



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖZEL HALKALAR ÜZERİNDE ÖZEL GRAFLAR

SÜMEYYE AYKAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2018
KONYA 2018
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZEL HALKALAR ÜZERİNDE ÖZEL GRAFLAR

Sümeyye AYKAÇ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

2018, 72 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ

V boştan farklı elemanları noktalar olan bir küme, E de sıralı olmayan, elemanları V den oluşan bir küme olsun. E yi kenar V yi de köşe kümesi kabul edecek şekilde tanımlanan $G=(V,E)$ ikilisinden oluşan diyagrama *graf* denir. R halkası birimi sıfırdan farklı değişmeli bir halka ve $Z(R)$ kümesi R nin sıfır bölenlerinin kümesi olsun. $x,y\in Z(R)^{*}=Z(R)-\{0\}$ elemanlarından oluşan $xy=0$ koşulunu sağlayan graflara sıfır bölen graflar denir ve $\Gamma(R)$ ile gösterilir. Başta kimyasal graflar olmak üzere bir çok uygulaması olan sabit sayılara topolojik indeksler denir. Bu indeksler genelikle köşeler arası uzaklıklara, köşe derecelerine, komşuluklara bağlı olarak tanımlanır.

Tez dört ana başlık altında toplanmıştır ve şu sonuçlar elde edilmiştir. Tezin giriş bölümünde basit graflar tanıtılmış, sıfır-bölen graflar tanımı ve bazı spektral özellikleri verilmiş ve kaynak araştırılması sunulmuştur. İkinci bölümde p ve q asal iken $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafı incelenmiş ve bu grafla ilgili bazı spektral özellikleri ifade edilmiş ve ispatları yapılmıştır. Üçüncü bölümde p ve q asal iken $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının Zagreb indeksleri incelenmiş ve ispatları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Değişmeli halka, graf, halka, sıfır-bölen graf, Zagreb index

ABSTRACT

MS THESIS

GRAPS OVER SPECİAL RİNGS

Sümeyye AYKAÇ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATİCS

Advisor: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

2018, 72 Pages

Jury
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Asst. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Let V is called the vertex set, E is called the edge set on V. A simple graph $\Gamma = (V, E)$ is a set, If x and y are distinct vertices of Γ, then x and y related in Γ. Let R commutative ring with non-zero identity and $Z(R)$ be its set of zero-divisors. We associated a simple graph $\Gamma(R)$ to R with vertices $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$, the vertices x and y are adjacent if and only if $xy = 0$. Topological indices are constans which have a lot of applications mainly in Chemistry.

The thesis was collected under four main title and the following results were obtained. Simple graphs are introduced in the introduction part of the thesis, the definition of zero-divisor graphs and some spectral features are given and resource exploration is presented. In the second part p and q are prime numbers while $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ graphy is examined. Some spectral properties related to this graph have been expressed and proved. In the third part p and q are prime numbers, while Zagreb indices of $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ graph are examined and proved.

Keywords: Commutative ring, graph, ring, zero-divisor graph, Zagreb index

ÖNSÖZ

Eğitim hayatım boyunca bana yol gösteren, bilgilerini, her konuda desteğini benden esirgemeyen, kendime her daim örnek aldığım değerli danışman hocam Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e, yüksek lisans çalışması boyunca bana destek olan, bilgilerini benimle paylaşan kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca hiçbir emeklerini benden esirgemeyen, beni bugünlere getiren, karşılaştığım her zorlukta sığındığım liman olan annem, babam ve kardeşlerime, bu süreçte bana destek olan eşim Yunus Emre'ye ve bu süreç içerisinde hayatımıza giren, bu hayatta en çok gülme sebebim varlığı olan oğlum Muhammed Fatih'e teşekkür ederim.

Sümeyye AYKAÇ
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

ŞEKİLLER LİSTESİ ..... **x**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Graflar ve Özellikleri 1
1.2. Sıfır-Bölen Graflar 14
1.3. Zagreb İndeks Özellikleri 18
1.4. Kaynak Araştırması 20
1.4.1. Graf Parametreleri ile İlgili Araştırmalar 20
1.4.2. Topolojik İndeksler Üzerine Çalışmalar 22

2. DEĞİŞMELİ HALKALARIN SIFIR BÖLEN GRAFLARI İLE İLİŞKİLİ GRAF PARAMETRELERİNİN ANALİZİ **24**

2.1. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ nin Bazı Spektral Özellikleri 24

3. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ GRAFININ ZAGREB İNDEKSLERİ **39**

3.1 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ Grafının Zagreb İndekslerinin Spektral Özellikleri 39

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **58**

KAYNAKLAR **59**

ÖZGEÇMİŞ **61**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Tanımları
Γ	Basit graf
$\overline{\Gamma}$	Γ grafının tümleyeni
$\mathbb{Z}_n$	Kalan sınıfları
$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$	Kalan sınıflarının Kartezyen çarpımı
$V(\Gamma)$	Γ basit grafının nokta kümesi
$E(\Gamma)$	Γ basit grafının kenar kümesi
$d_\Gamma(u,v)$	Γ grafında u ve v köşeleri araındaki uzaklık
$diam(\Gamma)$	Γ grafının çapı
$girth(\Gamma)$	Γ grafının girthi
$rad(\Gamma)$	Γ grafının radiusu
$e(v)$	v köşesinin eksantiriği
$\deg_\Gamma(u)$	Γ grafında u köşesinin derecesi
$\Delta(\Gamma)$	Γ grafının maksimum derecesi
$\delta(\Gamma)$	Γ grafının minimum derecesi
$\gamma(\Gamma)$	Γ grafının baskınlık sayısı
$DS(\Gamma)$	Γ grafının derece dizisi
$t(\Gamma)$	Γ grafının düzensizlik indeksi
$\chi(\Gamma)$	Γ grafınınn kromatik sayısı
$\omega(\Gamma)$	Γ grafının klik sayısı
K_n	n noktalı tam graf
C_n	n köşeli devir graf
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
P_n	Yol graf
$T_{r,s}$	Larva graf
S_n	Star graf
T_n	Ağaç graf
D_n^m	Dostluk grafı
W_n^m	Yel değirmeni grafı
W_n	Tekerlek graf
L_n	Merdiven grafı
$M_1(\Gamma)$	Γ grafının birinci Zagreb indeksi

$M_2(\Gamma)$	Γ grafının ikinci Zagreb indeksi
$\Pi_1(\Gamma)$	Γ grafının birinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\Pi_2(\Gamma)$	Γ grafının ikinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\overline{M_1}(\Gamma)$	Γ grafının birinci Zagreb eşindeksi
$\overline{M_2}(\Gamma)$	Γ grafının ikinci Zagreb eşindeksi
$\overline{\Pi_1}(\Gamma)$	Γ grafının birinci çarpımsal Zagreb eşindeksi
$\overline{\Pi_2}(\Gamma)$	Γ grafının ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1 Basit Graf……..……..1
Şekil 1.2 Basit Olmayan Graflar……2
Şekil 1.3 Yönlendirilmiş Graf……...3
Şekil 1.4 Graf Dereceleri……..3
Şekil 1.5. 4-regüler graf…….....4
Şekil 1.6 G Grafının Alt Grafları……...…….5
Şekil 1.7 N_6 Sıfır Grafı……..…….…….5
Şekil 1.8 Bir G grafı……...……..……6
Şekil 1.9 C_5 devir grafı…….……...….6
Şekil 1.10 Yol Graf Örnekleri…….……..……7
Şekil 1.11 $T_{3,2}$ larva grafı…….…..……7
Şekil 1.12 Tam Graf Örnekleri…….……..…8
Şekil 1.13 İki Parçalı Graf Örnekleri…….……9
Şekil 1.14 Star Graf Örnekleri……...……9
Şekil 1.15 Bir $S_{4,4}$ duble yıldız grafı……..10
Şekil 1.16 Tümleyen Graf……...……11
Şekil 1.17 Ağaç Graf Örnekleri……...……11
Şekil 1.18 Dostluk Graf Örnekleri……..…….12
Şekil 1.19 Yel Değirmeni Graf Örnekleri…….……..12
Şekil 1.20 Tekerlek graf örnekleri……..…….13
Şekil 1.21 Merdiven Graf Örnekleri……14
Şekil 2.1 Uzaklık, Diameter, Eksantrik, Radius Örnekleri…….…….27
Şekil 2.2 Girth Örnekleri…….…28
Şekil 2.3 Maksimum ve Minimum Derece Örneği …….……31
Şekil 2.4 Derece Dizisi Örnekleri…….……..….32
Şekil 2.5 Baskınlık Kümesi Örneği……...……....……..33
Şekil 2.6 Kromatik Sayısı Örneği……..……..34
Şekil 2.7 Klik Sayısı Örneği……..……..36
Şekil 2.8 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9\right)$ un grafı …….……..38
Şekil 3.1 S_7 grafının derecelendirilmesi…….40

Şekil 3.2 K_4 grafının derecelendirilmesi……..…..40

Şekil 3.3 $T_{3,2}$ grafının derecelendirilmesi……...…45

Şekil 3.4 $K_{2,3}$ tam grafının derecelendirilmesi…….…….…….45

Şekil 3.5 P_5 grafının derecelendirilmesi…….……48

Şekil 3.6 W_3^2 grafının derecelendirilmesi……..…….49

Şekil 3.7 Bir 6 köşeli ağaç grafın derecelendirilmesi…….52

Şekil 3.8 $K_{2,4}$ grafının derecelendirilmesi……...……..52

1. GİRİŞ

Bu bölümde graflar ve temel özellikleri, graf çeşitleri ve sıfır bölen graflar hakkında temel bilgiler verilmiştir. Graflar ve Zagreb indeksler ile ilgili kaynak araştırması yapılmıştır.

1.1. Graflar ve Özellikleri

Bu bölümdeki tanımlarda (Gross, 2004) kaynağı kullanılmıştır. Graflar ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için (Harary, 1994; Bondy, 2008; Harris, 2008) kaynakları incelenebilir.

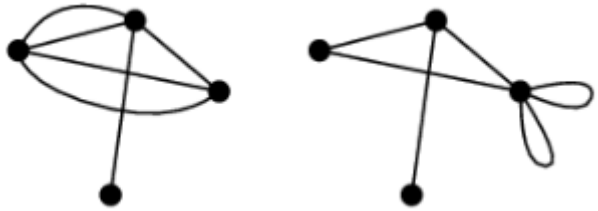
Nokta kümesi sonlu olan ve küme içindeki noktaları birbirine bağlayan kenarlar topluluğuna *graf* adı verilir. Graflar nokta ve kenarlardan oluşur. V boştan farklı noktalar kümesi, E de V nin elemanlarından oluşan sıralı olmayan bir küme olsun. V köşe kümesi E de noktalar kümesi olacak şekilde tanımlanan graf $\Gamma(G)=(V,E)$ ile gösterilir. Bu grafı kısaca Γ ile göstereceğiz.

İlmek, bir grafta bir köşeyi kendisiyle birleştiren kenara denir. *Çoklu kenar*, aynı köşe çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara denir. Γ grafı *basit graf* ise bu grafta ilmek ve çoklu kenar yoktur. *Sonlu graf*, köşe kümesi ve kenar kümesi sonlu olan grafa denir. Sonlu bir grafta $E(G)=\{e_1,e_2,...e_n\}$ kenar kümesi ve $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ köşe kümesi, $|E(G)|=n$, $|V(G)|=m$ olmak üzere, n sayısına grafın *boyutu*, m sayısına da grafın *mertebesi* denir.

Örnek 1.1



Şekil 1.1 Basit Graf

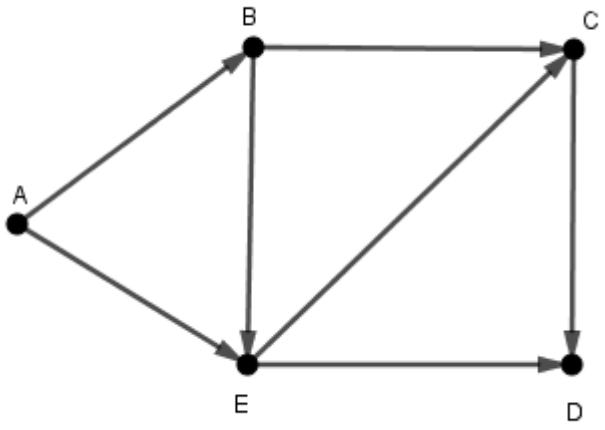


Şekil 1.2 Basit Olmayan Graflar

Bir Γ grafının köşe kümesi olan V den alınan iki köşe v_i, v_j olsun. Eğer bu köşeler arasında bir kenar varsa bu köşelere *komşu* adı verilir.

Kenarları sıralanmış olan veya kenarları doğrultuya sahip olan graflara *yönlendirilmiş graf* adı verilir. Bu graflarda herhangi iki köşe v_i, v_j arasındaki kenar olan $e = v_i v_j$ için $v_i v_j \neq v_j v_i$ dir. Köşelere bağlı kenarlar köşeden dışarı doğru çıkıyorsa bu köşeye *başlangıç noktası* adı verilir. Köşelere bağlı kenarlar köşeye doğru giriyorsa bu köşe *final noktası* olarak adlandırılır.

Örnek 1.2



Şekil 1.3 Yönlendirilmiş Graf

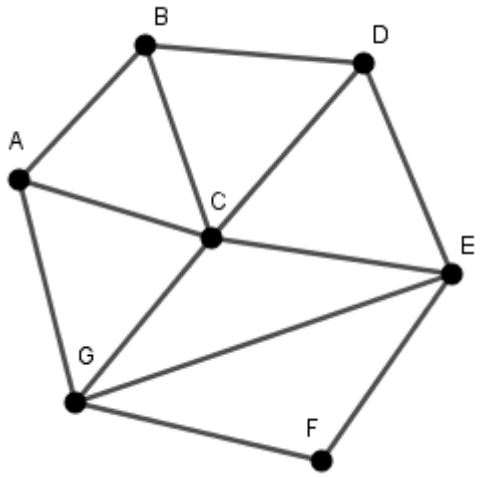
G bir graf ve $v \in V(G)$ olsun. v köşesini uç kabul eden tüm kenarların sayısına *v köşesinin derecesi* denir ve $d_G(v)$ ile gösterilir. $d_G(v)$ yerine

$\deg(v), \deg_G(v), d(v), d_v, der(v)$ gibi semboller de kullanılmaktadır. Tanımdan anlaşıldığı gibi v köşesinin derecesi v de buluşan tüm kenarların sayısıdır. Buna bağlı olarak bu sayı 0 olabilir. Bir üst sınırı da yoktur.

Sıfır dereceli köşelere *izole nokta* adı verilir. 1 dereceli köşelere ise *uç nokta (pendant)* denir. Bir grafta her bir köşe komşu olduğu köşeye bir 1 derece kazandırır. İlmekte ise köşe kendisine komşu olduğundan dolayı köşeye 2 derece kazandırır. Derecesi tek sayı olan köşe *tek nokta* olarak isimlendirilir. Derecesi çift sayı olan bir köşe ise *çift nokta* olarak adlandırılır.

Bir Γ grafında her kenar iki köşeyi birleştirdiğinden köşelerin dereceleri toplamı kenar sayısının iki katı olup bütün köşelerin dereceleri toplamı çift sayıdır. Bu nedenle bir grafın bütün derecelerinin toplamı her zaman çift sayıdır. (Akgüneş, 2013)

Örnek 1.3

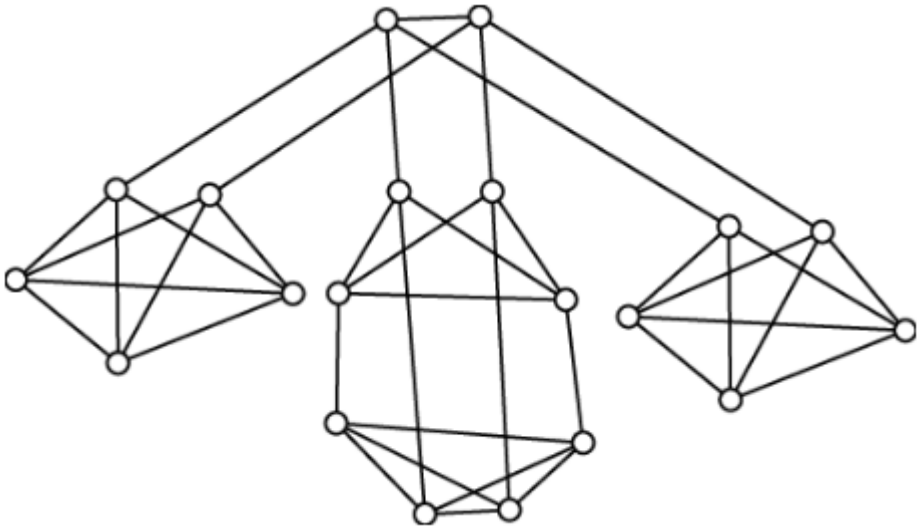


Şekil 1.4 Graf Dereceleri

Şekil 1.4 de $der(\mathrm{A}) = 3, der(\mathrm{G}) = 4, \mathrm{der(C)} = 5, \mathrm{der(E)} = 4, \mathrm{der(F)} = 2, der(\mathrm{D}) = 3$

Tanım 1.1 Bir Γ grafında bütün köşe dereceleri birbirine eşit ise bu grafa *regüler graf* denir. Özel olarak regüler grafta her bir köşenin derecesi r ise $r-regüler$ denir. Özel olarak 3-regüler graflara *kübik graflar* da denir.

Örnek 1.4



Şekil 1.5. 4-regüler graf

Tanım 1.2 Γ grafının bir altgrafı, sezgisel olarak tüm köşeleri $V(\Gamma)$ da, tüm kenarları da $E(\Gamma)$ kalan bir graf olarak tanımlanabilir. Yani bir Γ grafının bir *alt grafı*, tüm köşe ve kenarları aynı zamanda Γ nın köşe ve kenarları olan bir graftır ve Γ dan bazı köşe ve/veya kenarların çıkarılmasıyla elde edilir. Burada şu durumlar söz konusu olabilir:

i) H nin köşeleri Γ nın köşelerinin bir kısmıdır ve H nin kenarları Γ nın tüm kenarlarıdır.

ii) H , Γ nın tüm köşe ve kenarlarına sahiptir. Yani $V(H)=V(\Gamma)$ ve $E(H)=E(\Gamma)$ dir. Bu durumda $H=\Gamma$ olur.

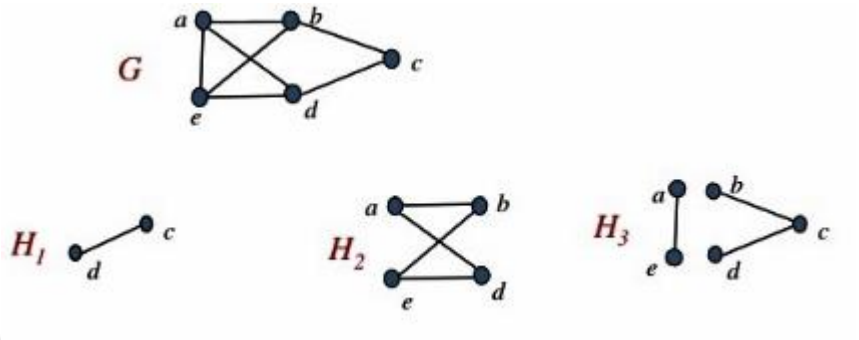
iii) H , Γ nın tüm köşelerine ve bazı kenarlarına sahiptir. Yani $V(H)=V(\Gamma)$ ve $E(H)\subset E(\Gamma)$ dir.

iv) H, Γ nın bazı köşe ve kenarlarına sahiptir. Yani $V(H)\subset V(\Gamma)$ ve $E(H)\subset E(\Gamma)$ dir.

Tüm bu durumlarda H grafına Γ grafının bir alt grafı denilir ve $H\subset G$ ile gösterilir. Yani H grafının Γ grafının bir alt grafı olması, H ın tüm köşe ve kenarlarının Γ grafındaki köşe ve kenarlardan seçilmesi anlamına gelmektedir. Tersine

Γ grafına da H grafının bir üstgrafı denilir ve bu durum Γ grafı, H grafını içerir şeklinde ifade edilir. (Cangül, 2017)

Örnek 1.5



Şekil 1.6 G Grafının Alt Grafları

Tanım 1.3 Hiçbir kenara sahip olmayan, sadece köşelerden oluşan gaflara *sıfır(null) graflar* denir. n köşeli bir sıfır grafı N_n ile gösterilir.

