T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOBOLEV UZAYLARINDA HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRLERİ

Nihat TEĞİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Eylül - 2020

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Nihat TEĞİN tarafından yapılan "**Sobolev Uzaylarında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörleri**" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan :

……

Üye :

……

Üye :

……

Tez Savunma Sınav Tarihi : 03/09/2020

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

…../……/2020

Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

Eylül-2020

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Akademik bilgisi ve tecrübesi ile yüksek lisans öğrenimim boyunca bana yol gösteren tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Yasin KAYA'ya, lisans öğrenimim döneminde ders aldığım değerli hocalarıma ve her zaman yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR I

İÇİNDEKİLER II

ÖZET III

ABSTRACT IV

KISALTMA VE SİMGELER V

1. GİRİŞ 1

2. KAYNAK ÖZETLERİ 3

3. MATERYAL VE METOT 5

3.1. Temel Kavram ve Teoremler 5

3.2. Küme Dizilerinin Limiti 11

3.3. Ölçüm ve İntegraller 15

3.4. L^p Uzayları 20

3.5. İntegral ile İlgili Bazı Teoremler 30

3.6. Sobolev Uzayları 31

3.7. Maksimal Fonksiyon ve Özellikleri 45

4. BULGULAR VE TARTIŞMA 59

4.1. Sobolev Uzayında Maksimal Fonksiyonun Türevi ve Maksimal Operatörün Sınırlılığı 59

4.1.1. $p \in (1,\infty]$ ve $\Omega = \mathbb{R}^n$ Durumu 59

4.1.2. $p \in (1,\infty]$ ve $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ Durumu 63

4.1.3. $p = 1$ ve $\Omega = \mathbb{R}$ Durumu 70

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 77

6. KAYNAKLAR 79

ÖZGEÇMİŞ 81

ÖZET

SOBOLEV UZAYLARINDA HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nihat TEĞİN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2020

Bu tezin amacı Sobolev uzaylarında maksimal operatörlerin özelliklerini incelemektir.

Birinci bölümde, önce Sobolev uzayının ve maksimal fonksiyonun öneminden söz ediyoruz. Sonra dikkatimizi maksimal operatörün Sobolev uzayındaki sınırlılığına veriyoruz.

İkinci bölümde, kaynaklarda bulunan çok sayıda kitap ve makalenin önemli noktalarını kısaca özetliyoruz.

Üçüncü bölümde, önce çalışma için gerekli olan fonksiyonel analiz ve ölçüm teorisinde bulunan değişik kavram, tanım ve sonuçları sunuyoruz. Sonra Sobolev uzaylarının ve Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonun ayrıntılı analizini veriyoruz.

Dördüncü bölümde, Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $W^{1,p}(\Omega)$ sobolev uzayı üzerindeki sınırlılığı üzerinde yapılan araştırma makalelerin sonuçları tartışıp paylaşıyoruz. Özellikle maksimal fonksiyonun zayıf türevini Sobolev uzayında analiz ediyoruz.

Anahtar Kelimeler: Sobolev uzayı, Maksimal operatör, Sınırlı operatör, Zayıf türev, Zayıf kompaktlık.

ABSTRACT

HARDY-LITTLEWOOD MAXIMAL OPERATORS IN SOBOLEV SPACES

MSc THESIS

Nihat TEGIN

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2020

The aim of this thesis is to investigate properties of maximal operators in Sobolev spaces.

In chapter one, we first introduce the importance of the Sobolev spaces and maximal function. We then focus our attention on the boundedness of maximal operator in the Sobolev space.

In chapter two, we briefly summarize the main points made in many articles and books which contained in references.

In chapter three, we present various concepts, definitions, and elementary results from functional analysis and measure theory that will be required. We then give a detailed analysis of Sobolev spaces and the Hardy-Littlewood maximal function.

In chapter four, we discuss and share the results of the research articles that made on the boundedness of Hardy-Littlewood maximal operator on Sobolev space $W^{1,p}(\Omega)$. In particular, we analyze weak derivative of maximal function in Sobolev space.

Keywords: Sobolev space, Maximal operator, Bounded operator, Weak derivative, Weak compactness

KISALTMA VE SİMGELER

$L^p(\Omega)$: $\{ f: \Omega \to \mathbb{R}: f$ $-$ölçülebilir ve $|f|^p$ integrallenebilirdir$\}$

X^* : X in duali uzayı

$C^k(\Omega)$: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinde k defa sürekli olarak diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: test fonksiyonları uzayı

$\text{supp}(f)$: f nin desteği

$\mathbb{R}^n$: $n-$ boyutlu Euclid Uzayı

$\text{dist}(x, \Omega)$: x noktası ile Ω kümesi arasındaki uzaklık

$|\Omega|$: Ω kümesinin Lebesgue ölçümü

$|a|$: a sayısının mutlak değeri

$W^{k,p}(\Omega)$: Sobolev uzayı

$\partial\Omega$: Ω bölgesinin sınırı

H.h.h. : Hemen hemen her yerde ::

1. GİRİŞ

Sobolev uzayları teorisi Rus matematikçi S.L. Sobolev'e (1938) dayanmaktadır. Sobolev uzayları, ortaya çıktığından beri, analizde ve kısmi diferansiyel denklemlerin titiz bir yaklaşımla ele alınmasında önemli bir rol almıştır. Bu uzaylar çeşitli varlık ve regülerlik sorularını ele almak için uygun bir çerçeve sağlarlar. Temelde Sobolev uzayının tanımı zayıf türeve dayanır. Bu nedenle genelleştirilmiş fonksiyon teorisiyle yakından ilişkilidir. Sobolev uzayları ve Sobolev uzayların karşılıklı ilişkili olduğu uzaylar matematiğin değişik alanlarında önemli bir yer tutar. Özellikle, kısmi diferansiyel denklemler, potansiyel teori, diferansiyel geometri, yaklaştırma teorisi, Öklidyen uzaylar ve Lie grupların analizinde kullanılmaktadır (Johnson ve Lindenstrauss 2001).

Maksimal operatör analizde klasik bir konudur. Lokal olarak integrallenebilen fonksiyonlar için, merkezi maksimal fonksiyonu

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

şeklinde tanımlanır.

$n = 1$ için, Hardy-Littlewood fonksiyonu kavramını ve temel özellikleri Hardy ve Littlewood (1930) tarafından verilmiştir. $n-$ boyutlu versiyonu ise Wiener (1938) tarafından ifade edilmiştir.

Maksimal fonksiyonun araştırılma sebeplerinden biri fonksiyonların integral ortalamalarını sınırlayabilmek içindir. Örneğin,

$$\phi = \frac{1}{\omega_n} \chi_{B(0,1)}$$

$$\phi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için,

$$(\phi_\varepsilon \star u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} u(y)dy$$

olur. Böylece

$$|(\phi_\varepsilon \star u)(x)| \leq \sup_{\varepsilon>0}(\phi_\varepsilon \star |u|)\,(x) = M(u)(x)$$

olur. Daha somut olarak maksimal fonksiyonu Lebesgue diferansiyellenebilme teoremi, Carleson teoreminde Fourier serilerinin noktasal yakınsaklığı ve kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç veri çözümlerinin noktasal yakınsaklığı gibi alanların ispatlarında kullanılmaktadır. Maksimal fonksiyon, L^p uzaylarında, oldukça çalışılmış bir konudur. Farklı uzaylarda hala çalışılmaya devam edilmektedir. Genellikle merak edilen sorular şunlardır. Bir uzayda u fonksiyonu bir başlangıç verisine sahip olduğunda $M(u)$ fonksiyonu bunu ilerletiyor mu, koruyor mu veya daha kötü bir duruma mı getiriyor? Yine başka bir soru da, M operatörünün sınırlı olup olmadığını incelemektir. Ayrıca maksimal operatör lineer bir operatör olmadığından, bir uzayda sürekliliği de incelenen konular arasındadır.

Kinnunen'in (1997) $p \in (1,\infty)$ için,

$$M\colon\ W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

operatörünün sınırlı olduğunu göstermesi yukarıdaki duruma güzel bir örnektir. Buradan maksimal operatörünün Sobolev uzayı üzerinde çalışılmasının önü oldukça açıldı. Böylece araştırmacılar maksimal fonsiyonun davranışlarını Sobolev uzayında araştırmaya koyuldular. Kinnunen'in metodu Hardy-Littlewood-Wiener teoremine dayandığı için $p = 1$ durumunu kapsamamıştır. Bu konuyla ilgili çok sayıda araştırma soruları (Hajlasz ve Onninen 2004) makalesinde bulunmaktadır. Bunlardan biri şudur:

$$f \to |\nabla Mf| \text{ operatörü } W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \text{ den } L^1(\mathbb{R}^n) \text{ ye}$$

sınırlı mıdır? Bu soru, $n = 1$ durumunda merkezi olmayan maksimal operatör için Tanaka (2002) tarafından çözülmüştür.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Sobolev uzaylarının temel özelliklerini veren çok sayıda kaynak bulunmaktadır. (Adams ve Fournier 2003) kaynağı bu konudaki temel kitaplardan biridir. Bu kitapta Sobolev uzaylarının tanımı, gömülme teoremleri, regüler fonksiyonların yoğunluğu ve bu uzayların fonksiyonel analitik özellikleri ve kesirli mertebeden Sobolev uzayları gibi konular bulunmaktadır.

Bu tezde, Sobolev uzayları, daha çok (Mitrovic ve Zubrinic 1997) kaynağından (kitabından) faydalanılmıştır. Bu kaynak konunun anlaşılmasına özen göstermiş ve konuyla ilgili yeterli ayrıntı vermiştir.

Maksimal fonksiyonun ilk defa verilen tanımı, temel özellikleri ve genelleştirilmesi (Hardy ve Littlewood 1930) ve (Wiener 1939) makalelerinde incelenmiştir.

Çoğu kitapta, $1 < p < \infty$ için, Maksimal operatörün L^p uzayında sınırlılığını ifade eden,

$$\|Mf\|_p \leq c\|f\|_p$$

eşitsizlikte c sabiti n ve p ye bağlı olarak $c(n,p) > 0$ şeklinde ispatı verilir. (Stein ve Strömberg 1983) te c nin n den bağımsız olacak şekilde $c(p) > 0$ olarak verilebileceği gösterilmiştir.

Maksimal operatörün $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki sınırlılığı ilk olarak (Kinnunen 1997) kaynağında ele alınmıştır. $W^{1,p}(\Omega)$ deki sınırlılığı ise (Kinnunen ve Lindqvist 1998) de bulunmaktadır. (Hajlasz ve Onninen 2004) de maksimal operatörünü de kapsayacak şekilde geniş bir operatör sınıfı için, Sobolev uzayında sınırlılık ispatlanmıştır. Ayrıca yine bu makalede çok sayıda açık soruya yer verilmiştir. Süreç içerisinde bu açık soruların bir kısmı çözülmüştür.

$p = 1$ durumunda, maksimal operatör sınırlı olmadığı için, (Kinnunen 1997) makalesi bu özel durumu kapsamamıştır. Bu boşluk, $n = 1$ özel durumunda (Tanaka 2002) makalesinde doldurulmuştur. Tanaka bunu merkezi olmayan maksimal operatör için yapmıştır. (Luiro 2007) makalesinde, $p \in (1, \infty)$ için,

$$M\colon\ W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

operatörünün sürekli olduğunu göstermiştir.

Son olarak (Aldroubi ve ark. 2019) kaynağının üçüncü bölümü Emanuel Carneiro tarafından yazılmıştır. Carneiro bu bölümde Maksimal operatörünün özelliklerini, başta Kinnunen'in maksimal operatörün Sobolev uzayındaki sınırlılığı bağlamında ele alarak, bu konularla ilgili iyi bir özet vermiştir.

(Aalto ve Kinnunen 2009)'de maksimal fonksiyonun Sobolev uzayındaki davranışı üzerinde yapılan çalışmalar incelenmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1.Temel Kavram ve Teoremler

Tez bağlamında Fonksiyonel Analizin bazı temel bilgilerini verelim (Heil 2018, Muscat 2014, Tao 2016, Zhang 2011, Hunter ve Nachtergaele 2001, Hutson ve ark. 2005, Robinson 2001, Siddigi ve Nanda 1986, Kadets 2018).

Tanım 3.1.1. X herhangi bir küme olsun. Eğer

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to d(x, y)$$

biçimindeki bir fonksiyon her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x, y) \geq 0$

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlarsa (X, d) ikilisine bir metrik uzaydır denir.

Tanım 3.1.2. $B(a, r) = \{x \in X: \ d(x, a) < r\}$

kümesine, merkezi a ve yarı çapı $r > 0$ olan bir (açık) yuvar denir.

Bir metrik uzayda birbirinden farklı noktalar ayrık açık yuvarlar ile birbirinden ayrılabilirler, yani,

$$x \neq y \text{ ise } \exists r > 0 \text{ için } B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$$

olabilmektedir.

$A \subset X$ ve $b \in X$ olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$

$$(B(b, \varepsilon) - \{b\}) \cap A \neq \emptyset$$

ise b noktasına A kümesinin bir limit noktasıdır denir.

Örnek 3.1.3. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ kümesinin bir tane limit noktası vardır. Bu nokta 0 elemanıdır.

Tanım 3.1.4. (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $A \neq \emptyset$ olsun. Eğer her $x, y \in A$ için

$$d\,(x, y) \leq C$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sabiti varsa A kümesine sınırlıdır denir.

A sınırlı bir küme ise A nın çapı

$$\text{çap}(A) = \sup\{d(x, y):\ x, y \in A\}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.1.5. X**,** Y birer metrik uzay ve $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer

$$X \text{ te } x_n \to x \text{ iken } Y \text{ de } f(x_n) \to f(x)$$

oluyor ise f fonksiyonu X ile Y metrik uzayları arasında süreklidir denir.

Bu durumda,

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

olmaktadır.

Teorem 3.1.6. X ve Y birer metrik uzay ve $f: X \to Y$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i) f süreklidir.

ii) $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

iii) Y deki her açık V kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi X te açıktır.

Tanım 3.1.7. $\{x_n\}$, X metrik uzayında bir dizi olmak üzere, eğer

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\quad n \geq N \Rightarrow x_n \in B\,(x, \varepsilon)$$

oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsaktır denir.

Bu $n \to \infty$ için, $x_n \to x$ ile gösterilir. Ayrıca $x_n \to x$ ile $d(x_n, x) \to 0$ ifadeleri birbirine denktir.

Tanım 3.1.8. $\{x_n\}$, X metrik uzayında bir dizi olmak üzere, $n, m \to \infty$ için

$$d(x_n , x_m) \to 0$$

oluyor ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisidir denir.

Başka bir deyişle, x_n dizisinin

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \ \exists N \, , \ n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

koşulunu sağlamasıdır.

Bir X metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bir limit noktasına yakınsar ve bu noktalar X in birer elemanı ise bu metrik uzaya tamdır denir.

