iki bileşenin dağılımının çarpık normal dağılım olması yerine, bir bileşenin çarpık normal ve diğer bileşenin çarpık *t* dağılımdan gelmesiyle elde edilen tahmin ediciler kullanılabilir. Ayrıca, iki grubu olan bir veri seti için gruplardan biri simetrik diğeri çarpık dağılıma sahip olabilir. Bu durumda karma dağılımdaki bileşenlerden biri çarpık ve diğeri de simetrik bir dağılım olarak alınabilir. Bu tez çalışmasında bu durum ele alınmamıştır, gelecekte yapılacak çalışmalar arasında yer almaktadır.

Çizelge 4.4 $n = 200$ örneklem hacmi için MixregN, Mixregt ve MixregNt modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri

	MixregN	Mixregt	MixregNt
	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan
	Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$		
$\beta_{10}: 0$	0.0468 (-0.0039)	0.0547 (-0.0038)	0.0468 (-0.0036)
$\beta_{20}: 0$	0.0099 (0.0028)	0.0112 (0.0056)	0.0111 (0.0048)
$\beta_{11}: 1$	0.0457 (-0.0273)	0.0483 (-0.0364)	0.0529 (-0.0573)
$\beta_{21}: -1$	0.0147 (0.0055)	0.0101 (0.0090)	0.0096 (-0.0025)
$\beta_{12}: 1$	0.0414 (-0.0015)	0.0463 (-0.0046)	0.0545 (-0.0353)
$\beta_{22}: -1$	0.0216 (0.0026)	0.0108 (0.0013)	0.0109 (-0.0090)
$w_1: 0.25$	0.0029 (0.0071)	0.0022 (0.0048)	0.0036 (0.0335)
	Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_3$		
$\beta_{10}: 0$	12.7323 (0.2016)	0.0846 (0.0245)	0.1378 (0.0265)
$\beta_{20}: 0$	1.9712 (-0.0228)	0.0146 (-0.0048)	0.0140 (-0.0047)
$\beta_{11}: 1$	10.6545 (0.3274)	0.1037 (-0.0479)	0.1417 (0.0332)
$\beta_{21}: -1$	1.5718 (-0.0867)	0.0128 (-0.0110)	0.0136 (0.0148)
$\beta_{12}: 1$	8.2033 (0.0267)	0.0806 (0.0024)	0.1288 (0.0403)
$\beta_{22}: -1$	2.8037 (0.2205)	0.0143 (-0.0149)	0.0156 (0.0126)
$w_1: 0.25$	0.0250 (-0.0347)	0.0030 (0.0062)	0.0045 (-0.0374)
	Durum III: $\epsilon_1 \sim N(0,1)$ ve $\epsilon_2 \sim t_3$		
$\beta_{10}: 0$	6.5822 (0.0716)	0.0608 (-0.0015)	0.0564 (0.0039)
$\beta_{20}: 0$	0.3372 (-0.0249)	0.0144 (0.0036)	0.0139 (0.0030)
$\beta_{11}: 1$	5.0332 (0.0836)	0.0494 (-0.0387)	0.0459 (-0.0170)
$\beta_{21}: -1$	0.2761 (0.0073)	0.0138 (-0.0185)	0.0133 (-0.0105)
$\beta_{12}: 1$	5.1167 (0.1571)	0.0673 (-0.0496)	0.0647 (-0.0287)
$\beta_{22}: -1$	0.5948 (0.0062)	0.0136 (-0.0213)	0.0134 (-0.0145)
$w_1: 0.25$	0.0120 (0.0025)	0.0039 (0.0352)	0.0029 (0.0174)
	Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ (%5 aykırı gözlem)		
$\beta_{10}: 0$	2.3909 (0.1047)	1.4186 (0.0618)	0.0506 (0.0003)
$\beta_{20}: 0$	0.0149 (0.0029)	0.0110 (0.0022)	0.0173 (0.0036)
$\beta_{11}: 1$	3.1304 (1.4785)	2.7396 (1.4819)	0.1498 (-0.0521)
$\beta_{21}: -1$	0.0799 (0.2483)	0.0241 (0.1065)	0.2815 (0.1407)
$\beta_{12}: 1$	3.2398 (1.5125)	2.8212 (1.5088)	0.1734 (-0.0633)
$\beta_{22}: -1$	0.0834 (0.2492)	0.0246 (0.1078)	0.1636 (0.1285)
$w_1: 0.25$	0.0095 (-0.0943)	0.0062 (-0.0753)	0.0081 (-0.0208)

Çizelge 4.5 $n = 400$ örneklem hacmi için MixregN, Mixregt ve MixregNt modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri

	MixregN	Mixregt	MixregNt
	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan
	Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$		
$\beta_{10}: 0$	0.0202 (-0.0021)	0.0260 (-0.0004)	0.0217 (-0.0003)
$\beta_{20}: 0$	0.0041 (0.0018)	0.0052 (0.0036)	0.0050 (0.0031)
$\beta_{11}: 1$	0.0160 (0.0033)	0.0206 (-0.0062)	0.0188 (-0.0199)
$\beta_{21}: -1$	0.0045 (-0.0035)	0.0053 (0.0018)	0.0051 (-0.0069)
$\beta_{12}: 1$	0.0177 (-0.0019)	0.0254 (-0.0099)	0.0210 (-0.0213)
$\beta_{22}: -1$	0.0038 (-0.0038)	0.0049 (0.0035)	0.0046 (-0.0055)
$w_1: 0.25$	0.0010 (0.0037)	0.0011 (0.0007)	0.0018 (0.0241)
	Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_3$		
$\beta_{10}: 0$	13.4210 (-0.1318)	0.0376 (-0.0066)	0.0473 (-0.0154)
$\beta_{20}: 0$	1.4586 (0.0306)	0.0068 (-0.0021)	0.0066 (-0.0026)
$\beta_{11}: 1$	9.2787 (0.5967)	0.0335 (0.0019)	0.0449 (0.0632)
$\beta_{21}: -1$	1.8295 (0.0194)	0.0063 (0.0015)	0.0079 (0.0314)
$\beta_{12}: 1$	11.8714 (0.4395)	0.0388 (-0.0008)	0.0533 (0.0722)
$\beta_{22}: -1$	0.7543 (0.1106)	0.0064 (0.0024)	0.0082 (0.0308)
$w_1: 0.25$	0.0171 (-0.0596)	0.0014 (0.0040)	0.0037 (-0.0454)
	Durum III: $\epsilon_1 \sim N(0,1)$ ve $\epsilon_2 \sim t_3$		
$\beta_{10}: 0$	7.7436 (0.0036)	0.0247 (0.0066)	0.0240 (0.0060)
$\beta_{20}: 0$	0.3984 (0.0218)	0.0070 (0.0050)	0.0068 (0.0050)
$\beta_{11}: 1$	5.8227 (0.1401)	0.0251 (-0.0372)	0.0206 (-0.0124)
$\beta_{21}: -1$	0.4005 (-0.0086)	0.0062 (-0.0126)	0.0060 (-0.0039)
$\beta_{12}: 1$	6.6747 (0.2501)	0.0244 (-0.0365)	0.0213 (-0.0125)
$\beta_{22}: -1$	0.3341 (-0.0023)	0.0064 (-0.0143)	0.0063 (-0.0060)
$w_1: 0.25$	0.0090 (-0.0070)	0.0021 (0.0289)	0.0015 (0.0077)
	Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ (%5 aykırı gözlem)		
$\beta_{10}: 0$	1.4233 (0.1705)	1.0180 (0.2007)	0.0236 (0.0089)
$\beta_{20}: 0$	0.0079 (0.0102)	0.0048 (0.0045)	0.0045 (0.0042)
$\beta_{11}: 1$	2.9197 (1.5268)	2.5645 (1.4732)	0.0280 (-0.0003)
$\beta_{21}: -1$	0.0774 (0.2583)	0.0162 (0.1023)	0.0450 (0.0842)
$\beta_{12}: 1$	2.7131 (1.4602)	2.6908 (1.5157)	0.0277 (0.0093)
$\beta_{22}: -1$	0.0759 (0.2536)	0.0150 (0.0961)	0.0264 (0.0733)
$w_1: 0.25$	0.0099 (-0.0981)	0.0069 (-0.0817)	0.0036 (-0.0412)

Çizelge 4.6 $n = 200$ örneklem hacmi için MixregSN, MixregST ve MixregSTSN modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri

	MixregSN	MixregST	MixregSTSN
	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan
	Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim SN(0,1,0.5)$		
$\beta_{10}: 0$	0.0396 (0.0145)	0.3796 (0.5558)	0.2090 (0.3916)
$\beta_{20}: 0$	0.0083 (0.0124)	0.0388 (0.1602)	0.0095 (0.0228)
$\beta_{11}: 1$	0.0322 (-0.0016)	0.0481 (-0.0041)	0.0445 (-0.0325)
$\beta_{21}: -1$	0.0080 (-0.0025)	0.0107 (0.0166)	0.0083 (-0.0082)
$\beta_{12}: 1$	0.0366 (-0.0051)	0.0509 (-0.0150)	0.0491 (-0.0357)
$\beta_{22}: -1$	0.0080 (0.0019)	0.0104 (0.0212)	0.0083 (-0.0039)
$w_1: 0.25$	0.0021 (0.0044)	0.0029 (-0.0087)	0.0028 (0.0162)
	Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim ST(0,1,0.5,3)$		
$\beta_{10}: 0$	5.5600 (0.3072)	0.8540 (0.7143)	0.4782 (0.2833)
$\beta_{20}: 0$	1.7060 (-0.0335)	0.0239 (0.0805)	0.0421 (-0.0715)
$\beta_{11}: 1$	5.1535 (0.2173)	0.1600 (0.0246)	0.2281 (-0.1303)
$\beta_{21}: -1$	0.9447 (0.0240)	0.0154 (0.0272)	0.0198 (-0.0147)
$\beta_{12}: 1$	2.9528 (0.0176)	0.1445 (0.0178)	0.2302 (-0.1455)
$\beta_{22}: -1$	3.6893 (-0.0872)	0.0159 (0.0190)	0.0206 (-0.0084)
$w_1: 0.25$	0.0175 (-0.0268)	0.0041 (-0.0128)	0.0084 (0.0444)
	Durum III: $\epsilon_1 \sim ST(0,1,0.5,3)$ ve $\epsilon_2 \sim SN(0,1,0.5)$		
$\beta_{10}: 0$	2.7217 (0.2228)	0.6258 (0.6722)	0.2932 (0.4207)
$\beta_{20}: 0$	0.0555 (-0.0775)	0.0250 (0.1057)	0.0102 (-0.0123)
$\beta_{11}: 1$	2.3168 (0.2017)	0.1033 (0.0327)	0.0921 (-0.0165)
$\beta_{21}: -1$	0.1975 (0.0372)	0.0108 (0.0305)	0.0088 (0.0059)
$\beta_{12}: 1$	2.2086 (0.0959)	0.1158 (0.0228)	0.0958 (-0.0324)
$\beta_{22}: -1$	0.0244 (0.0598)	0.0111 (0.0314)	0.0090 (0.0079)
$w_1: 0.25$	0.0079 (-0.0450)	0.0049 (-0.0369)	0.0031 (-0.0026)
	Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ (%5 aykırı gözlem)		
$\beta_{10}: 0$	2.8415 (-0.5539)	5.7397 (2.1180)	1.7247 (0.5967)
$\beta_{20}: 0$	0.2470 (-0.4804)	0.0437 (-0.1774)	0.1687 (-0.3970)
$\beta_{11}: 1$	3.4886 (1.5398)	2.9568 (1.5342)	3.0075 (1.5224)
$\beta_{21}: -1$	0.0703 (0.2303)	0.0263 (0.1172)	0.0310 (0.1347)
$\beta_{12}: 1$	3.2631 (1.4610)	2.4560 (1.3592)	2.7780 (1.4447)
$\beta_{22}: -1$	0.0784 (0.2423)	0.0278 (0.1211)	0.0347 (0.1435)
$w_1: 0.25$	0.0093 (-0.0928)	0.0113 (-0.1031)	0.0049 (-0.0632)

Çizelge 4.7 $n = 400$ örneklem hacmi için MixregSN, MixregST ve MixregSTSN modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri

	MixregSN	MixregST	MixregSTSN
	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan
	Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim SN(0,1,0.5)$		
$\beta_{10}: 0$	0.0172 (0.0055)	0.3194 (0.5421)	0.1741 (0.3920)
$\beta_{20}: 0$	0.0035 (0.0040)	0.0258 (0.1422)	0.0038 (0.0147)
$\beta_{11}: 1$	0.0145 (-0.0061)	0.0229 (-0.0045)	0.0197 (-0.0334)
$\beta_{21}: -1$	0.0035 (-0.0066)	0.0045 (0.0165)	0.0039 (-0.0122)
$\beta_{12}: 1$	0.0145 (0.0012)	0.0220 (-0.0019)	0.0181 (-0.0235)
$\beta_{22}: -1$	0.0035 (-0.0004)	0.0048 (0.0194)	0.0036 (-0.0065)
$w_1: 0.25$	0.0010 (0.0010)	0.0015 (-0.0147)	0.0013 (0.0126)
	Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim ST(0,1,0.5,3)$		
$\beta_{10}: 0$	9.1023 (0.5460)	0.6374 (0.6651)	0.2101 (0.3311)
$\beta_{20}: 0$	0.7382 (-0.1361)	0.0105 (0.0402)	0.0141 (-0.0717)
$\beta_{11}: 1$	7.2165 (0.2491)	0.0540 (0.0211)	0.0783 (-0.0925)
$\beta_{21}: -1$	0.7558 (0.0446)	0.0078 (0.0307)	0.0091 (-0.0188)
$\beta_{12}: 1$	7.3711 (0.2215)	0.1714 (0.0671)	0.0785 (-0.0720)
$\beta_{22}: -1$	1.9910 (-0.0097)	0.0078 (0.0331)	0.0098 (-0.0157)
$w_1: 0.25$	0.0144 (-0.0534)	0.0025 (-0.0217)	0.0044 (0.0441)
	Durum III: $\epsilon_1 \sim ST(0,1,0.5,3)$ ve $\epsilon_2 \sim SN(0,1,0.5)$		
$\beta_{10}: 0$	1.7316 (0.1760)	0.4115 (0.6026)	0.2035 (0.4153)
$\beta_{20}: 0$	0.0162 (-0.0883)	0.0142 (0.0890)	0.0042 (-0.0102)
$\beta_{11}: 1$	1.9504 (0.1686)	0.0400 (0.0425)	0.0272 (0.0063)
$\beta_{21}: -1$	0.0140 (0.0589)	0.0057 (0.0318)	0.0038 (0.0055)
$\beta_{12}: 1$	1.1483 (0.1871)	0.0426 (0.0430)	0.0303 (0.0114)
$\beta_{22}: -1$	0.0157 (0.0639)	0.0062 (0.0364)	0.0039 (0.0076)
$w_1: 0.25$	0.0053 (-0.0483)	0.0032 (-0.0405)	0.0012 (-0.0037)
	Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ (%5 aykırı gözlem)		
$\beta_{10}: 0$	1.4831 (-0.4157)	7.0063 (2.5017)	1.2509 (0.6932)
$\beta_{20}: 0$	0.2537 (-0.4938)	0.0412 (-0.1874)	0.1635 (-0.3971)
$\beta_{11}: 1$	2.9504 (1.4961)	2.4430 (1.4533)	2.5928 (1.4990)
$\beta_{21}: -1$	0.0792 (0.2631)	0.0245 (0.1325)	0.0311 (0.1548)
$\beta_{12}: 1$	2.9498 (1.4958)	2.3507 (1.4210)	2.4870 (1.4631)
$\beta_{22}: -1$	0.0760 (0.2565)	0.0222 (0.1247)	0.0286 (0.1467)
$w_1: 0.25$	0.0099 (-0.0978)	0.0139 (-0.1165)	0.0051 (-0.0681)

4.5 Dayanıklı Regresyon Yöntemlerine Dayalı Karma Regresyon Modelleri

Bu bölümde dayanıklı regresyon yöntemlerine dayalı karma regresyon modelleri verilecektir. Bu yöntemlerden Bai (2010) ve Bai vd. (2012) tarafından önerilen ve y yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olan M-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli verilecektir. Ancak önerilen bu yöntem x yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olmadığından, bu tez çalışmasında bu yönteme alternatif olarak önerilen x yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olan GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli ele alınacaktır.

4.5.1 M-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli

$\{(\boldsymbol{x}_1, y_1), \dots, (\boldsymbol{x}_n, y_n)\}$ gözlemleri verilmişken hata terimleri normal dağılıma sahip olan karma regresyon modeli için ML tahmin edicisi (3.12) ile verilen log-olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla elde edilir. Burada w_i karma modelin oranını ve $\boldsymbol{\theta}_i = (w_i, \boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i^2)$ olmak üzere $\boldsymbol{\Theta} = \left(\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_g\right)'$ parametre vektörünü göstermektedir. Ancak (3.12) eşitliğinin açık bir çözümü olmadığından EM algoritması kullanılarak ML tahmin edicileri elde edilir. Bölüm 3.2.1'de normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli için EM algoritması verilmiştir. Burada elde edilen tahmin ediciler aykırı gözlemlere ve kalın kuyruklu hata terimlerine karşı duyarlı olduğundan dayanıklı yöntem kullanılması önerilmiştir. Bai (2010) ve Bai v.d. (2012) tarafından regresyon M-tahmin yönteminde olduğu gibi (3.12) eşitliği ile verilen amaç fonksiyonunun dayanıklı bir kriter ile değiştirilmesi fikri kolay olmayacağından, Bölüm 3.2.1'de normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli için verilmiş olan EM algoritmasının M adımında, (3.20) eşitliğinde verilen en küçük kareler kriterinin dayanıklı bir ρ kriteri ile değiştirilmesi önerilmiştir.

Karma regresyon modeli için z_{ij} , $j = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, g$ kayıp değişkeni (3.13) eşitliğindeki gibi tanımlansın. Burada $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n), \boldsymbol{z}_j = \left(z_{1j}, \dots, z_{gj}\right)$ tam veri olmak üzere $\left(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j\right)$ verilmişken (3.15) ifadesindeki tam veri log-olabilirlik fonksiyonun

ikinci terimindeki karesel form dayanıklı regresyon analizinde kullanılan bir ρ fonksiyonu ile değiştirilerek aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} z_{ij}\left(\log(w_i) - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\sigma_i^2)\right) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} z_{ij}\,\rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right). \quad (4.84)$$

Burada parametre tahminlerini yapabilmek için Bai (2010) ve Bai vd. (2012) tarafından bir EM türü algoritma önerilmiştir. Bu algoritmanın yürütülebilmesi için aşağıda verilen tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değerine ihtiyaç duyulur

$$E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j)|y_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} E\left(z_{ij}|y_j\right)\left(\log(w_i) - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\sigma_i^2\right) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} E\left(z_{ij}|y_j\right)\rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right). \quad (4.85)$$

Burada $E\left(z_{ij}|y_j\right)$ koşullu beklenen değeri (3.7) eşitliği kullanılarak hesaplanır.

EM algoritması: $\boldsymbol{\Theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra yukarıda verilen bilgiler kullanılarak EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibi verilir:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}$ verilmişken aşağıdaki koşullu beklenen değer hesaplanır:

$$\hat{z}_{ij}^{(k)} = E\left(z_{ij}\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \frac{\widehat{w}_i^{(k)}\phi\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}, \hat{\sigma}_i^{2(k)}\right)}{\sum_{i=1}^{g}\widehat{w}_i^{(k)}\phi\left(y_j; \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}, \hat{\sigma}_i^{2(k)}\right)} \cdot \tag{4.86}$$

Bu koşullu beklenen değer (4.50) eşitliğinde yerine yazılarak $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = E\left(\ell_c\left(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j\right)\middle|y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ amaç fonksiyonu

$$\begin{aligned} Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = &\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left(\log(w_i) - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\sigma_i^2\right) \\ &- \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}\hat{z}_{ij}^{(k)}\,\rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) \end{aligned} \tag{4.87}$$

olarak elde edilir.

ii) M-adımı: $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun w_i parametresine göre Lagrange çarpanı yardımıyla türevi alınıp sıfıra eşitlenerek, (3.19) eşitliğinin elde edilişine benzer düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\widehat{w}_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}}{n} \tag{4.88}$$

olarak elde edilir.

2. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunda en küçük kareler kriterinin ρ fonksiyonu ile değiştirilmesiyle $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresinin tahmin edicisi

$$\min_{\boldsymbol{\beta}_i} \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \ \rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right) \tag{4.89}$$

amaç fonksiyonunun parametreye göre minimum yapılmasıyla elde edilir. Ayrıca, ρ fonksiyonu türevlenebilir olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \boldsymbol{x}_j \psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right) = 0 \tag{4.90}$$

eşitliğinin $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresine göre çözülmesiyle $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k+1)}$ bulunabilir. Burada $\psi(\cdot) = \rho'(\cdot)$ ve $\hat{\sigma}^{(k)}$ hata terimlerinin dayanıklı bir ölçek tahminidir. Bai (2010) ve Bai vd. (2012) tarafından ψ fonksiyonu için (2.31) ile verilen $c = 1.345$ ayarlama sabiti ile Huber ψ fonksiyonu ve (2.34) ile verilen $c = 4.685$ ayarlama sabiti ile Tukey ψ fonksiyonu alınmıştır.

Böylece (4.90) eşitliğinin düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \boldsymbol{x}_j \psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right) &\approx \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \boldsymbol{x}_j \frac{\psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)}{\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}} \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \boldsymbol{x}_j \, W\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)} \boldsymbol{x}_j \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)
\end{aligned} \tag{4.91}$$

olarak bulunur. Burada

$$W\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right) = \frac{\psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)}{\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}} \quad , \quad \hat{z}_{ij}^{*(k)} = \hat{z}_{ij}^{(k)} W\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)$$

dır. Huber ve Tukey fonksiyonlarının kullanılmasıyla ağırlık fonksiyonları

$$W_{Huber} = \max\left(-c/\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right), \min\left(c/\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right), 1\right)\right), \qquad (4.92)$$

$$W_{Tukey} = \left(1 - \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{c\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)^2\right)^2 \qquad (4.93)$$

olarak elde edilir. Ağırlık tanımlandıktan sonra

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)} \boldsymbol{x}_j \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) = 0$$

eşitliği kullanılarak $\boldsymbol{\beta}_i$ için $(k+1)$. adımdaki tahmin edici aşağıdaki gibi bulunur:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)} \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{x}_j'\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)} \boldsymbol{x}_j y_j\right). \qquad (4.94)$$

3. σ_i^2 parametresi için

$$\hat{\sigma}_i^{2(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)^2 \widehat{w}_{ij}^{(k)}}{\delta \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)}} \qquad (4.95)$$

ölçek M-tahmini (bkz. Maronna vd. 2006) fikrinin bir genişletilmesi olarak Bai (2010) ve Bai vd. (2010) tarafından (4.95) eşitliği ile verilen dayanıklı Tukey ölçek tahmininin kullanılması önerilmiştir. Burada $\delta = 0.5$ ve normalleştirme sabiti $c_N = 1.56$ olmak üzere

$$\widehat{w}_{ij}^{(k)} = \min\left(1 - \left(1 - \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{c_N\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)^2\right)^3, 1\right) \Bigg/ \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)^2$$

olarak alınmıştır. Burada varyanslar eşit kabul edildiğinde $\hat{\sigma}^{2(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}^{2(k+1)} = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g}\hat{z}_{ij}^{(k)}\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)^2\widehat{w}_{ij}^{(k)} \tag{4.96}$$

olarak bulunur.

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k+1)} - \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right\| < \Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

4.5.2 GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli

Bu bölümde, M-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli y yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı, x yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olmadığından x ve y yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olan GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli önerilmiştir. GM-tahmin yönteminin literatürde kullanılan iki formu Mallows (Mallows 1975) ve Schweppe (Krasker ve Welsch 1982) tipi GM-tahmin yöntemleri kullanılacaktır.

4.5.2.1 Mallows tipi GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli

Mallows tipi GM-tahmin yöntemi (2.19) eşitliği kullanılarak karma regresyon modeli için uygulanacaktır. Karma regresyon modeli için z_{ij} , $j = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, g$ kayıp değişkeni (3.13) eşitliğindeki gibi tanımlansın. $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ve $\boldsymbol{z}_j = (z_{1j}, \dots, z_{gj})$ tam veri olmak üzere $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j)$ verilmişken tam veri log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} z_{ij}\left(\log(w_i) - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\sigma_i^2)\right) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} z_{ij}\,\sigma_i w(\boldsymbol{x}_j)\,\rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) \tag{4.97}$$

şeklinde bulunur. Burada $w(\boldsymbol{x}_j)$ ağırlıkları (2.25) eşitliği ile verilen ağırlıklar olmak üzere x yönündeki etkili gözlemleri etkisiz hale getirmektedir. Tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri ise

$$E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j)|y_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} E(z_{ij}|y_j)\left(\log(w_i) - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\sigma_i^2\right) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} E(z_{ij}|y_j)\sigma_i w(\boldsymbol{x}_j)\,\rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) \tag{4.98}$$

olarak elde edilir. Burada $E(z_{ij}|y_j)$ koşullu beklenen değeri (3.7) eşitliği kullanılarak bulunur.

EM algoritmasına başlamadan önce aşağıdaki yöntem kullanılarak $\boldsymbol{x}_j$'ler için $w(\boldsymbol{x}_j), j = 1, \dots, n$ ağırlıkları hesaplanmalıdır. Bu işlem bir kere yapılıp elde edilen ağırlıklar (4.98) eşitliğinde yerine yazıldıktan sonra EM algoritmasının diğer adımları yürütülmelidir. Öncelikle $\boldsymbol{x}_j$'ler için MCD yöntemi kullanılarak dayanıklı $m(\boldsymbol{X})$ konum

ve $C(\boldsymbol{X})$ varyans kovaryans tahminleri bulunmuştur. Bu tahminler kullanılarak (2.24) eşitliğinde verilen Mahalonobis uzaklıkları hesaplandıktan sonra $w(\boldsymbol{x}_j) = \min\left(1, \left(\frac{b}{d_n(\boldsymbol{x}_j)}\right)^{1/2}\right)$ formülü yardımıyla ağırlıklar hesaplanır.

EM algoritması: $\boldsymbol{\Theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra yukarıda verilen bilgiler kullanılarak EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibi yürütülür:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}$ verilmişken (4.86) eşitliği ile verilen koşullu beklenen değer hesaplanır. Bu koşullu beklenen değer (4.98) eşitliğinde yerine yazılarak $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j)\middle| y_j, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} \hat{z}_{ij}^{(k)} \left(\log(w_i) - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log \sigma_i^2\right) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} \hat{z}_{ij}^{(k)}\, \sigma_i w(\boldsymbol{x}_j) \rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right). \quad (4.99)$$

ii) M-adımı: $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q\left(\boldsymbol{\Theta}; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right)$ fonksiyonunun w_i parametresine göre Lagrange çarpanı yardımıyla türevi alınıp sıfıra eşitlenerek (3.19) eşitliğinin elde edilişine benzer düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\widehat{w}_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)}}{n} \quad (4.100)$$

olarak elde edilir.

2. Mallows tipi GM-tahmini kullanılarak $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresinin tahmin edicisi

$$\min_{\boldsymbol{\beta}_i} \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \sigma_i w(\boldsymbol{x}_j) \rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) \tag{4.101}$$

amaç fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresine göre minimum yapılmasıyla bulunur. Ayrıca ρ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} w(\boldsymbol{x}_j) \boldsymbol{x}_j \psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) = 0 \tag{4.102}$$

eşitliğinin $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresine göre çözümünden $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k+1)}$ elde edilir. Burada ψ fonksiyonu için (2.31) ile verilen Huber ψ fonksiyonu ($c = 1.345$) kullanılmıştır. Dolayısıyla (4.102) eşitliğinin düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} w(\boldsymbol{x}_j) \boldsymbol{x}_j \psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) &\approx \\
&\approx \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} w(\boldsymbol{x}_j) \boldsymbol{x}_j \frac{\psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)}{\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}} \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} w(\boldsymbol{x}_j) \boldsymbol{x}_j W\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)} w(\boldsymbol{x}_j) \boldsymbol{x}_j \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right)
\end{aligned} \tag{4.103}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$W\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right) = \frac{\psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)}{\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}} \quad , \quad \hat{z}_{ij}^{*(k)} = \hat{z}_{ij}^{(k)} W\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)$$

olmak üzere Huber fonksiyonu kullanılarak elde edilen $W\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)$ ağırlık fonksiyonu (4.92) eşitliğindeki gibidir. Ağırlık tanımlandıktan sonra

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)}\, w(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) = 0$$

eşitliği kullanılarak

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)} w(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j'\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)} w(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j y_j\right) \tag{4.104}$$

olarak elde edilir.

