T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUP-GRUPOİDLERİN İZOKLİNİZMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Onur SOYYİĞİT

DANIŞMAN
Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 192342411 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Onur SOYYİĞİT** tarafından hazırlanan **GRUP-GRUPOİDLERİN İZOKLİNİZMİ** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir

Danışman: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

Yozgat Bozok Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. .....

Tez Savunma Tarihi: 01 / 07 / 2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Onur SOYYİĞİT

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca ve tez çalışmam süresince büyük emeği ve özverisi ile bana destek olan, deneyimleri ile bana yol gösteren tez danışmanım Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca bana her türlü desteği sunan aileme şükran ve minnetlerimi sunuyorum. Ayrıca her konuda yanımda olan tüm arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Onur SOYYİĞİT

AKSARAY, 2022

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....i
İÇİNDEKİLER..... ii
ÖZET..... iii
ABSTRACT.....iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....v
SİMGELER VE KISALTMALAR.....vi
1. GİRİŞ.....1
2. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN İZOKLİNİZMİ.....2
2.1 Gruplar Arasında İzoklinizm.....4
2.2 Çaprazlanmış Modüller.....6
2.3 Çaprazlanmış Modüller Arasında İzoklinizm.....13
3. GRUP-GRUPOİDLERİN İZOKLİNİZMİ.....18
3.1 Grup-grupoidler.....18
3.2 Grup-Grupoidler Arasında İzoklinizm.....27
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....36
KAYNAKLAR.....37
ÖZGEÇMİŞ.....39

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRUP-GRUPOİDLERİN İZOKLİNİZMİ

Onur SOYYİĞİT

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

ÖZET

Gruplar arasında izoklinik olma bağıntısı, izomorf olma bağıntısından daha zayıf bir denklik bağıntısıdır. Yani izomorf olan gruplar izokliniktir fakat tersi her zaman doğru değildir. Son yıllarda izoklinizm kavramı gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller için de tanımlanmıştır. Bu tez çalışmasında ise gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile grup-grupoidlerin kategorisinin denkliği kullanılarak grup-grupoidler arasında izoklinizm kavramı tanımlanmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, izoklinizm ile ilgili literatürde bulunan çalışmalara yer verilmiştir. İkinci bölümde, gruplar arasındaki izoklinizm kavramı, gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller arasında izoklinizm kavramı ve bu kavramlarla ilgili daha önce literatürde elde edilen sonuçlar hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, grup-grupoidler arasında izoklinizm kavramı tanımlanmış ve bu tanımlamanın gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller için verilenle uyumlu olduğu gösterilmiştir. Ayrıca grup-grupoidlerin izoklinizmi hakkında bazı önemli sonuçlar verilmiştir. Son olarak dördüncü bölümde; tezde elde edilmiş sonuçlar kısaca özetlenmiş ve ileride bu konuda yapılabilmesi mümkün çalışmalarla ilgili öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İzoklinizm, grup-grupoid, çaprazlanmış modül.

Temmuz, 2022; 39 sayfa

M.Sc. THESIS

ISOCLINISM OF GROUP-GROUPOIDS

Onur SOYYİĞİT

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN

ABSTRACT

The relation of being isoclinic between the groups is a weaker equivalence relation than the relation of being isomorphic. That is, groups that are isomorphic are isoclinic, but the reverse is not always true. In recent years, the concept of isoclinism has also been defined for crossed modules over groups. In this thesis, using the equivalence of the category of crossed modules over groups and the category of group-groupoids, the concept of isoclinism between group-groupoids was defined and various properties were examined.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, studies in the literature on isoclinism are included. In the second chapter, the concept of isoclinism between groups, the concept of isoclinism between crossed modules on groups and the results obtained in the literature about these concepts are reminded. In the third chapter, the concept of isoclinism between group-groupoids is defined and it is shown that this definition is compatible with the one given in crossed modules over groups. In addition, some important conclusions about the isoclinism of group-groupoids are given. Finally, in the fourth chapter; the results obtained in the thesis are briefly summarized and suggestions for possible future studies on this subject are given.

Keywords: Isoclinism, group-groupoid, crossed module.

July, 2022; 39 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Komütatör dönüşümlerin uyumluluğu 4
Şekil 2.2. Abelyan gruplar için komütatör dönüşümlerin uyumluluğu 5
Şekil 2.3. Çaprazlanmış modüller için birinci komütatör eşleme diyagramı 15
Şekil 2.4. Çaprazlanmış modüller için ikinci komütatör eşleme diyagramı 15
Şekil 2.5. Basit bağlantılı veya sonlu durumda komütatör dönüşümleri diyagramı ..16
Şekil 3.1. Grup-grupoidler için birinci komütatör eşleme diyagramı.....29
Şekil 3.2. Grup-grupoidler için ikinci komütatör eşleme diyagramı 29
Şekil 3.3. Gruplar için komütatör eşleme diyagramı.....30
Şekil 3.4. Gruplar için komütatör eşleme diyagramı.....31

SİMGELER VE KISALTMALAR

$Z(G)$	G grubunun merkezi
$H \leq G$	H grubu G grubunun alt grubudur
$H \lhd G$	H grubu G grubunun normal alt grubudur
$[a, b]$	a ve b nin komütatör elemanı
$[G, G]$	G grubunun oluşturduğu komütatör grubu
$G \,/\, H$	H modülüne göre bölüm grubu
$H \sim G$	H grubu G grubuna izokliniktir
$H \times G$	H ve G gruplarının direkt çarpımı
$H \cong G$	H grubu G grubuna izomorftur
$a \cdot b$	a elemanın b elemanına etkimesi
$H \hookrightarrow G$	H grubundan G grubuna içine dönüşüm
$\mathrm{Aut}(G)$	G grubunun otomorfizmlerinin grubu
$H \rtimes G$	H ve G gruplarının yarı-direkt çarpımı
$\ker(a)$	a dönüşümünün çekirdeği
$\mathrm{coker}(a)$	a dönüşümünün eşçekirdeği
id_G	G grubunun birim dönüşümü
$st_G(H)$	G grubunun H grubuna göre sabitleyicisi
XMod	Çaprazlanmış modüller kategorisi
GpGp	Grup-grupoidler kategorisi
$\sim$	İzoklinik

1. GİRİŞ

İzoklinizm kavramı, mertebeleri bir asalın kuvveti olan sonlu grupların sınıflandırılması için ilk olarak 1940 yılında Hall tarafından tanıtılmış [1] ve bu kavram 1946 yılında Hall ve Senior tarafından detaylandırılmıştır [2]. O zamandan beri Jones ve Wiegold [3], Modabbernia [4], Mohammadzadeh vd. [5], Parvaneh vd. [6], Salemkar vd. [7] gibi birçok araştırmacı tarafından izoklinizmle ilgili birçok yeni sonuç verilmiştir. Ayrıca gruplar ve onların Schur çarpanlarına sahip kök genişlemeleri arasındaki ilişki Beyl ve Tappe [8] tarafından 1982 yılında verilmiştir. Burada Beyl ve Tappe merkezi grup genişlemelerinin izoklinizmini ele almışlardır.

İzoklinizm, gruplar üzerinde izomorfizmden daha zayıf bir denklik bağıntısıdır. Yani izomorf olan gruplar izokliniktir fakat tersi her zaman doğru değildir. İzoklinizm kavramı iki temel fikre dayanmaktadır. Bunlardan birincisi; G ve G' gibi iki grup birbirleriyle izomorfizm ilişkisine yerleştirilebilirlerse $(G \cong G')$ soyut anlamda aynı kabul edilir. O zaman, açıkça, izomorfizm ilişkisini daha zayıf bir denklik bağıntısı olan izoklinizm $(G \sim G')$ ile değiştirirsek, tüm grupların karşılıklı özel sınıflar halinde bir sınıflandırmasını elde ederiz. İkinci fikir ise, abelyan (değişmeli) grupların, en azından sonlu mertebeye sahip olanların, tamamen biliniyor olarak kabul edilebileceklerinden, sınıflandırılmalarına gerek olmadığıdır. Böylece Hall $G \sim G'$ bağıntısını, 0 tek elemanlı grup olmak üzere $G \sim 0$ ifadesinin anlamı "G abelyandır (değişmelidir)" olacak şekilde seçmiştir. Değişmeli grupların karakteristik özelliği, yani elemanlarının geçirgenliği, değişmeli bir grupta $[x, y]$ komütatör fonksiyonunun tam olarak birim fonksiyona eşit olduğu söylenerek ifade edilebilir. G ile G' nün bir izoklinizmi, $G/Z(G)$ ve $G'/Z(G')$ arasında (belirli türden) bir izomorfizm olarak, bir tarafta G nin $Z(G)$ yi içeren alt grupları ile diğer taraftan G' nün $Z(G')$ nü içeren alt grupları arasında birebir bir eşleme oluşturur.

2016 yılında Odabaş vd. [9] gruplar için Hall tarafından tanımlanan bu izoklinizm kavramını çaprazlanmış modüller için tanımlamış ve çeşitli özelliklerini incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasında ise Odabaş vd. [9] tarafından verilen çaprazlanmış modüller için izoklinizm kavramı grup-grupoidler için elde edilmiş ve yine Odabaş vd. [9] tarafından elde edilen sonuçlar grup-grupoidlarin kategorisine aktarılmıştır.

2. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN İZOKLİNİZMİ

Çaprazlanmış modüllerdeki izoklinizm kavramına geçiş yapmadan önce gruplar üzerinde bilinen bazı tanımları hatırlatıyoruz.

Tanım 2.1 G boştan farklı bir küme ve $+: G \times G \to G$ bir ikili işlem olmak üzere

(i) her $a, b, c \in G$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$,

(ii) her $a \in G$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olacak şekilde birim eleman olarak adlandırılan bir $0 \in G$ vardır ve

(iii) her $a \in G$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olacak şekilde ters eleman olarak adlandırılan bir $-a \in G$ vardır;

şartları sağlanıyorsa $(G, +)$ ikilisine bir grup denir. Bununla birlikte eğer

(iv) her $a, b \in G$ için $a + b = b + a$

oluyorsa $(G, +)$ ikilisine bir abelyan (değişmeli) grup denir. Kısaca bir grup G ile gösterilecektir.

Tanım 2.2 G bir grup ve $H \subseteq G$ olmak üzere eğer H kümesi de G üzerindeki işlemle beraber bir grup yapısına sahipse bu H grubuna G grubunun bir alt grubu denir ve bu durum $H \leq G$ ile gösterilir.

Herhangi bir G grubu için G nin yalnızca birim elemandan oluşan $\{0\}$ altkümesi ve G nin kendisi birer alt gruptur ve bu alt gruplar aşikâr alt grup olarak adlandırılır. $H \leq G$ olmak üzere her $a \in G$ için

$$a + H = \{a + h \mid h \in H\} \tag{2.1}$$

kümesine bir sol koset,

$$H + a = \{h + a \mid h \in H\} \tag{2.2}$$

kümesine bir sağ koset denir.

Tanım 2.3 G bir grup ve $N \leq G$ olmak üzere her $a \in G$ elemanı için $a + N = N + a$ oluyorsa G nin bu N alt grubuna normal altgrup denir ve bu durum $N \lhd G$ ile gösterilir.

Örnek 2.4 Bir G grubunun aşikâr alt grupları normal alt gruptur.

Tanım 2.5 G ile H birer grup ve $f: G \to H$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in G$ için

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \tag{2.3}$$

oluyorsa bu f fonksiyonuna bir grup homomorfizmi denir.

Tanım 2.6 G ile H birer grup ve $f: G \to H$ bir grup homomorfizmi olmak üzere

$$\ker f = \{a \in G \mid f(a) = 0\} \tag{2.4}$$

kümesine f grup homomorfizminin çerkirdeği,

$$\operatorname{Im} f = \{f(a) \mid a \in G\} \tag{2.5}$$

kümesine f grup homomorfizminin görüntüsü denir.

Önerme 2.7 Bir $f: G \to H$ grup homomorfizmi için $\ker f \lhd G$ ve $\operatorname{Im} f \leq H$ dır.

Tanım 2.8 Birebir ve örten bir grup homomorfizmine bir izomorfizm denir. Özel olarak bir G grubu için G den G ye tanımlı izomorfizmlere otomorfizm denir. G nin tüm otomorfizmlerin kümesi bileşke işlemi ile bir grup yapısı oluşturur. Bu gruba G nin otomorfizmlerinin grubu denir ve bu grup $\operatorname{Aut} G$ ile gösterilir.

