



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

JACOBSTHAL MATRİS DİZİSİ VE ÖZELLİKLERİ

Şükran UYGUN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Nisan-2013
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

JACOBSTHAL MATRİS DİZİSİ VE ÖZELLİKLERİ

Şükran UYGUN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Kemal USLU

2013, 95 Sayfa

Jüri
Yrd.Doç.Dr. Kemal USLU
Prof.Dr. Durmuş BOZKURT
Prof.Dr. Aşır GENÇ
Doç.Dr. Bünyamin AYDIN
Doç.Dr. Yıldıray KESKİN

Bu çalışmada kısaca bazı sayı dizileri tanımlandıktan sonra Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizileri ve özellikleri detaylı bir şekilde verilmiştir. Buradan yola çıkarak Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri tanımlanıp bu diziler için çeşitli özdeşlikler ve eşitsizlikler elde edilmiş ve bulunan bu özellikler matris cebiri kullanılarak sayı dizileri için de gösterilmiştir.

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri için Binet formülü oluşturulmuş bir takım özellikler de bu sayede elde edilmiştir. Ayrıca Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizilerinin kombinatorik temsilleri sunulmuştur.

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri için çeşitli kısmi ve sonsuz toplam formülleri elde edilmiş yine matris cebiri yardımıyla sayı dizileri için de toplam formülleri elde edilmiştir. Ayrıca Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri için üstel matris dizisi elde edilmiştir.

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri yardımıyla genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizileri tanımlanmış ve bu üç matris dizisinin birbiriyle olan bağıntıları incelenmiş yukarda bahsedilen birçok özellik genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizileri için de oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fermat, Fibonacci, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas, Mersenne, Pell sayı dizileri.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

JACOBSTHAL MATRIX SEQUENCES AND PROPERTIES

Şükran UYGUN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Advisor: Asst.Prof.Dr. Kemal USLU

2013, 95 Pages

Jury
Asst.Prof.Dr. Kemal USLU
Prof.Dr. Durmuş BOZKURT
Prof.Dr. Aşır GENÇ
Assoc.Prof.Dr. Bünyamin AYDIN
Assoc.Prof.Dr. Yıldıray KESKİN

In this study after some number sequences have been defined briefly, Jacobsthal and Jacobsthal Lucas number sequences and their properties have been given in detail. By setting off here Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matrix sequences have been defined and for these sequences several identities and inequalities have been obtained, and these proporties by using matrix algebra have been used for number sequences.

For Jacobsthal and Jacobsthal Lucas matrix sequences Binet formulas have been developed and some proporties have been obtained by using it. Moreever the combinatorics representation of Jacobsthal and Jacobsthal Lucas matrix sequences established.

The formulas for the sums of Jacobsthal and Jacobsthal Lucas matrix sequences have been presented, then using matrix algebra these formulas for number sequences have been derived. Also for Jacobsthal and Jacobsthal Lucas matrix sequences exponential matrix sequences have been obtained.

Using Jacobsthal and Jacobsthal Lucas matrix sequences generalized Jacobsthal matrix sequences have been defined, and the relations among these three sequences have been analyzed, and a lot of properties had been mentioned upper lines have been given.

Keywords: Fermat, Fibonacci, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas, Mersenne, Pell number sequences

ÖNSÖZ

Sayı dizileri birçok farklı alanda karşımıza çok yaygın olarak çıkmaktadır. Bu yüzden farklı birçok sayı dizisi oluşturulmuş, bunların kendi içinde birçok özellikleri araştırılmış, aynı zamanda birbirleriyle olan bağıntıları ve çeşitli bilim dallarında kullanılabilirliği de çalışılmıştır. Jacobsthal sayı dizileri de popüleritesini devam ettiren sayı dizilerinden bir tanesidir.

Çalışmamızda Jacobsthal sayı dizilerinden yola çıkarak Jacobsthal matris dizileri ve Jacobsthal Lucas sayı dizilerinden yola çıkarak Jacobsthal Lucas matris dizileri elde edilmiş ve elde edilen bu iki yeni matris dizisinin özellikleri araştırılmıştır. Matris cebiri yardımıyla matris dizileri için bulunan sonuçlar sayı dizilerine de uyarlanmıştır. Ayrıca bu matris dizilerinden hareketle genelleştirilmiş Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizisi tanımlanmıştır.

Çalışmamızda kullanılan Jacobsthal, Jacobsthal Lucas ve genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizileri ile adlandırılan bu kavramlar ilk defa makale olarak "The (s,t) Jacobsthal and (s,t) Jacobsthal-Lucas Matrix Sequences" adıyla, "ARS Combinatoria" dergisinde yayınlanan makalemiz ile literatüre girmiştir.

Yaptığım bu çalışmada bana değerli desteklerini esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU Bey'e, doktora çalışmam sırasında bana burs desteği sağlayan TÜBİTAK kurumuna ve beni sabırla destekleyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Şükran UYGUN
KONYA-2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Amaç ve Kapsam 1
1.2. Tam Sayı Dizilerinin Doğuşu 1

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **4**

3. TEMEL KAVRAMLAR **7**

3.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları ve Özellikleri 7
3.2. Pell ve Pell Lucas Sayıları ve Özellikleri 9
3.3. Mersenne Sayıları ve Özellikleri 10
3.4. Fermat Sayıları ve Özellikleri 11
3.5. (s,t) Genelleştirilmiş Fibonacci ve (s,t) Genelleştirilmiş Lucas Sayıları ve Özellikleri 11
3.6. Matrislerde Spektral Ayrışım ve Schur Eşitsizliği 11

4. JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARI **13**

4.1. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları 13
4.2. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Matris Gösterimi 17
4.3. Jacobsthal Sayılarında Bölünebilme 20
4.4. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Toplam Özellikleri 20
4.5. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Üreteç Fonksiyonları 23

5. k-JACOBSTHAL VE k-JACOBSTHAL LUCAS SAYI DİZİSİ **25**

6. JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS MATRİS DİZİLERİ **29**

6.1. (s,t) Jacobsthal ve (s,t) Jacobsthal Lucas Sayı Dizileri 29
6.2. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Matris Dizileri 30
6.3. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Matris Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları 45
6.4. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Matris Dizilerinin Kısmi Toplamları 49

6.5. Jacobsthal Matris Dizisinin Kombinatorik Temsilleri....58
6.6. Jacobsthal Matris Dizisinin Üstel Matris Dizisi....62

7. GENELLEŞTİRİLMİŞ JACOBSTHAL MATRİS DİZİLERİ....65

7.1. Genelleştirilmiş Jacobsthal Sayı Dizileri....65
7.2. Genelleştirilmiş Jacobsthal Matris Dizilerinin Kısmi Toplamları....77
7.3. Genelleştirilmiş Jacobsthal Matris Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları....81

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER....83

8.1. Sonuçlar....83
8.2. Öneriler....83

KAYNAKLAR....84

ÖZGEÇMİŞ....86

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

C_n : Jacobsthal Lucas matris dizisinin n-inci elemanı

c_n : Jacobsthal Lucas sayı dizisinin n-inci elemanı

G_n : Genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizisinin n-inci elemanı

g_n : Genelleştirilmiş Jacobsthal sayı dizisinin n-inci elemanı

J_n : Jacobsthal matris dizisinin n-inci elemanı

j_n : Jacobsthal sayı dizisinin n-inci elemanı

$c_{n,k}$: k-Jacobsthal Lucas sayı dizisinin n-inci elemanı

$j_{n,k}$: k-Jacobsthal sayı dizisinin n-inci elemanı

$\Im_n(s,t)$: (s,t) Jacobsthal sayı dizisinin n-inci elemanı

ς_n (s,t) : (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizisinin n-inci elemanı

1. GİRİŞ

Tamsayı dizileri sayılar teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Tamsayı dizilerinin bu büyük önemi vücudumuzdaki organların birbirine oranında, çevremizdeki ağaçlarda, çiçeklerde, hayvanlarda muhteşem bir uyumla karşımıza çıkmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca rasyonel fonksiyonları temsil eden kuvvet serileri teorisinde, Hilbert serilerinde, grup teoriden gelen üreteç fonksiyonlarında ve bunun gibi birçok bilimde kullanılan bu gibi konularda sayı dizileri yardımıyla ciddi ilerlemeler elde edilmiştir.

1.1. Amaç ve Kapsam

Rekürans ilişkileri ile verilen Jacobsthal matris dizilerini tanımlamak ve tanımlanan matris dizilerinin özelliklerini araştırmak bu çalışmanın temel amacıdır. Tanımlanacak olan rekürans ilişkili matris dizileri ile Jacobsthal sayı dizisi arasında bağlantının kurulması ve böylece sayılar teorisi ile matris teorisi arasında bir bağ kurmaktır. Kurulacak bu ilişki sayesinde matris dizilerinin özelikleri araştırılırken aynı zamanda Jacobsthal sayı dizileri ve türevlerinin de özellikleri hakkında bilgi sahibi olunur.

1.2. Tam Sayı Dizilerinin Doğuşu

Bu bölümde çok kullanılan birçok sayı dizisinin nasıl oluştuğuna dair genel bir bilgi verilmiştir. Öncelikle tamsayı dizileri denince ilk akla gelen Fibonacci ve Lucas dizileri tanımlanacak bu dizilerin ve diğer sayı dizilerinin bir takım özelliklerinden bahsedilecektir.

Leonardo Fibonacci 12. asırda İtalya‘nın Pisa şehrinde doğmuş bir matematikçidir. Çocukluğu babasının işi nedeniyle Cezayir’de geçmişti. Burada Müslüman eğiticilerden onluk Arap sayı sistemini öğrenmiş böylece Roma rakam sistemimin fonksiyonel olmadığını fark etmişti. Aritmetik ve Cebir anlatan ‘Liber Abaci’ adlı eserinde Arap sayı sisteminin Roma rakam sistemine göre çok daha kullanışlı olduğundan bahsetmiştir. Kitap Arap sayı sistemini Batı Avrupa’ya tanıtan ilk kaynak olmuştur. Bu kitapta “Tavşan Problemi” olarak adlandırılan Leonardo Fibonacci’nin sadece basit bir aritmetik problemi olarak gördüğü bu soru sayesinde 19.

asırda Leonardo Fibonacci meşhur olmuştur. Problem şöyledir: Ergin bir tavşan çifti her ay yeni bir yavru çifti vermektedir. Bir yavru çifti bir ayda ergenliğe ulaşmaktadır. Yavru olan bir tavşan çiftinden 12 ay sonunda kaç tavşan çifti oluşur? Buna göre her ay kendinden önceki iki ayın toplamına eşittir. O halde tavşan çifti sayıları aylara göre sırasıyla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 şeklinde olacaktır. Bu problem hakkında 19. asra kadar ciddi bir çalışma yapılmamışken birdenbire çok popüler olmuş ve sorunun çözümü olan sayılar Fibonacci sayıları olarak adlandırılmıştır.

Fibonacci sayıları üç nedenden dolayı büyük önem arz etmektedir. Birincisi dizinin ilk elemanlarının doğada bitkilerde, böceklerde kısacası birçok yerde karşımıza çok sık çıkmasıdır. İkinci olarak dizinin bir terimini kendinden önceki terime böldüğümüzde hep aynı oranı vermesidir. "Altın oran" denilen bu sayı vücudumuzdaki oranlardan Mısır'daki piramitlere kadar sayısız alanda karşımıza çıkmaktadır. Üçüncü olarak bu sayıların sayılar teorisinde çok ilginç özelliklerinin bulunmasıdır. Bu sayı dizisi $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ yineleme bağıntısı kullanılarak tanımlanmıştır. Dizinin terimlerini oluşturabilmek için tabii ki ilk iki elemanın verilmesi gerekir. Fibonacci dizisi en kolay sayılar olan $F_0 = 0, \quad F_1 = 1$ ile başlar. Ama istenirse başlangıç şartları değiştirilerek tamamen bu diziden bağımsız başka bir sayı dizisi de oluşturulabilir. Buna örnek olarak Fransız matematikçi Edward Lucas başlangıç şartları için seçilebilecek başka en basit $L_0 = 2, \quad L_1 = 1$ değerlerini kullanarak Lucas sayı dizilerini oluşturmuştur ve bu sayı dizisi de ciddi bir popülerite kazanmıştır. Lucas sayı dizisinin literatürde bu kadar çok kullanılmasının nedeni Fibonacci sayı dizileri ile arasında birçok ilginç bağıntının bulunmasıdır.

Fibonacci sayı dizilerinin matris cebiri ile ilişkisi 1960'lı yıllarda Charles H. King'in master tezi olarak

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi üzerinde çalışmasıyla başlamıştır. Q matrisi için

$$Q^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$$

eşitliğini gösterip ve bu matrisi kullanarak

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \det Q = -1$$

eşitliğini de elde etti. Bu eşitlikleri kullanarak $F_{n+1}.F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ olarak bilinen Cassini formülünü elde etti. Silvester, 1979' da bu matris gösteriminin avantajlarını fark edip Fibonacci sayıları ile ilgili birçok özellik ortaya koymuştur.

Belçikalı matematikçi Eugene Charles Catalan ve Alman matematikçi E. Jacobsthal 1883 yıllarında tamsayı dizileri ile ilgili polinomlar üzerinde çalışmışlardır. Bu polinomların büyük bir kısmı Fibonacci yineleme bağıntısına benzer bir ilişki ile tanımlanmıştır.

$$F_1(x) = 1, \quad F_2(x) = x \quad F_{n+2}(x) = x.F_{n+1}(x) + F_n(x) \quad n \geq 1$$

şeklindeki bir bağıntıyla tanımlanmıştır. Bu polinom dizisi kullanılarak Fibonacci ve Pell sayıları oluşturulabilir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde bu tez çalışmamıza ışık tutan kaynaklar hakkında kısa bir bilgi verilecektir.

J.R.Silvester, "Fibonacci Properties by Matrix Methods" isimli makalesinde

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini kullanarak Fibonacci dizisinin matris gösterimini elde etmiş ve bunu kullanarak Fibonacci dizisinin bazı önemli özelliklerini elde etmiştir.

D. Kalman, " Generalized Fibonacci Number by Matrix Methods" adlı çalışmasında genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını tanımlayarak bu dizilerin matris gösteriminden faydalanarak birçok özellik elde etmiştir.

R. C. Johnson, "Matrix Methods for Fibonacci and Related Sequences" adlı çalışmasında yine matris gösteriminden faydalanarak Fibonacci dizilerine ait birçok eşitlik bulmuş ve bu yöntemin benzer şekilde sabit katsayılı bir çok sayı dizisine de uygulanabileceğini göstermiştir.

Falcon ve Plaza (2007) tarafından öncelikle geometrik bir yaklaşımla, $\boldsymbol{k} \geq 1$ tamsayısı için klasik Fibonacci ve Pell dizisinin genelleştirilmesi olarak tanımlanan k-Fibonacci sayı dizisi normalleştirilmiş üçgenlerin 4TLE paylaşımı ve kompleks değerli fonksiyonları kullanarak elde edilmiştir. $\{\boldsymbol{F_{k,n}}\}_{\boldsymbol{n}\geq 0}$ (Catalan'ın Fibonacci polinomu) aşağıdaki başlangıç koşulları ile

$$\boldsymbol{F_{k,0}} = 0, \quad \boldsymbol{F_{k,1}} = 1, \quad \boldsymbol{F_{k,n+1}} = \boldsymbol{kF_{k,n}} + \boldsymbol{F_{k,n-1}}$$

şeklinde tanımlanmış ve daha sonra

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}-1 & 1 \\ \boldsymbol{k} & 1 \end{bmatrix}^{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F_{k,n+1}} - \boldsymbol{F_{k,n}} & \boldsymbol{F_{k,n}} \\ \boldsymbol{F_{k,n+1}} - \boldsymbol{F_{k,n-1}} & \boldsymbol{F_{k,n}} - \boldsymbol{F_{k,n-1}} \end{bmatrix}$$

bağıntısı gösterilmiştir. Aynı zamanda bu bağıntıyı kullanarak matris özellikleri yardımıyla k- Fibonacci sayıları için birçok özdeşlik ortaya çıkarılmıştır.

Benzer olarak, C. Polat çalışmasında k- Lucas sayı dizisini (Lucas polinomları) başlangıç şartları

$$\boldsymbol{L_{k,0}} = 2, \quad \boldsymbol{L_{k,1}} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{L_{k,n+1}} = \boldsymbol{kL_{k,n}} + \boldsymbol{L_{k,n-1}}$$

olmak üzere lineer yineleme bağıntısı ile tanımlayıp üçlü bant matrislerin determinantları, k-Fibonacci ve k-Lucas dizileri arasında bağıntılar bulmuştur.

A. A. Öcal, N. Tuğlu ve E. Altınışık "On the Representation of k-generalized Fibonacci and Lucas Numbers" adlı çalışmalarında k-genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı determinantsal gösterimini kullanarak, k-genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için Binet benzeri formüller üretmişlerdir.

A. F. Horadam, "Jacobsthal Representation Numbers" adlı çalışmasında Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarını tanımlayarak bu sayıların önemini ve birbirleri arasındaki bağıntıları ve bu sayı dizilerinin bazı özelliklerini de oluşturmuştur.

G.B. Djordjevic ve H.M. Srivastava, "Incomplete Generalized Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas numbers" isimli çalışmasında genelleştirilen tamamlanmamış Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının önemli özelliklerini veren bir makale yayınlamışlar ve bu çalışmada, verilen ana sonuçlar bu sayıların üreten fonksiyonlarını da içerdiği belirtilmiştir.

Darrin D. Frey and James A. Sellers "Jacobsthal Numbers and Alternating Sign Matrices" adlı çalışmalarında, $A(n)$, nxn tipindeki sıralı işaret matrislerinin sayısını göstermek üzere

$$A(n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!}$$

eşitliğini kullanmışlar ve asıl amaçları olan $A(n)$ ifadesinin tek olması için gerek ve yeter koşul n sayısının bir Jacobsthal sayı olmasıdır." tezinin doğruluğunu ispatlamışlardır.

Z. Cerin, "Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers" isimli çalışmasında Jacobsthal dizisinin çift ve tek terimlerinin karelerinin toplamlarını ve çarpımlarını hesaplama formüllerini vermiştir. Ayrıca, bu bulunan toplamlara benzer farklı eşitlikler elde etmiştir. Aynı zamanda, verilen toplam eşitliklerinin uygun

Jacobsthal sayıları ve bazı tam sayı dizileri ile bağlantılı olduğunu kanıtlamıştır.

F. Köken ve D.Bozkurt, "On The Jacobsthal Numbers by Matrix Methods" isimli çalışmalarında Q Fibonacci matrisine benzer 2x2 tipinde Jacobsthal F ve Jacobsthal M matrislerini tanımlamışlar ve bu matrisleri kullanarak, Jacobsthal sayıları için Cassini, Catalan ve Binet benzeri formüllerini ve toplamsal özelliklerini elde etmişlerdir.

H. Civciv, "Fibonacci ve Lucas matris dizileri ve özellikleri" adlı tez çalışmasında Fibonacci ve Lucas sayı dizilerini kullanarak matris dizilerini elde etmiş ve bu matris dizileri ile birçok özellik elde etmiştir.

Bu çalışmada A. F. Horadam tarafından tanımlanan Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizilerine ait bir takım özellikler ispatlarıyla birlikte verildikten sonra k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas dizileri de tanımlanarak ilgili birçok özellik verilecektir. Ayrıca Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri tanımlanarak birçok özellik verilecektir. Son olarak çalışılan bu konu ile ilgili olarak bir takım önerilerden bahsedilecektir.

Daha sonra Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizileri tanımlandıktan sonra Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri verilmiş olup birçok özellik elde edilmiştir. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizilerinin kısmi ve sonsuz toplamları için formüller elde edilmiş bu formüller kullanılarak, Jacobsthal sayı dizilerinin kısmi ve sonsuz toplamları için formüller üretilmiştir.

Ayrıca Genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizileri de tanımlanarak Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri ile aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri için elde edilen özdeşlik ve eşitsizlikler, matrislerin çarpımı ve eşitliği kullanılarak bu özdeşlik ve eşitsizliklerden hareketle genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizileri için özdeşlik ve eşitsizlikler verilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde literatürde önemli bir yer tutan bazı tamsayı dizileri tanımlanacak ve bunlarla ilgili temel bazı özellikler verilecektir.

3.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları ve Özellikleri

Tanım 3.1.1. $F_0 = 0, \quad F_1 = 1$ olmak üzere; $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Fibonacci sayı dizisi denir. Fibonacci dizisinin Binet benzeri formülü $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ şeklindedir. Binet formülünden hareketle $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$ olduğu kolayca görülmektedir. Buradaki α sayısı "Altın Oran" olarak adlandırılmaktadır. Negatif indisli Fibonacci sayı dizisi için $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ şeklinde bir bağıntı söz konusudur.

Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklinde olup ve Simpson formülü

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n} F_n = F_{n+2} - 1$$

şeklinde verilir (Koshy T., 2001).

Tanım 3.1.2. $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ olmak üzere; $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Lucas sayı dizisi denir. Lucas dizisinin Binet formülü $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $L_n = \alpha^n + \beta^n$ şeklindedir. Binet formülünden hareketle $\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha$ olduğu kolayca görülmektedir. Bu değer sayesinde Lucas sayı dizisi de en az Fibonacci sayı dizisi kadar önemli hale gelmiştir. Fibonacci sayıları ile olan

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$$
$$F_n L_n = F_{2n}$$
$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$$

bağıntıları ile de bu önem kuvvet kazanmıştır.

Negatif indisli Lucas sayı dizisi $L_{-n} = (-1)^{n+1} L_n$ şeklinde tanımlanır.

Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n = \frac{2x^2 + x}{1 - x - x^2}$$

şeklinde olup Simpson formülü

$$L_{n+1} L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n} L_n = L_{n+2} - 3$$

şeklinde verilir (Koshy T., 2001).