Örnek 1.6

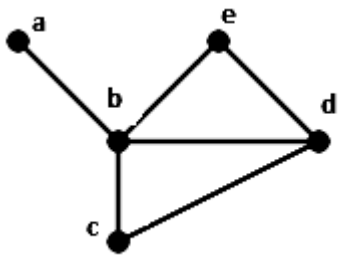


Şekil 1.7 N_6 Sıfır Grafı

Köşe kümesi $V=\{a,b,c,...,y,z\}$ olan bir Γ grafının kenarlarının $ab,bc,cd,...$yz şeklindeki sıralanışa *yürüme* denir. Eğer $a=z$ ise bu sıralanışa *kapalı*

yürüme adı verilir. Bir yürümede hiçbir köşe tekrar etmiyorsa bu yürüme *yol* olarak isimlendirilir. Γ grafından alınan iki farklı köşe arasında bir yol varsa *bağlantılıdır* denir. Eğer yürünen tüm kenarlar farklıysa bu yürüme *gezi* olarak adlandırılır. Bir $ab, bc, cd, \ldots yz$ kapalı yürümesinde kenarların hepsi farklı ise bu yürümeye *kapalı yol* denir. İlk ve son köşeleri hariç tüm köşeleri farklı olan en az üç köşeli kapalı yola *devir* adı verilir.

Örnek 1.7

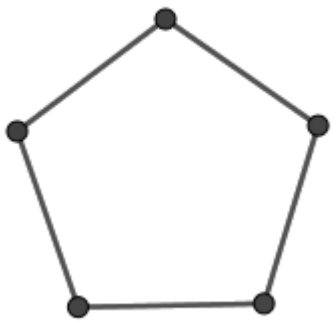


Şekil 1.8 Bir G Grafı

Şekil 1.8 e bakarsak $abdbc$ 4 uzunluklu bir yürümedir ama bir gezi değildir. $abdebc$ bir gezi fakat yol değildir. $abde$ bir yoldur. $bcdb$ bir devirdir.

Tanım 1.4 Tek bir devirden oluşan graflara *devir grafları* denir. n köşeli bir devir grafı C_n ile gösterilir. Devir graflarda tüm köşelerin derecesi 2 dir.

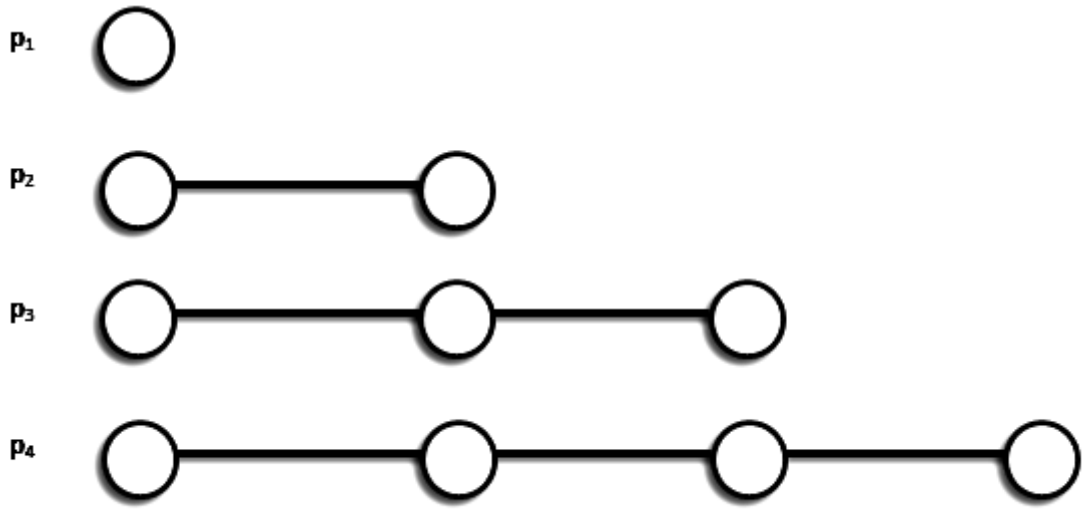
Örnek 1.8



Şekil 1.9 C_5 devir grafı

Tanım 1.5 Başlangıç ve bitiş köşelerinin derecesi 1 ve diğer tüm köşelerinin derecesi 2 olan grafa *yol(path) graf* adı verilir. n köşeli yol graf P_n ile gösterilir. Yol graf devir graftan bir kenarın çıkartılmasıyla elde edilir.

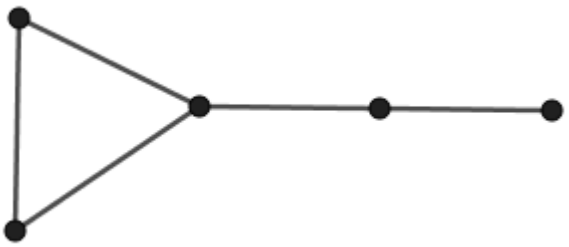
Örnek 1.9



Şekil 1.10 Yol Graf Örnekleri

Tanım 1.6 C_r devir grafının herhangi bir köşesine s uzunluklu bir P_{s+1} yol grafının eklenmesiyle elde edilen grafa *larva graf* ismi verilir. $T_{r,s}$ ile gösterilir. Larva graflarında $r+s$ tane köşe ve $r+s$ tane kenar vardır.

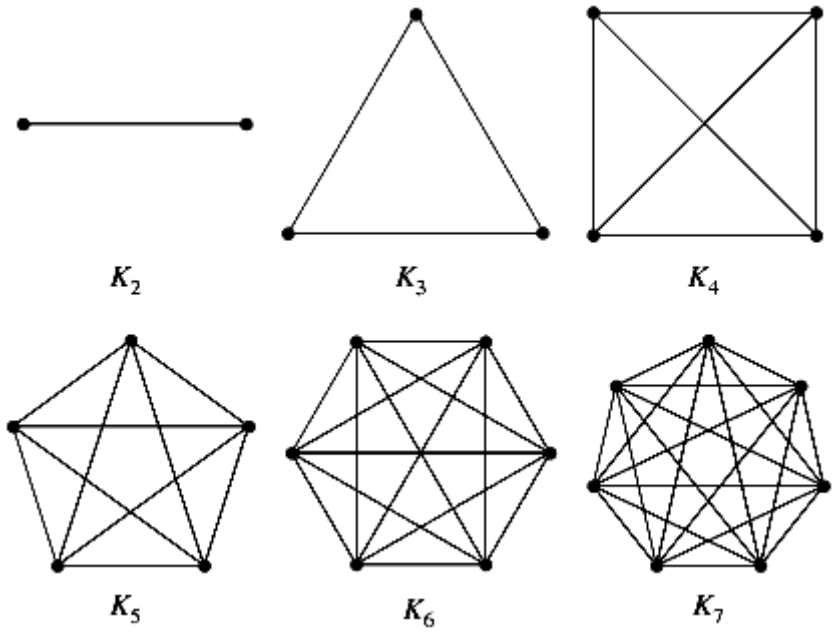
Örnek 1.10



Şekil 1.11 $T_{3,2}$ larva grafı

Tanım 1.7 Bir grafta her bir köşe diğer köşelerle birleştirilmişse yani her bir köşe diğer köşelere komşu ise bu graflara *tam graf* denir. n köşeli tam graf K_n ile gösterilir. n köşeli bir tam grafın $\frac{n(n-1)}{2}$ tane kenarı bulunmaktadır ve köşe derecesi de $(n-1)$ dir.

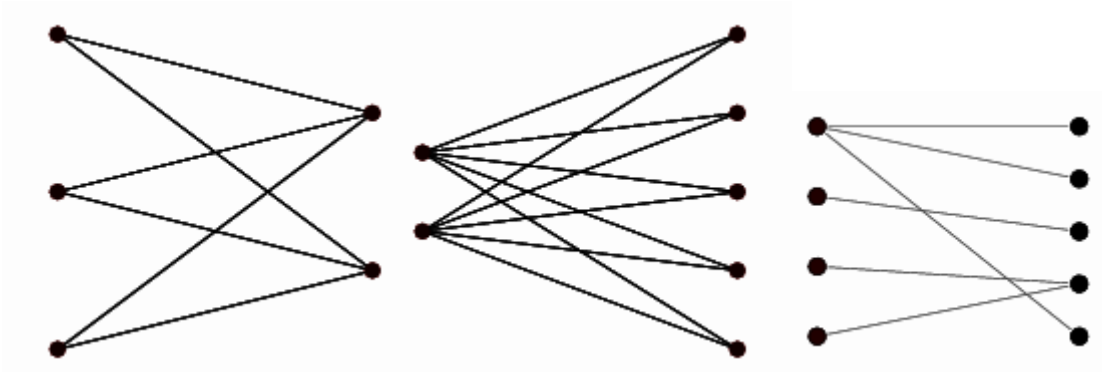
Örnek 1.11



Şekil 1.12 Tam Graf Örnekleri

Tanım 1.8 Bir grafın köşe kümesi A ve B şeklinde iki kümeye ayrılmış ve kenarları A daki köşelerle B deki köşelerin birleştirilmesiyle oluşuyorsa bu grafa *iki parçalı graf* denir. $|A| = r$ ve $|B| = s$ ise iki parçalı graf $K_{r,s}$ ile gösterilir. A daki her bir köşe B deki her bir köşe ile birleştirilmişse bu grafa *iki parçalı tam graf* denir.

Örnek 1.12



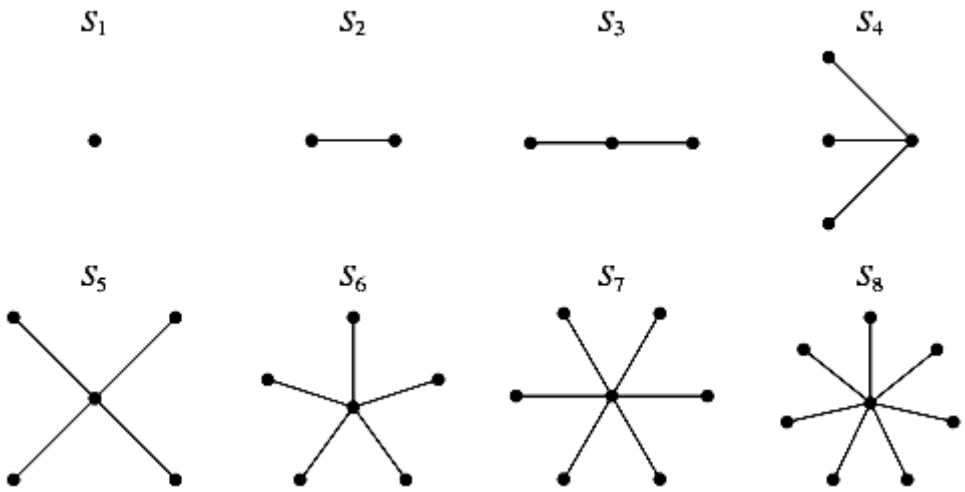
Şekil 1.13 İki Parçalı Graf Örnekleri

$K_{r,s}$ iki parçalı tam grafının köşe sayısı $r+s$ ve kenar sayısının $r.s$ olduğu aşikardır.

Teorem 1.1 (Bondy, 1976) Bir grafın iki parçalı graf olması için gerek ve yeter şart tek uzunluklu bir devir içermemesidir.

Tanım 1.9 $K_{1,s}$ şeklindeki graflar *yıldız(star) graf* olarak adlandırılır. n köşeli bir yıldız graf S_n ile gösterilir.

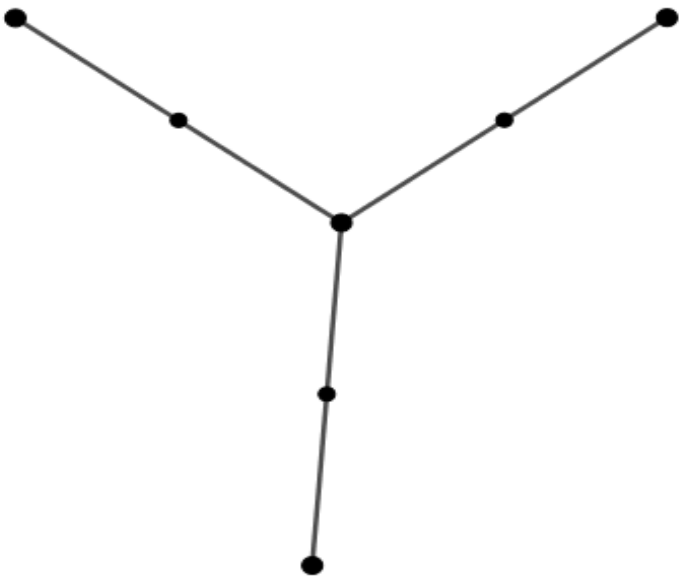
Örnek 1.13



Şekil 1.14 Star Graf Örnekleri

Bir S_n yıldız grafının çevrel köşelerine birer sallanan kenar eklemekle elde edilen graf *duble yıldız grafı* olarak adlandırılır ve $S_{n,n}$ ile gösterilir. Dikkat edilirse $S_{n,n}$ duble yıldız grafının köşe sayısı $2n-1$, kenar sayısı ise $2(n-1)$ dir.

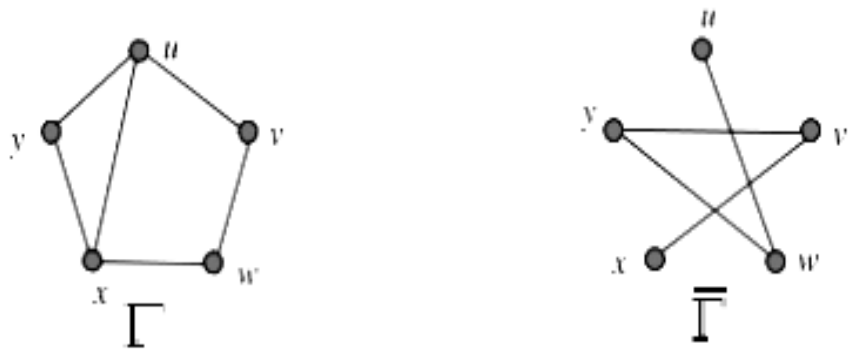
Örnek 1.14



Şekil 1.15 Bir $S_{4,4}$ duble yıldız grafı

Tanım 1.10 Bir Γ grafında köşe kümesi Γ nın köşe kümesiyle aynı olan ve komşu olmayan köşeleri birbirine komşu yapan grafa *tümleyen(tamamlayıcı) graf* denir. Bir Γ grafının tümleyeni $\overline{\Gamma}$ ile gösterilir.

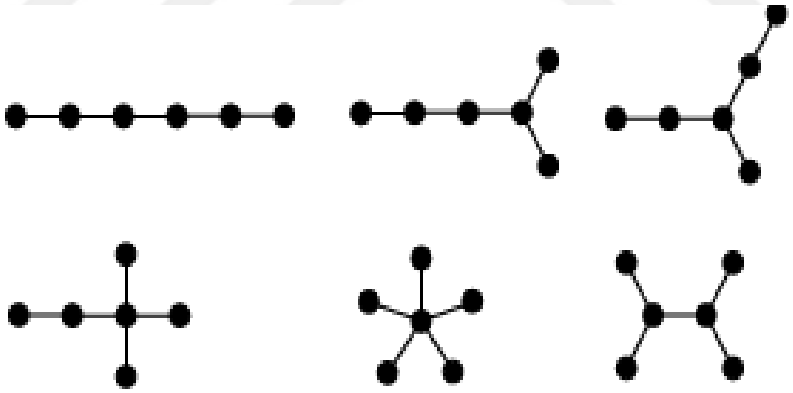
Örnek 1.15



Şekil 1.16 Tümleyen Graf

Tanım 1.11 Hiçbir devir içermeyen bağlantılı graflara *ağaç graf* adı verilir. Patika graflar ve yıldız graflar birer ağaç graf örneğidir. n köşeli bir ağaç graf T_n ile gösterilir.

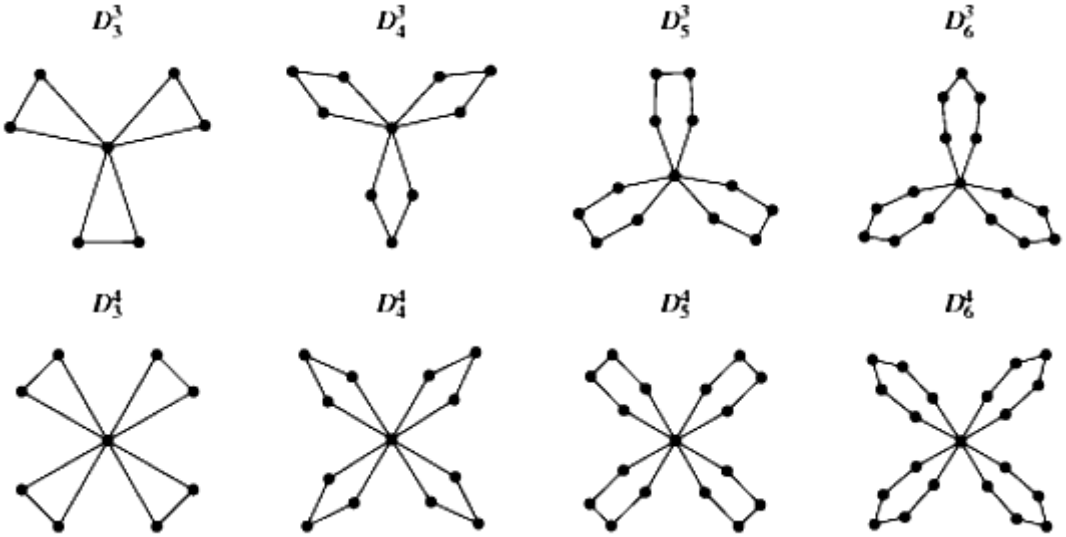
Örnek 1.16



Şekil 1.17 Ağaç Graf Örnekleri

Tanım 1.12 C_n devir grafının m kopyasının birer köşesinden birleştirilmesiyle oluşan graf *dostluk(dutch windmill) grafı* olarak adlandırılır. Dostluk grafı D_n^m ile gösterilir. Bazı kaynaklarda bu grafa Hollanda yel değirmeni grafı da denilmektedir. D_n^m dostluk grafında $m(n-1)+1$ köşe ve mn kenar bulunur.

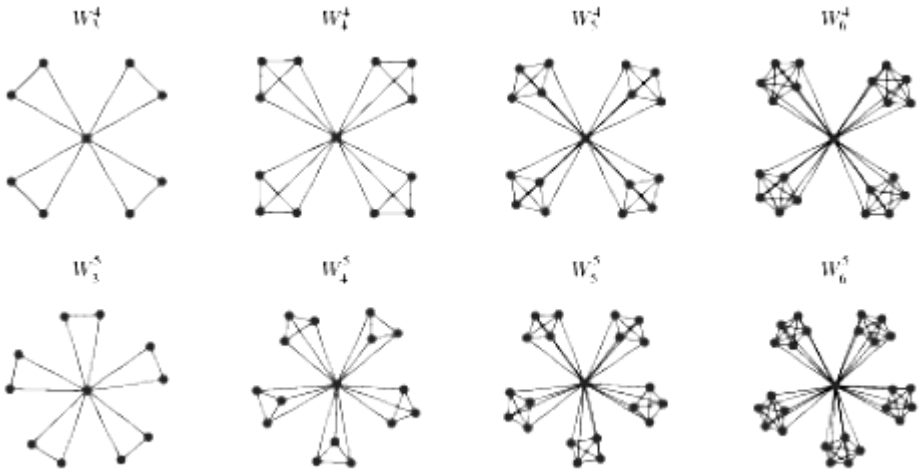
Örnek 1.17



Şekil 1.18 Dostluk Graf Örnekleri

Tanım 1.13 K_n tam grafının m kopyasının birer köşesinden birleştirilmesiyle elde edilen grafa *yel değirmeni(windmill) grafı* denir. Yel değirmeni grafı W_n^m ile gösterilir.

Örnek 1.18

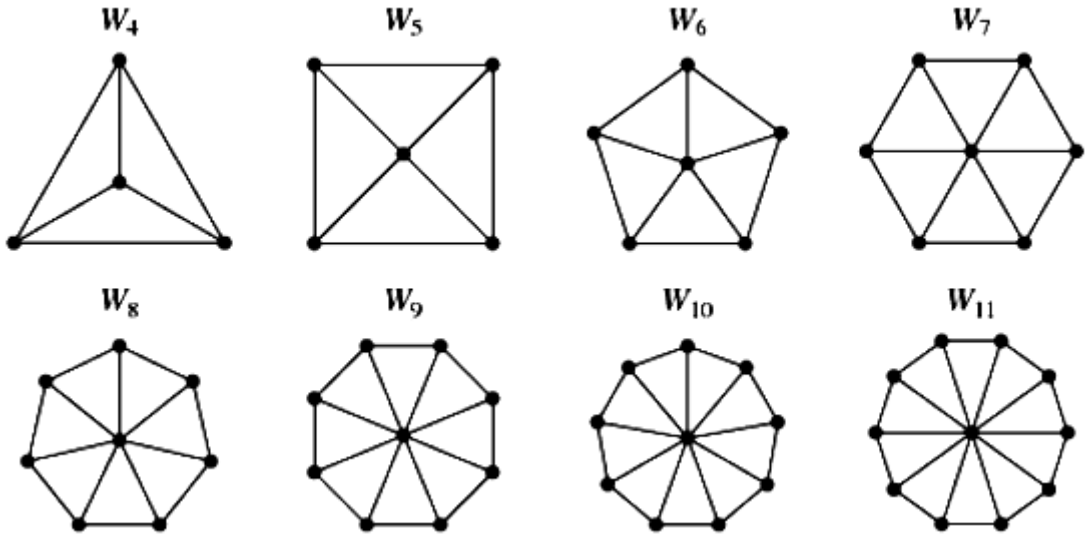


Şekil 1.19 Yel Değirmeni Graf Örnekleri

Tanım 1.14 Bir S_n yıldız grafının ardışık çevre köşelerinin birer kenarla birleştirilmesiyle elde edilen ya da C_n devir grafının tüm köşelerine tek bir kenarla komşu olan yeni bir köşe eklenmesiyle elde edilen grafa *tekerlek(wheel) graf* adı verilir. Tekerlek graf W_n ile gösterilir.