Tam olmayan bir metrik uzayda bir Cauchy dizisi yakınsak olmak zorunda değildir. Örneğin, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinde, $x, y \in \mathbb{Q}$ için $d(x, y) = |x - y|$ olarak tanımlanan metriğe göre, rasyonel sayıların bazı Cauchy dizileri bir rasyonel sayıya yakınsamamaktadır.

Tanım 3.1.9. (X, d) bir metrik uzay olsun. X in bağlantısız olması için gerek ve yeter koşul $V \cup W = X$ olacak şekilde X in boştan farklı açık V ve W kümelerinin var olmasıdır (Denk bir şekilde, X in bağlantısız olması için gerek ve yeter koşul X in, $\emptyset$ ve X alt küme dışında, hem açık ve hem de kapalı olan bir alt kümeye sahip olmasıdır).

Eğer X, boştan farklı ve bağlantısız değil ise bu durumda X e bağlantılıdır denir.

Tanım 3.1.10. (X, d) bir metrik uzay ve $Y \subset X$ olsun. Y nin bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul $\left(Y, d|_{YxY}\right)$ metrik uzayının bağlantılı olmasıdır. Ayrıca, Y'nin bağlantısız olması için gerek ve yeter koşul $\left(Y, d|_{YxY}\right)$ metrik uzayının bağlantısız olmasıdır.

Teorem 3.1.11. (Ara Değer Teoremi) (X, d_X) bir metrik uzay $f: X \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve E kümesi X in bağlantılı herhangi bir alt kümesi olsun. Ayrıca, herhangi iki $a, b \in E$ elemanı verilsin, y de, $f(a) \leq y \leq f(b)$ veya $f(a) \geq y \geq f(b)$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $y = f(c)$ olacak şekilde $c \in E$ vardır.

Tanım 3.1.12. $f: X \to Y$ fonksiyonu için,

$$\exists\, c > 0\,, \quad \forall x, x' \in X, \quad d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leq c\, d_X(x, x')$$

oluyor ise f ye Lipschitz dir denir.

Eğer $f: X \to X$ Lipschitz ve c ∈ $(0,1)$ ise f ye bir büzülme dönüşümü denir.

Örnek 3.1.13. $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y|$ alışılmış metrik olmak üzere

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sin\frac{x}{2}$$

fonksiyonu ortalama değer teoreminden, her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\left|\sin\tfrac{x}{2} + \sin\tfrac{y}{2}\right| \leq \tfrac{1}{2}|x-y|$$

olduğundan f bir büzülme fonksiyonudur.

Teorem 3.1.14. (Banach Sabit Nokta Teoremi) $X \neq \emptyset$ bir tam metrik uzay olsun. Bu durumda her $f: X \to X$ büzülme dönüşümü $x = f(x)$ biçiminde bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 3.1.15. K topolojik bir uzayın bir alt kümesi olmak üzere, eğer K nin her açık örtüsü sonlu bir alt örtü içeriyorsa K ya bir kompakt kümedir denir. Başka bir deyişle

$$K \subset \bigcup_{i \in I} V_i$$

koşulunu sağlayan her $\{V_i : i \in I\}$ açık kümeler ailesi için,

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}$$

biçiminde sonlu bir $V_{i_1}, \ldots, V_{i_n}$ alt aile vardır.

Tanım 3.1.16. $A \subset X$ kümesinin kapanışı, A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye denir. $\bar{A}$ ile gösterilir. Bu küme A yı kapsayan tüm kümelerin kesişimiyle elde edilir. Bir metrik uzayda; A nın kapanışı, A kümesine, A nın elemanlarıyla oluşan yakınsak dizilerin (tüm) limit noktalarının eklenmesiyle de elde edilebilir:

$$\bar{A} = \{x \in X:\ a_n \to x \text{ biçiminde bir } a_n \in A \text{ var}\}$$

biçiminde ifade edilebilirdir.

Tanım 3.1.17. X bir metrik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, eğer

$$\bar{A} = X$$

oluyorsa bu durumda A , X te yoğundur denir.

Tanım 3.1.18. X, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, $\| . \| : X \to \mathbb{R}$ biçiminde bir fonksiyon, eğer her $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{F}$ için

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

koşulunu sağlarsa, $\| . \|$ ye X üzerinde bir normdur denir.

Normlu bir X uzayı, $d: X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \|x - y\|$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olur.

Normlu X vektör uzayı, $d(x, y) = \|x - y\|$ metriğine göre tam ise X normlu uzayına bir Banach uzayıdır denir.

$d(x, y) = \|x - y\|$ ise bu durumda her x, y için

$$d(x + z\ ,\ y + z) = \|x + z - y - z\| = d(x, y)$$

olur. Ayrıca her α skaleri ve $x, y \in X$ için

$$d(\alpha x\ , \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\|x - y\| = |\alpha| d(x, y)$$

olur.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve Ω üzerinde tanımlı, sınırlı, sürekli ve kompleks değerli fonksiyonları $C(\Omega)$ ile gösterelim. Bu durumda $C(\Omega)$ vektör uzayını $\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ ile normlayalım. Bu norma sup norm denir.

Teorem 3.1.19. (Weierstrass Teoremi) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kapalı ve sınırlı bir küme olmak üzere, bu durumda $n -$ değişkenli polinomlar kümesi sup normuna göre C(Ω) uzayında yoğun olur

Tanım 3.1.20. X ve Y aynı $\mathbb{F}$ skaler cismi üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere, eğer $T: X \to Y$ fonksiyonu her $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{F}$ için

i) $T(x+y) = T(x) + T(y)$

ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

koşullarını sağlarsa T ye bir lineer operatör veya lineer dönüşüm denir. Eğer $Y = \mathbb{F}$ yani $T: X \to \mathbb{F}$ biçiminde skaler değerli ise T ye bir lineer fonksiyonel denir.

Tanım 3.1.21. X ve Y normlu vektör uzayları olmak üzere, eğer her $x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|$$

olacak biçimde bir $c \geq 0$ sabiti varsa $T: X \to Y$ operatörüne sınırlıdır denir.

Eğer X sonlu boyutlu ise bu durumda her zaman $T: X \to Y$ lineer operatörü sınırlı olur.

Teorem 3.1.22. X ve Y normlu vektör uzaylar olmak üzere, eğer $T: X \to Y$ bir lineer operatör ise bu durumda

T sınırlıdır $\Leftrightarrow$ T süreklidir.

Tanım 3.1.23. $T: X \to Y$ bir operatör olmak üzere, eğer X te verilen sınırlı herhangi A kümesinin görüntüsü Y de kompakt kapanışa sahip, yani, her sınırlı $A \subset X$ kümesi için $\overline{T(A)}$ kümesi Y de kompakt ise T ye kompakt operatör denir.

Her kompakt operatör sınırlıdır.

Tanım 3.1.24. X normlu vektör uzayı üzerindeki tüm sürekli lineer fonksiyoneller uzayına X in dual uzayı denir. X'in dual uzayı X^* ile gösterilir.

Tanım 3.1.25. $\{x_n\}$, normlu X uzayında bir dizi olsun.

Eğer her $f \in X^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(x) = 0$$

olacak biçimde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisine x noktasına zayıf yakınsaktır denir.

Başka bir deyişle, $\varepsilon > 0$ verildiğinde, bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir öyle ki

$$n > N \text{ olduğunda } \forall f \in X^* \quad \left|f(x_n) - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

olmaktadır.

Zayıf yakınsaklık $x_n \rightharpoonup x$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.26. X tam bir metrik uzay ve $\{\mathrm{E}_i\}$ kümelerin bir dizisi olmak üzere

i) her i için, $\mathrm{E}_i \neq \emptyset$

ii) her E_i kümesi kapalı ve her $\mathrm{E}_i \subset X$

iii) $\mathrm{E}_1 \supset \mathrm{E}_2 \supset \mathrm{E}_3 \supset \ldots$

iv) $\lim_{i\to\infty} \text{çap}(E_i) = 0$

ise bu durumda

$$\mathrm{E} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}_i$$

kesişimi tek elemanlı bir küme olur. Başka deyişle

$$\exists x \in X : \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}_i = \{x\}$$

olur.

3.2. Küme Dizilerinin Limiti

Bu alt bölüm (Yeh 2006, Haddad ve Chellaboina 2011, Khrennikov 2012, Cheney 2013) kaynaklarından yararlanarak yazılmıştır.

Tanım 3.2.1. $\{A_n\}$, X kümesinin alt kümelerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için eğer $A_n \subset A_{n+1}$ olur ise $\{A_n\}$ dizisine artandır denir. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için, eğer $A_n \supset A_{n+1}$ olur ise $\{A_n\}$ dizisine azalandır denir. Bir $\{A_n\}$ dizisi, artan veya azalan ise bu diziye monotondur denir.

$\{A_n\}$ artan bir dizi ise

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in X : \text{ en az bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } x \in A_n\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\{A_n\}$ azalan bir dizi ise

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in X : \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için } x \in A_n\}$$

şeklinde tanımlanır.

Monoton bir $\{A_n\}$ dizisi için, $\lim_{n\to\infty} A_n$ her zaman vardır.

Eğer A_n artan ise, bu durumda $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset \Leftrightarrow$ her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \emptyset$ dir. A_n azalan ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \neq \emptyset$ olsa bile , $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ olabilmektedir.

Örnek 3.2.2. $X = \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için, $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ olur. $n \in \mathbb{N}$ için; $A_n = [0, \frac{1}{n})$ şeklinde alınırsa bu durumda A_n azalan ve $\lim_{n\to\infty} A_n = \{0\}$ olur.

Bir X kümesinin, alt kümelerinden oluşan, keyfi (rastgele) bir dizinin limitini tanımlamak için bir dizinin limit infimumu ve limit supremumu tanımlanır.

Tanım 3.2.3. $\{A_n\}$, X kümesinin alt kümelerinin bir dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k \right)$$

ya $\{A_n\}$ dizisinin limit infimumu denir.

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right)$$

ya $\{A_n\}$ dizisinin limit supremumu denir.

$\left\{ \bigcap_{k\geq n} A_k \right\}$ artan bir dizi olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k \right)$$

var olur.

Benzer şekilde

$\left\{\bigcup_{k\geq n} A_k\right\}$ azalan bir dizi olduğu için

$$\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

var olur.

Sonuç olarak, $\lim_{n\to\infty}\inf A_n$ ve $\lim_{n\to\infty}\sup A_n$ her zaman var olur.

Önerme 3.2.4. $\{A_n\}$, X kümesinin alt kümelerinin bir dizisi olsun.

Bu durumda

i) $\lim_{n\to\infty}\inf A_n = \{x\in X$: bir $n_o\in\mathbb{N}$ var, $n\geq n_o$ için $x\in A_n$ dir $\}$

ii) $\lim_{n\to\infty}\sup A_n = \{x\in X$: sonsuz tane $n\in\mathbb{N}$ için , $x\in A_n$ dir $\}$

iii) $\lim_{n\to\infty}\inf A_n \subset \lim_{n\to\infty}\sup A_n$

olur.

Tanım 3.2.5. $\{A_n\}$, X kümesinin alt kümelerinin bir dizisi olsun.

Eğer $\lim_{n\to\infty}\inf A_n = \lim_{n\to\infty}\sup A_n$ olur ise bu durumda $\{A_n\}$ dizisinin yakınsak olduğunu söyleriz. Buradan $\lim_{n\to\infty} A_n$ limiti

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\inf A_n = \lim_{n\to\infty}\sup A_n$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\lim_{n\to\infty}\inf A_n \neq \lim_{n\to\infty}\sup A_n$ olur ise bu durumda $\lim_{n\to\infty} A_n$ limiti var olmaz.

Örnek 3.2.6. $X=\mathbb{R}$ ve $\{A_n\}$ dizisi

$$A_1 = [0,1]\ , \quad A_3 = \left[0,\tfrac{1}{3}\right], \quad A_5 = \left[0,\tfrac{1}{5}\right], \ldots$$

$$A_2 = [0,2]\ , \quad A_4 = [0,4]\ , \quad A_6 = [0,6]\ , \ldots$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\inf A_n = \{x\in X\text{: bir } n_0\in\mathbb{N} \text{ var, } n\geq n_0 \text{ için } x\in A_n \text{ dir}\}$$

$$= \{0\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \{x \in X:\ \text{sonsuz tane}\ n \in \mathbb{N}\ \text{için}\ x \in A_n\ \text{dir}\}$$

$$= [0, \infty)$$

olur. Buradan , $\lim_{n\to\infty} A_n$ limiti var olmaz.

Tanım 3.2.7. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ve $x \in \Omega$ olsun.

Eğer $\{x_n\} \subset \Omega$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklindeki her dizi için $f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf f(x_n)$ olur ise bu durumda f ye $x \in \Omega$ noktasında alt yarı süreklidir denir.

Başka bir deyişle , $f: \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in \Omega$ noktasında alt yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul her bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in \Omega :\ f(x) > \alpha\}$ kümesinin açık olmasıdır.

Tanım 3.2.8. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ve $x \in \Omega$ olsun. Eğer $\{x_n\} \subset \Omega$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklindeki her dizi için $f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \sup f(x_n)$ olur ise bu durumda f ye $x \in \Omega$ noktasında üst yarı süreklidir denir. Denk olarak, her bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için, $\{x \in \Omega :\ f(x) < \alpha\}$ kümesi açık ise f , $x \in \Omega$ noktasında üst yarı sürekli olur.

Eğer f hem alt yarı sürekli hem de üst yarı sürekli ise bu durumda f sürekli olur.

Teorem 3.2.9. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi kompakt ve $f: \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Ω üzerinde alt yarı sürekli olsun. Bu durumda

$$f(x^*) \leq f(x)\,, \qquad x \in \Omega$$

olacak biçimde bir $x^* \in \Omega$ vardır.

Teorem 3.2.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi kompakt ve $f: \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Ω üzerinde üst yarı sürekli olsun. Bu durumda

$$f(x^*) \geq f(x)\,, \qquad x \in \Omega$$

olacak biçimde bir $x^* \in \Omega$ vardır.

Tanım 3.2.11. X, $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) cismi üzerinde bir lineer (vektör) uzayı olsun ve τ , X üzerinde bir topoloji olsun. Eğer,

$$X \times X \to X\ ,\ (x, y) \to x + y$$

ve

$$\mathbb{F} \times X \to X\,, \quad (\lambda, x) \to \lambda x$$

cebirsel işlemleri sürekli ise (X, τ) ya bir lineer topolojik uzay denir.

τ nin elemanlarına açık küme dendiğini biliyoruz.