3. σ_i^2 ölçek parametresi için tahmin edici

$$\min_{\sigma_i} \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \left[\rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) + a\right]\sigma_i \tag{4.105}$$

amaç fonksiyonunun σ_i parametresine göre minimum yapılmasıyla bulunur. Ya da ρ fonksiyonu türevlenebilir olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) + \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) \frac{-\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)}{\sigma_i^2} \sigma_i + \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} a = 0 \tag{4.106}$$

eşitliğinin σ_i^2 parametresine göre çözülmesiyle $\hat{\sigma}_i^{2(k+1)}$ bulunur. Buradan (4.106) eşitliğinin düzenlenmesiyle

$$a \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \left[\psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i\right)}{\sigma_i} - \rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right)\right]$$

ve k. parametre tahminlerinin yerine yazılmasıyla $\hat{\sigma}_i^{2(k+1)}$ tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}_i^{2(k+1)} = \frac{\hat{\sigma}_i^{2(k)}}{a \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)}} \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \left(\psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right) \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)}{\hat{\sigma}_i^{(k)}} - \rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)\right) = \frac{\hat{\sigma}_i^{2(k)}}{a \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)}} \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \chi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right) \tag{4.107}$$

olarak bulunur. Burada

$$\chi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right) = \psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right) \frac{\left(y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}\right)}{\hat{\sigma}_i^{(k)}} - \rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right),$$

$$a = \frac{n-p}{n} E_{\Phi}\left(\chi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)\right)$$

dır. Huber fonksiyonunun kullanılmasıyla a sabiti için (2.12) eşitliği ile verilen değer kullanılır. Eğer varyanslar eşit kabul edilirse $\hat{\sigma}^{2(k+1)}$ tahmin edicisi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\hat{\sigma}^{2(k+1)} = \frac{\hat{\sigma}^{2(k)}}{an} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{g} \hat{z}_{ij}^{(k)} \chi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}} \right). \tag{4.108}$$

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\| \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k+1)} - \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)} \right\| < \Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

4.5.2.2 Schweppe tipi GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli

Bu bölümde, karma regresyon modeli için (2.21) eşitliği ile verilen Schweppe tipi GM-tahmin yöntemi kullanılacaktır. Karma regresyon modeli için z_{ij} , $j = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, g$ kayıp değişkeni (3.13) eşitliğindeki gibi tanımlansın. $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ve $\boldsymbol{z}_j = (z_{1j}, \dots, z_{gj})$ tam veri olmak üzere $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j)$ verilmişken tam veri log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j) = & \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{g} z_{ij} \left(\log(w_i) - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\sigma_i^2) \right) \\ & - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{g} z_{ij}\, \sigma_i w^2(\boldsymbol{x}_j)\, \rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j' \boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i w(\boldsymbol{x}_j)} \right) \end{aligned} \tag{4.109}$$

olarak elde edilir. Burada x yönündeki etkili gözlemlerin etkisini (2.25) eşitliği ile verilen $w(\boldsymbol{x}_j)$ ağırlıkları ortadan kaldırmaktadır. Tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri ise

$$E\left(\ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j) | y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{g} E\left(z_{ij} | y_j\right) \left(\log(w_i) - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log \sigma_i^2 \right)$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} E(z_{ij}|y_j)\sigma_i w^2(\boldsymbol{x}_j)\,\rho\left(\frac{y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i w(\boldsymbol{x}_j)}\right) \qquad (4.110)$$

şeklinde bulunur. Burada $E(z_{ij}|y_j)$ koşullu beklenen değeri (3.7) eşitliği kullanılarak bulunur. Mallows tipi GM-tahmin yönteminin adımlarına benzer olarak $\boldsymbol{x}_j$ için ağırlıklar hesaplanıp (4.110) eşitliğinde yerine yazılır.

EM algoritması: $\boldsymbol{\Theta}$ için başlangıç değeri $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ ve durdurma koşulu Δ belirlendikten sonra yukarıda verilen bilgiler kullanılarak EM algoritmasının E ve M adımları aşağıdaki gibi verilir:

i) E-adımı: $(k+1)$. iterasyon için $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}$ verilmişken (4.86) eşitliği ile verilen koşullu beklenen değeri hesaplanır. Bu koşullu beklenen değer (4.110) eşitliğinde yerine yazılarak $Q(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}) = E(\ell_c(\boldsymbol{\Theta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}_j)|y_j,\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)})$ amaç fonksiyonu

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}) = &\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} \hat{z}_{ij}^{(k)}\left(\log(w_i)-\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log\sigma_i^2\right) \\ &-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} \hat{z}_{ij}^{(k)}\,\sigma_i w^2(\boldsymbol{x}_j)\rho\left(\frac{y_j-\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i w(\boldsymbol{x}_j)}\right) \end{aligned} \qquad (4.111)$$

olarak bulunur.

ii) M-adımı: $Q(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)})$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$. parametre tahminleri hesaplanır:

1. $Q(\boldsymbol{\Theta};\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)})$ fonksiyonunun w_i parametresine göre Lagrange çarpanı yardımıyla türevi alınıp sıfıra eşitlenerek (3.19) eşitliğindeki gibi benzer düzenlemeler yapıldıktan sonra $\widehat{w}_i^{(k+1)}$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\widehat{w}_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)}}{n}. \tag{4.112}$$

2. Schweppe tipi GM-tahmin yöntemi kullanılarak $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresinin tahmin edicisi

$$\min_{\boldsymbol{\beta}_i} \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \sigma_i w^2(\boldsymbol{x}_j) \rho\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i w(\boldsymbol{x}_j)}\right) \tag{4.113}$$

amaç fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}_i$ parametresine göre minimum yapılmasıyla elde edilir. Ayrıca, ρ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} w(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j \, \psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i w(\boldsymbol{x}_j)}\right) = 0 \tag{4.114}$$

eşitliğinin çözümünden $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k+1)}$ elde edilir. Burada ψ fonksiyonu için (2.31) ile verilen Huber ψ fonksiyonu ($c = 1.345$) kullanılmıştır. Böylece (4.114) eşitliğinin düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \, w(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j \psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i w(\boldsymbol{x}_j)}\right) &\approx \\
&\approx \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \, w(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j \frac{\psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)} w(\boldsymbol{x}_j)}\right)}{\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}} \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{(k)} \, w(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j \, W\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)} w(\boldsymbol{x}_j)}\right)\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)} w(\boldsymbol{x}_j) \, \boldsymbol{x}_j \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right)
\end{aligned} \tag{4.115}$$

olarak elde edilir. Burada

$$W\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)} w(\boldsymbol{x}_j)}\right) = \frac{\psi\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)} w(\boldsymbol{x}_j)}\right)}{\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}} \quad , \quad \hat{z}_{ij}^{*(k)} = \hat{z}_{ij}^{(k)} W\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)$$

olmak üzere Huber fonksiyonu kullanılarak elde edilen $W\left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}\right)$ ağırlık fonksiyonu (4.92) eşitliğindeki gibi elde edilir. Ağırlık tanımlandıktan sonra

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)} w(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j \left(\frac{y_j - \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\beta}_i}{\sigma_i}\right) = 0$$

eşitliği kullanılarak

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)} w(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j'\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{ij}^{*(k)} w(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j y_j\right). \qquad (4.116)$$

olarak elde edilir:

3. σ_i^2 parametresi için Mallows tipi GM-tahmin yöntemi ile elde edilmiş olan ve (4.107) eşitliği ile verilen tahmin edici kullanılacaktır. Ayrıca, varyanslar eşit kabul edilirse $\hat{\sigma}^{2(k+1)}$ için (4.108) eşitliği ile verilen tahmin edici kullanılır.

iii) E ve M adımları yakınsaklık kriteri $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k+1)} - \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right\| < \Delta$ sağlanana kadar yürütülür.

4.6 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, simülasyon çalışması ile Bai (2010) ve Bai vd. (2012) tarafından önerilen M-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli için elde edilen tahmin edicilerin (MixregM-Huber ve MixregM-Tukey) performansı ile bu tez çalışmasında önerilen x yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olan Mallows ve Schweppe tipi GM tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modelleri için elde edilen tahmin edicilerin (MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe) performansı (4.33) ve (4.34) eşitlikleri yardımıyla hesaplanan yan ve MSE değerlerine göre karşılaştırılacaktır. Simülasyon çalışması için örneklem hacmi $n = 200{,}400$ ve tekrar sayısı 500 olarak alınmıştır. Bütün simülasyon çalışmaları MATLAB R2013a programı kullanılarak yürütülmüştür.

Örnek 4.3. Simülasyon çalışması için $\{(x_j, y_j), j = 1, \dots, n\}$ verisi aşağıda verilen iki bileşenli karma regresyon modeli kullanılarak üretilmiştir (Bai 2010)

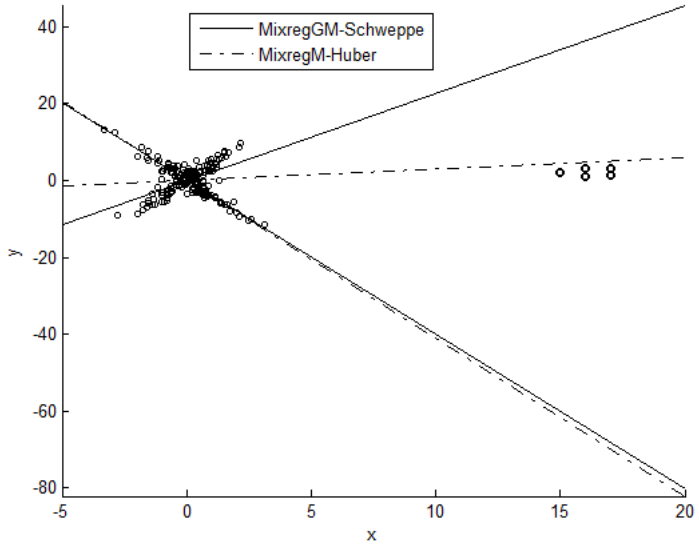
$$y = \begin{cases} 0 + 4x + \epsilon_1\,, & z = 1\,, \\ 0 - 4x + \epsilon_2\,, & z = 2\,, \end{cases}$$

burada $P(z = 1) = 0.5 = w_1$ ve $x \sim N(0{,}1)$ dır. Ayrıca model katsayıları $\beta_1 = (\beta_{10}, \beta_{11})' = (0{,}4)'$ ve $\beta_2 = (\beta_{20}, \beta_{21})' = (0, -4)'$ dır.

Hata terimlerinin dağılımı için aşağıda verilen dört durum ele alınacaktır:

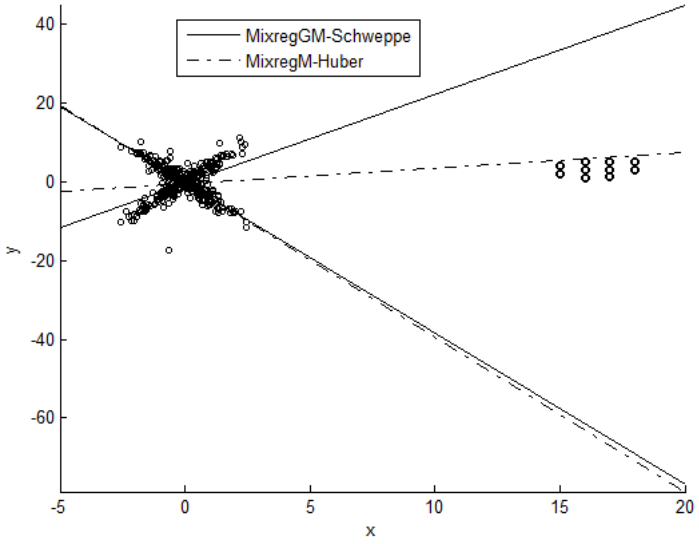
Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0{,}1)$, standart normal dağılım,
Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_4$, 4 serbestlik dereceli *t* dağılımı,
Durum III: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim 0.95N(0{,}1) + 0.05N(0{,}25)$, bozulmuş normal dağılımın karması,
Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0{,}1)$ ve x yönünde aykırı gözlem durumu ($n = 200$ için 5 ve $n = 400$ için 10 etkili gözlem).

Durum IV için etkili gözlemler şekil 4.1 ve şekil 4.2 ile gösterilmiştir. Burada şekil 4.1 ile verilen grafikte $n = 200$ örneklem hacmi için x yönünde 5 etkili gözlem $(x, y) = \big((15{,}2),\ (16{,}1),\ (16{,}3),\ (17{,}1.5),\ (17{,}3)\big)$ eklenerek bir simülasyon çalışması sonucunda elde edilen saçılım grafiği ile Schweppe tipi GM-tahmin ve M-tahmin (Huber fonksiyonu ile) yöntemleri ile elde edilen uydurulmuş doğrular gösterilmiştir. Buradan MixregM-Huber modelinden elde edilen tahmin edicilerin x yönündeki aykırı gözlemlerden etkilendiği, ancak MixregGM-Schweppe modelinden elde edilen tahmin edicilerin çok fazla etkilenmediği görülmektedir.



Şekil 4.1 $n = 200$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Schweppe ve MixregM-Huber modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği

Benzer şekilde, $n = 400$ örneklem hacmi için x yönünde 10 etkili gözlem $(x, y) = \big((15{,}2),\ (15{,}4),\ (16{,}1),\ (16{,}3),\ (16{,}5),\ (17{,}1.5),\ (17{,}3),\ (17{,}5),\ (18{,}3),\ (18{,}5)\big)$ şekil 4.2'de verilen grafikteki gibi eklenerek bir simülasyon çalışması sonucunda elde edilen saçılım grafiği ile Schweppe tipi GM-tahmin ve M-tahmin (Huber fonksiyonu ile) yöntemleri ile elde edilen uydurulmuş doğrular gösterilmiştir. Benzer sonuçlar $n = 400$ örnek hacmi için de elde edilmiştir. MixregM-Huber modelinden elde edilen tahmin edicilerin x yönündeki aykırı gözlemlerden etkilendiği, ancak MixregGM-Schweppe yöntemi ile elde edilen tahmin edicilerin çok fazla etkilenmediği görülmektedir.



Şekil 4.2 $n = 400$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Schweppe ve MixregM-Huber modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği

Simülasyon çalışması sonucunda elde edilen parametre tahminlerinin yan ve MSE değerleri çizelge 4.8 ve çizelge 4.9'da gösterilmektedir. Hata terimlerinin dağılımı için Durum I, II ve III varsayıldığında MixregM-Huber, MixregM-Tukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modellerinden elde edilen tahmin ediciler $n = 200$ ve 400 örneklem hacimleri için benzer sonuçlar vermiştir. Ancak Durum IV'de yani hataların dağılımı normal ve veride x yönünde aykırı gözlem ($n = 200$ örneklem hacmi için 5 ve $n = 400$ örneklem hacmi için 10) olduğunda, MixregM-Huber ve MixregM-Tukey modellerinden elde edilen tahmin ediciler x yönündeki aykırı gözlemlere karşı duyarlı olduğundan bozulmuşlardır. Ancak, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modellerinden elde edilen tahmin edicilerin yan ve MSE değerleri diğer tahmin edicilere göre daha düşüktür.

Çizelge 4.8 $n = 200$ örneklem hacmi için MixregM-Huber, MixregM-Tukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri

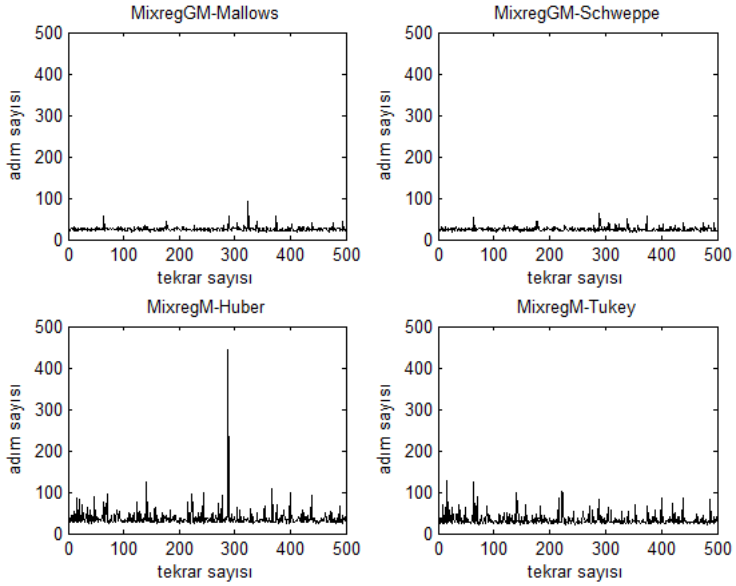
	MixregM-Huber	MixregM-Tukey	MixregGM-Mallows	MixregGM-Schweppe
	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan
	Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$			
$\beta_{10}: 0$	0.0119 (0.0008)	0.0113 (0.0012)	0.0118 (0.0019)	0.0118 (0.0013)
$\beta_{20}: 0$	0.0126 (0.0024)	0.0122 (0.0030)	0.0127 (0.0017)	0.0127 (0.0019)
$\beta_{11}: 4$	0.0113 (-0.0101)	0.0108 (-0.0094)	0.0114 (-0.0097)	0.0115 (-0.0099)
$\beta_{21}: -4$	0.0120 (0.0058)	0.0117 (0.0074)	0.0120 (0.0065)	0.0120 (0.0057)
$w_1: 0.5$	0.0016 (0.0020)	0.0016 (0.0019)	0.0016 (0.0017)	0.0016 (0.0017)
	Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_4$			
$\beta_{10}: 0$	0.0182 (0.0027)	0.0211 (0.0006)	0.0185 (0.0039)	0.0184 (0.0042)
$\beta_{20}: 0$	0.0181 (0.0065)	0.0251 (0.0073)	0.0192 (0.0049)	0.0191 (0.0047)
$\beta_{11}: 4$	0.0159 (0.0089)	0.0185 (0.0175)	0.0167 (0.0021)	0.0165 (0.0018)
$\beta_{21}: -4$	0.0145 (-0.0022)	0.0188 (-0.0090)	0.0169 (0.0084)	0.0165 (0.0084)
$w_1: 0.5$	0.0016 (-0.0021)	0.0016 (-0.0021)	0.0016 (-0.0025)	0.0016 (-0.0025)
	Durum III: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim 0.95N(0,1) + 0.05N(0,25)$			
$\beta_{10}: 0$	0.0135 (0.0026)	0.0152 (-0.0001)	0.0150 (0.0033)	0.0149 (0.0035)
$\beta_{20}: 0$	0.0161 (0.0050)	0.0176 (0.0055)	0.0170 (0.0045)	0.0170 (0.0044)
$\beta_{11}: 4$	0.0124 (0.0101)	0.0139 (0.0140)	0.0134 (-0.0009)	0.0130 (-0.0008)
$\beta_{21}: -4$	0.0132 (-0.0105)	0.0145 (-0.0127)	0.0146 (0.0036)	0.0143 (0.0033)
$w_1: 0.5$	0.0015 (-0.0005)	0.0015 (-0.0005)	0.0018 (-0.0008)	0.0018 (-0.0008)
	Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ (5 aykırı gözlem)			
$\beta_{10}: 0$	0.2043 (-0.1735)	0.1860 (-0.1685)	0.0643 (-0.0681)	0.0628 (-0.0686)
$\beta_{20}: 0$	0.0194 (0.0025)	0.0179 (0.0025)	0.0158 (0.0015)	0.0157 (0.0018)
$\beta_{11}: 4$	13.5129 (-3.6757)	13.3367 (-3.6517)	3.1684 (-1.7710)	2.8973 (-1.6914)
$\beta_{21}: -4$	0.0172 (-0.0285)	0.0162 (-0.0291)	0.0171 (0.0403)	0.0172 (0.0423)
$w_1: 0.5$	0.0123 (0.0964)	0.0117 (0.0938)	0.0020 (-0.0071)	0.0021 (-0.0116)

Çizelge 4.9 $n = 400$ örneklem hacmi için MixregM-Huber, MixregM-Tukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri

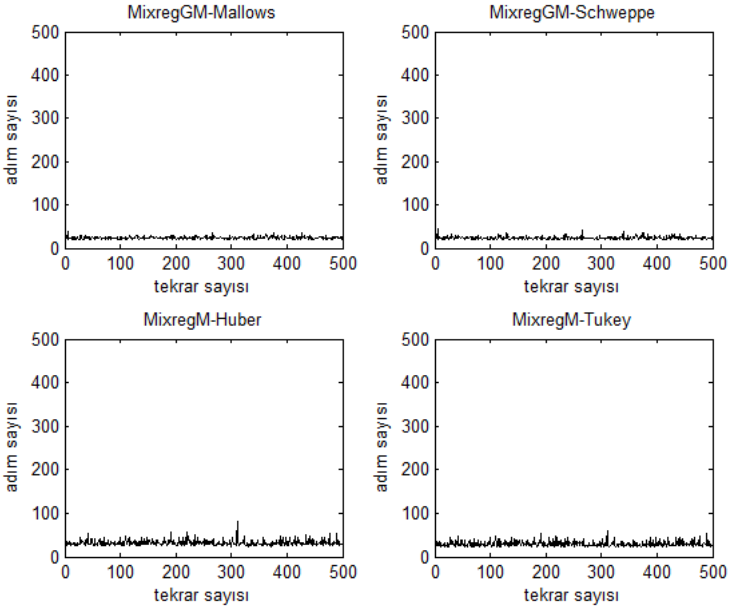
	MixregM-Huber	MixregM-Tukey	MixregGM-Mallows	MixregGM-Schweppe
	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan
	Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$			
$\beta_{10}: 0$	0.0058 (0.0031)	0.0054 (0.0035)	0.0057 (0.0031)	0.0057 (0.0031)
$\beta_{20}: 0$	0.0063 (-0.0009)	0.0059 (-0.0015)	0.0063 (-0.0010)	0.0063 (-0.0009)
$\beta_{11}: 4$	0.0053 (-0.0023)	0.0050 (-0.0031)	0.0054 (-0.0019)	0.0055 (-0.0021)
$\beta_{21}: -4$	0.0059 (-0.0013)	0.0056 (-0.0007)	0.0059 (-0.0012)	0.0059 (-0.0013)
$w_1: 0.5$	0.0008 (0.0012)	0.0008 (0.0012)	0.0008 (0.0012)	0.0008 (0.0012)
	Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_4$			
$\beta_{10}: 0$	0.0090 (0.0029)	0.0120 (0.0063)	0.0094 (0.0042)	0.0094 (0.0042)
$\beta_{20}: 0$	0.0086 (-0.0053)	0.0107 (-0.0051)	0.0089 (-0.0056)	0.0089 (-0.0055)
$\beta_{11}: 4$	0.0066 (0.0138)	0.0094 (0.0222)	0.0070 (0.0063)	0.0068 (0.0062)
$\beta_{21}: -4$	0.0073 (-0.0036)	0.0084 (-0.0109)	0.0076 (0.0042)	0.0075 (0.0044)
$w_1: 0.5$	0.0010 (-0.0002)	0.0010 (-0.0002)	0.0010 (-0.0002)	0.0010 (-0.0002)
	Durum III: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim 0.95N(0,1) + 0.05N(0,25)$			
$\beta_{10}: 0$	0.0072 (0.0002)	0.0085 (0.0005)	0.0075 (0.0008)	0.0074 (0.0008)
$\beta_{20}: 0$	0.0077 (-0.0077)	0.0099 (-0.0077)	0.0079 (-0.0087)	0.0078 (-0.0087)
$\beta_{11}: 4$	0.0066 (0.0109)	0.0072 (0.0133)	0.0066 (-0.0027)	0.0065 (-0.0020)
$\beta_{21}: -4$	0.0064 (-0.0095)	0.0081 (-0.0157)	0.0072 (0.0015)	0.0070 (0.0015)
$w_1: 0.5$	0.0008 (-0.0006)	0.0008 (-0.0005)	0.0009 (-0.0003)	0.0009 (-0.0003)
	Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ (10 aykırı gözlem)			
$\beta_{10}: 0$	0.1067 (-0.1820)	0.1024 (-0.1802)	0.0330 (-0.0777)	0.0331 (-0.0791)
$\beta_{20}: 0$	0.0089 (0.0051)	0.0083 (0.0052)	0.0082 (0.0018)	0.0083 (0.0017)
$\beta_{11}: 4$	13.0840 (-3.6171)	12.9210 (-3.5944)	3.1303 (-1.7644)	2.8640 (-1.6868)
$\beta_{21}: -4$	0.0080 (-0.0276)	0.0077 (-0.0286)	0.0081 (0.0368)	0.0084 (0.0388)
$w_1: 0.5$	0.0090 (0.0878)	0.0087 (0.0863)	0.0011 (-0.0099)	0.0012 (-0.0143)

Önerilen EM algoritmasının yakınsaklık durumunu incelemek için her bir simülasyon çalışmasının adım sayıları şekil 4.3 ve şekil 4.4'de verilmiştir. Bu şekiller sadece Durum IV'de ele alınan aykırı gözlem modeli ve $n = 200, 400$ örneklem hacmi için 500 tekrar sonucunda simülasyon çalışmasında ele alınan bütün tahmin edicilerin adım sayılarını göstermektedir. Bu şekillerden anlaşıldığı gibi önerilen EM benzeri algoritma yakınsamaktadır. Bu çalışmada GM-tahmin yöntemi için önerilmiş olan algoritmanın adım sayısı, M-tahmin yöntemi için Bai (2010) ve Bai vd. (2012) tarafından önerilen

algoritmanın adım sayısından daha azdır. Bu durum her iki örneklem hacmi için gözlenmiştir.



Şekil 4.3 $n = 200$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Mallows, MixregGM-Schweppe, MixregM-Huber ve MixregM-Tukey modelleri tahmin edicilerinin adım sayıları



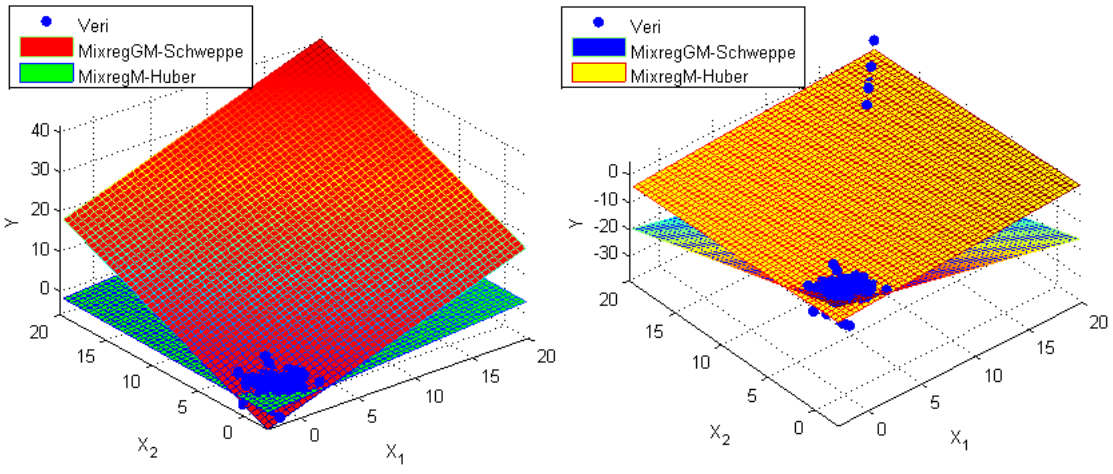
Şekil 4.4 $n = 400$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Mallows, MixregGM-Schweppe, MixregM-Huber ve MixregM-Tukey modelleri tahmin edicilerinin adım sayıları

Örnek 4.4. Simülasyon çalışması için $\{(x_{1j}, x_{2j}, y_j), j = 1, \ldots, n\}$ verisi Örnek 4.1'de verilen iki bileşenli karma regresyon modelinden üretilmiştir.

Hata terimlerinin dağılımı için aşağıdaki dört durum düşünülmüştür:

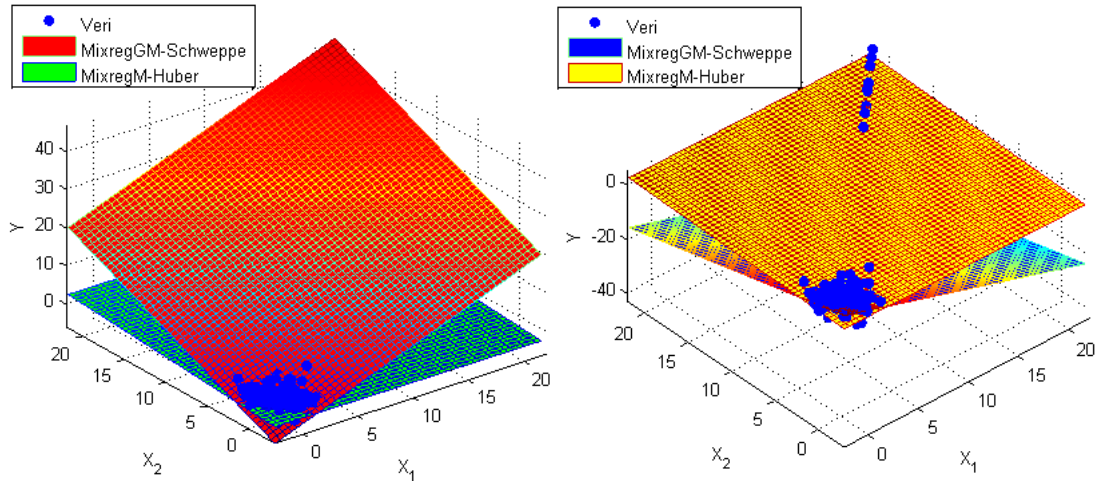
Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$, standart normal dağılım,
Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_3$, 3 serbestlik dereceli t dağılımı,
Durum III: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim 0.95N(0,1) + 0.05N(0,25)$, bozulmuş normal dağılımın karması,
Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ ve x yönünde aykırı gözlem durumu ($n = 200$ için 5 ve $n = 400$ için 10 etkili gözlem).

Durum IV'de verilen hata modelini ve etkili gözlemleri örneklemek için şekil 4.5 ve şekil 4.6 ile bir simülasyon çalışmasının sonuçları yer almaktadır. Şekil 4.5 ile verilen grafikte $n = 200$ örneklem hacmi için x yönünde 5 etkili gözlem $(x_1, x_2, y) = \big((15,15,2),\ (16,16,4),\ (17,17,1.5),\ (18,18,3),\ (20,20,4)\big)$ eklenerek saçılım grafiği ile MixregGM-Schweppe ve MixregM-Huber modelleri için elde edilen uydurulmuş düzlemler gösterilmiştir. Buradan MixregM-Huber modelinden elde edilen tahmin edicilerin x yönündeki aykırı gözlemlerden etkilendiği, ancak MixregGM-Schweppe modelinden elde edilen tahmin edicilerin çok fazla etkilenmediği görülmektedir.