Fibonacci ve Lucas sayıları için Koshy ‘nin (2001) kitabı önemli bir kaynaktır.

3.2. Pell ve Pell Lucas Sayıları ve Özellikleri

Tanım 3.2.1. $P_0 = 0, \quad P_1 = 1$ olmak üzere; $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Pell sayı dizisi denir. Pell dizisinin Binet formülü $\alpha = 1+\sqrt{2}, \qquad \beta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere $P_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ şeklindedir. Negatif indisli Pell sayı dizisi $P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$ şeklinde tanımlanır.

Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

şeklinde olup Simpson formülü

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{1}{2}(P_{n+1} + P_n - 1)$$

şeklinde verilir (Sun Zhi-H., 2006).

Tanım 3.2.2. $Q_0 = 2, \quad Q_1 = 1$ olmak üzere; $Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Pell Lucas sayı dizisi denir. Pell Lucas dizisinin Binet formülü $\alpha = 1+\sqrt{2}, \qquad \beta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere $Q_n = \alpha^n + \beta^n$ şeklindedir. Negatif indisli Pell Lucas sayı dizisi $Q_{-n} = (-1)^{n+1} Q_n$ şeklinde tanımlanır.

Pell Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n x^n=\frac{2-2x}{1-2x-x^2}$$

şeklinde tanımlandıktan sonra Simpson formülü

$$Q_{n+1}Q_{n-1}-Q_n^2=8(-1)^{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n}Q_k=\frac{1}{2}(Q_{n+1}+Q_n-2)$$

şeklinde verilir (Sun Zhi-H., 2006).

Pell ve Pell Lucas sayıları arasındaki bazı bağıntılar

$$P_{m+n}=2P_mQ_n-(-1)^n P_{m-n}$$
$$Q_m^2=2P_m^2+(-1)^m$$
$$Q_{2m}=2Q_m^2-2(-1)^m$$

şeklindedir (Sun Zhi-H., 2006).

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizileri bir sonraki bölümde detaylı bir şekilde inceleneceği için burada bahsedilmemiştir.

3.3. Mersenne Sayıları ve Özellikleri

Tanım 3.3.1. $m_0=0,\ m_1=1$ olmak üzere; $m_{n+1}=3m_n-2m_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Mersenne sayı dizisi denir. Mersenne dizisinin Binet formülü $m_n=2^n-1$ şeklindedir (Robinson, 1954).

3.4. Fermat Sayıları ve Özellikleri

Tanım 3.4.1. $r_0 = 2,\ \ r_1 = 3$ olmak üzere; $r_{n+1} = 3r_n - 2r_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Fermat sayı dizisi denir. Fermat dizisinin Binet formülü $r_n = 2^n + 1$ şeklindedir (Robinson, 1954).

3.5. (s,t) Genelleştirilmiş Fibonacci ve (s,t) Genelleştirilmiş Lucas Sayıları ve Özellikleri

$s > 0,\ t \neq 0,\ s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki s,t reel sayıları için $F_0(s,t) = 0,\ \ F_1(s,t) = 1$ olmak üzere; $F_{n+1}(s,t) = sF_n(s,t) + tF_{n-1}(s,t)$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki reel sayı dizisine (s,t) genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi denir.

Benzer şekilde $s > 0,\ t \neq 0,\ s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki s,t reel sayıları için $L_0(s,t) = 2,\ \ L_1(s,t) = s$ olmak üzere; $L_{n+1}(s,t) = sL_n(s,t) + tL_{n-1}(s,t)$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki reel sayı dizisine (s,t) genelleştirilmiş Lucas sayı dizisi denir (Civciv H., 2008).

3.6. Matrislerde Spektral Ayrışım ve Schur Eşitsizliği

Tanım 3.6.1. A, herhangi nxn kompleks matris ve λ_i, $1 \leq i \leq n$ A matrisinin öz değerleri olmak üzere n tane lineer bağımsız öz vektöre sahip olsun. Bu takdirde,

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

olacak şekilde A matrisinin öz vektörlerinden oluşan terslenebilir P matrisi öz değerlerinden oluşan $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ köşegen matrisi vardır. A matrisinin bu biçimde yazılmasına spektral ayrışımı veya öz ayrışımı denir.

Teorem (Schur Eşitsizliği): A herhangi nxn kompleks matris ve λ_i, $1 \le i \le n$ öz değerlerinden oluşan $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ olacak şekilde köşegen matris olsun. Bu takdirde $\|.\|_E$ sembolü matrislerdeki Euclidean normu göstermek üzere,

$$\|D\|_E \le \|A\|_E$$

şeklindedir. A normal bir matris ise bu eşitsizlik eşitliğe dönüşür (Prasolov, 1994).

4. JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARI

Bu bölümde, A. F. Horadam'ın literatüre kazandırdığı Jacobsthal sayılarına ait bir takım özelliklerle birlikte bu sayı dizilerine ait toplam, bölünebilme özellikleri incelenecektir. Bu sayı dizilerinin matris gösterimi belirtildikten sonra birçok özelliğin ispatının bu matris gösterimi kullanılarak kolaylıkla bulunabileceği görülecektir.

Bilgisayarlardaki bazı mikro işlemciler bir programın akışını değiştirmek için koşullu yönlendirmeler kullanırlar. Bu mikro işlemciler (dallı yönlendirenler) geçici olarak ilerideki yönlendirmeye atlatan komutlandırma yaparlar. Burada, 2 bit'in 4 olasılığı için 1 durumun, 3 bit'in 8 olasılığı için 3 durumun, 4 bit'in 16 olasılığı için 5 durumun, vb. durumları hariç bırakılarak diğerlerinin yararlı olduğu sonucuna varılmış ve hariç bırakılan bu durumların tam olarak Jacobsthal sayılarını verdiği görülmüştür (Horadam, A. F.).

4.1. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları

$j_0 = 0, \quad j_1 = 1$ olmak üzere; $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Jacobsthal sayı dizisi denir. Sırasıyla Jacobsthal sayıları 0, 1, 1, 3, 5 şeklinde devam eder (Horadam A. F.).

Negatif indisli Jacobsthal sayı dizisi $j_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} j_n$ şeklinde tanımlanır.

$c_0 = 2, \quad c_1 = 1$ olmak üzere; $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ tamsayı dizisine Jacobsthal Lucas sayı dizisi denir. Jacobsthal Lucas dizisinin negatif indisli Jacobsthal Lucas sayı dizisi ise $c_{-n} = \frac{(-1)^n}{2^n} c_n$ şeklinde tanımlanır (Horadam A.F.).

Şimdi, bu çalışmaya Fibonacci sayılarında altın orana benzer Jacobsthal sayılarının oranını verelim.

$$x = \frac{j_{n+1}}{j_n} = 1 + 2\frac{j_{n-1}}{j_n}$$

$$= 1 + \frac{2}{\frac{j_n}{j_{n-1}}} = 1 + \frac{2}{1 + 2\frac{j_{n-2}}{j_{n-1}}}$$
$$\vdots$$
$$= 1 + \frac{2}{x}$$

şeklinde sürekli kesir yazılırsa $j_{n+1} / j_n = x$ için $x = 1 + 2/x$ olur ki buradan $x^2 - x - 2 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri 2 ve -1 sayılarıdır. Sayılar pozitif olduğu için oranları da pozitif olacağından aradığımız değer 2 sayısıdır.

Teorem 4.1.1. $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = 2,\ x_2 = -1$ olmak üzere Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları için Binet benzeri formülü

$$j_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$
$$c_n = x_1^n + x_2^n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir (Horadam A. F., 1994).

İspat:

$$x_1 > x_2, \qquad x_2 < 0 < x_1, \qquad |x_2| < x_1$$
$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 . x_2 = -2, \qquad x_1 - x_2 = 3$$

eşitlikleri sağlanır. $\boldsymbol{j_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n}$ şeklinde yazıp buradan $c_1,\ c_2$ değerlerini bulalım. $n = 0,\ n = 1$ için değerler yazılırsa $c_1 = \frac{1}{x_1 - x_2} = -c_2$ elde edilir. Böylece Binet benzeri formül, $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri kullanılarak $x_1 = 2,\ x_2 = -1 \Rightarrow \frac{2^n - (-1)^n}{2 - (-1)}$ şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde Jacobsthal Lucas sayıları için Binet benzeri formülü $c_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$ şeklinde yazıp buradan $c_1,\ c_2$ değerlerini bulalım: $n = 0,\ \ n = 1$ için değerler yazılırsa $c_1 = \dfrac{3}{x_1 - x_2} = 2 - c_2$ elde edilir. $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri kullanılarak $x_1 = 2,\ x_2 = -1 \Rightarrow\ c_n = 2^n + (-1)^n$ olur.

Binet formülü, tam sayı dizileri için çok önemlidir. Tam sayı dizilerinin birçok önemli özelliği, Binet formülleri kullanılarak elde edilebilir.

Teorem 4.1.2. Jacobsthal sayıları için ardışık sayıların limitleri oranı

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j_{n+1}}{j_n} = 2 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{j_{n+r}}{j_n} = 2^r$$

şeklindedir (Horadam, A.F., 1994).

Teorem 4.1.3. Jacobsthal Lucas sayıları için ardışık sayıların limitleri oranı da Jacobsthal sayılarında olduğu gibi $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = 2$ ve $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_{n+r}}{c_n} = 2^r$ şeklindedir (Horadam, A.F., 1994).

Teorem 4.1.4. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıların limitleri oranı $\lim_{n\to\infty} \dfrac{j_n}{c_n} = \dfrac{1}{3}$ dır. (Horadam, A.F., 1994).

Teorem 4.1.5. m, n herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları için

a) $j_{n+1} = 2^n - j_n$

b) $j_{n-1} + j_n = 2^{n-1}$

c) $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1} = 2j_n + (-1)^n$

d) $c_{n+1} = 2c_n - 3(-1)^n$

e) $c_n = j_{n+1} + 2j_{n-1}$

f) $j_{m+n} = j_m j_{n+1} + 2j_{m-1} j_n$ $\begin{matrix} m=n \Rightarrow j_{2n} = j_n j_{n+1} + 2j_{n-1} j_n = j_n (j_{n+1} + 2j_{n-1}) = j_n c_n \\ m=n+1 \Rightarrow j_{2n+1} = j_{n+1}^2 + 2j_n^2 \end{matrix}$

g) $9j_n = c_{n+1} + 2c_{n-1}$

h) $c_n = 3j_n + 2(-1)^n$

i) $3j_n + c_n = 2^{n+1}$

j) $9j_{m+n} = c_m c_{n+1} + 2c_{m-1} c_n$ $\begin{matrix} m=n+1 \Rightarrow 9j_{2n+1} = c_{n+1}^2 + 2c_n^2 \\ m=n \Rightarrow 9j_{2n} = c_n (c_{n+1} + 2c_{n-1}) \end{matrix}$

k) $j_{m+n} = j_m c_n - (-2)^n j_{m-n}$

l) $j_{m-n} = (-2)^{-n} (j_m c_n - j_{m+n})$

m) $(-1)^{n+1} 2^n = j_n c_{n-1} - j_{n-1} c_n$

n) $9(-1)^{n+1} 2^{n-1} j_{m-n} = c_{m+1} c_{n-1} - c_m c_n$

o) $(-1)^n 2^{n-1} j_{m-n} = j_m j_{n-1} - j_{m-1} j_n$

p) $j_{2n+1} = j_{n+1} c_n - (-2)^n = j_n c_{n+1} + (-2)^n$

q) $c_{n+1} + c_n = 3(j_{n+1} + j_n) = 3.2^n$

r) $c_{n+1} - c_n = 3(j_{n+1} - j_n) + 4(-1)^{n+1} = 2^n + 2(-1)^{n+1}$

s) $c_{n+1} - 2c_n = 3(2j_n - j_{n+1}) = 3(-1)^{n+1}$

t) $2c_{n+1} + c_{n-1} = 3(2j_{n+1} + j_{n+1}) + 6(-1)^{n+1}$

u) $c_{m+n} = j_{m+1} c_n + 2j_m c_{n-1}$

v) $c_{m+n} = c_m c_n - (-2)^n c_{m-n}$ $\begin{matrix} c_{2n+1} = c_{n+1} c_n - (-2)^n \\ m=n \Rightarrow c_{2n} = c_n^2 + (-2)^{n+1} \end{matrix}$

w) $c_{m-n} = (-2)^{-n} (c_m c_n - c_{m+n})$

x) $(-1)^n 2^{n-1} c_{m-n} = j_m c_{n-1} - j_{m-1} c_n$

y) $\begin{aligned} c_{m+n} + c_{m-n} &= 3(j_{m+n} + j_{m-n}) + 4(-1)^{m-n} \\ &= 2^{m-n}(2^{2n} + 1) + 2(-1)^{m-n} \end{aligned}$

z) $c_{m+n} - c_{m-n} = 3(j_{m+n} - j_{m-n}) = 2^{m-n}(2^{2n} - 1)$

özellikleri geçerlidir (Horadam A.F., 1994).

Teorem 4.1.6. n herhangi tamsayı olmak üzere Jacobsthal sayıları için

a) $j_{2n+1}^2 = 16 j_{2n} j_{2n-2} + 8 j_{2n} + 1$

b) $j_{2n+1}^2 + j_{2n+3}^2 = 10 + 8 j_{2n}(34 j_{2n-2} + 15)$

c) $j_{2n+1} = 8 j_{2n-2} + 3$

d) $j_{2n}\, j_{2n+1} + j_{2n+2}\, j_{2n+3} = 3 + j_{2n}(136 j_{2n-2} + 55)$

e) $j_{2n} = 4 j_{2n-2} + 1$

f) $j_{2n+2}^2 - j_{2n}^2 = 1 + j_{2n}(60 j_{2n-2} + 23)$

g) $j_{2n+3}^2 - j_{2n+1}^2 = 8 + 8 j_{2n}(30 j_{2n-2} + 13)$

h) $j_{2n+3}\, j_{2n+2} - j_{2n+1}\, j_{2n} = 3 + j_{2n}(120 j_{2n-2} + 49)$

eşitlikleri sağlanır (Zvonko Cerin., 2007).

Teorem 4.1.7. n, k herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur (Zvonko Cerin, 2007).

$$2(j_{2n+3} - j_{2n+1}) + 3 j_{2k}(j_{2n+4} - j_{2n+2}) = c_{2n+2k+2} - 1$$

$$2^{2k+1}(j_{2n+4} - j_{2n+2}) = c_{2n+2k+3} + 1$$

4.2. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Matris Gösterimi

Bu bölümde, Köken F. ve Bozkurt D. tarafından tanımlanan Jacobsthal F-matrisi ve Jacobsthal M- matrisi verilecektir. Ayrıca, bu matrisleri kullanarak elemanları Jacobsthal sayıları olan bir genel matris elde edilecektir. Bu genel matris kullanılarak, Jacobsthal sayıları için Binet ve Simpson benzeri formülleri, ardışık terimler toplamının farklı bir ispatı ve bazı toplam formülleri gösterilecektir.

Jacobsthal F-matrisi

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Jacobsthal sayılarının aralarındaki bağıntı kullanılarak

$$\begin{bmatrix} j_{n+1} \\ j_n \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} j_n \\ j_{n-1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Jacobsthal M-matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. Bu matris kullanılarak da

$$\begin{bmatrix} j_{2n+1} \\ j_{2n} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} j_{2n-1} \\ j_{2n-2} \end{bmatrix}$$

matris eşitliği sağlanır.

Teorem 4.2.1. $n \geq 0$ tamsayısı için,

$$F^n = \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix}$$

olur (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 4.2.2. $n \geq 0$ tamsayısı için, $\det F^n = (-2)^n$ dır (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 4.2.3. $n \geq 0$ tamsayısı için Jacobsthal sayı dizileri için Simpson benzeri formülü aşağıdaki şekildedir:

$$j_{n+1} j_{n-1} - j_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$$

(Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 4.2.4. F^n matrisinin özdeğerleri $\lambda_{1,2} = (c_n \pm 3j_n)/2$ olur (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 4.2.5. Jacobsthal M- matrisi için

$$M^n = \begin{bmatrix} j_{2n+1} & 2j_{2n} \\ j_{2n} & 2j_{2n-1} \end{bmatrix}$$

eşitliği geçerlidir. Buradan

$$\det M^n = 2^{2n}$$
$$j_{2n+1}j_{2n-1} - j_{2n}^2 = 2^{2n-1}$$

olur. (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 4.2.6. Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{i=0}^{n} j_i = \frac{1}{2}(j_{n+2} - 1)$$

sağlanır (Köken F., Bozkurt D., 2008).

$$\sum_{i=0}^{n} j_i = \frac{1}{2}(j_{n+2} - 1)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.7. Daha önce Jacobsthal sayı dizileri için Binet formulü kullanarak ispatladığımız eşitlikler Jacobsthal sayı dizilerinin matris gösterimi kullanılarak ta ispatlanabilir.

a) $j_{m+n} = j_m j_{n+1} + 2j_{m-1}j_n$

b) $j_{2n} = j_n j_{n+1} + 2j_{n-1}j_n = j_n(j_{n+1} + 2j_{n-1}) = j_n c_n$

c) $j_{2n+1} = j_{n+1}^2 + 2j_n^2$

d) $(-1)^n 2^{n-1} j_{m-n} = j_m j_{n-1} + 2j_{m-1}j_n$

(Köken F., Bozkurt D., 2008).

4.3. Jacobsthal Sayılarında Bölünebilme

Teorem 4.3.1. n,k doğal sayılar olmak üzere $j_n \mid j_{kn}$ sağlanır (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 4.3.2. Her k tamsayısı için

i) $3 \mid k \Rightarrow 3 \mid j_{4k}$

ii) $5 \mid j_{4k}$

özellikleri sağlanır (Köken F., Bozkurt D., 2008).

4.4. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Toplam Özellikleri

Horadam A.F., Jacobsthal sayıların ardışık toplamlarını,

$$\sum_{i=2}^{n} j_i = \frac{1}{2}(j_{n+2} - 3)$$

şeklinde vermiştir (Horadam A. F. , 1996).

Teorem 4.4.1. n herhangi pozitif bir tamsayı olmak üzere Jacobsthal sayılar için;

i) $\sum_{i=0}^{n} j_{2i} = \frac{1}{3}(j_{2n+2} - n - 1$

ii) $\sum_{i=0}^{n} j_{2i+1} = \frac{1}{3}(2j_{2n+2} + n + 1)$

iii) $\sum_{i=0}^{n} j_i^2 = \frac{1}{9}(j_{2n+2} + 2(-1)^{n+1} j_{n+1} + n + 1)$

toplam formülleri geçerlidir (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Asal sayılar birçok alanda kullanılır ve ardışık asalların toplamı ilginç sonuçlar verebilir. Bazı asal sayılar k tamsayısı için $4k+1$ veya $4k+3$ şeklinde gösterilebilir. Aşağıdaki teoremde indisleri bu şekilde olan ardışık Jacobsthal sayılarının toplamı verilecektir.

Teorem 4.4.2. n doğal sayısı ve Jacobsthal sayılar için

i) $\sum_{k=0}^{n} j_{4k+1} = \frac{1}{15}(2j_{4n+4} + 5n + 5)$

ii) $\sum_{k=0}^{n} j_{4k+3} = \frac{1}{15}(8j_{4n+4} + 5n + 5)$

eşitlikleri geçerlidir (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Jacobsthal sayıları için bazı sonsuz serilerin yakınsaklığı ve yakınsadığı değerler aşağıdaki teoremde belirtilmiştir.

Teorem 4.4.3 Pozitif n tamsayısı için

i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{j_n j_{n-1}} = 1$

ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{j_n j_{n+1}} = \frac{1}{2}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2j_{n-1}}{j_n j_{n+1}} = 1$

eşitlikleri geçerlidir (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Benzer toplam değerlerini Jacobsthal Lucas sayıları için de uygulayalım: A. F. Horadam, Darrin D.Frey, James A., Jacobsthal Lucas sayıların ardışık toplamlarını,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{1}{2}(c_{n+2} - 5)$$

şeklinde vermiştir.

Teorem 4.4.4. n herhangi pozitif bir tamsayı ve Jacobsthal Lucas sayıları için

i) $\sum_{i=0}^{n} c_{2i} = j_{2n+2} + n + 1 = \frac{1}{2}(5j_{2n} + c_{2n}) + n + 1 = \frac{1}{2}(5j_n c_n + c_n^2 + (-2)^{n+1}) + n + 1$

ii) $\sum_{i=0}^{n} c_{2i+1} = \sum_{i=0}^{n} (2^{2i+1} + (-1)^{2i+1}) = 2\left[\frac{2^{2n+2}-1}{2^2-1}\right] - (n+1) = 2\left[\frac{2^{2n+2}-(-1)^{2n+2}}{3}\right] - n - 1 = (2j_{2n+2} - n - 1)$

iii) $\sum_{i=0}^{n} c_i^2 = \frac{1}{2}[5j_n c_n + c_n^2 + (-2)^{n+1}] + (-2)^{n+1} j_{n+1} + n + 1$

ifadesi geçerlidir (Köken F.,Bozkurt D., 2008).

Teorem 4.4.5. Her pozitif n tamsayısı için

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{c_n c_{n-1}} = \frac{1}{6}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{c_n c_{n+1}} = \frac{1}{12}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_{n-1}}{c_n c_{n+1}} = \frac{1}{2}$

toplam formülleri sağlanır (Köken F.,Bozkurt D., 2008).

Teorem 4.4.6. Her pozitif n tamsayısı için

a) $\sum_{i=0}^{n} c_{k+i} = c_{n+k+1} - c_k + \frac{3}{2}(-1)^k (1 + (-1)^n)$

b) $\sum_{i=0}^{n} c_{2k+2i} = n + 2j_{2n+1} + 3j_{2n+2} j_{2k}$

c) $\sum_{i=0}^{n} c_{2k+2i+1} = 2^{2k+1} j_{2n+2} - n - 1$

d) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_{k+i} = \frac{1}{3}(c_k + (-1)^n c_{k+n+1} + (-1)^k (n+1))$

e) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_{2k+2i} = \frac{1}{5}(c_{2k} + (-1)^n c_{2k+2n+2} + \frac{3}{10}(1+(-1)^n)$

toplam formülleri sağlanır (Cerin Z., 2007).