Eğer, $x \in \mathcal{O} \subset \mathcal{U}$ ve $\mathcal{O}$ açık bir küme ise $\mathcal{U}$ ya x in bir komşuluğudur denir. Şimdi süreklilik aksiyomlarını aşağıdaki biçimde ifade edilebilirdir.

i) $\mathcal{U}$, $x + y$ nin bir komşuluğu ise bu durumda
$v \in V$ ve $w \in W \Rightarrow v + w \in \mathcal{U}$

olacak şekilde x nin bir V komşuluğu ve y nin bir W komşuluğu vardır.

ii) $\mathcal{U}$, λx in bir komşuluğu ise bu durumda
$\alpha \in V$ ve $w \in W \Rightarrow \alpha w \in \mathcal{U}$

olacak biçimde λ nin bir V komşuluğu ve x in bir W komşuluğu vardır.

3.3. Ölçüm ve İntegraller

Ölçüm ve integral konusu ağırlıklı olarak (Cheney 2013) kitabından yararlanarak oluşturulmuştur.

Tanım 3.3.1. X bir küme olmak üzere, bir $\mu : P(X) \to [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa bu fonksiyona X üzerinde bir dış ölçümdür denir.

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A \subset B$ ise bu durumda $\mu(A) \leq \mu(B)$

iii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Örnek 3.3.2. ($\mathbb{R}$ de Lebesgue Dış ölçümü) X, reel sayılar kümesi olsun

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) :\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i\,, b_i),\quad a_i < b_i \right\}$$

olur.

Örnek 3.3.3. ($\mathbb{R}^n$ de Lebesgue Dış ölçümü) $\mathbb{R}^n$ de "birim küpü" bileşenleri $[0,1]$ aralığında yer alan tüm $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ noktalarının oluşturduğu küme olarak tanımlayalım. Bunu Q ile gösterelim.

$x \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise

$$x + \lambda Q = \{x + \lambda v : \quad v \in Q\}$$

olarak tanımlansın. $A \subset \mathbb{R}^n$ için

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^n : \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i + \lambda_i Q) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.3.4. (Lebesgue -Stieltjes Dış Ölçümü) X reel sayı doğrusu olsun. $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan monoton bir fonksiyon olsun.

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} [\gamma(b_i) - \gamma(a_i)] : \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i), \quad a_i < b_i \right\}$$

olarak tanımlanır.

$\gamma(x) = x$ alınırsa, Lebesgue dış ölçümü elde edilir.

Teorem 3.3.5. X herhangi bir küme olmak üzere, $\mathcal{C}$, sayılabilir çoklukta X kümesini örtebilen, X in alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Bir $\beta: \mathcal{C} \to [0, \infty]$ fonksiyonu

$$\inf \{ \beta(C) : \quad C \in \mathcal{C} \} = 0$$

özelliğine sahip olsun. Bu durumda

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \beta(C_i) : \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, \quad C_i \in \mathcal{C} \right\}$$

ifadesi X üzerinde bir dış ölçüm tanımlar.

Tanım 3.3.6. X bir küme ve $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere, eğer $\mathcal{A}$ aşağıdaki özelliklere sahip ise ($X, \mathcal{A}$) çiftine bir ölçülebilir uzay denir.

i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A}$ ise $X \setminus A \in \mathcal{A}$

iii) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A} \;\; ise \;\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Bir $\mathcal{A}$ küme ailesi bu üç özelliğe sahip ise buna bir σ – cebiridir denir. Ölçülebilir bir $(X, \mathcal{A})$ uzayı verildiğinde, $\mathcal{A}$ daki kümelere, X in ölçülebilir alt kümeleri denir.

Tanım 3.3.7. X bir topolojik uzay olmak üzere, topolojiyi kapsayan (yani, tüm açık kümeleri kapsayan) en küçük $\sigma -$ cebirine Borel $\sigma -$ cebiri denir, elemanlarına Borel kümeleri denir.

Tanım 3.3.8. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olmak üzere, bir $\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip ise buna bir ölçümdür denir.

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) her A $\in \mathcal{A}$ için, $\mu(A) \geq 0$

iii) $\{A_1, A_2 \ldots\}$ dizisi $\mathcal{A}$ da ikişer ikişer ayrık ise

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Örnek 3.3.9. $\mathcal{A} = P(X)$ ve $\{x_1, x_2 \ldots\}$ kümesi X in sayılabilir bir alt kümesi olsun. Her bir, $i \in \mathbb{N}$ için, $\lambda_i \in [0, \infty]$ sayıları seçilsin. Bu durumda

$$\mu(A) = \sum \{\lambda_i : \;\; x_i \in A\}, \qquad \mu(\emptyset) = 0$$

bir ölçüm olur.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne bir ölçüm uzayı denir.

Teorem 3.3.10. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olmak üzere, eğer her bir $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \in \mathcal{A} \;\; ve \;\; A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ise bu durumda

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

olur.

Tanım 3.3.11. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olmak üzere, eğer

$$B \in \mathcal{A} \quad \text{ve} \quad \mu(B) = 0 \Rightarrow P(B) \subset \mathcal{A}$$

oluyorsa $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayına tamdır denir (Athreya ve Lahiri 2006).

Teorem 3.3.12. (Carathéodory Teoremi) μ , X üzerinde bir dış ölçüm olmak üzere, $\mathcal{A}$ küme ailesi

$$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \ , \ \forall S \in P(X)$$

özelliğini sağlayan tüm $A \subset X$ kümeleri olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir tam ölçüm uzayı olur.

Buradaki koşulu sağlayan A kümelerine $\mu-$ ölçülebilir denir. Ayrıca, $\mu-$ ölçülebilir kümeler bir $\sigma-$ cebiri olur. Bu $\sigma-$ cebirini $\mathcal{A}$ ile gösterirsek, $\mu-$ ölçülebilir ve $\mathcal{A}$ ölçülebilir kavramları aynı olurlar. μ , Lebesgue dış ölçümü olduğunda, Carathéodory teoreminden elde edilen $\mathcal{A}$ $\sigma-$ cebirine Lebesgue ölçülebilir kümeler $\sigma-$ cebiri denir. Bundan daha küçük bir $\sigma-$ cebiri $\mathcal{B}$ Borel kümeler ailesidir. Bu açık kümeleri kapsayan en küçük $\sigma-$cebiridir. $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ nin bir öz alt kümesi olur.

Her dış ölçümden, Carathéodory teoremiyle, bir ölçüm elde edildiğini gördük. Aşağıdaki teorem bunun karşıtının, yani her ölçümün bu yöntemle elde edilebileceğini ifade etmektedir.

Teorem 3.3.13. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $S \in P(X)$ için

$$\mu^*(S) = \inf \{ \mu(A) \colon S \subset A \in \mathcal{A} \}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda μ^* bir dış ölçüm ve μ^* nin $\mathcal{A}$ kümesine kısıtlanması μ olur. Ayrıca $\mathcal{A}$ daki her bir küme $\mu-$ ölçülebilir olur.

Şimdi bir dış ölçüm için, regülerlik kavramını verelim. Eğer her bir $S \in P(X)$ kümesine karşılık $S \subset A$, $\mu(S) = \mu(A)$ biçiminde bir $\mu-$ ölçülebilir bir A kümesi varsa bu durumda $P(X)$ üzerindeki μ dış ölçümüne regülerdir denir (Leoni 2017).

Tanım 3.3.14. $(X, \mathcal{A})$ herhangi bir ölçülebilir uzay ve bir $f \colon X \to [-\infty, \infty]$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\mathbb{R}$ nin her bir B Borel alt kümesi için $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ oluyorsa f ye $\mathcal{A}-$ ölçülebilir (kısaca, f ye ölçülebilir) denir.

Bir A kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir $P(x)$ özelliği $x \in X$ noktalarına bağlı olsun. Bu özellik ölçümü 0 olan bir kümenin tümleyeninde sağlanır ise bu durumda $P(x)$ özelliği hemen hemen her yerde sağlanır denir (Loeb 2016).

Teorem 3.3.15. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçümü $\mu(X) < \infty$ şeklinde olsun. Ölçülebilir $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi, h.h.h. reel değerli f fonksiyonuna yakınsak olsun. Bu durumda verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\mu(A) < \varepsilon$ ve A^c üzerinde $f_n \to f$ düzgün yakınsak koşulunu sağlayan ölçülebilir bir A kümesi vardır (Bass 2011). Bu Egorov teoremi olarak bilinir.

$(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olmak üzere, ölçülebilir bir $f: X \to [-\infty, \infty]$ fonksiyonunun görüntüsü sonlu bir küme ise bu fonksiyona bir basit fonksiyon denir. Buradan, c_i −ler farklı elemanlar ve $A_i = \{ x:\ f(x) = c_i\}$ olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mathcal{X}_{A_i}(x)$$

biçiminde ifade edilebilir olur.

f negatif değerler almayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda , her $x \in X$ için,

$$g_1(x) \le g_2(x) \le g_3(x) \le \cdots \ , \qquad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$$

şeklinde basit fonksiyonların bir $\{g_n\}$ dizisi vardır. Ayrıca f sınırlı ise bu durumda $g_n(x) \to f(x)$ yakınsaması düzgün olabilecek biçimde yapılabilir (Krantz 2011).

f bir basit fonksiyon ise f nin integrali

$$\int f = \int \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mathcal{X}_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i)$$

şeklinde tanımlanır.

$f(x) \ge 0$ biçimindeki ölçülebilir bir fonksiyonun integrali

$$\int f = \sup \left\{ \int g:\ g \ \text{ basit ve } \ g \le f \right\}$$

olarak tanımlanır.

$f: X \to [-\infty, \infty]$ fonksiyonu verilsin.

$$f^+ = \text{maks}\{f, 0\} \quad ve \quad f^- = \text{maks}\{-f, 0\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda ölçülebilir $f: X \to [-\infty, \infty]$ fonksiyonun integrali

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\int f^+ = \int f^- = \infty$ ise bu durumda $\int f$ integrali tanımsız olur.

Ölçülebilir bir $f: X \to [-\infty, \infty]$ fonksiyonu için $\int |f| < \infty$ olursa bu fonksiyona integrallenebilirdir denir.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve ölçülebilir $f: X \to [-\infty, \infty]$ fonksiyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda $A \in \mathcal{A}$ için, f'nin A üzerindeki integrali

$$\int_A f d\mu = \int \chi_A f d\mu$$

şeklinde tanımlanır.

3.4. L^p Uzayları

Bu bölümde, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçülebilir keyfi bir kümeyi gösterecektir.

$1 \leq p < \infty$ durumu

L^p fonksiyonlar uzayı,

$L^p(\Omega) = \{f: \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ ölçülebilir ve } \|f\|_p < \infty\}$

şeklinde tanımlanır. Burada $\|f\|_p$ niceliğine f nin L^p normu denir. Bu nicelik

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır. $L^p(\Omega)$ uzayı bu norma göre tamdır bu nedenle $L^p(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

p = 2 durumunda,

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx$$

iç çarpımına göre, $L^2(\Omega)$ bir Hilbert uzayı olur.

$p = \infty$ durumu

L^∞ fonksiyonlar uzayı,

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ −ölçülebilir ve } \|f\|_\infty < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\|f\|_\infty$ niceliğine f nin L^∞ normu denir. Bu nicelik

$$\|f\|_\infty = \inf \{ c > 0 : h.h.h. \ |f(x)| \le c \}$$

biçiminde tanımlanır. $L^\infty(\Omega)$ uzayı da $\|\,.\,\|_\infty$ normuna göre bir Banach uzayı olur.

H.h.h. $x \in \Omega$ için

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty$$

sonucu elde edilir. $\|f\|_\infty < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonlara esasen sınırlı fonksiyonlar denir. Ayrıca, Ω açık kümesi ve sürekli bir $f \in L^\infty(\Omega)$ için

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : \ x \in \Omega\}$$

özel durumu elde edilir.

$\{f_k\}$ dizisinin $L^\infty(\Omega)$ uzayında yakınsak olması için gerek ve yeter koşul Ω nın içinde ölçümü sıfır olan bir küme var, bu kümenin tümleyeninde $f_k(x) \to f(x)$ yakınsaması düzgündür.

$1 \le p \le \infty$ aralığında bir p sayısı verildiğinde bunun eşleniği

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad (\text{ veya } p' = \frac{p}{p-1})$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.4.1. $1 < p < \infty$ ise bu durumda her $a, b \ge 0$ için

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

olur. Eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $a^p = b^{p'}$ olmasıdır. Bu eşitsizliğe Young eşitsizliği denir. ε −lu Young eşitsizliği ise şöyledir:

$1 < p < \infty$ ve $c(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{\frac{-p'}{p}} . \frac{1}{p'}$ olmak üzere, her $a, b \geq 0$, $\varepsilon > 0$ için

$$ab \leq \varepsilon\, a^p + c(\varepsilon)\, b^{p'}$$

eşitsizliği sağlanır (Carl ve ark. 2007).

Teorem 3.4.2. $1 \leq p < \infty$ ve $a, b \geq 0$ ise bu durumda

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

olur (Bass 2016).

Teorem 3.4.3. $1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere, $f \in L^p(\Omega)$ ve $g \in L^{p'}(\Omega)$ ise bu durumda $fg \in L^1(\Omega)$ ve

$$\int_{\Omega} |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir.

Teorem 3.4.4. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, her $f, g \in L^p(\Omega)$ için

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

olur. Bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir.

Teorem 3.4.5. $1 \leq p < \infty$ ve $\{f_k\}$, $L^p(\Omega)$ de bir dizi olmak üzere, eğer

i) h.h.h. $x \in \Omega$ için, $f_k(x) \to f(x)$

ii) $|f_k(x)| \leq g(x)$ olacak biçimde bir $g \in L^p(\Omega)$ var olursa bu durumda $L^p(\Omega)$ uzayında $f_k \to f$ yakınsaması oluşur (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

Aşağıdaki teorem bu teoremin kısmi olarak karşıtının da doğru olduğunu anlatmaktadır.

Teorem 3.4.6. $1 \leq p < \infty$ ve $L^p(\Omega)$ uzayındaki $\{f_k\}$ dizisi f fonksiyonunu yakınsak olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $\{f_k\}$ nin bir $\{f_{k'}\}$ alt dizisi ve bir $g \in L^p(\Omega)$ fonksiyonu vardır:

i) h.h.h. $x \in \Omega$ için, $f_{k'}(x) \to f(x)$

ii) $|f_{k'}(x)| \leq g(x)$ (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

Şimdi de, lokal L^p −integrallenebilir fonksiyonların $L^p(\Omega)$ uzayının tanımını ifade edelim: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$L^p_{loc}(\Omega) = \{f: \Omega \to \mathbb{R} : f$ −ölçülebilir ve $\forall K \subset \Omega$ kompakt kümesi için $f_{\chi_K} \in L^p(\Omega)\}$

p = 1 için, lokal olarak integrallenebilen fonksiyonlar uzayı elde edilir.

Örnek 3.4.7. $f: (0,5) \to \mathbb{R}$ ve $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu lokal olarak integrallenebilirdir ancak f integrallenebilir değildir.