Tanım 2.9 G bir grup olmak üzere

$$Z(G) = \{z \in G \mid \text{her } g \in G \text{ için } g + z = z + g\} \tag{2.6}$$

kümesi G nin bir normal alt grubu, yani $Z(G) \lhd G$ dir. Bu gruba G nin merkezi denir.

Tanım 2.10 G bir grup ve $a, b \in G$ olsun. Bu durumda

(v) $[a,b] = a + b - a - b$ elemanına a ile b nin komütatörü denir.

(vi) $[G,G] = \langle [a,b] \mid a, b \in G \rangle$ grubu G nin bir normal alt grubudur ve bu gruba G nin komütatör alt grubu denir.

Tanım 2.11 G bir grup ve N ise G nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda $G/N = \{a + N \mid a \in G\}$ bölüm kümesi üzerinde her $a + N, b + N \in G/N$ için;

$$(a+N)+(b+N)=(a+b)+N \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanan işleme göre G/N bir gruptur. Bu G/N grubuna G nin N grubuna göre bölüm grubu denir.

2.1 Gruplar Arasında İzoklinizm

Gruplar üzerinde izoklinizm kavramı ilk olarak 1940 yılında Hall [1] tarafından tanıtılmış olup izoklinizm, gruplar üzerinde izomorfizmden daha zayıf bir denklik bağıntısıdır. Yani izomorf olan gruplar izokliniktir fakat tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.12 G ve H birer grup olmak üzere, $\alpha: G/Z(G) \to H/Z(H)$ dönüşümü G ve H gruplarının merkezsel bölümleri arasında bir grup izomorfizmi ve $\beta: [G,G] \to [H,H]$ dönüşümü G ve H gruplarının komütatör (türetilmiş) alt grupları arasında bir grup izomorfizmi olmak üzere bu izomorfizmler G ve H gruplarının komütatör dönüşümleri ile uyumlu ise (α,β) ikilisine G grubundan H grubuna bir izoklinizm denir. Ayrıca bu durumda G ve H grupları izokliniktir denir ve $(\alpha,\beta): G \sim H$ ile gösterilir. Burada α ve β izomorfizmlerinin G ve H gruplarının komütatör dönüşümleri ile uyumlu olması

$$\begin{array}{ccc} G/Z(G)\times G/Z(G) & \xrightarrow{c_G} & [G,G] \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha\times\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ H/Z(H)\times H/Z(H) & \xrightarrow[c_H]{} & [H,H] \end{array}$$

Şekil 2.1. Komütatör dönüşümlerin uyumluluğu.

diyagramının değişmeli olması, yani $\beta c_G = c_H(\alpha \times \alpha)$ olması anlamına gelmektedir [1].

Örnek 2.13 Tüm abelyan gruplar birbirlerine izokliniktir [1]. Gerçekten, M ve N iki abelyan grup olsun. $m_1, m_2 \in M$ için, M abelyan olduğundan;

$$[m_1,m_2] = m_1+m_2-m_1-m_2 = m_1-m_1+m_2-m_2 = 0_M \tag{2.8}$$

olur yani M'nin komütatör alt grubu $[M,M]=\{0_M\}$ dır. Benzer şekilde $n_1, n_2 \in N$ için,

$$[n_1, n_2] = n_1 + n_2 - n_1 - n_2 = n_1 - n_1 + n_2 - n_2 = 0_N \tag{2.9}$$

olur yani N'nin komütatör alt grubu $[N, N] = \{0_N\}$ dır. M ve N abelyan gruplarının merkezlerine bakacak olursak abelyan oldukları için;

$$Z(M) = \{z_1 \in M \mid \text{her } m \in M \text{ için } m + z_1 = z_1 + m\} = \{0_M\} \tag{2.10}$$

ve

$$Z(N) = \{z_2 \in N \mid \text{her } n \in N \text{ için } n + z_2 = z_2 + n\} = \{0_N\} \tag{2.11}$$

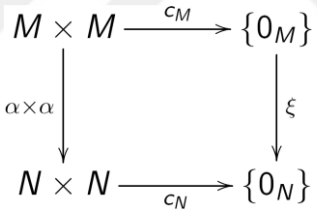
olur. Bu nedenle

$$M/Z(M) = M/\{0_M\} \cong M \tag{2.12}$$

ve

$$N/Z(N) = N/\{0_N\} \cong N \tag{2.13}$$

dir.



Şekil 2.2. Abelyan gruplar için komütatör dönüşümlerin uyumluluğu.

Burada c_M, c_N komütatör dönüşümleri ve (η, ξ) ikilisi aşikâr homomorfizmlerdir. Böylece M ve N ableyan grupları izokliniktir, $(\eta, \xi): M \sim N$.

Önerme 2.14 G bir grup olmak üzere $G \sim 1$ dir ancak ve ancak G abelyandır [1].

Tanım 2.15 G bir grup olmak üzere eğer G, $Z(G) \leq [G, G]$ şartını sağlıyorsa G ye bir kök (stem) grup denir.

Örnek 2.16 Her grup bir kök gruba izokliniktir [1].

2.2 Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modül kavramı, ilk olarak 1949 yılında Whitehead [10] tarafından homotopi 2-tipleri için cebirsel bir model olarak tanıtılmıştır. Daha sonra gruplar üzerinde genel tanımı verilen bu kavram, düşük boyutlu değişmeli olmayan kohomolojideki katsayıları belirlemek için temel bir araç olarak kullanılmıştır.

Tanım 2.17 G ve H birer grup olmak üzere bir

$$\begin{array}{rcl} G \times H & \to & H \\ (g,h) & \mapsto & g \cdot h \end{array} \tag{2.14}$$

fonksiyonu verilsin. Eğer

(i) her $h \in H$ için $0_G \cdot h = h$,

(ii) her $h \in H$ ve $g, g_1 \in G$ için $(g + g_1) \cdot h = g \cdot (g_1 \cdot h)$

(iii) her $h, h_1 \in H$ ve $g \in G$ için $g \cdot (h + h_1) = g \cdot h + g \cdot h_1$

şartları sağlanıyor ise G grubu H grubu üzerine (soldan) etkir denir.

Örnek 2.18 G ve H birer grup olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} G \times H & \to & H \\ (g,h) & \mapsto & g \cdot h = h \end{array} \tag{2.15}$$

bir etkimedir. Bu etkimeye aşikâr etkime denir.

Örnek 2.19 G bir grup ve $N \lhd G$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} G \times N & \to & N \\ (g,n) & \mapsto & g \cdot n = g + n - g \end{array} \tag{2.16}$$

bir etkimedir. Bu etkimeye konjügasyon etkime denir.

G ve H birer grup ve G grubunun H grubu üzerine bir etkimesi verilsin. Bu durumda $H \times G$ kartezyen çarpım kümesi

$$(h, g) + (h_1, g_1) = (h + g \cdot h_1, g + g_1) \tag{2.17}$$

işlemi ile birlikte bir grup yapısına sahiptir. Bu gruba H ile G nin yarı-direkt çarpım grubu denir ve bu grup genellikle $H \rtimes G$ ile gösterilir.

Tanım 2.20 A ve B iki grup ve $\alpha: A \to B$ bir grup homomorfizmi olsun. B nin A üzerine (sol) etkimesi

$$\begin{array}{ccc} B \times A & \to & A \\ (b, a) & \mapsto & b \cdot a \end{array} \tag{2.18}$$

ile verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (A, B, α) üçlüsüne bir çaprazlanmış modül denir [10].

[CM1] Her $a \in A$ ve $b \in B$ için

$$\alpha(b \cdot a) = b + \alpha(a) - b, \tag{2.19}$$

[CM2] Her $a, a_1 \in A$ için

$$\alpha(a) \cdot a_1 = a + a_1 - a. \tag{2.20}$$

Örnek 2.21 G bir grup ve $N \lhd G$ olmak üzere, G nin N üzerindeki konjüge etkimesi ile beraber $N \hookrightarrow G$ içine dönüşümü bir çaprazlanmış modüldür.

Örnek 2.22 M bir G-modül olmak üzere $0: M \to G$ sıfır morfizmi bir çaprazlanmış modül yapısına sahiptir.

Örnek 2.23 G bir grup ve G nin otomorfizmlerinin grubu $\mathrm{Aut}(G)$ olmak üzere $G \to \mathrm{Aut}(G)$ dönüşümü bir çaprazlanmış modüldür [11].

Örnek 2.24 X bir topolojik grup ve $0 \in X$ birim eleman olmak üzere X uzayında başlangıcı 0 olan eğrilerin homotopi sınıflarının kümesi $\mathcal{P}(X, 0)$ bir grup olur ve bununla birlikte $d_1: \mathcal{P}(X, 0) \to X$ bitiş dönüşümü ise bir çaprazlanmış modül yapısına sahiptir.

Örnek 2.25 Bir X topolojik uzayında $A \subseteq X$ ve $x \in A$ olmak üzere X in ikinci relatif homotopi grubu $\pi_2(X, A, x)$ den $x \in A$ noktasındaki temel grubu $\pi_1(A, x)$ üzerine standart etkisi,

$$\sigma: \pi_2(X, A, x) \to \pi_1(A, x) \tag{2.21}$$

sınır dönüşümü ile birlikte çaprazlanmış modül olur. Bu çaprazlanmış modüle temel (fundamental) çaprazlanmış modül denir ve $\Pi(X, A, x)$ şeklinde gösterilir [10].

Tanım 2.26 (A, B, α) ve (A', B', α') iki çaprazlanmış modül ve $f_1: A \to A'$, $f_2: B \to B'$ iki grup homomorfizmi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\langle f_1, f_2 \rangle$ ikilisine bir çaprazlanmış modül morfizmi denir:

[CMM1] $f_2\alpha = \alpha' f_1$,

[CMM2] her $b \in B$ ve her $a \in A$ için

$$f_1(b \cdot \alpha) = f_2(b) \cdot f_1(a). \tag{2.22}$$

Böylece objeleri çaprazlanmış modüller ve morfizmleri de çaprazlanmış modüllerin morfizimi olan **XMod** çaprazlanmış modüller kategorisi oluşur.

f_1 ve f_2 birer izomorfizm (monomorfizm, epimorfizm, otomorfizm) ise $\langle f_1, f_2 \rangle$ ikilisine (A, B, α) çaprazlanmış modülünün bir izomorfizmi (monomorfizmi, epimorfizmi, otomorfizmi) denir.

Çaprazlanmış modüller kategorisindeki (**XMod**) sıfır obje ve eşitleyicilerin (equaliser) varlığı, alt objelerin ve normal alt objelerin varlığını garantiler.

Tanım 2.27 (G, G', α) ve (H, H', α') iki çaprazlanmış modül olsun. Eğer

(i) H ile H' grupları sırasıyla G ile G' gruplarının birer alt grubu ($H \leq G$, $H' \leq G'$),

(ii) α' dönüşümü α dönüşümünün H grubu üzerine kısıtlaması ($\alpha' = \alpha|_H$) ve

(iii) H' grubunun H grubu üzerine etkimesi, G' grubunun G grubu üzerine etkimesinden indirgenmiş etkime ise

(H, H', α') çaprazlanmış modülüne (G, G', α) çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülü denir [11].

Tanım 2.28 (G, G', α) bir çaprazlanmış modül ve (H, H', α') ise (G, G', α) nin bir alt çaprazlanmış modülü olsun. Eğer

(i) H, G nin normal alt grubu;

(ii) her $g' \in G'$ ve $h \in H$ için $g' \cdot h \in H$ ve

(iii) her $h' \in H'$ ve $g \in G$ için $h' \cdot g - g \in H$

şartları sağlanıyorsa (H, H', α') çaprazlanmış modülüne (G, G', α) nin bir normal alt çaprazlanmış modülü veya ideali denir [11].

Bu durumda, doğal olarak, G' grubunun G grubu üzerine etkimesinden G'/H' bölüm grubunun G/H bölüm grubu üzerine bir etkimesi ve benzer şekilde $\alpha: G \to G'$ grup homomorfizminden

$$\bar{\alpha}: G/H \to G'/H' \tag{2.23}$$

grup homomorfizmi elde edilir. Sonuçta elde edilen bu $(G/H, G'/H', \bar{\alpha})$ çaprazlanmış modülüne bölüm çaprazlanmış modülü denir.