W_n grafının köşe sayısı n olup kenar sayısı da $2(n-1)$ dir.

Örnek 1.19



Şekil 1.20 Tekerlek graf örnekleri

Tanım 1.15 Bir C_n devir grafının diğer bir C_n devir grafı ile 1 ile n arasındaki her bir k için $k-$ ıncı köşeleri birleştirmek suretiyle biraraya getirilmesiyle elde edilen grafa *merdiven grafı* denir. Merdiven grafı L_n ile gösterilir.

L_n merdiven grafının köşe sayısı $2n$ ve kenar sayısı $3n$ dir.

Örnek 1.20



Şekil 1.21 Merdiven Graf Örnekleri

1.2. Sıfır-Bölen Graflar

Bu bölümdeki tanım ve teoremlerde (Livingston, 1997; Anderson ve Livingston, 1999) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Komütatif bir R halkasında sıfırdan farklı bir x elemanı için, $xy=0$ olacak şekilde bir $y\in R-\{0\}$ elemanı bulunabiliyor ise, bu x elemanına sıfır bölen denir. Diğer bir deyişle, komütatif bir halkada sıfır bölen elemanının varlığının anlamı; bu halkadan alınan sıfırdan farklı herhangi iki elemanın çarpımının sıfıra eşit olabilmesidir. Örneğin $\mathbb{Z}_6$ komütatif halkasında $[2]$ ve $[3]$ elemanlarının ikisi de sıfırdan farklı olduğu halde $[2][3]=[0]$ dır (Burada $[0]$, $\mathbb{Z}_6$ nın sıfırıdır). O halde $[2]$ ve $[3]$ elemanları $\mathbb{Z}_6$ halkasının sıfır bölenleridir. (Çevik, 2010)

$\Gamma=(V,E)$ de V noktalar kümesidir ve 'köşelerin kümesi' olarak adlandırılır. E, V kümesi üzerinde yansıma özelliği taşımayan simetrik bağıntıların kümesidir ve 'kenarların kümesi' olarak adlandırılır. Eğer x ve y Γ grafının ayrık(farklı) noktaları ise $x,y\in V$ için $x\neq y$ deriz. Eğer x ve y E kümesinde ilişkili ise biz bu ilişkiyi x ve y arasındaki kenar diye adlandırıyoruz ve (x,y) ile gösteririz. Ayrıca eğer (x,y) bir kenar ise (y,x) de bir kenardır. Sıfır-bölen kümesini $Z(R)=\{x\in R\mid xy=0,0\neq y\in R\}$ şeklinde gösterebiliriz.

Tanım 1.2.1. R birimi sıfır olmayan birimli değişmeli halka olsun. R nin $\Gamma(R)$ şeklinde gösterilen sıfır-bölen grafı aşağıdaki şartları sağlayan basit graftır.

i) Noktalar kümesi R halkasının sıfırdan farklı sıfır-böleni olan

ii) (x, y) bir kenar $\Leftrightarrow$ $x \neq y$ ve $xy = 0$

Eğer R halkası tamlık bölgesi ise $\Gamma(R)$ boş graftır. Çünkü tamlık bölgesinin sıfır böleni yoktur.

Sıfır herşeyle bağlantılıdır ve sıfır hariç sıfır-bölen olmayan hiçbir şeyle bağlantılı değildir. R halkası her zaman komütatif ve birimi sıfırdan farklıdır. Ayrıca R sonlu halka olmalıdır. Bu nedende $\Gamma(R)$ de sonlu olacaktır. 0 köşesinin dahil olduğu grafları $\Gamma_0(R)$ ile gösteririz. Dikkat edersek $\Gamma(R)$ grafı $\Gamma_0(R)$ grafının alt grafıdır.

$x, y \in Z(R)$ için $xy = 0$ veya $x = y$ ise $x \sim y$ bağıntısı vardır. $\sim$ bağıntısı daima yansıyan ve simetrik ama genellikle geçişken değildir. $\Gamma(R)$ sıfır-bölen grafının geçişsizliğini tamamlamak için diğer bir değişle $\sim$ bağıntısının geçişken olması için gerek ve yeter şart $\Gamma(R)$ nin tam graf olmasıdır.

Bir halkanın ideallerinin her biri sınırlı üreteçli ise *noetherian* denir. Asal ideallerin en uzun zincirinin uzunluğuna asal ideallerin *yüksekliği(height)* ismi verilir. Böylece asal ideallerinin yüksekliği sıfır olduğu takdirde içinde uygun asal ideal yoktur. Asal ideallerin bütün yüksekliklerinin supremumuna halkanın *boyutu(dimension)* denir. Bir halka tek maksimal ideal içeriyorsa *quasi-lokal* olarak adlandırılır. Bir değişmeli halka içinde x elemanın *sıfırlayıcıları (annihilator)* $ann(x)$ ile gösterilir ve bu küme $xy = 0$ olan y lerin kümesidir. Sıfır-bölen graflar için bu x e komşu olan kenarların kümesidir. Dikkat edelim ki $ann(x)$ in elemanları x in kendisi olabilir. Bu durum R nin sıfır-bölen grafları içinde aşikar değildir. Diğer önemli ideal ise R nin *nil-radikal* idir, $nill(R)$ ile gösterilir. R nin nilpotent elemanlarının kümesi olarak tanımlanır. $Nill(R)$ diğer önemli karakterizasyonu ise R nin asal ideallerinin arakesiti olmasıdır.

Teorem 1.2.1 (Anderson ve Livingston, 1999) R değişmeli halka olsun. Bu durumda $\Gamma(R)$ bağlantılıdır ve $diam\Gamma(R) \leq 3$ tür.

İspat. $x, y \in \Gamma(R)$ ve $x \neq y$ olsun. Eğer $xy = 0 \Rightarrow d(x, y) = 1$ dir. $xy \neq 0$ olsun. Eğer $x^2 = 0 = y^2$ ise $x - xy - y$ olan 2 uzunluklu yoldur ve $d(x, y) = 2$ dir. $x^2 = 0$ ve $y^2 \neq 0$

olsun. Burada $b \neq y$ olan $by = 0$ olacak şekilde $b \in \Gamma(R)$ oluşur. $bx = 0$ ise x ile y arasında $x - b - y$ olacak şekilde 2 uzunluklu yol vardır. $bx \neq 0$ ise x ile y arasında $x - bx - y$ olacak şekilde 2 uzunluklu yol vardır. Her 2 durumda da $d(x, y) = 2$ dir. $y^2 = 0$ ve $x^2 \neq 0$ için de benzer ispat yapılabilir. Burada $ax = 0 = by$ olan sıfırdan farklı $a, b \in \Gamma(R)$ oluşur (birbirinden farklı olmak zorunda değil). Eğer $a = b$ ise $x - a - y$ olan 2 uzunluklu yoldur ve böylece $d(x, y) = 2$ dir. $a \neq b$ iken ab elemanını inceleyelim. Eğer $ab = 0$ ise $x - a - b - y$ olan üç uzunluklu yoldur ve bu yüzden $d(x, y) \leq 3$ tür. Eğer $ab \neq 0$ ise $x - ab - y$ olan iki uzunluklu yoldur ve bu yüzden $d(x, y) = 2$ dir. Bütün durumlar incelendiğinde x ve y arasındaki uzaklık üçe eşit veya üçten küçüktür. x ve y keyfi olduğundan $\Gamma(R)$ nin çapı üçe eşit veya daha küçüktür.

Teorem 1.2.2 (Livingston, 1997) R halkası için aşağıdaki durumlar denktir.

i) ${}_0\Gamma(R)$ üçgensizdir.

ii) R hem $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$ hem de $\mathbb{Z}_4$ e izomorftur ya da R tamlık bölgesidir.

İspat. $i) \Rightarrow ii)$ aşikardır. $ii) \Rightarrow i)$ Varsayalım ki ${}_0\Gamma(R)$ üçgensiz ve tamlık bölgesi olmasın. x ve y sıfırdan farklı iken $xy = 0$ alalım. Bu durumda $\{0, x, y\}$ klik olur. $x = y$ iken $x \neq 0$ ve $x^2 = 0$ dır. xR ideali kliktir ve $|xR| = 2$ olur. Şimdi farz edelim ki $z \in ann(x)$ olsun. Bu durumda $\{0, x, z\}$ kliktir ve bu nedenle $z \in Rx = \{0, x\}$ dir. Bu yüzden $ann(x) = xR$ dir. Tam dizi olduğundan $0 \to ann(x) \to R \xrightarrow{x} xR \to 0$ dır. sonuç olarak $|R| = 4$ olur. Eğer R nin karakteristiği 4 ise $R \approx \mathbb{Z}_4$ ve R nin karakteristiği 2 ise $R \approx \mathbb{Z}_2[X]/(X)$ olur.

Aşağıdaki tablo (Livingston, 1997) kaynağından alınmıştır.

N	No. Vertices	No. Edges	Diameter	Girth	Remarks
p	0	0	0	undefined	$\Gamma(\mathbb{Z}_p) = \varnothing$
2^2	1	0	0	undefined	
3^2	2	1	1	undefined	
p^2 ($p \geq 5$)	p-1	$\binom{p-1}{2}$	1	3	complete graph K_{p-1}
2^3	3	2	2	undefined	
p^n ($n \geq 3$)	$p^{n-1} - 1$	$\sum_{(p-1)^{\lfloor i/2 \rfloor}}$	2	3	quasi-local: p^{n-1} is attached to everything
2^2p $p \geq 3$	2p + 1	4p - 4	3	4	bipartite graph (but not complete)
pq	q-1 + p-1	(q-1)(p-1)	2	4	complete bipartite graph $K_{q-1,p-1}$
all others			2	3	

$\Gamma(\mathbb{Z}_N)$ **in özet tablosu : (p ve q asal)**

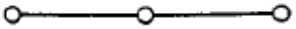
Örnek 1.2.1 (Anderson ve Livingston, 1999) Aşağıda bazı halkaların sıfır-bölen grafları incelenmiştir. Dikkat edersek bu örnekler bize birbirine izomorf olmayan halkaların aynı sıfır-bölen graflara sahip olduğunu gösterir.



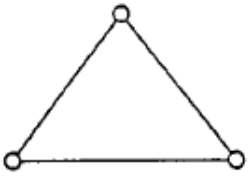
$\mathbb{Z}_4$ veya $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$



$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ veya $\mathbb{Z}_3[X]/(X^2)$



$\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_8$ veya $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3)$



$\mathbb{Z}_2[X,Y]/(X^2,XY,Y^2)$ veya $\mathbb{F}_4[X]/(X^2)$

1.3. Zagreb İndeks Özellikleri

Fizik ve kimyada molekülleri çalışmak için graf teori kullanılır. Molekül ağırlığı, kaynama noktası, atom yarıçapı gibi atom ve moleküllerin sınıflandırılmasında ve kimyasal birleşmelerinde kullanılan birçok sabit sayı, matematiksel formüllerle ifade edilebilir. Sabit sayılar arasındaki bağıntılar yardımıyla matematiksel verilerden yararlanarak kimyasal özelliklere ulaşılabilir. Bu amaçla birçok topolojik indeks tanımlanmıştır.

Teorem 1.3.1. (Das ve ark., 2009) G grafı m kenarlı, n köşeli, Δ maksimum dereceli, Δ_2 ikinci maksimum dereceli ve δ minimum dereceli bir graf olsun. Bu durumda,

$$M_1(G)+M_1(\overline{G}) \le \frac{\left(n(n-2)-2m+\delta+1\right)^2}{n-1}+\Delta^2+$$
$$(n-1-\delta)^2+\frac{(n-1)}{4}\left[(\Delta-\delta)^2+(\Delta_2-\delta)^2\right]$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak G nin regüler graf ya da P_3 grafı olması durumunda geçerlidir.

Teorem 1.3.2. (Liu ve Zhang, 2012) G, n köşeli ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda,

$$\prod_1(G) \le \left(\frac{2m}{n}\right)^2$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak G nin bir $\frac{2m}{n}$ regüler graf olması durumunda geçerlidir.

Sonuç 1.3.1. (Liu ve Zhang, 2012) G; $2n$ köşeli, bağlantılı, iki parçalı bir graf ise $\prod_1(G) \le (n)^{4n}$ olur. Eşitlik ancak ve ancak G nin bir $K_{n,n}$ iki parçalı graf olması durumunda geçerlidir.

Teorem 1.3.3. (K. Xu, 2013) n köşeli ve m kenarlı bağlantılı bir G grafı için

$$\prod_2(G) \le \left(\frac{2(n-1)m - M_1(G)}{n(n-1)-2m}\right)^{n(n-1)-2m}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak G nin bir $\frac{2m}{n}$ -regüler graf olması durumunda geçerlidir.

Sonuç 1.3.2. (K. Xu, 2013) n köşeli ve m kenarlı bağlantılı bir G grafı için

$$\overline{\prod_2}(G) \le \left(\frac{\overline{M_1}(G)}{n(n-1)-2m}\right)^{n(n-1)-2m}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak G nin bir $\frac{2m}{n}$ -regüler graf olması durumunda geçerlidir.

Teorem 1.3.4. (Das ve Gutman, 2004) T, yıldız graf S_n ve yol graf P_n den farklı ve n köşeli bir ağaç graf olmak üzere

$$M_2(P_n) < M_2(T) < M_2(S_n)$$

dir.

1.4. Kaynak Araştırması

1.4.1. Graf Parametreleri ile İlgili Araştırmalar

(P.A.Ostrand, 1973) *"Graphs with specified radius and diameter"* adındaki araştırmasında $rad(G) \leq diam(G) \leq 2\,\mathrm{rad}(G)$ şeklinde radius ve diameterle ilgili bağıntıyı ortaya koymuştur.

(Beck, 1988) *"Coloring of Commutating Rings"* isimli çalışması sıfır-bölen grafların başlangıcı olmuştur. Bu araştırmasında yazar halkaların sıfır-bölen grafını tanımlamış ve bu grafın renklendirmesi problemi üzerinde çalışmıştır.

(Erdös, 1989) *"Radius, diameter ve minimum degree"* adındaki araştırmasında grafın yalnızca köşe sayısını ve minimum derecesini içeren hala birçok yerde kullanılan Radius ve diameterle ilgili sınırlar ortaya çıkarmıştır.

(D.F. Anderson, 1991) *"Beck's coloring of a commutative ring"* isimli çalışmasında Beck'in araştırmasındaki sıfır-bölen grafların renklendirme sayısı için bıraktığı problemi çözmüşlerdir. Renklendirme sayısı 4 ve 4 ten küçük olan halkaları liste haline getirmişlerdir.

(Anderson ve Livingston, 1999) *"The Zero-divisor Graph of Commutative Ring"* isimli araştırmalarında değişmeli halkaların sıfır-bölen grafları için birçok temel sonuç ortaya koymuşlardır.

(Dankelmann, 2000) *"Averange distance, minimum degree and spanning trees"* adındaki çalışmasında bir grafın ortalama uzaklığı için minimum derece ve grafın köşe sayısı ile ilgili bir sınır tespit etmiş ve yaptığı ispat tekniği bir çok araştırmacının bakış açısını değiştirmiştir.

(DeMeyer ve ark., 2002) *"The Zero-Divisor Graph of a Commutative Semigroup"* isimli araştırmasında halkalarda tanımlanmış olan sıfır-bölen graf kavramını yarı

gruplara aktardılar. Ayrıca bu grafın bağlantılı graf olduğunu bulmuşlardır. Bu grafların parametreleri için sınır şartlar ortaya koydular.

(Chudnovsky, 2006) *"The strong perfect graph theorem"* adındaki araştırmasında güçlü mükemmel konjektürünü ispat etmiştir. Bu araştırma mükemmel graflar için önemli bir kaynaktır.

(Lai, 2011) *"Degree sequences and graphs with disjoint spanning trees"* isimli çalışmasında derece dizisi ile bir graf geren ağacı arasındaki bağıntıyı araştırmıştır. Derece dizisi yardımıyla hangi koşullar altında geren ağacının parçalandığını bulmuştur.

(Akgüneş, 2012) *"Analyzing special parameters over zero-divisor graphs"* isimli çalışmasında p ve q farklı asalları için $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ sıfır-bölen graflarının çeşitli parametlerini yalnızca p ve q ya bağlı olarak bulmuşlardır.

(N. Akgunes, 2013) *"A new bound of radius of irregularity index"* adındaki araştırmasında radius kavramı için düzensizlik(irregularity) indeks kavramı yardımıyla kuvvetli bir üst sınır elde etmişlerdir.

(N.Akgunes and A.S.Cevik, 2013) *"On a graph of monogenic semigroup"* isimli çalışmasında monojenik yarı gruplar için graf kavramını tanımlamışlardır. Bu grafın farklı özelliklerini araştırmışlardır. Bu grafın mükemmel bir graf olduğunu bulmuşlardır. Bu graf üzerinde Kartezyen çarpımın (graf çarpımı) sağladığı özellikler çalışılmıştır.

(Topkaya S. ve Cevik, 2016) *"A new graph over semi-direct products of groups"* isimli çalışmasında yarı direkt çarpım grupları üzerinde yeni bir graf tanıtılıp, bu grafın spektral özellikleri cebirsel ve teorik yöntemler kullanılarak ifade ve ispat edilmiştir. Ek olarak bu grafın mükemmel graf olduğu isapatlanmıştır.

(Anderson ve Weber, 2018) *"The Zero divisor graph of a commutative ring without identity"* adındaki çalışmasında birimsiz değişmeli halkaların sıfır bölen graflarıyla ilgili teoremler ispat etmiştir.

1.4.2. Topolojik İndeksler Üzerine Çalışmalar

(I.Gutman, 1972) *"Graph Theory and moleküler orbitals: Total π-elektron energy of alternant hydrocarbons"* adındaki araştırmalarında birinci Zagreb indeksi ortaya koydular. Bu kavramın graf teoride ve kimyasal matematik alanında önemli bir yeri vardır.

(I.Gutman, 1975) *"Graph theorey and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes"* adındaki araştırmasında önceki çalışmaların ışığıyla İkinci Zagreb indeksi tanımlamıştır ve bazı özelliklerini açıklamıştır.

(Balaban, 1983) *"Topological indices for structure-activity correlations"* isimli çalışmasında Zagreb indeksler isimlendirilmiştir.

(Das ve Gutman, 2004) *"Some properties of the second Zagreb index"* isimli çalışmasında ikinci Zagreb indekslere ait bazı özellikler bulmuştur.

(Vukičević, 2010) *"Note on the comparison of the first and second normalized Zagreb eccentricity indices"* isimli çalışmasında birinci ve ikinci normalize edilmiş Zagreb eksantrik(eccentiricity) indekslerini tanımlamış ve bunlar ile ilgili sınırlar bulmuştur. Bunun diğer parametreler ve diğer topolojik indeksler ile olan bağıntısını ortaya koymuştur.

(R. Todeschini, 2010) *"New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees"* isimli çalışmasında çarpımsal Zagreb indeksi tanımlamıştır.

(Abdo ve ark., 2012) *"On the Zagreb indices equality"* isimli araştırmalarında Zagreb indeks eşitlikleri üzerine çalışmışlardır.

(M. ELIASI, 2012) *"Multiplicative versions of first Zagreb index"* isimli çalışmalarında çarpımsal toplam Zagreb indeksi tanımlamıştır.

(Cevik ve ark., 2013) *"The multiplicative Zagreb indices of graph operations"* isimli araştırmalarında çarpımsal Zagreb indeksleri incelemişlerdir.

(Nihat Akgunes, 2014) *"Topological indices on a graph of monogenic semigroups"* isimli araştırmalarında monojenik yarıgrupların topolojik indeklerini çalışmışlardır.

(Das ve ark., 2016) *"On the first Zagreb index and multiplicative Zagreb coindices of graphs"* isimli çalışmalarında birinci Zagreb indeks ve çarpımsal Zagreb eşindekleri üzerinde araştırma yapmışlardır.