$g: (-2,4) \to \mathbb{R}$, $x = 0$ için $g(0) = 0$ ve $x \neq 0$ için $g(x) = \frac{1}{x}$ olsun. Bu durumda

$$\int_{-2}^{4} |g(x)\, \chi_{[-1,2]}(x)|\, dx = \infty$$

olduğu için g fonksiyonu lokal olarak integrallenebilir değildir.

Teorem 3.4.8. $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda her bir $F \in [L^p(\Omega)]^*$ sınırlı lineer fonksiyoneli için

$$F(f) = \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx\,, \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

$$\|g\|_{p'} = \|F\|_{(L^p)^*}$$

olacak şekilde bir tek $g \in L^{p'}(\Omega)$ vardır. Ayrıca

$[L^p(\Omega)]^*$ den $L^{p'}(\Omega)$ ye olan $F \to g$ dönüşümü Banach uzayların bir izometrik izomorfizmidir (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

Bu nedenle $[L^p(\Omega)]^* = L^{p'}(\Omega)$ yazılabilir. $p = \infty$ durumunda, $[L^\infty(\Omega)]^* \neq L^1$ olur. Yani , $L^\infty(\Omega)$ deki her sınırlı lineer fonksiyonel, bir $g \in L^1(\Omega)$ için

$$F(f) = \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx$$

olarak gösterilebilir değildir. Fakat $L^1(\Omega) \subset [L^\infty(\Omega)]^*$ olur.

Teorem 3.4.9. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi $|\Omega| < \infty$ şeklinde sınırlı ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ verilsin. Bu durumda

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

ve her $f \in L^q(\Omega)$ için

$$\|f\|_p \leq c\|f\|_q$$

olacak şekilde bir $C = C(\Omega) > 0$ vardır (Adams ve Fournier 2003).

Böylece bu teoremden, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ için,

$$L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^p \subset L^1$$

yazılabilir.

Tanım 3.4.10. $1 \leq p < \infty$ ve $f,\ f_1,\ f_2, \ldots \in L^p(\Omega)$ olsun.

Eğer her $g \in L^{p'}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx$$

ise f_n dizisi $L^p(\Omega)$ de f ye zayıf yakınsaktır denir.

Bu durum,

$$f_n \rightharpoonup f \ ,\ L^p(\Omega) \quad \text{de}$$

ile gösterilir (Vestrup 2003). Ayrıca, Hölder eşitsizliğinden

$$fg, f_1g, f_2g, \ldots \in L^1(\Omega)$$

olur. Bu nedenle tanımda yakınsama da bir anlamsızlık oluşmaz. Ayrıca tüm bu nicelikler sonlu olduğu için

$$i) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx\,, \quad \forall g \in L^{p'}$$

$$ii) \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \int_{\Omega} f_n(x)\, g(x)\, dx - \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx \right| = 0, \quad \forall g \in L^{p'}$$

$$iii) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \big(f_n(x) - f(x)\big)\, g(x)\, dx = 0, \quad \forall g \in L^{p'}$$

koşulları denk olurlar.

Önerme 3.4.11. $1 \leq p < \infty$ ve $f, f_1, f_2, \ldots \in L^p(\Omega)$ olsun. Bu durumda $L^p(\Omega)$ uzayında $f_n \to f$ ise bu durumda $L^p(\Omega)$ uzayında $f_n \rightharpoonup f$ olur (Vestrup 2003).

Bu durum Hölder eşitsizliği ve aşağıdaki işlemden elde edilir:

$$\left| \int_{\Omega} f_n(x)\, g(x)\, dx - \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx \right| \leq \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)|\, g(x)\, dx \leq \|f_n - f\|_p \|g\|_{p'}$$

Önerme 3.4.12. $1 < p < \infty$ ve $\{\|f_n\|_p\}_{n=1}^{\infty}$ bir sınırlı dizi olsun. Ayrıca Ω nin hemen hemen her yerinde $f_n \to f \in L^p(\Omega)$ ise bu durumda $L^p(\Omega)$ uzayında $f_n \rightharpoonup f$ zayıf yakınsaması gerçekleşir (Vestrup 2003).

Önerme 3.4.13. $1 \leq p < \infty$ ve $L^p(\Omega)$ uzayında $f_n \rightharpoonup f$ zayıf yakınsaması sağlansın. Bu durumda

i) $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$

ii) $\|f\|_p \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_p$

özellikleri sağlanır (Braides ve Defranceschi 1998).

Teorem 3.4.14. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda h.h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$y \to f(x-y)\, g(y)$$

fonksiyonu integrallenebilir olur. Bu $f \star g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy\,, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlar. (Bu fonksiyonu f ve g nin konvolüsyonu denir). Ayrıca

$$f \star g \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

özellikleri sağlanır (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

İspat. $1< p < \infty$ olsun.

$$F(h) = \int_{\mathbb{R}^n} (f \star g)(x)\, h(x)\, dx$$

şeklinde bir $F \in \left[L^{p'}(\mathbb{R}^n)\right]^*$ lineer fonksiyonel tanımlayalım. Fubini teoremi ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |F(h)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\, dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\, dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)\, g(x-t)|\, dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|\, dt \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|.|g(x-t)|\, dx \\ &\leq \|f\|_1 \|h\|_{p'} \|g\|_p \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\|F\|_{\left[L^{p'}\right]^*} \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

olur. F fonksiyonelinin tanımından

$$\|F\|_{\left[L^{p'}\right]^*} = \|(f \star g)\|_p$$

olduğu görülür (Burada $\left[L^{p'}(\mathbb{R}^n)\right]^* = L^p(\mathbb{R}^n)$ özelliği kullanıldı).

$f, g, w \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda Fubini teoreminden

$$f \star g = g \star f \quad \text{(değişme)}$$

$$f \star (g \star w) = (f \star g) \star w \quad \text{(birleşme)}$$

özelliklerinin var olduğu gösterilebilir.

Tanım 3.4.15. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Ω da bulunan ve U_i nin h.h.h. $f = 0$ özelliğini sağlayan tüm açık U_i , $i \in \mathrm{I}$, kümeler ailesinin göz önüne alalım. Bu durumda

$$U = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} U_i$$

kümesinin h.h.h. $f = 0$ olduğu gösterilebilir.

$$\text{supp } f = \Omega \setminus U$$

kümesine f fonksiyonunun desteği denir (Mitrovic ve Zubrinic 1997). Eğer f sürekli ise bu durumda supp f

$$\{ x \in \Omega : \ f(x) \neq 0 \}$$

kümesinin kapanışı olur. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f(x) = \cos x$ ise bu durumda supp $f = \mathbb{R}$ olur.

Teorem 3.4.16. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$\text{supp } (f \star g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g$$

kapsaması vardır. Burada

$$\text{supp } f + \text{ supp } g = \{ x + y : \ x \in \text{supp } f \, , \ y \in \text{supp } g \}$$

anlamındadır (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ açık kümesi ve sürekli $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ve $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ kısmi türevleri var ve Ω üzerinde sürekli iseler bu durumda f , Ω üzerinde sürekli olarak diferansiyellenebilirdir denir. Bu durum kısaca $f \in C^1(\Omega)$ ile gösterilir. Daha genel olarak , $k \in \{0,1,2, \dots\}$ ise bu durumda f nin k. mertebeye kadar olan (k dahil) tüm kısmi türevleri var ve Ω üzerinde sürekli f ye k defa sürekli olarak diferansiyellenebilirdir denir. Kısaca $f \in C^k(\Omega)$ ile gösterilir (Krantz 2007).

Örnek 3.4.17. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve

$$f(x) = \begin{cases} x^3 , & x \geq 0 \\ -x^3 , & x < 0 \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $f \in C^2(\mathbb{R})$ ve $f \notin C^3(\mathbb{R})$ olur. Kompakt desteğe sahip, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ şeklindeki tüm fonksiyonlar uzayı $C_0(\Omega)$ ile gösterilir.

Ayrıca,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_k C^k(\Omega)$$

$$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$

$$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$

şeklinde tanımlanırlar.

Tanım 3.4.18. Her bir α_i bileşeni $\{0,1,2, \dots\}$ kümesinden alınmak üzere,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

şeklindeki bir sıralı $n-$liye bir çoklu (multi) indis denir. Negatif olmayan

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

tam sayısına α çoklu indisinin uzunluğu (veya büyüklüğü) denir. α ve β çoklu indisleri verildiğinde

$$\text{her } i = 1,2, \dots, n \text{ için }, \ \beta_i \leq \alpha_i$$

oluyorsa bu durumda $\beta \leq \alpha$ yazılır. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ise

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

şeklinde ve

$$\alpha! = \alpha_1! \, . \, \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

biçiminde tanımlanır (Protter ve Charles 2012).

Çoklu indis aracılığıyla $f : \Omega \to \mathbb{R}$ şeklindeki bir fonksiyonun α mertebeden kısmi türevleri

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

biçiminde daha kısa bir notasyonla gösterilebilir. Örneğin $n = 2$ ve $\alpha = (1,3)$ ise bu durumda $|\alpha| = 4$ ve

$$D^{\alpha}f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2^3}$$

şeklini alır.

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{\, f: \Omega \to \mathbb{R} : \forall |\alpha| \leq k \,, D^{\alpha}f \,,\ \Omega \text{ üzerinde düzgün sürekli } \}$$

şeklinde tanımlanır. f ve f nin mertebesi k ya kadar (k dahil) olan tüm türevleri tek bir şekilde $\overline{\Omega}$ kapanışına sürekli olacak biçimde genişletilebildiğinden , f yi $\overline{\Omega}$ kümesi üzerinde tanımlanmış olarak düşünebiliriz. Ayrıca açık $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi sınırlı ise bu durumda $C^k(\overline{\Omega})$ uzayı

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname*{maks}_{x \in \overline{\Omega}} |D^{\alpha}f(x)|$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

Teorem 3.4.19. $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $f \star g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ve $|\alpha| \leq k$ şeklindeki her α çoklu indisi için

$$D^{\alpha}(f \star g) = (D^{\alpha}f) \star g$$

eşitliği sağlanır (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, C≠ 0 için

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} C.e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}} & , \quad |x| < \varepsilon \ \ ise \\ 0 & , \quad |x| \geq \varepsilon \ \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir elemanı ve $\operatorname{supp}\ \varphi = \overline{B(0,\varepsilon)}$ olur. Ayrıca,

$$C = \frac{1}{\int_{|x| \leq \varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}\, dx}$$

olarak alındığında

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\varepsilon}(x)\, dx = 1$$

elde edilir. Böylece $\varepsilon > 0$ verildiğinde aşağıdaki özelliklere sahip bir $\varphi_{\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var olur:

i) $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,, \quad \varphi_\varepsilon \geq 0$

ii) $\text{supp}\ \ \varphi_\varepsilon = B(0,\varepsilon)$

iii) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1$

Bir $\{\rho_k\}$, $\rho_k = \varphi_{\frac{1}{k}}$, fonksiyon dizisi $i)\,, ii)$ ve $iii)$ koşullarını sağladığında bu diziye bir düzgünleştirme veya bir mollifierler dizisi denir.

Her bir $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ için $\rho_k \star f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve

supp $\rho_k \star f \subset$ (supp f nin $\frac{1}{k}$ −komşuluğu) olur.

Teorem 3.4.20. $f \in C\ (\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $\rho_k \star f$ sürekli fonksiyonlar dizisi her kompakt $K \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsar. Başka deyişle

$$\lim_{k\to\infty} \left[\max_K |\rho_k \star f - f\ |\right] = 0$$

sonucu elde edilir (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

Teorem 3.4.21. $1 \leq\ p < \infty$ ve $f \in L^p(\Omega)$ verilsin. Bu durumda,

$\rho_k \star f \to f\,,\ L^p(\Omega)$ uzayında yakınsaması oluşur. Bu nedenle, $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

3.5. İntegral İle İlgili Bazı Teoremler

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir açık bölge ve bu bölgenin sınırı C^1 sınıfından (lokal olarak bir C^1 fonksiyonun grafiği olacak şekilde gösterilebilir) olsun. Buradan, Ω'nın sınırı üzerindeki herhangi bir x noktası için, $\partial\Omega$ üzerinde dışa doğru normal olan bir $\nu(x)$ birim vektörü vardır (Aslında, $\partial\Omega$ sınırının lokal olarak Lipschitz olması yeterlidir). Sonuç olarak, Ω nın sınırının, hemen hemen her noktasında, dışa doğru normal olan bir $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ bir vektörü vardır. Aşağıdaki ifadeler, özdeşlikler (Mitrovic ve Zubrinic 1997) den alınmıştır.

Kısmi İntegrasyon. $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ olsun. Bu durumda

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} \nu_i\, uv\, dS$$

eşitliği sağlanır. Bu özdeşliğe genellikle Green formülü denir.

Diverjans Teoremi $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ bir vektör alanı olsun. Bu durumda,

$$\int_{\Omega} \nabla . F \, dx = \int_{\partial\Omega} F . \nu \, dS$$

olur.

Birinci Green Özdeşliği. $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ve $v \in C^2(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\Omega} u\Delta \mathrm{v} \, dx = -\int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS$$

olur. Burada $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nu . \nabla v$, v nin , $S = \partial\Omega$ ye dışa doğru normal olan ν birim vektör yönündeki yönlü türevidir.

İkinci Green Özdeşliği. Her $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ iç

$$\int_{\Omega} (u \, \Delta v - v \, \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS$$

sağlanır.

3.6. Sobolev Uzayları

Sobolev uzayını tanımlayabilmek için türev tanımını genişletmek gerekir. $f \in C^k(\Omega)$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ ise bu durumda $|\alpha| \leq k$ koşulunu sağlayan her α çoklu indisi, kısmi integrasyon formülünden

$$\int_{\Omega} D^\alpha f(x) \, \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \, D^\alpha \varphi(x) \, dx$$

eşitliği elde edilebilir. Buradan bu eşitliği sadece $f \in C^k(\Omega)$ fonksiyonları değil, ayrıca $L^1_{loc}(\Omega)$ uzayının bazı fonksiyonları da bu eşitliği sağlanması zayıf türevin oluşumuna yol açmıştır. Bir $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ verilsin. Bu f fonksiyonun türevlerinin varlığıyla ilgili elimizde bir bilgi olmadığını varsayalım. Verilen bir α indisi ve her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonları için

$$\int_{\Omega} g(x) \, \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \, D^\alpha \varphi(x) \, dx$$

koşulunu sağlayan bir $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ var olduğunu kabul edelim. Bu durumda g ye f nin Ω bölgesi üzerindeki $\alpha -$ nıncı mertebeden zayıf türevi denir. Bu

$$g(x) = D^{\alpha} f(x)\,, \quad x \in \Omega$$

ile gösterilir. Zayıf türev noktasal olarak tanımlanmamıştır, aksine

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

biçimindeki integraller kullanılarak tüm Ω bölgesi üzerinde tanımlanmıştır. Bir fonksiyonun zayıf türevi varsa Lebesgue ölçümü sıfır olan küme farkıyla bir tektir. Ayrıca klasik türevi kavramından farklı olarak, alt mertebeden türevlerin varlığıyla bakılmaksızın, α mertebeden $D^{\alpha} f(x)$ zayıf türevi tanımlanır. Bir $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ fonksiyonu için

$$D^{\alpha}\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$$

karışık türevler diferansiyellenmenin sırasına bağlı değildirler. Bu nedenle zayıf türevin tekliğinden ve

$$D^{\alpha}\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$$

formülünden, zayıf türevde diferansiyellenmenin sırasına bağlı olmaz.