Şekil 4.5 $n = 200$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumu

Benzer olarak, şekil 4.6'da $n = 400$ örneklem hacmi için, x yönünde 10 etkili gözlem $(x_1, x_2, y) = \big((15{,}15{,}2),\ (16{,}16{,}3),\ (17{,}17{,}1.5),\ (18{,}18{,}3),\ (18{,}18{,}4),\ (19{,}19{,}2),\ (20{,}20{,}1),\ (20{,}20{,}4),\ (21{,}21{,}3),\ (22{,}22{,}2)\big)$ veriye eklenerek saçılım grafiği ile MixregGM-Schweppe ve MixregM-Huber modellerinden elde edilen iki doğru için uydurulmuş düzlemler gösterilmiştir. MixregM-Huber modelinden elde edilen tahmin edicilerin x yönündeki aykırı gözlemlerden etkilendiği, ancak MixregGM-Schweppe modelinden elde edilen tahmin edicilerin çok fazla etkilenmediği görülmektedir.



Şekil 4.6 $n = 400$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumu

Çizelge 4.10 ve çizelge 4.11'de Örnek 4.4'de verilen simülasyon çalışması sonucunda elde edilen parametre tahminlerinin yan ve MSE değerleri verilmektedir. Hata terimlerinin dağılımı normal, kalın kuyruklu dağılım ve bulaşık dağılım (Durum I, II ve III) olduğunda MixregM-Huber, MixregM-Tukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modellerinden elde edilen tahmin ediciler $n = 200$ ve 400 örneklem hacimleri için benzer sonuçlar vermiştir. Ancak, Durum IV'de hataların dağılımı normal ve veride x yönünde aykırı gözlem ($n = 200$ örneklem hacmi için 5 ve $n = 400$ örneklem hacmi için 10) olduğunda, MixregM-Huber ve MixregM-Tukey modellerinden elde edilen tahmin edicilerin yan ve MSE değerleri diğer tahmin edicilere göre daha yüksek çıkmıştır. Bunun aksine, GM-Schweppe ve GM-Mallows modellerinden elde edilen tahmin ediciler x yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olduğundan diğer tahmin ediciler gibi aykırı gözlemlerden etkilenmemiştir.

Çizelge 4.10 $n = 200$ örneklem hacmi için MixregM-Huber, MixregM-Tukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri

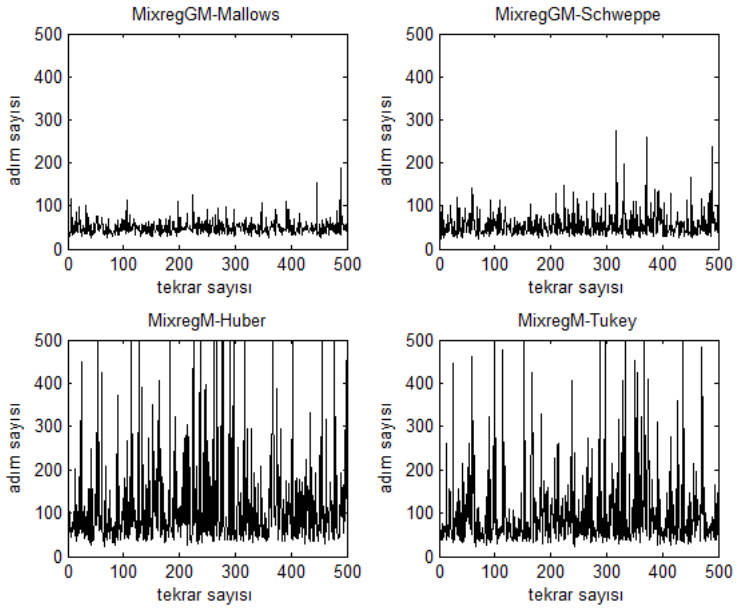
	MixregM-Huber		MixregM-Tukey		MixregGM-Mallows		MixregGM-Scweppe	
	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan
	Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$							
$\beta_{10}: 0$	0.0556	(-0.0136)	0.0523	(-0.0122)	0.0533	(-0.0127)	0.0532	(-0.0131)
$\beta_{20}: 0$	0.0098	(0.0033)	0.0092	(0.0028)	0.0096	(0.0034)	0.0095	(0.0037)
$\beta_{11}: 1$	0.0512	(0.0218)	0.0553	(0.0181)	0.0448	(0.0265)	0.0452	(0.0271)
$\beta_{21}: -1$	0.0095	(-0.0060)	0.0092	(-0.0069)	0.0087	(-0.0055)	0.0087	(-0.0051)
$\beta_{12}: 1$	0.0534	(-0.0023)	0.0558	(-0.0066)	0.0473	(0.0007)	0.0478	(0.0010)
$\beta_{22}: -1$	0.0098	(0.0031)	0.0097	(0.0011)	0.0095	(0.0067)	0.0095	(0.0067)
$w_1: 0.25$	0.0039	(0.0024)	0.0041	(0.0046)	0.0028	(0.0011)	0.0028	(0.0010)
	Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_3$							
$\beta_{10}: 0$	0.0940	(-0.0111)	0.1061	(-0.0222)	0.1307	(-0.0207)	0.1316	(-0.0179)
$\beta_{20}: 0$	0.0208	(-0.0007)	0.0213	(0.0028)	0.0223	(-0.0017)	0.0167	(-0.0027)
$\beta_{11}: 1$	0.3679	(-0.2411)	0.3694	(-0.2376)	0.2932	(-0.2318)	0.2491	(-0.1867)
$\beta_{21}: -1$	0.0238	(-0.0450)	0.0254	(-0.0596)	0.0329	(0.0055)	0.0174	(-0.0089)
$\beta_{12}: 1$	0.3597	(-0.2580)	0.3648	(-0.2526)	0.3032	(-0.2741)	0.2476	(-0.2372)
$\beta_{22}: -1$	0.0247	(-0.0466)	0.0280	(-0.0608)	0.0463	(0.0119)	0.0213	(-0.0048)
$w_1: 0.25$	0.0333	(0.1002)	0.0290	(0.0971)	0.0130	(0.0487)	0.0104	(0.0429)
	Durum III: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim 0.95N(0,1) + 0.05N(0,25)$							
$\beta_{10}: 0$	0.0681	(0.0088)	0.0857	(0.0107)	0.0942	(0.0080)	0.0857	(0.0026)
$\beta_{20}: 0$	0.0107	(-0.0008)	0.0113	(-0.0002)	0.0289	(0.0058)	0.0292	(0.0060)
$\beta_{11}: 1$	0.0918	(0.0054)	0.1102	(0.0099)	0.1854	(-0.1174)	0.1467	(-0.1218)
$\beta_{21}: -1$	0.0122	(-0.0064)	0.0125	(-0.0141)	0.0235	(0.0168)	0.0229	(0.0154)
$\beta_{12}: 1$	0.1088	(-0.0269)	0.1483	(-0.0460)	0.1963	(-0.1823)	0.1842	(-0.1746)
$\beta_{22}: -1$	0.0116	(-0.0088)	0.0118	(-0.0117)	0.0152	(0.0158)	0.0149	(0.0140)
$w_1: 0.25$	0.0061	(0.0089)	0.0058	(0.0126)	0.0063	(0.0106)	0.0062	(0.0114)
	Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ (5 aykırı gözlem)							
$\beta_{10}: 0$	0.3503	(-0.0404)	0.2706	(-0.0600)	0.0611	(-0.0179)	0.0612	(-0.0136)
$\beta_{20}: 0$	0.0971	(-0.0022)	0.1250	(0.0030)	0.0128	(0.0003)	0.0129	(0.0007)
$\beta_{11}: 1$	2.1562	(-1.2028)	2.3962	(-1.3143)	0.5132	(-0.5245)	0.4968	(-0.4955)
$\beta_{21}: -1$	0.8802	(0.7992)	0.8348	(0.7484)	0.0145	(-0.0446)	0.0145	(-0.0434)
$\beta_{12}: 1$	2.5613	(-1.4266)	2.7394	(-1.5047)	0.5371	(-0.5470)	0.5244	(-0.5190)
$\beta_{22}: -1$	1.0061	(0.8581)	0.9528	(0.8031)	0.0167	(-0.0528)	0.0166	(-0.0506)
$w_1: 0.25$	0.0707	(0.1609)	0.0777	(0.2008)	0.0228	(0.1154)	0.0222	(0.1100)

Çizelge 4.11 $n = 400$ örneklem hacmi için MixregM-Huber, MixregM-Tukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri

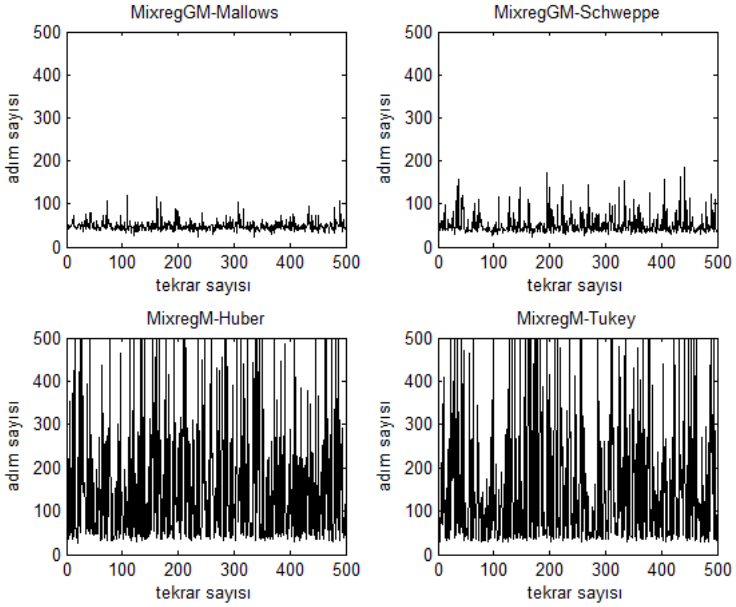
	MixregM-Huber	MixregM-Tukey	MixregGM-Mallows	MixregGM-Scweppe
	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan	MSE Yan
	Durum I: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$			
$\beta_{10}: 0$	0.0205 (-0.0048)	0.0196 (-0.0047)	0.0205 (-0.0030)	0.0206 (-0.0030)
$\beta_{20}: 0$	0.0043 (-0.0006)	0.0041 (-0.0013)	0.0043 (-0.0006)	0.0043 (-0.0006)
$\beta_{11}: 1$	0.0218 (0.0034)	0.0213 (0.0022)	0.0198 (0.0054)	0.0197 (0.0054)
$\beta_{21}: -1$	0.0045 (0.0051)	0.0045 (0.0051)	0.0046 (0.0055)	0.0047 (0.0059)
$\beta_{12}: 1$	0.0215 (0.0057)	0.0214 (0.0032)	0.0201 (0.0067)	0.0201 (0.0067)
$\beta_{22}: -1$	0.0045 (-0.0020)	0.0044 (-0.0023)	0.0044 (-0.0012)	0.0044 (-0.0011)
$w_1: 0.25$	0.0014 (0.0003)	0.0014 (0.0007)	0.0012 (-0.0007)	0.0012 (-0.0007)
	Durum II: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim t_3$			
$\beta_{10}: 0$	0.0415 (0.0177)	0.0489 (0.0151)	0.0523 (0.0129)	0.0504 (0.0122)
$\beta_{20}: 0$	0.0080 (-0.0042)	0.0090 (-0.0045)	0.0071 (-0.0008)	0.0071 (-0.0011)
$\beta_{11}: 1$	0.2600 (-0.2071)	0.2941 (-0.2218)	0.2283 (-0.3035)	0.2086 (-0.2734)
$\beta_{21}: -1$	0.0105 (-0.0447)	0.0147 (-0.0602)	0.0090 (-0.0006)	0.0084 (-0.0044)
$\beta_{12}: 1$	0.2644 (-0.2324)	0.3023 (-0.2507)	0.2456 (-0.3275)	0.2168 (-0.2911)
$\beta_{22}: -1$	0.0104 (-0.0479)	0.0131 (-0.0621)	0.0115 (-0.0004)	0.0111 (-0.0053)
$w_1: 0.25$	0.0255 (0.0952)	0.0255 (0.0977)	0.0094 (0.0613)	0.0090 (0.0595)
	Durum III: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim 0.95N(0,1) + 0.05N(0,25)$			
$\beta_{10}: 0$	0.0301 (-0.0090)	0.0360 (-0.0077)	0.0440 (-0.0035)	0.0439 (-0.0041)
$\beta_{20}: 0$	0.0057 (-0.0018)	0.0060 (-0.0021)	0.0058 (-0.0020)	0.0059 (-0.0018)
$\beta_{11}: 1$	0.0278 (-0.0030)	0.0356 (0.0030)	0.1202 (-0.1988)	0.1077 (-0.1866)
$\beta_{21}: -1$	0.0052 (-0.0075)	0.0055 (-0.0124)	0.0097 (0.0162)	0.0059 (0.0136)
$\beta_{12}: 1$	0.0311 (0.0180)	0.0423 (0.0216)	0.1293 (-0.2092)	0.1125 (-0.1947)
$\beta_{22}: -1$	0.0051 (-0.0125)	0.0054 (-0.0170)	0.0094 (0.0130)	0.0059 (0.0101)
$w_1: 0.25$	0.0019 (0.0045)	0.0019 (0.0058)	0.0029 (0.0174)	0.0025 (0.0154)
	Durum IV: $\epsilon_1, \epsilon_2 \sim N(0,1)$ (10 aykırı gözlem)			
$\beta_{10}: 0$	0.3835 (0.0181)	0.2072 (-0.0117)	0.0279 (-0.0122)	0.0282 (-0.0118)
$\beta_{20}: 0$	0.1146 (-0.0077)	0.1142 (0.0045)	0.0069 (-0.0012)	0.0070 (-0.0014)
$\beta_{11}: 1$	2.2019 (-1.2476)	2.6361 (-1.4434)	0.5449 (-0.5805)	0.5254 (-0.5538)
$\beta_{21}: -1$	0.9721 (0.9269)	0.9231 (0.8478)	0.0094 (-0.0457)	0.0095 (-0.0460)
$\beta_{12}: 1$	2.6391 (-1.4760)	2.8753 (-1.5700)	0.5586 (-0.5961)	0.5487 (-0.5726)
$\beta_{22}: -1$	1.0954 (0.9869)	0.9645 (0.8701)	0.0088 (-0.0443)	0.0089 (-0.0432)
$w_1: 0.25$	0.0671 (0.1334)	0.0768 (0.1957)	0.0238 (0.1251)	0.0235 (0.1209)

Özet olarak, bu bölümde verilen bütün simülasyon sonuçları ele alındığında veride aykırı gözlem olabileceği düşünüldüğünde M ya da GM-tahmin yöntemlerine dayalı karma regresyon modellerinin kullanılmasıyla daha etkin tahmin edicilerin elde edildiği gözlenmiştir. Özel olarak, eğer x yönünde aykırı gözlem olabileceği düşünülüyor ise M-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli yerine, GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modelinin kullanılmasının daha sağlıklı sonuçlar verdiği görülmüştür.

Önerilen EM algoritmasının iki bağımsız değişkenli ve iki bileşenli karma regresyon modelinde yakınsaklık durumunu incelemek için her bir simülasyon çalışmasına ait adım sayıları şekil 4.7 ve şekil 4.8'de verilmiştir. Bu şekiller sadece Durum IV'de ele alınan aykırı gözlem modeli ve $n = 200{,}400$ örneklem hacmi için 500 tekrar sonucunda simülasyon çalışmasında ele alınan bütün tahmin edicilerin adım sayılarını göstermektedir. Bu şekillerden anlaşıldığı gibi bu çalışmada önerilen EM benzeri algoritmanın yakınsadığı gözlenmiştir. Öte yandan, M-tahmin yöntemi için önerilen EM benzeri algoritmanın çok yavaş yakınsadığı görülmektedir. Bu durum her iki örneklem hacmi için de gözlenmiştir.



Şekil 4.7 $n = 200$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Mallows, MixregGM-Schweppe, MixregM-Huber ve MixregM-Tukey modelleri tahmin edicilerinin adım sayıları



Şekil 4.8 $n = 400$ örneklem hacmi için aykırı gözlem durumunda MixregGM-Mallows, MixregGM-Schweppe, MixregM-Huber ve MixregM-Tukey modelleri tahmin edicilerinin adım sayıları

5. UYGULAMA

Bu bölümde, literatürde karma regresyon modeli için önerilen yöntemlerin performansını test etmek için sıkça kullanılan gerçek veri setleri ele alınacaktır. Bu veri setleri kullanılarak bu çalışmada kullanılan ve önerilen karma regresyon modeli tahmin edicilerinin performansları gösterilecektir. Modellerin performansları aşağıda kısaca özetlenen bazı model seçme kriterleri yardımıyla karşılaştırılacaktır.

5.1 Bazı Model Seçme Kriterleri

Model seçimi, iyi bir modelleme ile uygun sayıda parametre sayısı arasında denge kurmaya dayanır. En çok kullanılan model seçme kriterlerinden biri olan Akaike bilgi kriteri (Akaike information criterion (AIC)) (Akaike 1973)

$$AIC = -2\ell\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}\right) + 2k. \tag{5.1}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada k tahmin edilen parametre sayısı ve $\ell\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}\right)$ tahmin edilen model için olabilirlik fonksiyonunun maksimum değerini göstermektedir. AIC kriterinin Bozdogan ve Sclove (1984) ve Sclove (1987) tarafından karma modellerde kullanılması önerilmiştir. Daha sonra AIC kriterinin bir analitik genişletilmesi olarak tutarlı (consistent) AIC (CAIC) kriteri Bozdogan (1993) tarafından önerilmiştir. Bu kriter aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$CAIC = -2\ell\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}\right) + k(\log n + 1). \tag{5.2}$$

Burada n gözlem sayısını göstermektedir. Diğer bir model seçme kriteri ise Bayesian bilgi kriteri (Bayesian information criterion (BIC)) Schwarz (1978) tarafından önerilmiştir ve

$$BIC = -2\ell\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}\right) + k\log n \tag{5.3}$$

eşitliği ile tanımlanır. BIC kriteri her karma bileşeni ayrı bir kümeyi gösterdiğinde iyi sonuç verir. Ancak, veri setinde küme sayısı bileşen sayısından farklı olduğunda Biernacki vd. (2000) tarafından bütünleşik tam olabilirlik (integrated complete likelihood (ICL)) kriteri BIC kriterinin bir modifikasyonu olarak önerilmiştir. $Z_{ij}, j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, g$ kayıp değişkeni (3.13) eşitliğindeki gibi tanımlansın. $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ve $\boldsymbol{z} = \left(z_{1j}, \dots, z_{gj}\right)$ tam veri olmak üzere, $\boldsymbol{y}_c = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ için tam veri log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell_c(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{g} z_{ij}\log\left(w_i f\left(y_j; \boldsymbol{\Theta}\right)\right)$$

ile verilir. Böylece, tam veri log-olabilirlik fonksiyonunu içeren ICL kriteri

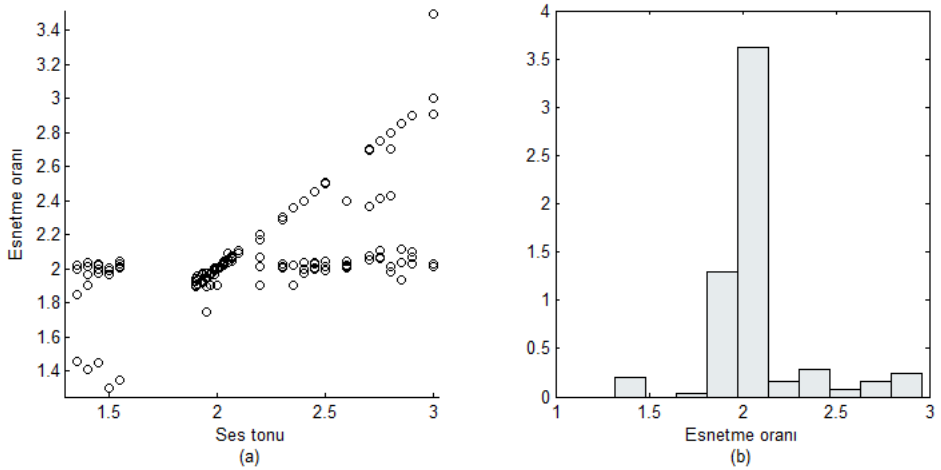
$$ICL = -2\ell_c\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}; \boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{z}}\right) + k\log n \tag{5.4}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada verilmiş $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ tahmini için kayıp veri $\boldsymbol{z}$ yerine $\hat{\boldsymbol{z}}$ kullanılır. BIC kriterinde sadece gözlenen log-olabilirlik fonksiyonu maksimum yapılırken, ICL kriterinde tam veri log-olabilirlik fonksiyonu kullanılır. Dolayısıyla, ICL kriteri BIC kriterine göre karma model varsayımlarının bazılarını bozma ve verinin uygun bir kısmını bir dizi kümeye ayırabilme açısından daha dayanıklıdır (Li 2014).

Burada verilen AIC, BIC, CAIC ve ICL model seçme kriterleri değerleri kullanılarak modeller karşılaştırırken, bilgi kriteri değeri minimum olan model en iyi model olarak seçilir.

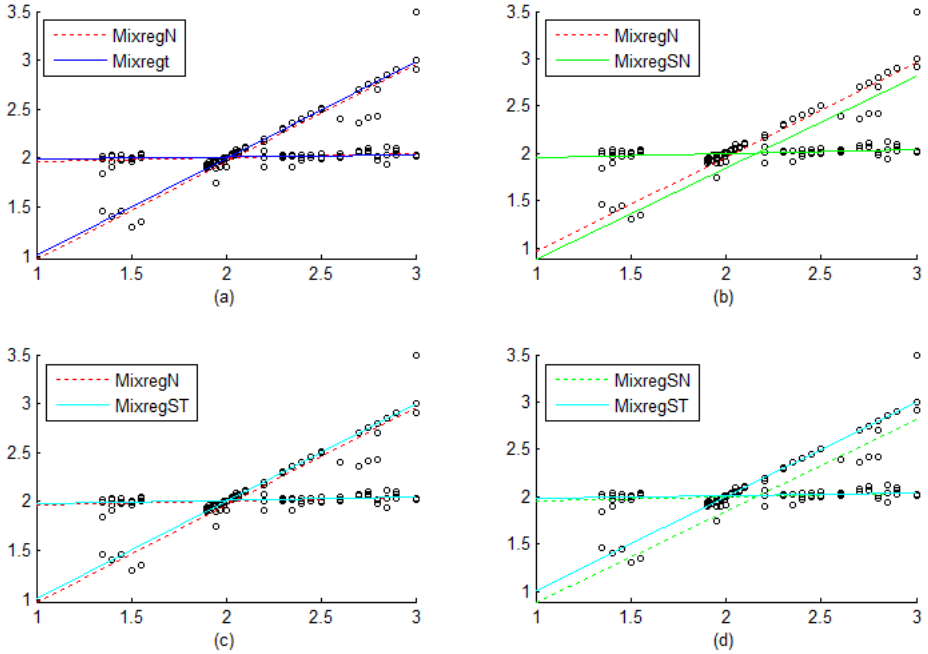
5.2 Ses Tonu Algılama Verisi

Şekil 5.1 ile gösterilen ses tonu algılama verisi Cohen (1984) tarafından yapılan çalışmada yer almaktadır. Ses tonu algılama deneyinde eğitimli bir müzisyen tarafından ahenk sesi eklenerek saf ses tonu elektronik olarak elde edilmiştir. Deneyde aynı müzisyen tarafından yapılan 150 deneme kaydedilmiştir. Ahenk sesleri esnetme oranı (stretchratio) ile saptanmıştır. Bu oran düzeltilmiş ton ile temel ton arasındadır. Bu deneyin amacı ayarlama oranının ses tonu algısını nasıl etkilediğini görmek ve iki müzikal algılama teorisinden herhangi birinin mantıklı olup olmadığını saptamaktır. Veri setine R programında *fpc* paketi (Hennig 2013) yüklendikten sonra data(tonedata) yazılarak ulaşılır. Ayrıca, veri için ses tonu (tuned) bağımsız değişkeni ve esnetme oranı bağımlı değişkeni göstermektedir. Bu veri seti, Bai vd. (2012) tarafından dayanıklı karma regresyon modeline dayanarak elde edilen tahmin edicilerin, Yao vd. (2014) tarafından *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli tahmin edicilerin ve Song vd. (2014) tarafından Laplace dağılımına dayalı karma regresyon modeli kullanılarak elde edilen tahmin edicilerin performanslarının test edilmesi için kullanılmıştır. Şekil 5.1. ile ses tonu algılama verisinin saçılım grafiği ve esnetme oranının histogramı gösterilmektedir. Saçılım grafiğine göre veride belirgin iki grubun olduğu ve histograma göre ise veri de normalliğin olmadığı görülmektedir.



Şekil 5.1.a. Ses tonu algılama verisinin saçılım grafiği, b. Esnetme oranının histogramı

Bu tez çalışmasında, ses tonu algılama verisi kullanılarak Bölüm 4.1.2'de önerilen çarpık *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli tahmin edicilerinin performansları veride aykırı gözlem olmaması ve olması durumunda diğer tahmin edicilerle karşılaştırılacaktır. Şekil 5.2 ile ses tonu algılama verisine MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği gösterilmektedir. Ayrıca, çizelge 5.1'de ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriterlerinin değerlerine yer verilmiştir. Burada tahmin işlemi yapılırken iki grubun da serbestlik derecesinin 2 olduğu varsayılmıştır. Şekil 5.2'den ve çizelgedeki AIC, CAIC ve BIC bilgi kriterlerinden aykırı gözlem olmadığında en iyi sonucu MixregST ile uydurulan modelin verdiği görülmektedir.

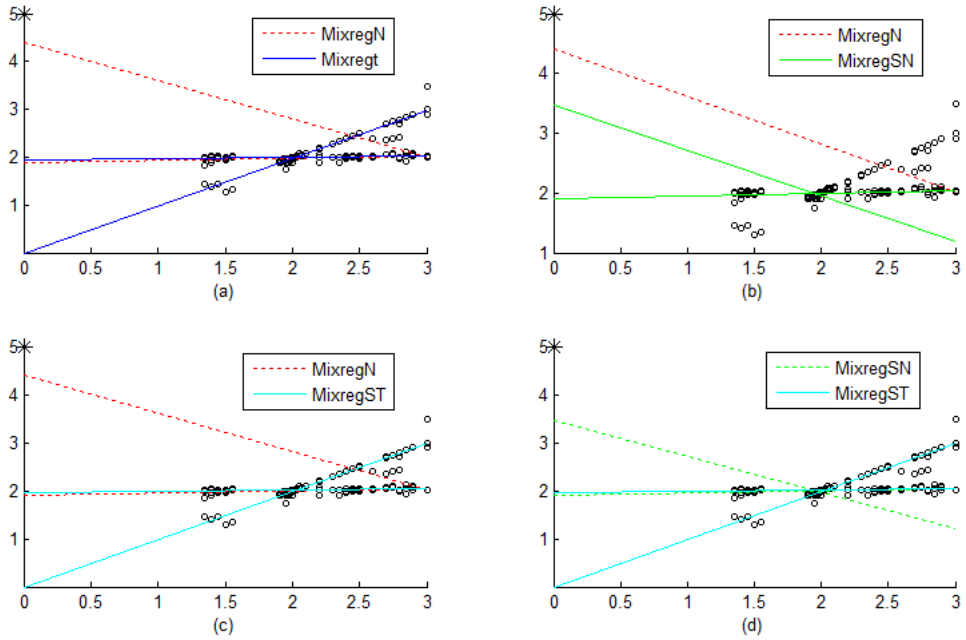


Şekil 5.2 Ses tonu algılama verisi için MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği

Çizelge 5.1 Ses tonu algılama verisine uydurulmuş MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST modellerinin ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri

	MixregN	Mixregt	MixregSN	MixregST
$\hat{\beta}_{10}$	1.9164	1.9586	1.9171	1.9491
$\hat{\beta}_{20}$	0.0425	0.0264	0.0424	0.0318
$\hat{\beta}_{11}$	-0.0193	0.0178	-0.0717	0.0054
$\hat{\beta}_{21}$	0.9923	0.9918	0.9604	0.9982
$\hat{\sigma}_1$	0.0462	0.0281	0.0463	0.0393
$\hat{\sigma}_2$	0.1328	0.0210	0.1883	0.0033
$\hat{\lambda}_1$	-	-	-0.0100	-0.1666
$\hat{\lambda}_2$	-	-	1.7534	0.4465
$\widehat{w}_1$	0.6977	0.5518	0.7006	0.6410
$\ell(\widehat{\boldsymbol{\Theta}})$	141.1984	190.8177	140.5585	**211.7766**
AIC	-286.3968	-367.6354	-263.1171	**-405.5532**
CAIC	-240.3224	-339.5610	-227.0213	**-369.4574**
BIC	-247.3224	-346.5610	-236.0213	**-378.4574**

Aykırı gözlemin tahminlerin performansını nasıl etkilediğini gözlemleyebilmek için $(0,5)$ noktasına on etkili gözlem eklenmiştir. Burada grafikte etkili gözlemler yıldız sembolü ile gösterilmiştir. Şekil 5.3'de aykırı gözlem içeren veriye MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği gösterilmiştir. Çizelge 5.2'de ise bu modellere ait tahmin sonuçları ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriterlerinin değerleri yer almaktadır. Burada MixregN ve MixregSN modelleri ile elde edilen tahminlerin aykırı gözlemlerden etkilendiğini ancak Mixregt ve MixregST modelleri ile elde edilen tahminlerin ise aykırı gözlemlerden etkilenmediği gözlenmektedir. Ayrıca, MixregST modelinin AIC, CAIC ve BIC bilgi kriteri değerlerine göre en iyi uydurulmuş model olduğu görülmektedir.