Mucuk vd. [12] tarafından verilmiş olan aşağıdaki önerme tezde elde edilen bazı sonuçlarda kullanıldığı için ispatsız olarak verilecektir.

Önerme 2.29 (G, G', α) bir çaprazlanmış modül ve (H, H', α') ise (G, G', α) nin bir normal alt çaprazlanmış modülü (ideali) olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rccl} \phi & : & G/H \rtimes G'/H' & \to & (G \rtimes G') \rtimes (H \rtimes H') \\ & & (g + H, g' + H') & \mapsto & \phi(g + H, g' + H') = (g, g') + (H \rtimes H') \end{array} \tag{2.24}$$

bir izomorfizmdir.

Yukarıdaki önermede verilen izomorfizm ϕ gerekli durumlarda $\phi_{G,G',H,H'}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.30 (A, B, α) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$A^B = \{\, a \in A \mid \text{her } b \in B \text{ için } b \cdot a = a \,\} \tag{2.25}$$

ve

$$st_B(A) = \{\, b \in B \mid \text{her } a \in A \text{ için } b \cdot a = a \,\} \tag{2.26}$$

olmak üzere $\alpha: A^B \to \big(st_B(A) \cap Z(B)\big)$ bir çaprazlanmış modüldür. Bu çaprazlanmış modüle (A, B, α) çaprazlanmış modülünün merkezi denir ve

$$Z(A, B, \alpha) = (A^B, st_B(A) \cap Z(B), \alpha) \tag{2.27}$$

şeklinde gösterilir [11].

Lemma 2.31 Bir (A, B, α) çaprazlanmış modülü için $A^B \subseteq Z(A)$ dir.

İspat: $a \in A^B$ olmak üzere her $a_1 \in A$ için

$$\begin{aligned} a &= \alpha(a_1) \cdot a \\ &= a_1 + a - a_1 \\ &= a_1 + a - a_1 \end{aligned} \tag{2.28}$$

olup buradan

$$a + a_1 = a_1 + a \tag{2.29}$$

elde edilir. Böylece $a \in Z(A)$ dir ve $A^B \subseteq Z(A)$ olduğu görülür.

Tanım 2.32 (A, B, α) bir çaprazlanmış modül ve (S_1, T_1, α) ile (S_2, T_2, α) çaprazlanmış modülleri (A, B, α) nın birer ideali olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} [T_2, S_1] &= \langle\, t_2 \cdot s_1 - s_1 \mid s_1 \in S_1, t_2 \in T_2 \,\rangle, \\ [T_1, S_2] &= \langle\, t_1 \cdot s_2 - s_2 \mid s_2 \in S_2, t_1 \in T_1 \,\rangle \end{aligned} \tag{2.30}$$

ve $[T_1, T_2]$ komütatör alt grup olmak üzere $([T_2, S_1] + [T_1, S_2], [T_1, T_2], \alpha)$ çaprazlanmış modülüne (A, B, α) nın (S_1, T_1, α) ve (S_2, T_2, α) tarafından üretilen komütatör alt çaprazlanmış modülü denir ve $[(S_1, T_1, \alpha), (S_2, T_2, \alpha)]$ ile gösterilir. Burada özel olarak

$$D_B(A) = \langle b \cdot a - a \mid a \in A, b \in B \rangle \tag{2.31}$$

olmak üzere $(D_B(A), [B, B], \alpha)$ bir çaprazlanmış modüldür. Bu çaprazlanmış modüle kısaca (A, B, α) çaprazlanmış modülünün komütatör alt çaprazlanmış modülü denir ve $[(A, B, \alpha), (A, B, \alpha)] = (A, B, \alpha)'$ şeklinde gösterilir [11].

Önerme 2.33 (A, B, α) bir çaprazlanmış modül olmak üzere

(i) $Z(A \rtimes B) = A^B \rtimes \big(st_B(A) \cap Z(B)\big)$;

(ii) $D_B(A \rtimes B) = \langle\, [(0, b_1), (a, b)] \mid (0, b_1), (a, b) \in A \rtimes B \,\rangle$ olmak üzere

$$[A \rtimes B, A \rtimes B] = D_B(A \rtimes B) = D_B(A) \rtimes [B, B]; \tag{2.32}$$

(iii) $st_B(A \rtimes B) = \{\, b \in B \mid (0, b) + (a_1, b_1) = (a_1, b_1) + (0, b) \,\}$ olmak üzere

$$st_B(A \rtimes B) = st_B(A) \cap Z(B) \tag{2.33}$$

dir.

İspat: (A, B, α) bir çaprazlanmış modül olsun.

(i) $(a, b) \in Z(A \rtimes B)$ olsun. Bu durumda her $b_1 \in B$ için

$$\begin{aligned} (a, b) + (0, b_1) &= (0, b_1) + (a, b) \\ (a, b + b_1) &= (b_1 \cdot a, b_1 + b) \end{aligned} \tag{2.34}$$

olup buradan $b_1 \cdot a = a$ ve $b + b_1 = b_1 + b$ bulunur. Yani $a \in A^B$ ve $b \in Z(B)$ dir. Ayrıca her $a_1 \in A$ için

$$\begin{aligned} (a, b) + (a_1, b_1) &= (a_1, b_1) + (a, b) \\ (a + b \cdot a_1, b + b_1) &= (a_1 + b_1 \cdot a) + (b_1, b) \end{aligned} \tag{2.35}$$

olup buradan,

$$\begin{aligned} a + b \cdot a_1 &= a_1 + b_1 \cdot a \\ a + b \cdot a_1 &= a_1 + a \\ a + b \cdot a_1 &= a + a_1 \\ b \cdot a_1 &= a_1 \end{aligned} \tag{2.36}$$

bulunur. Yani $b \in st_B(A)$ dır. Böylece $(a, b) \in A^B \rtimes (st_B(A) \cap Z(B))$ dir. Bu ise

$$Z(A \rtimes B) \subseteq A^B \rtimes (st_B(A) \cap Z(B)) \tag{2.37}$$

olduğu anlamına gelir. Diğer taraftan $(a', b') \in A^B \rtimes \big(st_B(A) \cap Z(B)\big)$ olsun. Bu durumda bir $(a_1, b_1) \in A \rtimes B$ için $a' \in A^B$ olduğundan $b_1 \cdot a' = a'$ ve $a' +$

$a_1 = a_1 + a'$; $b' \in st_B(A)$ olduğundan $b' \cdot a_1 = a_1$ ve $b' \in Z(B)$ olduğundan $b' + b_1 = b_1 + b'$ olur. O halde

$$\begin{aligned}(a', b') + (a_1, b_1) &= (a' + b' \cdot a_1, b' + b_1) \\ &= (a' + a_1, b' + b_1) \\ &= (a_1 + a', b_1 + b')\end{aligned} \tag{2.38}$$

ve

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a' + b') &= (a_1 + b_1 \cdot a', b_1 + b') \\ &= (a_1 + a', b_1 + b')\end{aligned} \tag{2.39}$$

olup $(a' + b') + (a_1, b_1) = (a_1, b_1) + (a' + b')$, yani $(a' + b') \in Z(A \rtimes B)$ dir. Bu ise

$$A^B \rtimes \left(st_B(A) \cap Z(B)\right) \subseteq Z(A \rtimes B) \tag{2.40}$$

olduğunu gösterir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

(ii) Öncelikle $[A \rtimes B, A \rtimes B] = D_B(A \rtimes B)$ olduğunu gösterelim. $D_B(A \rtimes B)$ alt grubunun tanımından açıkça görülüyor ki $D_B(A \rtimes B) \subseteq [A \rtimes B, A \rtimes B]$ dir. Şimdi bir $[(a, b), (a_1, b_1)] \in [A \rtimes B, A \rtimes B]$ alalım. Bu durumda $\alpha(a_1) + b_1 = b_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}[(a, b), (a_1, b_1)] = &-[(0, b_2), (a, b)] - [(0, b), (0, b_2)] \\ &+[(0, b), (a_1, b_1)]\end{aligned} \tag{2.41}$$

olup

$$[(0, b_2), (a, b)], [(0, b), (0, b_2)], [(0, b), (a_1, b_1)] \in D_B(A \rtimes B) \tag{2.42}$$

olduğundan $[(a, b), (a_1, b_1)] \in D_B(A \rtimes B)$ dır. Böylece $[A \rtimes B, A \rtimes B] \subseteq D_B(A \rtimes B)$ olup buradan $[A \rtimes B, A \rtimes B] = D_B(A \rtimes B)$ eşitliği elde edilir.

Şimdi ise $D_B(A \rtimes B) = D_B(A) \rtimes [B, B]$ olduğunu gösterelim. Öncelikle bir $[(0, b_1), (a, b)] \in D_B(A \rtimes B)$ alalım.

$$[(0, b_1), (a, b)] = \left((b_1 \cdot a - a) - ([b_1, b] \cdot a - a), [b_1, b]\right) \tag{2.43}$$

olup $b_1 \cdot a - a, [b_1, b] \cdot a - a \in D_B(A)$ ve $[b_1, b] \in [B, B]$ olduğundan $[(0, b_1), (a, b)] \in D_B(A) \rtimes [B, B]$ dir. Böylece $D_B(A \rtimes B) \subseteq D_B(A) \rtimes [B, B]$ dir. Diğer taraftan $(b \cdot a - a, [b_1, b_2]) \in D_B(A) \rtimes [B, B]$ olsun.

$$[(0,b),(a,0)] = (b \cdot a - a, 0) \in D_B(A \rtimes B) \tag{2.44}$$

ve

$$[(0,b_1),(0,b_2)] = (0,[b_1,b_2]) \in D_B(A \rtimes B) \tag{2.45}$$

olup

$$(b \cdot a - a, [b_1,b_2]) = [(0,b),(a,0)] + [(0,b_1),(0,b_2)] \in D_B(A \rtimes B) \tag{2.46}$$

bulunur. Böylece $D_B(A) \rtimes [B,B] \subseteq D_B(A \rtimes B)$ dir ve sonuç olarak $D_B(A \rtimes B) = D_B(A) \rtimes [B,B]$ dir.

(iii) $st_B(A \rtimes B)$ kümesinin tanımında verilen eşitliği düzenlersek $b \in st_B(A \rtimes B)$ olmak üzere her $a_1 \in A$ ve $b_1 \in B$ için

$$\begin{aligned} (0,b) + (a_1,b_1) &= (a_1,b_1) + (0,b) \\ (b \cdot a_1, b + b_1) &= (a_1, b_1 + b) \end{aligned} \tag{2.47}$$

olup $b \cdot a_1 = a_1$ ve $b + b_1 = b_1 + b$ eşitlikleri elde edilir. Bu ise $st_B(A \rtimes B) = st_B(A) \cap Z(B)$ eşitliğinin sağlandığını gösterir.

Böylece ispat tamamlanır.

2.3 Çaprazlanmış Modüller Arasında İzoklinizm

Tezin devamında yazım kolaylığı açısından verilen bir (A,B,α) çaprazlanmış modülü için $(A,B,\alpha)/Z(A,B,\alpha) = \left(A/A^B, B/\left(st_B(A) \cap Z(B)\right), \bar{\alpha}\right)$ bölüm çaprazlanmış modülü kısaca $(\bar{A},\bar{B},\bar{\alpha})$ ile gösterilecektir. Aşağıdaki önermenin detayları tezin ilerleyen bölümlerinde faydalı olacağından ispatına da yer verilmiştir.

Önerme 2.34 (A,B,α) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda her $a \in A$ ve her $b, b_1 \in B$ için

$$\begin{aligned} c_1 \quad : \quad \bar{A} \times \bar{B} &\rightarrow D_B(A) \\ \left(a + A^B, b + \left(st_B(A) \cap Z(B)\right)\right) &\mapsto b \cdot a - a \end{aligned} \tag{2.48}$$

ve

$$\begin{aligned} c_0 \quad : \quad \bar{B} \times \bar{B} &\rightarrow [B,B] \\ \left(b + \left(st_B(A) \cap Z(B)\right), b_1 + \left(st_B(A) \cap Z(B)\right)\right) &\mapsto [b,b_1] \end{aligned} \tag{2.49}$$

şeklinde tanımlanan c_1 ve c_0 eşlemeleri iyi tanımlıdır [9].