4.5. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Üreteç Fonksiyonları

Teorem 4.5.1. Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} j_n x^{n-1} = (1 - x - 2x^2)^{-1}$$

şeklinde ve Jacobsthal Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1} = (1+4x)(1 - x - 2x^2)^{-1}$$

şeklinde ifade edilir. (Horadam A.F., 1996)

İspat: $A = j_0 + j_1 x + j_2 x^2 + ... + j_n x^n + ...$ fonksiyonunun her iki tarafını x ve x^2 ile ayrı ayrı çarparsak

$$Ax = j_0 x + j_1 x^2 + j_2 x^3 + ... + j_n x^{n+1} + ...$$
$$Ax^2 = j_0 x^2 + j_1 x^3 + j_2 x^4 + ... + j_n x^{n+2} + ...$$

elde edilir. Bu denklemleri yukarıdaki denklemden çıkarırsak

$$(1 - x - x^2) j_n = x$$

olur. Buradan istenen elde edilir.

$A = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...$ fonksiyonunun her iki tarafını x ve x^2 ile ayrı ayrı çarparsak

$$Ax = c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + ... + c_n x^{n+1} + ...$$

$$Ax^2 = c_0 x^2 + c_1 x^3 + c_2 x^4 + ... + c_n x^{n+2} + ...$$

elde edilir. Bu denklemleri yukarıdaki denklemden çıkarırsak

$$(1 - x - x^2)c_n = 1 + 4x$$

olur. Buradan istenen elde edilir.

5. k-JACOBSTHAL VE k-JACOBSTHAL LUCAS SAYI DİZİSİ

Bu bölümde Jacobsthal sayılarının bir genelleştirmesi olan k-Jacobsthal sayıları ve k-Jacobsthal Lucas sayıları tanımlanıp ilgili özellikleri verilecektir.

Tanım 5.1. (k-Jacobsthal Sayı Dizisi) Her $k > 0$ reel sayısı için başlangıç şartları

$$j_{k,0} = 0 \text{ ve } j_{k,1} = 1 \text{ olmak üzere}$$
$$j_{k,n+2} = j_{k,n+1} + kj_{k,n} \qquad n \geq 0 \tag{5.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{j_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisine denir. Dizinin her bir elemanına da k-Jacobsthal sayısı denir. $k = 1$ alınırsa Fibonacci sayı dizisi $k = 2$ alınırsa sayı Jacobsthal dizisi elde edilir. Verilen denklemi bir fark denklemi gibi düşünürsek $x^2 = x + k$ ve denklemin kökleri $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4k}}{2}$ şeklindedir (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Lemma 5.1. Her n doğal sayısı için,

$$x_1^{n+2} = x_1^{n+1} + kx_1^n \quad \text{ve} \quad x_2^{n+2} = x_2^{n+1} + kx_2^n$$

özelliği sağlanır (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 5.1. k – Jacobsthal sayıları için Binet benzeri formül

$$j_{k,n} = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$$

şeklindedir (Köken F.,Bozkurt D., 2008).

Teorem 5.2. $\lfloor x \rfloor$ tam değer fonksiyonu olmak üzere $n \geq 0$ tamsayısı için

$$j_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i+1} (1+4k)^i$$

şeklindedir (Köken F.,Bozkurt D., 2008).

Teorem 5.3. $n \geq 1$ olmak üzere k – Jacobsthal sayı dizileri için

$$j_{k,n+1} j_{k,n-1} - j_{k,n}^2 = (-1)^n k^{n-1} \qquad \text{(Simpson benzeri eşitlik)}$$

$$j_{k,n+r} j_{k,n-r} - j_{k,n}^2 = (-1)^{n+1-r} k^{n-1} j_{k,r}^2 \qquad \text{(Catalan benzeri eşitlik)}$$

$$j_{k,m} j_{k,n+1} - j_{k,m+1} j_{k,n} = (-k)^n j_{k,m-n} \qquad \text{(d'Ocagne benzeri eşitlik)}$$

eşitlikleri sağlanır (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 5.4. k -Jacobsthal sayıları için ardışık terimler oranının limiti

$$\lim_{n \to \infty} \frac{j_{k,n+1}}{j_{k,n}} = x_1$$

şeklindedir (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 5.5. k -Jacobsthal sayı dizisinde

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_{k,n} x^n = j_{k,0} + j_{k,1} x + j_{k,2} x^2 + ... + j_{k,n} x^n + ...$$

için

$$J_{k,n} = \sum_{i=0}^{\infty} j_{k,i} x^i = \frac{x}{1 - x - kx^2}$$ şeklindedir (Köken F.,Bozkurt D., 2008).

Teorem 5.6. $n \in Z^+$ için

$$\sum_{i=0}^{n} j_{k,i} = \frac{1}{k}\left(j_{k,n+2} - 1\right).$$

$$\sum_{i=0}^{n} j_{k,2i} = \frac{1}{k(k-2)}\left(k^2 j_{k,2n} - j_{k,2n+2} + 1\right).$$

$$\sum_{i=0}^{n} j_{k,2i+1} = \frac{1}{k(k-2)}\left(k^2 j_{k,2n+1} - j_{k,2n+3} + 1 - k\right).$$

toplam formülleri sağlanır (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Tanım 5.2. (k-Jacobsthal Lucas Dizisi) Her $k > 0$ reel sayısı için başlangıç şartları $c_{k,0} = 2$ ve $c_{k,1} = 1$ olmak üzere $c_{k,n+2} = c_{k,n+1} + kc_{k,n}$ $n \geq 0$ rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{c_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisine denir. Dizinin her bir elemanına da k-Jacobsthal Lucas sayısı denir. $k = 1$ alınırsa Lucas dizisi $k = 2$ alınırsa Jacobsthal Lucas dizisi elde edilir (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 5.7. k-Jacobsthal Lucas sayıları için Binet benzeri formül

$$c_{k,n} = x_1^n + x_2^n$$

şeklindedir (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Sonuç 5.1. k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayıları arasındaki bağıntıyı

$$c_{k,n} = j_{k,n} + 2kj_{k,n-1}$$

şeklinde verebiliriz (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 5.8. $\lfloor x \rfloor$ tam değer fonksiyonu olmak üzere $n \geq 0$ tamsayısı için

$$c_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i} (1+4k)^i$$

şeklindedir (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 5.9. $n \geq 1$ sayısı için

$$c_{k,n+1}c_{k,n-1} - c_{k,n}^2 = (1+4k)(-k)^{n-1} \qquad \text{(Simpson benzeri eşitlik)}$$

$$c_{k,n+r}c_{k,n-r} - c_{k,n}^2 = (1+4k)(-k)^{n-r} j_{k,r}^2 \qquad \text{(Catalan benzeri eşitlik)}$$

$$c_{k,m}c_{k,n+1} - c_{k,m+1}c_{k,n} = (1+4k)(-1)^{n+1} j_{k,m-n} \qquad \text{(d'Ocagne benzeri eşitlik)}$$

eşitlikleri sağlanır (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 5.10. k -Jacobsthal dizisinin genelleştirilmiş fonksiyonu

$$c_{k,0} + c_{k,1}x + c_{k,2}x^2 + ... + c_{k,n}x^n + ... = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i}x^i = \frac{2-x}{1-x-kx^2}$$

şeklindedir (Köken F., Bozkurt D., 2008).

Teorem 5.11. $n \in Z^+$ için

a) $\sum_{i=0}^{n} c_{k,i} = \frac{1}{k}\left(c_{k,n+2} - 1\right).$

b) $\sum_{i=0}^{n} c_{k,2i} = \frac{1}{k(k-2)}\left(k^2 j_{k,2n} - j_{k,2n+2} + 1 - 2k\right).$

c) $\sum_{i=0}^{n} c_{k,2i+1} = \frac{1}{k(k-2)}\left(k^2 j_{k,2n+1} - j_{k,2n+3} + 1 + k\right).$

toplam formülleri sağlanır (Köken F., Bozkurt D., 2008).

6. JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS MATRİS DİZİLERİ

6.1. (s,t) Jacobsthal ve (s,t) Jacobsthal Lucas Sayı Dizileri

Tanım 6.1.1. $s^2+8t>0$ olacak şekildeki $s>0$ ve sıfırdan farklı t tamsayıları için $\Im_0=0,\ \Im_1=1$ olmak üzere

$$\Im_{n+1}(s,t)=s\Im_n(s,t)+2t\Im_{n-1}(s,t),\qquad n\geq 1 \tag{6.1}$$

ile tanımlanan $\{\Im_n(s,t)\}_{n\in N}$ sayı dizisine (s,t) Jacobsthal sayı dizisi denir. $\boldsymbol{s=t=1}$ alınırsa Jacobsthal sayı dizisi elde edilir.

Tanım 6.1.2. $s^2+8t>0$ olacak şekildeki $\boldsymbol{s}>0$ ve sıfırdan farklı t tamsayıları için $\varsigma_0=2$ ve $\varsigma_1=\boldsymbol{s}$ olmak üzere

$$\varsigma_{n+1}(s,t)=s\varsigma_n(s,t)+2t\varsigma_{n-1}(s,t),\qquad n\geq 1 \tag{6.2}$$

ile tanımlanan $\{\varsigma_n(s,t)\}_{n\in N}$ sayı dizisine (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizisi denir. $\boldsymbol{s=t=1}$ alınırsa Jacobsthal Lucas sayı dizisi elde edilir.

Teorem 6.1.1. $n\geq 0$ tamsayısı için

$$\varsigma_n=s\Im_n+4t\Im_{n-1} \tag{6.3}$$

elde edilir.

İspat: $n=1$ tamsayısı için $\varsigma_1=s\Im_1+4t\Im_0=s.1+4t.0=s$ istenen sağlanır. $N\leq n$ için doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned}\varsigma_{n+1}&=s\varsigma_n+2t\varsigma_{n-1}=s(s\Im_n+4t\Im_{n-1})+2t(s\Im_{n-1}+4t\Im_{n-2})\\&=s(s\Im_n+2t\Im_{n-1})+4t(s\Im_{n-1}+2t\Im_{n-2})=s\Im_{n+1}+4t\Im_n\end{aligned}$$

(s,t) Jacobsthal ve (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizilerinden yola çıkarak Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri tanımlanacak ve bu matris dizileri için elde edilen özellikler gösterilecektir.

6.2. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Matris Dizileri

Bu bölümde Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları j_n, c_n sembolleriyle, (s,t) Jacobsthal ve (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizileri $\Im_n, \varsigma_n$ sembolleriyle, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri J_n, C_n sembolleriyle gösterilecektir.

Bu çalışmada Civciv H. (2009) "Fibonacci ve Lucas matris dizileri ve özellikleri" isimli doktora tezinden ve Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizileri ile ilgili bir çok literatür bilgisinden faydalanılmıştır.

Tanım 6.2.1. $s^2+8t>0$ olacak şekildeki $s>0$ ve sıfırdan farklı t tamsayıları için

$$J_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ ve } J_1=\begin{bmatrix}s & 2\\ t & 0\end{bmatrix} \tag{6.4}$$

olmak üzere

$$J_{n+1}(s,t)=sJ_n(s,t)+2tJ_{n-1}(s,t), \qquad n\geq 1 \tag{6.5}$$

ile tanımlanan $\{J_n(s,t)\}_{n\in N}$ matris dizisine (s,t) Jacobsthal matris dizisi veya kısaca Jacobsthal matris dizisi denir ve n. Jacobsthal matrisi J_n ile gösterilir.

Aşağıda verilen teorem Jacobsthal matris dizileri ile (s,t) Jacobsthal sayı dizileri arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 6.2.1. $n\geq 0$ tamsayısı için,

$$J_n=\begin{bmatrix}\Im_{n+1} & 2\Im_n\\ t\Im_n & 2t\,\Im_{n-1}\end{bmatrix} \tag{6.6}$$

olur.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır. $\mathfrak{I}_{-1}=1,/2t \quad \mathfrak{I}_0=0, \quad \mathfrak{I}_1=1$ ve $J_0=I_2$ olduğundan

$n=0$ için doğrudur: $$J_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2t\dfrac{1}{2t}\end{bmatrix}$$

$n=1$ için doğrudur: $$J_1=\begin{bmatrix}s & 2\\ t & 0\end{bmatrix}$$

Şimdi $1\le N\le n$ olacak şekildeki N tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $n+1$ için

$$J_{n+1}(s,t)=sJ_n(s,t)+2tJ_{n-1}(s,t)$$

$$\begin{bmatrix}\mathfrak{I}_{n+2} & 2\mathfrak{I}_{n+1}\\ t\mathfrak{I}_{n+1} & 2t\mathfrak{I}_n\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}\mathfrak{I}_{n+1} & 2\mathfrak{I}_n\\ t\mathfrak{I}_n & 2t\mathfrak{I}_{n-1}\end{bmatrix}+2t\begin{bmatrix}\mathfrak{I}_n & 2\mathfrak{I}_{n-1}\\ t\mathfrak{I}_{n-1} & 2t\mathfrak{I}_{n-2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}s\mathfrak{I}_{n+1}+2t\mathfrak{I}_n & 2(s\mathfrak{I}_n+2t\mathfrak{I}_{n-1})\\ t(s\mathfrak{I}_n+2t\mathfrak{I}_{n-1}) & 2t(s\mathfrak{I}_{n-1}+2t\mathfrak{I}_{n-2})\end{bmatrix}$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 6.2.2. $n\ge 0$ tamsayısı için,

$$J_n=J_1^n \tag{6.7}$$

sağlanır. Bu teorem, Jacobsthal matris dizisinin n-inci teriminin, birinci teriminin n-inci kuvvetine eşit olduğunu göstermektedir.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır. $n=1$ için doğruluğu aşikardır. Şimdi $1\le n\le N$ olacak şekildeki n tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $n+1$ için

$$J_1^{n+1}=J_1^nJ_1=\begin{bmatrix}\mathfrak{I}_{n+1} & 2\mathfrak{I}_n\\ t\mathfrak{I}_n & 2t\mathfrak{I}_{n-1}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}s & 2\\ t & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s\mathfrak{I}_{n+1}+2t\mathfrak{I}_n & 2\mathfrak{I}_{n+1}\\ t(s\mathfrak{I}_n+2t\mathfrak{I}_{n-1}) & 2t\mathfrak{I}_n\end{bmatrix}=J_{n+1}$$

Teorem 6.2.3. $n \geq 0$ tamsayısı için n . Jacobsthal matrisinin determinantı

$$\det J_n = (-2t)^n$$

olur.

İspat: $J_1 = \begin{bmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{bmatrix}$ ise $\det J_1 = -2t$ olur. $J_n = J_1^n$ özelliğinden

$$\det J_n = \det(J_1^n) = (\det J_1)^n = (-2t)^n$$

Aşağıdaki teorem, Jacobsthal matris dizisinin $m+n$ -inci teriminin m -inci terimle n -inci terimin çarpımına eşit olduğunu göstermektedir.

Teorem 6.2.4. $m,n \geq 0$ tamsayıları için $J_{m+n} = J_m J_n$ eşitliği geçerlidir.

İspat: İspat n üzerinden tümevarımla yapılacaktır. $J_0 = I_2$ olduğundan $n = 0$ için iddia doğrudur.
Şimdi $1 \leq n \leq N$ olacak şekildeki n tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $N+1$ için

$$\begin{aligned} J_{m+N+1} &= sJ_{m+N} + 2tJ_{m+N-1} \\ &= sJ_m J_N + 2tJ_m J_{N-1} \\ &= J_m(sJ_N + 2tJ_{N-1}) \\ &= J_m J_{N+1} \end{aligned}$$

$m,n \geq 0$ için teorem ispatlanmış olur.

Teorem 6.2.5. $m,n \geq 0$ tamsayı olmak üzere (s,t) Jacobsthal sayı dizileri için matris dizileri kullanılarak

$$\begin{aligned} \Im_{m+n+1} &= \Im_{m+1}\Im_{n+1} + 2t\Im_m\Im_n \\ \Im_{m+n} &= \Im_{m+1}\Im_n + 2t\Im_m\Im_{n-1} \\ \Im_{m+n} &= \Im_m\Im_{n+1} + 2t\Im_{m-1}\Im_n \end{aligned}$$

$$\Im_{m+n-1} = \Im_m \Im_n + 2t\Im_{m-1}\Im_{n-1}$$

eşitlikleri gösterilebilir.

İspat: Teorem 6.2.4 kullanılarak

$$J_{m+n} = \begin{bmatrix} \Im_{m+n+1} & 2\Im_{m+n} \\ t\Im_{m+n} & 2t\Im_{m+n-1} \end{bmatrix} = J_m J_n = \begin{bmatrix} \Im_{m+1} & 2\Im_m \\ t\Im_m & 2t\Im_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Im_{n+1} & 2\Im_n \\ t\Im_n & 2t\Im_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \Im_{m+1}\Im_{n+1} + 2t\Im_m\Im_n & 2(\Im_{m+1}\Im_n + 2t\Im_m\Im_{n-1} \\ t(\Im_m\Im_{n+1} + 2t\Im_{m-1}\Im_n & 2t(\Im_m\Im_n + 2t\Im_{m-1}\Im_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Matris eşitliğinden istenen hemen görülür.

Tanım 6.2.2. $s^2 + 8t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve sıfırdan farklı t tamsayıları için

$$C_0 = \begin{bmatrix} s & 4 \\ 2t & -s \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad C_1 = \begin{bmatrix} s^2 + 4t & 2s \\ st & 4t \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

olmak üzere

$$C_{n+1}(s,t) = sC_n(s,t) + 2tC_{n-1}(s,t), \qquad n \geq 1 \tag{6.9}$$

ile tanımlanan $\{C_n(s,t)\}_{n\in N}$ matris dizisine (s,t) Jacobsthal Lucas matris dizisi veya kısaca Jacobsthal Lucas matris dizisi denir ve n. Jacobsthal Lucas matrisi C_n ile gösterilir.

Aşağıda verilen teorem Jacobsthal Lucas matris dizileri ile (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizileri arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 6.2.6. $n \geq 0$ tamsayısı için,

$$C_n = \begin{bmatrix} \varsigma_{n+1} & 2\varsigma_n \\ t\varsigma_n & 2t\varsigma_{n-1} \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

olur.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır. $\varsigma_{-1} = -s/2t \quad \varsigma_0 = 2, \quad \varsigma_1 = 1$

$n = 0$ için doğrudur: $C_0 = \begin{bmatrix} s & 2.2 \\ 2t & 2t\dfrac{-s}{2t} \end{bmatrix}$

$n = 1$ için doğrudur: $C_1 = \begin{bmatrix} s^2 + 4t & 2.s \\ t.s & 2t.2 \end{bmatrix}$

Şimdi $1 \le N \le n$ olacak şekildeki N tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $n+1$ için

$$C_{n+1}(s,t) = sC_n(s,t) + 2tC_{n-1}(s,t)$$

$$\begin{bmatrix} \varsigma_{n+2} & 2\varsigma_{n+1} \\ t\varsigma_{n+1} & 2t\varsigma_n \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} \varsigma_{n+1} & 2\varsigma_n \\ t\varsigma_n & 2t\varsigma_{n-1} \end{bmatrix} + 2t\begin{bmatrix} \varsigma_n & 2\varsigma_{n-1} \\ t\varsigma_{n-1} & 2t\varsigma_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s\varsigma_{n+1} + 2t\varsigma_n & 2(s\varsigma_n + 2t\varsigma_{n-1}) \\ t(s\varsigma_n + 2t\varsigma_{n-1}) & 2t(s\varsigma_{n-1} + 2t\varsigma_{n-2}) \end{bmatrix}$$

$n \ge 0$ için teorem ispatlanmış olur.

Teorem 6.2.7. $n \ge 0$ tamsayısı için (s,t) Jacobsthal ve (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizileri arasında yine Jacobsthal matris dizileri yardımıyla bulunan sonuçlar kullanılarak

$$2\Im_{m+n} = \Im_n \varsigma_m + \Im_m \varsigma_n$$

bağıntısı elde edilir.

İspat: Teorem 6.2.5 kullanılarak

$$\Im_{m+n} = \Im_{m+1}\Im_n + 2t\Im_m\Im_{n-1}$$
$$\Im_{m+n} = \Im_m\Im_{n+1} + 2t\Im_{m-1}\Im_n$$

yazılabilir. İfadeler taraf tarafa toplanırsa istenen elde edilir.

$$\begin{aligned} 2\Im_{m+n} &= \Im_n(\Im_{m+1} + 2t\Im_{m-1}) + \Im_m(\Im_{n+1} + 2t\Im_{n-1}) \\ &= \Im_n(s\Im_m + 4t\Im_{m-1}) + \Im_m(s\Im_n + 4t\Im_{n-1}) \\ &= \Im_n\varsigma_m + \Im_m\varsigma_n \end{aligned}$$

Teorem 6.2.8. $n \geq 0$ tamsayısı için (s,t) Jacobsthal ve (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizileri arasında

$$\varsigma_{m+n+1} = \Im_{m+1}\varsigma_{n+1} + 2t\Im_m\varsigma_n$$

eşitliği vardır.

İspat: Teorem 6.2.5 kullanılarak bulunan sonuçlar

$$s\Im_{m+n+1} = s\Im_{m+1}\Im_{n+1} + 2ts\Im_m\Im_n$$
$$4t\Im_{m+n} = 4t\Im_{m+1}\Im_n + 4t2t\Im_m\Im_{n-1}$$

taraf tarafa toplanırsa istenen elde edilir.

$$\varsigma_{m+n+1} = \Im_{m+1}\varsigma_{n+1} + 2t\Im_m\varsigma_n$$

Aşağıdaki teorem Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizilerinin terimleri arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 6.2.9. $n \in N$ için Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizisinin elemanları arasında

$$C_{n+1} = C_1 J_n$$

özelliği mevcuttur.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır. $J_0 = I_2$ olduğundan $n = 0$ için teorem doğrudur.