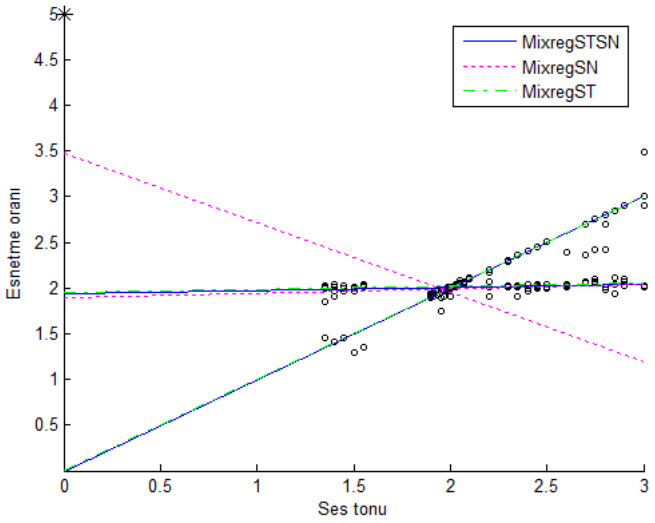
Şekil 5.3 $(0,5)$ noktasına eklenmiş on aykırı gözlem içeren ses tonu algılama verisi için MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği

Çizelge 5.2 $(0,5)$ noktasına eklenmiş on aykırı gözlem içeren ses tonu algılama verisine uydurulmuş MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST modellerinin ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri

	MixregN	Mixregt	MixregSN	MixregST
$\hat{\beta}_{10}$	1.9058	1.9529	1.8948	1.9553
$\hat{\beta}_{20}$	0.0471	0.0288	0.0478	0.0313
$\hat{\beta}_{11}$	4.4010	0.0251	3.4734	0.0057
$\hat{\beta}_{21}$	-0.7954	0.9881	-0.7579	0.9981
$\hat{\sigma}_1$	0.0506	0.0400	0.0612	0.0542
$\hat{\sigma}_2$	0.8591	0.0280	1.2593	0.0031
$\hat{\lambda}_1$	-	-	-0.2667	-0.2030
$\hat{\lambda}_2$	-	-	1.6770	0.4493
$\hat{w}_1$	0.7367	0.6083	0.7382	0.6759
$\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})$	54.0997	77.5769	40.7933	**109.3612**
AIC	-94.1994	-141.1537	-63.5867	**-200.7225**
CAIC	-65.6732	-112.6275	-26.9101	**-164.0459**
BIC	-72.6732	-119.6275	-35.9101	**-173.0459**

Ayrıca, ses tonu algılama verisi çarpık dağılımların uygulaması için uygun olduğundan Bölüm 4.3.2'de önerilen çarpık *t* ve çarpık normal dağılıma dayalı karma regresyon modeli (MixregSTSN) için de tahmin ediciler elde edilerek performansları diğer tahmin

edicilerle veri aykırı gözlem içerdiğinde karşılaştırılmıştır. Saçılım grafiği ve uydurulmuş doğrular şekil 5.4'de ve tahmin sonuçları ise çizelge 5.3'de gösterilmiştir. Buradan, sonuçlara göre MixregSTSN modeli AIC, CAIC ve BIC bilgi kriteri değerlerine göre en iyi uydurulmuş model olarak bulunmuştur.



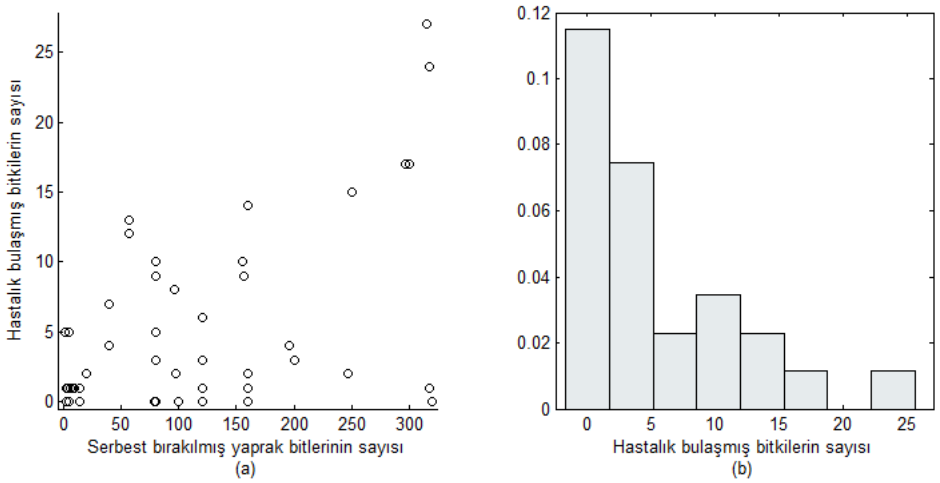
Şekil 5.4 (0,5) noktasına eklenmiş on aykırı gözlem içeren ses tonu algılama verisi için MixregSN, MixregST ve MixregSTSN modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği

Çizelge 5.3 (0,5) noktasına eklenmiş on aykırı gözlem içeren ses tonu algılama verisine uydurulmuş MixregSN, MixregST ve MixregSTSN modellerinin ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri

	MixregSN	MixregST	MixregSTSN
$\hat{\beta}_{10}$	1.8948	1.9553	1.9450
$\hat{\beta}_{20}$	0.0478	0.0313	0.0339
$\hat{\beta}_{11}$	3.4734	0.0057	0.0031
$\hat{\beta}_{21}$	-0.7579	0.9981	0.9987
$\hat{\sigma}_1$	0.0612	0.0542	0.0562
$\hat{\sigma}_2$	1.2593	0.0031	0.0043
$\hat{\lambda}_1$	-0.2667	-0.2030	-0.1971
$\hat{\lambda}_2$	1.6770	0.4493	0.1297
$\hat{w}_1$	0.7382	0.6759	0.6752
$\ell(\hat{\boldsymbol{\Theta}})$	40.7933	109.3612	**115.0275**
AIC	-63.5867	-200.7225	**-212.0549**
CAIC	-26.9101	-164.0459	**-175.3783**
BIC	-35.9101	-173.0459	**-184.3783**

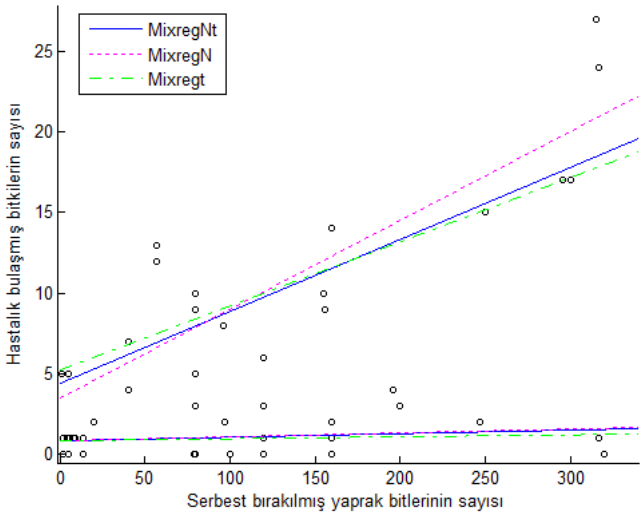
5.3 Yaprak Biti Verisi

Şekil 5.5 ile gösterilen veri seti, bir grup yeşil şeftali yaprak bitinin, 81 küçük tütün bitkisi üzerine bırakıldığı ve sonrasında hastalık bulaşan 51 bitkinin kaydedildiği bir deneyden alınmış veri setini içermektedir. Bu deneyle ilgili daha detaylı bilgiler Turner (2000) tarafından yapılan çalışmada yer almaktadır. Bu veri setine R programında *mixreg* paketi (Turner 2000) yüklendikten sonra data(aphids) yazılarak ulaşılır. Ayrıca, Young (2007) tarafından bu veri seti için en uygun bileşen sayısının iki olduğu gösterilmiş ve normalliğe dayalı karma regresyon modeli için EM ve Metropolis-Hastings (MH) algoritmaları ile elde edilen tahmin sonuçları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.5.a. Yaprak biti verisi saçılım grafiği, b. Hastalık bulaşmış bitkilerin sayısının histogramı

Burada, yaprak biti verisi Bölüm 4.3.1'de önerilen normal ve *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli kullanılarak elde edilen tahmin edicilerin performansları veride aykırı gözlem olmaması ve olması durumunda diğer tahmin edicilerle karşılaştırılacaktır. Şekil 5.6'da yaprak biti verisine MixregN, Mixregt ve MixregNt modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği yer almaktadır. Çizelge 5.4'de ise ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri gösterilmiştir. Burada tahmin işlemi yapılırken iki grubunda serbestlik derecesinin 2 olduğu varsayılmıştır. Şekil 5.6'ya ve çizelge 5.4'de verilen AIC, CAIC ve BIC bilgi kriteri değerlerine göre aykırı gözlem olmadığında en iyi sonucu MixregN ile uydurulan modelin verdiği görülmektedir.

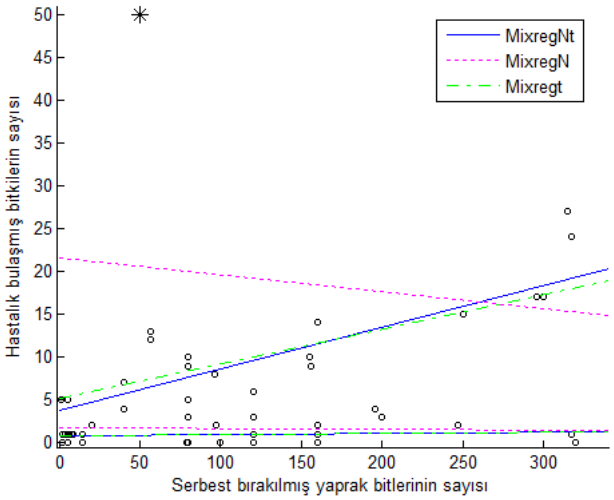


Şekil 5.6 Yaprak biti verisi için MixregN, Mixregt ve MixregNt modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği

Çizelge 5.4 Yaprak biti verisine uydurulmuş MixregN, Mixregt ve MixregNt modellerinin ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri

	MixregN	Mixregt	MixregNt
$\hat{\beta}_{10}$	0.8586	0.8522	0.8648
$\hat{\beta}_{20}$	0.0024	0.0011	0.0022
$\hat{\beta}_{11}$	3.4745	5.2578	4.3813
$\hat{\beta}_{21}$	0.0553	0.0398	0.0448
$\hat{\sigma}_1$	1.1249	0.9127	1.0892
$\hat{\sigma}_2$	3.1153	1.0946	2.2073
$\hat{w}_1$	0.4984	0.5821	0.5128
$\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})$	**-132.0651**	-137.4716	-133.7615
AIC	**278.1302**	288.9432	281.5230
CAIC	**298.6530**	309.4660	302.0458
BIC	**291.6530**	302.4660	295.0458

Daha sonra, tahminlerin aykırı gözlemlerden nasıl etkilediğini gözlemleyebilmek için (50,50) noktasına beş etkili gözlem eklenmiştir. Burada etkili gözlemler yıldız sembolü ile gösterilmiştir. Şekil 5.7'de aykırı gözlem içeren veriye MixregN, Mixregt, ve MixregNt modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği verilmiştir. Çizelge 5.5'de ise bu modellere ait tahmin sonuçları ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri mevcuttur. Burada, uydurulan modellerden AIC, CAIC ve BIC bilgi kriteri değerlerine göre en iyi sonucu MixregNt modelinin verdiği görülmektedir.



Şekil 5.7 (50,50) noktasına eklenmiş beş aykırı gözlem içeren yaprak biti verisi için MixregN, Mixregt ve MixregNt modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği

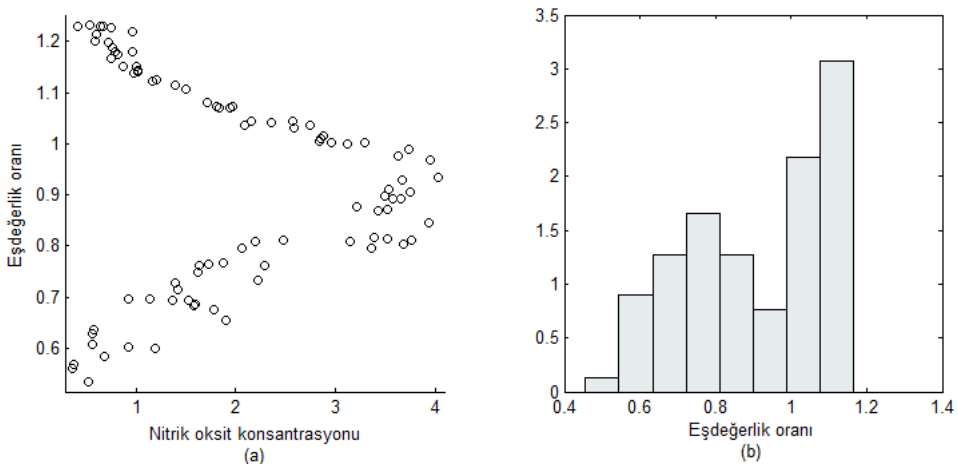
Çizelge 5.5 (50,50) noktasına eklenmiş beş aykırı gözlem içeren yaprak biti verisine uydurulmuş MixregN, Mixregt ve MixregNt modellerinin ML tahminleri ve AIC, CAIC, BIC bilgi kriteri değerleri

	MixregN	Mixregt	MixregNt
$\hat{\beta}_{10}$	1.7334	0.8694	0.7843
$\hat{\beta}_{20}$	-0.0010	0.0013	0.0014
$\hat{\beta}_{11}$	21.5569	5.2484	3.8322
$\hat{\beta}_{21}$	-0.0199	0.0400	0.0484
$\hat{\sigma}_1$	1.6859	1.0449	0.9362
$\hat{\sigma}_2$	16.3307	1.3244	4.0712
$\hat{w}_1$	0.5539	0.5547	0.4121
$\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})$	-194.0987	-192.1452	**-182.4878**
AIC	402.1974	398.2904	**378.9756**
CAIC	416.3749	412.4678	**393.1531**
BIC	423.3749	419.4678	**400.1531**

5.4 Ethanol Verisi

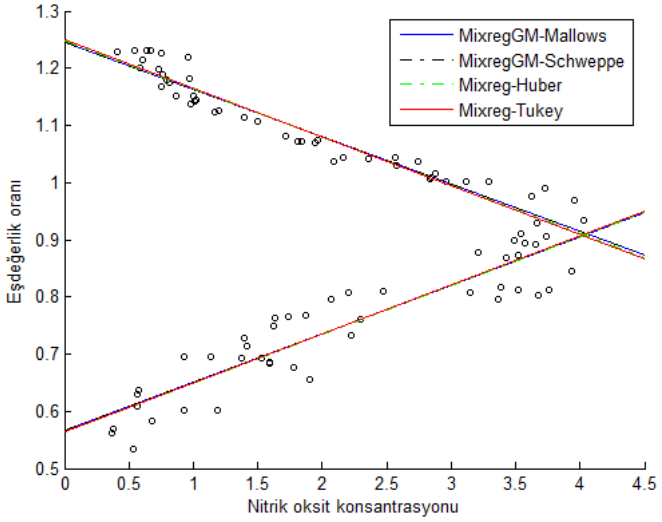
Bir motorda hava-ethanol karışımı olan motor egzozu ve eşdeğerlik oranında nitrik oksit konsantrasyonunu içeren bu veri seti ilk defa Hurvich vd. (1998) tarafından çalışılmıştır. Bu veri setine R programında *locfit* paketi (Loader 1999) yüklendikten sonra data(ethanol) yazılarak ulaşılır. Hurn vd. (2003) tarafından swtiching regresyon modeli için ethanol verisi ve başka veriler kullanılarak Bayesian çıkarımlar yapılmıştır. Bu

veride bulunan nitrik oksit konsantrasyonu bağımsız değişkeni ve eşdeğerlik oranı ise bağımlı değişkeni göstermektedir. Şekil 5.8 ile ethanol verisinin saçılım grafiği ve eşdeğerlik oranının histogramı gösterilmektedir. Saçılım grafiği ve histograma göre veride belirgin olarak iki grubun olduğu görülmektedir.



Şekil 5.8.a. Ethanol verisi saçılım grafiği, b. Eşdeğerlik oranının histogramı

Şekil 5.9 ile ethanol verisine MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği gösterilmektedir. Burada dayanıklı yöntemleri karşılaştırılabilmek için tam veri log-olabilirlik fonksiyonunu kullanan ICL kriteri kullanılacaktır. Çizelge 5.6'da M ve GM-tahmin yöntemlerine dayalı tahmin sonuçları ve ICL bilgi kriteri değerine yer verilmiştir**.** Şekil 5.9'a göre regresyon modellerinin benzer tahmin sonuçları verdiği ve çizelgedeki ICL bilgi kriteri değerine göre ise en iyi sonucu MixregGM-Mallows ile uydurulan modelin verdiği görülmektedir.



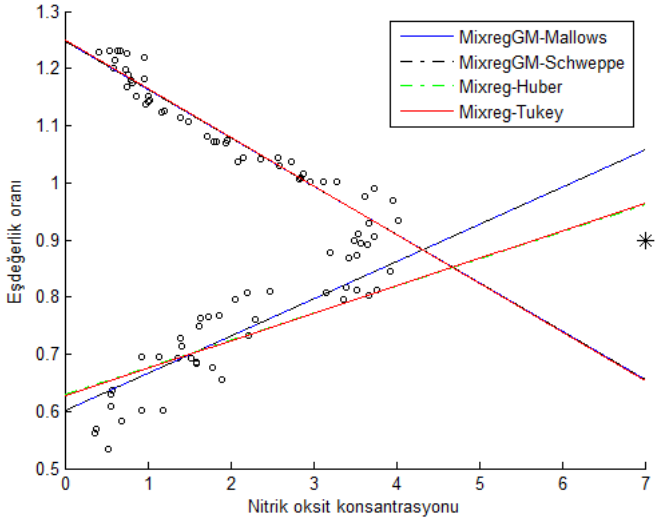
Şekil 5.9 Ethanol verisi için MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği

Çizelge 5.6 Ethanol verisine uydurulmuş MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modellerinin tahmin sonuçları ve ICL bilgi kriteri değeri

	Huber	Tukey	GM-Mallows	GM-Schweppe
$\hat{\beta}_{10}$	0.5647	0.5639	0.5669	0.5669
$\hat{\beta}_{20}$	0.0853	0.0859	0.0847	0.0847
$\hat{\beta}_{11}$	1.2477	1.2493	1.2454	1.2454
$\hat{\beta}_{21}$	-0.0844	-0.0850	-0.0827	-0.0827
$\hat{\sigma}_1$	0.0533	0.0532	0.0439	0.0439
$\hat{\sigma}_2$	0.0259	0.0262	0.0245	0.0245
$\hat{w}_1$	0.4876	0.4874	0.4893	0.4893
$\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})$	499.6612	682.7625	**772.9955**	772.9954
ICL	-967.9810	-1334.1836	**-1514.6496**	-1514.6493

Karma regresyon modellerinden elde edilen tahmin edicilerin aykırı gözlemlere karşı davranışlarını inceleyebilmek için ethanol verisinde (7,0.9) noktasına 5 etkili gözlem eklenerek saçılım grafiği şekil 5.10'daki gibi elde edilmiştir. Burada grafikte etkili gözlemler yıldız sembolü ile gösterilmiştir. Çizelge 5.7'de ise bu modellere ait M ve GM-tahmin yöntemlerine dayalı tahmin sonuçları ve ICL bilgi kriteri değeri yer almaktadır. Bu grafikten MixregHuber ve MixregTukey ile elde edilen tahmin edicilerin aykırı gözlemlerden etkilendiği görülmektedir. Ancak, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe ile elde edilen tahmin edicilerin bu tahmin edicilere göre daha iyi

regresyon doğruları uydurduğu görülmektedir. Ayrıca, MixregGM-Mallows modelinin ICL bilgi kriteri değerine göre en iyi sonucu verdiği görülmektedir.



Şekil 5.10 (7,0.9) noktasına eklenmiş beş aykırı gözlem içeren ethanol verisi için MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modelleri ile uydurulmuş regresyon doğruları ve saçılım grafiği

Çizelge 5.7 (7,0.9) noktasına eklenmiş beş aykırı gözlem içeren ethanol verisine uydurulmuş MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe modellerinin tahmin sonuçları ve ICL bilgi kriteri değeri

	Huber	Tukey	GM-Mallows	GM-Schweppe
$\hat{\beta}_{10}$	0.6294	0.6285	0.6009	0.6009
$\hat{\beta}_{20}$	0.0474	0.0479	0.0652	0.0652
$\hat{\beta}_{11}$	1.2489	1.2492	1.2477	1.2477
$\hat{\beta}_{21}$	-0.0852	-0.0852	-0.0845	-0.0845
$\hat{\sigma}_1$	0.0656	0.0661	0.0706	0.0706
$\hat{\sigma}_2$	0.0276	0.0277	0.0251	0.0251
$\hat{w}_1$	0.4812	0.4822	0.5062	0.5062
$\ell(\hat{\boldsymbol{\Theta}})$	435.7423	606.6584	**642.3553**	642.3172
ICL	-839.7564	-1181.5885	**-1252.9823**	-1252.9061

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, öncelikle aynı ve farklı dağılıma dayalı karma regresyon modelleri ile x ve y yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı olan GM tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli ele alınmıştır. Aynı dağılıma dayalı karma regresyon modellerinden çarpıklık ve kalın kuyrukluluğa karşı dayanıklı olan çarpık *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli önerilmiştir. Karma regresyon modelinde önerilen tahmin edicilerin hesaplanabilmesi için EM algoritması verilmiştir. Çarpık *t* dağılımına dayalı karma regresyon modelinin performansı ile normal, *t* ve çarpık normal dağılımlarına dayalı karma regresyon modellerinin performansı simülasyon çalışması yapılarak yan ve MSE değerlerine göre karşılaştırılmıştır. Simülasyon sonuçlarına göre kalın kuyrukluluk ve çarpıklık olduğunda önerilen tahmin ediciler daha iyi sonuç vermiştir. Ayrıca, çarpık *t* dağılımına dayalı karma regresyon modelinin aykırı gözlemlere karşı davranışını incelemek ve diğer modellerle (normal, *t* ve çarpık normal) karşılaştırmak için gerçek veri üzerinde uygulama yapılmıştır. Karşılaştırma sonucunda önerilen tahmin edicilerle elde edilen modelin en iyi model olduğu görülmüştür. Böylece, veride çarpıklık ve kalın kuyrukluluk olduğunda çarpık *t* dağılımına dayalı karma regresyon modeli kullanılarak dayanıklı tahmin sonuçları elde edilmiştir.

Farklı dağılıma dayalı karma regresyon modelleri için ise özel olarak iki bileşenli simetrik (normal ve *t*) ve çarpık (çarpık *t* ve çarpık normal) dağılımlar ele alınarak ilgili modeller için EM algoritması verilmiştir. Önerilen tahmin edicilerin performansları diğer tahmin edicilerin performanları simülasyon çalışması ve gerçek veri ile karşılaştırılmıştır. Burada simülasyon çalışması ve gerçek veri sonuçlarından farklı dağılımların karma regresyon modelini kullanma yöntemi, (çarpık) normal dağılımın karması ve (çarpık) *t* dağılımının karması gibi aynı tip dağılımların karma regresyon modelini kullanma yöntemine göre daha iyi ya da karşılaştırmalı sonuçlar vermiştir. Eğer verideki gruplar farklı kuyruk tiplerine sahipse ya da farklı dağılım gösteriyorsa (çarpık ya da simetrik) farklı dağılımların karmasını kullanmak tercih edilmedir.

Karma regresyon modellerinde y yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı yöntem Bai (2010) ve Bai vd. (2012) tarafından önerilmiştir. Bu yönteme alternatif olarak x ve

y yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı yöntem olan GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli önerilmiştir. Önerilen model için tahmin ediciler EM benzeri algoritma kullanılarak elde edilmiştir. İlgili tahmin edicilerin performansı literatürde yer alan tahmin ediciler ile simülasyon çalışması ve gerçek veri üzerinde karşılaştırılmıştır. Simülasyon çalışması ve gerçek veri sonuçlarına göre veride x yönünde aykırı gözlem olduğunda GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modeli kullanmak tahmin edicilerde iyileşmeye sebep olmuştur. Böylece, x yönündeki aykırı gözlemlere karşı dayanıklı tahmin ediciler elde etmek için GM-tahmin yöntemine dayalı karma regresyon modelinin kullanılması tercih edilmelidir.

Sonuç olarak, bu çalışmada veride çarpıklık ve kalın kuyrukluluk olduğunda ve x yönünde aykırı gözlem olduğunda karma regresyon modelleri için dayanıklı tahmin ediciler elde edilmiştir.

Bu çalışmada, önerilen karma regresyon modelleri için yapılan simülasyon çalışmasında yazılan bilgisayar kodlarının R programı kullanılarak paket haline getirilmesi planlanmaktadır. Çarpık t dağılımına dayalı karma regresyon modeli için önerilen EM algoritmasının yakınsaklığını hızlandırmak için bazı yöntemler denenecekir. Bu tez çalışmasında, bileşen sayısının bilindiği varsayılarak karma regresyon modelleri için tahmin ediciler elde edilmiştir. Gelecekte yapılacak çalışmalarda ise bileşen sayısının bilinmediği varsayımı altında önce kümeleme analizi yapılarak, daha sonra her bir kümenin dağılımı incelenecektir. Bu iki adımın sonucunda ise hangi karma regresyon modelinin kullanılacağına karar verilecek ve hem bileşen sayısı hem de karma regresyon modeli için parametreler tahmin edilecektir. Ayrıca model seçimi yöntemleri kullanılarak modelde etkili olan değişkinlerin seçimi yapılacaktır. Diğer bir problem olarak, karma regresyon modelinde bağımsız değişkenler ilişkili olduğunda yanlı regresyon yöntemleri kullanılarak karma regresyon modeline uygulanacaktır. Veride aykırı gözlemlere karşı dayanıklı ve kırılma noktası yüksek olan CM ve MM gibi tahmin yöntemleri de karma regresyon modeline uygulanarak parametreler için dayanıklı tahmin edicilerin elde edilmesi planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

Aitkin, M. 1996. A general maximum likelihood analysis of overdispersion in generalized linear models. Statistics and Computing, 6(3), 251-262.

Aitkin, M., Anderson, D. and Hinde, J. 1981. Statistical modelling of data on teaching styles. Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General), 144(4), 419-461.

Aitkin, M. and Wilson, G.T. 1980. Mixture models, outliers and the EM algorithm. Technometrics, 22(3), 325-331.

Akaike, H. 1973. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. Proceeding of the Second International Symposium on Information Theory, B.N. Petrov and F. Caski, eds., 267-281, Akademiai Kiado, Budapest.

Arslan, O. 2011. A review on the univariate skew t-distributions. Far East Journal of Theoritical Statistics, 34(1), 17-34.

Azzalini, A. 1985. A class of distributions which includes the normal ones. Scandinavian Journal of Statistics, 12(2), 171-178.

Azzalini, A. 1986. Further results on a class of distributions which includes the normal ones. Statistica, 46(2), 199-208.

Azzalini, A. and Capitanio, A. 2003. Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew *t* distribution. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology), 65(2), 367-389.

Bai, X. 2010. Robust mixture of regression models. Master Report, Kansas State University.

Bai, X., Yao, W. and Boyer, J.E. 2012. Robust fitting of mixture regression models. Computational Statistics and Data Analysis, 56(7), 2347-2359.

Bashir, S. and Carter, E.M. 2012. Robust mixture of linear regression models. Communications in Statistics-Theory and Methods, 41(18), 3371-3388.

Beaton, A.E. and Tukey, J.W. 1974. The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data. Technometrics, 16(2), 147-185.

Biernacki, C., Celeux, G. and Govaert, G. 2000. Assessing a mixture model for clustering with the integrated completed likelihood. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 22(3), 719-725.

Bishop, C.M. 2006. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 738 p., Singapore.

Bozdogan, H. and Sclove, S.L. 1984. Multi-sample cluster analysis using Akaike's information criterion. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 36(1), 163-180.

Bozdogan, H. 1993. Choosing the number of component clusters in the mixture model using a new informational complexity criterion of the inverse-fisher information matrix. Information and Classification, O. Opitz, B. Lausen, and R. Klar, eds., 40-54, Springer Berlin Heidelberg.

Charlier, C.V.L. and Wicksell, S.D. 1924. On the dissection of frequency functions. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, 18, 1-64.

Chen, C. 2002. Robust regression and outlier detection with the ROBUSTREG procedure. Proceedings of the Twenty-Seventh Annual SAS Users Group International Conference, SAS Institute, Cary, NC.

Cohen, A.C. 1967. Estimation in mixtures of two normal distributions. Technometrics, 9(1), 15-28.