İspat. Kabul edelim ki

$$\left(a + A^B, b + \left(st_B(A) \cap Z(B)\right)\right) = \left(x + A^B, y + \left(st_B(A) \cap Z(B)\right)\right) \tag{2.50}$$

olsun. O halde $-a + x \in A^B \subseteq Z(A)$ ve $-b + y \in st_B(A) \cap Z(B) \subseteq Z(B)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} b \cdot a - a &= b \cdot a - a + (x - x) \\ &= b \cdot a + b \cdot (-a + x) - x \\ &= b \cdot (a - a + x) - x \\ &= b \cdot (x) - x \\ &= (-b + y) \cdot b \cdot (x) - x \\ &= (-b + y + b) \cdot (x) - x \\ &= (-b + b + y) \cdot (x) - x \\ &= (y \cdot x) - x \end{aligned} \tag{2.51}$$

bulunur. Diğer taraftan $\overline{b}, \overline{y}, \overline{b_1}, \overline{y_1} \in \bar{B}$ olmak üzere $\left(\overline{b}, \overline{b_1}\right) = \left(\overline{y}, \overline{y_1}\right)$ olsun. O halde $-b + y \in st_B(A) \cap Z(B) \subseteq Z(B)$ ve $-b_1 + y_1 \in st_B(A) \cap Z(B) \subseteq Z(B)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} [b, b_1] &= b + b_1 - b - b_1 \\ &= b + b_1 - b + (y - y) - b_1 \\ &= b + b_1 + (-b + y) - y - b_1 \\ &= b + (-b + y) + b_1 - y - b_1 \\ &= y + b_1 - y - b_1 \\ &= y + b_1 - y - b_1 + (+y_1 - y_1) \\ &= y + b_1 - y + (-b_1 + y_1) - y_1 \\ &= y + b_1 + (-b_1 + y_1) - y - y_1 \\ &= y + y_1 - y - y_1 \\ &= [y, y_1] \end{aligned} \tag{2.52}$$

eşitliği elde edilir. Böylece c_1 ve c_0 iyi tanımlıdır ve bu dönüşümler çaprazlanmış modül komütatör eşlemeleri olarak adlandırılır.

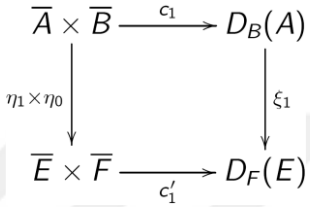
Tanım 2.35 (A, B, α) ve (E, F, β) birer çaprazlanmış modül olsun.

$$(\eta_1, \eta_0): (\bar{A}, \bar{B}, \bar{\alpha}) \to \left(\bar{E}, \bar{F}, \bar{\beta}\right) \tag{2.53}$$

ve

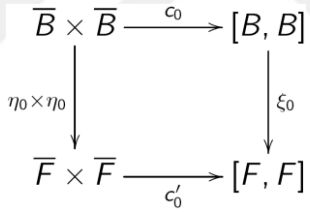
$$(\xi_1, \xi_0): (D_B(A), [B, B], \alpha') \to (D_F(E), [F, F], \beta') \tag{2.54}$$

birer çaprazlanmış modül izomorfizmleri olmak üzere aşağıda Şekil 2.3 ve Şekil 2.4'te verilen



Şekil 2.3. Çaprazlanmış modüller için birinci komütatör eşleme diyagramı.

ve



Şekil 2.4. Çaprazlanmış modüller için ikinci komütatör eşleme diyagramı.

(c_1, c_0) ve (c_1', c_0') komütatör eşlemeleriyle birlikte iki diyagram da değişmeli ise (A, B, α) ve (E, F, β) çaprazlanmış modülleri izokliniktir denir ve bu izoklinizm $\left((\eta_1, \eta_0), (\xi_1, \xi_0)\right): \alpha \sim \beta$ şeklinde gösterilir [9].

Örnek 2.36 Tüm abelyan (değişmeli), yani merkezi ile çakışık olan, çaprazlanmış modüller izokliniktir. Bütün komütatör dönüşümler ve (η_1, η_0), (ξ_1, ξ_0) ikilileri aşikâr homomorfizmlerdir [9].

Örnek 2.37 c_M, c_N komütatör dönüşümleri ve (η, ξ) izomorfizm ikilisi ile M ile N grupları izoklinik $\left((\eta, \xi): M \sim N\right)$ olsun. Bu durumda (M, M, id),

(N, N, id) çaprazlanmış modülleri izokliktir. Burada $(\eta_2, \eta_1) = (\eta, \eta)$, $(\xi_1, \xi_0) = \xi$ ve $c_1 = c_0 = c_M$, $c_1' = c_0' = c_N$ eşitlikleri vardır.

Örnek 2.38 M bir grup ve N de M'nin $N + Z(M) = M$ şartını sağlayan bir normal alt grubu olmak üzere $i: N \to M$ içine dönüşümüyle beraber (N, M, i) çaprazlanmış modülü (M, M, id_M) çaprazlanmış modülüne izokliniktir. Burada $(\eta_1, \eta_0) = (i, i)$ ve $(\xi_1, \xi_0) = (id_N, id_M)$ eşitlikleri vardır [9].

Tanım 2.39 Bir (A, B, α) çaprazlanmış modülü; eğer $\ker(\alpha) = 1$ (yani α birebir) ise asferik (aspherical), $\operatorname{coker}(\alpha) = 1$ (yani α örten) ise basit bağlantılı olarak adlandırılır [11].

Önerme 2.40 Eğer (A, B, α) ve (E, F, β) çaprazlanmış modülleri basit bağlantılı veya sonlu ise Şekil 2.3 ve Şekil 2.4'te verilen diyagramların değişmeli olması, aşağıda Şekil 2.5'te verilen diyagramın değişmeli olmasıyla eşdeğerdir.

$$\begin{array}{ccc} (\overline{A}, \overline{B}, \overline{\alpha}) \times (\overline{A}, \overline{B}, \overline{\alpha}) & \longrightarrow & (A, B, \alpha)' \\ \downarrow{\scriptstyle (\eta_1, \eta_0) \times (\eta_1, \eta_0)} & & \downarrow{\scriptstyle (\xi_1, \xi_0)} \\ (\overline{E}, \overline{F}, \overline{\beta}) \times (\overline{E}, \overline{F}, \overline{\beta}) & \longrightarrow & (E, F, \beta)' \end{array}$$

Şekil 2.5. Basit bağlantılı veya sonlu durumda komütatör dönüşümleri diyagramı.

Önerme 2.41 Çaprazlanmış modüllerde izoklinizm bir denklik bağıntısıdır [9].

Tanım 2.42 $Z(A, B, \alpha) \subseteq (A, B, \alpha)'$ şartını sağlaryan bir (A, B, α) çaprazlanmış modülüne kök (stem) çaprazlanmış modül denir [13].

Önerme 2.43 Her çaprazlanmış modül bir kök (stem) çaprazlanmış modüle izokliniktir [8,13].

Önerme 2.44 (A, B, α) bir çaprazlanmış modül ve (E, F, α) de (A, B, α)'nün alt çaprazlanmış modülü olsun. Eğer $(A, B, \alpha) = (E, F, \alpha) + Z(A, B, \alpha)$ eşitliği varsa yani $A = E + A^B$ ve $B = F + (st_B(A) \cap Z(B))$ oluyorsa (A, B, α) çaprazlanmış modülü (E, F, α) ye izokliniktir [9].

Önerme 2.45 Eğer (E, F, α) sonlu bir çaprazlanmış modül ise Önerme 2.44 ün tersi de doğrudur. Yani; (A, B, α) bir çaprazlanmış modül ve (E, F, α) da (A, B, α) nın bir

alt çaprazlanmış modülü olmak üzere (A, B, α) çaprazlanmış modülü sonlu çaprazlanmış modülü (E, F, α) ye izoklinik ise

$$(A, B, \alpha) = (E, F, \alpha) + Z(A, B, \alpha) \tag{2.55}$$

eşitliği sağlanır [9].

Önerme 2.46 [9] (A, B, α) ve (E, F, β) izoklinik çaprazlanmış modüller olsun.

(i) Eğer (A, B, α) ve (E, F, β) asferik ise B ve F izokliniktir.

(ii) Eğer (A, B, α) ve (E, F, β) basit bağlantılı ise A ve E izokliniktir.

Önerme 2.47 (A, B, α) ve (E, F, β) izoklinik sonlu çaprazlanmış modüller olmak üzere A ile E ve B ile F izokliniktir [9].

3. GRUP-GRUPOİDLERİN İZOKLİNİZMİ

3.1 Grup-Grupoidler

Grup-grupoid kavramı, Brown ve Spencer [14] tarafından grupoidlerin kategorisinde bir grup obje olarak tanımlanmıştır. Grup-grupoidin tanımını vermeden önce kategori ve grupoid kavramlarını hatırlamamız gerekiyor.

1945 yılında ilk defa Eilenberg ve Mac Lane [15] tarafından tanıtılan kategori kavramı günümüzde matematiğin birçok alanında kullanılmakta olup kategori teorisi olarak farklı matematikçiler tarafından da tanımlaması yapılmıştır.

Mucuk [16] tarafından verilen şekliyle kategori kavramını hatırlayalım.

Tanım 3.1 Objelerin bir sınıfı C_0 ve her bir $A, B \in C_0$ obje çifti için A dan B ye tüm morfizmlerin sınıfı $C_1(A,B)$ olmak üzere;

$$C_1 = \bigcup_{A,B \in C_0} C_1(A,B)$$

olsun. C_1 üzerinde şu şekilde bir kısmi işlem tanımlansın: Her $A, B, C \in C_0$ için bir

$$\begin{array}{rccc} \circ & : & C_1(B,C) \times C_1(A,B) & \to & C_1(A,C) \\ & & (g,f) & \mapsto & g \circ f = gf \end{array} \tag{3.1}$$

işlemi bulunsun. Eğer bu şekilde tanımlanan kısmi işlem

(i) $f \in C_1(A,B)$, $g \in C_1(B,C)$ ve $h \in C_1(C,D)$ olmak üzere $(hg)f = h(gf)$,

(ii) her bir $A \in C_0$ için $f \in C_1(A,-)$ ve $g \in C_1(-,A)$ iken $f1_A = f$ ve $1_A g = g$ olacak şekilde birim morfizm olarak adlandırılan bir $1_A \in C_1(A,A)$ morfizmi vardır

şartları sağlanıyorsa (C_0, C_1) ikilisine bir kategori denir ve kısaca $\mathcal{C}$ ile gösterilir.

1927 yılında ilk olarak Brandt [17] tarafından gündeme getirilen grupoid kavramı 1976 yılında Brown ve Spencer [14] tarafından kısaca; bütün morfizmleri birer izomorfizm olan kategoriye grupoid denir, şeklinde ifade edilmiştir. Her grup bir tek objeli grupoid olarak, her grupoid ise çok objeli bir grup olarak düşünülebilir [18].

Mackenzie [19] tarafından daha detaylı şekliyle tanımlanan Grupoid kavramını verelim;

Tanım 3.2 Tüm objelerin sınıfı G_0, tüm morfizmlerin sınıfı G_1 ve $x, y \in G_0$ için x den y ye morfizmlerin sınıfı $G_1(x,y)$ olmak üzere bir G grupoidi

(i) her $a \in G(x,y)$ için $d_0(a) = x$ ve $d_1(a) = y$ ile tanımlanan

$$d_0, d_1 : G_1 \to G_0$$

d_0 (başlangıç) ve d_1 (bitiş) dönüşümleri,

(ii) her $x \in G_0$ objesi için 1_x, x objesindeki birim morfizm olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon & : & G_0 & \to & G_1 \\ & & x & \mapsto & 1_x \in G(x,x) \end{array} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan birim morfizm dönüşümü,

(iii) $a \in G(x,y)$ için $a^{-1} \in G(y,x)$ olacak şekilde tanımlı olan

$$\begin{array}{rccl} u & : & G_1 & \to & G_1 \\ & & a & \mapsto & a^{-1} \in G(y,x) \end{array} \tag{3.3}$$

ters eleman dönüşümü,

(iv) $G_1 * G_1 = \{ (b,a) \in G \times G \mid d_0(b) = d_1(a) \}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} m & : & G_1 * G_1 & \to & G_1 \\ & & (b,a) & \mapsto & b \circ a \end{array} \tag{3.4}$$

ile tanımlanan parçalı işlem,

dönüşümleri verilsin. Eğer verilen bu dönüşümler aşağıda belirtilen şartları sağlarsa G_1 e G_0 üzerinde bir grupoid denir ve genellikle $(G_0, G_1, d_0, d_1, \varepsilon, m)$ ile gösterilir [19]:

(1) her $(b,a) \in G_1 * G_1$ için $d_0(b \circ a) = d_0(a)$ ve $d_1(b \circ a) = d_1(b)$,

(2) $(b,a), (c,b) \in G_1 * G_1$ için $c \circ (b \circ a) = (c \circ b) \circ a$,

(3) her $x \in G_0$ için 1_x, x noktasındaki birim morfizm olmak üzere $d_0(1_x) = d_1(1_x) = x$,

(4) her $a \in G_1$ için $1_{d_1(a)} \circ a = a$ ve $a \circ 1_{d_0(a)} = a$,

(5) her $a \in G$ için $d_0(a^{-1}) = d_1(a)$, $d_1(a^{-1}) = d_0(a)$ olmak üzere $a \circ a^{-1} = 1_{d_1(a)}$ ve $a^{-1} \circ a = 1_{d_0(a)}$.