$n=1$ için teorem doğrudur:

$$C_2 = C_1 J_1 = \begin{bmatrix} s^2+4t & 2s \\ st & 4t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^3+6st & 2s^2+8t \\ s^2t+4t^2 & 2st \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varsigma_3 & 2\varsigma_2 \\ t\varsigma_2 & 2t\varsigma_1 \end{bmatrix}$$

Şimdi $1 \le n \le N$ olacak şekildeki n tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $N+1$ için

$$C_1 J_{N+1} = C_1 J_N J_1 = C_{N+1} J_1$$

$$C_1 J_{N+1} = \begin{bmatrix} \varsigma_{N+2} & 2\varsigma_{N+1} \\ t\varsigma_{N+1} & 2t\varsigma_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{bmatrix} = C_{N+2}$$

$n \ge 0$ için teorem ispatlanmış olur.

Teorem 6.2.10. $n \ge 0$ tamsayısı için, n. Jacobsthal Lucas matris dizisinin elemanının determinantı

$$\det C_{n+1} = (2s^2t + 16t^2)(-2t)^n$$

olur.

İspat: $C_1 = \begin{bmatrix} s^2+4t & 2s \\ st & 4t \end{bmatrix}$ ise $\det C_1 = 2s^2t + 16t^2$ olur. $J_n = J_1^n$ özelliğinden

$$\det C_{n+1} = \det(C_1 J_n) = \det(C_1 J_1^n) = \det(C_1)(\det J_1)^n = (2s^2t + 16t^2)(-2t)^n$$

istenen elde edilir.

Teorem 6.2.11. $n \ge 0$ tamsayısı için tıpkı sayı dizilerinde olduğu gibi Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizilerinde de

$$C_{n+1} = sJ_{n+1} + 4tJ_n$$

özelliği sağlanır.

İspat: $n=0$ için teorem doğrudur.

$$C_1 = sJ_1 + 4tJ_0 = \begin{bmatrix} s^2+4t & 2.s \\ t.s & 2t.2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{bmatrix} + 4t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi $1 \le N \le n$ olacak şekildeki N tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $n+1$ için

$$C_{n+1} = C_1 J_n = (sJ_1 + 4tJ_0)J_n = sJ_{n+1} + 4tJ_n$$

Teorem 6.2.12. $m,n \ge 0$ tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizilerinin elemanları arasında

$$J_m C_{n+1} = C_{n+1} J_m$$

değişme özelliği geçerlidir.

İspat: $m,n \ge 0$ tamsayıları için,

$$\begin{aligned} J_m C_{n+1} &= J_m C_1 J_n \\ &= J_m (sJ_1 + 4tJ_0) J_n \\ &= sJ_{n+m+1} + 4tJ_{n+m} \\ &= (sJ_1 + 4tJ_0) J_{n+m} \\ &= C_1 J_n J_m \\ &= C_{n+1} J_m \end{aligned}$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 6.2.13. $n \in N$ için Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri arasında

$$J_n = C_{n+2} C_2^{-1}$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır. $J_0 = I_2$ olduğundan $n = 0$ için teorem doğrudur.

$n = 1$ için teorem doğrudur:

$$J_1 = C_3 C_2^{-1} = C_1 J_2 (C_1 J_1)^{-1} = C_1 J_1 J_1 J_1^{-1} C_1^{-1}$$

Şimdi $1 \le n \le N$ olacak şekildeki n tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $N+1$için

$$\boldsymbol{C_{N+3} C_2^{-1} = C_1 J_{N+2} C_2^{-1} = C_1 J_{N+2} J_1^{-1} C_1^{-1} = J_{N+2} J_1^{-1} = J_{N+1} J_1 J_1^{-1} = J_{N+1}}$$

$n \ge 0$ için teorem ispatlanmış olur.

Teorem 6.2.14. $n \in N$ için Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri arasında

a) $2J_{n+1} = sJ_n + C_n$

b) $2tC_{2n+1} = J_{n+1} C_{n+2} - sJ_{n+2} C_n$

eşitliği sağlanır.

İspat:

a) $C_{n+1} = sJ_{n+1} + 4tJ_n$ ve $J_{n+1}(s,t) = sJ_n(s,t) + 2tJ_{n-1}(s,t)$ özellikleri kullanılarak istenen hemen görülür.

b)

$$\begin{aligned} J_{n+1} C_1 J_{n+1} - sJ_{n+2} J_{n-1} C_1 &= C_1 \left(J_{n+1} J_{n+1} - sJ_{n+2} J_{n-1} \right) \\ &= C_1 (J_{2n+2} - sJ_{2n+1}) = C_1 2tJ_{2n} = 2tC_{2n+1} \end{aligned}$$

Teorem 6.2.15. $n \in N$ için Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizilerinin elemanları arasında

$$C_{n+1}^2 = C_1^2 J_{2n}$$
$$C_{n+1}^2 = C_1 C_{2n+1}$$
$$C_{2n+1} = J_n C_{n+1}$$

eşitlikleri mevcuttur.

İspat: Teorem 6.2.4 ve Teorem 6.2.9 kullanılarak

$$C_{n+1}^2 = C_{n+1}C_{n+1} = C_1 J_n C_1 J_n = C_1 C_1 J_n J_n = C_1^2 J_{2n}$$
$$C_{n+1}^2 = C_1^2 J_{2n} = C_1 C_1 J_{2n} = C_1 C_{2n+1}$$
$$C_{2n+1} = C_1 J_{2n} = C_1 J_n J_n = J_n C_1 J_n = J_n C_{n+1}$$

istenen özdeşlikler sağlanmış olur.

Sonuç 6.2.1. Teorem 6.2.15 kullanılarak aşağıdaki özellikler elde edilir:

a) $\varsigma_{n+2}^2 + 2t\varsigma_{n+1}^2 = (s^2 + 8t)\Im_{2n+3}$

b) $\varsigma_{n+2}^2 + 2t\varsigma_{n+1}^2 = s\varsigma_{2n+4} + 2t\varsigma_{2n+2}$

c) $\varsigma_{2n} = \Im_n \varsigma_{n+1} + 2t\varsigma_n \Im_{n-1}$

İspat:

a) $C_{n+1}^2 = C_1^2 J_{2n}$ özelliği kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \varsigma_{n+2} & 2\varsigma_{n+1} \\ t\varsigma_{n+1} & 2t\varsigma_n \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} s^2 + 4t & 2s \\ st & 4t \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \Im_{2n+1} & 2\Im_{2n} \\ t\Im_{2n} & 2t\Im_{2n-1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matrislerin (1,1) elemanlarının eşitliğinden

$$\varsigma_{n+2}^2 + 2t\varsigma_{n+1}^2 = (s^4 + 10s^2t + 16t^2)\Im_{2n+1} + t(2s^3 + 16st)\Im_{2n}$$

$$
\begin{aligned}
&= s^3(s\Im_{2n+1} + 2t\Im_{2n}) + 8st(s\Im_{2n+1} + 2t\Im_{2n}) + 2s^2t\Im_{2n+1} + 16t^2\Im_{2n+1} \\
&= s^3\Im_{2n+2} + 8st\Im_{2n+2} + 2s^2t\Im_{2n+1} + 16t^2\Im_{2n+1} \\
&= s^2(s\Im_{2n+2} + 2t\Im_{2n+1}) + 8t(s\Im_{2n+2} + 2t\Im_{2n+1}) \\
&= (s^2 + 8t)\Im_{2n+3}
\end{aligned}
$$

istenen sonuç elde edilir.

b) $C_{n+1}^2 = C_1 C_{2n+1}$ özelliği kullanılarak

$$
\begin{bmatrix} \varsigma_{n+2} & 2\varsigma_{n+1} \\ t\varsigma_{n+1} & 2t\varsigma_n \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} s^2 + 4t & 2s \\ st & 4t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varsigma_{2n+2} & 2\varsigma_{2n+1} \\ t\varsigma_{2n+1} & 2t\varsigma_{2n} \end{bmatrix}
$$

elde edilir. Matrislerin (1,1) elemanlarının eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
\varsigma_{n+2}^2 + 2t\varsigma_{n+1}^2 &= s(s\varsigma_{2n+2} + 2t\varsigma_{2n+1}) + 4t\varsigma_{2n+2} \\
&= s\varsigma_{2n+3} + 2t\varsigma_{2n+2} + 2t\varsigma_{2n+2} \\
&= s\varsigma_{2n+4} + 2t\varsigma_{2n+2}
\end{aligned}
$$

istenen sonuç elde edilir.

c) $C_{2n+1} = J_n C_{n+1}$ özelliği kullanılarak

$$
\begin{bmatrix} \varsigma_{2n+2} & 2\varsigma_{2n+1} \\ t\varsigma_{2n+1} & 2t\varsigma_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Im_{n+1} & 2\Im_n \\ t\Im_n & 2t\Im_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varsigma_{n+2} & 2\varsigma_{n+1} \\ t\varsigma_{n+1} & 2t\varsigma_n \end{bmatrix}
$$

elde edilir. Matrislerin (2,2) elemanlarının eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
2t\varsigma_{2n} &= 2t(\Im_n\varsigma_{n+1} + 2t\varsigma_n\Im_{n-1}) \\
\varsigma_{2n} &= \Im_n\varsigma_{n+1} + 2t\varsigma_n\Im_{n-1}
\end{aligned}
$$

istenen sonuç elde edilir.

Teorem 6.2.16. $n \geq 0$ tamsayısı için, Jacobsthal matris dizisinin n. elemanı

$$J_n = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & 2\dfrac{\alpha^{n} - \beta^{n}}{\alpha - \beta} \\ t\dfrac{\alpha^{n} - \beta^{n}}{\alpha - \beta} & 2t\dfrac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

İspat:

$J_0 = I_2$ olduğundan $n = 0$ için iddia doğrudur. $J_1 = \begin{bmatrix} \Im_2 & 2\Im_1 \\ t\Im_1 & 2t\Im_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerleri $\alpha = \dfrac{s + \sqrt{s^2 + 8t}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{s - \sqrt{s^2 + 8t}}{2}$ olup α öz değerine karşılık gelen öz vektör $u_\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{t} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve β öz değerine karşılık gelen öz vektör $u_\beta = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta}{t} \\ 1 \end{pmatrix}$ olur. J_1 matrisinin spektral ayrışımı:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{t} & \dfrac{\beta}{t} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{t} & \dfrac{\beta}{t} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{t}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{t} & \dfrac{\beta}{t} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\beta}{t} \\ -1 & -\dfrac{\alpha}{t} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$J_1^n = J_1 J_1 \ldots . J_1 = J_n = \left(\begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{t} & \dfrac{\beta}{t} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{t} & \dfrac{\beta}{t} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right)^n$$

$$= \frac{t}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{t} & \frac{\beta}{t} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{t} \\ -1 & -\frac{\alpha}{t} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{t}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{t} & \frac{\beta}{t} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{t} \\ -1 & -\frac{\alpha}{t} \end{bmatrix}$$

Çarpımın sonucu (6.11) eşitliğini verir.

Aşağıdaki sonuç n-inci (s,t) Jacobsthal sayısının Binet formülüdür. n-inci Jacobsthal matrisi ile (s,t) Jacobsthal sayıları arasındaki bağıntıyı bu sonuçla tekrar etmiş oluyoruz.

Sonuç 6.2.2. $n \geq 0$ tamsayısı ve (s,t) Jacobsthal sayıları için Binet formülü

$$\Im_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir.

İspat: Matrisin (1,2) elemanının eşitliğinden istenen çıkar.

Sonuç 6.2.3. $n \geq 0$ tamsayısı ve (s,t) Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü

$$\varsigma_n = \alpha^n + \beta^n$$

olur.

İspat:

$$\varsigma_n = s\Im_n + 4t\Im_{n-1}$$

$$= s\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + 4t\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{s\alpha^n - s\beta^n + 4t\alpha^{n-1} - 4t\beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{(s+\frac{4t}{\alpha})\alpha^n - (s+\frac{4t}{\beta})\beta^n}{\alpha-\beta} = \frac{(\frac{\alpha s+4t}{\alpha})\alpha^n - (\frac{\beta s+4t}{\beta})\beta^n}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{(\frac{\alpha^2+2t}{\alpha})\alpha^n - (\frac{\beta^2+2t}{\beta})\beta^n}{\alpha-\beta} = \frac{(\frac{\alpha^2-\alpha\beta}{\alpha})\alpha^n - (\frac{\beta^2-\alpha\beta}{\beta})\beta^n}{\alpha-\beta} = \alpha^n + \beta^n$$

Aşağıdaki sonuç ile (s,t) Jacobsthal ve (s,t) Jacobsthal Lucas sayıları arasında bazı bağıntılar verilmektedir.

Sonuç 6.2.4. $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\Im_{n+1}^2 + (4+t^2)\Im_n^2 + 4t^2\Im_{n-1}^2 \geq \varsigma_{2n}$$

$$\varsigma_{n+2}^2 + (4+t^2)\varsigma_{n+1}^2 + 4t^2\varsigma_n^2 \geq s^2\varsigma_{2n+2} + 16t^2\varsigma_{2n} + 8st\varsigma_{2n+2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: J_1 matrisinin öz değerleri α ve β olduğundan J_n matrisinin öz değerleri α^n ve β^n olacaktır. Schur eşitsizliği gereği

$$\left\| \begin{matrix} \Im_{n+1} & 2\Im_n \\ t\Im_n & 2t\Im_{n-1} \end{matrix} \right\|_2^2 \geq \left\| \begin{matrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{matrix} \right\|$$

$$\Im_{n+1}^2 + (4+t^2)\Im_n^2 + 4t^2\Im_{n-1}^2 \geq \alpha^{2n} + \beta^{2n} = \varsigma_{2n}$$

elde edilir. Diğer özellik için

$$C_{n+1} = C_1 J_n = (sJ_1 + 4tJ_0)J_n$$

C_{n+1} matrisinin öz değerleri $s\alpha^{n+1} + 4t\alpha^n$ ve $s\beta^{n+1} + 4t\beta^n$ olur. Schur eşitsizliği gereği

$$\left\| \begin{matrix} \varsigma_{n+2} & 2\varsigma_{n+1} \\ t\varsigma_{n+1} & 2t\varsigma_n \end{matrix} \right\|_2^2 \geq \left\| \begin{matrix} s\alpha^{n+1} + 4t\alpha^n & 0 \\ 0 & s\beta^{n+1} + 4t\beta^n \end{matrix} \right\|_2$$

$$\varsigma_{n+2}^2 + (4+t^2)\varsigma_{n+1}^2 + 4t^2\varsigma_n^2 \geq s^2(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2}) + 8st(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}) + 16t^2(\alpha^{2n} + \beta^{2n})$$
$$= s^2\varsigma_{2n+2} + 8st\varsigma_{2n+1} + 16t^2\varsigma_{2n}$$

Böylece istenen elde edilmiş olur.

Teorem 6.2.17. $n \geq 0$ tamsayısı için $n.$ Jacobsthal matris elemanı

$$J_n = \left(\frac{J_1 - \beta J_0}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n - \left(\frac{J_1 - \alpha J_0}{\alpha - \beta}\right)\beta^n \tag{6.12}$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: Teorem 6.2.1. kullanılarak

$$J_n = \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\left(\begin{bmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\right) - \frac{\beta^n}{\alpha-\beta}\left(\begin{bmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{\alpha^n}{\alpha-\beta}\left(\begin{bmatrix} s-\beta & 2 \\ t & -\beta \end{bmatrix}\right) - \frac{\beta^n}{\alpha-\beta}\left(\begin{bmatrix} s-\alpha & 2 \\ t & -\alpha \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\begin{bmatrix} s(\alpha^n - \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) & 2(\alpha^n - \beta^n) \\ t(\alpha^n - \beta^n) & -\alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \Im_{n+1} & 2\Im_n \\ t\Im_n & 2t\Im_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sonuç 6.2.5. $n \geq 0$ tamsayısı için $n+1.$ Jacobsthal Lucas matris elemanı

$$C_{n+1} = \left(\frac{C_2 - \beta C_1}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n - \left(\frac{C_2 - \alpha C_1}{\alpha - \beta}\right)\beta^n \tag{6.13}$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat: Bir önceki teoremden ve $C_{n+1} = C_1 J_n$ eşitliğinden hemen görülür.

6.3. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Matris Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümde Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizilerinin üreteç fonksiyonları incelenmiştir.

Teorem 6.3.1. $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\sum_{k=0}^{n} J_k x^{-k} = -\frac{1}{x^n (x^2 - sx - 2t)}\left[xJ_{n+1} + 2tJ_n\right] + \frac{1}{x^2 - sx - 2t}\left[xJ_1 + (x^2 - sx)J_0\right] \qquad (6.14)$$

olur.

İspat: $\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ ve $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - sx - 2t$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{J_k}{x^k} = \left(\frac{J_1 - \beta J_0}{\alpha - \beta}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^k - \left(\frac{J_1 - \alpha J_0}{\alpha - \beta}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\beta}{x}\right)^k$$

$$= \left(\frac{J_1 - \beta J_0}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)}\right) - \left(\frac{J_1 - \alpha J_0}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\beta}{x}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{x^n}\left\{\left(\frac{J_1 - \beta J_0}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha}\right) - \left(\frac{J_1 - \alpha J_0}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{x^{n+1} - \beta^{n+1}}{x - \beta}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{x^n (x^2 - sx - 2t)}\left\{\left(\frac{J_1 - \beta J_0}{\alpha - \beta}\right)\left(x^{n+1} - \alpha^{n+1}\right)(x - \beta) - \left(\frac{J_1 - \alpha J_0}{\alpha - \beta}\right)\left(x^{n+1} - \beta^{n+1}\right)(x - \alpha)\right\}$$

$$= \frac{1}{x^n (x^2 - sx - 2t)}\left\{-x\left[\left(\frac{J_1 - \beta J_0}{\alpha - \beta}\right)\alpha^{n+1} - \left(\frac{J_1 - \alpha J_0}{\alpha - \beta}\right)\beta^{n+1}\right] + \alpha\beta\left[\left(\frac{J_1 - \beta J_0}{\alpha - \beta}\right)\alpha^{n} - \left(\frac{J_1 - \alpha J_0}{\alpha - \beta}\right)\beta^{n}\right]\right\}$$

$$+ \frac{x^{n+1}(\alpha - \beta)J_1 + x^{n+2}(\alpha - \beta)J_0 + (-\alpha^2 + \beta^2)x^{n+1}J_0}{x^n (\alpha - \beta)(x^2 - sx - 2t)}$$

$$= \frac{-1}{x^n (x^2 - sx - 2t)}\left[xJ_{n+1} + 2tJ_n\right] + \frac{1}{(x^2 - sx - 2t)}\left[xJ_1 + (x^2 - sx)J_0\right]$$

Sonuç 6.3.1. $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\sum_{k=0}^{n} C_{k+1}x^{-k} = -\frac{1}{x^n(x^2-sx-2t)}\left[xC_{n+2}+2tC_{n+1}\right]+\frac{1}{x^2-sx-2t}\left[xC_2+(x^2-sx)C_1\right]$$

İspat: $C_{n+1} = C_1J_n$ bağıntısından istenen elde edilir.

Aşağıdaki sonuç ile Jacobsthal matris dizisinin üreteç fonksiyonu verilmektedir.

Sonuç 6.3.2. $x \in R,\ x > \dfrac{s+\sqrt{s^2+8t}}{2}$ olacak şekilde sonsuz toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_k x^{-k} = \frac{1}{x^2-sx-2t}\left[xJ_1+(x^2-sx)J_0\right]$$

olur.

Sonuç 6.3.3. (s,t) Jacobsthal sayı dizisi için $x \in R,\ x > \dfrac{s+\sqrt{s^2+8t}}{2}$ olacak şekilde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Im_{k+1}x^{-k} = \frac{x^2}{x^2-sx-2t}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Im_k x^{-k} = \frac{x}{x^2-sx-2t}$$

sonsuz toplam formülleri geçerlidir.

Aşağıdaki sonuç ile Jacobsthal Lucas matris dizisinin üreteç fonksiyonu verilmektedir.

Sonuç 6.3.4. $x > \dfrac{s+\sqrt{s^2+8t}}{2}$ olacak şekildeki x reel sayısı için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}x^{-k} = -\frac{1}{x^2-sx-2t}\left[xC_2+(x^2-sx)C_1\right]$$

olur.

Sonuç 6.3.5. (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizisi için $x \in R,\ x > \dfrac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ olacak şekilde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varsigma_{k+1} x^{-k} = \frac{x(sx+4)}{x^2 - sx - 2t}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varsigma_{k} x^{-k} = \frac{2x(x-s)}{x^2 - sx - 2t}$$

sonsuz için toplam formülleri geçerlidir.

Aşağıdaki teorem ile Jacobsthal matris dizisinin terimlerinin r-inci kuvvetlerinden oluşan dizinin üreteç fonksiyonu verilmektedir.