(Ahmet Sinan Cevik, 2017) *"New formulae for Zagreb indices"* isimli çalışmalarında Zagreb indeksler ile ilgili yeni ispatlar yapmışlardır.

(Maden ve Nacaroglu, 2017) *"The Upper Bounds for Multiplicative Sum Zagreb Index of Some Graph Operations"* isimli çalışmalarında çarpımsal toplam Zagreb indeks için bazı üst sınırlar bulmuşlardır.

(Akgunes, 2018) *"A Further Note on the Graph of Monogenic Semigroups"* isimli araştırmasında monojenik yarıgruplar için bazı graf parametreleri, birinci ve ikinci Zagreb indeksi, Laplasyen karakteristik polinomu çalışmıştır.

2. DEĞİŞMELİ HALKALARIN SIFIR BÖLEN GRAFLARI İLE İLİŞKİLİ GRAF PARAMETRELERİNİN ANALİZİ

Bu bölümdeki teorem ve ispatlar tarafımızdan yapılan orijinal çalışmalar olup bu teorem ve ispatlar (Aykaç S. ve Akgüneş, 2018) kaynağında belirtilen makale olarak basılmıştır. $\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}$ halkasının $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafı için bazı spektral özellikler incelenmiştir.

2.1. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ nin Bazı Spektral Özellikleri

Bu bölümde p ve q asal iken $\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}$ halkasının $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafı için şu özellikleri inceleyeceğiz: diameter, radius, maksimum ve minimum derece, baskınlık sayısı, klik sayısı, düzensizlik indeksi, derece dizisi ve son olarak kromatik sayısı. Bir Γ grafı için, bu özelliklerin çoğunun köşelerin toplam sayısının ve uzaklığını kontrol ederek bulunabileceği çok iyi bilinmektedir. Dolayısıyla, bu bölüm içindeki sonuçların ispatlarındaki metodlarda bu fikir takip edilecektir.

Tanım 2.1 p ve q asal iken $\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}$ halkasının $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının komşulukları aşağıdaki gibidir:

- $(0,j)\sim(i,0)$ burada $0<j<q^2$ ve $0<i<p^2$
- $(k_1p,j)\sim(k_2p,0)$ burada $0\le j<q^2$ ve $0<k_1,k_2<p$
- $(0,t_1q)\sim(i,t_2q)$ burada $0\le i<p^2$ ve $0<t_1,\mathrm{t}_2<q$
- $(k_1p,t_1q)\sim(k_2p,t_2q)$ burada $0<k_1,k_2<p$ ve $0<t_1,\mathrm{t}_2<q$

Tanım 2.2 $\Gamma=(V,E)$ bir graf ve $u,v\in V(\Gamma)$ olmak üzere bu iki köşe arasındaki en kısa yolun uzunluğuna u ile v arasındaki *uzaklık (distance)* denir ve $d(u,v)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının herhangi iki köşesi arasındaki uzaklık aşağıdaki gibidir:*

- $d\left((0,j_1),(0,j_2)\right)=2$ *burada* $0<j_1,j_2<q^2;\ j_1,j_2\neq tq\left(0<t<q\right)$
- $d\left((0,j),(\mathrm{i},\mathrm{tq})\right)=3$ *burada* $0<j<q^2,0<i<p^2,0<t<q$ *ve* $j\neq tq$
- $d\left((0,j),(\mathrm{kp},j)\right)=2$ *burada* $0<j<q^2,0<k<p,0<t<q$ *ve* $j\neq tq$
- $d\left((0,j),(0,\mathrm{tq})\right)=2$ *burada* $0<j<q^2,0<t<q$ *ve* $j\neq tq$
- $d\left((\mathrm{i}_1,0),(\mathrm{i}_2,0)\right)=2$ *burada* $0<i_1,\mathrm{i}_2<p^2;\mathrm{i}_1,\mathrm{i}_2\neq kp\left(0<k<p\right)$
- $d\left((\mathrm{i},0),(\mathrm{kp},\mathrm{j})\right)=3$ *burada* $0<j<q^2,0<i<p^2,0<k<p,i\neq kp$
- $d\left((\mathrm{i},0),(\mathrm{kp},\mathrm{tq})\right)=2$ *burada* $0<i<p^2,0<k<p,0<t<q,i\neq kp$
- $d\left((\mathrm{i},0),(\mathrm{i},\mathrm{tq})\right)=2$ *burada* $0<i<p^2,0<t<q,i\neq kp\left(0<k<p\right)$
- $d\left((\mathrm{kp},\mathrm{j}),(0,\mathrm{tq})\right)=2$ *burada* $0<j<q^2,0<k<p,0<t<q,\ j\neq tq$
- $d\left((\mathrm{kp},\mathrm{j}),(\mathrm{i},\mathrm{tq})\right)=3$ *burada* $0<i<p^2,0<k<p,0<j<q^2,0<\mathrm{t}<\mathrm{q},i\neq kp$
- $d\left((\mathrm{kp},\mathrm{j}),(\mathrm{kp},\mathrm{j})\right)=2$ *burada* $0<j<q^2,0<k<p,0<t<q,\ j\neq tq$
- $d\left((i,tq),(\mathrm{i},\mathrm{tq})\right)=2$ *burada* $0<i<p^2,0<k<p,0<\mathrm{t}<\mathrm{q},i\neq kp$

İspat

- $0<j_1,j_2<q^2;\ j_1,j_2\neq tq\left(0<t<q\right)$ için $(0,j_1)\sim(i_1,0)$ ve $(i_1,0)\sim(0,j_2)$ olduğundan $d\left((0,j_1),(0,j_2)\right)=2$ olur.
- $0<j<q^2,0<i<p^2,0<t<q$ *ve* $j\neq tq$ için $(0,j)\sim(kp,0)$, $(kp,0)\sim(0,tq)$ ve $(0,tq)\sim(i,tq)$ olup $d\left((0,j),(\mathrm{i},\mathrm{tq})\right)=3$ bulunur.
- $0<j<q^2,0<k<p,0<t<q$ *ve* $j\neq tq$ için $(0,j)\sim(kp,0),(kp,0)\sim(kp,j)$ olduğundan $d\left((0,j),(\mathrm{kp},j)\right)=2$ bulunur.
- $0<j<q^2,0<t<q$ *ve* $j\neq tq$ için $(0,j)\sim(kp,0),(kp,0)\sim(0,\mathrm{tq})$ olduğundan $d\left((0,j),(0,\mathrm{tq})\right)=2$ bulunur.

• $0 < i_1, i_2 < p^2; i_1, i_2 \neq kp (0 < k < p)$ için $(i_1, 0) \sim (0, tq), (0, tq) \sim (i_2, 0)$ olduğundan $d((i_1, 0), (i_2, 0)) = 2$ bulunur.

• $0 < j < q^2, 0 < i < p^2, 0 < k < p, i \neq kp$ için $(i, 0) \sim (0, tq), (0, tq) \sim (kp, 0)$ ve $(kp, 0) \sim (kp, j)$ olduğundan $d((i, 0), (kp, j)) = 3$ bulunur.

• $0 < i < p^2, 0 < k < p, 0 < t < q, i \neq kp$ için $(i, 0) \sim (0, tq), (0, tq) \sim (kp, tq)$ olduğundan $d((i, 0), (kp, tq)) = 2$ bulunur.

• $0 < i < p^2, 0 < t < q, i \neq kp (0 < k < p)$ için $(i, 0) \sim (0, tq), (0, tq) \sim (i, tq)$ olduğundan $d((i, 0), (i, tq)) = 2$ bulunur.

• $0 < j < q^2, 0 < k < p, 0 < t < q, j \neq tq$ için $(kp, j) \sim (kp, 0), (kp, 0) \sim (0, tq)$ olduğundan $d((kp, j), (0, tq)) = 2$ bulunur.

• $0 < i < p^2, 0 < k < p, 0 < j < q^2, 0 < t < q, i \neq kp$ için $(kp, j) \sim (kp, 0), (kp, 0) \sim (0, tq)$ ve $(0, tq) \sim (i, tq)$ olduğundan $d((kp, j), (i, tq)) = 3$ bulunur.

• $0 < j < q^2, 0 < k < p, 0 < t < q, j \neq tq$ için $(k_1 p, j_1) \sim (kp, 0), (kp, 0) \sim (k_2 p, j_2)$ olduğundan $d((kp, j_1), (kp, j_2)) = 2$ bulunur.

• $0 < i < p^2, 0 < k < p, 0 < t < q, i \neq kp$ için $(i_1, t_1 q) \sim (0, tq), (0, tq) \sim (i_2, t_2 q)$ olduğundan $d((i, tq), (i, tq)) = 2$ bulunur.

Tanım 2.3 Bir $\Gamma = (V, E)$ grafından alınan v köşesi ile v köşesine en uzak köşe arasındaki uzaklığa v köşesinin *eksantiriği(eccentricity)* denir ve $e(v)$ ile gösterilir. Kısaca

$$e(v) = \max\{d(v, x) \mid x \in V(\Gamma)\}$$

şeklinde ifade edilir.

Bağlantılı bir grafın köşeleri arasındaki maksimum eksantriğe Γ nin *çapı(diameter)* denir ve

$$diam(\Gamma) = \max\{e(v) \mid v \in V(G)\}$$

ile gösterilir.

Teorem 2.2 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının çapı 3 tür.*

İspat $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının köşelerini düşünelim. $i\neq kp, j\neq tq$ için (i,tq) ve (kp,j) yi alalım. $0<i<p^2, 0<k<p, 0<j<q^2, 0<\mathrm{t}<\mathrm{q}$ için; $(kp,j).(kp,0)=(0,0)$ olduğundan $(kp,j)\sim(kp,0)$ olup $d_G\left((\mathrm{kp},\mathrm{j}),(\mathrm{kp},0)\right)=1$ olur, $(\mathrm{i},\mathrm{tq}).(0,\mathrm{tq})=(0,0)$ olduğundan $(i,tq)\sim(0,tq)$ olup $d_G\left((i,tq),(0,\mathrm{tq})\right)=1$ olur, $(0,\mathrm{tq}).(kp,0)=(0,0)$ olduğundan $(0,tq)\sim(kp,0)$ olup $d_G\left((0,\mathrm{tq}),(\mathrm{kp},0)\right)=1$ dir. Buradan $(kp,j)\sim(kp,0)\sim(0,tq)\sim(i,tq)$ olduğunu kolayca görebiliriz. Bunun sonucunda $diam\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=3$ olur.

Tanım 2.4 Bağlantılı bir grafın köşeleri arasındaki minimum eksantriğe Γ nin *yarıçapı(radius)* denir ve

$$rad(\Gamma)=\min\{e(v)\,|\,v\in V(\Gamma)\}$$

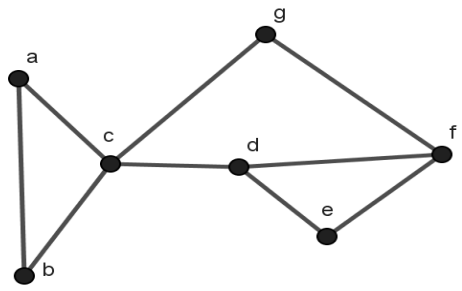
ile gösterilir.

Teorem 2.3 (P.A.Ostrand, 1973) Herhangi bir Γ grafı için,

$$rad(\Gamma)\leq diam(\Gamma)\leq 2rad(\Gamma)$$

eşitsizliği vardır.

Örnek 2.1



$d(f,c)=2$ $\quad e(c)=2$ $\quad diameter=3$ $\quad radius=2$
$d(b,f)=2$ $\quad e(a)=3$
$d(a,f)=3$

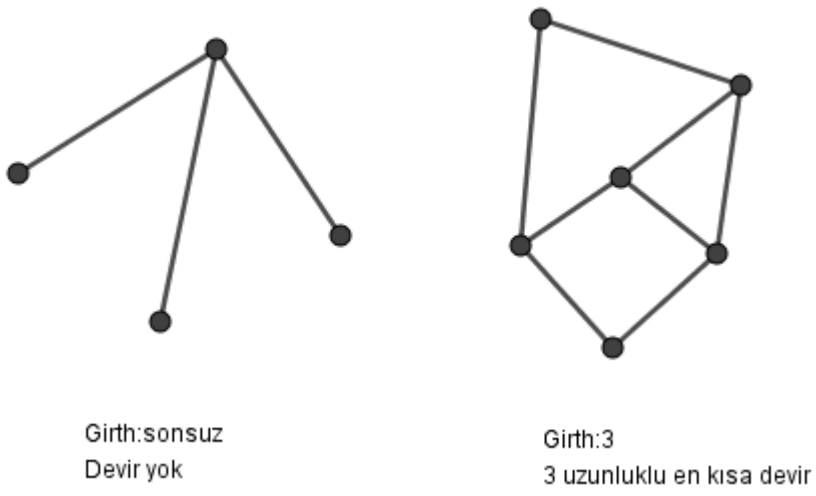
Şekil 2.1 Uzaklık, Diameter, Eksantrik, Radius Örnekleri

Teorem 2.4 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının radiusu 2 dir.*

İspat Şimdi bütün köşelerin eksantiriğini inceleyelim. $0<k<p$ için $\varepsilon(kp,0)=2$ dir. $i\neq kp, 0<i<p^2$ için $\varepsilon(i,0)=2$ dir. $j\neq tq, 0<j<q^2$ için $\varepsilon(0,j)=2$ dir. $0<t<q$ için $\varepsilon(0,tq)=2$ dir. $0<k<p,\ j\neq tq, 0<j<q^2$ için $\varepsilon(kp,\mathrm{j})=2$ dir. $0<t<q, i\neq kp, 0<i<p^2$ için $\varepsilon(i,tq)=2$. $0<k<p, 0<t<q$ için $\varepsilon(kp,tq)=2$ dir. Burada en küçük eksantirik 2 dir. Radius en küçük eksantirik olduğundan $rad\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=2$ olur.

Tanım 2.5 Bir Γ grafının içerdiği en kısa devirin uzunluğuna o grafın *girth* i denir. Bir Γ grafın girthi $girth(\Gamma)$ ile gösterilir. Eğer graf hiçbir devir içermiyorsa o grafın girthi sonsuzdur denir. (Gross, 2004)

Örnek 2.2



Şekil 2.2 Girth Örnekleri

Teorem 2.5 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının girthi* 3 *tür.*

İspat $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının tanımıından $0<t_1,t_2<q$ için $(0,\mathrm{t}_1 q).(0,\mathrm{t}_2 q)=(0,0)$, $(0,\mathrm{t}_2 q).(\mathrm{i},\mathrm{t}_1 q)=(0,0)$ ve $(\mathrm{i},\mathrm{t}_1 q).(0,\mathrm{t}_1 q)=(0,0)$ dir. Buradan $(0,t_1q)\sim(0,t_2q)\sim(\mathrm{i},t_1q)\sim(0,t_1q)$ olduğunu kolayca görebiliriz. Bu da bize $girth\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=3$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.6 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının köşelerinin derecesi aşağıdaki gibidir:*

- $\mathrm{der}(i,0)=q^2-1$ *burada* $0<i<p^2, i\neq kp$
- $\mathrm{der}(\mathrm{kp},0)=pq^2-2$ *burada* $0<k<p$
- $\mathrm{der}(0,\mathrm{j})=p^2-1$ *burada* $0<j<q^2, \mathrm{j}\neq tq$
- $\mathrm{der}(0,\mathrm{tq})=qp^2-2$ *burada* $0<t<q$
- $\mathrm{der}(\mathrm{kp},\mathrm{j})=p-1$ *burada* $0<j<q^2$ *ve* $0<k<p, \mathrm{j}\neq tq$
- $\mathrm{der}(i,\mathrm{tq})=q-1$ *burada* $0<i<p^2, i\neq kp$
- $\mathrm{der}(\mathrm{kp},\mathrm{tq})=pq-1$ *burada* $0<t<q$ *ve* $0<k<p$

İspat

- $i\neq kp, 0<i<p^2$ için $(i,0)$ köşesini inceleyelim. $(i,0)$ köşesi sadece $(0,j)$ ye komşu olup $0<j<q^2$ dir. $(0,j)$ köşesinin sayısı q^2-1 olup $der(i,0)=q^2-1$ olur.
- $0<k<p$ için $(kp,0)$ köşesini inceleyelim. $(kp,0)$ köşesi $0<j<q^2, 0<k<p$ için $(0,j),(kp,0),(kp,j)$ köşelerine komşu olur. $(0,j)$ köşesinin sayısı q^2-1, (kp,j) köşesinin sayısı $q(p-1)(q-1)$ ve komşu olduğu diğer $(kp,0)$ ların sayısı ise $p-2$ dir. Bu köşelerin sayısını toplarsak $(q^2-1)+(q^2-1).(p-1)+(p-2)$ gelir ve bu da pq^2-2 ye denk olup $der(\mathrm{kp},0)=pq^2-2$ olur.

•$0 < j < q^2, \mathrm{j} \neq tq$ ve $0 < t < q$ için $(0, j)$ köşesini inceleyelim. $(0, j)$ köşesi $0 < i < p^2$ için sadece $(i,0)$ a komşu olur. $(i,0)$ köşelerinin sayısı $p^2 - 1$ olup $der(0, j) = p^2 - 1$ olur.

•$0 < t < q$ için $(0,tq)$ köşesini inceleyelim. $(0,tq)$ köşesi $0 < j < q^2, 0 < k < p$ için $(i,0),(0,tq),(i,tq)$ köşelerine komşu olur. $(i,0)$ köşelerinin sayısı $p^2 - 1$, (i,tq) köşelerinin sayısı $p(p-1)(q-1)$ ve komşu olduğu diğer $(0,tq)$ ların sayısı ise $q-2$ dir. Bu köşelerin sayısını toplarsak $(p^2-1)+(p^2-1)(q-1)+(q-2)$ olur ve bu da $qp^2 - 2$ ye denk olup $der(0, \mathrm{tq}) = qp^2 - 2$ olur.

•$0 < k < p, \mathrm{j} \neq tq$ ve $0 < t < q$ için (kp, j) köşesini inceleyelim. (kp, j) köşesi sadece $(kp,0)$ köşesine komşudur. $(kp,0)$ köşelerinin sayısı $p-1$ olup $der(\mathrm{kp}, \mathrm{j}) = p-1$ olur.

•$0 < i < p^2, i \neq kp$ ve $0 < t < q$ için (i,tq) köşesini inceleyelim. (i,tq) köşesi sadece $(0,tq)$ köşesine komşudur. $(0,tq)$ köşelerinin sayısı $q-1$ olup $der(i, \mathrm{tq}) = q-1$ olur.

•$0 < t < q$ ve $0 < k < p$ için (kp,tq) köşesini inceleyelim. (kp,tq) köşesi $(0,tq),(kp,0),(kp,tq)$ köşelerine komşudur. $(0,tq)$ köşelerinin sayısı $q-1$, $(kp,0)$ köşelerinin sayısı $p-1$ ve komşu olduğu diğer (kp,tq) ların sayısı ise $(q-1)(p-1)-1$ dir. Bu köşelerin sayısını toplarsak $(q-1)+(p-1)+(q-1)(p-1)-1$ olur ve bu da $pq-2$ ye denk olup $der(\mathrm{kp}, \mathrm{tq}) = pq-2$.

Tanım 2.6 Bir Γ grafında en çok derecesi olan köşeye *maksimum dereceli köşe* denir ve

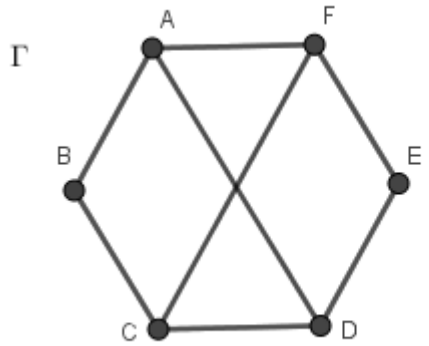
$$\Delta(\Gamma) = \max\{d(v) \mid v \in V(\Gamma)\}$$

ile gösterilir. Bir Γ grafında en az derecesi olan köşeye *minimum dereceli köşe* denir ve

$$\delta(\Gamma) = \min\{d(v) \mid \mathrm{v} \in \mathrm{V}(\Gamma)\}$$

ile gösterilir.