Örnek 3.6.1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x > 0 \text{ için} \\ 0\,, & x \leq 0 \text{ için} \end{cases}$$

olsun. Bu fonksiyon klasik anlamda $x = 0$ noktasında diferansiyellenebilir değildir. Şimdi bunun zayıf türevini

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad g(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0 \text{ için} \\ 0\,, & x \leq 0 \text{ için} \end{cases}$$

fonksiyonu olduğunu gösterelim: $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ olmak üzere, kısmi integrasyon formülünden

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{0} 0.\varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} x\, \varphi'(x)\, dx$$

$$= -x\,\varphi(x)\,|_0^\infty + \int_0^\infty 1.\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\varphi(x)\,dx$$

olur. Bu ise her $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ için

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

olduğu gösterdiği için, f'nin $\mathbb{R}$ üzerindeki birinci mertebeden zayıf türevi g fonksiyonu olur.

Boyutun 1 olması durumunda zayıf türev kavramı ve mutlak süreklilik kavramı birbiriyle yakından ilgilidir.

Tanım 3.6.2. $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $[a,b]$ nin bir birinin üzerine geçmeyen sonlu veya sayılabilir $\{[a_i, b_i]\}$ alt aralıkları için

$$\sum_i (b_i - a_i) < \delta \Longrightarrow \sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa bu durumda f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde mutlak süreklidir denir. $[a,b]$ üzerindeki mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfı

$$AC[a,b] = \{\, f : [a,b] \to \mathbb{C} : f, [a,b] \text{ üzerinde mutlak süreklidir.} \,\}$$

ile gösterilir. Ayrıca kompleks değerli bir fonksiyonun mutlak sürekli olması için gerek ve yeter koşul fonksiyonun reel ve imajiner kısmının mutlak sürekli olmasıdır (Heil 2019).

Teorem 3.6.3. (Analizin Temel Teoremi) $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu için aşağıdaki üç ifade denktir.

a) $f \in AC[a,b]$ dir.

b) Her $x \in [a,b]$ için

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,dt$$

olacak biçimde bir $g \in L^1[a,b]$ vardır.

c) f fonksiyonu $[a,b]$ nin h.h.h diferansiyellenebilir, $f' \in L^1[a,b]$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, dt$$

olmaktadır (Heil 2019).

Teorem 3.6.4. $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sürekli ve (a,b) nin h.h.h. diferansiyellenebilir olsun. Eğer f, (a,b) üzerinde birinci mertebeden bir zayıf türeve sahip ise bu durumda f mutlak sürekli olur (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

İspat. Zayıf anlamda, $g(x) = f'(x)$ olsun, yani, $\forall \varphi \in C_0^\infty(a,b)$ için,

$$\int_a^b g(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, \varphi'(x)\, dx \qquad (3.1)$$

sağlansın. Bu durumda

$$w(x) = \int_a^x g(t)\, dt$$

fonksiyonu her $[a_1, b_1] \subset (a,b)$ aralığında mutlak sürekli ve $[a_1, b_1]$ nin hemen hemen her yerinde $w'(x) = g(x)$ olur. Kısmi integrasyon yönteminden

$$\int_a^b w(x)\, \varphi'(x)\, dx = [w(x)\, \varphi(x)]_a^b - \int_a^b w'(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= -\int_a^b w'(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= -\int_a^b g(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad (3.2)$$

olur. Böylece (3.1) ve (3.2) den

$$\int_a^b [f(x) - w(x)]\, \varphi'(x)\, dx = 0\,, \qquad \forall \varphi C_0^\infty\,(a,b)$$

elde edilir. φ fonksiyonu keyfi olduğu için

$$f(x) - w(x) = c \quad \text{veya} \quad f(x) = w(x) + c$$

elde edilir. Buradan da f nin mutlak sürekliliği w nin mutlak sürekliliğinden elde edilir.

Teorem 3.6.5. $k = 1,2,\ldots$ olmak üzere, f_k dizisi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde

$$g_k(x) = D^\alpha f_k(x)$$

zayıf türevlerine sahip olsun. Eğer $L^1(\Omega)$ uzayında

$$f_k \to f \quad \text{ve} \quad g_k \to g$$

olur ise bu durumda

$$g(x) = D^\alpha f(x)$$

eşitliği sağlanır (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

İspat. $L^1(\Omega)$ uzayında $g_k \to g$ olduğundan, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\left| \int_\Omega g_k(x)\, \varphi(x)\, dx - \int_\Omega g(x)\, \varphi(x)\, dx \right|$$

$$\leq \int_\Omega |\varphi(x)|.|g_k(x) - g(x)|\, dx$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \|g_k - g\|_1 \to 0\,, \quad (k \to \infty)$$

olur, buradan

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_\Omega g(x)\, \varphi(x)\, dx$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\, D^\alpha\, \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, D^\alpha\, \varphi(x)\, dx$$

elde edilebilir. Böylece

$$\int_{\Omega} g_k(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} f_k(x)\,D^{\alpha}\,\varphi(x)\,dx$$

her iki tarafın limiti alınırsa, her $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} g(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} f(x)\,D^{\alpha}\varphi(x)\,dx$$

eşitliği oluşur. Buradan da , Ω üzerinde $g(x) = D^{\alpha}f(x)$ olur.

Tanım 3.6.6. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $p \in [1,\infty]$ ve $m \in \{0,1,2,\dots\}$ olsun. $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı

$$f : \Omega \to \mathbb{R}\ , \quad f \in L^1_{loc}(\Omega)$$

$|\alpha| \le m$ koşulunu sağlayan her α çoklu indisi için $D^{\alpha}f$ zayıf türevi var ve $D^{\alpha}f \in L^p(\Omega)$ şeklindeki tüm fonksiyonların kümesidir. Bu tanım

$$W^{m,p}(\Omega) = \{\, f \in L^p(\Omega):\ D^{\alpha}f \in L^p(\Omega),\ \forall\alpha,\ |\alpha| \le m\}$$

şeklinde de yazılabilir (Adams ve Fournier 2003). Ayrıca $W^{0,p}(\Omega) = L^p\Omega$ olur.

$$\|f\|_{m,p} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^{\alpha}f\|_p$$

ifadesi Sobolev uzayında bir norm olur. $p \in [1,\infty)$ ise bu durumda denk bir norm

$$\|f\| = \left(\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\Omega} |D^{\alpha}f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^{\alpha}f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklindedir. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi sınırlı ise $C^m(\overline{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$ kapsaması elde edilir.

$$|f|_{m,p} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}f\|_p$$

ifadesi Sobolev uzayında bir yarı-normdur.

$p = 2$ durumunda, $W^{k,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ gösterimi kullanılabilmektedir. $H^m(\Omega)$ uzayında iç çarpım

$$\langle f,g\rangle_{H^m}=\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\Omega}D^{\alpha}f\,D^{\alpha}g\,dx\,,\ \ \forall f,g\in H^m(\Omega)$$

şeklinde verilir. Bu bir Hilbert uzayı olduğu için H^m gösterimi kullanılır.

Örnek 3.6.7. $n=2,\ m=1$ ve $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ ise

$$\langle f,g\rangle_{H^1}=\int_{\Omega}\left(fg+\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)\,dx$$

şeklinde olur.

Teorem 3.6.8. $p\in[1,\infty]$ olmak üzere, her bir $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı bir Banach uzayıdır (Adams ve Fournier 2003).

Önerme 3.6.9. $p\in(1,\infty]$ olmak üzere, $L^p(\Omega)$ uzayında $f_k\to f$ yakınsaması ve her $i=1,\dots,n$ için $\left\{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right\}_k$ fonksiyon dizisi $L^p(\Omega)$ uzayında sınırlı olsun. Bu durumda $f\in W^{1,p}(\Omega)$ olur (Mitrovic ve Zubrinic 1997) .

$C_0^{\infty}(\Omega)\subset W^{m,p}(\Omega)$ kapsamasının var olduğu açıktır. $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının $\|.\|_{m,p}$ normuna göre kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir. Ayrıca $W_0^{m,p}\subset W^{m,p}(\Omega)$ olur ve $W_0^{m,p}$ kapalı bir alt uzay olduğu için bir Banach uzayı olur (Sofonea ve Matei 2009).

Dikkat edilirse, $f\in W_0^{m,p}(\Omega)$ ancak ve ancak

$$\|f_k-f\|_{m,p}\to 0$$

olacak şekilde bir $f_k\in C_0^{\infty}(\Omega)$ fonksiyon dizisi vardır.

Daha önce $|.|_{m,p}$ ifadesinin $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında bir yarınorm olduğunu görmüştük. $|.|_{m,p}$ ifadesi $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayında bir norm olur. Ω sınırlı iken, bu durumda $f(x)=3\in W^{m,p}(\Omega)$ olur, fakat $f(x)=3\notin W_0^{m,p}(\Omega)$ olduğu için, genel olarak $W_0^{m,p}(\Omega)\neq W^{m,p}(\Omega)$ olur. $\Omega=\mathbb{R}^n$ durumunda ise bu iki uzay eşit olur.

Teorem 3.6.10. $p\in[1,\infty)$ ve $m\in[0,1,2,\dots]$ için

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n)=W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

eşitliği sağlanır. Başka bir değişle , $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olur (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

İspat. Herhangi bir $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ elemanı için

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \text{ uzayında } \varphi_k \to f$$

olacak şekilde bir $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dizinin var olduğu gösterilmelidir. ρ_k bir düzgünleştirme dizisi olsun. Bu durumda

$$D^\alpha(\rho_k \star f) = \rho_k \star D^\alpha f \to D^\alpha f\,, \quad (L^p(\mathbb{R}^n) \text{ de})$$

olur. Buradan da $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayında

$$f_k = \rho_k \star f \to f$$

yakınsaması elde edilir. $r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, $B(0,1)$ üzerinde, $r = 1$ olacak şekilde bir kesme fonksiyonu olsun. Ayrıca , supp $r \subset B(0,2)$ koşulunu sağlasın.

$$r_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,,\ r_k(x) = r\left(\frac{x}{k}\right)$$

dizisini alalım. $f_k = \rho_k \star f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ olur. Şimdide

$$\varphi_k = f_k r_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

şeklinde tanımlansın. $B(0,k)$ kümesinde $r_k = 1$ olduğundan, $B(0,k)$ kümesinde

$$f_k - \varphi_k = f_k(1 - r_k) = 0$$

olur.

$$\Omega_k = \mathbb{R}^n \setminus B(0,k)$$

olarak tanımlansın. Ayrıca

$|\varphi_k| \le |f_k|$ olduğundan $\|\varphi_k\|_{p,\Omega_k} \le \|f_k\|_{p,\Omega_k}$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\|f_k - \varphi_k\|_{p,\mathbb{R}} &= \|f_k - \varphi_k\|_{p,\Omega_k} \\ &\le \|f_k\|_{p,\Omega_k} + \|\varphi_k\|_{p,\Omega_k} \\ &\le 2\|f_k\|_{p,\Omega_k} \to 0\end{aligned}$$

($k \to \infty$ için) olur. Burada Ω_k küme dizisinin azalan olma ve

$$\bigcap_k \Omega_k = \emptyset$$

özelliği kullanıldı. Böylece $L^p(\Omega)$ uzayında f_k ve φ_k aynı limite ($L^p(\Omega)$ uzayında $\varphi_k \to f$) sahip olurlar. Benzer biçimde $L^p(\Omega)$ uzayında $D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha f$ olur. Böylece

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \quad \text{uzayında} \quad \varphi_k \to f$$

olur.

Şimdi de bir $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ nin tamamına sıfır değeri ile genişletildiğinde oluşan yeni fonksiyonun $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir elemanı olup olmadığını belirtelim.

Teorem 3.6.11. $p \in (1,\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ olsun. $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f nin tüm $\mathbb{R}^n$ kümesine sıfır ile olan genişlemesi fonksiyonu olsun. Bu durumda

$\bar{f} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ve her $i = 1, \dots, n$ için

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x_\iota}\right)}$$

sağlanır (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

İspat. Bir $f_k \in C_0^\infty(\Omega)$ dizisi $W^{1,p}(\Omega)$ uzayında $f_k \to f$ şeklindeki koşulu sağlasın. $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ keyfi bir fonksiyon olsun. Bu durumda Hölder eşitsizliğinden

$$\left| \int_\Omega f_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \right| = \left| \int_\Omega \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \varphi \, dx \right|$$

$$\leq \left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right\|_{p,\Omega} \|\varphi\|_{p',\Omega}$$

elde edilir. $k \to \infty$ için, limite geçilirse

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \right| = \left| \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \right|$$

$$\leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{p,\Omega} \|\varphi\|_{p',\Omega}$$

olur. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^{p'}(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan, sonra süreklilik ile genişlemeden, hemen yukarıdaki eşitsizlikten

$$\Gamma_i : L^{p'}(\Omega) \to \mathbb{R}\,, \qquad \Gamma_i(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx$$

lineer fonksiyonelin sürekli olduğu görülür. Γ_i fonksiyoneli $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ uzayının dual uzayının bir elemanı olduğundan (ayrıca, $\left[L^{p'}(\mathbb{R}^n)\right]^* = L^p(\mathbb{R}^n)$ olur) bu durumda

$$\Gamma_i(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} g_i\,\varphi\,dx\,, \quad \forall \varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$$

$$\|\,g_i\|_{p,\mathbb{R}^n} = \|\Gamma_i\| \le \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_{p,\Omega}$$

olacak şekilde bir tek $g_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ vardır. Bundan, her $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g_i\,\varphi\,dx$$

olur. Buradan da, zayıf türev tanımından, her i için

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = -g_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

olur. Bu da $\bar{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ olmasını gerektirir. Eğer herhangi bir $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ test fonksiyonunu alırsak sonra $\mathbb{R}^n$ ye olan sıfır genişlemesini $\bar{\varphi}$ ile gösterirsek ve kısmi integrasyondan integral alırsak, her $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_\Omega \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}\Big|_\Omega .\varphi\;dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}\,\bar{\varphi}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega f\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx$$

elde edilir. Bu

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}\Big|_\Omega = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

anlamına gelir. Benzer şekilde, desteği $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ da olan test fonksiyonları kullanılırsa

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}\Big|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} = 0$$

elde edilir. Bu da

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x_\iota}\right)}$$

olduğunu gösterir.