Teorem 6.3.2. $X = \begin{pmatrix} \Im_1 - \beta\Im_0 \\ \alpha - \beta \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \Im_1 - \alpha\Im_0 \\ \alpha - \beta \end{pmatrix}$ olmak üzere r tek pozitif tamsayısı için

$$\sum_{i=0}^{\infty} J_i^r x^i = \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \left\{ (-1)^k \binom{r}{k} X^k Y^k \frac{X^{r-2k} - Y^{r-2k} + (-2t)^k (Y^{r-2k}\alpha^{r-2k} - X^{r-2k}\beta^{r-2k})x}{1 - (-2t)^k \varsigma_{r-2k} x - (-2t)^r x^2} \right\} \quad (6.15)$$

ve r çift pozitif tamsayısı için

$$\sum_{i=0}^{\infty} J_i^r x^i = \sum_{i=0}^{\frac{r}{2}-1} \left\{ (-1)^k \binom{r}{k} X^k Y^k \frac{X^{r-2k} + Y^{r-2k} - (-2t)^k (Y^{r-2k}\alpha^{r-2k} + X^{r-2k}\beta^{r-2k})x}{1 - (-2t)^k \varsigma_{r-2k} x - (-2t)^r x^2} \right\} + \binom{r}{r/2} Y^k \frac{X^{r/2}(-Y)^{r/2}}{1 - (-2t)^{r/2} x} \quad (6.16)$$

elde edilir.

İspat: $X=\left(\frac{J_1-\beta J_0}{\alpha-\beta}\right)$, $Y=\left(\frac{J_1-\alpha J_0}{\alpha-\beta}\right)$ olduğundan n-inci Jacobsthal matris dizisi $J_n=X\alpha^n-Y\beta^n$ şeklinde yazılır. $U(r,x)=\sum_{i=0}^{\infty}J_i^r x^i$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}U(r,x)&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(X\alpha^i-Y\beta^i\right)^r x^i\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(X\alpha^i\right)^k\left(-Y\beta^i\right)^{r-k}\right)x^i\\&=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(X)^k(-Y)^{r-k}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\alpha^k\beta^{r-k}x\right)^i\\&=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(X)^k(-Y)^{r-k}\frac{1}{1-\alpha^k\beta^{r-k}x}\end{aligned}\tag{6.17}$$

(6.17) formülünde r tek alınırsa,

$$\begin{aligned}U(r,x)&=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}\binom{r}{k}\left(\frac{(X)^k(-Y)^{r-k}}{1-\alpha^k\beta^{r-k}x}+\frac{(X)^{r-k}(-Y)^k}{1-\alpha^{r-k}\beta^k x}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\left(\frac{X^{r-k}Y^k}{1-\alpha^{r-k}\beta^k x}-\frac{X^kY^{r-k}}{1-\alpha^k\beta^{r-k}x}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\frac{X^{r-k}Y^k-X^kY^{r-k}+\left(X^kY^{r-k}\alpha^{r-k}\beta^k-X^{r-k}Y^k\alpha^k\beta^{r-k}\right)x}{1-(\alpha^k\beta^{r-k}+\alpha^{r-k}\beta^k)x+\alpha^r\beta^r x^2}\\&=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\frac{X^{r-k}Y^k-X^kY^{r-k}+(-2t)^k\left(X^kY^{r-k}\alpha^{r-2k}-X^{r-k}Y^k\alpha^k\beta^{r-2k}\right)x}{1-(-2t)^k(\beta^{r-2k}+\alpha^{r-2k})x^r-(-2t)^r x^2}\\&=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k X^kY^k\binom{r}{k}\frac{X^{r-2k}-Y^{r-2k}+(-2t)^k\left(Y^{r-2k}\alpha^{r-2k}-X^{r-2k}\beta^{r-2k}\right)x}{1-(-2t)^k\varsigma_{r-2k}x-(-2t)^r x^2}\end{aligned}$$

formülü elde edilir ki böylece (6.15) formülü ispatlanmış olur. (6.17) formülünde r çift alınırsa,

$$U(r,x)=\sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1}\binom{r}{k}\frac{(X)^k(-Y)^{r-k}}{1-\alpha^k\beta^{r-k}x}+\frac{(X)^{r-k}(-Y)^k}{1-\alpha^{r-k}\beta^k x}+\binom{r}{r/2}\frac{(X)^{r/2}(-Y)^{r/2}}{1-(-2t)^{r/2}x}$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\frac{X^{r-k}Y^k}{1-\alpha^{r-k}\beta^k x}+\frac{X^kY^{r-k}}{1-\alpha^k\beta^{r-k}x}+\binom{r}{r/2}\frac{(X)^{r/2}(-Y)^{r/2}}{1-(-2t)^{r/2}x}$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\frac{X^{r-k}Y^k+X^kY^{r-k}-\left(X^kY^{r-k}\alpha^{r-k}\beta^k+X^{r-k}Y^k\alpha^k\beta^{r-k}\right)x}{1-(\alpha^k\beta^{r-k}+\alpha^{r-k}\beta^k)x+\alpha^r\beta^r x^2}$$
$$+\binom{r}{r/2}\frac{(X)^{r/2}(-Y)^{r/2}}{1-(-2t)^{r/2}x}$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\frac{X^{r-k}Y^k+X^kY^{r-k}-(-2t)^k\left(X^kY^{r-k}\alpha^{r-2k}+X^{r-k}Y^k\alpha^k\beta^{r-2k}\right)x}{1-(-2t)^k(\beta^{r-2k}+\alpha^{r-2k})x+(-2t)^r x^2}$$
$$+\binom{r}{r/2}\frac{(X)^{r/2}(-Y)^{r/2}}{1-(-2t)^{r/2}x}$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k X^kY^k\binom{r}{k}\frac{X^{r-2k}+Y^{r-2k}-(-2t)^k\left(Y^{r-2k}\alpha^{r-2k}+X^{r-2k}\beta^{r-2k}\right)x}{1-(-2t)^k C_{r-2k}x+(-2t)^r x^2}$$
$$+\binom{r}{r/2}\frac{(X)^{r/2}(-Y)^{r/2}}{1-(-2t)^{r/2}x}$$

formülünün bulunmasıyla (6.16) formülü ispat edilmiş olur.

6.4. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Matris Dizilerinin Kısmi Toplamları

Bu bölümde Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matrislerini içeren kısmi toplamlar için formüller gösterilecektir.

Teorem 6.4.1. $s+2t\neq 1$ için, Jacobsthal matris dizisinde kısmi toplam

$$\sum_{k=1}^{n}J_k=\frac{1}{s+2t-1}\begin{bmatrix}\Im_{n+2}-s+2t\Im_{n+1}-2t & 2\Im_{n+1}+4t\Im_n-2\\ t\Im_{n+1}-t+2t^2\Im_n & 2t\Im_n+4t^2\Im_{n-1}-2t\end{bmatrix} \tag{6.18}$$

eşitliği ile sağlanır.

İspat: $s+2t\neq 1$ olmak şartıyla $S_n=\sum_{k=1}^{n}J_k$ olsun. Eşitliğin iki tarafını da J_1 ile çarparsak:

$$S_nJ_1=J_2+J_3+\ldots+J_{n+1} \tag{6.19}$$

elde edilir ve (6.19) eşitliği, S_n eşitliğinden çıkartılırsa:

$$S_n(J_1-J_0)=J_{n+1}-J_1$$

elde edilir. $\det(J_1-J_0)=1-s-2t\neq 0$ olduğundan J_1-J_0 matrisinin tersi vardır ve

$$S_n=(J_{n+1}-J_1)(J_1-J_0)^{-1} \tag{6.20}$$

olur.

$$J_{n+1}-J_1=\begin{bmatrix}\Im_{n+2}-s & 2\Im_{n+1}-2\\ t\Im_{n+1}-t & 2t\Im_n\end{bmatrix}$$

ve

$$J_1-J_0=\begin{bmatrix}s-1 & 2\\ t & -1\end{bmatrix} \text{ ise } \qquad (J_1-J_0)^{-1}=\frac{1}{s+2t-1}\begin{bmatrix}1 & 2\\ t & 1-s\end{bmatrix}$$

(6.20) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}S_n=(J_{n+1}-J_1)(J_1-J_0)^{-1}&=\frac{1}{s+2t-1}\begin{bmatrix}1 & 2\\ t & 1-s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Im_{n+2}-s & 2\Im_{n+1}-2\\ t\Im_{n+1}-t & 2t\Im_n\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{s+2t-1}\begin{bmatrix}\Im_{n+2}-s+2t\Im_{n+1}-2t & 2\Im_{n+1}+4t\Im_n-2\\ t\Im_{n+1}-t+2t^2\Im_n & 2t\Im_n+4t^2\Im_{n-1}-2t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da (6.18) eşitliğini verir.

Sonuç 6.4.1. $s+2t\neq 1$ ve (s,t) Jacobsthal sayı dizileri için

$$\sum_{k=1}^{n}\Im_{k+1}=\frac{\Im_{n+2}-s+2t\Im_{n+1}-2t}{s+2t-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\Im_{k}=\frac{\Im_{n+1}+2t\Im_{n}-1}{s+2t-1}$$

İspat: Teorem 6.4.1'de matris elemanlarının eşitliğinden çıkar.

Teorem 6.4.2. $s+2t\neq 1$ için, Jacobsthal Lucas matris dizisinde kısmi toplam $\sum_{k=1}^{n}C_{k+1}=(a_{ij})$ olmak üzere

$$a_{11}=\frac{1}{s+2t-1}\left(\Im_{n+4}+2t\Im_{n+3}+2t\Im_{n+2}+4t^{2}\Im_{n+1}-s^{2}(s+2t)-2t(3s+4t)\right)$$

$$a_{12}=\frac{2}{s+2t-1}\left(2\Im_{n+3}+2t\Im_{n+1}+2t\Im_{n+2}+4t^{2}\Im_{n}-s^{2}-4t-2st\right)$$

$$a_{21}=\frac{t}{s+2t-1}\left(\Im_{n+3}+2t\Im_{n+1}+2t\Im_{n+2}+4t^{2}\Im_{n}-2st-s^{2}-4t\right)$$

$$a_{22}=\frac{2t}{s+2t-1}\left(\Im_{n+2}+2t\Im_{n+1}+2t\Im_{n}+4t^{2}\Im_{n-1}-s-4t\right)$$

şeklindedir.

İspat: $C_1=\begin{bmatrix}s^{2}+4t & 2s\\ st & 4t\end{bmatrix}$ olup (6.18) formülünden

$$\sum_{k=1}^{n}C_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}C_1J_k=C_1\sum_{k=1}^{n}J_k=\frac{1}{s+2t-1}\begin{bmatrix}s^{2}+4t & 2s\\ st & 4t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Im_{n+2}-s+2t\Im_{n+1}-2t & 2(\Im_{n+1}+2t\Im_{n}-1)\\ t(\Im_{n+1}-1+2t\Im_{n}) & 2t(\Im_{n}+2t\Im_{n-1}-1)\end{bmatrix}$$

matris çarpımından

$$a_{11}=\frac{1}{s+2t-1}\left(s^2\Im_{n+2}+4t\Im_{n+2}+2s^2t\Im_{n+1}+8t^2\Im_{n+1}+2st\Im_{n+1}+4st^2\Im_n-s^3-6st-2s^2t-8t^2\right)$$
$$=\frac{1}{s+2t-1}\left(s(s\Im_{n+2}+2t\Im_{n+1})+2ts(s\Im_{n+1}+2t\Im_n)+4t\Im_{n+2}+8t^2\Im_{n+1}-s^3-6st-2s^2t-8t^2\right)$$
$$=\frac{t}{s+2t-1}\left(s\Im_{n+3}+2st\Im_{n+2}+4t\Im_{n+2}+8t^2\Im_{n+1}-s^2(s+2t)-2t(3s+4t)\right)$$
$$=\frac{t}{s+2t-1}\left(\Im_{n+4}+2t\Im_{n+3}+2t\Im_{n+2}+4t^2\Im_{n+1}-s^2(s+2t)-2t(3s+4t)\right)$$

$$a_{12}=\frac{1}{s+2t-1}\left(2s^2\Im_{n+1}+8t\Im_{n+1}+4s^2t\Im_n+16t^2\Im_n+4st\Im_n+8st^2\Im_{n-1}-2s^2-8t-4st\right)$$
$$=\frac{1}{s+2t-1}\left(2s(s\Im_{n+1}+2t\Im_n)+4ts(s\Im_n+2t\Im_{n-1})+8t\Im_{n+1}+16t^2\Im_n-2s^2-8t-4st\right)$$
$$=\frac{1}{s+2t-1}\left(2s\Im_{n+2}+4st\Im_{n+1}+8t\Im_{n+1}+16t^2\Im_n-2s^2-8t-4st\right)$$
$$=\frac{2}{s+2t-1}\left(\Im_{n+3}+2t\Im_{n+2}+2t\Im_{n+1}+4t^2\Im_n-s^2-4t-2st\right)$$

$$a_{21}=\frac{1}{s+2t-1}\left(stj_{n+2}+2st^2j_{n+1}-2st^2-s^2t+4t^2j_{n+1}+8t^3j_n-4t^2\right)$$
$$=\frac{1}{s+2t-1}\left(t(sj_{n+2}+2tj_{n+1})+2t^2j_{n+1}+2t^2(sj_{n+1}+2tj_n)+4t^3j_n-2st^2-s^2t-4t^2\right)$$
$$=\frac{t}{s+2t-1}\left(\Im_{n+3}+2t\Im_{n+1}+2t\Im_{n+2}+4t^2\Im_n-2st-s^2-4t\right)$$

$$a_{22}=\frac{1}{s+2t-1}\left(2st\Im_{n+1}+4st^2\Im_n-2st+8t^2\Im_n+16t^3\Im_{n-1}-8t^2\right)$$
$$=\frac{1}{s+2t-1}\left(2t(s\Im_{n+1}+2t\Im_n)+4t^2\Im_n+4t^2(s\Im_n+2t\Im_{n-1})+8t^3\Im_{n-1}-2st-8t^2\right)$$
$$=\frac{2t}{s+2t-1}\left(\Im_{n+2}+2t\Im_{n+1}+2t\Im_n+4t^2\Im_{n-1}-s-4t\right)$$

Sonuç 6.4.2. $s+2t\neq 1$ ve (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizileri için

$$\sum_{k=1}^{n}\varsigma_{k+2}=\frac{1}{s+2t-1}\left(\Im_{n+4}+2t\Im_{n+3}+2t\Im_{n+2}+4t^2\Im_{n+1}-s^2(s+2t)-2t(3s+4t)\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\varsigma_{k+1}=\frac{1}{s+2t-1}\left(\Im_{n+3}+t(2\Im_{n+2}+2\Im_{n+1}+4t\Im_n)-s^2-4t-2st\right)$$

olur.

İspat: Teorem 6.4.2'de matris elemanlarının eşitliğinden hemen görülür.

Teorem 6.4.3. $s+2t\neq 1$ ve $s-2t\neq -1$ için $S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}J_{2k}=(a_{ij})$ çift indisli Jacobsthal matris dizilerinin kısmi toplam formülü

$$\boldsymbol{a}_{11}=\frac{1}{(\boldsymbol{s}+2\boldsymbol{t}-1)\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{t}+1)}\left(\Im_{2\boldsymbol{n}+3}-4\boldsymbol{t}^{2}\Im_{2\boldsymbol{n}+1}+4\boldsymbol{t}^{2}-\boldsymbol{s}^{2}-2\boldsymbol{t}\right)$$

$$\boldsymbol{a}_{12}=\frac{2}{(\boldsymbol{s}+2\boldsymbol{t}-1)\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{t}+1)}\left(\Im_{2\boldsymbol{n}+2}-4\boldsymbol{t}^{2}\Im_{2\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{s}\right)$$

$$\boldsymbol{a}_{21}=\frac{\boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{s}+2\boldsymbol{t}-1)\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{t}+1)}\left(\Im_{2\boldsymbol{n}+2}-4\boldsymbol{t}^{2}\Im_{2\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{s}\right)$$

$$\boldsymbol{a}_{22}=\frac{2\boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{s}+2\boldsymbol{t}-1)\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{t}+1)}\left((1-2\boldsymbol{t})\Im_{2\boldsymbol{n}+1}+2\boldsymbol{st}\Im_{2\boldsymbol{n}}-1+2\boldsymbol{t}\right)$$

ile gösterilir.

İspat: $s+2t\neq 1$ ve $s-2t\neq -1$ olmak şartıyla $S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}J_{2k}$ olsun. Eşitliğin iki tarafı da J_2 ile çarpılırsa

$$S_{2n}J_2=J_4+J_6+\ldots+J_{2n+2} \tag{6.21}$$

elde edilir. (6.21) eşitliği S_{2n} eşitliğinden çıkarılırsa

$$S_n(J_2-J_0)=J_{2n+2}-J_2$$

elde edilir. $s+2t\neq 1$ ve $s-2t\neq -1$ kabulü gereği

$$\det(J_2-J_0)=-(s-2t+1)(s+2t-1)\neq 0$$

olur. Böylece J_2-J_0 matrisinin tersi vardır ve

$$S_n=(J_{2n+2}-J_2)(J_2-J_0)^{-1}$$

olur.

$$J_{2n+2} - J_2 = \begin{bmatrix} \Im_{2n+3} - s^2 - 2t & 2\Im_{2n+2} - 2s \\ t\Im_{2n+2} - st & 2t\Im_{2n+1} - 2t \end{bmatrix}$$

ve

$$J_2 - J_0 = \begin{bmatrix} s^2 + 2t - 1 & 2s \\ st & 2t - 1 \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$$(J_2 - J_0)^{-1} = \frac{1}{(s + 2t - 1)(s - 2t + 1)} \begin{bmatrix} 1 - 2t & 2s \\ st & 1 - 2t - s^2 \end{bmatrix}$$

buradan

$$S_n = \frac{1}{(s + 2t - 1)(s - 2t + 1)} \begin{bmatrix} \Im_{2n+3} - s^2 - 2t & 2\Im_{2n+2} - 2s \\ t\Im_{2n+2} - st & 2t\Im_{2n+1} - 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 2t & 2s \\ st & 1 - 2t - s^2 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

(6.22) eşitliğinin sağ tarafındaki matris çarpımından

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{(s + 2t - 1)(s - 2t + 1)} \left(\Im_{2n+3} - 2t\Im_{2n+3} + 2st\Im_{2n+2} + 4t^2 - s^2 - 2t \pm 2s^2 t \right) \\ &= \frac{1}{(s + 2t - 1)(s - 2t + 1)} \left(\Im_{2n+3} - 2t(\Im_{2n+3} - s\Im_{2n+2}) + 4t^2 - s^2 - 2t \right) \\ &= \frac{1}{(s + 2t - 1)(s - 2t + 1)} \left(\Im_{2n+3} - 4t^2\Im_{2n+1} + 4t^2 - s^2 - 2t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{1}{(s + 2t - 1)(s - 2t + 1)} \left(2s\Im_{2n+3} - 2s^2\Im_{2n+2} + 2\Im_{2n+2} - 4t\Im_{2n+2} \pm 4st - 2s \right) \\ &= \frac{1}{(s + 2t - 1)(s - 2t + 1)} \left(2s(s\Im_{2n+2} + 2t\Im_{2n+1}) + 2\Im_{2n+2} - 2s^2\Im_{2n+2} - 4t\Im_{2n+2} - 2s \right) \\ &= \frac{1}{(s + 2t - 1)(s - 2t + 1)} \left(4st\Im_{2n+1} + 2\Im_{2n+2} - 4t\Im_{2n+2} - 2s \right) \\ &= \frac{2}{(s + 2t - 1)(s - 2t + 1)} \left(\Im_{2n+2} - 2t(\Im_{2n+2} - s\Im_{2n+1}) - s \right) \\ &= \frac{2}{(s + 2t - 1)(s - 2t + 1)} \left(\Im_{2n+2} - 4t^2\Im_{2n} - s \right) \end{aligned}$$

$$a_{21} = \frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)}\left(t\Im_{2n+2} - 2t^2\Im_{2n+2} + 2st^2\Im_{2n+1} - st \pm 2st^2\right)$$
$$= \frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)}\left(t\Im_{2n+2} - 2t^2(\Im_{2n+2} - st\Im_{2n+1}) + 2st^2\Im_{2n+1} - st\right)$$
$$= \frac{t}{(s+2t-1)(s-2t+1)}\left(\Im_{2n+2} - 4t^2\Im_{2n} - s\right)$$

$$a_{22} = \frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)}\left(2st\Im_{2n+2} + 2t\Im_{2n+1} - 2s^2t\Im_{2n+1} - 4t^2\Im_{2n+1} - 2t + 4t^2\right)$$
$$= \frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)}\left(2st(s\Im_{2n+1} + 2t\Im_{2n}) - 4t^2\Im_{2n+1} + 2t\Im_{2n+1} - 2t + 4t^2\right)$$
$$= \frac{2t}{(s+2t-1)(s-2t+1)}\left((1-2t)\Im_{2n+1} + 2st\Im_{2n} - 1 + 2t\right)$$

elde edilir.

Sonuç 6.4.3. $s+2t \neq 1$ ve $s-2t \neq -1$ olmak üzere (s,t) Jacobsthal sayı dizileri için

$$\sum_{k=1}^{n}\Im_{2k+1} = \frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)}\left(\Im_{2n+3} - 4t^2\Im_{2n+1} + 4t^2 - s^2 - 2t\right)$$
$$\sum_{k=1}^{n}\Im_{2k} = \frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)}\left(\Im_{2n+2} - 2t\Im_{2n+2} + 2stj_{2n+1} - s\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 6.4.4. $s+2t \neq 1$ ve $s-2t \neq -1$ için $S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} J_{2k+1} = (a_{ij})$ tek indisli Jacobsthal matris dizilerinin kısmi toplam formülü

$$a_{11} = \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}(\Im_{2n+4} - 4t^2\Im_{2n+2} - 4st + 4st^2 - s^3)$$
$$a_{12} = \frac{2}{(s+2t-1)s-2t+1)}(\Im_{2n+3} - 4t^2\Im_{2n+1} - s^2 - 2t + 4t^2)$$
$$a_{21} = \frac{t}{(s+2t-1)s-2t+1)}(\Im_{2n+3} - 4t^2\Im_{2n+1} - s^2 - 2t + 4t^2)$$

$$a_{22}=\frac{2t}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(\Im_{2n+2}-4t^2\Im_{2n}-s\right)$$

ile gösterilir.