Örnek 2.3



$d(B) = 3$

$d(C) = 2$

$\Delta(\Gamma) = 3$

$\delta(\Gamma) = 2$

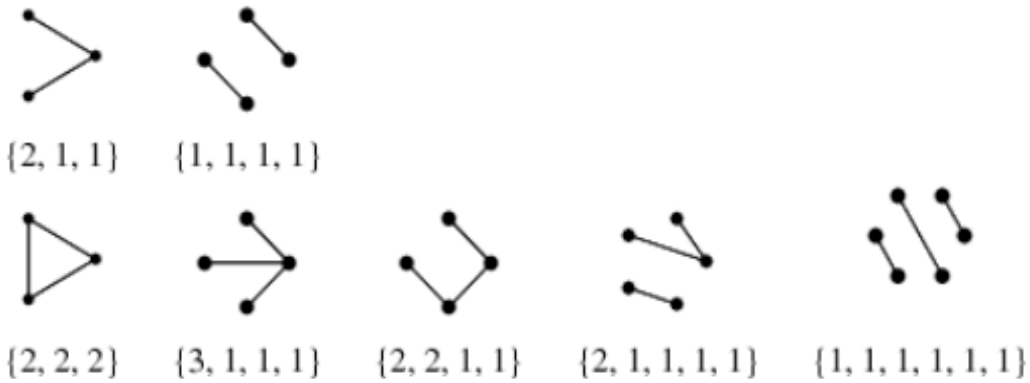
Şekil 2.3 Maksimum ve Minimum Derece Örneği $\delta(\Gamma) = 2$

Teorem 2.7 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının maksimum ve minimum derecesi sırasıyla* $p \le q$ *için* $\Delta\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)\right) = pq^2 - 2$ *ve* $\delta\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)\right) = p - 1$ *dir.*

İspat Minimum dereceli köşeyi bulmak için tüm köşelerin dereceleri arasında en küçük dereceli olanı araştırmalıyız. $p \le q$ alalım. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ nin bütün köşelerini düşünelim. Teorem 2.5 den, $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ nin $0 < j < q^2, \mathrm{j} \neq tq$ için (kp, j) köşesini alalım. Bu köşe sadece $0 < k < p$ için $(kp, 0)$ a komşudur. $(kp, 0)$ köşesinin sayısı $p - 1$ dir. Bu yüzden $\delta\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)\right) = p - 1$ dir. Teorem 2.5 den $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ nin $0 < k < p$ için $(kp, 0)$ köşesini alalım. $(kp, 0)$ köşesi $0 < j < q^2, 0 < k < p$ için $(0, j), (kp, 0), (kp, j)$ köşelerine komşu olur. $(0, j)$ köşesinin sayısı $q^2 - 1$, (kp, j) köşesinin sayısı $q(p-1)(q-1)$ ve komşu olduğu diğer $(kp, 0)$ ların sayısı ise $p - 2$ dir. Bu köşelerin sayısını toplarsak $(q^2 - 1) + (q^2 - 1).(p - 1) + (p - 2)$ gelir ve bu da $pq^2 - 2$ ye denk olur. Bu nedenle $\Delta\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)\right) = pq^2 - 2$.

Tanım 2.7 Γ grafının köşelerinin derecelerinin yazılmasıyla elde edilen diziye *derece dizisi(degree sequence)* denir ve $DS(\Gamma)$ ile gösterilir. Bu dizinin farklı elemanlarının sayısına *düzensizlik indeksi(irregularity index)* denir ve $t(\Gamma)$ ile gösterilir.

Örnek 2.4



Şekil 2.4 Derece Dizisi Örnekleri

Teorem 2.8 $\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}$ *halkası için* $p<q$ *alalım.* $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının derece dizisi ve düzensizlik indeksi sırasıyla*

$$DS\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=\left\{\underbrace{p-1}_{q(p-1)(q-1)times},\ \underbrace{q-1}_{p(p-1)(q-1)times},\ \underbrace{p^2-1}_{(q^2-q)times},\ \underbrace{pq-2}_{(p-1)(q-1)times},\ \underbrace{q^2-1}_{(p^2-p)times},\underbrace{qp^2-2}_{(q-1)times},\underbrace{pq^2-2}_{(p-1)times}\right\}$$

ve

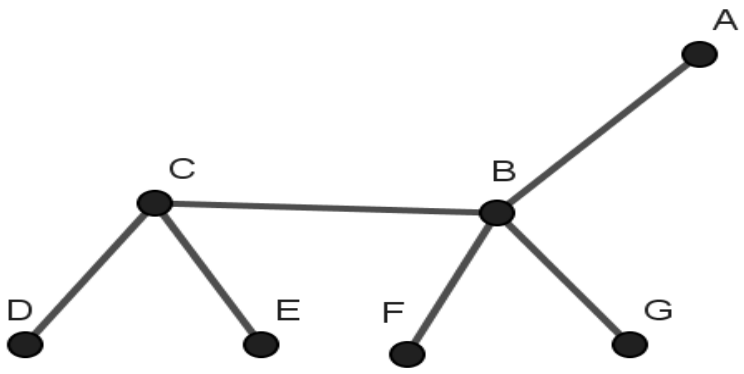
$p=q$ *iken* $t\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=4$ *ve* $p\neq q$ *iken* $t\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=7$ *dir.*

İspat $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ nin köşeleri $(i,0),(kp,0),(0,j),(0,tq),(kp,j),(i,tq),(kp,tq)$ dir. Teorem 2.5 den köşelerin dereceleri sırasıyla $q^2-1, pq^2-2, p^2-1, qp^2-2,$ $p-1, q-1, pq-2$ dir. Bu nedenle, derece dizisinin tanımından $DS\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$ kümesini açıkça teoremde belirtildiği gibi elde ederiz. $p=q$ iken dereceler sırasıyla $p^2-1, pp^2-2, p^2-1, pp^2-2, p-1, p-1, pp-2$ olup bunlar da $p^2-1, p^3-2, p^2-1,$

$p^3-2, p-1, p-1, p^2-2$ olur ki burada $p^2-1, p^3-2, p-1, p^2-2$ şeklinde 4 farklı eleman vardır. Bu durumda $t\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=4$ olur. $p\neq q$ iken ise $q^2-1, pq^2-2, p^2-1, qp^2-2,\ p-1, q-1, pq-2$ olup 7 tane farklı eleman olduğundan $t\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=7$ olur.

Tanım 2.8 Bir Γ grafında, $D\subseteq V(\Gamma)$ olmak üzere; $V(\Gamma)-D$ deki her köşe, D nin bir köşesine komşu (yani $V(\Gamma)-D$, D nin komşuluğunda ise; D kümesine, Γ grafının bir *baskın kümesi(dominating set)* denir. Γ grafının baskın kümeleri arasında en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısına *baskınlık sayısı(domination number)* denir ve $\gamma(\Gamma)$ ile gösterilir.

Örnek 2.5



$$BaskınlıkKümesi = \{B, C\}$$

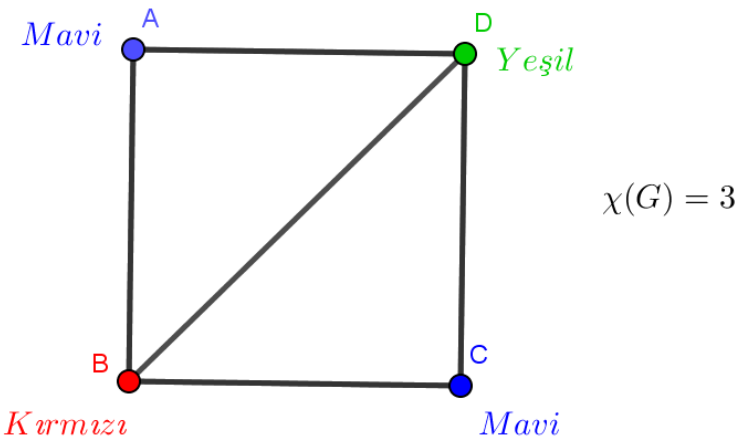
Şekil 2.5 Baskınlık Kümesi Örneği

Teorem 2.9 $\gamma\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=2$

İspat Eğer $0<k<p, 0<t<q$ için $(kp,0)$ ve $(0,tq)$ köşelerini alırsak, bu köşeler tüm tüm köşeleri domine ederler ve $(kp,0)\sim(0,tq)$ dır. Bu nedenle $D\subseteq V(G)$ olan baskınlık kümesi $D=\{(kp,0),(0,tq)\}$ alabiliriz. Böylece $\gamma\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=2$ dir.

Tanım 2.9 Bir Γ grafının komşu noktalarına farklı renkler atanmasına Γ grafının *renklendirmesi* denir. Bu renklendirmede n tane farklı renk kullanılır ise renklendirmeye *n-renklendirme* denir. Γ grafı n-renklendirmeye sahip ise *n-renklendirilebilir* denir. Γ grafın tüm köşelerini renklendirmek için gerekli olan en az renk sayısına yani n-renklendirilebilir olan Γ grafı için en küçük n sayısına *kromatik sayı (chromatic number)* denir ve $\chi(\Gamma)$ ile gösterilir.

Örnek 2.6



Şekil 2.6 Kromatik Sayısı Örneği

Teorem 2.10 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *nin kromatik sayısı aşağıdaki gibidir:*

- *Eğer* $p < q$ *ise* $pq^2 - 1$
- *Eğer* $p > q$ *ise* $qp^2 - 1$
- *Eğer* $p = q$ *ise* $p^3 - 1$

İspat Kromatik sayısını bulabilmek için $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının komşuluklarını inceleyelim.

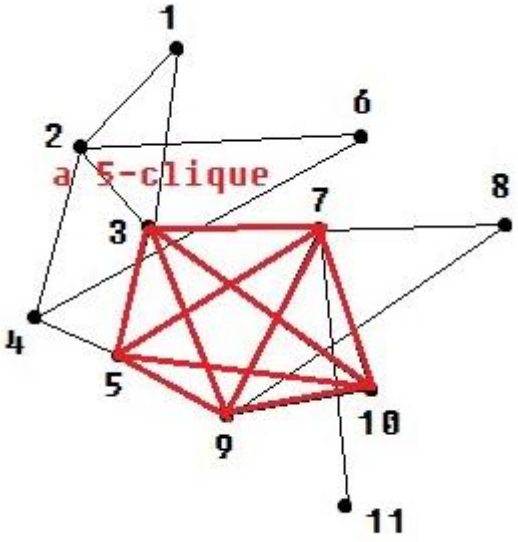
• $p < q$ ise, $0 < k < p$ için $(kp, 0)$ köşelerinin sayısını hesaplarsak komşu köşelerin sayısını bulmuş oluruz. Diğer bir deyişle, $der(kp, 0)$ bulmalıyız. Teorem 2.5 den, $der(kp, 0) = pq^2 - 2$. Bu da $(kp, 0)$ köşeleri için kullanılan renklerin diğer köşeler için kullanılamayacağı anlamına gelir. Bu nedenle $(kp, 0)$ köşesinin rengini C olarak etiketleyelim. Komşu köşeleri renklendirirsek $pq^2 - 1$ tane renge ihtiyacımız var. Diğer kalan köşeler birbirlerine komşu değildir sadece $0 < t < q$ için $(0, tq)$ ya komşudur. Bunların sayısı ise $qp(p-1)$ dir. $p < q$ ise $qp(p-1) < pq^2 - 1$ olur. Bu nedenle, $pq^2 - 1$ renge ihtiyaç vardır. Teoremde gerekli olan kromatik sayısı bulunmuş olur. Yani $\chi\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)\right) = pq^2 - 1$.

• $p > q$ ise benzer yolla buluruz. $0 < t < q$ için $(0, \mathrm{tq})$ köşelerinin sayısını hesaplarsak komşu köşelerin sayısını bulmuş oluruz. Diğer bir deyişle, $der(0, \mathrm{tq})$ bulmalıyız. Teorem 2.5 den, $der(\mathrm{tq}, 0) = qp^2 - 2$. Bu da $(0, \mathrm{tq})$ köşeleri için kullanılan renklerin diğer köşeler için kullanılamayacağı anlamına gelir. Bu nedenle $(kp, 0)$ köşesinin rengini C olarak etiketleyelim. Komşu köşeleri renklendirirsek $qp^2 - 1$ tane renge ihtiyacımız var. Diğer kalan köşeler birbirlerine komşu değildir sadece $0 < k < p$ için $(kp, 0)$ ya komşudur. Bunların sayısı ise $qp(q-1)$ dir. $p > q$ ise $qp(q-1) < qp^2 - 1$ olur. Bu nedenle, $qp^2 - 1$ renge ihtiyaç vardır. Teoremde gerekli olan kromatik sayısı bulunmuş olur. $pq(q-1) < qp^2 - 1$ olup kromatik sayısı $qp^2 - 1$ olur. Yani $\chi\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)\right) = qp^2 - 1$.

• $p = q$ ise benzer yolla $pp(p-1) < pp^2 - 1$ olup kromatik sayısı $p^3 - 1$ olur.

Tanım 2.10 Bir Γ grafında en büyük tam grafın köşe sayısına Γ grafının *klik(clique) sayısı* denir ve $\omega(\Gamma)$ ile gösterilir.

Örnek 2.7



Şekil 2.7 Klik Sayısı Örneği

Teorem 2.11 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının klik sayısı* $pq-1$ *dir.*

İspat Şimdi $A\subseteq\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ tam alt grafını alalım. Tüm farklı köşeler $(i_1,j_1),(i_2,j_2)\in V(A)$ için $(i_1,j_1).(i_2,j_2)=(0,0)$ yani $\forall$ i_1,i_2,j_1,j_2 için $(i_1,j_1).(i_2,j_2)\in E\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$ olur. $0\le k<p, 0\le t<q$ için (kp,tq) köşelerinin tamamı diğerlerine komşudur. Bu köşelerin sayısı $(q-1)(p-1)+(q-1)+(p-1)$. $A\subseteq\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ kümesi $V(A)$ köşe kümesi içerisinde tam alt graftır. $V(A)$ kümesi (kp,tq) köşelerinden oluşur. $V(A)$ kümesi içindeki elemanların sayısını görmek çok kolaydır. Bunlar $(q-1)(p-1)+(q-1)+(p-1)$ dır. Bu toplam da $pq-1$ e denktir. Yani $\omega\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=pq-1$ olur.

Diameter	$diam\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$	3
Radius	$rad\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$	2
Girth	$girth\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$	3
Maksimum derece	$\Delta\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$	pq^2-2
Minimum derece	$\delta\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$	$p-1$
Derece dizisi	$DS\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$	$\underbrace{p-1}_{q(p-1)(q-1)times}$, $\underbrace{q-1}_{p(p-1)(q-1)times}$, $\underbrace{p^2-1}_{\left(q^2-q\right)times}$, $\underbrace{pq-2}_{(p-1)(q-1)times}$, $\underbrace{q^2-1}_{\left(p^2-p\right)times}$, $\underbrace{qp^2-2}_{(q-1)times}$, $\underbrace{pq^2-2}_{(p-1)times}$
Düzensizlik indeksi	$t\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$	$p=q$ iken 4 $p\neq q$ iken 7
Baskınlık sayısı	$\gamma\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$	2
Kromatik sayısı	$\chi\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$	• $Eğer\ \ p<q\ \ ise\ \ pq^2-1$ • $Eğer\ \ p>q\ \ ise\ \ qp^2-1$ • $Eğer\ \ p=q\ \ ise\ \ p^3-1$
Klik	$\omega\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$	$pq-1$

$\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ **grafının tablosu (p ve q asal)**

Örnek 2.8 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\right)$ grafı için aşağıdaki sonuçları görmek kolaydır.

• $diam\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\right)\right)=3$, Teorem 2.2 kullanılarak bulunmuştur.

• $rad\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\right)\right)=2$, Teorem 2.3 kullanılarak bulunmuştur.

• $girth\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\right)\right)=3$, Teorem 2.4 kullanılarak bulunmuştur.

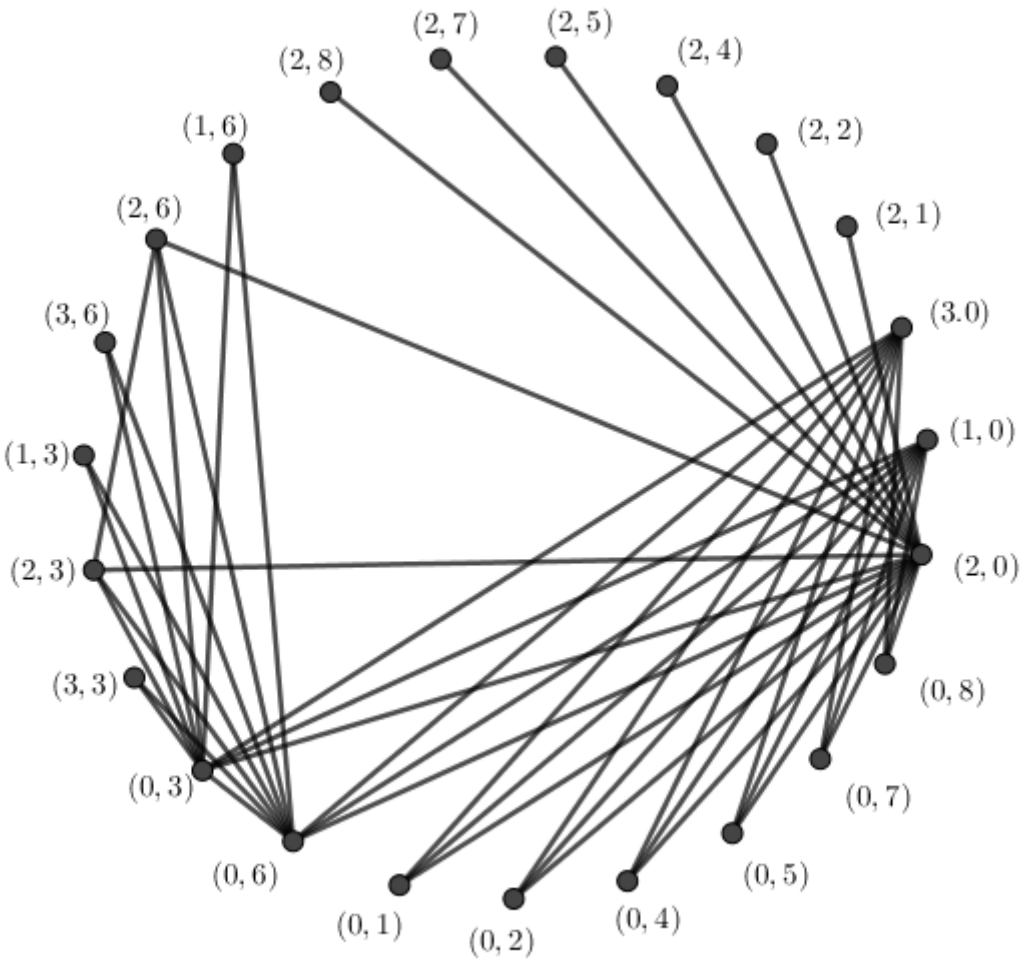
• $\Delta\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\right)\right)=16$ ve $\delta\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\right)\right)=1$, Teorem 2.6 kullanılarak bulunmuştur.

• $DS\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9\right)\right) = \{1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,5,5,8,8,10,10,16\}$ ve $t\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9\right)\right) = 7$, Teorem 2.7 kullanılarak bulunmuştur.

• $\gamma\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9\right)\right) = 2$, Teorem 2.8 kullanılarak bulunmuştur.

• $\chi\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9\right)\right) = 17$, Teorem 2.9 kullanılarak bulunmuştur.

• $\omega\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9\right)\right) = 5$, Teorem 2.10 kullanılarak bulunmuştur.



Şekil 2.8 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9\right)$ grafı

3. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ GRAFININ ZAGREB İNDEKSLERİ

Bu bölümdeki tüm teorem ve ispatlar tarafımızdan yapılan orjinal çalışmalardır. Bu kısımda p ve q asal olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}$ halkasının $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının birinci ve ikinci Zagreb indeksleri ile birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri(coindices), birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri ile birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri bulunmuştur. Bu sonuçlar bulunurken (Aykaç S. ve Akgüneş, 2018) makalesindeki teoremler kullanılmıştır.

3.1 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ Grafının Zagreb İndekslerinin Spektral Özellikleri

Birinci ve ikinci Zagreb indeksleri en eski graf değişmezlerinden ikisidir. İlk kez (I.Gutman, 1972) tarafından moleküler yapı üzerinde toplam $\pi-$elektron enerjisinin bağlılığının incelenmesiyle tanıtılmıştır.

Tanım 3.1.1 Γ grafının birinci Zagreb indeksi $M_1(\Gamma)$ ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri $M_2(\Gamma)$ ile gösterilir. Bir Γ grafında $d_\Gamma(v)$, v köşesinin derecesini göstermek üzere bu indeksler

$$M_1(\Gamma)=\sum_{v\in V(\Gamma)} d_\Gamma\left(v^2\right)$$

$$M_2(\Gamma)=\sum_{uv\in E(\Gamma)} d_\Gamma(u)d_\Gamma(v)$$

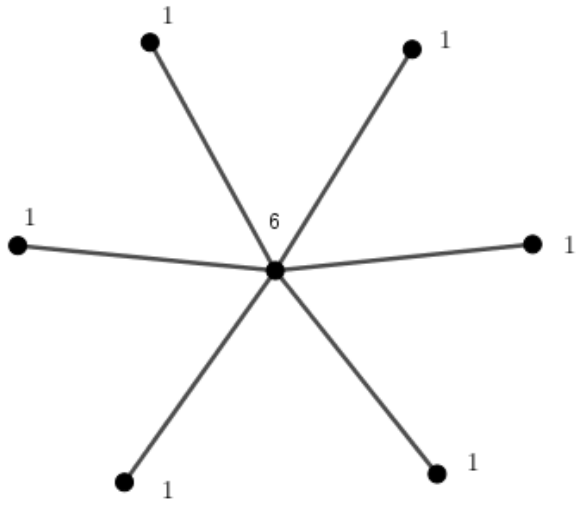
olarak tanımlanmıştır. Birinci Zagreb indeksi

$$M_1(\Gamma)=\sum_{uv\in E(\Gamma)} d_\Gamma(u)+d_\Gamma(v)$$

olarak da tanımlanır.