Örnek 3.3 Yukarıda verilen tanımdan da rahatlıkla görüldüğü gibi bir grupoid her morfizmi bir izomorfizm olan kategoridir. Fakat tersi doğru olmak zorunda değildir, yani her kategori bir grupoid yapısına sahip olmayabilir.

Bir kategoride morfizmler kullanılarak grup objesi, halka objesi, kategori objesi (iç kategori) gibi iç objeler elde edilebilir. Öncelikle bir $\mathcal{C}$ kategorisinde kategori objesi tanımını hatırlatalım.

Tanım 3.4 $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, \varepsilon, m)$ sonlu çarpıma ve bitiş objesine sahip bir kategori olsun. $D_0, D_1 \in C_0$ ve kategori yapısını olşturan $d_0, d_1 : D_1 \to D_0$, $\varepsilon : D_0 \to D_1$ ve $m : D_1 * D_1 \to D_1$ dönüşümleri C_1 de birer morfizm olmak üzere yukarıda verilen kategori olma şartları sağlanırsa $\mathcal{D} = (D_0, D_1, d_0, d_1, \varepsilon, m)$ ye $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, \varepsilon, m)$ de bir kategori objesi (iç kategori) denir.

Örnek 3.5 Kümelerin **SET** kategorisinde iç kategoriler bildiğimiz küçük kategoriler, topolojik uzayların **TOP** kategorisinde iç kategoriler topolojik kategorilerdir.

Grupoid ve grup kavramlarından da faydalanan Brown ve Spencer [14] grup-grupoidler yapısını oluşturmuş ve bu yapı genel olarak grupların kategorisinde bir iç kategori olarak tanımlanmıştır. Grup-grupoid kavramını Brown ve Spencer'ın [14] tanımladığı şekliyle daha detaylı bir şekilde verelim.

Tanım 3.6 Grupların kategorisinde bir $(G_0, G_1, d_0, d_1, \varepsilon, m)$ iç kategorisine bir grup-grupoid denir. Yani, G_0 ve G_1 birer grup, $d_0, d_1 : G_1 \to G_0$, $\varepsilon : G_0 \to G_1$ ve $m : G_1 * G_1 \to G_1$ dönüşümleri birer grup homomorfizmi ve bu dönüşümler için

(i) $d_0\varepsilon = d_1\varepsilon = 1_{G_0}$,

(ii) $d_0 m = d_0\pi_2$, $d_1 m = d_1\pi_1$,

(iii) $m(1 \times m) = m(m \times 1)$,

(iv) $m(1 \times \varepsilon) = m(\varepsilon \times 1) = 1_{G_1}$

şartları sağlanır. Burada G_0 grubunun birim elemanı 0 olmak üzere 1_0 birim morfizmi ise G_1 grubunun birim elemanıdır ve karışıklık olmadığı sürece bu eleman da 0 ile gösterilecektir. $m: G_1 * G_1 \to G_1$ dönüşümünün bir grup homomorfizmi olması her $(b,a),(d,c) \in G_1 * G_1$ için interchange (yer değiştirme) kuralı olarak adlandırılan

$$(b \circ a) + (d \circ c) = (b + d) \circ (a + c) \tag{3.5}$$

eşitliğine denktir. Bu eşitliğin bir sonucu olarak bir $(b,a) \in G_1 * G_1$ için

$$\begin{aligned} b \circ a &= (b + 0) \circ \left(1_{d_0(b)} + \left(-1_{d_0(b)} + a\right)\right) \\ &= \left(b \circ 1_{d_0(b)}\right) + \left(0 \circ \left(-1_{d_0(b)} + a\right)\right) \\ &= b + -1_{d_0(b)} + a \end{aligned} \tag{3.6}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} b \circ a &= (0 + b) \circ \left(\left(a - 1_{d_0(b)}\right) + 1_{d_0(b)}\right) \\ &= \left(0 \circ \left(a - 1_{d_0(b)}\right)\right) + \left(b \circ 1_{d_0(b)}\right) \\ &= a + -1_{d_0(b)} + b \end{aligned} \tag{3.7}$$

olur. Böylece kategorideki bileşke işlemi, grup işlemi cinsinden ifade edilebilir. Buradan, özel olarak, $d_0(b) = 0$ veya buna denk olarak $d_1(a) = 0$ ise

$$b \circ a = b + a = a + b \tag{3.8}$$

olur. Bu ise $\ker d_0$ ve $\ker d_1$ gruplarının elemanlarının değişmeli ($[\ker d_0, \ker d_1] = \{0\}$) olduğu anlamına gelir. Şimdi $b \circ a = a - 1_{d_1(a)} + b = 1_x$ dersek $a^{-1} = b = 1_{d_1(a)} - a + 1_{d_0(a)}$ eşitliği elde edilir. Diğer taraftan $b \circ a = b - 1_{d_1(a)} + a = 1_x$ olup $a^{-1} = b = 1_{d_0(a)} - a + 1_{d_1(a)}$ dır. Böylece her $a \in G$ morfiziminin bileşke işlemine göre tersi olan $a^{-1} \in G$ morfizmi mevcuttur. O halde G bir grupoiddir. Bu sebeple grupların kategorisindeki bir G iç kategorisi bir grup-grupoid olarak adlandırılmıştır. $a, a_1 \in \ker d_0$ ve $d_1(a) = x$ olsun. Bu durumda $a^{-1} = -a + 1_x \in \ker d_1$ olduğundan

$$a_1 + (-a + 1_x) = (-a + 1_x) + a_1$$
$$a + a_1 - a = 1_x + a_1 - 1_x \tag{3.9}$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 3.7 G bir grup olmak üzere $X = G \times G$ bir grup-grupoid yapısına sahiptir. Burada $(G, X, d_0, d_1, \varepsilon, m)$ grup-grupoidinde $(a,b),(b,c) \in X$ için $d_0(a,b) = a$, $d_1(a,b) = b$, kısmi bileşke işlemi

$$(b,c) \circ (a,b) = (a,c) \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlı olup, $a \in G$ noktasındaki birim morfizm (a,a) ve herhangi bir (a,b) morfizminin tersi ise (b,a) şeklindedir [14].

Örnek 3.8 X bir topolojik grup olmak üzere X deki tüm eğrilerin homotopi sınıflarının kümesi $\pi(X)$, X üzerindeki grup işleminden elde edilen işlemle beraber bir grup yapısına sahiptir. $\beta(0) = \alpha(1)$ olacak şekildeki $[\alpha],[\beta] \in \pi(X)$ ve bir $x \in X$ için $d_0([\alpha]) = \alpha(0)$, $d_1([\alpha]) = \alpha(1)$, $\varepsilon(x) = [1_x]$ ve $*$ işlemi eğrilerin bileşkesi olmak üzere kısmi bileşke işlemi

$$[\beta] \circ [\alpha] = [\beta * \alpha] \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, \pi(X), d_0, d_1, \varepsilon, m)$ bir grup-grupoiddir.

Grup-grupoidler arasındaki dönüşümler her iki bileşeni de grup-homomorfizmi olan fanktorlardır. Bu şekildeki dönüşümlere grup-grupoid morfizmi denir. Grup-grupoid morfizmlerinin tanımı daha detaylı olarak aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.9 $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ birer grup-grupoid ve $f = (f_0, f_1): \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ bir grupoid morfizmi olsun. Eğer $f: \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ grup yapılarını da koruyorsa, yani $f_0: H_0 \to G_0$ ve $f_1: H_1 \to G_1$ ise, f dönüşümüne bir grup-grupoid morfizmi denir.

Tanım 3.10 Objeleri grup-grupoidler ve morfizmleri ise grup-grupoid morfizmleri olan kategoriye grup-grupoidlerin kategorisi denir ve **GpGd** ile gösterilir.

Bu aşamada öncelikle çaprazlanmış modüllerin izoklinizminden grup-grupoidlerin izoklinizmine geçişte kullanacağımız için Brown ve Spencer [14] tarafından elde edilen denklik teoreminin kısaca ispatına değinmek gerekmektedir.

Teorem 3.11 Grup-grupoidlerin kategorisi **GpGd** ile çapraz modüllerin kategorisi **XMod** denktir [14].

İspat: $(G_0, G_1, d_0, d_1, \varepsilon, m)$ bir grup-grupoid olsun.

$$\varphi: \mathbf{GpGd} \to \mathbf{XMod} \tag{3.12}$$

fanktoru şu şekilde tanımlansın: $A = \ker d_0$, $B = G_0$ ve $\alpha = d_1|_A : A \to B$ bitiş fonksiyonun kısıtlaması ve $x \in B$, $a \in A$ olmak üzere $x \cdot a = 1_x + a - 1_x$ şeklinde verilen B nin A üzerine etkimesiyle beraber $\varphi(G) = (A, B, \alpha)$ bir çaprazlanmış modüldür.

Tersine olarak

$$\theta: \mathbf{XMod} \to \mathbf{GpGd} \tag{3.13}$$

fanktoru da şu şekilde tanımlansın: (A, B, α) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu çaprazlanmış modüle karşılık gelen G grup-grupoidinin objelerinin sınıfı $G_0 = B$ ve morfizmlerinin sınıfı ise $G_1 = A \rtimes B$ yarı direkt çarpımı birer grup olup $\varepsilon(b) = (0, b)$, $d_0(a, b) = b$ ve $d_1(a, b) = \alpha(a) + b$ dir. Grupoidin bileşke işlemi ise $b' = \alpha(a) + b$ olmak üzere

$$m\big((a', b'), (a, b)\big) = (a', b') \circ (a, b) = (a' + a, b) \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca tanımlanan bu φ ve θ fanktorları için $\varphi\theta \simeq 1$ ve $\theta\varphi \simeq 1$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece kategori denkliği sağlanmış olur.

Grup-grupoidlerin izoklinizmi kavramına giriş yapmadan önce aşağıda grup-grupoidler üzerinde kullanılan bazı tanımları hatırlatıyoruz.

Tezin devamında yazım kolaylığı açısından verilen bir $(G_0, G_1, d_0, d_1, \varepsilon, m)$ grup-grupoid $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ olarak gösterilecektir.

Tanım 3.12 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid ve $\mathbb{H} = (H_0, H_1)$ de $\mathbb{G}$'nin bir alt grupoidi olsun. Eğer H_1 grubu G_1 grubunun bir alt grubu ise $\mathbb{H}$ ye $\mathbb{G}$ nin bir alt grup-grupoidi denir ve bu $\mathbb{H} \leq \mathbb{G}$ ile gösterilir [12].

Tanım 3.13 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid ve $\mathbb{N} = (N_0, N_1)$ de $\mathbb{G}$'nin bir alt grup-grupoidi olsun. Eğer N_1 grubu G_1 grubunun bir normal alt grubu ise $\mathbb{N}$ ye $\mathbb{G}$ nin bir normal alt grup-grupoidi denir ve bu $\mathbb{N} \lhd \mathbb{G}$ ile gösterilir. Bu durumda $\mathbb{G}/\mathbb{N} = (G_0/N_0, G_1/N_1)$ de bir grup-grupoiddir ve bu grup-grupoide $\mathbb{G}$ nin $\mathbb{N}$ ile bölüm grup-grupoidi denir [12].

Tanım 3.14 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid olsun. $\mathbb{G}$ grup-grupoidi; her $x, y \in G_0$ için $G_1(x, y)$ nin en fazla bir elemanı varsa asferik olarak, $G_1(x, y) \neq \emptyset$ ise basit bağlantılı olarak adlandırılır.