Tanım 3.6.12. Eğer bir Ω' bölgesi sınırlı ve $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ (kapanış, $\mathbb{R}^n$ nin topolojisine göre alınıyor) ise Ω' bölgesi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine kompakt olarak gömülür denir. Bu durumda $\Omega' \subset\subset \Omega$ yazılır. Eğer $\Omega' \subset\subset \Omega$ ise bu durumda Ω' ile Ω arasındaki uzaklık sıfırdan büyük olur (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

Aşağıdaki önemli teorem, $p \in [1,\infty)$ olmak üzere, herhangi bir $f \in W^{m,p}(\Omega)$ elemanın C_0^∞ −fonksiyonlarıyla aşağıdaki anlamda yaklaşılabileceğini ifade ediyor: herhangi bir $\Omega' \subset\subset \Omega$ için, hem $L^p(\Omega)$ da hem de $W^{m,p}(\Omega')$ da f fonksiyonuna yaklaşan bir $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dizisi vardır.

Teorem 3.6.13. $p \in [1,\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $f \in W^{m,p}(\Omega)$ olsun. Bu durumda $L^p(\Omega)$ uzayında $f_k \to f$ ve herhangi bir sınırlı, açık $\Omega' \subset\subset \Omega$ bölgesi için $W^{m,p}(\Omega')$ uzayında

$$f_{k|\Omega'} \to f_{\ |\Omega'}$$

olmasını sağlayan bir $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dizisi vardır (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

İspat. $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu f nin tüm $\mathbb{R}^n$ ye sıfır ile olan genişlemesi olsun. Bu durumda bir ρ_k düzgünleştirme dizisi verildiğinde $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında

$g_k = \rho_k \star g \to g$ yakınsaması elde edilir, bu yakınsama $L^p(\Omega)$ uzayında da gerçekleşir.

α −çoklu indisi, $|\alpha| \le m$ şeklinde keyfi ve $\Omega' \subset\subset \Omega$ olsun. $\overline{\Omega'}$ kompakt ve $\overline{\Omega'} \cap \partial\Omega = \emptyset$ olduğundan

$$d = d(\Omega', \partial\Omega) > 0$$

olur. k yı, $0 < \frac{1}{k} < d$ koşulunu sağlayacak şekilde büyük seçelim. Konvolüsyonun tanımında bir $x \in \Omega'$ için

$$(\rho_k \star g)(x) = (\rho_k \star f)(x)$$

sağlanır. Bundan dolayı Ω' üzerinde

$$D^{\alpha}(\rho_k \star g) = \rho_k \star D^{\alpha} f$$

olur. $D^{\alpha} f \in L^p(\Omega')$ olduğundan, $D^{\alpha}(\rho_k \star g) \in L^p(\Omega')$ elde edilir. $L^p(\Omega')$ uzayında

$$D^{\alpha}(\rho_k \star g) \to D^{\alpha} g = D^{\alpha} f$$

olmasından, $W^{m,p}(\Omega')$ uzayında $g_k \to f$ yakınsaması elde edilir. r_k (yine) kesme fonksiyonları olsun. Bu durumda (yine) $f_k = r_k\, g_k \in C_o^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ test fonksiyonlarının istenen özellikleri sağladığı gösterilebilir.

Eğer Ω bir Lipschitz bölgesi ise bu durumda bu teorem $\Omega' = \Omega$ durumunda da sağlanır. Başka deyişle $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)\mathrm{I}_{\Omega}$, $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Adams ve Fournier 2003).

Teorem 3.6.14. $G \in C^1(\mathbb{R})$ fonksiyonu, her $t \in \mathbb{R}$ için $|G'(t)| \le C$ şeklinde sınırlı olsun. Ω sınırsız ise $G(0) = 0$ olsun. Bu durumda, $p \in [1, \infty]$, herhangi bir $f \in W^{1,p}(\Omega)$ için $G \circ f \in W^{1,p}(\Omega)$ ve

$$\nabla(G \circ f) = (G' \circ f)\nabla f$$

yani, her $i = 1, \dots, n$ için

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ f) = (G' \circ f)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

olur (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

İspat. Ω nın sınırsız ve $G(0) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda ortalama değer teoreminden her $t \in \mathbb{R}$ için

$$|G(t)| \le |G(t) - G(0)| \le \sup_{s \in \mathbb{R}} |G'(s)|.|t - 0| \le C\,|t|$$

elde edilir. Böylece $f \in L^p(\Omega)$ ise $|(G \circ f)(x)| \le C|f(x)|$ olmasından

$$\int_{\Omega} |(G \circ f)(x)|^p\, dx \le C^p \int_{\Omega} |f(x)|^p\, dx < \infty$$

olur, buradan $G \circ f \in L^p(\Omega)$ elde edilir. Ayrıca, G nin sürekli ve f nin ölçülebilir olmasından $G \circ f$ ölçülebilir olur. Benzer biçimde $(G' \circ f)\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ olur. Eğer Ω sınırlı ise bu durumda

$$|G(t)| \leq C|t| + |G(0)|$$

eşitsizliği kullanılarak aynı sonuç elde edilebilir.

i) $p \in [1, \infty)$ durumu . $L^p(\Omega)$ uzayında $f_k \to f$ ve herhangi bir $\Omega' \subset\subset \Omega$ bölgesinde $i = 1, \dots, n$ için $L^p(\Omega')$ uzayında $\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \to \frac{\partial f}{\partial x_i}$ olan bir $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ test fonksiyon dizisinin var olduğunu biliyoruz. $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ve Ω' bölgesi supp $\varphi \subset \Omega' \subset\subset \Omega$ sağlayacak şekilde olsun. Bu durumda klasik zincir kuralını f_k düzgün fonksiyonları için kullanarak ve kısmi integrasyondan

$$\int_\Omega (G \circ f_k) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_{\Omega'} (G \circ f_k) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx$$

$$= -\int_{\Omega'} (G' \circ f_k) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\, \varphi\, dx$$

elde edilir.

$$|\,(G \circ f_k)(x) - (G \circ f)(x)\,| \leq C\,|\,f_k(x) - f(x)\,|$$

eşitsizliği $L^p(\Omega)$ uzayında $G \circ f_k \to G \circ f$ ve $|G' \circ f| \leq C$ olmasını gerektirdiğinden limit integral altına geçebilir. Böylece

$$\int_\Omega (G \circ f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\Omega'} (G' \circ f) \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \varphi\, dx$$

$$= -\int_{\Omega} (G' \circ f) \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \varphi\, dx$$

olur.

ii) $p = \infty$ durumu. $f \in W^{1,\infty}(\Omega')$ ise bu durumda her $p \geq 1$ için$f \in W^{1,p}(\Omega')$ olur. İspat i) daki gibi yapılabilir.

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f^+(x) = \text{maks}\,\{\,f(x)\,, 0\,\}$$

$$f^-(x) = \text{maks}\,\{-f(x)\,, 0\,\}$$

olarak tanımlansın.

Teorem 3.6.14. $f \in W^{1,p}(\Omega)$ ise bu durumda $f^+,\ f^-,\ |f| \in W^{1,p}(\Omega)$ ve

$$\frac{\partial f^+}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}, & f(x) > 0 \text{ için} \\ 0, & f(x) \leq 0 \text{ için} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f^-}{\partial x_i} = \begin{cases} -\frac{\partial f}{\partial x_i}, & f(x) < 0 \text{ için} \\ 0, & f(x) \geq 0 \text{ için} \end{cases}$$

$$\frac{\partial |f|}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}, & f(x) > 0 \text{ için} \\ 0, & f(x) = 0 \text{ için} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i}, & f(x) < 0 \text{ için} \end{cases}$$

olur (Mitrovic ve Zubrinic 1997).

İspat. $f^- = (-f)^+$ ve $|f| = f^+ + f^-$ olduğundan ispatı sadece f^+ için yapmak yeterlidir. $\varepsilon > 0$ verilsin. $G_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$G_\varepsilon(t) = \begin{cases} (t^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon, & t > 0 \ için \\ 0, & t \leq 0 \ için \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $G_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $|G_\varepsilon'| \leq 1$ ve

$$\lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(f) = f^+$$

olur. $f \in W^{1,p}(\Omega)$ ise bu durumda zincir kuralından

$$\frac{\partial G_\varepsilon(f)}{\partial x_i} = \frac{f \frac{\partial f}{\partial x_i}}{(f^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$$

elde edilir, başka değişle, her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega G_\varepsilon(f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_{f(x)>0} G_\varepsilon(f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx$$

$$= -\int_{f(x)>0} \frac{f \frac{\partial f}{\partial x_i}}{(f^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \varphi\, dx$$

sağlanır. $\varepsilon \to 0$ yapılırsa sonuç elde edilir:

$$\int_{\Omega} f^{+} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{f>0} \varphi \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx$$

olur. Burada sağ taraf

$$-\int_{f>0} \varphi \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx - \int_{f\leq 0} \varphi . 0\, dx$$

olarak görülmelidir.

3.7. Maksimal Fonksiyon ve Özellikleri

Önce dağılım fonksiyonunu açıklayalım.

Tanım 3.7.1. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f: X \to [-\infty, \infty]$ (veya $f: X \to \mathbb{C}$) fonksiyonu $\mathcal{A}$ −ölçülebilir olsun. $t \geq 0$ için $\mathrm{E}_t = \{x \in X : |f(x)| > t\}$ olarak tanımlansın.

$$\mu_f(t) = \mu(\mathrm{E}_t) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}), \quad t \geq 0$$

olsun. Bu durumda $\mu_f(.) : [0, \infty) \to [0, \infty]$ fonksiyonuna f nin dağılım fonksiyonu denir (Taheri 2015) .

μ_f fonksiyonu, sadece $|f|$ fonksiyonuna bağlı olduğu görülmektedir. Ayrıca $\mu(X) < \infty$ ise bu durumda μ_f her noktada sonlu olmaktadır. $0 \leq t_1 \leq t_2$ iken

$$\{x \in X : |f(x)| > t_2\} \subset \{x \in X : |f(x)| > t_1\}$$

olmasından ve ölçümün monotonluğundan $\mu_f(t_2) \leq \mu_f(t_1)$ olduğu için μ_f artmayan bir fonksiyon olur. $s \geq 0$ için

$$\mathrm{E}_s = \bigcup_{t>s} \mathrm{E}_t$$

olduğundan

$$\mu_f(s) = \mu(\mathrm{E}_s) = \lim_{t \searrow s} \mu(\mathrm{E}_t) = \lim_{t \searrow s} \mu_f(t)$$

sonucu elde edilir. Bu durum μ_f nin sağdan sürekli olduğunu göstermektedir. Her bir $s > 0$ için,

$$\{x \in X : \ |f(x)| \geq s\} = \bigcap_{t<s} \mathrm{E}_t$$

olur ve ayrıca (en az) bir $t < s$ için $\mu(\mathrm{E}_t) < \infty$ olma koşulu altında

$$\mu\left(\{x \in X : \ |f(x)| \geq s\}\right) = \lim_{t \nearrow s} \mu(\mathrm{E}_t) = \lim_{t \nearrow s} \mu_f(t)$$

sonucu elde edilir.

Ayrıca, buradan, μ_f nin s noktasındaki sol ve sağ limitler karşılaştırıldığında şu sonucu elde ederiz:

μ_f , s noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ $\mu\left(\{x \in X : \ |f(x)| = s\}\right) = 0$ dir.

Teorem 3.7.2. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. f, g, f_n fonksiyonları X üzerinde $\mathcal{A}$ −ölçülebilir ve $t, s \geq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

a) $\mu - h.h.h. \ |f| \leq |g| \Longrightarrow \mu_f \leq \mu_g$,

b) her $c > 0$ için, $\mu_{cf}(t) = \mu_f\left(\frac{t}{c}\right)$,

c) $\mu_{f+g}(t+s) \leq \mu_f(t) + \mu_g(s)$,

d) μ_f fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde sağdan süreklidir,

e) $\mu - h.h.h. |f| \leq \liminf |f_n| \Longrightarrow \mu_f(t) \leq \liminf \mu_{f_n}(t)$,

f) $\mu - h.h.h. \ |f_n| \uparrow |f| \Longrightarrow \mu_{f_n} \uparrow \mu_f$

özellikleri sağlanır (Taheri 2015).

Dağılım fonksiyonu, uzay üzerindeki integrallenebilirlik sorunların bazılarını, $[0, \infty)$ aralığı üzerindeki olanlara dönüştürür. Şimdi f nin L^p normunu dağılım fonksiyonunu kullanarak ifade edelim.

Teorem 3.7.3. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir σ −sonlu ölçüm ve f fonksiyonu X üzerinde μ −ölçülebilir olsun. Bu durumda

i) $0 < p < \infty$ için,

$$\int_X |f|^P \, d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \, \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > t\}) \ \ dt$$

$$= p \int_0^{\infty} t^{p-1}\ \mu_f(t)\ dt$$

ii) $p = \infty$ için

$$\| f \|_{\infty} = \inf \{ t > 0 :\ \mu_f(t) = 0 \}$$

olur (Taheri 2015) .

İspat. i) Fubini – Tonelli teoremi ve integrali alınan fonksiyonun negatif olmamasından

$$\int_X |f(x)|^p\ d\mu = \int_X \int_0^{|f(x)|} p\ t^{p-1}\ dt\ d\mu$$

$$= \int_X \int_0^{\infty} p\ t^{p-1}\ \chi_{\{|f|>t\}}(x,t)\ dt\ d\mu$$

$$= \int_0^{\infty} p\ t^{p-1} \int_X \chi_{\{|f|>t\}}(x,t)\ du\ dt$$

$$= \int_0^{\infty} p\ t^{p-1}\ \mu_f(t)\ dt$$

olur.

ii) Açıktır.

Bu teoremin daha genel durumu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.7.4. $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu, artan, C^1 sınıfından ve $\varphi(0) = 0$ biçiminde olsun. Ayrıca f, μ −ölçülebilir ise bu durumda

$$\int_X \varphi(|f|)\ d\mu = \int_0^{\infty} \varphi'(t)\ \mu_f(t)\ dt$$

olur (Sawano 2018).

Rademacher Teoremi için önce bazı açıklamalar yapalım

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun $x \in \mathbb{R}^n$ noktasında diferansiyellenebilmesi için

$$f(y) = f(x) + Df(x).(y-x) + o(|x-y|)\,,(y \to x)$$

olacak şekilde bir $Df(x) \in \mathbb{R}^n$ vektörün var olması gerekir. Eğer böyle bir $Df(x)$ vektörü varsa bu durumda

$$Df(x) = \left(f_{x_1}(x),\ f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x)\right) = \nabla f(x)$$

olur. Buna karşın $\nabla f(x)$ var olması f nin x noktasında diferansiyellenebilmeyi garanti etmez.