Bu iki graf değişmezi (I.Gutman, 1972) tarafından adlandırılmıştır.

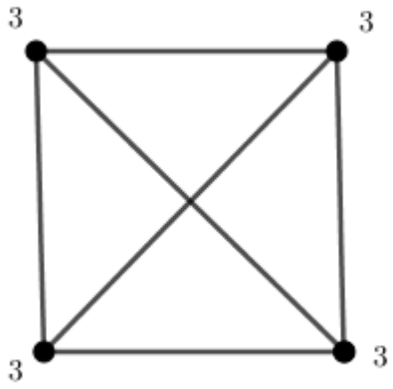
Örnek 3.1



Şekil 3.1 S_7 grafının derecelendirilmesi

$$M_1(S_7) = \sum_{v \in V(S_7)} d_\Gamma(v^2)$$
$$= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 6^2$$
$$= 42$$

Örnek 3.2



Şekil 3.2 K_4 grafının derecelendirilmesi

$$M_2(K_4) = \sum_{uv \in E(K_4)} d_{K_4}(u) d_{K_4}(v)$$
$$= 3.3 + 3.3 + 3.3 + 3.3$$
$$= 36$$

Aşağıdaki teorem Tanım 3.1 de verilen birinci Zagreb indeks kavramıyla ilgilidir.

Teorem 3.1 *$\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının birinci Zagreb indeksi*

$p^3q^2 + 2p^4q^2 + 2p^2q^3 - 2pq^3 - 2p^4q - p^3q + 2p^2q^4 - 2pq^4 + 23p^2q^2 + 17pq^2 + 16p^2q - 6pq - 4$

dir.

İspat

Bu teoremin ispatı için tanım gereği $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının tüm köşelerinin derecelerinin kareleri bulunup toplanır. Bu durumda Teorem 2.5 kullanılarak,

$$M_1\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)\right) = \sum_{v \in V\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)} d_{\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)}\left(v^2\right)$$

$$= \left[d(kp, j)\right]^2 + \ldots + \left[d(kp, j)\right]^2 + \left[d(i, tq)\right]^2 + \ldots + \left[d(i, tq)\right]^2 + \left[d(0, j)\right]^2 + \ldots + \left[d(0, j)\right]^2 +$$
$$\left[d(kp, tq)\right]^2 + \ldots + \left[d(kp, tq)\right]^2 + \left[d(i, 0)\right]^2 + \ldots + \left[d(i, 0)\right]^2 + \left[d(0, tq)\right]^2 + \ldots + \left[d(0, tq)\right]^2 +$$
$$\left[d(kp, 0)\right]^2 + \ldots + \left[d(kp, 0)\right]^2$$
$$= (p-1)^2 + \ldots + (p-1)^2 + (q-1)^2 + \ldots + (q-1)^2 + \left(p^2-1\right)^2 + \ldots + \left(p^2-1\right)^2 +$$
$$(pq-2)^2 + \ldots + (pq-2)^2 + \left(q^2-1\right)^2 + \ldots + \left(q^2-1\right)^2 + \left(qp^2-2\right)^2 + \ldots + \left(qp^2-2\right)^2 +$$
$$\left(pq^2-2\right)^2 + \ldots + \left(pq^2-2\right)^2$$

$$= (p-1)^2 q(q-1)(p-1) + (q-1)^2 p(q-1)(p-1) + \left(p^2-1\right)^2 \left(q^2-q\right) +$$

$$(pq-2)^2 (p-1)(q-1) + \left(q^2-1\right)^2 \left(p^2-p\right) + \left(qp^2-2\right)^2 (q-1) + \left(pq^2-2\right)^2 (p-1)$$

$$= p^3q^2 + 2p^4q^2 + 2p^2q^3 - 2pq^3 - 2p^4q - p^3q + 2p^2q^4 - 2pq^4 + 23p^2q^2 + 17pq^2 + 16p^2q - 6pq - 4$$

ifadesi bulunmuş olur.

Lemma 3.1 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının komşulukları aşağıdaki gibidir*:

- $(i,t_1q)\sim(0,t_2q)$ *burada* $0<i<p^2, 0<t_1,t_2<q, i\neq kp$
- $(kp,t_1q)\sim(0,t_2q)$ *burada* $0<k<p, 0<\mathrm{t}_1,t_2<q$
- $(k_1p,tq)\sim(k_2p,0)$ *burada* $0<t<q, 0<k_1,k_2<p$
- $(0,tq)\sim(kp,0)$ *burada* $0<t<q, 0<k<p$
- $(0,j)\sim(kp,0)$ *burada* $0<j<q^2, 0<k<p, \mathrm{j}\neq tq$
- $(0,j)\sim(i,0)$ *burada* $0<j<q^2, 0<i<p^2$ *ve* $j\neq tq, i\neq kp$
- $(i,0)\sim(0,tq)$ *burada* $0<i<p^2, 0<t<q, i\neq kp$
- $(k_1p,0)\sim(k_2p,\mathrm{j})$ *burada* $0<j<q^2, 0<k_1,k_2<p, j\neq tq$
- $(k_1p,t_1q)\sim(k_2p,t_2q)$ *burada* $0<k_1,k_2<p, 0<t_1,t_2<q$
- $(0,t_1q)\sim(0,t_2q)$ *burada* $0<t_1,t_2<q$
- $(k_1p,0)\sim(k_2p,0)$ *burada* $0<k_1,k_2<p$

Aşağıdaki teorem Tanım 3.1 ile verilen ikinci Zagreb indeks kavramı ile ilgilidir.

Teorem 3.2 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının ikinci Zagreb indeksi*

$$=(p-1)(q-1)\left(-4-pq^3+4q+2p^2\left(pq^2-2\right)q+p^3q\left(q^2-1\right)+p^3q^3-2q^2p^2+\right.$$
$$\left.pq\left(4-qp^2+q\left(qp^2-2\right)\right)+p\left(4-2pq+pq^3-q^3-2pq^2(1+q)+q\left(9-2qp^2\right)+2q^2\left(-2+qp^2\right)\right)\right)$$
$$+(pq-2)(pq-2)\frac{(p-1)(q-1)\left[(p-1)(q-1)-1\right]}{2}+\left(qp^2-2\right)\left(qp^2-2\right)\frac{(q-1)(q-2)}{2}+$$
$$\left(pq^2-2\right)\left(pq^2-2\right)\frac{(p-1)(p-2)}{2}$$

dir.

İspat

Teoremin ispatı için tanım gereği birbirine komşu olan köşelerin derecelerinin çarpımlarının toplamı bulunarak bulunur. Bunun için Lemma 3.1 ve Teorem 2.5 kullanılarak,

$$M_2(\Gamma) = \sum_{v_i v_j \in E(G)} d_G(v_i) d_G(v_j)$$

$$= d(i,tq)d(0,tq) + ... + d(i,tq)d(0,tq) +$$
$$d(kp,tq)d(0,tq) + ... + d(kp,tq)d(0,tq) +$$
$$d(kp,tq)d(kp,0) + ... + d(kp,tq)d(kp,0) +$$
$$d(0,tq)d(kp,0) + ... + d(0,tq)d(kp,0) +$$
$$d(0,j)d(kp,0) + ... + d(0,j)d(kp,0) +$$
$$d(0,j)d(i,0) + ... + d(0,j)d(i,0) +$$
$$d(i,0)d(0,tq) + ... + d(i,0)d(0,tq) +$$
$$d(kp,0)d(kp,j) + ... + d(kp,0)d(kp,j) +$$
$$d(kp,tq)d(kp,tq) + ... + d(kp,tq)d(kp,tq) +$$
$$d(0,tq)d(0,tq) + ... + d(0,tq)d(0,tq) +$$
$$d(kp,0)d(kp,0) + ... + d(kp,0)d(kp,0)$$

$$= (q-1)(qp^2-2) + ... + (q-1)(qp^2-2) +$$
$$(pq-2)(qp^2-2) + ... + (pq-2)(qp^2-2) +$$
$$(pq-2)(pq^2-2) + ... + (pq-2)(pq^2-2) +$$
$$(qp^2-2)(pq^2-2) + ... + (qp^2-2)(pq^2-2) +$$
$$(p^2-1)(pq^2-2) + ... + (p^2-1)(pq^2-2) +$$
$$(p^2-1)(q^2-1) + ... + (p^2-1)(q^2-1) +$$
$$(q^2-1)(qp^2-2) + ... + (q^2-1)(qp^2-2) +$$
$$(pq^2-2)(p-1) + ... + (pq^2-2)(p-1) +$$
$$(pq-2)(pq-2) + ... + (pq-2)(pq-2) +$$
$$(qp^2-2)(qp^2-2) + ... + (qp^2-2)(qp^2-2) +$$
$$(pq^2-2)(pq^2-2) + ... + (pq^2-2)(pq^2-2)$$

$$=(q-1)\left(qp^2-2\right)\left[p(p-1)(q-1)(q-1)\right]+$$
$$(pq-2)\left(qp^2-2\right)\left[(q-1)(p-1)(q-1)\right]+$$
$$(pq-2)\left(pq^2-2\right)\left[(p-1)(q-1)(p-1)\right]+$$
$$\left(qp^2-2\right)\left(pq^2-2\right)\left[(p-1)(q-1)\right]+$$
$$\left(p^2-1\right)\left(pq^2-2\right)\left[\left(q^2-q\right)(p-1)\right]+$$
$$\left(p^2-1\right)\left(q^2-1\right)\left[\left(q^2-q\right)\left(p^2-p\right)\right]+$$
$$\left(q^2-1\right)\left(qp^2-2\right)\left[\left(p^2-p\right)(q-1)\right]$$
$$\left(pq^2-2\right)(p-1)\left[q(p-1)(q-1)(p-1)\right]+$$
$$(pq-2)(pq-2)\frac{(p-1)(q-1)\left[(p-1)(q-1)-1\right]}{2}+$$
$$\left(qp^2-2\right)\left(qp^2-2\right)\frac{(q-1)(q-2)}{2}+$$
$$\left(pq^2-2\right)\left(pq^2-2\right)\frac{(p-1)(p-2)}{2}$$
$$=(p-1)(q-1)\left(-4-pq^3+4q+2p^2\left(pq^2-2\right)q+p^3q\left(q^2-1\right)+p^3q^3-2q^2p^2+\right.$$
$$\left.pq\left(4-qp^2+q\left(qp^2-2\right)\right)+p\left(4-2pq+pq^3-q^3-2pq^2(1+q)+q\left(9-2qp^2\right)+2q^2\left(-2+qp^2\right)\right)\right)$$
$$+(pq-2)(pq-2)\frac{(p-1)(q-1)\left[(p-1)(q-1)-1\right]}{2}+\left(qp^2-2\right)\left(qp^2-2\right)\frac{(q-1)(q-2)}{2}+$$
$$\left(pq^2-2\right)\left(pq^2-2\right)\frac{(p-1)(p-2)}{2}$$

ifadesi bulunmuş olur.

Tanım 3.2 Bir Γ grafının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri

$$\Pi_1(\Gamma)=\prod_{v\in V(\Gamma)} d_\Gamma\left(v^2\right)$$

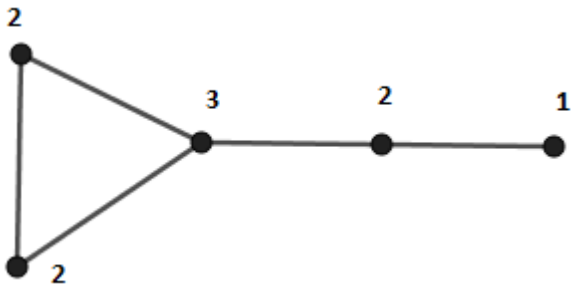
$$\Pi_2(\Gamma)=\prod_{uv\in E(\Gamma)} d_\Gamma(u)\,d_\Gamma(v)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu iki graf değişmezi (Gutman, 2011) tarafından adlandırılmıştır. (Narumi ve Katayama, 1980) kolay, derece bazlı bir çarpımsal sonuç ortaya koymuştur.

$$NK(\Gamma)=\Pi_{x\in V(\Gamma)} d(x)$$

ile tanımladıkları bu indeks günümüzde Narumi-Katayama indeksi olarak bilinmektedir. $\Pi_1(\Gamma)$ çarpımsal Zagreb indeksi $NK(\Gamma)$ nın karesidir.

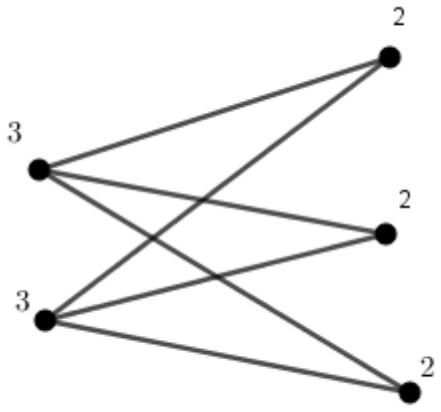
Örnek 3.3



Şekil 3.3 $T_{3,2}$ grafının derecelendirilmesi

$$\Pi_1(\Gamma) = \prod_{v \in V(\Gamma)} d_\Gamma(v^2)$$
$$= 2^2.2^2.3^2.2^2.1^2$$
$$= 576$$

Örnek 3.4



Şekil 3.4 $K_{2,3}$ tam grafının derecelendirilmesi

$$\Pi_2(\Gamma) = \prod_{uv \in E(\Gamma)} d_\Gamma(u) d_\Gamma(v)$$
$$= (3.2)(3.2)(3.2)(3.2)(3.2)(3.2)$$
$$= 6^6$$

Aşağıdaki teorem Tanım 3.2 ile verilen birinci çarpımsal Zagreb indeks kavramı ile ilgilidir.

Teorem 3.3 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının birinci çarpımsal Zagreb İndeksi* $(p-1)^{2q(p-1)(q-1)}(q-1)^{2p(p-1)(q-1)}\left(p^2-1\right)^{2\left(q^2-q\right)}(pq-2)^{2(p-1)(q-1)}\left(q^2-1\right)^{2\left(p^2-p\right)}\left(qp^2-2\right)^{2(q-1)}$ $\left(pq^2-2\right)^{2(p-1)}$ *dir.*

İspat

Teoreminin ispatı için tanım gereği $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafındaki tüm köşelerin derecelerinin karesi bulunup herbiri birbiriyle çarpılır. Bu durumda Teorem 2.5 kullanılarak,

$$\prod_1\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)=\prod_{i=1}^{n}d_{\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)}\left(v_i^{\,2}\right)$$

$$=(p-1)^2\ldots(p-1)^2(q-1)^2\ldots(q-1)^2\left(p^2-1\right)^2\ldots\left(p^2-1\right)^2(pq-2)^2\ldots(pq-2)^2\left(q^2-1\right)^2\ldots$$
$$\left(q^2-1\right)^2\left(qp^2-2\right)^2\ldots\left(qp^2-2\right)^2\left(pq^2-2\right)^2\ldots\left(pq^2-2\right)^2$$
$$=(p-1)^{2q(p-1)(q-1)}(q-1)^{2p(p-1)(q-1)}\left(p^2-1\right)^{2\left(q^2-q\right)}(pq-2)^{2(p-1)(q-1)}\left(q^2-1\right)^{2\left(p^2-p\right)}\left(qp^2-2\right)^{2(q-1)}$$
$$\left(pq^2-2\right)^{2(p-1)}$$

ifadesi bulunmuş olur.

Aşağıdaki teorem Tanım 3.2 ile verilen ikinci çarpımsal Zagreb indeks kavramı ile ilgilidir.

Teorem 3.4 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının ikinci çarpımsal Zagreb indeksi*

$$=(pq-2)^{(-1+p)\left(-p+p^2-q\right)(-1+q)}\left(pq^2-2\right)^{2-3p+p^2}\left[(p-1)\left(pq^2-2\right)\right]^{(-1+p)^2(-1+q)q}$$
$$\left[\left(p^2-1\right)\left(pq^2-2\right)\right]^{(-1+p)(-1+q)q}\left[(pq-2)\left(pq^2-2\right)\right]^{(-1+p)^2(-1+q)}\left[\left(-1+p^2\right)\left(-1+q^2\right)\right]^{\left(-p+p^2\right)\left(-q+q^2\right)}$$
$$\left(qp^2-2\right)^{2-3q+q^2}\left[(pq-2)\left(qp^2-2\right)\right]^{(-1+p)(-1+q)^2}\left[\left(pq^2-2\right)\left(qp^2-2\right)\right]^{(-1+p)(-1+q)}$$
$$\left[(q-1)\left(qp^2-2\right)\right]^{p(p-1)(q-1)^2}\left[\left(q^2-1\right)\left(qp^2-2\right)\right]^{(p-1)(q-1)p}$$

dir.

İspat

Teoremin ispatını yapmak için $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafındaki birbirine komşu olan köşelerin derecelerinin çarpımlarının birbiriyle çarpımı bulunur. Bunun için Lemma 3.1 ve Teorem 2.5 kullanılarak,

$$\prod_{2}\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)=\prod_{uv\in E\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)}d_{\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)}(u)\,d_{\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)}(v)$$

$$=(q-1)\left(qp^2-2\right)\ldots(q-1)\left(qp^2-2\right)(pq-2)\left(qp^2-2\right)\ldots(pq-2)\left(qp^2-2\right)$$
$$(pq-2)\left(pq^2-2\right)\ldots(pq-2)\left(pq^2-2\right)\left(qp^2-2\right)\left(pq^2-2\right)\ldots\left(qp^2-2\right)\left(pq^2-2\right)$$
$$\left(p^2-1\right)\left(pq^2-2\right)\ldots\left(p^2-1\right)\left(pq^2-2\right)\left(p^2-1\right)\left(q^2-1\right)\ldots\left(p^2-1\right)\left(q^2-1\right)$$
$$\left(q^2-1\right)\left(qp^2-2\right)\ldots\left(q^2-1\right)\left(qp^2-2\right)\left(pq^2-2\right)(p-1)\ldots\left(pq^2-2\right)(p-1)$$
$$(pq-2)(pq-2)\ldots(pq-2)(pq-2)\left(qp^2-2\right)\left(qp^2-2\right)\ldots\left(qp^2-2\right)\left(qp^2-2\right)$$
$$\left(pq^2-2\right)\left(pq^2-2\right)\ldots\left(pq^2-2\right)\left(pq^2-2\right)$$

$$=\left[(q-1)\left(qp^2-2\right)\right]^{p(p-1)(q-1)(q-1)}\left[(pq-2)\left(qp^2-2\right)\right]^{(q-1)(p-1)(q-1)}\left[(pq-2)\left(pq^2-2\right)\right]^{(p-1)(q-1)(p-1)}$$
$$\left[\left(qp^2-2\right)\left(pq^2-2\right)\right]^{(p-1)(q-1)}\left[\left(p^2-1\right)\left(pq^2-2\right)\right]^{\left(q^2-q\right)(p-1)}\left[\left(q^2-1\right)\left(p^2-1\right)\right]^{\left(q^2-q\right)\left(p^2-p\right)}$$

$$\left[\left(q^2-1\right)\left(qp^2-2\right)\right]^{\left(p^2-p\right)(q-1)}\left[\left(pq^2-2\right)(p-1)\right]^{q(p-1)(q-1)(p-1)}\left[(pq-2)(pq-2)\right]^{\frac{(p-1)(q-1)\left(p^2-p-q\right)}{2}}$$
$$\left[\left(qp^2-2\right)\left(qp^2-2\right)\right]^{\frac{(q-1)(q-2)}{2}}\left[\left(pq^2-2\right)\left(pq^2-2\right)\right]^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}$$

$$=(pq-2)^{(-1+p)\left(-p+p^2-q\right)(-1+q)}\left(pq^2-2\right)^{2-3p+p^2}\left[(p-1)\left(pq^2-2\right)\right]^{(-1+p)^2(-1+q)q}$$
$$\left[\left(p^2-1\right)\left(pq^2-2\right)\right]^{(-1+p)(-1+q)q}\left[(pq-2)\left(pq^2-2\right)\right]^{(-1+p)^2(-1+q)}\left[\left(-1+p^2\right)\left(-1+q^2\right)\right]^{\left(-p+p^2\right)\left(-q+q^2\right)}$$
$$\left(qp^2-2\right)^{2-3q+q^2}\left[(pq-2)\left(qp^2-2\right)\right]^{(-1+p)(-1+q)^2}\left[\left(pq^2-2\right)\left(qp^2-2\right)\right]^{(-1+p)(-1+q)}$$
$$\left[(q-1)\left(qp^2-2\right)\right]^{p(p-1)(q-1)^2}\left[\left(q^2-1\right)\left(qp^2-2\right)\right]^{(p-1)(q-1)p}$$

ifadesi bulunmuş olur.