Lemma 3.15 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid olmak üzere

$$\begin{aligned} G_0 \times G_1 &\to G_1 \\ (x, a) &\mapsto x \cdot a = 1_x + a - 1_x \end{aligned} \tag{3.15}$$

işlemi ile G_0 grubunun G_1 grubu üzerine bir etkimesi tanımlanır.

Tanım 3.16 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid olmak üzere

$$\begin{aligned} st_{G_0}(G_1) &= \{ x \in G_0 \mid \text{her } a \in G_1 \text{ için } x \cdot a = a \} \\ &= \{ x \in G_0 \mid \text{her } a \in G_1 \text{ için } 1_x + a = a + 1_x \} \end{aligned} \tag{3.16}$$

kümesine G_0 grubunun G_1 grubuna göre sabitleyicisi denir.

Önerme 3.17 Bir $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ grup-grupoidi için $st_{G_0}(G_1)$ kümesi G_0 grubunun bir normal alt grubu ve $st_{G_0}(G_1) \subseteq Z(G_0)$ dır.

İspat: Gerçekten $st_{G_0}(G_1)$ in G_0 ın bir alt grubu olduğu açıkça görülmektedir. Her $y \in G_0$ ve $x \in st_{G_0}(G_1)$ için;

$$\begin{aligned} 1_{y+x-y} &= 1_y + 1_x - 1_y \\ &= 1_x \end{aligned} \tag{3.17}$$

olup $y + x - y = x \in st_{G_0}(G_1)$ bulunur. Böylece $st_{G_0}(G_1) \subseteq Z(G_0)$ ve $st_{G_0}(G_1) \lhd G_0$ dır.

Tanım 3.18 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid olmak üzere, $\mathbb{G}$'nin merkezi

$$\left(Z(\mathbb{G})\right)_0 = st_{G_0}(G_1) \tag{3.18}$$

ve

$$\left(Z(\mathbb{G})\right)_1 = Z(G_1) \tag{3.19}$$

olmak üzere $Z(\mathbb{G}) = \left(\left(Z(\mathbb{G})\right)_0, \left(Z(\mathbb{G})\right)_1\right)$ grup-grupoididir. Yani $Z(\mathbb{G}) = \left(st_{G_0}(G_1), Z(G_1)\right)$ dir [20].

Önerme 3.19 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid olmak üzere $Z(\mathbb{G})$, $\mathbb{G}$ nin bir normal alt grup-grupoididir [20].

Tanım 3.20 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid olmak üzere, eğer $\mathbb{G}$ merkezine eşitse yani $\mathbb{G} = Z(\mathbb{G})$ oluyorsa $\mathbb{G}$ ye değişmeli (abelyan) grup-grupoid denir [20].

Önerme 3.21 Bir $\mathbb{G}$ grup-grupoidi değişmelidir ancak ve ancak G_1 (dolayısıyla G_0) bir değişmeli gruptur [20].

Önerme 3.22 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid olmak üzere eğer $\mathbb{G}$ asferik ise $st_{G_0}(G_1) = Z(G_0)$ dir.

İspat: Önerme 3.17 den $st_{G_0}(G_1) \subseteq Z(G_0)$ olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan; $x, y \in G_0$ için $d_0(a) = x$ ve $d_1(a) = y$ olsun. Bir $u \in Z(G_0)$ objesini alalım;

$$\begin{aligned} u + x &= x + u \\ u + y &= y + u \end{aligned} \tag{3.20}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} d_0(1_u + a) &= u + x = x + u = d_0(a + 1_u) \\ d_1(1_u + a) &= u + y = y + u = d_1(a + 1_u) \end{aligned} \tag{3.21}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $d_0(1_u + a) = d_0(a + 1_u)$, $d_1(1_u + a) = d_1(a + 1_u)$ ve $\mathbb{G}$ asferik olduğu için $1_u + a = a + 1_u$ olur. Yani $u \in st_{G_0}(G_1)$ olup bu ise $Z(G_0) \subseteq st_{G_0}(G_1)$ olduğu anlamına gelir. Böylece $st_{G_0}(G_1) = Z(G_0)$ olur.

Tanım 3.23 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid ve $\mathbb{H}, \mathbb{K} \lhd \mathbb{G}$ olsun. Bu durumda G_1 grubunun $\{x \cdot a - a = 1_x + a - 1_x - a \mid x \in K_0, a \in H_1\}$ kümesi tarafından üretilen alt grubu $D_{K_0}(H_1)$ ile gösterilmek üzere $\mathbb{G}$ grup-grupoidinin $\mathbb{H}$ ve $\mathbb{K}$ tarafından üretilen komütatör alt grup-grupoidi $[\mathbb{H}, \mathbb{K}] = \left([H_0, K_0], D_{K_0}(H_1)\right)$ şeklinde tanımlıdır. Burada özel olarak $[\mathbb{G}, \mathbb{G}] = \left([G_0, G_0], D_{G_0}(G_1)\right)$ dır ve kısaca $[\mathbb{G}, \mathbb{G}] = \mathbb{G}'$ ile gösterilir.

Önerme 3.24 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid olmak üzere $D_{G_0}(G_1) = [G_1, G_1]$ dir.

İspat: $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid olsun. $D_{G_0}(G_1) \subseteq [G_1, G_1]$ olduğu açıkça görülmektedir. Diğer taraftan, $d_0(a) = x$, $d_1(a) = y$, $d_0(b) = u$, $d_1(b) = v$ olacak şekilde $a, b \in G_1$ alalım.

$$\begin{aligned}
[a,b] &= a + b - a - b \\
&= (a \circ 1_x) + (1_v \circ b) - (a \circ 1_x) - (1_v \circ b) \\
&= (a \circ 1_x) + (1_v \circ b) + \big((-a) \circ (-1_x)\big) + \big((-1_v) \circ (-b)\big) \\
&= [(a + 1_v) \circ (1_x + b)] + [(-a - 1_v) \circ (-1_x - b)] \\
&= (a + 1_v - a - 1_v) \circ (1_x + b - 1_x - b) \\
&= (a + 1_v - a - 1_v) - (1_{x+v-x-v}) + (1_x + b - 1_x - b) \\
&= -(1_v + a - 1_v - a) - (1_x + 1_v - 1_x - 1_v) \\
&\quad + (1_x + b - 1_x - b) \\
&= -[1_v, a] - [1_x, 1_v] + [1_x, b]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

ve $[1_v, a], [1_x, 1_v], [1_x, b] \in D_{G_0}(G_1)$ olduğundan $a + b - a - b \in D_{G_0}(G_1)$ olur. Böylece $[G_1, G_1] \subseteq D_{G_0}(G_1)$ bulunur. Sonuç olarak $D_{G_0}(G_1) = [G_1, G_1]$ dir.

Tanım 3.25 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid olsun. Eğer $Z(\mathbb{G}) \leq [\mathbb{G}, \mathbb{G}]$, yani $Z(G_1) \leq D_{G_0}(G_1)$ oluyorsa $\mathbb{G}$ ye bir kök (stem) grup-grupoidi denir.

Önerme 3.26 (A, B, α) bir çaprazlanmış modül ve (A, B, α) ya karşılık gelen grup-grupoid $\mathbb{G} = (G_0, G_1) = (B, A \rtimes B)$ olmak üzere $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir kök grup-grupoididir ancak ve ancak (A, B, α) bir kök çaprazlanmış modüldür.

İspat: $\mathbb{G} = (B, A \rtimes B)$ bir kök grup-grupoid, yani $Z(\mathbb{G}) \leq [\mathbb{G}, \mathbb{G}]$ olsun. O halde

$$Z(A \rtimes B) = A^B \rtimes \left(st_B(A) \cap Z(B)\right) \leq D_B(A \rtimes B) = D_B(A) \rtimes [B,B] \qquad (3.23)$$

yani $A^B \leq D_B(A)$ ve $st_B(A) \cap Z(B) \leq [B,B]$ dir. Böylece (A,B,α) bir kök çaprazlanmış modül olduğu görülür. Yukarıdakilerden kolaylıkla anlaşılabileceği gibi (A,B,α) bir kök çaprazlanmış modül ise $\mathbb{G} = (B, A \rtimes B)$ bir kök grup-grupoiddir.

3.2 Grup-Grupoidler Arasında İzoklinizm

Tezin devamında yazım kolaylığı açısından verilen bir $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ grup-grupoid için $\mathbb{G}/Z(\mathbb{G}) = \left(G_0/st_{G_0}(G_1), G_1/Z(G_1)\right)$ merkezsel bölüm grup-grupoidi kısaca $\overline{\mathbb{G}} = \mathbb{G}/Z(\mathbb{G}) = (\overline{G_0}, \overline{G_1})$ ile gösterilecektir.

Önerme 3.27 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid olsun. Bu durumda

$$c^{\mathbb{G}}: \overline{\mathbb{G}} \times \overline{\mathbb{G}} \to [\mathbb{G}, \mathbb{G}] \qquad (3.24)$$

olmak üzere $c^{\mathbb{G}}$ yi oluşturan

$$\begin{array}{rccc} c_0^{\mathbb{G}} & : & \overline{G_0} \times \overline{G_0} & \to & [G_0, G_0] \\ & & \left(x + st_{G_0}(G_1), y + st_{G_0}(G_1)\right) & \mapsto & x + y - x - y \end{array} \qquad (3.25)$$

ve

$$\begin{array}{rccc} c_1^{\mathbb{G}} & : & \overline{G_1} \times \overline{G_0} & \to & D_{G_0}(G_1) \\ & & \left(a + Z(G_1), x + st_{G_0}(G_1)\right) & \mapsto & 1_x + a - 1_x - a \end{array} \qquad (3.26)$$

eşlemelere komütatör dönüşümleri denir ve $c_0^{\mathbb{G}}$, $c_1^{\mathbb{G}}$ komütatör dönüşümleri iyi tanımlıdır.

İspat: $\left(x + st_{G_0}(G_1), y + st_{G_0}(G_1)\right) = \left(x' + st_{G_0}(G_1), y' + st_{G_0}(G_1)\right)$ olsun. Bu durumda $-x + x', -x' + x, -y + y', -y' + y \in st_{G_0}(G_1)$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} x' + y' - x' - y' &= x + (-x + x') + y' - x' - y' \\ &= x + y' - x + x' - x' - y' \\ &= x + y' - x - y' + (y - y) \\ &= x + y' - y' + y - x - y \\ &= x + y - x - y \end{aligned} \tag{3.27}$$

olup ve $c_0^{\mathbb{G}}$ iyi tanımlıdır. Şimdi

$$\Big(a + Z(G_1), x + st_{G_0}(G_1)\Big) = \Big(a' + Z(G_1), x' + st_{G_0}(G_1)\Big) \tag{3.28}$$

olsun. Bu durumda $-a + a', -a' + a \in Z(G_1)$ ve $x + x', -x' + x \in st_{G_0}(G_1)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} 1_{x'} + a' - 1_{x'} - a' &= (1_x - 1_x) + 1_{x'} + a' - 1_{x'} - a' \\ &= 1_x + 1_{-x+x'} + a' - 1_{x'} - a' \\ &= 1_x + a' + 1_{-x+x'-x'} - a' \\ &= 1_x + a' - 1_x + (-a' + a) - a' \\ &= 1_x + a' - a' + a - 1_x - a \\ &= 1_x + a - 1_x - a \end{aligned} \tag{3.29}$$

olup $c_1^{\mathbb{G}}$ dönüşümü de iyi tanımlıdır.

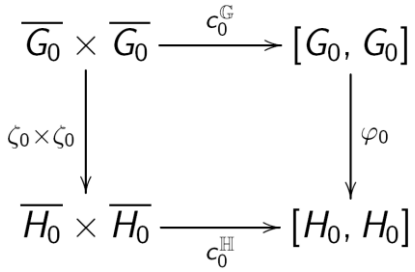
Tanım 3.28 $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ birer grup-grupoid olmak üzere

$$\zeta = (\zeta_0, \zeta_1): \overline{\mathbb{G}} \to \overline{\mathbb{H}} \tag{3.30}$$

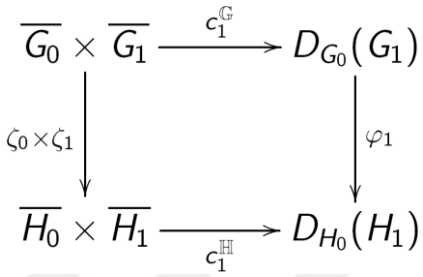
dönüşümü $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ grup-grupoidlerinin merkezsel bölümleri arasında bir izomorfizm ve

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1): [\mathbb{G}, \mathbb{G}] \to [\mathbb{H}, \mathbb{H}] \tag{3.31}$$

dönüşümü $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ grup-grupoidlerinin komütatör (türetilmiş) alt grup-grupoidleri arasında bir izomorfizmi olmak üzere bu izomorfizmler $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ grup-grupoidlerinin $c_0^{\mathbb{G}}, c_1^{\mathbb{G}}, c_0^{\mathbb{H}}$ ve $c_1^{\mathbb{H}}$ komütatör dönüşümleri ile uyumlu ise, yani Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de verilen diyagramlar değişmeli ise, $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ grup-grupoidleri izokliniktir denir ve bu $(\zeta, \varphi): \mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ ile gösterilir.