İspat: Teorem 6.2.4 ve Teorem 6.4.3 kulanılarak

$$\sum_{k=1}^{n}J_{2k+1}=\sum_{k=1}^{n}J_1J_{2k}=J_1\sum_{k=1}^{n}J_{2k}$$
$$=\frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)}\begin{bmatrix}s & 2\\ t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\Im_{2n+3}-4t^2\Im_{2n+1}+4t^2-s^2-2t\right) & 2\left(\Im_{2n+2}-4t^2\Im_{2n}-s\right)\\ t\left(\Im_{2n+2}-4t^2\Im_{2n}-s\right) & 2t\left((1-2t)\Im_{2n+1}+2st\Im_{2n}-1+2t\right)\end{bmatrix}$$

Matris çarpımından

$$\begin{aligned}(s+2t-1)(s-2t+1)a_{11}&=\left[s\left(\Im_{2n+3}-4t^2\Im_{2n+1}+4t^2-s^2-2t\right)+2t(\Im_{2n+2}-4t^2\Im_{2n}-s)\right]\\&=(s\Im_{2n+3}+2t\Im_{2n+2})-4t^2(s\Im_{2n+1}+2t\Im_{2n})-4st+4st^2-s^3\\&=\Im_{2n+4}-4t^2\Im_{2n+2}-4st+4st^2-s^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s+2t-1)(s-2t+1)a_{12}&=2s\left(\Im_{2n+2}-4t^2\Im_{2n}-s\right)+4t\left((1-2t)\Im_{2n+1}+2st\Im_{2n}-1+2t\right)\\&=2\left(s\Im_{2n+2}+2t\Im_{2n+1}\right)+\Im_{2n}(-8st^2+8st^2)-8t^2\Im_{2n+1}-2s^2-4t+8t^2\\&=2(\Im_{2n+3}-4t^2\Im_{2n+1}-s^2-2t+4t^2)\end{aligned}$$

$$(s+2t-1)(s-2t+1)a_{21}=2(\Im_{2n+3}-4t^2\Im_{2n+1}-s^2-2t+4t^2)$$

$$(s+2t-1)(s-2t+1)a_{22}=2t\left(\Im_{2n+2}-4t^2\Im_{2n}-s\right)$$

Teorem 6.4.5. $s+2t\neq 1$ ve $s-2t\neq -1$ için, (s,t) Jacobsthal Lucas matris dizilerinin tek indisli terimlerinin kısmi toplam formülü $\sum_{k=1}^{n}C_{2k+1}=(a_{ij})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(s+2t-1)(s-2t+1)a_{11}&=\Im_{2n+5}+2t\Im_{2n+3}(1-2t)-8t^3\Im_{2n+1}-8s^2t+4s^2t^2-s^4+16t^3-8t^2\\(s+2t-1)(s-2t+1)a_{12}&=2(\Im_{2n+4}+2t(1-2t)\Im_{2n+2}-8t^3\Im_{2n}-s^3-6st+4st^2)\\(s+2t-1)(s-2t+1)a_{21}&=t(\Im_{2n+4}+2t(1-2t)\Im_{2n+2}-8t^3\Im_{2n}-s^3-6st+4st^2)\\(s+2t-1)(s-2t+1)a_{22}&=2t\left(\Im_{2n+3}+2t(1-2t)\Im_{2n+1}+8t^3\Im_{2n-1}-4t+8t^2-s^2\right)\end{aligned}$$

ile gösterilir.

İspat: Teorem 6.2.9 kulanılarak

$$\sum_{k=1}^{n} C_{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} C_1 J_{2k} = C_1 \sum_{k=1}^{n} J_{2k}$$
$$= \frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)} \begin{bmatrix} s^2+4t & 2s \\ st & 4t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\Im_{2n+3} - 4t^2\Im_{2n+1} + 4t^2 - s^2 - 2t\right) & 2\left(\Im_{2n+2} - 4t^2\Im_{2n} - s\right) \\ t\left(\Im_{2n+2} - 4t^2\Im_{2n} - s\right) & 2t\left((1-2t)\Im_{2n+1} + 2st\Im_{2n} - 1 + 2t\right) \end{bmatrix}$$

Matris çarpımından

$$(s+2t-1)(s-2t+1)a_{11} = \left[\left(s^2+4t\right)\left(\Im_{2n+3} - 4t^2\Im_{2n+1} + 4t^2 - s^2 - 2t\right) + 2st(\Im_{2n+2} - 4t^2\Im_{2n} - s)\right]$$
$$= s(s\Im_{2n+3} + 2t\Im_{2n+2}) - 4st^2(s\Im_{2n+1} + 2t\Im_{2n}) - 8s^2t + 4s^2t^2 - s^4 + 16t^3 - 8t^2 + 4t\Im_{2n+3} - 16t^3\Im_{2n+1}$$
$$= s\Im_{2n+4} - 4t^2(s\Im_{2n+2} + 2t\Im_{2n+1}) - 8t^3\Im_{2n+1} + 4t\Im_{2n+3} - 8s^2t + 4s^2t^2 - s^4 + 16t^3 - 8t^2$$
$$= \Im_{2n+5} + 2t\Im_{2n+3}(1-2t) - 8t^3\Im_{2n+1} - 8s^2t + 4s^2t^2 - s^4 + 16t^3 - 8t^2$$

$$(s+2t-1)(s-2t+1)a_{12} = 2(s^2+4t)\left(\Im_{2n+2} - 4t^2\Im_{2n} - s\right) + 4st\left((1-2t)\Im_{2n+1} + 2st\Im_{2n} - 1 + 2t\right)$$
$$2s\left(s\Im_{2n+2} + 2t\Im_{2n+1}\right) - 8t^2(s\Im_{2n+1} + 2t\Im_{2n}) - 16t^3\Im_{2n} + 8t\Im_{2n+2} \pm 8s^2t^2\Im_{2n} + 8st^2 - 2s^3 - 12st$$
$$= 2(s\Im_{2n+3} + 2t\Im_{2n+2}) - 8t^2\Im_{2n+2} + 4t\Im_{2n+2} - 16t^3\Im_{2n} - 2s^3 - 12st + 8st^2$$
$$= 2(\Im_{2n+4} + 2t(1-2t)\Im_{2n+2} - 8t^3\Im_{2n} - s^3 - 6st + 4st^2)$$

$$(s+2t-1)(s-2t+1)a_{21} = st\left(\Im_{2n+3} - 4t^2\Im_{2n+1} + 4t^2 - s^2 - 2t\right) + 4t^2\left(\Im_{2n+2} - 4t^2\Im_{2n} - s\right)$$
$$t(s\Im_{2n+3} + 2t\Im_{2n+2}) + 2t^2\Im_{2n+2} - 4t^3(s\Im_{2n+1} + 2t\Im_{2n}) - 8t^4\Im_{2n} - 6st^2 - s^3t + 4st^3$$
$$= t\Im_{2n+4} + 2t^2\Im_{2n+2} - 4t^3\Im_{2n+2} - 8t^4\Im_{2n} - 6st^2 - s^3t + 4st^3$$
$$= t(\Im_{2n+4} + 2t(1-2t)\Im_{2n+2} - 8t^3\Im_{2n} - 6st - s^3 + 4st^2)$$

$$= (s+2t-1)(s-2t+1)a_{22} = 2st\left(\Im_{2n+2} - 4t^2\Im_{2n} - s\right) + 8t^2\left((1-2t)\Im_{2n+1} + 2st\Im_{2n} - 1 + 2t\right)$$
$$= 2t(s\Im_{2n+2} + 2t\Im_{2n+1}) + 4t^2\Im_{2n+1} - 8t^3(\Im_{2n+1} - s\Im_{2n}) - 8t^3\Im_{2n+1} - 8t^2 + 16t^3 - 2s^2t$$
$$= 2t\Im_{2n+3} + 4t^2\Im_{2n+1} + 16t^4\Im_{2n-1} - 8t^3\Im_{2n+1} - 8t^2 + 16t^3 - 2s^2t$$
$$= 2t\left(\Im_{2n+3} + 2t(1-2t)\Im_{2n+1} + 8t^3\Im_{2n-1} - 4t + 8t^2 - s^2\right)$$

Sonuç matrisini C_1 ile çarparsak Jacobsthal Lucas matrisinin çift indisli terimlerinin kısmi toplamlarını elde edebiliriz.

Sonuç 6.4.4. $s+2t \neq 1$, $s-2t \neq -1$ ve (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizileri için

$$\sum_{k=1}^{n} \varsigma_{2k+2} = \frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)}(\Im_{2n+5} + 2t\Im_{2n+3}(1-2t) - 8t^3\Im_{2n+1} - 8s^2t + 4s^2t^2 - s^4 + 16t^3 - 8t^2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \varsigma_{2k+1} = \frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)}(\Im_{2n+4} + 2t(1-2t)\Im_{2n+2} - 8t^3\Im_{2n} - s^3 - 6st + 4st^2)$$

sağlanır.

Aşağıdaki teorem ile Jacobsthal matris dizisinin terimlerinin r-inci kuvvetlerinden oluşan bir kısmi toplam verilecektir.

Teorem 6.4.5. Jacobsthal matris dizileri için

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}J_i^r x^i = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}X^k\left(-Y\right)^{r-k}(1+\alpha^k\beta^{r-k}x)^n$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $X=\left(\frac{J_1-\beta J_0}{\alpha-\beta}\right)$, $Y=\left(\frac{J_1-\alpha J_0}{\alpha-\beta}\right)$ olduğundan n-inci Jacobsthal matris dizisi $J_n = X\alpha^n - Y\beta^n$ şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}J_i^r x^i &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(X\alpha^i - Y\beta^i\right)^r x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(X\alpha^i\right)^k\left(-Y\beta^i\right)^{r-k}x^i \\ &= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}X^k\left(-Y\right)^{r-k}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\alpha^k\beta^{r-k}x)^i \\ &= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}X^k\left(-Y\right)^{r-k}(1+\alpha^k\beta^{r-k}x)^n\end{aligned}$$

Böylece istenen elde edilmiş olur.

6.5. Jacobsthal Matris Dizisinin Kombinatorik Temsilleri

Bu bölümde Jacobsthal matrisleri için kombinatorik temsiller verilecek ve bu temsillerden hareketle (s,t) Jacobsthal sayılarının kombinatorik temsilleri gösterilecektir.

Yardımcı Teorem: s, t kompleks sayıları ve $n \geq 0$ tamsayısı için,

$$y_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i} s^{n-2i} (2t)^i \tag{6.23}$$

ile tanımlanan $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dizisi $y_{n+1} = sy_n + 2ty_{n-1}$ yineleme bağıntısını sağlar.

İspat: s ve t kompleks sayıları ve $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} sy_k + 2ty_{k-1} &= \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-i}{i} s^{k+1-2i} (2t)^i + \sum_{i=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-1-i}{i} s^{k-1-2i} (2t)^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-i}{i} s^{k+1-2i} (2t)^i + \sum_{i=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \binom{k-i}{i-1} s^{k+1-2i} (2t)^i \end{aligned} \tag{6.24}$$

k çift olması durumunda (6.24) eşitliğinde $\lfloor k/2 \rfloor = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ olacağından bu eşitlikten

$$\begin{aligned} sy_k + 2ty_{k-1} &= \binom{k}{0} s^{k+1} + \sum_{i=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \left[\binom{k-i}{i} + \binom{k-i}{i-1} \right] s^{k+1-2i} (2t)^i \\ &= s^{k+1} + \sum_{i=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \binom{k+1-i}{i} s^{k+1-2i} (2t)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \binom{k+1-i}{i} s^{k+1-2i} (2t)^i = y_{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

k tek olması durumunda (6.24) eşitliğinde $\lfloor k/2 \rfloor = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$ olacağından bu eşitlikten

$$\begin{aligned} sy_k + 2ty_{k-1} &= \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-i}{i} s^{k+1-2i} (2t)^i + \sum_{i=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-1-i}{i} s^{k-1-2i} (2t)^{i+1} \\ &= \binom{k}{0} s^{k+1} + \sum_{i=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-i}{i} s^{k+1-2i} (2t)^i + \sum_{i=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \binom{k-i}{i-1} s^{k+1-2i} (2t)^i \end{aligned}$$

$$= \binom{k}{0} s^{k+1} + \sum_{i=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-i}{i} s^{k+1-2i}(2t) + \sum_{i=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-i}{i-1} s^{k+1-2i}(2t)^i$$

$$+ \binom{k-\lfloor (k+1)/2 \rfloor}{\lfloor (k+1)/2 \rfloor - 1} s^0 (2t)^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor i}$$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \binom{k+1-i}{i} s^{k+1-2i}(2t)^i = y_{k+1}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem hem n. Jacobsthal matrisinin bir kombinatorik temsilinin sunulduğu hem de $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dizisi ile olan ilişkisinin verildiği bir teoremdir.

Teorem 6.5.1. $n \geq 1$ için,

$$J_n = y_n I_2 + y_{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ t & -s \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: İspat için tümevarım metodu kullanılacaktır. $y_0 = 1,\ y_1 = s$ olduğundan $n = 1$ için eşitlik sağlanır.

$$\boldsymbol{J}_1 = \boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{y}_0 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \boldsymbol{t} & -\boldsymbol{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} & 2 \\ \boldsymbol{t} & 0 \end{bmatrix}$$

Şimdi $1 \leq n \leq k$ olacak şekildeki n tamsayısı için (6.25) bağıntısı doğru olsun. $n = k+1$ için (6.25) bağıntısının doğru olduğunu gösterelim. Yardımcı teoremden

$$J_{k+1} = sJ_k + 2tJ_{k-1}$$

$$= s(y_k I_2 + y_{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ t & -s \end{bmatrix}) + 2t(y_{k-1} I_2 + y_{k-2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ t & -s \end{bmatrix})$$

$$= (sy_k + 2ty_{k-1}) I_2 + (sy_{k-1} + 2ty_{k-2}) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ t & -s \end{bmatrix}$$

$$= y_{k+1} I_2 + y_k \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ t & -s \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Sonuç 6.5.1. $n \geq 1$ olmak üzere Jacobsthal sayı dizileri için

$$\Im_{n+1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i} s^{n-2i} (2t)^i = y_n$$

sağlanır.

İspat: Teorem 6.5.1'de (6.25) **e**şitliğindeki matrisin (1,1) elemanı ve $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin tanımından elde edilir.

Aşağıdaki teoremde Lucas matrisi için bir kombinatorik temsil belirtilmekle birlikte $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dizisi ile olan ilişkisi de verilmektedir.

Teorem 6.5.2. $n \geq 1$ olmak üzere Jacobsthal Lucas matris dizileri için

$$C_{n+1} = y_n \begin{bmatrix} s^2 + 4t & 2s \\ st & 4t \end{bmatrix} + y_{n-1} \begin{bmatrix} 2st & 8t \\ 4t^2 & -2st \end{bmatrix} \tag{6.26}$$

elde edilir.

İspat: $C_{n+1} = C_1 . J_n$ eşitliği kullanılarak

$$C_{n+1} = C_1 . J_n = \begin{bmatrix} s^2 + 4t & 2s \\ st & 4t \end{bmatrix} \left(y_n I_2 + y_{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ t & -s \end{bmatrix} \right)$$

matris çarpımından istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 6.5.2. $n \geq 1$ olmak üzere Jacobsthal Lucas sayı dizileri için

$$\varsigma_{n+1} = s^{n+1} + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \left[\binom{n+1-i}{i} + \binom{n-i}{i-1} \right] s^{n+1-2i} (2t)^i \tag{6.27}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned}
\varsigma_{n+1} &= s\Im_{n+1} + 4t\Im_n = sy_n + 4ty_{n-1} = y_{n+1} + 2ty_{n-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n+1-i}{i} s^{n+1-2i} (2t)^i + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} s^{n-1-2i} (2t)^{i+1} \\
&= \binom{n+1}{0} s^{n+1} + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n+1-i}{i} s^{n+1-2i} (2t)^i + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i-1} s^{n+1-2i} (2t)^i \\
&= s^{n+1} + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \left[\binom{n+1-i}{i} + \binom{n-i}{i-1} \right] s^{n+1-2i} (2t)^i
\end{aligned}$$

Böylece (6.27) eşitliği ispatlanır.

6.6. Jacobsthal Matris Dizisinin Üstel Matris Dizisi

Bu bölümde $\{J_n(s,t)\}$ Jacobsthal matris dizisinin $\{e^{J_n}\}$ üstel matris dizisinin n-inci terimi e^{J_n} ile formülize edilmiş ve bu formülü kullanarak (s,t) Jacobsthal sayılarını içeren bir sonsuz toplam içeren formül elde edilmiştir.

Teorem 6.6.1. $n \geq 0$ için

$$e^{J_n} = \left(\Im_1 + 2t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Im_{nk-1}}{k!} \right) I_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Im_{nk}}{k!} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

elde edilir.

İspat: $n \geq 0$ için J_n matrisinin öz değerleri α^n, β^n değerleridir.

$$J_n = P\begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix}P^{-1} \tag{6.29}$$

şeklinde yazılabilecek terslenebilir bir P matrisi vardır. (6.29) eşitliği ve üstel fonksiyonun matris formu bilgisi kullanılarak

$$e^{J_n} = P\begin{bmatrix} e^{\alpha^n} & 0 \\ 0 & e^{\beta^n} \end{bmatrix}P^{-1} \tag{6.30}$$

yazılabilir. Ayrıca $\begin{bmatrix} e^{\alpha^n} & 0 \\ 0 & e^{\beta^n} \end{bmatrix}$ matrisi

$$\begin{bmatrix} e^{\alpha^n} & 0 \\ 0 & e^{\beta^n} \end{bmatrix} = \left(\frac{\alpha e^{\beta^n} - \beta e^{\alpha^n}}{\alpha - \beta}\right) I_2 + \frac{e^{\alpha^n} - e^{\beta^n}}{\alpha - \beta}\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

şeklinde bir ayrışıma sahiptir. e^x fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı kullanılarak

$$\frac{e^{\alpha^n} - e^{\beta^n}}{\alpha - \beta} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^{nk} - \beta^{nk}}{\alpha - \beta}\right)\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Im_{nk}}{k!} \tag{6.32}$$

yazılır.

$$\begin{aligned} \alpha e^{\beta^n} &= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{nk}\frac{1}{k!} = \alpha + \alpha\beta^n + \alpha\beta^{2n}/2!+... \\ &= \alpha + (-2t)\sum_{k=1}^{\infty}\beta^{nk-1}\frac{1}{k!} \end{aligned} \tag{6.33}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\beta e^{\alpha^n} = \beta \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{nk} \frac{1}{k!} = \beta + (-2t) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{nk-1} \frac{1}{k!} \tag{6.34}$$

(6.33) ve (6.34) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{\alpha e^{\beta^n} - \beta e^{\alpha^n}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} + (-2t) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\alpha^{nk-1} + \beta^{nk-1}}{\alpha - \beta} \right) \frac{1}{k!} = \Im_1 + 2t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Im_{nk-1}}{k!}$$

elde edilir. Bulunanlar yerine yazılınca istenen elde edilmiş olur.

Sonuç 6.6.1. (6.28) eşitliğindeki matrislerin karşılıklı (1,1) elemanları eşitlenirse

$$e^{\alpha^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{nk}}{k!} = \left(1 + 2t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Im_{nk-1}}{k!} \right) + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Im_{nk}}{k!}$$

elde edilir.

7. GENELLEŞTİRİLMİŞ JACOBSTHAL MATRİS DİZİLERİ

Bu bölümde (s,t) Jacobsthal ve (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizisi tanımından yola çıkılarak genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizisi tanımlanacak ilgili birçok özellik ispatlarıyla verilecektir.

7.1. Genelleştirilmiş Jacobsthal Sayı Dizileri

Tanım 7.1.1. $a,b \in R, \quad s>0, \quad t \neq 0, \quad s^2+8t>0$ olmak üzere (a,b) genelleştirilmiş Jacobsthal sayı dizisi $\{g_n(s,t)\}_{n\in N}$, ($g_0(s,t)=a, \ g_1(s,t)=bs$) başlangıç şartları ile

$$g_{n+1}(s,t)=sg_n(s,t)+2tg_{n-1}(s,t), \qquad n\geq 1 \tag{7.1}$$

şeklinde tanımlanır. Karakteristik denklemi $x^2=sx+2t$ şeklindedir.

Tanım 7.1.2. $a,b \in R, \quad s>0, \quad t \neq 0 \quad s^2+8t>0$ olmak üzere (a,b) genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizisi $\{G_n(s,t)\}_{n\in N}$

$$G_0=\begin{bmatrix} bs & 2a \\ at & (b-a)s \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad G_1=\begin{bmatrix} bs^2+2at & 2bs \\ bst & 2at \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

başlangıç şartları ile

$$G_{n+1}(s,t)=sG_n(s,t)+2tG_{n-1}(s,t), \qquad n\geq 1 \tag{7.3}$$

şeklinde tanımlanır. Tanımlar kullanılarak

$$a=b=1 \Rightarrow \begin{cases} g_n(s,t)=\Im_{n+1}(s,t) \\ G_n(s,t)=J_{n+1}(s,t) \end{cases}$$

$$a=2, \quad b=1 \Rightarrow \begin{cases} g_n(s,t)=\varsigma_n(s,t) \\ G_n(s,t)=C_n(s,t) \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 7.1.1. $n \geq 0$ tamsayısı için, genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizisinin elemanları

$$G_n = \begin{bmatrix} g_{n+1} & 2g_n \\ tg_n & 2tg_{n-1} \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır.