Tanım 3.3 Γ grafının birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri

$$\overline{M_1}(\Gamma) = \sum_{uv \notin E(\Gamma)} \left(d_\Gamma(u) + d_\Gamma(v)\right)$$

$$\overline{M_2}(\Gamma) = \sum_{uv \notin E(\Gamma)} d_\Gamma(u) d_\Gamma(v)$$

olarak tanımlanır.

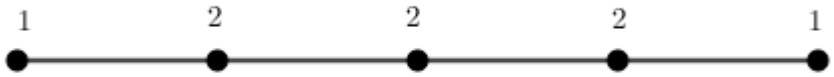
Lemma 3.2 Γ grafı, n köşeli ve m kenarlı olsun. Bu takdirde

$$\overline{M_1}(\Gamma) = 2m(n-1) - M_1(\Gamma)$$

$$\overline{M_2}(\Gamma) = 2m^2 - M_2(\Gamma) - \tfrac{1}{2} M_1(\Gamma)$$

dır.(Ashrafi, 2010)

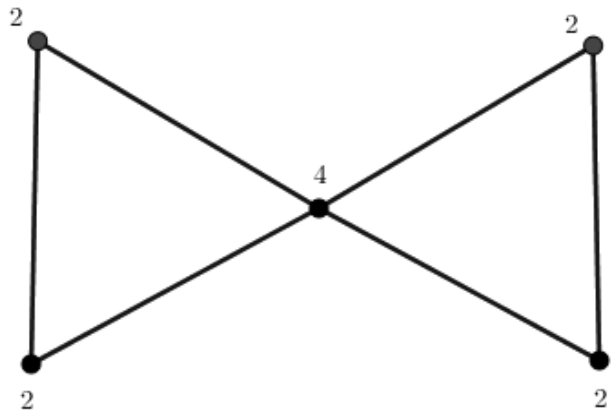
Örnek 3.5



Şekil 3.5 P_5 grafının derecelendirilmesi

$$\begin{aligned}
\overline{M_1}(\Gamma) &= \sum_{uv \notin E(\Gamma)} \left(d_\Gamma(u) + d_\Gamma(v)\right) \\
&= (1+2)+(1+2)+(1+2)+(1+1)+(2+2)+(2+1)+(2+1) \\
&= 21
\end{aligned}$$

Örnek 3.6



Şekil 3.6 W_3^2 grafının derecelendirilmesi

$$\begin{aligned}\overline{M_2}(\Gamma) &= \sum_{uv\notin E(\Gamma)} d_\Gamma(u)\,d_\Gamma(v)\\ &= (2.2)+(2.2)+(2.2)+(2.2)+(2.2)+(2.2)+(2.2)+(2.2)\\ &= 32\end{aligned}$$

Aşağıdaki teorem Tanım 3.3 ile verilen birinci Zagreb eşindeks kavramı ile ilgilidir.

Teorem 3.5 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının birinci Zagreb eşindeksi*

$$\overline{M_1}\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right) = 2pq^4 + pq^3(7-5p-5q) - qp^3(q-1) - 2q\,\mathrm{p}^4(q-1) + pq^2(3p+3q-10)$$
$$-p^2q\left(16+35q+2q^2+2q^3\right)+12qp^2+2pq(p+q-1)\left(3p^2q^2-3qp^2+1\right)$$

dir.

İspat

Teorem 2.7 yi kullanarak toplam köşe sayısını şöyle bulabiliriz;

$$q(p-1)(q-1)+p(p-1)(q-1)+\left(q^2-q\right)+\left(p^2-p\right)+(p-1)(q-1)+(q-1)+(p-1)$$

bu da $pq(q+p-1)-1$ e denktir. Yani $n=pq(q+p-1)-1$ olur. Teorem 2.8 ve Teorem 2.6 yı kullanarak toplam kenar sayısı

$(q-1)(p-1)+(p-1)(q^2-q)+(p-1)q(p-1)(q-1)+(p-1)(p-1)(q-1)+$

$(p^2-p)(q-1)+(p^2-p)(q^2-q)+(q-1)p(p-1)(q-1)+(p-1)(q-1)(q-1)+$

$\frac{(p-1)(p-2)}{2}+\frac{(q-1)(q-2)}{2}+\frac{[(p-1)(q-1)][(p-1)(q-1)-1]}{2}$ olup

$m=3p^2q^2-3pq^2-3qp^2+pq+1+\frac{pq(pq+1)}{2}$ olur. Lemma 3.2 kullanılarak

$\overline{M_1}(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}))=2m(n-1)-M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}))$ ifadesinden

$\overline{M_1}(\Gamma)=2\left(3p^2q^2-3pq^2-3qp^2+pq+1+\frac{pq(pq+1)}{2}\right)(pq(q+p-1)-1-1)-(p^3q^2+2p^4q^2$

$+2p^2q^3-2pq^3-2p^4q-p^3q+2p^2q^4-2pq^4+23p^2q^2+17pq^2+16p^2q-6pq-4)$

$=2pq^4+pq^3(7-5p-5q)-qp^3(q-1)-2q\,p^4(q-1)+pq^2(3p+3q-10)-$

$p^2q(16+35q+2q^2+2q^3)+12qp^2+2pq(p+q-1)(3p^2q^2-3qp^2+1)$

olur.

Aşağıdaki teorem Tanım 3.3 ile verilen ikinci Zagreb eşindeks kavramı ile ilgilidir.

Teorem 3.6 $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2})$ *grafının ikinci Zagreb eşindeksi*

$\frac{1}{2}(4+6pq-17pq^2+2pq^3+2pq^4-16p^2q+p^3q+2p^4q-23p^2q^2-p^3q^2-2p^4q^2-2p^2q^3$

$-2p^2q^4+(2+3pq-5pq^2+6p^2q^2-6qp^2)^2-2(p-1)(q-1)(-4-pq^3+4q+2p^2q(-2+pq^2)$

$+p^3q(q^2-1)+p^3q^3-2q^2p^2+pq(4-qp^2+q(qp^2-2))+p(4-2pq+pq^3-q^3-2pq^2(1+q)$

$+q(9-2qp^2)+2q^2(-2+qp^2))))-(pq-2)^2\frac{(p-1)(q-1)[(p-1)(q-1)-1]}{2}-(qp^2-2)^2\frac{(q-1)(q-2)}{2}-$

$(pq^2-2)^2\frac{(p-1)(p-2)}{2}$

dir.

İspat

Teorem 2.6 yı kullanarak toplam kenar sayısı

$(q-1)(p-1)+(p-1)(q^2-q)+(p-1)q(p-1)(q-1)+(p-1)(p-1)(q-1)+$

$\left(p^2-p\right)(q-1)+\left(p^2-p\right)\left(q^2-q\right)+(q-1)\,p(p-1)(q-1)+(p-1)(q-1)(q-1)+$

$\frac{(p-1)(p-2)}{2}+\frac{(q-1)(q-2)}{2}+\frac{\left[(p-1)(q-1)\right]\left[(p-1)(q-1)-1\right]}{2}$ bu ifade de

$3p^2q^2-3pq^2-3qp^2+pq+1+\frac{pq(pq+1)}{2}$ e denk olur. Bu durumda m değeri

$m=3p^2q^2-3pq^2-3qp^2+pq+1+\frac{pq(pq+1)}{2}$

$\overline{M_2}\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=2m^2-M_2\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)-\frac{1}{2}M_1\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)$

$=2\left(3p^2q^2-3pq^2-3qp^2+pq+1+\frac{pq(pq+1)}{2}\right)^2-$

$\left[\begin{array}{l}(p-1)(q-1)\left(-4-pq^3+4q+2p^2\left(pq^2-2\right)q+p^3q\left(q^2-1\right)+p^3q^3-2q^2p^2+\right.\\ pq\left(4-qp^2+q\left(qp^2-2\right)\right)+p\left(4-2pq+pq^3-q^3-2pq^2(1+q)+q\left(9-2qp^2\right)+2q^2\left(-2+qp^2\right)\right)\\ \left.+\left(pq-2\right)^2\frac{(p-1)(q-1)\left[(p-1)(q-1)-1\right]}{2}+\left(qp^2-2\right)^2\frac{(q-1)(q-2)}{2}+\left(pq^2-2\right)^2\frac{(p-1)(p-2)}{2}\right.\end{array}\right]$

$-\frac{1}{2}\left(p^3q^2+2p^4q^2+2p^2q^3-2pq^3-2p^4q-p^3q+2p^2q^4-2pq^4+23p^2q^2+17pq^2+\right.$

$\left.16p^2q-6pq-4\right)$

$=\frac{1}{2}\left(4+6pq-17pq^2+2pq^3+2pq^4-16p^2q+p^3q+2p^4q-23p^2q^2-p^3q^2-2p^4q^2-2p^2q^3\right.$

$-2p^2q^4+(2+3pq-5pq^2+6p^2q^2-6qp^2)^2-2(p-1)(q-1)\left(-4-pq^3+4q+2p^2q\left(-2+pq^2\right)\right.$

$+p^3q\left(q^2-1\right)+p^3q^3-2q^2p^2+pq\left(4-qp^2+q\left(qp^2-2\right)\right)+p\left(4-2pq+pq^3-q^3-2pq^2(1+q)\right.$

$\left.\left.\left.+q\left(9-2qp^2\right)+2q^2\left(-2+qp^2\right)\right)\right)\right)-\left(pq-2\right)^2\frac{(p-1)(q-1)\left[(p-1)(q-1)-1\right]}{2}-\left(qp^2-2\right)^2\frac{(q-1)(q-2)}{2}-$

$\left(pq^2-2\right)^2\frac{(p-1)(p-2)}{2}$

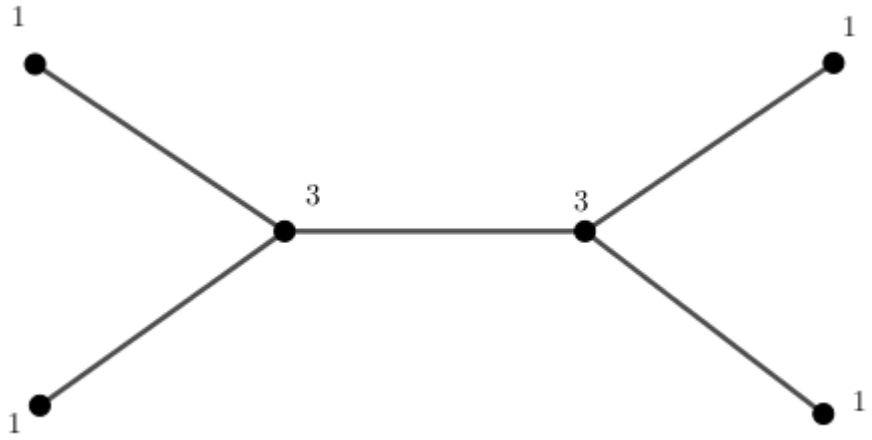
Tanım 3.4 G herhangi bir graf olmak üzere, birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (K. Xu, 2013)

$$\overline{\Pi_1}(G)=\prod_{uv\notin E(G)}\left(d_G(u)+d_G(v)\right)$$

$$\overline{\Pi_2}(G)=\prod_{uv\notin E(G)}\left(d_G(u)d_G(v)\right)$$

Eğer G grafında $uv\notin E(G)$ olacak şekilde u,v köşeleri bulunmuyorsa bu çarpımsal indeksler özel olarak 1 şeklinde tanımlanır.

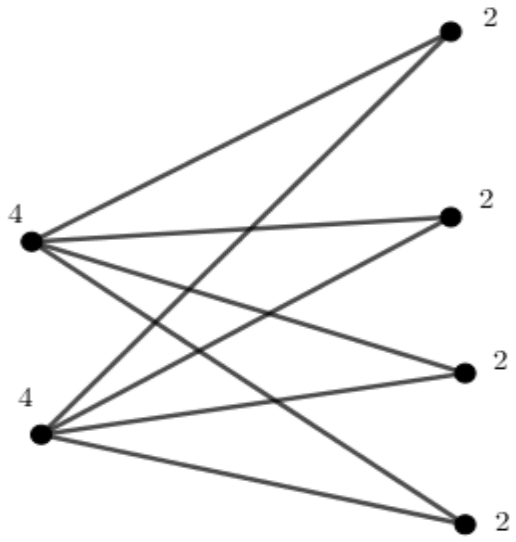
Örnek 3.7



Şekil 3.7 Bir 6 köşeli ağaç grafın derecelendirilmesi

$$\overline{\Pi_1}(G) = \prod_{uv \notin E(G)} \left(d_G(u) + d_G(v)\right)$$
$$= (1+1)(1+3)(1+1)(1+1)(1+1)(1+3)(1+1)(1+1)(1+1)(1+3).$$
$$(1+1)(1+1)(1+1)(1+3)(1+1)(1+1)(3+1)(3+1)(3+1)(3+1)$$
$$= 2^{28}$$

Örnek 3.8



Şekil 3.8 $K_{2,4}$ grafının derecelendirilmesi

$$\overline{\Pi_2}(G) = \prod_{uv \notin E(G)} \left(d_G(u) d_G(v)\right)$$
$$= (4.4)(4.4)(2.2)(2.2)(2.2)(2.2)(2.2)(2.2)(2.2)(2.2)(2.2)$$
$$= 2^{26}$$

Lemma 3.2 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının komşu olmayan kenarları aşağıdaki gibidir:*

- $(i,0) \nsim (kp,0)$ *burada* $0 < k < p, i \neq kp$
- $(i,0) \nsim (kp, j)$ *burada* $0 < k < p, \mathrm{j} \neq tq$
- $(i,0) \nsim (kp,tq)$ *burada* $0 < t < q, 0 < k < p, i \neq kp$
- $(i,0) \nsim (i,tq)$ *burada* $0 < k < p, 0 < t < q, i \neq kp$
- $(kp,0) \nsim (i,tq)$ *burada* $0 < k < p, 0 < t < q, i \neq kp$
- $(kp, j) \nsim (0,tq)$ *burada* $0 < k < p, 0 < t < q$
- $(kp, j) \nsim (0, j)$ *burada* $0 < k < p, j \neq tq$
- $(kp, j) \nsim (kp,tq)$ *burada* $0 < k < p, 0 < t < q$
- $(kp, j) \nsim (i,tq)$ *burada* $0 < k < p, 0 < t < q, i \neq kp$
- $(0, j) \nsim (0,tq)$ *burada* $0 < t < q, j \neq tq$
- $(0, j) \nsim (kp,tq)$ *burada* $0 < k < p, 0 < t < q, \mathrm{j} \neq tq$
- $(0, j) \nsim (i,tq)$ *burada* $0 < t < q, j \neq tq, i \neq kp$
- $(kp,tq) \nsim (\mathrm{i},tq)$ *burada* $0 < k < p, 0 < t < q, \mathrm{i} \neq kp$
- $(i,0) \nsim (i,0)$ *burada* $0 < k < p, i \neq kp$
- $(kp, j) \nsim (kp, j)$ *burada* $0 < k < p, \mathrm{j} \neq tq$
- $(0, j) \nsim (0, j)$ *burada* $0 < t < q, j \neq tq$
- $(i,tq) \nsim (i,tq)$ *burada* $0 < k < p, i \neq kp$

Aşağıdaki teorem Tanım 3.4 ile verilen birinci çarpımsal Zagreb eşindeks kavramı ile ilgilidir.

Teorem 3.7 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının birinci çarpımsal eşindeksi*

$$\overline{\Pi_1}\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=\left(q^2+pq^2-3\right)^{\left(p^2-p\right)(p-1)}\left(q^2+p-2\right)^{\left(p^2-p\right)q(p-1)(q-1)}$$
$$\left(q^2+pq-3\right)^{\left(p^2-p\right)(p-1)(q-1)}\left(q^2+q-2\right)^{\left(p^2-p\right)p(p-1)(q-1)}\left(pq^2+q-3\right)^{(p-1)p(p-1)(q-1)}$$
$$\left(p+qp^2-3\right)^{q(p-1)(q-1)(q-1)}\left(p+p^2-2\right)^{q(p-1)(q-1)\left(q^2-q\right)}\left(p+pq-3\right)^{q(p-1)(q-1)(p-1)(q-1)}$$
$$\left(p+q-2\right)^{q(p-1)(q-1)p(p-1)(q-1)}\left(p^2+qp^2-3\right)^{\left(q^2-q\right)(q-1)}\left(p^2+pq-3\right)^{\left(q^2-q\right)(p-1)(q-1)}$$
$$\left(p^2+q-2\right)^{\left(q^2-q\right)p(p-1)(q-1)}\left(pq+q-3\right)^{(p-1)(q-1)p(p-1)(q-1)}\left[2\left(q^2-1\right)\right]^{\frac{\left(p^2-p\right)\left(p^2-p-1\right)}{2}}$$
$$\left[2\left(p-1\right)\right]^{\frac{q(p-1)(q-1)\left[q(p-1)(q-1)-1\right]}{2}}\left[2\left(p^2-1\right)\right]^{\frac{\left(q^2-q\right)\left(q^2-q-1\right)}{2}}\left[2\left(q-1\right)\right]^{\frac{\left[p(p-1)(q-1)\right]\left[p(p-1)(q-1)-1\right]}{2}}$$

dir.

İspat

Teoreminin ispatını yapmak için $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının birbirine komşu olmayan kenarlarının derecelerinin toplamlarının birbiriyle çarpımı yapılarak bulunur. Bu durumda Teorem 2.5 ve Lemma 3.2 kullanılarak,

$$\overline{\Pi_1}\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=\prod_{uv\notin E\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)}\left(d_{\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)}(u)+d_{\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)}(v)\right)$$

$$=\left[d(i,0)+d(kp,0)\right]...\left[d(i,0)+d(kp,0)\right]\left[d(i,0)+d(kp,j)\right]...\left[d(i,0)+d(kp,j)\right]$$
$$\left[d(i,0)+d(kp,tq)\right]...\left[d(i,0)+d(kp,tq)\right]\left[d(i,0)+d(i,tq)\right]...\left[d(i,0)+d(i,tq)\right]$$
$$\left[d(kp,0)+d(i,tq)\right]...\left[d(kp,0)+d(i,tq)\right]\left[d(kp,j)+d(0,tq)\right]...\left[d(kp,j)+d(0,tq)\right]$$
$$\left[d(kp,j)+d(0,j)\right]...\left[d(kp,j)+d(0,j)\right]\left[d(kp,j)+d(kp,tq)\right]...\left[d(kp,j)+d(kp,tq)\right]$$
$$\left[d(kp,j)+d(i,tq)\right]...\left[d(kp,j)+d(i,tq)\right]\left[d(0,j)+d(0,tq)\right]...\left[d(0,j)+d(0,tq)\right]$$
$$\left[d(0,j)+d(kp,tq)\right]...\left[d(0,j)+d(kp,tq)\right]\left[d(0,j)+d(i,tq)\right]...\left[d(0,j)+d(i,tq)\right]$$
$$\left[d(kp,tq)+d(i,tq)\right]...\left[d(kp,tq)+d(i,tq)\right]\left[d(i,0)+d(i,0)\right]...\left[d(i,0)+d(i,0)\right]$$
$$\left[d(kp,j)+d(kp,j)\right]...\left[d(kp,j)+d(kp,j)\right]\left[d(0,j)+d(0,j)\right]...\left[d(0,j)+d(0,j)\right]$$
$$\left[d(i,tq)+d(i,tq)\right]...\left[d(i,tq)+d(i,tq)\right]$$