Cohen, E.A. 1984. Some effects of inharmonic partials on interval perception. Music Perception, 1(3), 323-349.

Day, N.E. 1969. Estimating the components of a mixture of two normal distributions. Biometrika, 56(3), 463-474.

Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B. 1977. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 39, 1-38.

Doetsch, G. 1928. Die elimination des dopplereffekts auf spektroskopische feinstrukturen und exakte bestimmung der komponenten. Zeitschrift für Physik, 49, 705-730.

Donoho, D.L. and Huber, P.J. 1983. The notion of breakdown point, A Festschrift for Erich L. Lehmann, P.J. Bickel, K.A. Doksum and J.L. Hodges (eds.), 157–184, CA:Wadsworth, Belmont.

Frühwirth-Schnatter, S. 2006. Finite Mixture and Markov Switching Models. Springer, 492 p., New York.

Frühwirth-Schnatter, S. and Pyne, S. 2010. Bayesian inference for finite mixtures of univariate and multivariate skew-normal and skew-*t* distributions. Biostatistics, 11(2), 317-336.

Gupta, A.K., Chang, F.C. and Huang, W.C. 2002. Some skew symmetric models. Random Operators and Stochastic Equations, 10(2), 133-140.

Gupta, A.K. 2003. Multivariate skew t distribution. Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics, 37(4), 359-363.

Hampel, F.R. 1971. A general definition of qualitative robustness. The Annals of Mathematical Statistics, 42(6), 1887-1896.

Hampel, F.R. 1974. The influence curve and its role in robust estimation. Journal of the American Statistical Association, 69(346), 383-393.

Hampel, F.R. 1978. Optimally bounding the gross-error-sensitivity and the influence of position in factor space. Proceedings of the ASA Statistical Computing Section, ASA, Washington, D.C., 59-64.

Hampel, F.R., Ronchetti, E.M., Rousseeuw, P.J. and Stahel, W.A. 1986. Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions, Wiley, 502 p., New York.

Handschin, E., Schweppe, F., Kohlas, J. and Fiechter, A. 1975. Bad data analysis for power system state estimation. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-94(2), 329-337.

Haughton, D. 1997. Packages for estimating finite mixtures: a review. The American Statistician, 51(2), 194-205.

Haughton, J. and Haughton, D. 1995. Son preference in Vietnam. Studies in Family Planning, 26(6), 325-337.

Haughton, D. and Haughton, J. 1996. Using a mixture model to detect son preference in Vietnam. Journal of Biosocial Science, 28(3), 355-365.

Hawkins, D.S., Allen, D.M. and Stomber, A.J. 2001. Determining the number of components in mixtures of linear models. Computational Statistics and Data Analysis, 38(1), 15-48.

Hennig, C. 2013. fpc: Flexible procedures for clustering. R package version 2.1-5.

Henze N. 1986. A probabilistic representation of the skew-normal distribution. Scandinavian Journal of Statistics, 13(4), 271-275.

Ho, H., Pyne, S. and Lin, T. 2012. Maximum likelihood inference for mixtures of skew Student-*t*-normal distributions through practical EM-type algorithms. Statistics and Computing, 22(1), 287-299.

Holmes, G.K. 1892. Measures of distribution. Journal of the American Statistical Association, 3, 141-157.

Huber, P.J. 1964. Robust estimation of a location parameter. The Annals of Mathematical Statistics, 35, 73-101.

Huber, P.J. 1967. The Behavior of Maximum Likelihood Estimates under Nonstandard Conditions. Processing of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol 1, 221-233, Berkeley: University of California Press.

Huber, P.J. 1973. Robust regression: Asymptotics, conjectures and Monte Carlo. The Annals of Statistics, 1(5), 799-821.

Huber, P.J. 1981. Robust Statistics. Wiley, 308 p., New York.

Huber, P.J. and Ronchetti, E.M. 2009. Robust Statistics, Wiley, 354 p., New York.

Hurvich, C.M., Simonoff, J.S. and Tsai, C.L. 1998. Smoothing parameter selection in nonparametric regression using an improved akaike information criterion. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 60(2), 271–293.

Hurn, M., Justel, A., and Robert, C.P. 2003. Estimating mixtures of regressions. Journal of Computational and Graphical Statistics, 12(1), 55-79.

Jones, P.N. and McLachlan, G.J. 1992. Fitting finite mixture models in a regression context. Australian Journal of Statistics, 34(2), 233–240.

Karlis, D. and Santourian, A. 2009. Model-based clustering with non-elliptically contoured distributions. Statistics and Computing, 19(1), 73-83.

Krasker, W.S. 1980. Estimation in linear regression models with disparate data points. Econometrica, 48(6), 1333-1346.

Krasker, W.S. and Welsch, R.E. 1982. Efficient bounded-influence regression estimation. Journal of the American Statistical Association, 77(379), 595-604.

Li, M. 2014. Robust estimation of the number of components for mixtures of linear regression models. Master Report, Kansas State University.

Lin, T.I. 2009. Maximum likelihood estimation for multivariate skew normal mixture models. Journal of Multivariate Analysis, 100(2), 257-265.

Lin, T.I. 2010. Robust mixture modeling using multivariate skew t distributions. Statistics and Computing, 20(3), 343-356.

Lin, T.I., Lee, J.C. and Hsieh, W.J. 2007a. Robust mixture modeling using the skew t distribution. Statistics and Computing, 17, 81–92.

Lin, T.I., Lee, J.C. and Yen, S.Y. 2007b. Finite mixture modelling using the skew normal distribution. Statistica Sinica, 17(3), 909–927.

Liu, M. and Lin, T. I. 2014. A skew-normal mixture regression model. Educational and Psychological Measurement, 74(1), 139-162.

Loader, C. R. 1999. Local Regression and Likelihood. Statistics and Computing Series. Springer Verlag, 290 p., New York.

Mallows, C.L. 1975. On some topics in robustness. Technical memorandum, Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, N.J.

Markatou, M. 2000. Mixture models, robustness, and the weighted likelihood methodology. Biometrics, 56(2), 483-486.

Maronna, R., Martin, D. and Yohai, V. 2006. Robust Statistics: Theory and Methods. Wiley, 403 p., New York.

Maronna, R.A., Bustos, O.H. and Yohai, V.J. 1979. Bias-and efficiency-robustness of general M-estimators for regression with random carriers. Smoothing techniques for curve estimation, T. Gasser and J.M. Rossenblat, eds., Lecture Notes in Mathematics, 757, 91-116, Springer, New York.

McLachlan, G.J. and Basford, K.E. 1988. Mixture Models: Inference and Application to Clustering. Marcel Dekker, 253 p., New York.

McLachlan, G.J. and Peel, D. 2000. Finite Mixture Models. Wiley, 419 p., New York.

Montgomery, D.C., Peck, E.A. and Vining, G.G. 2001. Introduction to Linear Regression Analysis. Wiley, 641 p., New York.

Newcomb, S. 1886. A generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best result. American Journal of Mathematics, 8(4), 343-366.

Neykov, N., Filzmoser, P., Dimova, R. and Neytchev, P. 2007. Robust fitting of mixtures using the trimmed likelihood estimator. Computational Statistics and Data Analysis, 52(1), 299-308.

Pearson, K. 1894. Contributions to the mathematical theory of evolution. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A, 185, 71-110.

Peel, D. and McLachlan, G.J. 2000. Robust mixture modelling using the t distribution. Statistics and Computing, 10(4), 339-348.

Pyne, S., Hu, X., Wang, K., Rossin, E., Lin, T.I., Maier, L.M., Baecher-Allan, C., McLachlan, G.J., Tamayo, P., Hafler, D.A., De Jager, P.L. and Mesirov, J.P. 2009. Automated high-dimensional flow cytometric data analysis. Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, 106(21), 8519-8524.

Quandt, R.E. 1972. A new approach to estimating switching regressions. Journal of the American Statistical Association, 67(338), 306-310.

Quandt, R.E. and Ramsey, J.B. 1978. Estimating mixtures of normal distributions and switching regressions. Journal of the American Statistical Association, 73(364), 730-738.

Rousseeuw, P.J. 1984. Least median of squares regression. Journal of the American Statistical Association, 79(388), 871-880.

Rousseeuw, P.J. and Leroy, A.M. 1987. Robust Regression and Outlier Detection. Wiley, 329 p., New York.

Rousseeuw, P.J. and Van Driessen, K. 1999. A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator. Technometrics, 41(3), 212-223.

Rousseeuw, P.J. and Yohai, V. 1984. Robust regression by means of S-estimators. Robust and Nonlinear Time Series Analysis, edited by J. Franke, W. Härdle, and R.D. Martin, 26, 256-274. Lecture Notes in Statistics, Springer, New York.

Sahu, S.K., Dey, D.K. and Branco, M.D. 2003. A new class of multivariate skew distributions with applications to bayesian regression models. Canadian Journal of Statistics, 31(2), 129-150.

Schwarz, G. 1978. Estimating the dimension of a model. The Annals of Statistics, 6(2), 461-464.

Schweppe, F.C., Wildes, J. and Rom, D.B. 1970. Power system static-state estimation. Parts I, II and III, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-89, 120-135.

Sclove, S.L. 1987. Application of some model-selection criteria to some problems in multivariate analysis. Psychometrika, 52(3), 333-343.

Shen, H., Yang, J. and Wang, S. 2004. Outlier detecting in fuzzy switching regression models. Artificial Intelligence: Methodology, Systems, and Applications. In Lecture Notes in Computer Science, 3192, 208-215.

Simpson, D.G., Ruppert, D. and Carroll, R.J. 1992. On one-step GM estimates and stability of inferences in linear regression. Journal of the American Statistical Association, 87(418), 439-450.

Song, W., Yao, W. and Xing, Y. 2014. Robust mixture regression model fitting by Laplace distribution. Computational Statistics and Data Analysis, 71,128-137.

Späth, H. 1979. Algorithm 39 Clusterwise linear regression. Computing, 22(4), 367-373.

Staudte, R.G. and Sheather, S.J. 1990. Robust Estimation and Testing. Wiley, 351 p., New York.

Strömgren, B. 1934. Tables and diagrams for dissecting a frequency curve into components by the half-invariant method. Scandinavian Actuarial Journal, 1934(1), 7-54.

Tukey, J.W.1960. A survey of sampling from contaminated distributions. Contributions to Probability and Statistics, I. Olkin, ed., Stanford Unversity Press, Stanford.

Tukey, J.W. 1962. The future of data analysis. The Annals of Mathematical Statistics, 33, 1-67.

Turner, T.R. 2000. Estimating the propagation rate of a viral infection of potato plants via mixtures of regressions. Journal of the Royal Statistical Society, Series C, 49(3), 371-384.

Wei, Y. 2012. Robust mixture regression models using t-distribution. Master Report, Kansas State University.

Weldon, W.F.R. 1892. Certain correlated variations in Crangon vulgaris. Proceedings of the Royal Society of London, 51, 1-21.

Weldon, W.F.R. 1893. On certain correlated variations in Carcinus maenas. Proceedings of the Royal Society of London, 54, 318-329.

Wolfe, J.H. 1965. A computer program for the computation of maximum likelihood analysis of types. Research Memo. SRM 65-12. U.S. Naval Personnel Research Activity, San Diego.

Wolfe, J.H. 1967. NORMIX: Computation methods for estimating the parameters of multivariate normal mixtures of distributions. Research Memo. SRM 68-2. U.S. Naval Personnel Research Activity, San Diego.

Wolfe, J.H. 1970. Pattern clustering by multivariate mixture analysis. Multivariate Behavioral Research, 5(3), 329-350.

Yao, W., Wei, Y. and Yu, C. 2014. Robust mixture regression using the t-distribution. Computational Statistics and Data Analysis, 71, 116–127.

Yohai, V.J. 1987. High breakdown-point and high efficiency robust estimates for regression. The Annals of Statistics, 15(2), 642-656.

Young, D.S. 2007. A study of mixtures of regressions. PhD Thesis, The Pennsylvania State University.

Zhang, J. 2013. Robust mixture regression modeling with Pearson Type VII distribution. Master Report, Kansas State University.

Zhu, H. and Zhang, H. 2004. Hypothesis testing in mixture regression models. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 66(1), 3-16.

EKLER

EK 1 Önerme 1.5'de Verilen Koşullu Beklenen Değerlerin İspatı

EK 2 MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST Modellerinin Karşılaştırılması için MATLAB R2013a Programında Yazılmış Olan Program Kodları

EK 3 MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe Modellerinin Karşılaştırılması için MATLAB R2013a Programında Yazılmış Olan Program Kodları

EK 4 Uygulamada Kullanılan Gerçek Veri Setleri

EK 1 Önerme 1.5'de Verilen Koşullu Beklenen Değerlerin İspatı

İspat.

$\boldsymbol{i}$) $Y = y$ verildiğinde τ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri

$$E(\tau|y) = \int_0^\infty \tau f(\tau|y)d\tau = \int_0^\infty \tau b\tau^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)} \Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)d\tau$$

$$= b\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}{\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu+3}{2}}} \int_0^\infty \Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right) \frac{\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu+3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)} \tau^{\frac{\nu+3}{2}-1} e^{-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)} d\tau$$

$$= b\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}{\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu+3}{2}}} E\left(\Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \left\{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)\right\}^{-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}{\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu+3}{2}}} T_{\nu+3}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+3}{\eta^2+\nu}}\right)$$

$$= \left(\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}\right) \frac{T_{\nu+3}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+3}{\eta^2+\nu}}\right)}{T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)} = \left(\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}\right) \frac{T_{\nu+3}\left(M\sqrt{\frac{\nu+3}{\nu+1}}\right)}{T_{\nu+1}(M)}$$

olur. Burada $M = \lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}$ dır.

$\boldsymbol{ii}$) $Y = y$ verildiğinde $\gamma\tau$ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri

$$E(\gamma\tau|y) = E(\tau E(\gamma|y,\tau)|y)$$

şeklinde yazıldığında

$$E(\gamma|y,\tau) = \delta_\lambda \frac{(y-\xi)}{\sigma} + \sqrt{\frac{1-\delta_\lambda^2}{\tau}} \frac{\phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}{\Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}$$

olur. Buradan

$$E(\gamma\tau|y) = \delta_\lambda \frac{(y-\xi)}{\sigma} E(\tau|y) + \sqrt{1-\delta_\lambda^2} E\left(\sqrt{\tau}\frac{\phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}{\Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}\middle| y\right)$$

olmak üzere

$$E\left(\sqrt{\tau}\frac{\phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}{\Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}\middle| y\right) = \int_0^\infty \sqrt{\tau}\frac{\phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}{\Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}\frac{f(\tau,y)}{f(y)}d\tau$$

$$= \int_0^\infty \sqrt{\tau}\frac{\phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}{\Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}\frac{1}{f(y)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\tau^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{(\nu/2)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\nu/2)}\exp\left(-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)\right)\Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)d\tau$$

$$= \frac{(\nu/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)\sigma f(y)}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\tau^{\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\lambda^2\eta^2\tau}{2}}d\tau$$

$$= \frac{(\nu/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)\pi\sigma f(y)}\int_0^\infty \tau^{\left(\frac{\nu}{2}+1\right)-1}e^{-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\eta^2}{1-\delta_\lambda^2}+\nu\right)}d\tau$$

$$= \frac{(\nu/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)\pi\sigma f(y)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\eta^2}{1-\delta_\lambda^2}+\nu\right)\right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma f(y)}\left(\frac{\eta^2}{\nu\left(1-\delta_\lambda^2\right)}+1\right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$E(\gamma\tau|y) = \delta_\lambda \frac{(y-\xi)}{\sigma} E(\tau|y) + \frac{\sqrt{1-\delta_\lambda^2}}{\pi\sigma f(y)}\left(\frac{\eta^2}{\nu\left(1-\delta_\lambda^2\right)}+1\right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}$$

olarak elde edilir.

iii) $Y = y$ verildiğinde $\gamma^2\tau$ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri benzer olarak

$$E(\gamma^2\tau|y) = E(\tau E(\gamma^2|y,\tau)|\tau)$$

şeklinde yazıldığında

$$E(\gamma^2|y,\tau) = \delta_\lambda^2 \frac{(y-\xi)^2}{\sigma^2} + \frac{\left(1-\delta_\lambda^2\right)}{\tau} + \delta_\lambda \sqrt{\frac{1-\delta_\lambda^2}{\tau}} \frac{(y-\xi)}{\sigma} \frac{\phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}{\Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)}$$

olur. Buradan

$$E(\gamma^2\tau|y) = \delta_\lambda^2 \frac{(y-\xi)^2}{\sigma^2} E(\tau|y) + \left(1-\delta_\lambda^2\right) + \frac{\delta_\lambda\sqrt{1-\delta_\lambda^2}(y-\xi)}{\pi\sigma^2 f(y)} \left(\frac{\eta^2}{\nu\left(1-\delta_\lambda^2\right)} + 1\right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}$$

olarak bulunur.

iv) $Y = y$ verildiğinde $\log(\tau)$ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri (1.50) eşitliği ile bulunan $f(\tau|y)$ fonksiyonunun integralinin ν parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle

$$\frac{d}{d\nu}\int_0^\infty f(\tau|y)\,d\tau = \frac{d}{d\nu}\int_0^\infty b\tau^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)} \Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right) d\tau = 0$$

olur. Buradan yukarıdaki eşitliğin çözümü için Leibnitz kuralı uygulanır:

$$= \int_0^\infty \frac{d}{d\nu}\left(b\tau^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)} \Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right)\right) d\tau = 0$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2} b(\log\tau)\, \tau^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)} \Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right) d\tau - \int_0^\infty \frac{1}{2} b\tau\, \tau^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)} \Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right) d\tau$$

$$+ \int_0^\infty \frac{d}{d\nu}(b)\, \tau^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)} \Phi\left(\lambda\eta\sqrt{\tau}\right) d\tau.$$

Türev için aşağıdaki işlemlere devam edilerek

$$I = \int_0^\infty \frac{d}{d\nu}\left(\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \left\{ \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)\right\}^{-1}\right) \frac{f(\tau|y)}{b} d\tau$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2}\log\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \left\{ \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)\right\}^{-1} \frac{f(\tau|y)}{b} d\tau$$

$$+ \int_0^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} \left\{ \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)\right\}^{-1} \frac{f(\tau|y)}{b} d\tau$$

$$- \int_0^\infty \frac{1}{2}\Gamma'\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{-2} \left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}$$

$$\times \left\{ \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)\right\}^{-1} \frac{f(\tau|y)}{b} d\tau$$

$$+ \int_0^\infty \frac{1}{2}\frac{d}{d\nu}\left(T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)^{-1}\right)\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \left\{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right\}^{-1} \frac{f(\tau|y)}{b} d\tau$$

ve aşağıda verilen türevin alınmasıyla

$$\frac{d}{d\nu}\left(T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)^{-1}\right)=$$

$$=t_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)\frac{\lambda\eta(\eta^2-1)}{\sqrt{(\nu+1)(\eta^2+\nu)^3}}T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)^{-2}$$

$$+\int_{-\infty}^{M}\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\sqrt{(\nu+1)\pi\sigma^2}}\left(1+\frac{x^2}{\nu+1}\right)^{-\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}dx$$

$$-\int_{-\infty}^{M}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{-2}\Gamma'\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\sqrt{(\nu+1)\pi\sigma^2}}\left(1+\frac{x^2}{\nu+1}\right)^{-\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}dx$$

$$-\int_{-\infty}^{M}\frac{1}{2}(\nu+1)^{-\frac{3}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\sqrt{\pi\sigma^2}}\left(1+\frac{x^2}{\nu+1}\right)^{-\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}dx$$

$$+\int_{-\infty}^{M}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\sqrt{(\nu+1)\pi\sigma^2}}\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{\nu+1}\right)^{-\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}\log\left(1+\frac{x^2}{\nu+1}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\nu+2}{2}\right)\frac{x^2}{(\nu+1)^2}\left(1+\frac{x^2}{\nu+1}\right)^{-\left(\frac{\nu+2}{2}\right)-1}\right\}dx$$

$$=t_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)\frac{\lambda\eta(\eta^2-1)}{\sqrt{(\nu+1)(\eta^2+\nu)^3}}T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)^{-2}$$

$$+\int_{-\infty}^{M}\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}t_{\nu+1}(x)dx-\int_{-\infty}^{M}\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}t_{\nu+1}(x)dx$$

$$-\int_{-\infty}^{M}\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{x^2}{\nu+1}\right)t_{\nu+1}(x)dx-\int_{-\infty}^{M}\frac{1}{2}\frac{x^2(\nu+1)-\nu-1}{(\nu+1)(\nu+1+x^2)}t_{\nu+1}(x)dx$$

olarak bulunur. Buradan yukarıdaki türev işleminin sonucunda elde edilen eşitliğin beklenen değerinin hesaplanmasıyla

$$E(\log\tau|y) - E(\tau|y) + \log\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right) + \left(\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}\right) - DG\left(\frac{\nu+1}{2}\right)$$
$$+t_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)^{-1}\frac{\lambda\eta(\eta^2-1)}{\sqrt{(\nu+1)(\eta^2+\nu)^3}}$$
$$-T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)^{-1}\int_{-\infty}^{M} g_\nu(x)t_{\nu+1}(x)dx = 0$$

olur. Burada

$$g_\nu(x) = DG\left(\frac{\nu+2}{2}\right) - DG\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \log\left(1+\frac{x^2}{\nu+1}\right) + \frac{x^2(\nu+1)-\nu-1}{(\nu+1)(\nu+1+x^2)}$$

dır. $E(\log\tau|y)$ beklenen değer ifadesinin eşitliğin karşı tarafına geçirilmesiyle

$$E(\log\tau|y) = DG\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \log\left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)$$
$$+\left(\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}\right)\left(\frac{T_{\nu+3}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+3}{\eta^2+\nu}}\right)}{T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)} - 1\right)$$
$$+\frac{\lambda\eta(\eta^2-1)}{\sqrt{(\nu+1)(\eta^2+\nu)^3}}\frac{t_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)}{T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)}$$
$$+\frac{1}{T_{\nu+1}\left(\lambda\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right)}\int_{-\infty}^{M} g_\nu(x)t_{\nu+1}(x)dx$$