$n = 0$ için doğrudur. $G_0 = \begin{bmatrix} g_1 & 2g_0 \\ tg_0 & 2tg_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bs & 2a \\ at & 2t\dfrac{(b-a)s}{2t} \end{bmatrix}$

$n = 1$ için doğrudur. $G_1 = \begin{bmatrix} g_2 & 2g_1 \\ tg_1 & 2tg_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bs^2 + 2at & 2bs \\ bst & 2at \end{bmatrix}$

Şimdi $1 \leq n \leq N$ olacak şekildeki n tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $n = N+1$ için

$$G_{n+1}(s,t) = sG_n(s,t) + 2tG_{n-1}(s,t)$$

$$\begin{bmatrix} g_{n+2} & 2g_{n+1} \\ tg_{n+1} & 2tg_n \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} g_{n+1} & 2g_n \\ tg_n & 2tg_{n-1} \end{bmatrix} + 2t\begin{bmatrix} g_n & 2g_{n-1} \\ tg_{n-1} & 2tg_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} sg_{n+1} + 2tg_n & 2(sg_n + 2tg_{n-1}) \\ t(sg_n + 2tg_{n-1}) & 2t(sg_{n-1} + 2tg_{n-2}) \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Önerme 7.1.1. $n \geq 0$ tamsayısı için, (s,t) Jacobsthal sayı dizisi ile genelleştirilmiş Jacobsthal sayı dizisi arasında

$$g_n = bs\Im_n + 2at\Im_{n-1} \tag{7.5}$$

ve (s,t) Jacobsthal Lucas sayı dizisi ile genelleştirilmiş Jacobsthal sayı dizisi arasında

$$g_{n+1} + 2tg_{n-1} = bs\varsigma_n + 2at\varsigma_{n-1} \tag{7.6}$$

bağıntıları mevcuttur.

İspat: İspat $g_{-1}(s,t) = \frac{(b-a)s}{2t}$, $g_0(s,t) = a$, $g_1(s,t) = bs$ başlangıç şartlarını kullanarak tümevarımla yapılacaktır:

$n = 0$ için doğrudur: $g_0 = a = (bs)0 + 2at.\frac{1}{2t}$

$n = 1$ için doğrudur: $g_1 = bs = (bs)1 + 2at.0$

$n \le N$ için doğru kabul edelim. $n = N+1$ için

$$\begin{aligned} g_{N+1} &= sg_N + 2tg_{N-1} = s(bs\Im_N + 2at\Im_{N-1}) + 2t(bs\Im_{N-1} + 2at\Im_{N-2}) \\ &= bs(s\Im_N + 2t\Im_{N-1}) + 2at(s\Im_{N-1} + 2t\Im_{N-2}) = bs\Im_{N+1} + 2at\Im_N \end{aligned}$$

ve

$n = 0$ için doğrudur:
$$g_1 + 2tg_{-1} = bs\varsigma_0 + 2at\varsigma_{-1}$$
$$bs + 2t\frac{(b-a)s}{2t} = bs.2 + 2at.\frac{-s}{2t}$$

$n = 1$ için doğrudur:
$$g_2 + 2tg_0 = bs\varsigma_1 + 2at\varsigma_0$$
$$bs^2 + 2at + 2ta = bs.s + 2at.2$$

$n \le N$ için doğru kabul edelim. $n = N+1$ için

$$\begin{aligned} g_{N+2} + 2tg_N &= sg_{N+1} + 2tg_N + 2t(sg_{N-1} + 2tg_{N-2}) \\ &= s(bs\varsigma_{N+1} + 2at\varsigma_{N-1}) + 2t(bs\varsigma_N + 2at\varsigma_{N-2}) \\ &= bs(s\varsigma_{N+1} + 2t\varsigma_N) + 2at(s\varsigma_{N-1} + 2t\varsigma_{N-2}) = bs\varsigma_{N+2} + 2at\varsigma_N \end{aligned}$$

Böylece istenen elde edilir.

Önerme 7.1.2. $n \geq 0$ tamsayısı için, genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizisinin elemanları ile Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizisinin elemanları arasında

$$G_n = bsJ_n + 2atJ_{n-1} \tag{7.7}$$

ve

$$G_{n+1} + 2tG_{n-1} = bsC_n + 2atC_{n-1} \tag{7.8}$$

bağıntıları mevcuttur.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır:

$n = 1$ için doğrudur: $G_1 = \begin{bmatrix} bs^2 + 2at & 2bs \\ bst & 2at \end{bmatrix} = bs\begin{bmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{bmatrix} + 2at\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$n \leq N$ için doğru kabul edelim. $n = N+1$ için

$$\begin{aligned} G_{N+1} &= sG_N + 2tG_{N-1} = s(bsJ_N + 2atJ_{N-1}) + 2t(bsJ_{N-1} + 2atJ_{N-2}) \\ G_{N+1} &= bs(sJ_N + 2tJ_{N-1}) + 2at(sJ_{N-1} + 2tJ_{N-2}) = bsJ_{N+1} + 2atJ_N \end{aligned}$$

ve

$n=1$ için doğrudur:

$$G_2+2tG_0=\begin{bmatrix} bs^3+2st(a+b) & 2(bs^2+2at) \\ t(bs^2+2at) & 2tbs \end{bmatrix}+2t\begin{bmatrix} bs & 2a \\ at & (b-a)s \end{bmatrix}$$

$$bsC_1+2atC_0=bs\begin{bmatrix} s^2+4t & 2.s \\ t.s & 2t.2 \end{bmatrix}+2at\begin{bmatrix} s & 4 \\ 2t & -s \end{bmatrix}$$

$n\le N$ için doğru kabul edelim. $n=N+1$ için

$$\begin{aligned} G_{N+2}+2tG_N &= sG_{N+1}+2tG_N+2t(sG_{N-1}+2tG_{N-2}) \\ &= s(bsC_N+2atC_{N-1})+2t(bsC_{N-1}+2atC_{N-2}) \\ &= bs(sC_N+2tC_{N-1})+2at(sC_{N-1}+2tC_{N-2})=bsC_{N+1}+2atC_N \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} G_{n+2}+2tG_n &= \begin{bmatrix} g_{n+3} & 2g_{n+2} \\ tg_{n+2} & 2tg_{n+1} \end{bmatrix}+2t\begin{bmatrix} g_{n+1} & 2g_n \\ tg_n & 2tg_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} bs\varsigma_{n+2}+2at\varsigma_{n+1} & 2(bs\varsigma_{n+1}+2at\varsigma_n) \\ t(bs\varsigma_{n+1}+2at\varsigma_n) & 2t(bs\varsigma_n+2at\varsigma_{n-1}) \end{bmatrix} \\ &= bs\begin{bmatrix} \varsigma_{n+2} & 2\varsigma_{n+1} \\ t\varsigma_{n+1} & 2t\varsigma_n \end{bmatrix}+2at\begin{bmatrix} \varsigma_{n+1} & 2\varsigma_n \\ t\varsigma_n & 2t\varsigma_{n-1} \end{bmatrix}=bsC_{n+1}+2atC_n \end{aligned}$$

Teorem 7.1.2. $m,n\ge 0$ tamsayıları için genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizisi ile Jacobsthal matris dizisi arasında

$$G_{n+m}=J_nG_m \tag{7.9}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: İspat tümevarımla yapılacaktır. $m=0$ için teorem doğrudur:

$$\boldsymbol{G_0J_N}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{bs} & \boldsymbol{2a} \\ \boldsymbol{at} & \boldsymbol{(b-a)s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathfrak{I}_{N+1} & 2\mathfrak{I}_N \\ t\mathfrak{I}_N & 2t\mathfrak{I}_{N-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{bs}\mathfrak{I}_{N+1}+\boldsymbol{2at}\mathfrak{I}_N & \boldsymbol{2(bs}\mathfrak{I}_N+\boldsymbol{2at}\mathfrak{I}_{N-1}) \\ \boldsymbol{t(a}\mathfrak{I}_{N+1}+\boldsymbol{(b-a)s}\mathfrak{I}_N) & \boldsymbol{2t(a}\mathfrak{I}_N+\boldsymbol{s(b-a)}\mathfrak{I}_{N-1} \end{bmatrix}=\boldsymbol{G_N}$$

$g_{n+1}(s,t) = bs\Im_n(s,t) + 2at\Im_{n-1}(s,t)$ özelliğinden istenen çıkar.

$m = 1$ için teorem doğrudur:

$$G_1 J_N = \begin{bmatrix} bs^2 + 2at & 2bs \\ bst & 2at \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Im_{N+1} & 2\Im_N \\ t\Im_N & 2t\Im_{N-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (bs^2 + 2at)\Im_{N+1} + 2bst\Im_N & 2((bs^2 + 2at)\Im_N + 2bst\Im_{N-1}) \\ t(bs\Im_{N+1} + 2at\Im_N) & 2t(bs\Im_N + 2at\Im_{N-1}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} bs\Im_{N+2} + 2at\Im_{N+1} & 2(bs\Im_{N+1} + 2at\Im_N) \\ t(bs\Im_{N+1} + 2at\Im_N) & 2t(bs\Im_N + 2at\Im_{N-1}) \end{bmatrix} = G_{N+1}$$

Şimdi $1 \le M \le m$ olacak şekildeki M tamsayısı için bağıntı doğru olsun. $m+1$ için

$$G_{m+1} J_n = (sG_m + 2tG_{m-1}) J_n$$
$$= sG_m J_n + 2tG_{m-1} J_n$$
$$= sG_{m+n} + 2tG_{m+n-1} = G_{m+n+1}$$

Buradan istenen sonuç çıkar.

Teorem 7.1.3. $n \in N$ için n. genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizisinin elemanının determinantı

$$\det G_n = (s^2 b(b-a) - 2a^2 t)(-2t)^n$$

olur.

İspat: $G_0 = \begin{bmatrix} bs & 2a \\ at & (b-a)s \end{bmatrix}$ ise $\det G_0 = (s^2 b(b-a) - 2a^2 t)$ olur.

$$\det G_n = \det(G_0 J_n) = \det(G_0)(\det J_1)^n = (s^2 b(b-a) - 2a^2 t).(-2t)^n$$

Teorem 7.1.4. Genelleştirilmiş Jacobsthal sayı dizisi $\{g_n(s,t)\}_{n \in N}$ için

Binet formülü $g_n = \dfrac{X\alpha^n - Y\beta^n}{\alpha - \beta}$, $X = bs + \dfrac{2at}{\alpha}$, $Y = bs + \dfrac{2at}{\beta}$ şeklindedir.

İspat: $\Im_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ve $g_n = bs\Im_n + 2at\Im_{n-1}$ özellikleri kullanılarak

$$g_n = bs\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + 2at\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^n\left(bs + \frac{2at}{\alpha}\right) - \beta^n\left(bs + \frac{2at}{\beta}\right)\right]$$

istenen elde edilir.

Teorem 7.1.5. $a, b \in R,\ m, n \in N,\quad s > 0,\quad t \neq 0\quad s^2 + 8t > 0$ olmak üzere

$$G_1 C_n = G_{n+2} + 2tG_n \tag{7.10}$$

sağlanır.

İspat:
$$G_1 C_n = \begin{bmatrix} bs^2 + 2at & 2bs \\ bst & 2at \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varsigma_{n+1} & 2\varsigma_n \\ t\varsigma_n & 2t\varsigma_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (bs^2 + 2at)\varsigma_{n+1} + 2bst\varsigma_n & 2\left((bs^2 + 2at)\varsigma_n + 2bst\varsigma_{n-1}\right) \\ t\left(bs\varsigma_{n+1} + 2at\varsigma_n\right) & 2t(bs\varsigma_n + 2at\varsigma_{n-1}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} bs(s\varsigma_{n+1} + 2t\varsigma_n) + 2at\varsigma_{n+1} & 2\left((bs(s\varsigma_n + 2t\varsigma_{n-1}) + 2at\varsigma_n\right) \\ t\left(bs\varsigma_{n+1} + 2at\varsigma_n\right) & 2t(bs\varsigma_n + 2at\varsigma_{n-1}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} g_{n+3} & 2g_{n+2} \\ tg_{n+2} & 2tg_{n+1} \end{bmatrix} + 2t\begin{bmatrix} g_{n+1} & 2g_n \\ tg_n & 2tg_{n-1} \end{bmatrix} = G_{n+2} + 2tG_n$$

Teorem 7.1.6. $a, b \in R,\ m, n \in N,\quad s > 0,\quad t \neq 0\quad s^2 + 8t > 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

a) $G_1 C_n = C_n G_1$

b) $G_1 J_n = J_n G_1$

c) $C_m G_{n+1} = G_{n+1} C_m$

d) $J_m G_{n+1} = G_{n+1} J_m$

İspat: a)

$$C_n G_1 = \begin{bmatrix} \varsigma_{n+1} & 2\varsigma_n \\ t\varsigma_n & 2t\varsigma_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bs^2 + 2at & 2bs \\ bst & 2at \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (bs^2 + 2at)\varsigma_{n+1} + 2bst\varsigma_n & (4at)\varsigma_n + 2bs\varsigma_{n+1} \\ (bs^2 + 2at)t\varsigma_n + 2bst^2\varsigma_{n-1} & 2bst\varsigma_n + 2at^2\varsigma_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$G_1 C_n = \begin{bmatrix} bs^2 + 2at & 2bs \\ bst & 2at \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varsigma_{n+1} & 2\varsigma_n \\ t\varsigma_n & 2t\varsigma_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (bs^2 + 2at)\varsigma_{n+1} + 2bst\varsigma_n & 2\left((bs^2 + 2at)\varsigma_n + 2bst\varsigma_{n-1}\right) \\ t\left(bs\varsigma_{n+1} + 2at\varsigma_n\right) & 2t(bs\varsigma_n + 2at\varsigma_{n-1}) \end{bmatrix}$$

b) (a) özelliğine benzer şekilde ispatlanabilir.

c) Teorem 7.1.2. de $m = 1$ alınırsa, yani ayrıntılı olarak

$$G_1 J_n = \begin{bmatrix} bs^2 + 2at & 2bs \\ bst & 2at \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Im_{n+1} & 2\Im_n \\ t\Im_n & 2t\Im_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bs\Im_{n+2} + 2at\Im_{n+1} & 2(bs\Im_{n+1} + 2at\Im_n) \\ t(bs\Im_{n+1} + 2at\Im_n) & 2t(bs\Im_n + 2at\Im_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$g_n = bs\Im_n + 2at\Im_{n-1}$ eşitliği yardımıyla

$$G_1 J_n = \begin{bmatrix} g_{n+2} & 2g_{n+1} \\ tg_{n+1} & 2tg_n \end{bmatrix} = G_{n+1}$$

(a) özelliği kullanılarak

$$C_m G_{n+1} = C_m G_1 J_n = G_1 C_m J_n$$

$$C_m G_{n+1} = G_1 J_n C_m = G_{n+1} C_m$$

d)

$$\begin{aligned} J_m G_{n+1} &= J_m G_1 J_n = J_m (bsJ_1 + 2atJ_0) J_n \\ &= bsJ_{m+n+1} + 2atJ_{m+n} = (bsJ_1 + 2atJ_0) J_{m+n} \\ &= G_1 J_n J_m = G_{n+1} J_m \end{aligned}$$

Teorem 7.1.7. $n \in N$ için Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizilerinin elemanları arasında

$$\begin{aligned} G_{n+1}^2 &= G_1^2 J_{2n} \\ G_{n+1}^2 &= G_1 G_{2n+1} \\ G_{2n+1} &= J_n G_{n+1} \end{aligned} \tag{7.11}$$

eşitlikleri mevcuttur.

İspat: Teorem 7.1.2 ve Teorem 7.1.6 kullanılarak

$$G_{n+1}^2 = G_{n+1} G_{n+1} = G_1 J_n G_1 J_n = G_1 G_1 J_n J_n = G_1^2 J_{2n}$$

$$G_{n+1}^2 = G_1^2 J_{2n} = G_1 G_1 J_{2n} = G_1 G_{2n+1}$$

$$G_{2n+1} = G_1 J_{2n} = G_1 J_n J_n = J_n G_1 J_n = J_n G_{n+1}$$

istenen özdeşlikler sağlanmış olur.

Önerme 7.1.3. $n \geq 0$ tamsayısı için,

$a)$ $g_{n+2}^2 + 2tg_{n+1}^2 = (b^2 s^2 + 2a^2 t)\Im_{2n+3} + 2ast(2b - a)\Im_{2n+2}$

$b)$ $g_{n+2}^2 + 2tg_{n+1}^2 = bg_{2n+4} + 2(a - b)tg_{2n+2}$

$c)$ $g_{2n} = \Im_n g_{n+1} + 2t\Im_{n-1} g_n$

özellikleri sağlanır.

İspat: a)

$$G_{n+1}^2 = \begin{bmatrix} g_{n+2} & 2g_{n+1} \\ tg_{n+1} & 2tg_n \end{bmatrix}^2 = G_1^2 . J_{2n} = \begin{bmatrix} bs^2 + 2at & 2bs \\ bst & 2at \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \Im_{2n+1} & 2\Im_{2n} \\ t\Im_{2n} & 2t\Im_{2n-1} \end{bmatrix}$$

matrislerinin (1,1) elemanı eşitlenirse

$$\begin{aligned} & g_{n+2}^2 + 2tg_{n+1}^2 = (b^2s^4 + 4a^2t^2 + 4abs^2t + 2b^2s^2t)\Im_{2n+1} + (2b^2s^3 + 8abst)t\Im_{2n} \\ & = b^2s^3(s\Im_{2n+1} + 2t\Im_{2n}) + 4abst(s\Im_{2n+1} + 2t\Im_{2n}) + (4a^2t^2 + 2b^2s^2t)\Im_{2n+1} \\ & = (b^2s^3 + 4abst)\Im_{2n+2} + (4a^2t^2 + 2b^2s^2t)\Im_{2n+1} \\ & = b^2s^2(s\Im_{2n+2} + 2t\Im_{2n+1}) + 2a^2t(s\Im_{2n+2} + 2t\Im_{2n+1}) + (4abst - 2a^2st)\Im_{2n+2} \\ & = (b^2s^2 + 2a^2t)\Im_{2n+3} + 2ast(2b - a)\Im_{2n+2} \end{aligned}$$

b)

$$G_{n+1}^2 = \begin{bmatrix} g_{n+2} & 2g_{n+1} \\ tg_{n+1} & 2tg_n \end{bmatrix}^2 = G_1 G_{2n+1} = \begin{bmatrix} bs^2 + 2at & 2bs \\ bst & 2at \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{2n+2} & 2g_{2n+1} \\ tg_{2n+1} & 2tg_{2n} \end{bmatrix}$$

matrislerinin (1,1) elemanı eşitlenirse

$$\begin{aligned} g_{n+2}^2 + 2tg_{n+1}^2 &= (bs^2 + 2at)g_{2n+2} + 2bstg_{2n+1} \\ &= bs(sg_{2n+2} + 2tg_{2n+1}) + 2atg_{2n+2} \\ &= bsg_{2n+3} + 2atg_{2n+2} \\ &= b(sg_{2n+3} + 2tg_{2n+2}) + 2(a-b)tg_{2n+2} \\ &= bg_{2n+4} + 2(a-b)tg_{2n+2} \end{aligned}$$

c)

$$G_{2n+1} = \begin{bmatrix} g_{2n+2} & 2g_{2n+1} \\ tg_{2n+1} & 2tg_{2n} \end{bmatrix} = G_{n+1}J_n = \begin{bmatrix} g_{n+2} & 2g_{n+1} \\ tg_{n+1} & 2tg_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Im_{n+1} & 2\Im_n \\ t\Im_n & 2t\Im_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrislerinin (2,2) elemanı eşitlenirse

$$2tg_{2n} = 2t(\Im_n g_{n+1} + 2t\Im_{n-1} g_n)$$

Teorem 7.1.8. $a,b \in R,\ m,n \in N,\quad s > 0,\quad t \neq 0\quad s^2 + 8t > 0$ olmak üzere

$$G_{n+1}^m = G_1^m J_{mn}$$

sağlanır.

İspat: $m = 1$ için verilen ifade doğrudur. $n \leq m$ için doğru olsun: $G_{n+1}^m = G_1^m J_{mn}$ bu yüzden biz $m+1$ için doğruluğunu göstereceğiz: $G_{n+1}^m = G_1^m J_{mn}$ ifadesini G_{n+1} ile iki taraftan da çarpalım:

$$G_{n+1}^{m+1} = G_1^m J_{mn} G_{n+1}$$
$$G_{n+1}^{m+1} = G_1^{m+1} J_n J_{mn}$$
$$G_{n+1}^{m+1} = G_1^{m+1} J_{(m+1)n}$$

Böylece tümevarım tamamlanmış olur.

Sonuç 7.1.1. $n \geq 0$ tamsayısı için Teorem 7.1.8. den

$$G_{n+1}^2 = G_1^2 J_{2n} = G_1 G_{2n+1} \qquad (\boldsymbol{m} = 2)$$
$$J_{n+2}^2 = J_1^2 J_{n+1}^2 = J_1^2 J_{2n} J_1^2 = J_{2n+4} \qquad (\boldsymbol{m} = 2,\ \boldsymbol{a} = 1,\ \boldsymbol{b} = 1)$$
$$C_{n+1}^2 = C_1^2 J_{2n} \qquad (\boldsymbol{m} = 2,\ \boldsymbol{a} = 2,\ \boldsymbol{b} = 1)$$

elde edilir.

Teorem 7.1.9. $n \geq 0$ tamsayısı için genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizisi için Binet formülü

$$G_n = \left(\frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n - \left(\frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta}\right)\beta^n \tag{7.12}$$

şeklinde olur.