Şekil 3.1. Grup-grupoidler için birinci komütatör eşleme diyagramı.



Şekil 3.2. Grup-grupoidler için ikinci komütatör eşleme diyagramı.

Önerme 3.29 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ bir grup-grupoid ve $\mathbf{1}$ tek obje ve tek morfizmden oluşan grup-grupoid olmak üzere $\mathbb{G}\sim\mathbf{1}$ ancak ve ancak $\mathbb{G}$ değişmelidir.

İspat: $\mathbb{G}\sim\mathbf{1}$ ise $\zeta_0: \overline{G_0} \to \mathbf{1}$, $\zeta_1: \overline{G_1} \to \mathbf{1}$, $\varphi: [\mathbb{G}, \mathbb{G}] \to \mathbf{1}$ izomorfizmleri olduğu için

$$\begin{aligned} &\zeta_0: G_0/st_{G_0}(G_1) \to \mathbf{1} \\ &\zeta_1: G_1/Z(G_1) \to \mathbf{1} \end{aligned} \tag{3.32}$$

ve

$$\varphi_1: D_{G_0}(G_1) \to \mathbf{1} \tag{3.33}$$

dir. Yani $G_0 = st_{G_0}(G_1) = Z(G_0)$ ve $G_1 = Z(G_1)$ olur. $Z(\mathbb{G}) = \big(Z(G_0), Z(G_1)\big) = (G_0, G_1) = \mathbb{G}$ dir. Bu durumda $\mathbb{G}$ değişmeli olur. Diğer taraftan $\mathbb{G}$ değişmeli ise $\mathbb{G} = Z(\mathbb{G})$ dir. Bu nedenle $\zeta_0: \overline{G_0} \to \mathbf{1}$, $\zeta_1: \overline{G_1} \to \mathbf{1}$ ve $\varphi: [\mathbb{G}, \mathbb{G}] \to \mathbf{1}$ olur ve $\mathbb{G}\sim\mathbf{1}$ olduğu açıkça görülmektedir.

Örnek 3.30 Tüm abelyan grup-grupoidler birbirlerine izokliniktir. Gerçekten $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ birer abelyan grup-grupoid olsun. Abelyan oldukları için merkezleri ile çakışırlar yani $\mathbb{G} = Z(\mathbb{G})$ ve $\mathbb{H} = Z(\mathbb{H})$ dir. Ayrıca G_0, G_1, H_0 ve H_1 grupları da değişmeli olur. Böylece

$$\mathbb{G}/Z(\mathbb{G}) = \mathbf{1} \tag{3.34}$$

ve

$$\mathbb{H}/Z(\mathbb{H}) = \mathbf{1} \tag{3.35}$$

olup

$$\zeta, \varphi = 1: \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{1} \tag{3.36}$$

birim fanktor olurlar. Buradan $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ nin izoklinik olduğu açıkça görülür.

Önerme 3.31 $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ grup-grupoidleri izoklinik olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) G_1 ve H_1 grupları izokliniktir.

(ii) Eğer $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ asferik ise G_0 ve H_0 grupları izokliniktir.

İspat: Kabul edelim ki $(\zeta, \varphi): \mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ bir izoklinizm olsun.

(i) Tanım 3.28'den dolayı $\zeta_0: \overline{G_0} \to \overline{H_0}$, $\zeta_1: \overline{G_1} \to \overline{H_1}$, $\varphi_1: D_{G_0}(G_1) \to D_{H_0}(H_1)$ izomorfizmleri ve $c_1^{\mathbb{G}}, c_1^{\mathbb{H}}$ komütatör dönüşümleri ile birlikte Şekil 3.2'de verilen diyagram değişmelidir. $\zeta_1: G_1/Z(G_1) \to H_1/Z(H_1)$ olduğundan ve Önerme 3.24'den dolayı ise $D_{G_0}(G_1) = [G_1, G_1]$ ve $D_{H_0}(H_1) = [H_1, H_1]$ dir. Böylece Şekil 3.3'de verilen diyagram da değişmeli olur ve $(\zeta_1, \varphi_1): G_1 \sim H_1$ olur.

$$\begin{array}{ccc} G_1/Z(G_1) \times G_1/Z(G_1) & \xrightarrow{c_{G_1}} & [G_1, G_1] \\ \downarrow{\scriptstyle \zeta_1 \times \zeta_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} \\ H_1/Z(H_1) \times H_1/Z(H_1) & \xrightarrow[c_{H_1}]{} & [H_1, H_1] \end{array}$$

Şekil 3.3. Gruplar için komütatör eşleme diyagramı.

(ii) Tanım 3.28'den dolayı $\zeta_0: \overline{G_0} \to \overline{H_0}$, $\varphi_0: [G_0, G_0] \to [H_0, H_0]$ izomorfizmleri ve $c_0^{\mathbb{G}}, c_0^{\mathbb{H}}$ komütatör dönüşümleri ile birlikte Şekil 3.1'de verilen diyagram değişmelidir. Ayrıca $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ asferik olduğu için Önerme 3.22 de belirtildiği gibi $st_{G_0}(G_1) = Z(G_0)$ ve $st_{H_0}(H_1) = Z(H_0)$ olur yani; $\overline{G_0} = G_0/st_{G_0}(G_1) =$

$G_0/Z(G_0)$ ve $\overline{H_0} = H_0/st_{H_0}(H_1) = H_0/Z(H_0)$ dir. Böylece Şekil 3.4'te verilen diyagram da değişmeli olup $(\zeta_0, \varphi_0): G_0 \sim H_0$ olur.

$$\begin{array}{ccc} G_0/Z(G_0) \times G_0/Z(G_0) & \xrightarrow{c_{G_1}} & [G_0, G_0] \\ \downarrow{\scriptstyle \zeta_0 \times \zeta_0} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} \\ H_0/Z(H_0) \times H_0/Z(H_0) & \xrightarrow[c_{H_1}]{} & [H_0, H_0] \end{array}$$

Şekil 3.4. Gruplar için komütatör eşleme diyagramı.

Örnek 3.32 A ve B birer grup ve $(\zeta, \xi): A \sim B$ bir izoklinizm olsun. Bu durumda A nın kendi üzerine konjügasyon etkimesi yardımıyla elde edilen grup-groupoid $\mathbb{G} = (G_0 = A, G_1 = A \rtimes A)$ ve B nin kendi üzerine konjügasyon etkimesi yardımıyla elde edilen grup-groupoid $\mathbb{H} = (H_0 = B, H_1 = B \rtimes B)$ olmak üzere $\mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ dir. Burada açıkça görülebileceği gibi $\mathbb{G}/Z(\mathbb{G}) \cong \big(A/Z(A), A/Z(A) \rtimes A/Z(A)\big)$ ve $\mathbb{H}/Z(\mathbb{H}) \cong \big(B/Z(B), B/Z(B) \rtimes B/Z(B)\big)$ dir. Ayrıca $[\mathbb{G}, \mathbb{G}] = ([A, A], [A, A] \rtimes [A, A])$ ve $[\mathbb{H}, \mathbb{H}] = ([B, B], [B, B] \rtimes [B, B])$ dır. Böylece $\zeta_0 = \zeta$, $\zeta_1 = \zeta \times \zeta$, $\varphi_0 = \xi$ ve $\varphi_1 = \xi \times \xi$ olmak üzere $(\zeta, \xi): \mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ bir izoklinizmdir.

Önerme 3.33 Grup-grupoidlerin kategorisinde izoklinizm bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Gerçekten de denklik bağıntısının şartlarına bakacak olursak;

(i) <u>*Yansıma Özelliği:*</u> $\zeta = \xi = 1_{\mathbb{G}}$ birim faktör olarak alınırsa $\mathbb{G} \sim \mathbb{G}$ olduğu açıkça görülür.

(ii) <u>*Simetri Özelliği:*</u> $(\zeta, \xi): \mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ izoklinizm olsun. ζ ve φ birer izomorfizm olduğundan ζ^{-1} ve φ^{-1} de birer izomorfizm olup açıkça $(\zeta^{-1}, \varphi^{-1}): \mathbb{H} \sim \mathbb{G}$ bir izoklinizmdir.

(iii) <u>*Geçişme Özelliği:*</u> $(\zeta, \varphi): \mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ ve $(\zeta', \varphi'): \mathbb{G} \sim \mathbb{K}$ izoklinizm olsun. ζ, φ, ζ' ve φ' de birer izomorfizm olup bileşkeleri de $\zeta'\zeta$ ve $\xi'\xi$ izomorfizm olur. $\mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ ve $\mathbb{H} \sim \mathbb{K}$ olduğu için $\big((\zeta' \times \zeta')(\zeta \times \zeta), \varphi'\varphi\big): \mathbb{G} \sim \mathbb{K}$ bir izoklinizmdir.

Grup-grupoidlerin kategorisinde izoklinizm, izomorfizmden daha zayıf bir denklik bağıntısıdır. Yani izomorf olan grup-grupoidler izokliniktir fakat tersi her zaman doğru

değildir. Gerçekten; $\mathbb{G}$ ve $\mathbb{H}$ grup-grupoidleri için $f: \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ bir izomorfizm olmak üzere her $x \in G_0$ ve her $a, b \in G_1$ için,

$$\begin{array}{rccc} \overline{f_0} & : & G_0/st_{G_0}(G_1) & \xrightarrow{\cong} & H_0/st_{H_0}(H_1) \\ & & x + st_{G_0}(G_1) & \longrightarrow & f_0(x) + st_{H_0}(H_1) \end{array} \tag{3.37}$$

$$\begin{array}{rccc} \overline{f_1} & : & G_1/Z(G_1) & \xrightarrow{\cong} & H_1/Z(H_1) \\ & & a + Z(G_1) & \longrightarrow & f_1(a) + Z(H_1) \end{array} \tag{3.38}$$

$$\begin{array}{rccc} f_0^* & : & [G_0, G_0] & \xrightarrow{\cong} & [H_0, H_0] \\ & & [a, b] & \longrightarrow & [f_0(a), f_0(b)] \end{array} \tag{3.39}$$

$$\begin{array}{rccc} f_1^* & : & D_{G_0}(G_1) & \xrightarrow{\cong} & D_{H_0}(H_1) \\ & & [1_x, a] & \longrightarrow & \left[1_{f_0(x)}, f_1(a)\right] \end{array} \tag{3.40}$$

izomorfizmleri vardır ve böylece $(\zeta, \varphi): \mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ dir.

Önerme 3.34 (A, B, α) ve (E, F, β) birer çaprazlanmış modül ve bunlara karşılık gelen grup-grupoidler, sırasıyla $\mathbb{G} = (G_0, G_1) = (B, A \rtimes B)$ ve $\mathbb{H} = (H_0, H_1) = (F, E \rtimes F)$ olsun. Eğer $(A, B, \alpha) \sim (E, F, \beta)$ ise $\mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ dir.