olarak elde edilir.■

EK 2 MixregN, Mixregt, MixregSN ve MixregST Modellerinin Karşılaştırılması için MATLAB R2013a Programında Yazılmış Olan Program Kodları

```
'Örnek 4.1 ile verilen simülasyon çalışması için kullanılan bilgisayar kodları';
rng('shuffle');
clc
clear all
close all
ss=500;n=200;d=1;%Tekrar sayısı, örneklem hacmi, durum
b10=0;b11=1;b12=1;w1=0.25;b20=0;b21=-1;b22=-1;nu1=3;nu2=3;l1=0.5;l2=0.5;%başlangıç değerleri
s1=sqrt(1);s2=sqrt(1); %sigma için başlangıç değerleri Durum I,IV
%s1=sqrt(3);s2=sqrt(3);%Durum II,V
%s1=1.483;s2=1.483;%Durum III
s1ilk=s1;s2ilk=s2;b1ilk=[b10;b11;b12];b2ilk=[b20;b21;b22];w1ilk=w1;
saySS=0;
for j=1:ss
   [X1 X2 Y]=NregRND(n,b1ilk(1),b1ilk(2),b1ilk(3),b2ilk(1),b2ilk(2),b2ilk(3),l1,nu1,s1,w1ilk,d);
   saySS=saySS+1
   'Aykırı Gözlem-Durum V';
%    for i=1:10
%    X1(i,1)=20;
%    X2(i,1)=20;
%    Y(i,1)=100;
%    end
 'MixregN modeli';
   sayn3(j)=0;
   en1=1;en21(1)=1;en21(2)=1;en21(3)=1;en22(1)=1;en22(2)=1;en22(3)=1;en31=1;en32=1;
   bn1=[b10;b11;b12];bn2=[b20;b21;b12];wn=w1;sn1=s1;sn2=s2;
   sayss(j)=0;
while norm([en1;en21(1);en21(2);en21(3);en22(1);en22(2);en22(3);en31;en32])>0.0001
   sayn3(j)=sayn3(j)+1;%adım sayısı
   tn11=zeros(3,3);tn12=zeros(3,3);
   tn21=zeros(3,1);tn22=zeros(3,1);
   tn31=0;tn32=0;
   zn1sontop=0;zn2sontop=0;
for i=1:n
   'EM algoritması';
   'E-step';
   X=[1;X1(i);X2(i)];
   zn1=wn*normpdf((Y(i)),X'*bn1,sn1);
   zn2=(1-wn)*normpdf((Y(i)),X'*bn2,sn2);
   zntop=zn1+zn2;zn1son=zn1/zntop;zn2son=zn2/zntop;
   zn1sontop=zn1sontop+zn1son;%sum(zij) ilk doğru için
   zn2sontop=zn2sontop+zn2son;%sum(zij) ikinci doğru için
   'M-step';
   sn11=(X*X')*zn1son;
   tn11=tn11+sn11;%b1 için inverse taplamı
   sn12=(X*X')*zn2son;
   tn12=tn12+sn12;%b2 için inverse taplamı
   sn21=(X*Y(i))*zn1son;
   tn21=tn21+sn21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
   sn22=(X*Y(i))*zn2son;
   tn22=tn22+sn22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
   sn31=zn1son*(Y(i)-X'*bn1)^2;
   tn31=tn31+sn31;
   sn32=zn2son*(Y(i)-X'*bn2)^2;
   tn32=tn32+sn32;
```

```
end
   wn1_hat=zn1sontop/n;
   en1=wn1_hat-wn;wn=wn1_hat;
   bn1_hat=pinv(tn11)*(tn21);bn2_hat=pinv(tn12)*(tn22);
   en21=bn1_hat-bn1;en22=bn2_hat-bn2;
   bn1=[bn1_hat(1);bn1_hat(2);bn1_hat(3)];bn2=[bn2_hat(1);bn2_hat(2);bn2_hat(3)];
   sn1_hat=sqrt(tn31/zn1sontop);sn2_hat=sqrt(tn32/zn2sontop);
   if isnan(sn1_hat)
      sn1_hat=0;
   end
   if isnan(sn2_hat)
      sn2_hat=0;
   end
   if sn1_hat==0 || sn2_hat==0
      sn1_hat=max(sn1_hat,sn2_hat);
      sn2_hat=sn1_hat;
   else
      sn1_hat=(sn1_hat+sn2_hat)/2;
      sn2_hat=sn1_hat;
   end
   en31=sn1_hat-sn1;en32=sn2_hat-sn2;
   sn1=sn1_hat;sn2=sn2_hat;
   if sayn3(j)>500
      break;
   end
end
wn1_son(j)=wn;
bn1_son1(j)=bn1(1);bn1_son2(j)=bn1(2);bn1_son3(j)=bn1(3);
bn2_son1(j)=bn2(1);bn2_son2(j)=bn2(2);bn2_son3(j)=bn2(3);
msen11(j)=(bn1_son1(j)-b10)^2;msen12(j)=(bn1_son2(j)-b11)^2;msen13(j)=(bn1_son3(j)-b12)^2;
msen21(j)=(bn2_son1(j)-b20)^2;msen22(j)=(bn2_son2(j)-b21)^2;msen23(j)=(bn2_son3(j)-b22)^2;
msen3(j)=(wn1_son(j)-w1)^2;

'Mixregt modeli';
   sayt3(j)=0;
   et1=1;ecn2=1;et21(1)=1;et21(2)=1;et21(3)=1;et22(1)=1;et22(2)=1;et22(3)=1;et31=1;et32=1;
   bt1=[b10;b11;b12];bt2=[b20;b21;b22];wt=w1;st1=s1;st2=s2;
while norm([et1;et21(1);et21(2);et21(3);et22(1);et22(2);et22(3);et31;et32])>0.0001
   sayt3(j)=sayt3(j)+1;%adım sayısı
   tt11=zeros(3,3);tt12=zeros(3,3);
   tt21=zeros(3,1);tt22=zeros(3,1);tt31=0;tt32=0;
   zt1sontop=0;zt2sontop=0;
for i=1:n
   'EM algoritması';
   'E-step';
   X=[1;X1(i);X2(i)];
   zt1=wt*(1/st1)*tpdf((Y(i)-X'*bt1)/st1,nu1);
   zt2=(1-wt)*(1/st2)*tpdf((Y(i)-X'*bt2)/st2,nu2);
   zttop=zt1+zt2;zt1son=zt1/zttop;zt2son=zt2/zttop;
   zt1sontop=zt1sontop+zt1son;%sum(zij) ilk doğru için
   zt2sontop=zt2sontop+zt2son;%sum(zij) ikinci doğru için
   u11=(nu1+1)/(nu1+(((Y(i)-X'*bt1)/st1)^2));
   u12=(nu2+1)/(nu2+(((Y(i)-X'*bt2)/st2)^2));
   'M-step';
   st11=(X*X')*zt1son*u11;
   tt11=tt11+st11;%b1 için inverse taplamı
   st12=(X*X')*zt2son*u12;
   tt12=tt12+st12;%b2 için inverse taplamı
```

```
   st21=(X*Y(i))*zt1son*u11;
   tt21=tt21+st21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
   st22=(X*Y(i))*zt2son*u12;
   tt22=tt22+st22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
   st31=zt1son*u11*(Y(i)-X'*bt1)^2;
   tt31=tt31+st31;
   st32=zt2son*u12*(Y(i)-X'*bt2)^2;
   tt32=tt32+st32;
end
   wt1_hat=zt1sontop/n;
   et1=wt1_hat-wt;wt=wt1_hat;
   bt1_hat=pinv(tt11)*(tt21);bt2_hat=pinv(tt12)*(tt22);
   et21=bt1_hat-bt1;et22=bt2_hat-bt2;
   bt1=[bt1_hat(1);bt1_hat(2);bt1_hat(3)];bt2=[bt2_hat(1);bt2_hat(2);bt2_hat(3)];
   st1_hat=sqrt(tt31/zt1sontop);st2_hat=sqrt(tt32/zt2sontop);
   if isnan(st1_hat)
      st1_hat=0;
   end
   if isnan(st2_hat)
      st2_hat=0;
   end
   if st1_hat==0 || st2_hat==0
      st1_hat=max(st1_hat,st2_hat);
      st2_hat=st1_hat;
   else
      st1_hat=(st1_hat+st2_hat)/2;
      st2_hat=st1_hat;
   end
   et31=st1_hat-st1;et32=st2_hat-st2;
   st1=st1_hat;st2=st2_hat;
   if sayt3(j)>500
      break;
   end
end
wt1_son(j)=wt;
bt1_son1(j)=bt1(1);bt1_son2(j)=bt1(2);bt1_son3(j)=bt1(3);
bt2_son1(j)=bt2(1);bt2_son2(j)=bt2(2);bt2_son3(j)=bt2(3);
mset11(j)=(bt1_son1(j)-b10)^2;mset12(j)=(bt1_son2(j)-b11)^2;mset13(j)=(bt1_son3(j)-b12)^2;
mset21(j)=(bt2_son1(j)-b20)^2;mset22(j)=(bt2_son2(j)-b21)^2;mset23(j)=(bt2_son3(j)-b22)^2;
mset3(j)=(wt1_son(j)-w1)^2;

'MixregSN modeli';
   saysn3(j)=0;
   esn1=1;esn21(1)=1;esn21(2)=1;esn21(3)=1;esn22(1)=1;esn22(2)=1;esn22(3)=1;esn31=1;esn32=1;
   bsn1=[b10;b11;b12];bsn2=[b20;b21;b22];wsn=w1;ssn1=s1;ssn2=s2;
   ll1=l1;ll2=l2;dl1=ll1/(sqrt(1+ll1^2));dl2=ll2/(sqrt(1+ll2^2));a1=ssn1*dl1;a2=ssn2*dl2;
while norm([esn1;esn21(1);esn21(2);esn21(3);esn22(1);esn22(2);esn22(3);esn31;esn32])>0.0001
   saysn3(j)=saysn3(j)+1;%adım sayısı
   tsn11=zeros(3,3);tsn12=zeros(3,3);tsn21=zeros(3,1);tsn22=zeros(3,1);
   tsn31=0;tsn32=0;tsn41=0;tsn42=0;tsn51=0;tsn52=0;
   zsn1sontop=0;zsn2sontop=0;
   for i=1:n
   'EM algoritması';
   'E-step';
   X=[1;X1(i);X2(i)];
   zsn1=wsn*(2/(ssn1))*normpdf((Y(i)-X'*bsn1)/(ssn1),0,1)*normcdf(ll1*((Y(i)-X'*bsn1)/(ssn1)),0,1);
   zsn2=(1-wsn)*(2/(ssn2))*normpdf((Y(i)-X'*bsn2)/(ssn2),0,1)*normcdf(ll2*((Y(i)-
X'*bsn2)/(ssn2)),0,1);
```

```
   zsntop=zsn1+zsn2;zsn1son=zsn1/zsntop;zsn2son=zsn2/zsntop;
   zsn1sontop=zsn1sontop+zsn1son;%sum(zij) ilk doğru için
   zsn2sontop=zsn2sontop+zsn2son;%sum(zij) ikinci doğru için
   gsn11=dl1*((Y(i)-X'*bsn1)/(ssn1))+sqrt(1-dl1^2)*((normpdf(ll1*((Y(i)-
X'*bsn1)/(ssn1)),0,1))/(normcdf(ll1*((Y(i)-X'*bsn1)/(ssn1)),0,1)));
   gsn12=dl2*((Y(i)-X'*bsn2)/(ssn2))+sqrt(1-dl2^2)*((normpdf(ll2*((Y(i)-
X'*bsn2)/(ssn2)),0,1))/(normcdf(ll2*((Y(i)-X'*bsn2)/(ssn2)),0,1)));
   gsn21=1-dl1^2+dl1*((Y(i)-X'*bsn1)/(ssn1))*gsn11;gsn22=1-dl2^2+dl2*((Y(i)-
X'*bsn2)/(ssn2))*gsn12;
   'M-step';
   dsn11=zsn1son*(X*X');
   tsn11=tsn11+dsn11;%b1 için inverse taplamı
   dsn12=zsn2son*(X*X');
   tsn12=tsn12+dsn12;%b2 için inverse taplamı
   dsn21=zsn1son*(Y(i)-ssn1*dl1*gsn11)*X;
   tsn21=tsn21+dsn21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
   dsn22=zsn2son*(Y(i)-ssn2*dl2*gsn12)*X;
   tsn22=tsn22+dsn22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
   dsn31=zsn1son*gsn11*((Y(i)-X'*bsn1));
   tsn31=tsn31+dsn31;
   dsn32=zsn2son*gsn12*((Y(i)-X'*bsn2));
   tsn32=tsn32+dsn32;
   dsn41=zsn1son*gsn21;
   tsn41=tsn41+dsn41;
   dsn42=zsn2son*gsn22;
   tsn42=tsn42+dsn42;
   dsn51=zsn1son*(((Y(i)-X'*bsn1))^2-2*ssn1*dl1*gsn11*((Y(i)-X'*bsn1))+(ssn1*dl1)^2*gsn21);
   tsn51=tsn51+dsn51;
   dsn52=zsn2son*(((Y(i)-X'*bsn2))^2-2*ssn2*dl2*gsn12*((Y(i)-X'*bsn2))+(ssn2*dl2)^2*gsn22);
   tsn52=tsn52+dsn52;
end
   wsn1_hat=zsn1sontop/n;
   esn1=wsn1_hat-wsn;wsn=wsn1_hat;
   bsn1_hat=pinv(tsn11)*(tsn21);bsn2_hat=pinv(tsn12)*(tsn22);
   esn21=bsn1_hat-bsn1;esn22=bsn2_hat-bsn2;
   bsn1=[bsn1_hat(1);bsn1_hat(2);bsn1_hat(3)];bsn2=[bsn2_hat(1);bsn2_hat(2);bsn2_hat(3)];
   a1_hat=tsn31/tsn41;a2_hat=tsn32/tsn42;k1=tsn51/zsn1sontop;k2=tsn52/zsn2sontop;
   ssn1_hat=sqrt(k1+a1_hat^2);ssn2_hat=sqrt(k2+a2_hat^2);
   if isnan(ssn1_hat)
      ssn1_hat=0;
   end
   if isnan(ssn2_hat)
      ssn2_hat=0;
   end
   if ssn1_hat==0 || ssn2_hat==0
      ssn1_hat=max(ssn1_hat,ssn2_hat);
      ssn2_hat=ssn1_hat;
   else
      ssn1_hat=(ssn1_hat+ssn2_hat)/2;
      ssn2_hat=ssn1_hat;
   end
   esn31=ssn1_hat-ssn1;esn32=ssn2_hat-ssn2;
   ssn1=ssn1_hat;ssn2=ssn2_hat;
   if saysn3(j)>500
      break;
   end
end
wsn1_son(j)=wsn;
```

```
bsn1_son1(j)=bsn1(1);bsn1_son2(j)=bsn1(2);bsn1_son3(j)=bsn1(3);
bsn2_son1(j)=bsn2(1);bsn2_son2(j)=bsn2(2);bsn2_son3(j)=bsn2(3);
msesn11(j)=(bsn1_son1(j)-b10)^2;msesn12(j)=(bsn1_son2(j)-b11)^2;msesn13(j)=(bsn1_son3(j)-b12)^2;
msesn21(j)=(bsn2_son1(j)-b20)^2;msesn22(j)=(bsn2_son2(j)-b21)^2;msesn23(j)=(bsn2_son3(j)-b22)^2;
msesn3(j)=(wsn1_son(j)-w1)^2;

'MixregST modeli';
   sayst3(j)=0;
   est1=1;e2=1;est21(1)=1;est21(2)=1;est21(3)=1;est22(1)=1;est22(2)=1;est22(3)=1;est31=1;est32=1;
   bst1=[b10;b11;b12];bst2=[b20;b21;b22];wst=w1;sst1=s1;sst2=s2;llst1=l1;llst2=l2;
   dlst1=llst1/(sqrt(1+llst1^2));dlst2=llst2/(sqrt(1+llst2^2));ast1=sst1*dlst1;ast2=sst2*dlst2;
while norm([est1;est21(1);est21(2);est21(3);est22(1);est22(2);est22(3);est31;est32])>0.0001
   sayst3(j)=sayst3(j)+1;%adım sayısı
   tst11=zeros(3,3);tst12=zeros(3,3);tst21=zeros(3,1);tst22=zeros(3,1);
   tst31=0;tst32=0;tst41=0;tst42=0;tst51=0;tst52=0;
   zst1sontop=0;zst2sontop=0;
for i=1:n
   'EM algoritmsı';
   'E-step';
   X=[1;X1(i);X2(i)];
   zst1=wst*(2/(sst1))*tpdf((Y(i)-X'*bst1)/(sst1),nu1)*tcdf(llst1*((Y(i)-
X'*bst1)/(sst1))*sqrt((nu1+1)/((((Y(i)-X'*bst1)/(sst1))^2)+nu1)),nu1+1);
   zst2=(1-wst)*(2/(sst2))*tpdf((Y(i)-X'*bst2)/(sst2),nu2)*tcdf(llst2*((Y(i)-
X'*bst2)/(sst2))*sqrt((nu2+1)/((((Y(i)-X'*bst2)/(sst2))^2)+nu2)),nu2+1);
   zsttop=zst1+zst2;zst1son=zst1/zsttop;zst2son=zst2/zsttop;
   zst1sontop=zst1sontop+zst1son;%sum(zij) ilk doğru için
   zst2sontop=zst2sontop+zst2son;%sum(zij) ikinci doğru için
   sst11=zst1son*((nu1+1)/((((Y(i)-X'*bst1)/(sst1))^2)+nu1))*tcdf((llst1*((Y(i)-
X'*bst1)/(sst1))*sqrt((nu1+1)/((((Y(i)-
X'*bst1)/(sst1))^2)+nu1)))*sqrt((nu1+3)/(nu1+1)),nu1+3)/(tcdf(llst1*((Y(i)-
X'*bst1)/(sst1))*sqrt((nu1+1)/((((Y(i)-X'*bst1)/(sst1))^2)+nu1)),nu1+1));
   sst12=zst2son*((nu2+1)/((((Y(i)-X'*bst2)/(sst2))^2)+nu2))*tcdf((llst2*((Y(i)-
X'*bst2)/(sst2))*sqrt((nu2+1)/((((Y(i)-
X'*bst2)/(sst2))^2)+nu2)))*sqrt((nu2+3)/(nu2+1)),nu2+3)/(tcdf(llst2*((Y(i)-
X'*bst2)/(sst2))*sqrt((nu2+1)/((((Y(i)-X'*bst2)/(sst2))^2)+nu2)),nu2+1));
   sst21=dlst1*((Y(i)-X'*bst1)/sst1)*sst11+zst1son*((((sqrt(1-dlst1^2))/(pi*sst1*zsttop))*(((((Y(i)-
X'*bst1)/(sst1))^2)/(nu1*(1-dlst1^2)))+1))^(-((nu1/2)+1)));
   sst22=dlst2*((Y(i)-X'*bst2)/sst2)*sst12+zst2son*((((sqrt(1-dlst2^2))/(pi*sst2*zsttop))*(((((Y(i)-
X'*bst2)/(sst2))^2)/(nu2*(1-dlst2^2)))+1))^(-((nu2/2)+1)));
   sst31=dlst1^2*((((Y(i)-X'*bst1))^2)/(sst1^2))*sst11+zst1son*((1-dlst1^2)+((dlst1*sqrt(1-
dlst1^2)*(Y(i)-X'*bst1))/(pi*sst1^2*zsttop))*((((((Y(i)-X'*bst1)/(sst1))^2)/((nu1*(1-dlst1^2))))+1)^(-
((nu1/2)+1))));
   sst32=dlst2^2*((((Y(i)-X'*bst2))^2)/(sst2^2))*sst12+zst2son*((1-dlst2^2)+((dlst2*sqrt(1-
dlst2^2)*(Y(i)-X'*bst2))/(pi*sst2^2*zsttop))*((((((Y(i)-X'*bst2)/(sst2))^2)/((nu2*(1-dlst2^2))))+1)^(-
((nu2/2)+1))));
   'M-step';
   dst11=sst11*(X*X');
   tst11=tst11+dst11;%b1 için inverse taplamı
   dst12=sst12*(X*X');
   tst12=tst12+dst12;%b2 için inverse taplamı
   dst21=(Y(i)*sst11-sst1*dlst1*sst21)*X;
   tst21=tst21+dst21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
   dst22=(Y(i)*sst12-sst2*dlst2*sst22)*X;
   tst22=tst22+dst22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
   dst31=sst21*(Y(i)-X'*bst1);
   tst31=tst31+dst31;
   dst32=sst22*(Y(i)-X'*bst2);
   tst32=tst32+dst32;
```

```
    dst41=sst31;
    tst41=tst41+dst41;
    dst42=sst32;
    tst42=tst42+dst42;
    dst51=sst11*((Y(i)-X'*bst1)^2)-2*sst1*dlst1*sst21*(Y(i)-X'*bst1)+(sst1*dlst1)^2*sst31;
    tst51=tst51+dst51;
    dst52=sst12*((Y(i)-X'*bst2)^2)-2*sst2*dlst2*sst22*(Y(i)-X'*bst2)+(sst2*dlst2)^2*sst32;
    tst52=tst52+dst52;
end
    wst1_hat=zst1sontop/n;
    est1=wst1_hat-wst;wst=wst1_hat;
    bst1_hat=pinv(tst11)*(tst21);bst2_hat=pinv(tst12)*(tst22);
    est21=bst1_hat-bst1;est22=bst2_hat-bst2;
    bst1=[bst1_hat(1);bst1_hat(2);bst1_hat(3)];bst2=[bst2_hat(1);bst2_hat(2);bst2_hat(3)];
    ast1_hat=tst31/tst41;ast2_hat=tst32/tst42;kst1=tst51/zst1sontop;kst2=tst52/zst2sontop;
    sst1_hat=sqrt(kst1+ast1_hat^2);sst2_hat=sqrt(kst2+ast2_hat^2);
    if isnan(sst1_hat)
       sst1_hat=0;
    end
    if isnan(sst2_hat)
       sst2_hat=0;
    end
    if sst1_hat==0 || sst2_hat==0
       sst1_hat=max(sst1_hat,sst2_hat);
       sst2_hat=sst1_hat;
    else
       sst1_hat=(sst1_hat+sst2_hat)/2;
       sst2_hat=sst1_hat;
    end
    est31=sst1_hat-sst1;est32=sst2_hat-sst2;
    sst1=sst1_hat;sst2=sst2_hat;
    if sayst3(j)>500
       break;
    end
end
wst1_son(j)=wst;
bst1_son1(j)=bst1(1);bst1_son2(j)=bst1(2);bst1_son3(j)=bst1(3);
bst2_son1(j)=bst2(1);bst2_son2(j)=bst2(2);bst2_son3(j)=bst2(3);
msest11(j)=(bst1_son1(j)-b10)^2;msest12(j)=(bst1_son2(j)-b11)^2;msest13(j)=(bst1_son3(j)-b12)^2;
msest21(j)=(bst2_son1(j)-b20)^2;msest22(j)=(bst2_son2(j)-b21)^2;msest23(j)=(bst2_son3(j)-b22)^2;
msest3(j)=(wst1_son(j)-w1)^2;
end

'MixregN modeli simülasyon sonuçları';
wn1_sonn=mean(wn1_son);
bn1_sonn1=mean(bn1_son1);bn1_sonn2=mean(bn1_son2);bn1_sonn3=mean(bn1_son3);
bn2_sonn1=mean(bn2_son1);bn2_sonn2=mean(bn2_son2);bn2_sonn3=mean(bn2_son3);
mse_sonn11=(sum(msen11)/ss);mse_sonn12=(sum(msen12)/ss);mse_sonn13=(sum(msen13)/ss);
mse_sonn21=(sum(msen21)/ss);mse_sonn22=(sum(msen22)/ss);mse_sonn23=(sum(msen23)/ss);
mse_sonn3=(sum(msen3)/ss);
bias_wn1=wn1_sonn-w1;bias_bn1_sonn1=bn1_sonn1-b10;bias_bn1_sonn2=bn1_sonn2-
b11;bias_bn1_sonn3=bn1_sonn3-b12;
bias_bn2_sonn1=bn2_sonn1-b20;bias_bn2_sonn2=bn2_sonn2-b21;bias_bn2_sonn3=bn2_sonn3-b22;
sonucn=[bn1_sonn1 bn2_sonn1 bn1_sonn2 bn2_sonn2 bn1_sonn3 bn2_sonn3 wn1_sonn;mse_sonn11
mse_sonn21 mse_sonn12 mse_sonn22 mse_sonn13 mse_sonn23 mse_sonn3;bias_bn1_sonn1
bias_bn2_sonn1 bias_bn1_sonn2 bias_bn2_sonn2 bias_bn1_sonn3 bias_bn2_sonn3 bias_wn1]
```

```
'Mixregt modeli simülasyon sonuçları';
wt1_sonn=mean(wt1_son);
bt1_sonn1=mean(bt1_son1);bt1_sonn2=mean(bt1_son2);bt1_sonn3=mean(bt1_son3);
bt2_sonn1=mean(bt2_son1);bt2_sonn2=mean(bt2_son2);bt2_sonn3=mean(bt2_son3);
mse_sont11=(sum(mset11)/ss);mse_sont12=(sum(mset12)/ss);mse_sont13=(sum(mset13)/ss);
mse_sont21=(sum(mset21)/ss);mse_sont22=(sum(mset22)/ss);mse_sont23=(sum(mset23)/ss);
mse_sont3=(sum(mset3)/ss);
bias_wt1=wt1_sonn-w1;bias_bt1_sonn1=bt1_sonn1-b10;bias_bt1_sonn2=bt1_sonn2-
b11;bias_bt1_sonn3=bt1_sonn3-b12;
bias_bt2_sonn1=bt2_sonn1-b20;bias_bt2_sonn2=bt2_sonn2-b21;bias_bt2_sonn3=bt2_sonn3-b22;
sonuct=[bt1_sonn1 bt2_sonn1 bt1_sonn2 bt2_sonn2 bt1_sonn3 bt2_sonn3 wt1_sonn;mse_sont11
mse_sont21 mse_sont12 mse_sont22 mse_sont13 mse_sont23 mse_sont3;bias_bt1_sonn1 bias_bt2_sonn1
bias_bt1_sonn2 bias_bt2_sonn2 bias_bt1_sonn3 bias_bt2_sonn3 bias_wt1]

'MixregSN modeli simülasyon sonuçları';
wsn1_sonn=mean(wsn1_son);
bsn1_sonn1=mean(bsn1_son1);bsn1_sonn2=mean(bsn1_son2);bsn1_sonn3=mean(bsn1_son3);
bsn2_sonn1=mean(bsn2_son1);bsn2_sonn2=mean(bsn2_son2);bsn2_sonn3=mean(bsn2_son3);
mse_sonsn11=(sum(msesn11)/ss);mse_sonsn12=(sum(msesn12)/ss);mse_sonsn13=(sum(msesn13)/ss);
mse_sonsn21=(sum(msesn21)/ss);mse_sonsn22=(sum(msesn22)/ss);mse_sonsn23=(sum(msesn23)/ss);
mse_sonsn3=(sum(msesn3)/ss);
bias_wsn1=wsn1_sonn-w1;bias_bsn1_sonn1=bsn1_sonn1-b10;
bias_bsn1_sonn2=bsn1_sonn2-b11;bias_bsn1_sonn3=bsn1_sonn3-b12;
bias_bsn2_sonn1=bsn2_sonn1-b20;bias_bsn2_sonn2=bsn2_sonn2-b21;
bias_bsn2_sonn3=bsn2_sonn3-b22;
sonucsn=[bsn1_sonn1 bsn2_sonn1 bsn1_sonn2 bsn2_sonn2 bsn1_sonn3 bsn2_sonn3
wsn1_sonn;mse_sonsn11 mse_sonsn21 mse_sonsn12 mse_sonsn22 mse_sonsn13 mse_sonsn23
mse_sonsn3;bias_bsn1_sonn1 bias_bsn2_sonn1 bias_bsn1_sonn2 bias_bsn2_sonn2 bias_bsn1_sonn3
bias_bsn2_sonn3 bias_wsn1]

'MixregST modeli simülasyon sonuçları';
wst1_sonn=mean(wst1_son);
bst1_sonn1=mean(bst1_son1);bst1_sonn2=mean(bst1_son2);bst1_sonn3=mean(bst1_son3);
bst2_sonn1=mean(bst2_son1);bst2_sonn2=mean(bst2_son2);bst2_sonn3=mean(bst2_son3);
mse_sonst11=(sum(msest11)/ss);mse_sonst12=(sum(msest12)/ss);mse_sonst13=(sum(msest13)/ss);
mse_sonst21=(sum(msest21)/ss);mse_sonst22=(sum(msest22)/ss);mse_sonst23=(sum(msest23)/ss);
mse_sonst3=(sum(msest3)/ss);
bias_wst1=wst1_sonn-w1;bias_bst1_sonn1=bst1_sonn1-b10;bias_bst1_sonn2=bst1_sonn2-
b11;bias_bst1_sonn3=bst1_sonn3-b12;
bias_bst2_sonn1=bst2_sonn1-b20;bias_bst2_sonn2=bst2_sonn2-b21;bias_bst2_sonn3=bst2_sonn3-b22;
sonucst=[bst1_sonn1 bst2_sonn1 bst1_sonn2 bst2_sonn2 bst1_sonn3 bst2_sonn3 wst1_sonn;mse_sonst11
mse_sonst21 mse_sonst12 mse_sonst22 mse_sonst13 mse_sonst23 mse_sonst3;bias_bst1_sonn1
bias_bst2_sonn1 bias_bst1_sonn2 bias_bst2_sonn2 bias_bst1_sonn3 bias_bst2_sonn3 bias_wst1]

'İki bileşenli karma regresyon modelinden veri üreten fonksiyon';

function [X1 X2 Y]=NregRND(n,b10,b11,b12,b20,b21,b22,l1,nu1,s1,w1,d)
b1=[b10;b11;b12;];b2=[b20;b21;b22];
say1=0;say2=0;dl1=l1/(sqrt(1+l1^2));
for i=1:n
   X1(i)=normrnd(0,1);X2(i)=normrnd(0,1);X=[1;X1(i);X2(i)];
   u=unifrnd(0,1);U11=normrnd(0,1); U12=normrnd(0,1);
if d==1%Durum I,V
   e(i)=normrnd(0,1);
elseif d==2 %Durum II
   e(i)=trnd(3);
elseif d==3  %Durum III
```

```
   e(i)=(u<=0.95)*normrnd(0,1)+(u>0.95)*normrnd(0,5);
else %Durum IV
   U1(i)=dl1*U11+sqrt(1-dl1^2)*U12;
   if U11>=0
      e11(i)=U1(i);
   else
      e11(i)=-U1(i);
   end
   t1=chi2rnd(nu1)/nu1;
   e(i)=(s1)*(e11(i)/(sqrt(t1)));
end
   if rand(1,1)<=w1
   Y(i)=X'*b1+sqrt(1)*e(i);
   say1=say1+1;%birinci gruptan üretilen veri sayısı
   else
   Y(i)=X'*b2+sqrt(1)*e(i);
   Say2=say2+1; %ikinci gruptan üretilen veri sayısı
   end
end
Y=Y';X1=X1';X2=X2';
say1;say2;
```

'**Ses tonu verisi için başlangıç değerleri (R programında mixreg paketi kullanılarak elde edilmiştir)':**

```
b10=1.91637986;b11=0.04254862;w1=0.697722;
b20=-0.0192755;b21=0.9922958;
nu1=2;nu2=2;
s1=0.04619217;s2=0.13283446;
lsn1=-0.01;lsn2=1.9;
lst1=-0.1;lst2=0.3599;
```

'**Yaprak biti verisi için başlangıç değerleri (R programında mixreg paketi kullanılarak elde edilmiştir)':**

```
b10=0.858546603;b11=0.002397666;w1=0.4983741;
b20=3.47443379;b21=0.05525652;
 s1=1.124859;s2=3.115324;
nu1=2;nu2=2;
```