İspat:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G_n} &= \frac{\alpha^{\boldsymbol{n}}}{\alpha-\beta}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{bs}^2 + 2\boldsymbol{at} & 2\boldsymbol{bs} \\ \boldsymbol{bst} & 2\boldsymbol{at} \end{bmatrix} - \beta\begin{bmatrix} \boldsymbol{bs} & 2\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{at} & (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{s} \end{bmatrix}\right) - \frac{\beta^{\boldsymbol{n}}}{\alpha-\beta}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{bs}^2 + 2\boldsymbol{at} & 2\boldsymbol{bs} \\ \boldsymbol{bst} & 2\boldsymbol{at} \end{bmatrix} - \alpha\begin{bmatrix} \boldsymbol{bs} & 2\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{at} & (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{s} \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\begin{bmatrix} (\boldsymbol{bs}^2 + 2\boldsymbol{at})(\alpha^{\boldsymbol{n}} - \beta^{\boldsymbol{n}}) - (-2\boldsymbol{t})\boldsymbol{bs}(\alpha^{\boldsymbol{n}-1} - \beta^{\boldsymbol{n}-1}) & 2\left(\boldsymbol{bs}(\alpha^{\boldsymbol{n}} - \beta^{\boldsymbol{n}}) - (-2\boldsymbol{t})\boldsymbol{a}(\alpha^{\boldsymbol{n}-1} - \beta^{\boldsymbol{n}-1})\right) \\ \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{bs}(\alpha^{\boldsymbol{n}} - \beta^{\boldsymbol{n}}) - (-2\boldsymbol{t})\boldsymbol{a}(\alpha^{\boldsymbol{n}-1} - \beta^{\boldsymbol{n}-1})\right) & 2\boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{a}(\alpha^{\boldsymbol{n}} - \beta^{\boldsymbol{n}}) - (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{s}(\alpha^{\boldsymbol{n}-1} - \beta^{\boldsymbol{n}-1})\right) \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{g_{n+1}} & 2\boldsymbol{g_n} \\ \boldsymbol{tg_n} & 2\boldsymbol{tg_{n-1}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

matrisin (1,1) elemanı için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha-\beta}\left[(bs^2 + 2at)(\alpha^n - \beta^n) - (-2t)bs(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})\right] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[bs(s(\alpha^n - \beta^n) + 2t(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})) + 2at(\alpha^n - \beta^n)\right] \\
&= bs(s\Im_n + 2t\Im_{n-1}) + 2at\Im_n \\
&= bs\Im_{n+1} + 2at\Im_n = g_{n+1}
\end{aligned}$$

matrisin (1,2) ve (2,1) elemanı için

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\left[(bs(\alpha^n - \beta^n) - (-2t)a(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})\right] = bs\Im_n + 2at\Im_{n-1} = g_n$$

matrisin (2,2) elemanı için

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\left[a(\alpha^n-\beta^n)+s(b-a)(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})\right]$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[(b-a)s(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})+a(-2t)(\frac{\alpha^{n-1}}{\beta}-\frac{\beta^{n-1}}{\alpha})\right]$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{n-1}\left((b-a)s-\frac{2at}{\beta}\right)-\beta^{n-1}\left((b-a)s-\frac{2at}{\alpha}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{n-1}\left(bs+\frac{2at}{\alpha}\right)-\beta^{n-1}\left((bs-\frac{2at}{\beta}\right)\right]=g_{n-1}$$

7.2. Genelleştirilmiş Jacobsthal Matris Dizilerinin Kısmi Toplamları

Teorem 7.2.1. $s+2t\neq 1$ için genelleştirilmiş Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizisi için toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n}G_k=\frac{1}{s+2t-1}\begin{bmatrix} g_{n+2}+2tg_{n+1}-bs^2-2bst-2at & 2(g_{n+1}+2tg_n-bs-2at) \\ t(g_{n+1}+2tg_n-bs-2at) & 2t(g_n+2tg_{n-1}-bs-as-a)\end{bmatrix} \quad (7.13)$$

şeklinde verilir.

İspat: $g_n=bs\Im_n+2at\Im_{n-1}$ ve

$$\sum_{k=1}^{n}J_k=\frac{1}{s+2t-1}\begin{bmatrix} \Im_{n+2}-s+2t\Im_{n+1}-2t & 2(\Im_{n+1}-1+2t\Im_n) \\ t(\Im_{n+1}-1+2t\Im_n) & 2t(\Im_n+2t\Im_{n-1}-1)\end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n}J_{k-1}=\sum_{k=1}^{n}J_k+J_0-J_n$$
$$=\frac{1}{s+2t-1}\begin{bmatrix} \Im_{n+1}+2t\Im_n-1 & 2(\Im_n+2t\Im_{n-1}-1) \\ t(\Im_n+2t\Im_{n-1}-1) & 2t(\Im_{n-1}+2t\Im_{n-2}+\frac{s-1}{2t})\end{bmatrix}$$

özellikleri kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{n}G_k=\sum_{k=1}^{n}(bsJ_k+2atJ_{k-1})$$

$$= \frac{bs}{s+2t-1}\begin{bmatrix} \Im_{n+2} - s + 2t\Im_{n+1} - 2t & 2(\Im_{n+1} - 1 + 2t\Im_n) \\ t(\Im_{n+1} - 1 + 2t\Im_n) & 2t(\Im_n + 2t\Im_{n-1} - 1) \end{bmatrix}$$
$$+ \frac{2at}{s+2t-1}\begin{bmatrix} \Im_{n+1} + 2t\Im_n - 1 & 2(\Im_n + 2t\Im_{n-1} - 1) \\ t(\Im_n + 2t\Im_{n-1} - 1) & 2t(\Im_{n-1} + 2t\Im_{n-2} + \frac{s-1}{2t}) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{s+2t-1}\begin{bmatrix} g_{n+2} + 2tg_{n+1} - bs^2 - 2bst - 2at & 2(g_{n+1} + 2tg_n - bs - 2at) \\ t(g_{n+1} + 2tg_n - bs - 2at) & 2t(g_n + 2tg_{n-1} - bs - as - a) \end{bmatrix}$$

istenen elde edilmiş olur.

Teorem 7.2.2. $s+2t \neq 1$ ve $s-2t \neq -1$ olmak üzere genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizisinin çift indisli terimlerinin toplam formülü $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} G_{2k} = (a_{ij})$ olmak üzere

$$a_{11} = \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+3} - 4t^2 g_{2n+1} - bs^3 - 2st(a+b) + 4bst^2\right)$$
$$a_{12} = \frac{2}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+2} - 4t^2 g_{2n} - bs^2 - 2at + 4at^2\right)$$
$$a_{21} = \frac{t}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+2} - 4t^2 g_{2n} - bs^2 - 2at + 4at^2\right)$$
$$a_{22} = \frac{2t}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(2stg_{2n} + (1-2t)g_{2n+1} - bs + 2st(b-a)\right)$$

şeklindedir.

İspat: $s+2t \neq 1$ ve $s-2t \neq -1$ olmak şartıyla $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} G_{2k}$ olsun. Eşitliğin iki tarafını da J_2 ile çarpalım.

$$S_{2n}J_2 = G_4 + G_6 + \ldots + G_{2n+2}$$

eşitlikleri birbirinden çıkarırsak

$$S_{2n}(J_2 - J_0) = G_{2n+2} - G_2$$

elde edilir. $\det(J_2 - J_0) = -(s-2t+1)(s+2t-1) \neq 0$ olduğundan $J_2 - J_0$ matrisinin tersi vardır ve

$$S_{2n} = (G_{2n+2} - G_2)(J_2 - J_0)^{-1}$$

olur.

$$G_{2n+2} - G_2 = \begin{bmatrix} g_{2n+3} - bs^3 - 2(a+b)st & 2(g_{2n+2} - bs^2 - 2at) \\ t(g_{2n+2} - bs^2 - 2at) & 2t(g_{2n+1} - bs) \end{bmatrix}$$

ve

$$J_2 - J_0 = \begin{bmatrix} s^2 + 2t - 1 & 2s \\ st & 2t - 1 \end{bmatrix}$$

ise

$$(J_2 - J_0)^{-1} = \frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)} \begin{bmatrix} 1-2t & 2s \\ st & 1-2t-s^2 \end{bmatrix}$$

matris çarpımından

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)} \left(g_{2n+3} - 2tg_{2n+3} + 2st(g_{2n+2} - bs^2 - 2at) - bs^3 + 2tbs^3 - 2st(a+b) + 4st^2(a+b) \right) \\ &= \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)} \left(g_{2n+3} - 2t(g_{2n+3} - sg_{2n+2}) - bs^3 - 2st(a+b) + 4bst^2 \right) \\ &= \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)} \left(g_{2n+3} - 4t^2 g_{2n+1} - bs^3 - 2st(a+b) + 4bst^2 \right) \end{aligned}$$

$$a_{12} = \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)} \left(2sg_{2n+3} + (2 - 4t - 2s^2)(g_{2n+2} - bs^2 - 2at) - 2bs^4 + 4(a+b)s^2 t \right)$$

$$= \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(2s(sg_{2n+2}+2tg_{2n+1})+(2-4t-2s^2)(g_{2n+2}-bs^2-2at)-2bs^4+4(a+b)s^2t\right)$$

$$= \frac{2}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+2}-4t^2g_{2n}-bs^2-2at+4at^2\right)$$

$$a_{21} = \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(tg_{2n+2}-2t^2(g_{2n+2}-bs^2-2at)+2st^2g_{2n+1}+t(-bs^2-2at)-2bs^2t^2\right)$$

$$= \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(tg_{2n+2}-2t^2(g_{2n+2}-sg_{2n+1})+t(-bs^2-2at)+2bs^2t^2+4at^3-2bs^2t^2\right)$$

$$= \frac{t}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+2}-4t^2g_{2n}-bs^2-2at+4at^2\right)$$

$$a_{22} = \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(2st(g_{2n+2}-bs^2-2at)+2t(g_{2n+1}-bs)-4t^2(g_{2n+1}-bs)-2ts^2(g_{2n+1}-bs)\right)$$

$$= \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(2st(g_{2n+2}-sg_{2n+1})-4t^2g_{2n+1}-s^2 2tg_{2n+1}-2bst-4ast^2+4bst^2\right)$$

$$= \frac{2t}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(2stg_{2n}+(1-2t)g_{2n+1}-bs+2st(b-a)\right)$$

elde edilir.

Sonuç 7.2.1. $s+2t\neq 1$ ve $s-2t\neq -1$ olmak üzere genelleştirilmiş Jacobsthal sayı dizisinin çift indisli veya tek indisli terimlerinin toplam formülü

$$\sum_{k=1}^{n} g_{2k+1} = \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+3}-4t^2g_{2n+1}-bs^3-2st(a+b)+4bst^2\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} g_{2k} = \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+2}-4t^2g_{2n}-bs^2-2at+4at^2\right)$$

şeklindedir.

Teorem 7.2.2. $s+2t\neq 1$ ve $s-2t\neq -1$ olmak üzere genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizisinin tek indisli terimlerinin kısmi toplam formülü $S_{2n+1}=\sum_{k=1}^{n} G_{2k+1}=(a_{ij})$ olmak üzere

$$a_{11} = \frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+3}-4t^2g_{2n+1}-bs^3-2st(a+b)+4bst^2\right)$$

$$a_{12}=\frac{2}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+2}-4t^2g_{2n}-bs^2-2at+4at^2\right)$$

$$a_{21}=\frac{t}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+2}-4t^2g_{2n}-bs^2-2at+4at^2\right)$$

$$a_{22}=\frac{2t}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(2stg_{2n}+(1-2t)g_{2n+1}-bs+2st(b-a)\right)$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 6.2.4 ve Teorem 6.4.3 kulanılarak

$$\sum_{k=1}^{n}G_{2k+1}=\sum_{k=1}^{n}J_1G_{2k}=J_1\sum_{k=1}^{n}G_{2k}$$

$$=\frac{1}{(s+2t-1)(s-2t+1)}\begin{bmatrix}s & 2\\ t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_{2n+3}-4t^2g_{2n+1}-bs^3-2st(a+b)+4bst^2 & 2\left(g_{2n+2}-4t^2g_{2n}-bs^2-2at+4at^2\right)\\ t\left(g_{2n+2}-4t^2g_{2n}-bs^2-2at+4at^2\right) & 2t(2stg_{2n}+(1-2t)g_{2n+1}-bs+2st(b-a))\end{bmatrix}$$

Matris çarpımından

$$a_{11}=\frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}s\left(g_{2n+3}-4t^2g_{2n+1}-bs^3-2st(a+b)+4bst^2\right)+2t\left(g_{2n+2}-4t^2g_{2n}-bs^2-2at+4at^2\right)$$

$$=\frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(sg_{2n+3}+2tg_{2n+2}-4t^2(sg_{2n+1}+2tg_{2n})-sg_{2n+2})-bs^4-2s^2t(a+b)-2bs^2t-4at^2(1-2t)\right)$$

$$a_{12}=\frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}2s\left(g_{2n+2}-4t^2g_{2n}-bs^2-2at+4at^2\right)+4t(2stg_{2n}+(1-2t)g_{2n+1}-bs+2st(b-a))$$

$$=\frac{1}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(2(sg_{2n+2}+2tg_{2n+1})-8t^2g_{2n+1}-4st(a+b)-2bs^3+8bst^2\right)$$

$$=\frac{2}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+3}-4t^2g_{2n+1}-2st(a+b)-bs^3+4bst^2\right)$$

$$a_{21}=\frac{t}{(s+2t-1)s-2t+1)}(g_{2n+3}-4t^2g_{2n+1}-bs^3-2st(a+b)+4bst^2)$$

$$a_{22}=\frac{2t}{(s+2t-1)s-2t+1)}\left(g_{2n+2}-4t^2g_{2n}-bs^2-2at+4at^2\right)$$

7.3. Genelleştirilmiş Jacobsthal Matris Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları

Teorem 7.3.1. Genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizisi için

$$\sum_{k=0}^{n} G_k x^{-k} = \frac{1}{x^n (x^2 - sx - 2t)} \left\{ \left(\frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \right) \left(x^{n+1} - \alpha^{n+1} \right) (x - \beta) - \left(\frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta} \right) \left(x^{n+1} - \beta^{n+1} \right) (x - \alpha) \right\} \quad (7.14)$$

şeklinde bir toplam formülü mevcuttur.

İspat: $\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$ ve $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - sx - 2t$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{G_k}{x^k} = \left(\frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \right) \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{x} \right)^k - \left(\frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta} \right) \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\beta}{x} \right)^k$$

$$= \left(\frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{1 - \left(\frac{\alpha}{x} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{x} \right)} \right) - \left(\frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{1 - \left(\frac{\beta}{x} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\beta}{x} \right)} \right)$$

$$= \frac{1}{x^n} \left\{ \left(\frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \right) - \left(\frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{x^{n+1} - \beta^{n+1}}{x - \beta} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{x^n (x^2 - sx - 2t)} \left\{ \left(\frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \right) \left(x^{n+1} - \alpha^{n+1} \right) (x - \beta) - \left(\frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta} \right) \left(x^{n+1} - \beta^{n+1} \right) (x - \alpha) \right\}$$

Tek tek çarptıktan sonra teorem 7.1.9. uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$= \frac{1}{x^n (x^2 - sx - 2t)} \left\{ -x \left[\left(\frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \right) \alpha^{n+1} - \left(\frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta} \right) \beta^{n+1} \right] + \alpha\beta \left[\left(\frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \right) \alpha^n - \left(\frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta} \right) \beta^n \right] \right\}$$

$$+ \frac{x^{n+1} (\alpha - \beta) G_1 + x^{n+2} (\alpha - \beta) G_0 + (-\alpha^2 + \beta^2) x^{n+1} G_0}{x^n (\alpha - \beta)(x^2 - sx - 2t)}$$

$$= \frac{-1}{x^n (x^2 - sx - 2t)} \left[x G_{n+1} + 2t G_n \right] + \frac{1}{(x^2 - sx - 2t)} \left[x G_1 + (x^2 - sx) G_0 \right]$$

Buradan (7.14) sonucu elde edilmiş olur.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

8.1. Sonuçlar

Bu çalışmanın, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizileri için önemli bir kaynak oluşturabilmesi için bu sayı dizileri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca, bu sayı dizilerinin elemanları kullanılarak oluşturulan yeni Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri tanımlanmış ve matris cebiri kullanılarak ilgili birçok özellik elde edilmiştir. Buradan elde edilen sonuçlar makale olarak "The (s,t) Jacobsthal and (s,t) Jacobsthal-Lucas Matrix Sequences" adıyla, ARS Combinatoria dergisinde yayınlanarak literatüre yeni sonuçlar kazandırılmıştır. Ayrıca istenilen başlangıç şartlarının kullanılabilmesi için genelleştirilmiş Jacobsthal sayı dizileri tanımlandıktan sonra yine bu sayı dizilerinin elemanları kullanılarak oluşturulan genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizileri elde edilmiş Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas matris dizileri ile olan ilişkileri ve çeşitli özelikleri verilmiştir.

8.2. Öneriler

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı ve matris dizileri ile ilgili tıpkı Fibonacci ve Lucas sayı ve matris dizilerinde olduğu gibi daha birçok yeni özellik bulunabilir. Özellikle genelleştirilmiş Jacobsthal sayı ve matris dizileri ile ilgili birçok yeni özellik üretilebilir. Farklı sayı dizilerinin de genelleştirilmiş matris dizileri oluşturulabilir. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas polinomları tanımlanarak yine elemanları bu polinomlar olan matris dizileri oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

Cerin Z., 2007, Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers, Journal of Integer Sequences, Vol. 10,07.2.5

Hoggatt V.E., 1969, Jr. *Fibonacci and Lucas Numbers.* Boston: Houghton-Mifflin

Walton J.E. and Horadam A.F., 1971, "Some properties of certain generalized Fibonacci matrices" *The Fibonacci Quarterly*., 9 (3), 264-276

Sloane N. J. A., 1973, *A Handbook of Integer Sequences.* New York: Academic Press

Silva A., Hogatt V.E., 1980, Generalized Fibonacci numbers" *The Fibonacci Quarterly*.,18(4)290-300

Darrin D. F. and James A. S., 2000, Jacobsthal Numbers and Alternating Sign Matrices, Journal of Integer Sequences, Vol. 3

Djordjevıc G.B. and Srıvastava H.M., Incomplete Generalized Jacobsthal and Jacobsthal Lucas numbers, Mathematical and Computer Modelling 42, 1049-1056

Horadam A.F., 1965, "Basis Properties of a Certain Sequence of Numbers", *The Fibonacci Quarterly*., 3(2), 161-176

Uslu K., Uygun Ş., 2013, "The (s,t) Jacobsthal and (s,t) Jacobsthal-Lucas Matrix Sequences", ARS Combinatoria, vol 108, pp. 13-22.

Swamy M.N.S, "A Generalization of Jacobsthal Polynomials

Horadam A.F., 1999, Jacobsthal Representation Numbers, *The Fibonacci Quarterly*., 37, 2, 141-144

Horadam A.F., 1997, "Jacobsthal Representation Polynomials." *The Fibonacci Quarterly* 35 (2), 137-148

Horadam A.F., 1997, "Rodriques' Formulas for Jacobsthal-type Polynomials." *The Fibonacci Quarterly,* 35 (4), 361-370

Sloane N. J. A., 2006, The on-line Encyclopedia *of Integer Sequences*

Horadam A. F. and Filipponi P., 1997, "Derivative Sequences of Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Polynomials", *The Fibonacci Quarterly,* 35 (4) 352-357

Djordjevıc G.B., 2000, "Generalized Jacobsthal polynomials" *The Fibonacci Quarterly,* 38,3, 239-243

Koshy T., 2001, Fibonacci and Lucas numbers with Applications, NY

Koken F. ,Bozkurt D., 2008, On the Jacobsthal numbers by Matrix Methods, Int. Jour. Contemp. Math Sciences,Vol.3, no.13, 605-614

Civciv H., 2009, Fibonacci ve Lucas Matris Dizileri ve Özelikleri, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya

Civciv H., Türkmen R., 2008, On the (s,t) Fibonacci and Fibonacci Matrix sequence, Ars Comb., 87,161-173

Civciv H., Türkmen R., 2008, Notes on the (s,t) Lucas and Lucas Matrix sequence, Ars Comb., 89,271-285

Cerin Z., 2007, Formula efor Sums of Jacobsthal Lucas Numbers, İnternational Mathematical Forum, 2, 1969-1984

Cerin Z., 2006, Properties of odd an deven terms of the Fibonacci sequence, Demonstration Mathematica 39 (1) (2006), 55-60

Cerin Z, 2005, Some alternating sums of Lucas Numbers, Central Eurepean Journal of Mathematics, 3 (1) (2005), 1-13

Horadam A.F., 2002, "Convolutions for Jacobsthal-type Polynomials" The Fibonacci Quarterly, 40 (3) (2002), 212-222

Weisstein, Eric W., 2006-05-15, "Jacobsthal Number", Wolfram Mathworld, [online], http://mathworld.wolfram.com/JacobsthalNumber.html, Retrieved 2007-10-03, [Ziyaret Tarihi: 25 Mayıs 2011]

Silvester J.R., 1979, "Fibonacci Properties by Matrix methods", The Mathematical Gazette, Vol.63, No.425,188-191

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Şükran UYGUN
Uyruğu : TC
Doğum Yeri ve Tarihi : Gaziantep 1980
Telefon : 0506 602 29 80
Faks :
e-mail : suygun@gantep.edu.tr

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	**Gaziantep Lisesi, Şahinbey, Gaziantep**	**1998**
Üniversite	:	**Gaziantep Üniversitesi**	**2002**
Yüksek Lisans	:	**Gaziantep Üniversitesi**	**2005**
Doktora	:	**Selçuk Üniversitesi**	**2013**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi

UZMANLIK ALANI
Uygulamalı Matematik

YABANCI DİLLER
İngilizce (ÜDS) : 70

YAYINLAR

Uslu K., Uygun Ş., 2013, "The (s,t) Jacobsthal and (s,t) Jacobsthal-Lucas Matrix Sequences", ARS Combinatoria, vol 108, pp. 13-22. (Doktora tezinden yapılmıştır).

Uslu K., Taşkara N., Uygun Ş., 2011, "The relations among k-Fibonacci, k-Lucas and generalized k-Fibonacci numbers and the spectral norms of the matrices of involving these numbers", vol 102, pp.183-192.