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ bir birim vektör ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$D'_u f(x) = \liminf_{\tau \to 0} \frac{f(x+\tau u) - f(x)}{\tau}$$

$$D''_u f(x) = \limsup_{\tau \to 0} \frac{f(x+\tau u) - f(x)}{\tau}$$

şeklinde tanımlansın. f sürekli olduğundan, limit τ nun $(-1,1)$ aralığında bulunan rasyonel sayıları üzerinde alınabilir. Bu nedenle hem $D'_u f$ hem de $D''_u f$ ölçülebilir olur.

Ayrıca , (limit var olmak koşuluyla)

$$D_u f(x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(x+\tau u) - f(x)}{\tau}$$

olarak tanımlayalım.

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her kompakt $K \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için

$$|f(x) - f(y)| \le L_K |x-y|\,, \qquad \forall x, y \in K$$

olacak şekilde bir $L_K > 0$ sayısı varsa bu fonksiyona lokal olarak Lipschitz süreklidir denir. $\mathbb{R}^n$ de bir Lipschitz sürekli f fonksiyonu lokal olarak Lipschitz süreklidir, bunun tersi ise yanlış olabilmektedir.

Önerme 3.7.5. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokal olarak Lipschitz sürekli olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ nin hemen hemen her noktasında $D_u f$ vardır. Özel olarak, $\mathbb{R}^n$ nin hemen hemen her noktasında ∇f vardır ve hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$D_u f = u \cdot \nabla f$$

sağlanır (DiBenedetto ve Debenedetto 2002).

İspat. $D_u f$ nin var olmadığı noktalar kümesini E_u ile gösterelim.

Buradan

$$E_u = \{x \in \mathbb{R}^n : D'_u f(x) < D''_u f(x)\}$$

olur. $D'_u f$ ve $D''_u f$ ölçülebilir olduğundan E_u kümesi de ölçülebilir olur. Verilen bir $x \in \mathbb{R}^n$ için, tek değişkenli

$$\mathbb{R} \ni t \to f(x + tu)$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}$ nin her alt aralığında mutlak sürekli olur, böylece $\mathbb{R}$ nin hemen hemen her noktasında diferansiyellenebilir olur. Bu nedenle, E_u nun u ya paralel herhangi bir doğru ile kesişiminin, bir boyutlu Lebesgue ölçümü sıfırdır. Böylece Fubini teoreminden, $\mu(E_u) = 0$ olur. $\{\tau_n\}$, $(-1,1)$ deki rasyonel sayıların bir dizisini gösterme durumunu sürdürelim. $j = 1,2,\dots,n$ olmak üzere, e_j, $\mathbb{R}^n$ nin birim vektörünün koordinatları olsun. f Lipschitz sürekli olduğundan, her $\zeta C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left| \frac{f(x + \tau u) - f(x)}{\tau_n} \zeta \right| \leq L_\zeta |\zeta|$$

olur (L_ζ, f nin, ζ 'nin desteğini kapsayan yeterli büyüklükteki yuvar üzerindeki Lipschitz sabitidir). Bu nedenle dominat yakınsaklık teoreminden ve değişken değiştirmeden

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_u f \, \zeta \, dx = \lim_{\tau_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x + \tau_n u) - f(x)}{\tau_n} \zeta \, dx$$

$$= -\lim_{\tau_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\zeta(x + \tau_n u) - \zeta(x)}{\tau_n} \, dx$$

$$= -u_j \int_{\mathbb{R}^n} f \zeta_{x_j} \, dx$$

$$= -u_j \lim_{\tau_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\zeta(x + \tau_n e_j) - \zeta(x)}{\tau_n} \, dx$$

$$= u_j \lim_{\tau_n \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x+\tau_n e_j) - f(x)}{\tau_n}\, \zeta\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \nabla f \zeta\, dx$$

elde edilir. Bu da her $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D_u f - u \cdot \nabla f)\, \zeta\, dx = 0$$

olmasını gerektirir.

Teorem 3.7.6. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokal olarak Lipschitz sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f, \mathbb{R}^n$ nin hemen hemen her yerinde diferansiyellenebilir olur (DiBenedetto ve Debenedetto 2002).

İspat. $\{u_n\}$, $\partial B(0,1)$ birim küresinin sayılabilir yoğun bir alt kümesi olsun. E_{u_n} hemen önceki önermedeki gibi tanımlansın. Hemen önceki önermeden, her n için, $\mu(\bigcup E_{u_n}) = 0$ olur. Teoremin ispatı için, f nin $\mathbb{R}^n - \bigcup E_{u_n}$ kümesinde diferansiyellenebildiğini göstereceğiz. $x \in \mathbb{R}^n - \bigcup E_{u_n}$ verilsin. $y \in B(x,1)$ elemanı $y \neq x$ şeklinde olsun.

$$u = \frac{y-x}{|x-y|}\,, \qquad t = |x-y|\,, \qquad y = x + tu$$

olsun. $R = 2\,\text{maks}\{|x|, 1\}$ olmak üzere, L_R, f nin $B(0,R)$ yuvarı üzerindeki Lipschitz sabiti olsun. Bu durumda her $u_j \in \{u_n\}$ için

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y-x)| &\leq |f(x+tu) - f(x) - tu \cdot \nabla f(x)| \\
&= \left|f(x+tu_j) - f(x) - tu_j \cdot \nabla f(x)\right| \\
&+ \left|f(x+tu) - f(x+tu_j)\right| \\
&+ t\left|(u-u_j) \cdot \nabla f(x)\right| \\
&\leq t\left|\frac{f(x+tu_j) - f(x)}{t} - u_j \cdot \nabla f(x)\right| \\
&+ t\, 2\, L_R \left|u - u_j\right|
\end{aligned}$$

olur.

$\varepsilon > 0$ verilsin, $\varepsilon > 0$ seçilmek üzere, $y \in B(x, \delta)$ olsun.

Bu durumda belli bir u için

$$2\, L_R|u - u_j| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

olacak şekilde $u_j \in \{u_n\}$ seçelim. Bu şekildeki bir seçim δ dan bağımsız olur. Belirli u_j için,

$$\left|\frac{f(x + tu_j) - f(x)}{t} - u_j \cdot \nabla f(x)\right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon\,, \qquad \forall t \in (0, \delta)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Bu nedenle, her $\varepsilon > 0$ için, tüm $y \in \mathbb{R}^n$ ve $|x - y| \leq \delta$ şekliyle

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y - x)| \leq |x - y|\varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır.

Tanım 3.7.7. $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ ve $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Hardy – Littlewood maksimal fonksiyonu

$$\mathrm{M}f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$$

$$\mathrm{M}f(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\; dy$$

şeklinde tanımlanır (Kinnunenn 1997). $\mathrm{M} : f \to \mathrm{M}f$ operatörüne de Hardy – Littlewood Maksimal operatörü denir. Bu

$$\mathrm{M}(f + g) \leq \mathrm{M}f + \mathrm{M}g$$

$$\mathrm{M}(\alpha f) = |\alpha|\, \mathrm{M}f\,, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

özelliklerini sağladığı için alt lineer operatör olur. Hemen hemen her yerde $f = g$ ise bu durumda $\mathbb{R}^n$ nin her noktasında $\mathrm{M}f = \mathrm{M}g$ olur. Ayrıca $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{M}f(x) > \alpha\} \subset \mathbb{R}^n\,, \qquad \forall \alpha > 0$$

kümesi açık olduğundan $\mathrm{M}f$ alt yarı-sürekli olur. Bu nedenle $\mathrm{M}f$ maksimal fonksiyonu Borel ölçülebilir olur.

Tanım incelendiğinde

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \mathrm{M}f \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |f|$$

olduğu görülür. Bu nedenle f sınırlı iken $\mathrm{M}f$ maksimal fonksiyonuda sınırlı olur (Taheri 2015). Örneğin, $x \in \mathbb{R}$, $\sin x$ fonksiyonu sınırlı olduğu için $\mathrm{M}\sin(x)$ fonksiyonu da sınırlı olur.

Şimdi , $\mathrm{M}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $f = 0$ olduğunu görelim: ispatı (Jones 2001) den yapacağız.

$\alpha > 0$ keyfi ve $|x| > \alpha$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{M}f(x) \geq \frac{1}{|B(x,|2x|)|} \int_{B(x,2|x|)} |f(y)|\ dy$$

$$\geq \frac{1}{|B(0,2|x|)|} \int_{B(0,\alpha)} |f(y)|\ dy$$

$$= \frac{c}{|x|^n} \int_{B(0,\alpha)} |f(y)|\ dy$$

olur. $|x| > \alpha$ için, $\frac{1}{|x|^n}$ integrallenebilir olmadığından

$$\int_{B(0,\alpha)} |f(y)|\ dy = 0$$

elde edilir. α keyfi olduğundan $f = 0$ sonucu çıkar.

Ayrıca $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olduğunda $\mathrm{M}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olması bile garanti değildir. $n = 1$ için, aşağıdaki örnek bunu göstermektedir (Jones 2001) :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln^2 x}\ , & 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ 0\ , & x \in \mathbb{R} \setminus \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

olsun. $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ise alt sınır elde etmek için, $\mathrm{M}f(x)$ nin tanımında $r = x$ kullanalım.

$$\mathrm{M}f(x) \geq \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(y)\ dy$$

$$> \frac{1}{2x}\int_0^{x} f(y)\ dy$$

$$= \frac{1}{2x}\int_0^{x} \frac{1}{y \ln^2 y}\ dy$$

$$= \frac{1}{2x}\ \frac{-1}{\ln y}\ \Big|_0^x$$

$$= \frac{-1}{2x \ln x}$$

olur. $\frac{-1}{2x \ln x}$, $x = 0$ yakınında integrallenebilir olmadığı için $\mathrm{M}f \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sonucu elde edilir.

Şimdi de merkezi olmayan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun tanımına bakalım: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için, merkezi olmayan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$\mathfrak{M}(f)(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|\ dy$$

şeklinde tanımlanır. Burada supremum, x noktasını içeren tüm açık $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarları üzerinde alınmaktadır.

$\mathbb{R}^n$ nin her noktasında

$$M(f) \leq \mathfrak{M}(f)$$

olduğu açık bir şekilde görülür. Ayrıca, her noktada

$$\mathfrak{M}(f) \leq 2^n M(f)$$

olduğu gösterilebilir. Buradan $M(f)$ ve $\mathfrak{M}(f)$ aynı sınırlılık özelliklerine sahip olur.

Teorem 3.7.8. (Chebychev Eşitsizliği) Eğer $g \geq 0$ ve $\alpha > 0$ ise bu durumda

$$|\{x \in \mathbb{R}^n:\ g(x) > \alpha\}| \leq \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} g\ dx$$

olur (Fefferman 2005) .

İspat. $\alpha.\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ g>\alpha\}}(x) \le g(x)$

$$\alpha.\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ g>\alpha\}}(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} g\ dx$$

$$\alpha.|\{x\in\mathbb{R}^n:\ g>\alpha\}| \le \int_{\mathbb{R}^n} g\,dx$$

$$|\{x\in\mathbb{R}^n: g>\alpha\}| \le \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} g\,dx$$

olur.

Lemma 3.7.9. (Vitali Örtüm Lemması) $B_1, B_2, \dots, B_N$, $\mathbb{R}^n$ de yuvarlar olsun. Bu durumda

a) $\tilde{B}_k$ −lar ikişer ikişer ayrık

b) $\left|\bigcup_{k=1}^{M}\tilde{B}_k\right| \ge \frac{1}{3^n}\left|\bigcup_{k=1}^{N}B_k\right|$

koşullarını sağlayan bir $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_M$ alt ailesi vardır (Fefferman 2005).

İspat. Öncelikle, yuvarları azalan yarıçaplara göre sıraya bırakalım.

B_1 yuvarını, $\tilde{B}_1 = B_1$ şeklinde alalım.

B_2 yuvarı için , $\tilde{B}_2 = B_2 \Leftrightarrow B_2$, $\tilde{B}_1 = B_1$ den ayrık şekilde seçelim.

Bu şekilde devam ederek, yani, bir B_k yuvarı verildiğinde, yuvarın alt aileye seçiminde yer alması için ⇔ yuvarın daha önceden seçilen tüm yuvarlardan ayrık olması gerekir.

Şimdi, $(\tilde{B}_j)_3$ sembolü, aynı merkezli yuvarın yarıçapının 3 katına genişletmek manasında olsun. Bu durumda

$$\bigcup B_k \subset \bigcup(\tilde{B}_j)_3$$

iddiasını gösterelim: Bir B_k için , $\{\tilde{B}_j\}$ nin seçilme biçiminden,

$$B_k \subset \bigcup(\tilde{B}_j)_3$$

olduğunu görmek zor değildir. Bu nedenle , $\{\tilde{B}_j\}$ −ler ayrık seçildikleri için ,

$$\begin{aligned}\left|\bigcup B_k\right| &\leq \left|\bigcup (\tilde{B}_j)_3\right| \\ &\leq \sum \left|(\tilde{B}_j)_3\right| \\ &= \sum 3^n . |\tilde{B}_j| \\ &= 3^n . \left|\bigcup \tilde{B}_j\right|\end{aligned}$$

olur.

Aşağıdaki önemli teorem, literatürde, Hardy-Littlewood-Wiener teoremi veya Hardy-Littlewood maksimal teoremi olarak adlandırılmaktadır.

Teorem 3.7.10. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ olsun.

i) $p = 1$ durumunda, her $\alpha > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{M}(f)(x) > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_1$$

olur. (L^1 de , zayıf tip).

ii) $p > 1$ durumunda,

$$\|\mathfrak{M}(f)\|_p \leq C_{p,n} \|f\|_p$$

olur (L^p de sınırlılık) (Fefferman 2005) .

İspat. p = ∞ için, $\|\mathfrak{M}\|_\infty \leq 1 . \|f\|$ olduğu rahatlıkla görülür. Şimdi Vitali lemmasını kullanalım: Her $x \in E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}$ için

$$\frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f| \, dy > \alpha$$

olacak şekilde B_x yuvarını seçebiliriz. Buradan $\{B_x\}_{x \in E_\alpha}$ yuvarları E_α kümesini örter. Genelliği kaybetmeden,

$$\bigcup_k B_k \supset \bigcup_{x \in E_\alpha} B_x \supset E_\alpha$$

olacak şekilde, B_x −ler içinden , açık ayrık yuvarların (en az) bir $B_1, B_2 \ \ldots, B_k$ dizisi vardır.

Bu nedenle , $\forall N$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{M}(f)(x) > \alpha\}| \leq \left| \bigcup_{k=1}^{N} B_k \right| \leq \frac{c}{\alpha} \|f\|_1$$

olduğunu göstereceğiz:

$$\left| \bigcup_{k=1}^{N} B_k \right| = \sum_{k=1}^{N} |B_k|$$

$$< \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\alpha} \int_{B_k} |f| \, dy$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_{UB_k} |f| \, dy$$

$$= \frac{1}{\alpha} \|f\|_1$$

olur.