EK 3 MixregHuber, MixregTukey, MixregGM-Mallows ve MixregGM-Schweppe Modellerinin Karşılaştırılması için MATLAB R2013a Programında Yazılmış Olan Program Kodları

```
'Örnek 4.3 ile verilen simülasyon çalışması için kullanılan bilgisayar kodları';
rng('shuffle');
clc
clear all
close all
ss=500;n=200;d1=1;%Tekrar sayısı, örneklem hacmi, durum
c1=1.345;c2=4.685;%Ayarlama sabitleri
b10=0;b11=4;b20=0;b21=-4;w1=0.5;%başlangıç değerleri
s1=sqrt(1);s2=sqrt(1);%sigma için başlangıç değerleri Durum I
%s1=sqrt(3);s2=sqrt(3);%Durum II,IV
%s1=1.4832;s2=1.4832;%Durum III
b1ilk=[b10;b11];b2ilk=[b20;b21];w1ilk=w1;
saySS=0;
for j=1:ss
   [X1 Y say say1 s1 s2]=GMregRND(n,b1ilk(1),b1ilk(2),b2ilk(1),b2ilk(2),w1ilk,d1);
   saySS=saySS+1
   'Aykırı gözlem';% n=200 için 5 ve n=400 için simülasyon çalışmasında belirtilen noktalar eklenir
   Xx=X1;
   'MCD'; %Minumum kovaryans determinant tahmin edicileri
   [rew,raw]=mcdcov(Xx,'alpha',0.75);
   muson=rew.center;sSon=rew.cov;%m(X) ve C(X)
for i=1:length(Xx)
   mucok(i,:)=muson;
end
   D2=(Xx-mucok)*inv(sSon)*(Xx-mucok)';
   md1=(diag(D2));%Dayanıklı Mahalonobis uzaklıkları
   a=1;
for i=1:n
   WgmM1(i)=min(1,(chi2inv(0.95,1)/(md1(i)))^(a/2));%GM-tahmin yöntemi için ağırlıklar
end
WgmM1=WgmM1';

'MixregGM-Mallows';
   saygmM(j)=0;
   egmM1=1;egmM21(1)=1;egmM21(2)=1;egmM22(1)=1;egmM22(2)=1;egmM31=1;egmM32=1;
   bgmM1=[b10;b11];bgmM2=[b20;b21];
   wgmM=w1;sgmM1=s1;sgmM2=s2;
   d=6;p=2;h=((n-p)/n)*(d^2+(1-d^2)*normcdf(d,0,1)-0.5-d*exp((-1/2)*d^2)/sqrt(2*pi));
while norm([egmM1;egmM21(1);egmM21(2);egmM22(1);egmM22(2);egmM31;egmM32])>0.0001
   saygmM(j)=saygmM(j)+1;
tgmM11=zeros(2,2);tgmM12=zeros(2,2);tgmM21=zeros(2,1);tgmM22=zeros(2,1);
tgmM31=0;tgmM32=0;zgmM1sontop=0;zgmM2sontop=0;
for i=1:n
   'EM algoritması';
   'E-step';
   X=[1;X1(i)];
   zgmM1=wgmM*normpdf((Y(i)),X'*bgmM1,sgmM1);
   zgmM2=(1-wgmM)*normpdf((Y(i)),X'*bgmM2,sgmM2);
   zgmMtop=zgmM1+zgmM2;zgmM1son=zgmM1/zgmMtop;zgmM2son=zgmM2/zgmMtop;
   zgmM1sontop=zgmM1sontop+zgmM1son;%sum(zij) ilk doğru için
   zgmM2sontop=zgmM2sontop+zgmM2son;%sum(zij) ikinci doğru için
   psigmMH1=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bgmM1)/sgmM1));
```

```
    psigmMH2=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bgmM2)/sgmM2));
    zzgmMH1son=(zgmM1son*WgmM1(i)*psigmMH1)/((Y(i)-X'*bgmM1)/sgmM1);
    zzgmMH2son=(zgmM2son*WgmM1(i)*psigmMH2)/((Y(i)-X'*bgmM2)/sgmM2);
    K1gmMij=min((((Y(i)-X'*bgmM1)/sgmM1)^2)/2,d^2/2)*(sgmM1)^2;
    K2gmMij=min((((Y(i)-X'*bgmM2)/sgmM2)^2)/2,d^2/2)*(sgmM2)^2;
    'M-step';
    dsgmM11=(X*X')*zzgmMH1son;
    tgmM11=tgmM11+dsgmM11;%b1 için inverse taplamı
    dsgmM12=(X*X')*zzgmMH2son;
    tgmM12=tgmM12+dsgmM12;%b2 için inverse taplamı
    dsgmM21=(X*Y(i))*zzgmMH1son;
    tgmM21=tgmM21+dsgmM21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
    dsgmM22=(X*Y(i))*zzgmMH2son;
    tgmM22=tgmM22+dsgmM22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
    dsgmM31=zgmM1son*K1gmMij;
    tgmM31=tgmM31+dsgmM31;%s1 için toplam
    dsgmM32=zgmM2son*K2gmMij;
    tgmM32=tgmM32+dsgmM32;%s2 için toplam
end
    wgmM1_hat=zgmM1sontop/n;
    egmM1=wgmM1_hat-wgmM;wgmM=wgmM1_hat;
    bgmM1_hat=pinv(tgmM11)*(tgmM21);bgmM2_hat=pinv(tgmM12)*(tgmM22);
    egmM21=bgmM1_hat-bgmM1;egmM22=bgmM2_hat-bgmM2;
    bgmM1=[bgmM1_hat(1);bgmM1_hat(2)];bgmM2=[bgmM2_hat(1);bgmM2_hat(2)];
    sgmM1_hat=sqrt((tgmM31)/(zgmM1sontop*h));sgmM2_hat=sqrt((tgmM32)/(zgmM2sontop*h));
    egmM31=sgmM1_hat-sgmM1;sgmM1=sgmM1_hat;
    egmM32=sgmM2_hat-sgmM2;sgmM2=sgmM2_hat;
    if saygmM(j)>500
       break;
    end
end
    wgmM1_son(j)=wgmM;
    bgmM1_son1(j)=bgmM1(1);bgmM1_son2(j)=bgmM1(2);
    bgmM2_son1(j)=bgmM2(1);bgmM2_son2(j)=bgmM2(2);
    msegmM11(j)=(bgmM1_son1(j)-b10)^2;msegmM12(j)=(bgmM1_son2(j)-b11)^2;
    msegmM21(j)=(bgmM2_son1(j)-b20)^2;msegmM22(j)=(bgmM2_son2(j)-b21)^2;
    msegmM3(j)=(wgmM1_son(j)-w1)^2;

'MixregGM-Schweppe';
    saygmS(j)=0;saynan2(j)=0;
    egmS1=1;egmS21(1)=1;egmS21(2)=1;egmS22(1)=1;egmS22(2)=1;egmS31=1;egmS32=1;
    bgmS1=[b10;b11];bgmS2=[b20;b21];
    wgmS=w1;sgmS1=s1;sgmS2=s2;
    d=6;p=2;h=((n-p)/n)*(d^2+(1-d^2)*normcdf(d,0,1)-0.5-d*sqrt(2*pi)*exp((-1/2)*d^2));
while norm([egmS1;egmS21(1);egmS21(2);egmS22(1);egmS22(2);egmS31;egmS32])>0.0001
    saygmS(j)=saygmS(j)+1;
    tgmS11=zeros(2,2);tgmS12=zeros(2,2);tgmS21=zeros(2,1);tgmS22=zeros(2,1);tgmS31=0;tgmS32=0;
    zgmS1sontop=0;zgmS2sontop=0;
for i=1:n
    'EM algoritmsı';
    'E-step';
    X=[1;X1(i)];
    zgmS1=wgmS*normpdf((Y(i)),X'*bgmS1,sgmS1);
    zgmS2=(1-wgmS)*normpdf((Y(i)),X'*bgmS2,sgmS2);
    zgmStop=zgmS1+zgmS2;zgmS1son=zgmS1/zgmStop;zgmS2son=zgmS2/zgmStop;
    zgmS1sontop=zgmS1sontop+zgmS1son;%sum(zij) ilk doğru için
    zgmS2sontop=zgmS2sontop+zgmS2son;%sum(zij) ikinci doğru için
    psigmSH1=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bgmS1)/(WgmM1(i)*sgmS1)));
```

```
    psigmSH2=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bgmS2)/(WgmM1(i)*sgmS2)));
    zzgmMS1son=(zgmS1son*WgmM1(i)*psigmSH1)/((Y(i)-X'*bgmS1)/sgmS1);
    zzgmMS2son=(zgmS2son*WgmM1(i)*psigmSH2)/((Y(i)-X'*bgmS2)/sgmS2);
    K1gmSij=min((((Y(i)-X'*bgmS1)/sgmS1)^2)/2,d^2/2)*(sgmS1)^2;
    K2gmSij=min((((Y(i)-X'*bgmS2)/sgmS2)^2)/2,d^2/2)*(sgmS2)^2;
    'M-step';
    dsgmS11=(X*X')*zzgmMS1son;
    tgmS11=tgmS11+dsgmS11;%b1 için inverse taplamı
    dsgmS12=(X*X')*zzgmMS2son;
    tgmS12=tgmS12+dsgmS12;%b2 için inverse taplamı
    dsgmS21=(X*Y(i))*zzgmMS1son;
    tgmS21=tgmS21+dsgmS21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
    dsgmS22=(X*Y(i))*zzgmMS2son;
    tgmS22=tgmS22+dsgmS22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
    dsgmS31=zgmS1son*K1gmSij;%s1 için toplam
    tgmS31=tgmS31+dsgmS31;
    dsgmS32=zgmS2son*K2gmSij;%s2 için toplam
    tgmS32=tgmS32+dsgmS32;
end
    wgmS1_hat=zgmS1sontop/n;
    egmS1=wgmS1_hat-wgmS;wgmS=wgmS1_hat;
    bgmS1_hat=pinv(tgmS11)*(tgmS21);bgmS2_hat=pinv(tgmS12)*(tgmS22);
    egmS21=bgmS1_hat-bgmS1;egmS22=bgmS2_hat-bgmS2;
    bgmS1=[bgmS1_hat(1);bgmS1_hat(2)];bgmS2=[bgmS2_hat(1);bgmS2_hat(2)];
    sgmS1_hat=sqrt((tgmS31)/(zgmS1sontop*h));sgmS2_hat=sqrt((tgmS32)/(zgmS2sontop*h));
    egmS31=sgmS1_hat-sgmS1;egmS32=sgmS2_hat-sgmS2;
    sgmS1=sgmS1_hat;sgmS2=sgmS2_hat;
    if saygmS(j)>500
       break;
    end
end
    wgmS1_son(j)=wgmS;
    bgmS1_son1(j)=bgmS1(1);bgmS1_son2(j)=bgmS1(2);
    bgmS2_son1(j)=bgmS2(1);bgmS2_son2(j)=bgmS2(2);
    msegmS11(j)=(bgmS1_son1(j)-b10)^2;msegmS12(j)=(bgmS1_son2(j)-b11)^2;
    msegmS21(j)=(bgmS2_son1(j)-b20)^2;msegmS22(j)=(bgmS2_son2(j)-b21)^2;
    msegmS3(j)=(wgmS1_son(j)-w1)^2;

'MixregHuber';
    sayhn(j)=0;
    ehn1=1;ehn21(1)=1;ehn21(2)=1;ehn22(1)=1;ehn22(2)=1;ehn31=1;ehn32=1;
    bhn1=[b10;b11];bhn2=[b20;b21];whn=w1;shn1=s1;shn2=s2;
 while norm([ehn1;ehn21(1);ehn21(2);ehn22(1);ehn22(2);ehn31;ehn32])>0.0001
    sayhn(j)=sayhn(j)+1;
    thn11=zeros(2,2);thn12=zeros(2,2);thn21=zeros(2,1);thn22=zeros(2,1);thn31=0;thn32=0;
    zhn1sontop=0;zhn2sontop=0;
for i=1:n
    'EM algoritmsı';
    'E-step';
    X=[1;X1(i)];
    zhn1=whn*normpdf((Y(i)),X'*bhn1,shn1);
    zhn2=(1-whn)*normpdf((Y(i)),X'*bhn2,shn2);
    zhntop=zhn1+zhn2;zhn1son=zhn1/zhntop;zhn2son=zhn2/zhntop;
    zhn1sontop=zhn1sontop+zhn1son;%sum(zij) ilk doğru için
    zhn2sontop=zhn2sontop+zhn2son;%sum(zij) ikinci doğru için
    psiH1=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bhn1)/shn1));
    psiH2=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bhn2)/shn2));
    zznH1son=(zhn1son*psiH1)/((Y(i)-X'*bhn1)/shn1);
```

```
    zznH2son=(zhn2son*psiH2)/((Y(i)-X'*bhn2)/shn2);
    w1ij=min(1-(1-((Y(i)-X'*bhn1)/(1.56*shn1))^2)^3,1)*(shn1/(Y(i)-X'*bhn1))^2;
    w2ij=min(1-(1-((Y(i)-X'*bhn2)/(1.56*shn2))^2)^3,1)*(shn2/(Y(i)-X'*bhn2))^2;
    'M-step';
    dshn11=(X*X')*zznH1son;
    thn11=thn11+dshn11;%b1 için inverse taplamı
    dshn12=(X*X')*zznH2son;
    thn12=thn12+dshn12;%b2 için inverse taplamı
    dshn21=(X*Y(i))*zznH1son;
    thn21=thn21+dshn21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
    dshn22=(X*Y(i))*zznH2son;
    thn22=thn22+dshn22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
    dshn31=zhn1son*((Y(i)-X'*bhn1)^2)*w1ij;
    thn31=thn31+dshn31;%s1 için toplam
    dshn32=zhn2son*((Y(i)-X'*bhn2)^2)*w2ij;
    thn32=thn32+dshn32;%s2 için toplam
end
    whn1_hat=zhn1sontop/n;
    ehn1=whn1_hat-whn;whn=whn1_hat;
    bhn1_hat=pinv(thn11)*(thn21);bhn2_hat=pinv(thn12)*(thn22);
    ehn21=bhn1_hat-bhn1;ehn22=bhn2_hat-bhn2;
    bhn1=[bhn1_hat(1);bhn1_hat(2)];bhn2=[bhn2_hat(1);bhn2_hat(2)];
    shn1_hat=sqrt(2*(thn31)/zhn1sontop);shn2_hat=sqrt(2*(thn32)/zhn2sontop);
    ehn31=shn1_hat-shn1;ehn32=shn2_hat-shn2;
    shn1=shn1_hat;shn2=shn2_hat;
    if sayhn(j)>500
       break;
    end
end
    whn1_son(j)=whn;
    bhn1_son1(j)=bhn1(1);bhn1_son2(j)=bhn1(2);bhn2_son1(j)=bhn2(1);bhn2_son2(j)=bhn2(2);
    msehn11(j)=(bhn1_son1(j)-b10)^2;msehn12(j)=(bhn1_son2(j)-b11)^2;
    msehn21(j)=(bhn2_son1(j)-b20)^2;msehn22(j)=(bhn2_son2(j)-b21)^2;
    msehn3(j)=(whn1_son(j)-w1)^2;

'MixregTukey';
    saytn(j)=0;
    etn1=1;etn21(1)=1;etn21(2)=1;etn22(1)=1;etn22(2)=1;etn31=1;etn32=1;
    btn1=[b10;b11];btn2=[b20;b21];wtn=w1;stn1=s1;stn2=s2;
 while norm([etn1;etn21(1);etn21(2);etn22(1);etn22(2);etn31;etn32])>0.0001
    saytn(j)=saytn(j)+1;
    ttn11=zeros(2,2);ttn12=zeros(2,2);ttn21=zeros(2,1);ttn22=zeros(2,1);ttn31=0;ttn32=0;
    ztn1sontop=0;ztn2sontop=0;
for i=1:n
    'EM algoritması';
    'E-step';
    X=[1;X1(i)];
    ztn1=wtn*normpdf((Y(i)),X'*btn1,stn1);
    ztn2=(1-wtn)*normpdf((Y(i)),X'*btn2,stn2);
    ztntop=ztn1+ztn2;ztn1son=ztn1/ztntop;ztn2son=ztn2/ztntop;
    ztn1sontop=ztn1sontop+ztn1son;%sum(zij) ilk doğru için
    ztn2sontop=ztn2sontop+ztn2son;%sum(zij) ikinci doğru için
    psiT1=((Y(i)-X'*btn1)/stn1)*((1-((Y(i)-X'*btn1)/(2*c2*stn1))^2)^2);
    psiT2=((Y(i)-X'*btn2)/stn2)*((1-((Y(i)-X'*btn2)/(2*c2*stn2))^2)^2);
    zznT1son=(ztn1son*psiT1)/((Y(i)-X'*btn1)/stn1);
    zznT2son=(ztn2son*psiT2)/((Y(i)-X'*btn2)/stn2);
    w1ij=min(1-(1-((Y(i)-X'*btn1)/(1.56*stn1))^2)^3,1)*(stn1/(Y(i)-X'*btn1))^2;
    w2ij=min(1-(1-((Y(i)-X'*btn2)/(1.56*stn2))^2)^3,1)*(stn2/(Y(i)-X'*btn2))^2;
```

```
   'M-step';
   dstn11=(X*X')*zznT1son;
   ttn11=ttn11+dstn11;%b1 için inverse taplamı
   dstn12=(X*X')*zznT2son;
   ttn12=ttn12+dstn12;%b2 için inverse taplamı
   dstn21=(X*Y(i))*zznT1son;
   ttn21=ttn21+dstn21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
   dstn22=(X*Y(i))*zznT2son;
   ttn22=ttn22+dstn22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
   dstn31=ztn1son*((Y(i)-X'*btn1)^2)*w1ij;
   ttn31=ttn31+dstn31;%s1 için toplam
   dstn32=ztn2son*((Y(i)-X'*btn2)^2)*w2ij;
   ttn32=ttn32+dstn32;%s2 için toplam
end
   wtn1_hat=ztn1sontop/n;
   etn1=wtn1_hat-wtn;wtn=wtn1_hat;
   btn1_hat=pinv(ttn11)*(ttn21);btn2_hat=pinv(ttn12)*(ttn22);
   etn21=btn1_hat-btn1;etn22=btn2_hat-btn2;
   btn1=[btn1_hat(1);btn1_hat(2)];btn2=[btn2_hat(1);btn2_hat(2)];
   stn1_hat=sqrt(2*(ttn31)/ztn1sontop);stn2_hat=sqrt(2*(ttn32)/ztn2sontop);
   etn31=stn1_hat-stn1;etn32=stn2_hat-stn2;
   stn1=stn1_hat;stn2=stn2_hat;
   if saytn(j)>500
      break;
   end
end
   wtn1_son(j)=wtn;
   btn1_son1(j)=btn1(1);btn1_son2(j)=btn1(2);btn2_son1(j)=btn2(1);btn2_son2(j)=btn2(2);
   msetn11(j)=(btn1_son1(j)-b10)^2;msetn12(j)=(btn1_son2(j)-b11)^2;
   msetn21(j)=(btn2_son1(j)-b20)^2;msetn22(j)=(btn2_son2(j)-b21)^2;
   msetn3(j)=(wtn1_son(j)-w1)^2;
end

'MixregGM-Mallows modeli simülasyon sonuçları';
wgmM1_sonn=mean(wgmM1_son);
bgmM1_sonn1=mean(bgmM1_son1);bgmM1_sonn2=mean(bgmM1_son2);
bgmM2_sonn1=mean(bgmM2_son1);bgmM2_sonn2=mean(bgmM2_son2);
mse_songmM11=(sum(msegmM11)/ss);mse_songmM12=(sum(msegmM12)/ss);
mse_songmM21=(sum(msegmM21)/ss);mse_songmM22=(sum(msegmM22)/ss);
mse_songmM3=(sum(msegmM3)/ss);
bias_wgmM1=wgmM1_sonn-w1;bias_bgmM1_sonn1=bgmM1_sonn1-b10;
bias_bgmM1_sonn2=bgmM1_sonn2-b11;
bias_bgmM2_sonn1=bgmM2_sonn1-b20;bias_bgmM2_sonn2=bgmM2_sonn2-b21;
sonucgmM=[bgmM1_sonn1 bgmM2_sonn1 bgmM1_sonn2 bgmM2_sonn2
wgmM1_sonn;mse_songmM11 mse_songmM21 mse_songmM12 mse_songmM22
mse_songmM3;bias_bgmM1_sonn1 bias_bgmM2_sonn1 bias_bgmM1_sonn2 bias_bgmM2_sonn2
bias_wgmM1]

'MixregGM-Schweppe modeli simülasyon sonuçları';
wgmS1_sonn=mean(wgmS1_son);
bgmS1_sonn1=mean(bgmS1_son1);bgmS1_sonn2=mean(bgmS1_son2);
bgmS2_sonn1=mean(bgmS2_son1);bgmS2_sonn2=mean(bgmS2_son2);
mse_songmS11=(sum(msegmS11)/ss);mse_songmS12=(sum(msegmS12)/ss);
mse_songmS21=(sum(msegmS21)/ss);mse_songmS22=(sum(msegmS22)/ss);
mse_songmS3=(sum(msegmS3)/ss);
bias_wgmS1=wgmS1_sonn-w1;bias_bgmS1_sonn1=bgmS1_sonn1-b10;
bias_bgmS1_sonn2=bgmS1_sonn2-b11;bias_bgmS2_sonn1=bgmS2_sonn1-b20;
bias_bgmS2_sonn2=bgmS2_sonn2-b21;
```

```
sonucgmS=[bgmS1_sonn1 bgmS2_sonn1 bgmS1_sonn2 bgmS2_sonn2 wgmS1_sonn;mse_songmS11
mse_songmS21 mse_songmS12 mse_songmS22 mse_songmS3;bias_bgmS1_sonn1 bias_bgmS2_sonn1
bias_bgmS1_sonn2 bias_bgmS2_sonn2 bias_wgmS1]

'MixregHuber modeli simülasyon sonuçları';
whn1_sonn=mean(whn1_son);
bhn1_sonn1=mean(bhn1_son1);bhn1_sonn2=mean(bhn1_son2);
bhn2_sonn1=mean(bhn2_son1);bhn2_sonn2=mean(bhn2_son2);
mse_sonhn11=(sum(msehn11)/ss);mse_sonhn12=(sum(msehn12)/ss);mse_sonhn21=(sum(msehn21)/ss);
mse_sonhn22=(sum(msehn22)/ss);mse_sonhn3=(sum(msehn3)/ss);
bias_whn1=whn1_sonn-w1;bias_bhn1_sonn1=bhn1_sonn1-b10;bias_bhn1_sonn2=bhn1_sonn2-b11;
bias_bhn2_sonn1=bhn2_sonn1-b20;bias_bhn2_sonn2=bhn2_sonn2-b21;
sonuchn=[bhn1_sonn1 bhn2_sonn1 bhn1_sonn2 bhn2_sonn2 whn1_sonn;mse_sonhn11 mse_sonhn21
mse_sonhn12 mse_sonhn22 mse_sonhn3;bias_bhn1_sonn1 bias_bhn2_sonn1 bias_bhn1_sonn2
bias_bhn2_sonn2 bias_whn1]

'MixregTukey modeli simülasyon sonuçları';
wtn1_sonn=mean(wtn1_son);
btn1_sonn1=mean(btn1_son1);btn1_sonn2=mean(btn1_son2);
btn2_sonn1=mean(btn2_son1);btn2_sonn2=mean(btn2_son2);
mse_sontn11=(sum(msetn11)/ss);mse_sontn12=(sum(msetn12)/ss);mse_sontn21=(sum(msetn21)/ss);
mse_sontn22=(sum(msetn22)/ss);mse_sontn3=(sum(msetn3)/ss);
bias_wtn1=wtn1_sonn-w1;bias_btn1_sonn1=btn1_sonn1-b10;bias_btn1_sonn2=btn1_sonn2-b11;
bias_btn2_sonn1=btn2_sonn1-b20;bias_btn2_sonn2=btn2_sonn2-b21;
sonuctn=[btn1_sonn1 btn2_sonn1 btn1_sonn2 btn2_sonn2 wtn1_sonn;mse_sontn11 mse_sontn21
mse_sontn12 mse_sontn22 mse_sontn3;bias_btn1_sonn1 bias_btn2_sonn1 bias_btn1_sonn2
bias_btn2_sonn2 bias_wtn1]

'İki bileşenli karma regresyon modelinden veri üreten fonksiyon';

function [X1 Y say say1 s1 s2]=GMregRND(n,b10,b11,b20,b21,w1,d)
b1=[b10;b11];b2=[b20;b21];say1=0;say2=0;
for i=1:n
   X1(i)=normrnd(0,1);X=[1;X1(i)];u=unifrnd(0,1);
if d==1 %Durum I,IV
   e(i)=normrnd(0,1);
elseif d==2 %Durum II
   e(i)=trnd(4);
else %Durum III
   e(i)=(u<=0.95)*normrnd(0,1)+(u>0.95)*normrnd(0,5);
end
   if rand(1,1)<=w1
   Y(i)=X'*b1+sqrt(1)*e(i);
   say1=say1+1;%birinci gruptan üretilen veri sayısı
   else
   Y(i)=X'*b2+sqrt(1)*e(i);
   say2=say2+1;%ikinci gruptan üretilen veri sayısı
   end
end
Y=Y';X1=X1';
say1;say2;
```

```
'Örnek 4.4 ile verilen simülasyon çalışması için kullanılan bilgisayar kodları';
rng('shuffle');
clc
clear all
close all
ss=500;n=200;d1=1;%Tekrar sayısı, örneklem hacmi, durum
c1=1.345;c2=4.685;%Ayarlama sabitleri
b10=0;b11=1;b12=1;w1=0.25;b20=0;b21=-1;b22=-1;d1=1;p=3;
s1=sqrt(1);s2=sqrt(1);%sigma için başlangıç değerleri Durum I
%s1=sqrt(3);s2=sqrt(3); %Durum II,IV
%s1=1.4832;s2=1.4832; %Durum III
b1ilk=[b10;b11;b12];b2ilk=[b20;b21;b22];w1ilk=w1;
saySS=0;
for j=1:ss
   [X1 X2 Y]= GMregRND2(n,b1ilk(1),b1ilk(2),b1ilk(3),b2ilk(1),b2ilk(2),b2ilk(3),w1ilk,d1);
   saySS=saySS+1
   'Aykırı gözlem';% n=200 için 5 ve n=400 için simülasyon çalışmasında belirtilen noktalar eklenir
   Xx=[X1 X2];
   'MCD';%Minumum kovaryans determinant tahmin edicileri
   [rew,raw]=mcdcov(Xx,'alpha',0.75);
   muson=rew.center; %m(X)
   sSon=rew.cov; %C(X)
for i=1:length(Xx)
   mucok(i,:)=muson;
end
   D2=(Xx-mucok)*inv(sSon)*(Xx-mucok)';
   md1=(diag(D2));%Dayanıklı Mahalonobis uzaklıkları
   a=1;
for i=1:n
   WgmM1(i)=min(1,(chi2inv(0.95,p-1)/(md1(i)))^(a/2));%GM-tahmin yöntemi için ağırlıklar
end
WgmM1=WgmM1';
'MixregGM-Mallows';
   saygmM(j)=0;saynan1(j)=0;say0(j)=0;
egmM1=1;egmM21(1)=1;egmM21(2)=1;egmM21(3)=1;egmM22(1)=1;egmM22(2)=1;egmM22(3)=1;
egmM31=1;egmM32=1;
bgmM1=[b10;b11;b12];bgmM2=[b20;b21;b12];wgmM=w1;sgmM1=s1;sgmM2=s2;
d=6;h=((n-p)/n)*(d^2+(1-d^2)*normcdf(d,0,1)-0.5-d*exp((-1/2)*d^2)/sqrt(2*pi));
while
norm([egmM1;egmM21(1);egmM21(2);egmM21(3);egmM22(1);egmM22(2);egmM22(3);egmM31;egm
M32])>0.0001
   saygmM(j)=saygmM(j)+1;
tgmM11=zeros(3,3);tgmM12=zeros(3,3);tgmM21=zeros(3,1);tgmM22=zeros(3,1);tgmM31=0;
tgmM32=0;zgmM1sontop=0;zgmM2sontop=0;
for i=1:n
   'EM algoritması';
   'E-step';
   X=[1;X1(i);X2(i)];
   zgmM1=wgmM*(normpdf((Y(i)),X'*bgmM1,sgmM1));
   zgmM2=(1-wgmM)*normpdf((Y(i)),X'*bgmM2,sgmM2);
   zgmMtop=zgmM1+zgmM2;
   if zgmMtop<10^(-6)
      zgmMtop=10^(-6);
      say0(j)=say0(j)+1;
   else
      zgmMtop=zgmMtop;
   end
   zgmM1son=zgmM1/zgmMtop;zgmM2son=zgmM2/zgmMtop;
```

```
   zgmM1sontop=zgmM1sontop+zgmM1son;%sum(zij) ilk doğru için
   zgmM2sontop=zgmM2sontop+zgmM2son;%sum(zij) ikinci doğru için
   psigmMH1=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bgmM1)/sgmM1));
   psigmMH2=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bgmM2)/sgmM2));
   zzgmMH1son=(zgmM1son*WgmM1(i)*psigmMH1)/((Y(i)-X'*bgmM1)/sgmM1);
   zzgmMH2son=(zgmM2son*WgmM1(i)*psigmMH2)/((Y(i)-X'*bgmM2)/sgmM2);
   K1gmMij=min((((Y(i)-X'*bgmM1)/sgmM1)^2)/2,d^2/2)*(sgmM1)^2;
   K2gmMij=min((((Y(i)-X'*bgmM2)/sgmM2)^2)/2,d^2/2)*(sgmM2)^2;
   'M-step';
   dsgmM11=(X*X')*zzgmMH1son;
   tgmM11=tgmM11+dsgmM11;%b1 için inverse taplamı
   dsgmM12=(X*X')*zzgmMH2son;
   tgmM12=tgmM12+dsgmM12;%b2 için inverse taplamı
   dsgmM21=(X*Y(i))*zzgmMH1son;
   tgmM21=tgmM21+dsgmM21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
   dsgmM22=(X*Y(i))*zzgmMH2son;
   tgmM22=tgmM22+dsgmM22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
   dsgmM31=zgmM1son*K1gmMij;
   tgmM31=tgmM31+dsgmM31;%s1 için toplam
   dsgmM32=zgmM2son*K2gmMij;
   tgmM32=tgmM32+dsgmM32; %s2 için toplam
end
   wgmM1_hat=zgmM1sontop/n;
   egmM1=wgmM1_hat-wgmM;wgmM=wgmM1_hat;
   bgmM1_hat=pinv(tgmM11)*(tgmM21);bgmM2_hat=pinv(tgmM12)*(tgmM22);
   egmM21=bgmM1_hat-bgmM1;egmM22=bgmM2_hat-bgmM2;
   bgmM1=[bgmM1_hat(1);bgmM1_hat(2);bgmM1_hat(3)];
   bgmM2=[bgmM2_hat(1);bgmM2_hat(2);bgmM2_hat(3)];
   sgmM1_hat=sqrt((tgmM31)/(zgmM1sontop*h));
   sgmM2_hat=sqrt((tgmM32)/(zgmM2sontop*h));
   egmM31=sgmM1_hat-sgmM1;egmM32=sgmM2_hat-sgmM2;
   sgmM1=sgmM1_hat;sgmM2=sgmM2_hat;
   if saygmM(j)>500
     break;
   end
end
   wgmM1_son(j)=wgmM;
   bgmM1_son1(j)=bgmM1(1);bgmM1_son2(j)=bgmM1(2);bgmM1_son3(j)=bgmM1(3);
   bgmM2_son1(j)=bgmM2(1);bgmM2_son2(j)=bgmM2(2);bgmM2_son3(j)=bgmM2(3);
   msegmM11(j)=(bgmM1_son1(j)-b10)^2;msegmM12(j)=(bgmM1_son2(j)-b11)^2;
   msegmM13(j)=(bgmM1_son3(j)-b12)^2;msegmM21(j)=(bgmM2_son1(j)-b20)^2;
   msegmM22(j)=(bgmM2_son2(j)-b21)^2;msegmM23(j)=(bgmM2_son3(j)-b22)^2;
   msegmM3(j)=(wgmM1_son(j)-w1)^2;

'MixregGM-Schweppe';
   saygmS(j)=0;
egmS1=1;egmS21(1)=1;egmS21(2)=1;egmS21(3)=1;egmS22(1)=1;egmS22(2)=1;egmS22(3)=1;
egmS31=1;egmS32=1;
bgmS1=[b10;b11;b12];bgmS2=[b20;b21;b12];wgmS=w1;sgmS1=s1;sgmS2=s2;
d=6;h=((n-p)/n)*(d^2+(1-d^2)*normcdf(d,0,1)-0.5-d*sqrt(2*pi)*exp((-1/2)*d^2));
while
norm([egmS1;egmS21(1);egmS21(2);egmS21(3);egmS22(1);egmS22(2);egmS22(3);egmS31;egmS32])>
0.0001
   saygmS(j)=saygmS(j)+1;
   tgmS11=zeros(3,3);tgmS12=zeros(3,3);tgmS21=zeros(3,1);tgmS22=zeros(3,1);tgmS31=0;tgmS32=0;
   zgmS1sontop=0;zgmS2sontop=0;
for i=1:n
```

```
    'EM algoritmsı';
    'E-step';
    X=[1;X1(i);X2(i)];
    zgmS1=wgmS*normpdf((Y(i)),X'*bgmS1,sgmS1);
    zgmS2=(1-wgmS)*normpdf((Y(i)),X'*bgmS2,sgmS2);
    zgmStop=zgmS1+zgmS2;
    if zgmStop<10^(-6)
       zgmStop=10^(-6);
    else
       zgmStop=zgmStop;
    end
    zgmS1son=zgmS1/zgmStop;zgmS2son=zgmS2/zgmStop;
    zgmS1sontop=zgmS1sontop+zgmS1son;%sum(zij) ilk doğru için
    zgmS2sontop=zgmS2sontop+zgmS2son;%sum(zij) ikinci doğru için
    psigmSH1=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bgmS1)/(WgmM1(i)*sgmS1)));
    psigmSH2=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bgmS2)/(WgmM1(i)*sgmS2)));
    zzgmMS1son=(zgmS1son*WgmM1(i)*psigmSH1)/((Y(i)-X'*bgmS1)/sgmS1);
    zzgmMS2son=(zgmS2son*WgmM1(i)*psigmSH2)/((Y(i)-X'*bgmS2)/sgmS2);
    K1gmSij=min((((Y(i)-X'*bgmS1)/sgmS1)^2)/2,d^2/2)*(sgmS1)^2;
    K2gmSij=min((((Y(i)-X'*bgmS2)/sgmS2)^2)/2,d^2/2)*(sgmS2)^2;
    'M-step';
    dsgmS11=(X*X')*zzgmMS1son;
    tgmS11=tgmS11+dsgmS11;%b1 için inverse taplamı
    dsgmS12=(X*X')*zzgmMS2son;
    tgmS12=tgmS12+dsgmS12;%b2 için inverse taplamı
    dsgmS21=(X*Y(i))*zzgmMS1son;
    tgmS21=tgmS21+dsgmS21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
    dsgmS22=(X*Y(i))*zzgmMS2son;
    tgmS22=tgmS22+dsgmS22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
    dsgmS31=zgmS1son*K1gmSij;
    tgmS31=tgmS31+dsgmS31;%s1 için toplam
    dsgmS32=zgmS2son*K2gmSij;
    tgmS32=tgmS32+dsgmS32;%s2 için toplam
end
    wgmS1_hat=zgmS1sontop/n;
    egmS1=wgmS1_hat-wgmS;wgmS=wgmS1_hat;
    bgmS1_hat=pinv(tgmS11)*(tgmS21);bgmS2_hat=pinv(tgmS12)*(tgmS22);
    egmS21=bgmS1_hat-bgmS1;egmS22=bgmS2_hat-bgmS2;
    bgmS1=[bgmS1_hat(1);bgmS1_hat(2);bgmS1_hat(3)];
    bgmS2=[bgmS2_hat(1);bgmS2_hat(2);bgmS2_hat(3)];
    sgmS1_hat=sqrt((tgmS31)/(zgmS1sontop*h));sgmS2_hat=sqrt((tgmS32)/(zgmS2sontop*h));
    egmS31=sgmS1_hat-sgmS1;egmS32=sgmS2_hat-sgmS2;
    sgmS1=sgmS1_hat;sgmS2=sgmS2_hat;
    if saygmS(j)>500
       break;
    end
end
    wgmS1_son(j)=wgmS;
    bgmS1_son1(j)=bgmS1(1);bgmS1_son2(j)=bgmS1(2);bgmS1_son3(j)=bgmS1(3);
    bgmS2_son1(j)=bgmS2(1);bgmS2_son2(j)=bgmS2(2);bgmS2_son3(j)=bgmS2(3);
    msegmS11(j)=(bgmS1_son1(j)-b10)^2;msegmS12(j)=(bgmS1_son2(j)-b11)^2;
    msegmS13(j)=(bgmS1_son3(j)-b12)^2;msegmS21(j)=(bgmS2_son1(j)-b20)^2;
    msegmS22(j)=(bgmS2_son2(j)-b21)^2;msegmS23(j)=(bgmS2_son3(j)-b22)^2;
    msegmS3(j)=(wgmS1_son(j)-w1)^2;
```

```
'MixregHuber';
   sayhn(j)=0;
   ehn1=1;ehn21(1)=1;ehn21(2)=1;ehn21(3)=1;ehn22(1)=1;ehn22(2)=1;ehn22(3)=1;ehn31=1;ehn32=1;
   bhn1=[b10;b11;b12];bhn2=[b20;b21;b12];whn=w1;shn1=s1;shn2=s2;
 while norm([ehn1;ehn21(1);ehn21(2);ehn21(3);ehn22(1);ehn22(2);ehn22(3);ehn31;ehn32])>0.0001
   sayhn(j)=sayhn(j)+1;
   thn11=zeros(3,3);thn12=zeros(3,3);thn21=zeros(3,1);thn22=zeros(3,1);thn31=0;thn32=0;
   zhn1sontop=0;zhn2sontop=0;
for i=1:n
   'EM algoritmsı';
   'E-step';
   X=[1;X1(i);X2(i)];
   zhn1=whn*normpdf((Y(i)),X'*bhn1,shn1);
   zhn2=(1-whn)*normpdf((Y(i)),X'*bhn2,shn2);
   zhntop=zhn1+zhn2;
    if zhntop<10^(-6)
      zhntop=10^(-6);
   else
      zhntop=zhntop;
   end
   zhn1son=zhn1/zhntop;zhn2son=zhn2/zhntop;
   zhn1sontop=zhn1sontop+zhn1son;%sum(zij) ilk doğru için
   zhn2sontop=zhn2sontop+zhn2son;%sum(zij) ikinci doğru için
   psiH1=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bhn1)/shn1));
   psiH2=max(-c1,min(c1,(Y(i)-X'*bhn2)/shn2));
   zznH1son=(zhn1son*psiH1)/((Y(i)-X'*bhn1)/shn1);
   zznH2son=(zhn2son*psiH2)/((Y(i)-X'*bhn2)/shn2);
   w1ij=min(1-(1-((Y(i)-X'*bhn1)/(1.56*shn1))^2)^3,1)*(shn1/(Y(i)-X'*bhn1))^2;
   w2ij=min(1-(1-((Y(i)-X'*bhn2)/(1.56*shn2))^2)^3,1)*(shn2/(Y(i)-X'*bhn2))^2;
   'M-step';
   dshn11=(X*X')*zznH1son;
   thn11=thn11+dshn11;%b1 için inverse taplamı
   dshn12=(X*X')*zznH2son;
   thn12=thn12+dshn12;%b2 için inverse taplamı
   dshn21=(X*Y(i))*zznH1son;
   thn21=thn21+dshn21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
   dshn22=(X*Y(i))*zznH2son;
   thn22=thn22+dshn22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
   dshn31=zhn1son*((Y(i)-X'*bhn1)^2)*w1ij;
   thn31=thn31+dshn31;%s1 için toplam
   dshn32=zhn2son*((Y(i)-X'*bhn2)^2)*w2ij;
   thn32=thn32+dshn32;%s2 için toplam
end
   whn1_hat=zhn1sontop/n;
   ehn1=whn1_hat-whn;whn=whn1_hat;
   bhn1_hat=pinv(thn11)*(thn21);bhn2_hat=pinv(thn12)*(thn22);
   ehn21=bhn1_hat-bhn1;ehn22=bhn2_hat-bhn2;
   bhn1=[bhn1_hat(1);bhn1_hat(2);bhn1_hat(3)];
   bhn2=[bhn2_hat(1);bhn2_hat(2);bhn2_hat(3)];
   shn1_hat=sqrt(2*(thn31)/zhn1sontop);shn2_hat=sqrt(2*(thn32)/zhn2sontop);
   ehn31=shn1_hat-shn1;ehn32=shn2_hat-shn2;
   shn1=shn1_hat;shn2=shn2_hat;
   if sayhn(j)>500
      break;
   end
end
   whn1_son(j)=whn;
   bhn1_son1(j)=bhn1(1);bhn1_son2(j)=bhn1(2);bhn1_son3(j)=bhn1(3);
```

```
   bhn2_son1(j)=bhn2(1);bhn2_son2(j)=bhn2(2);bhn2_son3(j)=bhn2(3);
   msehn11(j)=(bhn1_son1(j)-b10)^2;msehn12(j)=(bhn1_son2(j)-b11)^2;
   msehn13(j)=(bhn1_son3(j)-b12)^2;msehn21(j)=(bhn2_son1(j)-b20)^2;
   msehn22(j)=(bhn2_son2(j)-b21)^2;msehn23(j)=(bhn2_son3(j)-b22)^2;
   msehn3(j)=(whn1_son(j)-w1)^2;

'MixregTukey';
   saytn(j)=0;
   etn1=1;etn21(1)=1;etn21(2)=1;etn21(3)=1;etn22(1)=1;etn22(2)=1;etn22(3)=1;etn31=1;etn32=1;
   btn1=[b10;b11;b12];btn2=[b20;b21;b12];wtn=w1;stn1=s1;stn2=s2;
 while norm([etn1;etn21(1);etn21(2);etn21(3);etn22(1);etn22(2);etn22(3);etn31;etn32])>0.0001
   saytn(j)=saytn(j)+1;
   ttn11=zeros(3,3);ttn12=zeros(3,3);ttn21=zeros(3,1);ttn22=zeros(3,1);ttn31=0;ttn32=0;
   ztn1sontop=0;ztn2sontop=0;
for i=1:n
   'EM algoritması';
   'E-step';
   X=[1;X1(i);X2(i)];
   ztn1=wtn*normpdf((Y(i)),X'*btn1,stn1);
   ztn2=(1-wtn)*normpdf((Y(i)),X'*btn2,stn2);
   ztntop=ztn1+ztn2;
   if ztntop<10^(-6)
      ztntop=10^(-6);
   else
      ztntop=ztntop;
   end
   ztn1son=ztn1/ztntop;ztn2son=ztn2/ztntop;
   ztn1sontop=ztn1sontop+ztn1son;%sum(zij) ilk doğru için
   ztn2sontop=ztn2sontop+ztn2son;%sum(zij) ikinci doğru için
   psiT1=((Y(i)-X'*btn1)/stn1)*((1-((Y(i)-X'*btn1)/(2*c2*stn1))^2)^2);
   psiT2=((Y(i)-X'*btn2)/stn2)*((1-((Y(i)-X'*btn2)/(2*c2*stn2))^2)^2);
   zznT1son=(ztn1son*psiT1)/((Y(i)-X'*btn1)/stn1);
   zznT2son=(ztn2son*psiT2)/((Y(i)-X'*btn2)/stn2);
   w1ij=min(1-(1-((Y(i)-X'*btn1)/(1.56*stn1))^2)^3,1)*(stn1/(Y(i)-X'*btn1))^2;
   w2ij=min(1-(1-((Y(i)-X'*btn2)/(1.56*stn2))^2)^3,1)*(stn2/(Y(i)-X'*btn2))^2;
   'M-step';
   dstn11=(X*X')*zznT1son;
   ttn11=ttn11+dstn11;%b1 için inverse taplamı
   dstn12=(X*X')*zznT2son;
   ttn12=ttn12+dstn12;%b2 için inverse taplamı
   dstn21=(X*Y(i))*zznT1son;
   ttn21=ttn21+dstn21;%b1 için ikinci çarpım taplamı
   dstn22=(X*Y(i))*zznT2son;
   ttn22=ttn22+dstn22;%b2 için ikinci çarpım taplamı
   dstn31=ztn1son*((Y(i)-X'*btn1)^2)*w1ij;
   ttn31=ttn31+dstn31;%s1 için toplam
   dstn32=ztn2son*((Y(i)-X'*btn2)^2)*w2ij;
   ttn32=ttn32+dstn32;%s2 için toplam
end
   wtn1_hat=ztn1sontop/n;
   etn1=wtn1_hat-wtn;wtn=wtn1_hat;
   btn1_hat=pinv(ttn11)*(ttn21);btn2_hat=pinv(ttn12)*(ttn22);
   etn21=btn1_hat-btn1;etn22=btn2_hat-btn2;
   btn1=[btn1_hat(1);btn1_hat(2);btn1_hat(3)];
   btn2=[btn2_hat(1);btn2_hat(2);btn2_hat(3)];
   stn1_hat=sqrt(2*(ttn31)/ztn1sontop);stn2_hat=sqrt(2*(ttn32)/ztn2sontop);
   etn31=stn1_hat-stn1;etn32=stn2_hat-stn2;
   stn1=stn1_hat;stn2=stn2_hat;
```

```
   if saytn(j)>500
      break;
   end
end
   wtn1_son(j)=wtn;
   btn1_son1(j)=btn1(1);btn1_son2(j)=btn1(2);btn1_son3(j)=btn1(3);
   btn2_son1(j)=btn2(1);btn2_son2(j)=btn2(2);btn2_son3(j)=btn2(3);
   msetn11(j)=(btn1_son1(j)-b10)^2;msetn12(j)=(btn1_son2(j)-b11)^2;msetn13(j)=(btn1_son3(j)-b12)^2;
   msetn21(j)=(btn2_son1(j)-b20)^2;msetn22(j)=(btn2_son2(j)-b21)^2;msetn23(j)=(btn2_son3(j)-b22)^2;
   msetn3(j)=(wtn1_son(j)-w1)^2;
end
```