$$=\left[\left(q^2-1\right)+\left(pq^2-2\right)\right]...\left[\left(q^2-1\right)+\left(pq^2-2\right)\right]\left[\left(q^2-1\right)+\left(p-1\right)\right]...\left[\left(q^2-1\right)+\left(p-1\right)\right]$$
$$\left[\left(q^2-1\right)+\left(pq-2\right)\right]...\left[\left(q^2-1\right)+\left(pq-2\right)\right]\left[\left(q^2-1\right)+\left(q-1\right)\right]...\left[\left(q^2-1\right)+\left(q-1\right)\right]$$
$$\left[\left(pq^2-2\right)+\left(q-1\right)\right]...\left[\left(pq^2-2\right)+\left(q-1\right)\right]\left[\left(p-1\right)+\left(qp^2-2\right)\right]...\left[\left(p-1\right)+\left(qp^2-2\right)\right]$$
$$\left[\left(p-1\right)+\left(p^2-1\right)\right]...\left[\left(p-1\right)+\left(p^2-1\right)\right]\left[\left(p-1\right)+\left(pq-2\right)\right]...\left[\left(p-1\right)+\left(pq-2\right)\right]$$
$$\left[\left(p-1\right)+\left(q-1\right)\right]...\left[\left(p-1\right)+\left(q-1\right)\right]\left[\left(p^2-1\right)+\left(qp^2-2\right)\right]...\left[\left(p^2-1\right)+\left(qp^2-2\right)\right]$$
$$\left[\left(p^2-1\right)+\left(pq-2\right)\right]...\left[\left(p^2-1\right)+\left(pq-2\right)\right]\left[\left(p^2-1\right)+\left(q-1\right)\right]...\left[\left(p^2-1\right)+\left(q-1\right)\right]$$
$$\left[\left(pq-2\right)+\left(q-1\right)\right]...\left[\left(pq-2\right)+\left(q-1\right)\right]\left[\left(q^2-1\right)+\left(q^2-1\right)\right]...\left[\left(q^2-1\right)+\left(q^2-1\right)\right]$$
$$\left[\left(p-1\right)+\left(p-1\right)\right]...\left[\left(p-1\right)+\left(p-1\right)\right]\left[\left(p^2-1\right)+\left(p^2-1\right)\right]...\left[\left(p^2-1\right)+\left(p^2-1\right)\right]$$
$$\left[\left(q-1\right)+\left(q-1\right)\right]...\left[\left(q-1\right)+\left(q-1\right)\right]$$
$$=\left(q^2+pq^2-3\right)^{\left(p^2-p\right)\left(p-1\right)}\left(q^2+p-2\right)^{\left(p^2-p\right)q\left(p-1\right)\left(q-1\right)}$$
$$\left(q^2+pq-3\right)^{\left(p^2-p\right)\left(p-1\right)\left(q-1\right)}\left(q^2+q-2\right)^{\left(p^2-p\right)p\left(p-1\right)\left(q-1\right)}$$
$$\left(pq^2+q-3\right)^{\left(p-1\right)p\left(p-1\right)\left(q-1\right)}\left(p+qp^2-3\right)^{q\left(p-1\right)\left(q-1\right)\left(q-1\right)}$$
$$\left(p+p^2-2\right)^{q\left(p-1\right)\left(q-1\right)\left(q^2-q\right)}\left(p+pq-3\right)^{q\left(p-1\right)\left(q-1\right)\left(p-1\right)\left(q-1\right)}$$
$$\left(p+q-2\right)^{q\left(p-1\right)\left(q-1\right)p\left(p-1\right)\left(q-1\right)}\left(p^2+qp^2-3\right)^{\left(q^2-q\right)\left(q-1\right)}$$
$$\left(p^2+pq-3\right)^{\left(q^2-q\right)\left(p-1\right)\left(q-1\right)}\left(p^2+q-2\right)^{\left(q^2-q\right)p\left(p-1\right)\left(q-1\right)}$$
$$\left(pq+q-3\right)^{\left(p-1\right)\left(q-1\right)p\left(p-1\right)\left(q-1\right)}\left[2\left(q^2-1\right)\right]^{\frac{\left(p^2-p\right)\left(p^2-p-1\right)}{2}}$$
$$\left[2\left(p-1\right)\right]^{\frac{q\left(p-1\right)\left(q-1\right)\left[q\left(p-1\right)\left(q-1\right)-1\right]}{2}}\left[2\left(p^2-1\right)\right]^{\frac{\left(q^2-q\right)\left(q^2-q-1\right)}{2}}$$
$$\left[2\left(q-1\right)\right]^{\frac{\left[p\left(p-1\right)\left(q-1\right)\right]\left[p\left(p-1\right)\left(q-1\right)-1\right]}{2}}$$

ifadesi bulunmuş olur.

Aşağıdaki teorem Tanım 3.4 ile verilen ikinci çarpımsal Zagreb eşindeks kavramı ile ilgilidir.

Teorem 3.8 $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ *grafının ikinci çarpımsal eşindeksi*

$$\overline{\Pi_2}\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=\left[\left(q^2-1\right)\left(pq^2-2\right)\right]^{\left(p^2-p\right)(p-1)}\left[\left(q^2-1\right)(p-1)\right]^{\left(p^2-p\right)q(p-1)(q-1)}$$
$$\left[\left(q^2-1\right)(pq-2)\right]^{\left(p^2-p\right)(q-1)(p-1)}\left[\left(q^2-1\right)(q-1)\right]^{\left(p^2-p\right)p(p-1)(q-1)}\left[\left(pq^2-2\right)(q-1)\right]^{(p-1)p(p-1)(q-1)}$$
$$\left[(p-1)\left(qp^2-2\right)\right]^{q(p-1)(q-1)(q-1)}\left[(p-1)\left(p^2-1\right)\right]^{q(p-1)(q-1)\left(q^2-q\right)}\left[(p-1)(pq-2)\right]^{q(p-1)(q-1)(p-1)(q-1)}$$
$$\left[(p-1)(q-1)\right]^{q(p-1)(q-1)p(p-1)(q-1)}\left[\left(p^2-1\right)\left(qp^2-2\right)\right]^{\left(q^2-q\right)(q-1)}\left[\left(p^2-1\right)(pq-2)\right]^{\left(q^2-q\right)(p-1)(q-1)}$$
$$\left[\left(p^2-1\right)(q-1)\right]^{\left(q^2-q\right)p(p-1)(q-1)}\left[(pq-2)(q-1)\right]^{(p-1)(q-1)p(p-1)(q-1)}\left[\left(q^2-1\right)\left(q^2-1\right)\right]^{\frac{\left(p^2-p\right)\left(p^2-p-1\right)}{2}}$$
$$\left[(p-1)(p-1)\right]^{\frac{q(p-1)(q-1)\left[q(p-1)(q-1)-1\right]}{2}}\left[\left(p^2-1\right)\left(p^2-1\right)\right]^{\frac{\left(q^2-q\right)\left(q^2-q-1\right)}{2}}\left[(q-1)(q-1)\right]^{\frac{\left[p(p-1)(q-1)\right]\left[p(p-1)(q-1)-1\right]}{2}}$$

dir.

İspat

Teoreminin ispatını yapmak için $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının birbirine komşu olmayan köşelerinin derecelerinin çarpımlarının birbiriyle çarpımı yapılarak bulunur. Lemma 3.2 ve Teorem 2.5 kullanılarak,

$$\overline{\Pi_2}\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)=\prod_{uv\notin E\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)\right)}\left(d_{\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)}(u)\,d_{\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_{q^2}\right)}(v)\right)$$

$$=\left[d(i,0)d(kp,0)\right]...\left[d(i,0)d(kp,0)\right]\left[d(i,0)d(kp,j)\right]...\left[d(i,0)d(kp,j)\right]$$
$$\left[d(i,0)d(kp,tq)\right]...\left[d(i,0)d(kp,tq)\right]\left[d(i,0)d(i,tq)\right]...\left[d(i,0)d(i,tq)\right]$$
$$\left[d(kp,0)d(i,tq)\right]...\left[d(kp,0)d(i,tq)\right]\left[d(kp,j)d(0,tq)\right]...\left[d(kp,j)d(0,tq)\right]$$
$$\left[d(kp,j)d(0,j)\right]...\left[d(kp,j)d(0,j)\right]\left[d(kp,j)d(kp,tq)\right]...\left[d(kp,j)d(kp,tq)\right]$$
$$\left[d(kp,j)d(i,tq)\right]...\left[d(kp,j)d(i,tq)\right]\left[d(0,j)d(0,tq)\right]...\left[d(0,j)d(0,tq)\right]$$
$$\left[d(0,j)d(kp,tq)\right]...\left[d(0,j)d(kp,tq)\right]\left[d(0,j)d(i,tq)\right]...\left[d(0,j)d(i,tq)\right]$$
$$\left[d(kp,tq)d(i,tq)\right]...\left[d(kp,tq)d(i,tq)\right]\left[d(i,0)d(i,0)\right]...\left[d(i,0)d(i,0)\right]$$
$$\left[d(kp,j)d(kp,j)\right]...\left[d(kp,j)d(kp,j)\right]\left[d(0,j)d(0,j)\right]...\left[d(0,j)d(0,j)\right]$$
$$\left[d(i,tq)d(i,tq)\right]...\left[d(i,tq)d(i,tq)\right]$$

$$=\left[\left(q^2-1\right)\left(pq^2-2\right)\right]...\left[\left(q^2-1\right)\left(pq^2-2\right)\right]\left[\left(q^2-1\right)(p-1)\right]...\left[\left(q^2-1\right)(p-1)\right]$$
$$\left[\left(q^2-1\right)(pq-2)\right]...\left[\left(q^2-1\right)(pq-2)\right]\left[\left(q^2-1\right)(q-1)\right]...\left[\left(q^2-1\right)(q-1)\right]$$
$$\left[\left(pq^2-2\right)(q-1)\right]...\left[\left(pq^2-2\right)(q-1)\right]\left[(p-1)\left(qp^2-2\right)\right]...\left[(p-1)\left(qp^2-2\right)\right]$$
$$\left[(p-1)\left(p^2-1\right)\right]...\left[(p-1)\left(p^2-1\right)\right]\left[(p-1)(pq-2)\right]...\left[(p-1)(pq-2)\right]$$
$$\left[(p-1)(q-1)\right]...\left[(p-1)(q-1)\right]\left[\left(p^2-1\right)\left(qp^2-2\right)\right]...\left[\left(p^2-1\right)\left(qp^2-2\right)\right]$$
$$\left[\left(p^2-1\right)(pq-2)\right]...\left[\left(p^2-1\right)(pq-2)\right]\left[\left(p^2-1\right)(q-1)\right]...\left[\left(p^2-1\right)(q-1)\right]$$
$$\left[(pq-2)(q-1)\right]...\left[(pq-2)(q-1)\right]\left[\left(q^2-1\right)\left(q^2-1\right)\right]...\left[\left(q^2-1\right)\left(q^2-1\right)\right]$$
$$\left[(p-1)(p-1)\right]...\left[(p-1)(p-1)\right]\left[\left(p^2-1\right)\left(p^2-1\right)\right]...\left[\left(p^2-1\right)\left(p^2-1\right)\right]$$
$$\left[(q-1)(q-1)\right]...\left[(q-1)(q-1)\right]$$

$$=\left[\left(q^2-1\right)\left(pq^2-2\right)\right]^{\left(p^2-p\right)(p-1)}\left[\left(q^2-1\right)(p-1)\right]^{\left(p^2-p\right)q(p-1)(q-1)}$$
$$\left[\left(q^2-1\right)(pq-2)\right]^{\left(p^2-p\right)(q-1)(p-1)}\left[\left(q^2-1\right)(q-1)\right]^{\left(p^2-p\right)p(p-1)(q-1)}$$
$$\left[\left(pq^2-2\right)(q-1)\right]^{(p-1)p(p-1)(q-1)}\left[(p-1)\left(qp^2-2\right)\right]^{q(p-1)(q-1)(q-1)}$$
$$\left[(p-1)\left(p^2-1\right)\right]^{q(p-1)(q-1)\left(q^2-q\right)}\left[(p-1)(pq-2)\right]^{q(p-1)(q-1)(p-1)(q-1)}$$
$$\left[(p-1)(q-1)\right]^{q(p-1)(q-1)p(p-1)(q-1)}\left[\left(p^2-1\right)\left(qp^2-2\right)\right]^{\left(q^2-q\right)(q-1)}$$
$$\left[\left(p^2-1\right)(pq-2)\right]^{\left(q^2-q\right)(p-1)(q-1)}\left[\left(p^2-1\right)(q-1)\right]^{\left(q^2-q\right)p(p-1)(q-1)}$$
$$\left[(pq-2)(q-1)\right]^{(p-1)(q-1)p(p-1)(q-1)}\left[\left(q^2-1\right)\left(q^2-1\right)\right]^{\frac{\left(p^2-p\right)\left(p^2-p-1\right)}{2}}$$
$$\left[(p-1)(p-1)\right]^{\frac{q(p-1)(q-1)\left[q(p-1)(q-1)-1\right]}{2}}\left[\left(p^2-1\right)\left(p^2-1\right)\right]^{\frac{\left(q^2-q\right)\left(q^2-q-1\right)}{2}}$$
$$\left[(q-1)(q-1)\right]^{\frac{\left[p(p-1)(q-1)\right]\left[p(p-1)(q-1)-1\right]}{2}}$$

ifadesi bulunmuş olur.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tez dört ana başlık altında toplanmıştır ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Tezin giriş bölümünde basit graflar tanıtılmış, sıfır-bölen graf tanımı ve bazı spektral özellikleri verilmiş ve kaynak araştırılması sunulmuştur.

İkinci bölümde p ve q asal iken $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}$ halkasının $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafı incelenmiş ve bu grafla ilgili bazı spektral özellikleri (diameter, Radius, düzensizlik indeksi, girth, maksimum derece, minimum derece, derece dizisi, baskınlık sayısı, kromatik sayısı) ifade edilmiş ve ispatları yapılmıştır.

Üçüncü bölümde p ve q asal iken $\Gamma\left(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}\right)$ grafının birinci Zagreb indeksi, ikinci Zagreb indeksi, birinci çarpımsal Zagreb indeksi, ikinci çarpımsal Zagreb indeksi, birinci Zagreb eşindeksi, ikinci Zagreb eşindeksi, birinci çarpımsal eşindeksi, ikinci çarpımsal eşindeksi incelenmiş ve ispatları yapılmıştır.

KAYNAKLAR

Abdo, H., Dimitrov, D. ve Gutman, I., 2012, On the Zagreb indices equality, *Discrete Applied Mathematics*, 160 (1-2), 1-8.

Ahmet Sinan Cevik, I. N. C., Aysun Yurttas, Muge Togan, 2017, New formulae for Zagreb indices, *AIP Conference Proceedings*.

Akgunes, N., 2018, A Further Note on the Graph of Monogenic Semigroups, *Konuralp Journal of Mathematics*, 49-53.

Akgüneş, N., 2012, Analyzing special parameters over zero-divisor graphs, *In AIP Conference Proceedings Vol. 1479*
390-393.

Akgüneş, N., 2013, GRAF PARAMETRELERİ VE CEBİRSEL YAPILARA GRAFSAL YAKLAŞIMLAR, *Selçuk Üniversitesi*, Konya.

Anderson, D. F. ve Livingston, P. S., 1999, The zero-divisor graph of a commutative ring, *Journal of Algebra*, 217 (2), 434-447.

Anderson, D. F. ve Weber, D., 2018, The zero-divisor graph of a commutative ring without identity, *International Electronic Journal of Algebra*, 176-202.

Ashrafi, A. R., Doslic, T., Hamzeh, A. 2010., 2010, The Zagreb coindices of graph operations *Discr. Appl. Math., 158*, 1571-1578.

Aykaç S. ve Akgüneş, N., 2018, Analysis of graph parameters associated with zero-divisor graphs of commutative rings, *New Trends in Mathematical Science*, 2 (6), 144-149.

Balaban, A. T., Motoc, I., Bonchev, D., Mekenyan, O. 1983. . , 114: 21-55., 1983, Topological indices for structure-activity correlations, *Topics Curr. Chem.,114*, 21-55.

Beck, I., 1988, Coloring of Commutative Ring, *Journal of Algebra 116*, 208-226.

Bondy, J. A., Murty U. S. R., 1976, Graph theory with applications, *London:Macmillan*, p.

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. , 2008, Graph Theory, *Springer, New York*, p.

Cangül, İ. N., 2017, Graf Teori-I, *Bursa*, Dora, p.

Cevik, A. S., Das, K. C., Yurttas, A., Togan, M. ve Cangul, I. N., 2013, The multiplicative Zagreb indices of graph operations, *Journal of Inequalities and Applications*.

Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P., Thomas, R., 2006, The strong perfect graph theorem *Ann. Math., 164*, 51-229.

Çevik, A. S., 2010, Cebire Giriş, *ANKARA*, p.

D.F. Anderson, M. N., 1991, Beck's coloring of a commutative ring, *Journal of Algebra 159*, 500-514.

Dankelmann, P., Entringer, R.C., 2000, Average distance, minimum degree and spanning trees, *J. Graph Theory 33*, 1-13.

Das, K. C. ve Gutman, I., 2004, Some properties of the second Zagreb index, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* (52), 103-112.

Das, K. C., Gutman, I. ve Zhou, B., 2009, New upper bounds on Zagreb indices, *Journal of Mathematical Chemistry*, 46 (2), 514-521.

Das, K. C., Akgunes, N., Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N. ve Cevik, A. S., 2016, On the first Zagreb index and multiplicative Zagreb coindices of graphs, *Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta-Seria Matematica*, 24 (1), 153-176.

DeMeyer, F. R., McKenzie, T. ve Schneider, K., 2002, The zero-divisor graph of a commutative semigroup, *Semigroup Forum*, 65 (2), 206-214.

Erdös, P., Pach, J., Pollack, R., Tuza, Z., 1989, Radius, diameter and minimum degree, *J. Combin. Theory B 47*, 73–79.

Gross, J., Yellen, 2004, Handbook of Graph Theory Chapman, Hall/CRC, *London*, p.

Gutman, I., 2011, Multiplicative Zagreb indices of trees, *Bull. Soc. Math. Banja Luka, 18*, 17-23.

Harary, F., 1994, Graph Theory, *Addison-Wesley, USA*, p.

Harris, J. M., Hirst, J. L., Mossinghoff, M. J., 2008, Combinatorics and Graph Theory, *Springer, New York*, p.

I.Gutman, N. T., 1972, Graph theory and molecular orbitals. Total electron energy of alternate hydrocarbons, *Chem. Phys. Lett. 17*, 535-538.

I.Gutman, N. T., B.Ruscic, C.F.Wilcox, 1975, Graph theorey and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes, *J. Chem. Phys. 62*, 33-99.

K. Xu, K. C. D., K. Tang, 2013, On the multiplicative Zagreb coindex of graphs, *Opuscula Math. 33 (1)*, 191-204.

Lai, H.-J., Liang, Y., Li, P., Xu, J., 2011, Degree sequences and graphs with disjoint spanning trees, *Discr. Appl. Math. 159*, 1447-1452.

Liu, J. Z. ve Zhang, Q. H., 2012, Sharp Upper Bounds for Multiplicative Zagreb Indices, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 68 (1), 231-240.

Livingston, P. S., 1997, Structure in Zero-Divisor Graphs of Commutative Rings, *University of Tennessee - Knoxville*.

M. ELIASI, A. I., I. GUTMAN, ,, 68, (2012) 217–230, 2012, Multiplicative versions of first Zagreb index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.,68*, 217-230.

Maden, A. D. ve Nacaroglu, Y., 2017, The Upper Bounds for Multiplicative Sum Zagreb Index of Some Graph Operations, *Journal of Mathematical Inequalities*, 11 (3), 749-761.

N. Akgunes, A. S. C., 2013, A new bound of radius with irregularity index, *Applied Mathematics and Computation 219*, 5750-5753.

N.Akgunes and A.S.Cevik, K. C. D., 2013, On a Graph of monojenic senigroups, *Journal of Inequalities and Applications 44*.

Nihat Akgunes, K. D., AS Cevik, 2014, Topological indices on a graph of monogenic semigroups, *Topics in Chemical Graph Theory, 16*, 3-20.

P.A.Ostrand, 1973, Graphs with specified radius and diameter, *Discrete Mathematics*, 71-75.

R. Todeschini, V. C., 2010, New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 64*, 359-372.

Topkaya S. ve Cevik, A. S., 2016, A new graph over semi-direct products of groups, *Filomat, 30(3)*, 611-619.

Vukičević, D., Graovac, A., 2010, Note on the comparison of the first and second normalized Zagreb eccentricity indices 524-528, *Acta Chim. Slov. 57*, 524-528.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	SÜMEYYE AYKAÇ
Uyruğu	**:**	TC
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Çumra/KONYA - 18.08.1991
Telefon	**:**	0554 430 05 38
Faks	**:**	
e-mail	**:**	sumeyyeapaydin@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Konya Anadolu Lisesi Meram/KONYA**	**2009**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi/Fen Fakültesi/Matematik Bölümü Selçuklu/KONYA**	**2014**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü/Matematik ABD Selçuklu/KONYA**	**2018**

UZMANLIK ALANI
Matematik, Cebir ve Sayılar Teorisi

YABANCI DİLLER
İngilizce

BELİRTMEK İSTEDİĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR
Aykac S, Akgunes N, Cevik A.S (2017) "Some Properties of New One Type Zero-Divisor Graphs", IRSCY 2017, Konya Konferansının Özet Kitapçığında Basılmıştır

Aykac S, Akgunes N "Analysis of Graph Parameters Associated with Zero-Divisor Graphs Of Commutative Rings" New Trends in Mathematical Sciences 6, No.2, 144-149 (2018)