İspat: $(A, B, \alpha) \sim (E, F, \beta)$ olduğundan

$$(\eta_1, \eta_0): (\bar{A}, \bar{B}, \bar{\alpha}) \to \left(\bar{E}, \bar{F}, \bar{\beta}\right) \tag{3.41}$$

ve

$$(\xi_1, \xi_0): (D_B(A), [B, B], \alpha') \to (D_F(E), [F, F], \beta') \tag{3.42}$$

izomorfizmleri bulunmaktadır ve bu izomorfizmler komütatör eşlemleri ile uyumludur. Burada

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbb{G}} &= \left(B/st_B(A \rtimes B), A \rtimes B/Z(A \rtimes B)\right) \\
&= \left(B/\left(st_B(A) \cap Z(B)\right), (A \rtimes B)/\left(A^B \rtimes \left(st_B(A) \cap Z(B)\right)\right)\right) \\
&\cong \left(\bar{B}, (A/A^B) \rtimes \left(B/\left(st_B(A) \cap Z(B)\right)\right)\right) \\
&= (\bar{B}, \bar{A} \rtimes \bar{B}) \\
&\cong (\bar{F}, \bar{E} \rtimes \bar{F}) \\
&= \left(\bar{F}, (E/E^F) \rtimes \left(F/\left(st_F(E) \cap Z(F)\right)\right)\right) \\
&\cong \left(F/\left(st_F(E) \cap Z(F)\right), (E \rtimes F)/\left(E^F \rtimes \left(st_F(E) \cap Z(F)\right)\right)\right) \\
&= \left(F/st_F(E \rtimes F), E \rtimes F/Z(E \rtimes F)\right) \\
&= \overline{\mathbb{H}}
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
[\mathbb{G}, \mathbb{G}] &= \left([B, B], D_B(A \rtimes B)\right) \\
&= ([B, B], D_B(A) \rtimes [B, B]) \\
&\cong ([F, F], D_F(E) \rtimes [F, F]) \\
&= \left([F, F], D_F(E \rtimes F)\right) \\
&= [\mathbb{H}, \mathbb{H}]
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

dir. Bununla birlikte bu izomorfizmlerin komütatör dönüşümleri ile uyumlu oldukları kolaylıkla görülebilir. Yani $\left((1, \phi)(\eta_0, \eta_1 \times \eta_0)(1, \phi^{-1}), (\zeta_0, \zeta_1 \times \zeta_0)\right)$: $\mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ dir.

Önerme 3.35 $\mathbb{G} = (G_0, G_1)$ ve $\mathbb{H} = (H_0, H_1)$ birer grup-grupoid ve bunlara karşılık gelen çaprazlanmış modüller, sırasıyla $(A, B, \alpha) = \left(\ker d_0^{\mathbb{G}}, G_0, d_1^{\mathbb{G}}\right)$ ve $(E, F, \beta) = (\ker d_0^{\mathbb{H}}, H_0, d_1^{\mathbb{H}})$ olsun. Eğer $\mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ ise $(A, B, \alpha) \sim (E, F, \beta)$ dir.

İspat: $\mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ olduğundan

$$
\zeta = (\zeta_0, \zeta_1): \overline{\mathbb{G}} \to \overline{\mathbb{H}} \tag{3.45}
$$

ve

$$
\varphi = (\varphi_0, \varphi_1): [\mathbb{G}, \mathbb{G}] \to [\mathbb{H}, \mathbb{H}] \tag{3.46}
$$

izomorfizmleri vardır. Buradan

$$\begin{aligned}\bar{B} &= G_0/\left(st_{G_0}(\ker d_0^{\mathbb{G}}) \cap Z(G_0)\right)\\ &= G_0/st_{G_0}(\ker d_0^{\mathbb{G}} \rtimes G_0)\\ &= G_0/st_{G_0}(G_1)\\ &\cong H_0/st_{H_0}(H_1)\\ &\cong H_0/st_{H_0}(\ker d_0^{\mathbb{H}} \rtimes H_0)\\ &= H_0/\left(st_{H_0}(\ker d_0^{\mathbb{H}}) \cap Z(H_0)\right)\\ &= \bar{F}\end{aligned} \tag{3.47}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{A} \rtimes \bar{B} &= \left(\ker d_0^{\mathbb{G}}/(\ker d_0^{\mathbb{G}})^{G_0}\right) \rtimes \left(G_0/\left(st_{G_0}(\ker d_0^{\mathbb{G}}) \cap Z(G_0)\right)\right)\\ &\cong \left(\ker d_0^{\mathbb{G}} \rtimes G_0\right)/\left((\ker d_0^{\mathbb{G}})^{G_0} \rtimes \left(st_{G_0}(\ker d_0^{\mathbb{G}}) \cap Z(G_0)\right)\right)\\ &= \left(\ker d_0^{\mathbb{G}} \rtimes G_0\right)/Z\left(\ker d_0^{\mathbb{G}} \rtimes G_0\right)\\ &\cong G_1/Z(G_1)\\ &\cong H_1/Z(H_1)\\ &\cong (\ker d_0^{\mathbb{H}} \rtimes H_0)/Z(\ker d_0^{\mathbb{H}} \rtimes H_0)\\ &= (\ker d_0^{\mathbb{H}} \rtimes H_0)/\left((\ker d_0^{\mathbb{H}})^{H_0} \rtimes \left(st_{H_0}(\ker d_0^{\mathbb{H}}) \cap Z(H_0)\right)\right)\\ &\cong (\ker d_0^{\mathbb{H}}/(\ker d_0^{\mathbb{H}})^{H_0}) \rtimes \left(H_0/\left(st_{H_0}(\ker d_0^{\mathbb{H}}) \cap Z(H_0)\right)\right)\\ &= \bar{E} \rtimes \bar{F}\end{aligned} \tag{3.48}$$

olduğundan $(\bar{A}, \bar{B}, \alpha) \cong (\bar{E}, \bar{F}, \beta)$ dır. Ayrıca

$$[B, B] = [G_0, G_0] \cong [H_0, H_0] = [F, F] \tag{3.49}$$

ve

$$
\begin{aligned}
D_B(A) \rtimes [B,B] &= D_B(A \rtimes B) \\
&= D_{G_0}\left(\ker d_0^{\mathbb{G}} \rtimes G_0\right) \\
&\cong D_{G_0}(G_1) \\
&\cong D_{H_0}(H_1) \\
&= D_{H_0}\left(\ker d_0^{\mathbb{H}} \rtimes H_0\right) \\
&= D_F(E \rtimes F) \\
&= D_F(E) \rtimes [F,F]
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

olduğundan $D_B(A) \cong D_F(E)$ dır. Böylece $(A,B,\alpha) \sim (E,F,\beta)$ dir.

Sonuç 3.36 (A,B,α) ve (E,F,β) birer çaprazlanmış modül ve bunlara karşılık gelen grup-grupoidler, sırasıyla $\mathbb{G} = (G_0,G_1) = (B, A \rtimes B)$ ve $\mathbb{H} = (H_0,H_1) = (F, E \rtimes F)$ olsun. Bu durumda $(A,B,\alpha) \sim (E,F,\beta)$ dir ancak ve ancak $\mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ dir.

Önerme 3.37 Her grup-grupoid bir kök (stem) grup-grupoidine izokliniktir.

İspat: $\mathbb{G}$ bir grup-grupoid ve $\mathbb{G}$ ye karşılık gelen çaprazlanmış modül (A,B,α) olsun. Biliyoruz ki (A,B,α) bir kök çaprazlanmış modülüne izokliniktir [9]. Bu kök çaprazlanmış modülü (E,F,β), yani $(A,B,\alpha) \sim (E,F,\beta)$, ve bu (E,F,β) çaprazlanmış modülüne karşılık gelen grup-grupoid $\mathbb{H} = (H_0,H_1)$ olsun. Önerme 3.26'dan biliyoruz ki $\mathbb{H} = (H_0,H_1)$ bir kök grup-grupoididir. Ayrıca Sonuç 3.36'dan açıkça $\mathbb{G} \sim \mathbb{H}$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

İzoklinizm kavramı, mertebeleri bir asalın kuvveti olan sonlu grupların sınıflandırılması için ilk olarak 1940 yılında Hall [1] tarafından tanımlanmıştır. 2016 yılında ise izoklinizm kavramı Odabaş vd. [9] tarafından grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüller için tanımlanmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile grupların kategorisindeki iç kategorilerin, yani grup grupoidlerin kategorisinin doğal olarak denk oldukları iyi bilinen bir gerçektir. Bu denklik sayesinde gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller için tanımlanan birçok kavram ve elde edilen birçok sonuç grup-grupoidler için de tanımlanmış ve elde edilmiştir.

Bu düşünceyle, bu tez çalışmasında Odabaş vd. [9] tarafından gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller için verilen izoklinizm tanımı ve elde ettikleri sonuçlar grup-grupoidler için elde edilmiştir.

Odabaş vd. [9] tarafından verilen tanıma denk olarak, yine 2016 yılında, birbirlerinden habersiz bir şekilde Salemkar vd. [21] tarafından da grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüller arasında izoklinizm tanımı verilmiştir. Salemkar vd. [21] hem benzer hem de çeşitli farklı sonuçlar elde etmişlerdir. Bu çalışmanın devamı olarak Salemkar vd. [21] tarafından elde edilmiş olan farklı çalışmalar grup-grupoidlerin kategorisinde yorumlanabilir. Ayrıca gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile cat^1-grupların kategorisinin denkliği kullanılarak cat^1-gruplar için de izoklinizm kavramı tanımlanabilir. Ayrıca Odabaş vd. [9] ve Salemkar vd. [21] tarafından elde edilmiş sonuçlar cat^1-grupların kategorisinde de yorumlanabilir.

KAYNAKLAR

1. Hall, P., 1940. The classification of prime-power groups, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 182, 130–141.

2. Hall, M. ve Senior, J. K., 1964. The Groups of order 2n ($n \leq 6$). Macmillan, New York.

3. Jones, M. R. ve Wiegold, J., 1974. Isoclinism and covering groups, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 11, 71–76.

4. Modabbernia, R., 2012. Isologism, Schur-pair property and Baer-invariant of groups, World Applied Sciences Journal, 16, 1631–1637.

5. Mohammadzadeh, H., Salemkar, A.R. ve Riyahi, Z., 2013. Isoclinic extensions of Lie algebras. Turkish Journal of Mathematics, 37, 598–606.

6. Parvaneh, F., Moghaddam, R. ve Khaksar, A., 2011. Some properties of n-isoclinism in Lie algebras, Journal of Pure and Applied Mathematics, 28, 165–176

7. Salemkar, A.R., Bigdely, H. ve Alamian, V., 2008. Some properties on isoclinism of Lie algebras and covers, Journal of Algebra and Its Applications, 7, 507–516.

8. Beyl, F. R. ve Tappe, J., 2006. Group extensions, representations, and the Schur multiplicator, Vol. 958, Springer.

9. Odabaş, A., Uslu, E. Ö. ve Ilgaz, E., 2016. Isoclinism of crossed modules. Journal of Symbolic Computation, 74, 408–424.

10. Whitehead, J. H. C., 1949. Combinatorial homotopy. II, Bulletin of the American Mathematical Society, 55, 5, 453–496.

11. Norrie, K. J., 1990. Actions and automorphism of crossed modules, Bulletin de la Société Mathématique de France, 118, 129–146.

12. Mucuk, O., Şahan, T. ve Alemdar, N., 2015. Normality and quotients in crossed modules and group-groupoids, Applied Categorical Structures, 23, 3, 415–428.

13. Vieites, A. M. ve Casas, J. M., 2002. Some results on central extensions of crossed modules. Homology, Homotopy and Applications, 4, 1, 29–42.

14. Brown, R. ve Spencer, C. B., 1976. $\mathcal{G}$-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group, Indagationes Mathematicae, 79, 4, 296–302.

15. Eilenberg, S. ve MacLane, S. 1945. General theory of natural equivalences, Transactions of the American Mathematical Society, 58, 2, 231–294.

16. Mucuk, O., 2010. Topoloji ve Kategori. Nobel Yayın Dağıtım.

17. Brandt, H., 1927. Über eine verallgemeinerung des gruppenbegriffes, Mathematische Annalen, 96, 1, 360–366.

18. Brown, R., 1987. From groups to groupoids: a brief survey, Bulletin of the London Mathematical Society, 19, 2, 113–134.

19. Mackenzie, K., 1987. Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, Vol. 124, Cambridge university press.

20. Şahan, T., 2018. Actor of categories internal to groups, arXiv preprint arXiv:1805.10951.

21. Salemkar, A. R., Mohammadzadeh, H. ve Shahrokhi, S., 2016. Isoclinism of crossed modules. Asian-European Journal of Mathematics, 9, 3, 1650091.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Onur SOYYİĞİT

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Muğla Sıtkı Kocaman Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2006-2011

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2019-2022

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Aksaray Üniversitesi / Bilgisayar İşletmeni, 2017 - …

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Onur SOYYİĞİT ve Tunçar ŞAHAN (2021). Grup-grupoidlerin kategorisinde izoklinizm. 33. Ulusal Matematik Sempozyumu, 31 Ağustos - 03 Eylül 2021 İstanbul.