'MixregGM-Mallows modeli simülasyon sonuçları';

```
wgmM1_sonn=mean(wgmM1_son);
bgmM1_sonn1=mean(bgmM1_son1);bgmM1_sonn2=mean(bgmM1_son2);
bgmM1_sonn3=mean(bgmM1_son3);bgmM2_sonn1=mean(bgmM2_son1);
bgmM2_sonn2=mean(bgmM2_son2);bgmM2_sonn3=mean(bgmM2_son3);
mse_songmM11=(sum(msegmM11)/ss);mse_songmM12=(sum(msegmM12)/ss);
mse_songmM13=(sum(msegmM13)/ss);mse_songmM21=(sum(msegmM21)/ss);
mse_songmM22=(sum(msegmM22)/ss);mse_songmM23=(sum(msegmM23)/ss);
mse_songmM3=(sum(msegmM3)/ss);
bias_wgmM1=wgmM1_sonn-w1;bias_bgmM1_sonn1=bgmM1_sonn1-b10;
bias_bgmM1_sonn2=bgmM1_sonn2-b11;bias_bgmM1_sonn3=bgmM1_sonn3-b12;
bias_bgmM2_sonn1=bgmM2_sonn1-b20;bias_bgmM2_sonn2=bgmM2_sonn2-b21;
bias_bgmM2_sonn3=bgmM2_sonn3-b22;
sonucgmM=[bgmM1_sonn1 bgmM2_sonn1 bgmM1_sonn2 bgmM2_sonn2 bgmM1_sonn3
bgmM2_sonn3 wgmM1_sonn;mse_songmM11 mse_songmM21 mse_songmM12 mse_songmM22
mse_songmM13 mse_songmM23 mse_songmM3;bias_bgmM1_sonn1 bias_bgmM2_sonn1
bias_bgmM1_sonn2 bias_bgmM2_sonn2 bias_bgmM1_sonn3 bias_bgmM2_sonn3 bias_wgmM1]
```

'MixregGM-Schweppe modeli simülasyon sonuçları';

```
wgmS1_sonn=mean(wgmS1_son);
bgmS1_sonn1=mean(bgmS1_son1);bgmS1_sonn2=mean(bgmS1_son2);
bgmS1_sonn3=mean(bgmS1_son3);bgmS2_sonn1=mean(bgmS2_son1);
bgmS2_sonn2=mean(bgmS2_son2);bgmS2_sonn3=mean(bgmS2_son3);
mse_songmS11=(sum(msegmS11)/ss);mse_songmS12=(sum(msegmS12)/ss);
mse_songmS13=(sum(msegmS13)/ss);mse_songmS21=(sum(msegmS21)/ss);
mse_songmS22=(sum(msegmS22)/ss);mse_songmS23=(sum(msegmS23)/ss);
mse_songmS3=(sum(msegmS3)/ss);
bias_wgmS1=wgmS1_sonn-w1;bias_bgmS1_sonn1=bgmS1_sonn1-b10;
bias_bgmS1_sonn2=bgmS1_sonn2-b11;bias_bgmS1_sonn3=bgmS1_sonn3-b12;
bias_bgmS2_sonn1=bgmS2_sonn1-b20;bias_bgmS2_sonn2=bgmS2_sonn2-b21;
bias_bgmS2_sonn3=bgmS2_sonn3-b22;
sonucgmS=[bgmS1_sonn1 bgmS2_sonn1 bgmS1_sonn2 bgmS2_sonn2 bgmS1_sonn3 bgmS2_sonn3
wgmS1_sonn;mse_songmS11 mse_songmS21 mse_songmS12 mse_songmS22 mse_songmS13
mse_songmS23 mse_songmS3;bias_bgmS1_sonn1 bias_bgmS2_sonn1 bias_bgmS1_sonn2
bias_bgmS2_sonn2 bias_bgmS1_sonn3 bias_bgmS2_sonn3 bias_wgmS1]
```

'MixregHuber modeli simülasyon sonuçları';

```
whn1_sonn=mean(whn1_son);
bhn1_sonn1=mean(bhn1_son1);bhn1_sonn2=mean(bhn1_son2);bhn1_sonn3=mean(bhn1_son3);
bhn2_sonn1=mean(bhn2_son1);bhn2_sonn2=mean(bhn2_son2);bhn2_sonn3=mean(bhn2_son3);
mse_sonhn11=(sum(msehn11)/ss);mse_sonhn12=(sum(msehn12)/ss);mse_sonhn13=(sum(msehn13)/ss);
mse_sonhn21=(sum(msehn21)/ss);mse_sonhn22=(sum(msehn22)/ss);mse_sonhn23=(sum(msehn23)/ss);
mse_sonhn3=(sum(msehn3)/ss);
bias_whn1=whn1_sonn-w1;bias_bhn1_sonn1=bhn1_sonn1-b10;bias_bhn1_sonn2=bhn1_sonn2-b11;
bias_bhn1_sonn3=bhn1_sonn3-b12;bias_bhn2_sonn1=bhn2_sonn1-b20;
bias_bhn2_sonn2=bhn2_sonn2-b21;bias_bhn2_sonn3=bhn2_sonn3-b22;
```

```
sonuchn=[bhn1_sonn1 bhn2_sonn1 bhn1_sonn2 bhn2_sonn2 bhn1_sonn3 bhn2_sonn3
whn1_sonn;mse_sonhn11 mse_sonhn21 mse_sonhn12 mse_sonhn22 mse_sonhn13 mse_sonhn23
mse_sonhn3;bias_bhn1_sonn1 bias_bhn2_sonn1 bias_bhn1_sonn2 bias_bhn2_sonn2 bias_bhn1_sonn3
bias_bhn2_sonn3 bias_whn1]
```

'MixregTukey modeli simülasyon sonuçları';

```
wtn1_sonn=mean(wtn1_son);
btn1_sonn1=mean(btn1_son1);btn1_sonn2=mean(btn1_son2);btn1_sonn3=mean(btn1_son3);
btn2_sonn1=mean(btn2_son1);btn2_sonn2=mean(btn2_son2);btn2_sonn3=mean(btn2_son3);
mse_sontn11=(sum(msetn11)/ss);mse_sontn12=(sum(msetn12)/ss);mse_sontn13=(sum(msetn13)/ss);
mse_sontn21=(sum(msetn21)/ss);mse_sontn22=(sum(msetn22)/ss);mse_sontn23=(sum(msetn23)/ss);
mse_sontn3=(sum(msetn3)/ss);
bias_wtn1=wtn1_sonn-w1;bias_btn1_sonn1=btn1_sonn1-b10;bias_btn1_sonn2=btn1_sonn2-b11;
bias_btn1_sonn3=btn1_sonn3-b12;bias_btn2_sonn1=btn2_sonn1-b20;
bias_btn2_sonn2=btn2_sonn2-b21;bias_btn2_sonn3=btn2_sonn3-b22;
sonuctn=[btn1_sonn1 btn2_sonn1 btn1_sonn2 btn2_sonn2 btn1_sonn3 btn2_sonn3
wtn1_sonn;mse_sontn11 mse_sontn21 mse_sontn12 mse_sontn22 mse_sontn13 mse_sontn23
mse_sontn3;bias_btn1_sonn1 bias_btn2_sonn1 bias_btn1_sonn2 bias_btn2_sonn2 bias_btn1_sonn3
bias_btn2_sonn3 bias_wtn1]
```

'İki bileşenli karma regresyon modelinden veri üreten fonksiyon';

```
function [X1 X2 Y]= GMregRND2(n,b10,b11,b12,b20,b21,b22,w1,d)
b1=[b10;b11;b12;];b2=[b20;b21;b22];
say1=0;say2=0;
for i=1:n
   X1(i)=normrnd(0,1);X2(i)=normrnd(0,1);X=[1;X1(i);X2(i)];u=unifrnd(0,1);
if d==1 %Durum I,IV
   e(i)=normrnd(0,1);
elseif d==2 %Durum II
   e(i)=trnd(3);
else %Durum III
   e(i)=(u<=0.95)*normrnd(0,1)+(u>0.95)*normrnd(0,5);
end
   if rand(1,1)<=w1
   Y(i)=X'*b1+sqrt(1)*e(i);
   say1=say1+1;%birinci gruptan üretilen veri sayısı
   else
   Y(i)=X'*b2+sqrt(1)*e(i);
   say2=say2+1;%ikinci gruptan üretilen veri sayısı
   end
end
Y=Y';X1=X1';X2=X2';
say1;say2;
```

'**Ethanol verisi için başlangıç değerleri (R programında mixreg paketi kullanılarak elde edilmiştir)':**

```
b10=0.56498616;b11=0.08502275;w1=0.4897245;
b20=1.2470807;b21=-0.0829991;
s1=0.04331303;s2=0.02414114;
c1=1.345;c2=4.685;
```

EK 4 Uygulamada Kullanılan Gerçek Veri Setleri

Ses Tonu Algılama Verisi:
X: Ses tonu
Y:Esnetme oranı
X=[1.350 1.400 1.450 1.500 1.550 1.900 1.910 1.930 1.950 1.970 1.990 2 2.010 2.030 2.030 2.070 2.100 2.200 2.300 2.350 2.400 2.450 2.500 2.600 2.700 2.750 2.800 2.850 2.900 3 1.350 1.400 1.450 1.500 1.550 1.900 1.910 1.930 1.950 1.970 1.990 2 2.010 2.030 2.050 2.070 2.100 2.200 2.300 2.350 2.400 2.450 2.500 2.600 2.700 2.750 2.800 2.850 2.900 3 1.350 1.400 1.450 1.500 1.550 1.900 1.910 1.930 1.950 1.970 1.990 2 2.010 2.030 2.050 2.070 2.100 2.200 2.300 2.350 2.400 2.450 2.500 2.600 2.700 2.750 2.800 2.850 2.900 3 1.350 1.400 1.450 1.500 1.550 1.900 1.910 1.930 1.950 1.970 1.990 2 2.010 2.030 2.050 2.070 2.100 2.200 2.300 2.350 2.400 2.450 2.500 2.600 2.700 2.750 2.800 2.850 2.900 3 1.350 1.400 1.450 1.500 1.550 1.900 1.910 1.930 1.950 1.970 1.990 2 2.010 2.030 2.050 2.070 2.100 2.200 2.300 2.350 2.400 2.450 2.500 2.600 2.700 2.750 2.800 2.850 2.900 3];

Y=[1.461 1.407 1.452 1.300 1.351 1.900 1.913 1.927 1.947 1.969 1.990 1.999 2.009 2.038 2.046 2.067 2.108 2.199 2.301 2.358 2.400 2.453 2.502 2.399 2.696 2.751 2.800 2.851 2.900 3 2.021 2.013 2.028 2.008 2.027 1.928 1.939 1.977 1.900 1.976 2.008 1.906 2.005 2.018 2.041 2.057 2.095 2.066 2.014 2.019 2 2.033 2.506 2.042 2.701 2.414 2.704 2.035 2.070 3.494 1.846 1.970 1.971 1.970 2.046 1.904 1.915 1.925 1.749 1.972 1.996 2.003 2.007 2.027 2.053 2.047 2.094 2.171 2.290 1.906 2.001 2.008 1.993 2.009 2.363 2.105 1.979 1.937 2.068 2.030 2.018 2.036 2.025 1.994 2.010 1.901 1.911 1.923 1.950 1.978 1.970 2.001 2.010 2.031 2.035 2.071 2.108 2.011 2.026 2.023 1.974 2 2.010 2.015 2.054 2.061 2.015 2.036 2.028 2.014 1.997 1.905 1.997 1.964 2.008 1.941 1.960 1.968 1.976 1.903 1.997 2.007 2.006 2.037 2.091 2.073 2.096 1.904 2.007 2.025 2.037 2.038 2.047 2.023 2.076 2.066 2.426 2.117 2.097 2.910];

Yaprak Biti Verisi:
X:Serbest bırakılmış yaprak bitlerinin sayısı
Y:Hastalık bulaşmış bitkilerin sayısı
X=[1 5 2 4 9 14 5 9 14 6 8 2 80 57 317 80 57 315 40 80 160 40 80 155 80 40 156 80 40 20 100 120 120 317 160 80 120 96 97 120 160 120 160 320 79 200 300 250 196 296 247];

Y=[5 5 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 5 12 24 9 13 27 7 9 14 7 3 10 10 4 9 10 4 2 0 3 1 1 1 0 6 8 2 0 0 0 2 0 0 3 17 15 4 17 2];

Ethanol Verisi:
X: Nitrik oksit konsantrasyonu
Y: Eşdeğerlik oranı
X=[3.741 2.295 1.498 2.881 0.760 3.120 0.638 1.170 2.358 0.606 3.669 1.000 0.981 1.192 0.926 1.590 1.806 1.962 4.028 3.148 1.836 2.845 1.013 0.414 0.812 0.374 3.623 1.869 2.836 3.567 0.866 1.369 0.542 2.739 1.200 1.719 3.423 1.634 1.021 2.157 3.361 1.390 1.947 0.962 0.571 2.219 1.419 3.519 1.732 3.206 2.471 1.777 2.571 3.952 3.931 1.587 1.397 3.536 2.202 0.756 1.620 3.656 2.964 3.760 0.672 3.677 3.517 3.290 1.139 0.727 2.581 0.923 1.527 3.388 2.085 0.966 3.488 0.754 0.797 2.064 3.732 0.586 0.561 0.563 0.678 0.370 0.530 1.900];

Y=[0.907 0.761 1.108 1.016 1.189 1.001 1.231 1.123 1.042 1.215 0.930 1.152 1.138 0.601 0.696 0.686 1.072 1.074 0.934 0.808 1.071 1.009 1.142 1.229 1.175 0.568 0.977 0.767 1.006 0.893 1.152 0.693 1.232 1.036 1.125 1.081 0.868 0.762 1.144 1.045 0.797 1.115 1.070 1.219 0.637 0.733 0.715 0.872 0.765 0.878 0.811 0.676 1.045 0.968 0.846 0.684 0.729 0.911 0.808 1.168 0.749 0.892 1.002 0.812 1.230 0.804 0.813 1.002 0.696 1.199 1.030 0.602 0.694 0.816 1.037 1.181 0.899 1.227 1.180 0.795 0.990 1.201 0.629 0.608 0.584 0.562 0.535 0.655];

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatma Zehra DOĞRU

Doğum Yeri : Erzurum

Doğum Tarihi : 01.01.1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Bayburt Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı) (2001-2005)

Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü (2005-2009)

Yüksek Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı (2009-2011)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü (2009-2011)

Giresun Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü (2011-2012)

Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü (2012-Devam)

Yayınlar (SCI)

- **Doğru, F.Z.** and Arslan, O. 2015. Optimal B-robust estimators for the parameters of the Burr XII distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation (available at http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00949655.2015.1054288).

- Çankaya, M.N., Bulut, Y.M., **Doğru, F.Z.** and Arslan, O. 2015. A bimodal extension of the generalized gamma distribution. Colombian Journal of Statistics, 38(2), 371-384 (SCI-ELO).

Hakemli Dergiler

- Kesemen, O. ve **Doğru, F.Z.** 2012. Çokgen alanlarda iki değişkenli birikimli dağılım fonksiyonunun bulunması. İstatistik Araştırma Dergisi, 9(01), 65-71.

- **Doğru, F.Z.** and Arslan, O. 2015. Alternative robust estimators for the shape parameters of the Burr XII distribution. International Journal of Mathematical, Computational, Natural and Physical Engineering, 9(5), 208-213.

Ulusal Kongre Sunum

- Akgül, F.G., **Doğru, F.Z.**, Şenoğlu, B. ve Arslan, O. 2013. G_A^0 dağılımının parametrelerinin dayanıklı tahmini. 1. Genç İstatistikçiler Sempozyumu, Ankara.

Uluslararası Kongre Sunum

- Kesemen, O. and **Doğru, F.Z.** 2011. Çokgen alanlarda iki değişkenli birikimli dağılım fonksiyonunun bulunması. 7. International Statistics Congress, Antalya/Turkey.

- **Doğru, F.Z.** and Arslan, O. 2013. B-robust estimation method for the parameters of Burr XII distribution. XIVth International Symposium on Econometrics, Operations Research and Statistics, Sarajevo/Bosnia Herzegovina.

- **Doğru, F.Z.** and Arslan, O. 2013. Robust estimators for the shape parameters of Burr XII distribution. 8. International Statistics Congress, Antalya/Turkey.

- **Doğru, F.Z.**, Bulut, Y.M. and Arslan, O. 2014. B-robust estimators for the parameters of generalized half-normal distribution. 9. International Statistic Days Symposium, Antalya/Turkey.

- Bulut, Y.M., Jamalizadeh, A., **Doğru, F.Z.** and Arslan, O. 2014. Generalized half-t distribution: properties and estimation. 9. International Statistic Days Symposium, Antalya/Turkey.

- Çankaya, M.N., Bulut, Y.M., **Doğru, F.Z.** and Arslan, O. 2014. A bimodal extension of generalized gamma distribution. 9. International Statistic Days Symposium, Antalya/Turkey.

- **Doğru, F.Z.** and Arslan, O. 2014. Robust mixture regression modelling based on the skew *t* distribution. International Conference on Robust Statistics (ICORS14), Martin-Luther-University Halle-Wittenberg/Germany.

- **Doğru, F.Z.**, Bulut, Y.M. and Arslan, O. 2015. Finite mixtures of matrix variate t distributions. XVIth International Symposium on Econometrics, Operations Research and Statistics, Edirne/Turkey.

- **Doğru, F.Z.** and Arslan, O. 2015. Alternative robust estimators for the shape parameters of the Burr XII distribution. 17th International Conference on Mathematical, Statistical and Computational Sciences (ICMSCS 2015), Paris/ France.