Böylece i) nin ispatı tamamlanmış oldu.

ii) nin ispatı.

ii) nin ispatı i) den çıkar: $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$f^{\alpha}(x) = \begin{cases} f(x) , & |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ 0 \ , & |f(x)| < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

ve

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0 , & |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ f(x) , & |f(x)| < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$f = f^{\alpha} + f_{\alpha}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\mathfrak{M}(f) = \mathfrak{M}(f^{\alpha} + f_{\alpha}) \leq \mathfrak{M}(f^{\alpha}) + \mathfrak{M}(f_{\alpha})$$

olur.

Buradan, ayrıca, $f^{\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $f_{\alpha} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ olur.

$$\{\mathfrak{M}(f) > \alpha\} \subset \left\{\mathfrak{M}(f^{\alpha}) > \frac{\alpha}{2}\right\} \cup \left\{\mathfrak{M}(f_{\alpha}) > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$|\mathfrak{M}\{(f) > \alpha\}| \leq \left|\left\{\mathfrak{M}(f^{\alpha}) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| + \left|\left\{\mathfrak{M}(f_{\alpha}) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| \leq \frac{c}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \|f^{\alpha}\|_1$$

olur. Son eşitsizlik i) den elde edilir. Şimdi $\mathfrak{M}f$ nin dağılım fonksiyonunu kullanacağız.

$$\mu_{\mathfrak{M}f}(\alpha) \leq \frac{2c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f^{\alpha}(x)|\, dx$$

$$= \frac{2c}{\alpha} \int_{\left\{|f(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}} |f(x)|\, dx$$

elde edilir. Fubini teoremini de kullanarak

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathfrak{M}f(x)|^p\, dx = \left(\|\mathfrak{M}f\|_p\right)^p$$

$$= p \int_0^{\infty} \alpha^{p-1}\, \mu_{\mathfrak{M}f}(\alpha)\, d\alpha$$

$$\leq p \int_0^{\infty} \frac{2c}{\alpha} \int_{\left\{|f(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}} |f(x)|\, dx\, \alpha^{p-1}\, d\alpha$$

$$= 2pc \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2}\, d\alpha\, |f(x)|\, dx$$

$$= 2pc \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(2|f(x)|)^{p-1}}{p-1} . |f(x)|\, dx$$

$$= \frac{2^p pc}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx$$

$$= c_p\left(\|f\|_p\right)^p$$

elde edilir.

Teorem 3.7.11. (Lebesgue Diferansiyellenebilme Teoremi) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu lokal olarak integrallenebilir olsun.

i) Hemen hemen her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} f(y)\, dy = f(x_0)$$

ii) Hemen hemen her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(y) - f(x_0)|\, dy = 0$$

olur.

Daha genel olarak, $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda hemen hemen her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(y) - f(x_0)|^p\, dy = 0$$

olur (Evans 2010) .

Tanım 3.7.12. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu lokal olarak integrallenebilir olsun. Eğer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(y) - f(x_0)|\, dy = 0$$

koşulunu sağlarsa bu durumda x_0 noktasına f nin bir Lebesgue noktası denir. Tüm Lebesgue noktaları kümesine f nin Lebesgue kümesi denir (Heil 2019).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Sobolev Uzayında Maksimal Fonksiyonun Türevi ve Maksimal Operatörün Sınırlılığı

Bu bölümde $W^{1,p}(\Omega)$ uzayı üzerindeki norm için

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|Du\|_p$$

tanımını kullanacağız. Burada,

$$Du = (D_1u, D_2u, \dots, D_nu)$$

u nun zayıf gradyanını göstermektedir. $i = 1,2, \dots, n$ için, D_iu de birinci mertebeden zayıf türevleri gösterir**.**

4.1.1. $p \in (1, \infty]$ ve $\Omega = \mathbb{R}^n$ Durumu

Klasik anlamda diferansiyellenebilir bir fonksiyonun maksimal fonksiyonu genelde diferansiyellenebilir değildir. Fakat zayıf türev için durum farklıdır:

$p \in (1, \infty]$ için, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ Sobolev fonksiyonunun maksimal fonksiyonu yine $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayının elemanı olabilmektedir. Ayrıca, maksimal fonksiyon bu uzayda sınırlı da olabilmektedir. Özetle,

$$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \text{ iken } M(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\|M(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

olmaktadır. Bu sonuç (Kinnunen 1997) de gösterilmiştir.

Ayrıca bunun için (Aalto ve Kinnunen 2009) çalışmasına da bakmak yararlı olacaktır.

Teorem 4.1.1.1. $1 < p < \infty$ olsun. Eğer $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $Mu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathbb{R}^n$ nin hemen hemen her yerinde , $i = 1,2, \dots, n$ için

$$|D_iMu| \leq MD_iu$$

olur (Kinnunen 1997).

İspat. $\chi_{B(0,r)}$, $B(0,r)$ yuvarının karakteristik fonksiyonu olmak üzere,

$$\chi_r = \frac{\chi_{B(0,r)}}{|B(0,r)|}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, konvolüsyondan

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |u(y)|\,dy = |u| \star \chi_r(x)$$

elde edilir. Buradan

$$|u| \star \chi_r \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

ve $i = 1, 2, \dots, n$ için, $\mathbb{R}^n$ nin hemen hemen her yerinde

$$D_i(|u| \star \chi_r) = \chi_r \star D_i|u|$$

olur. $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ pozitif rasyonel sayıların numaralandırılması olsun. u lokal olarak integrallenebildiği için maksimal fonksiyonun tanımında kendimizi pozitif rasyonel yarıçaplara kısıtlayabiliriz. Buradan

$$Mu(x) = \sup_j \left(|u| \star \chi_{r_j}\right)(x)$$

yazılabilir. $k = 1, 2, \dots$ için

$$v_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$v_k(x) = \max_{1 \le j \le k} \left(|u| \star \chi_{r_j}\right)(x)$$

fonksiyonları tanımlansın. $\{v_k\}$, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de artan bir fonksiyon dizisi olur. Noktasal olarak

$$v_k \to Mu$$

olur. $\mathbb{R}^n$ nin hemen hemen her yerinde , $i = 1, 2, \dots, n$ için,

$$|D_i v_k| \le \max_{1 \le j \le k} \left|D_i\left(|u| \star \chi_{r_j}\right)\right|$$

$$= \max_{1 \le j \le k} \left|\chi_{r_j} \star D_i|u|\right|$$

$$\le MD_i|u|$$

$$= MD_i u$$

Burada, $i = 1, 2, \dots, n$ için, hemen hemen her yerde

$$\left|D_i|u|\right| = |D_i u|$$

eşitliği kullanıldı.

Böylece,

$$\|Dv_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{n} \|D_i v_k\|_p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|MD_i u\|_p$$

olmasından maksimal fonksiyon teoreminden her $i = 1, 2, \dots$ için,

$$\|v_k\|_{1,p} \leq \|Mu\|_p + \sum_{i=1}^{n} \|MD_i u\|_p$$

$$\leq c\|u\|_p + c\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_p < \infty$$

olur. Buradan $\{v\}$ dizisi $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı ve noktasal olarak Mu ya yakınsak olur. Sobolev uzayının zayıf yakınsaklığından $Mu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında v_k dizisi Mu ya zayıf yakınsak ve $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında $D_i v_k$ dizisi $D_i Mu$ ya yakınsak olur. Hemen hemen her yerde, $|D_i v_k| \leq MD_i u$ olduğundan, zayıf yakınsaklıktan, $\mathbb{R}^n$ nin hemen hemen her yerinde, $i = 1, 2, \dots$ için

$$|D_i Mu| \leq MD_i u$$

olur.

Böylece teoremin ispatı bitti. Bu teoremi ve maksimal fonksiyon teoremini kullanarak,

$$\|Mu\|_{1,p} = \|Mu\|_p + \|DMu\|_p$$

$$\leq c\|u\|_p + \|M|Du|\|_p$$

$$\leq c\|u\|_{1,p}$$

sonucu elde edilir. Böylece, $1 < p < \infty$ için,

$$M: W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

sınırlı bir operatör olur.

Şimdi $p = \infty$ durumuna bakalım. $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ise ispattaki ufak değişiklikle, $Mu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ olur.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \|Mu\|_{1,\infty} &= \|Mu\|_\infty + \|DMu\|_\infty \\ &\leq \|u\|_\infty + \|M|Du|\|_\infty \\ &\leq \|u\|_{1,\infty} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Şunu hatırlatmada yarar vardır. $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ için, ölçümü sıfır olan bir küme üzerinde fonksiyon yeniden tanımlanınca, u sınırlı ve Lipschitz sürekli fonksiyon olur.

Maksimal fonksiyonunun türevi için, noktasal kestirimlerle ilgilenilmese daha basit biçimde sınırlılık elde edilir. Maksimal fonksiyon öteleme değişimine sahiptir. Yani u fonksiyonu ve $y \in \mathbb{R}^n$ verildiğinde

$$u_y(x) = u(x - y)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$M(u_y)(x) = (Mu)_y(x)$$

özelliğine sahiptir.

Aşağıdaki teorem için bir operatör sınıfını verelim:

X ve Y fonksiyonların birer vektör uzayları olsun. T operatörü,

$$T: X \to Y$$

h.h.h. $u \in X$ için, $Tu \geq 0$

h.h.h. $u, v \in X$ için, $T(u + v) \leq Tu + Tv$

özelliklerini sağlasın.

Teorem 4.1.1.2. $1 < p < \infty$ ve $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ operatörü sınırlı ve (hemen) yukarıdaki özellikleri sağlayacak şekilde verilsin. Eğer her $y \in \mathbb{R}^n$ ve her $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için , $T(u_y) = (Tu)_y$ sağlanırsa bu durumda

$$T: W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

operatörü de sınırlı olur. (Hajlasz ve Onninen 2004).

İspat. (Gilbarg ve Trudinger 1983) kitabına göre, $1 < p < \infty$ için, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ancak ve ancak $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $\limsup_{y \to 0} \frac{\|u_y - u\|}{|y|} < \infty$ olmasıdır. Bunu

$$\begin{aligned} \|(Tu)_y - Tu\|_p &= \|T(u_y) - Tu\|_p \\ &\leq \|T(u - u_y)\|_p + \|T(u_y - u)\|_p \\ &\leq c\|u_y - u\|_p \end{aligned}$$

eşitsizliğiyle birlikte düşündüğümüzde sonuç çıkar.

4.1.2. $p \in (1, \infty]$ ve $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ Durumu

Şimdi de lokal Hardy-Littlewood maksimal operatörün Sobolev uzayında sınırlı olduğunu gösterelim.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $u: \Omega \to [-\infty, \infty]$ lokal olarak integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere, lokal Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M_\Omega u: \Omega \to [0, \infty]$$

$$M_\Omega \mathrm{u}(\mathrm{x}) = \sup \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |u(y)|\, dy \qquad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada supremum $r \in (0, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega))$ koşulunu sağlayan yarı çaplar üzerinde alınmaktadır. Buradan lokal maksimum fonksiyonun Ω bölgesine bağlı olduğu görülür. Ayrıca yine maksimal operatör, $1 < p \leq \infty$ için $L^p(\Omega)$ uzayında

$$\|M_\Omega \mathrm{u}\|_p \leq c\|u\|_p$$

sınırlıdır (Stein 1970).

Teorem 4.1.2.1. $1 < p \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ise bu durumda $M_\Omega u \in W^{1,p}(\Omega)$ hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$|DM_\Omega u(x)| \leq 2M_\Omega |Du|(x) \tag{4.2}$$

olur (Kinnunen ve Lindqvist 1998).

Önce bir lemma verilecektir. $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ olarak alınacaktır.

Böylece

$$\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$$

sonlu olur. $t \in (0,1)$ için

$$u_t : \Omega \to [-\infty, \infty]$$

$$u_t(x) = \frac{1}{\left|B\left(x, t\delta(x)\right)\right|} \int\limits_{B\left(x,t\delta(x)\right)} u(y)\, dy \tag{4.3}$$

olarak tanımlansın. Burada, $\left|B\left(x, t\delta(x)\right)\right| = \omega_n t^n \delta(x)^n$, olduğunu bilmeliyiz. Ayrıca küresel ortalama için

$$\frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

yazarız.

Lemma 4.1.2.2. $p \in (1, \infty]$ ve $u \in W^{1,p}(\Omega)$ olsun. Bu durumda, $t \in (0,1)$ için, $u_t \in W^{1,p}(\Omega)$ ve hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$|Du_t(x)| \leq 2M_\Omega |Du|(x) \tag{4.4}$$

olur (Kinnunen ve Lindqvist 1998).

İspat. Öncelikle, $u \in C^\infty(\Omega)$ olduğunu varsayalım. $t \in (0,1)$ verilsin. Rademacher teoremine göre, δ (bir Lipschitz fonksiyonu olduğundan) Ω nın hemen hemen her $x \in \Omega$ için $|D\delta(x)| = 1$ olur. Leibnitz kuralından hemen hemen her $x \in \Omega$ için, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$D_i u_t(x) = D_i\left(\frac{1}{\omega_n\left(t\delta(x)\right)^n}\right). \int\limits_{B\left(x,t\delta(x)\right)} u(y)\, dy + \frac{1}{\omega_n\left(t\delta(x)\right)^n}. D_i \int\limits_{B\left(x,t\delta(x)\right)} u(y)\, dy$$

olur ve zincir kuralından hemen hemen her $x \in \Omega$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$D_i \int\limits_{B(x,t\delta(x))} u(y)\, dy = \int\limits_{B(x,t\delta(x))} D_i u(y)\, dy \; + \; t \int\limits_{\partial B(x,t\delta(x))} u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y).D_i\delta(x)$$

olur. Burada ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial r} \int\limits_{B(x,r)} u(y)\, dy = \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)\, dy$$

gerçeği de kullanıldı. Terimler toplandığında hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} Du_t(x) = n\frac{D\delta(x)}{\delta(x)}\Bigg(& \frac{1}{\left|\partial B\left(x, t\delta(x)\right)\right|} \int\limits_{\partial B(x,t\delta(x))} u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ & - \frac{1}{\left|B\left(x, t\delta(x)\right)\right|} \int\limits_{B(x,t\delta(x))} u(y)\, dy \Bigg) \\ & + \frac{1}{\left|B\left(x, t\delta(x)\right)\right|} \int\limits_{B(x,t\delta(x))} Du(y)\, dy \end{aligned} \qquad (4.5)$$

olur. Bu bir vektör özdeşliğidir. (4.5) teki parantezin içinde bulunan iki integralin farkını kestirmek için birbirini götürmeyi inceleyeceğiz. Bu amaçla , $B(x,R) \subset \Omega$ olduğunu varsayalım. Green nin birinci özdeşliğini kullanarak,

$$\int\limits_{\partial B(x,R)} u(y) \frac{\partial v}{\partial \nu}(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int\limits_{B(x,R)} \left(u(y)\Delta v(y) + Du(y).Dv(y)\right)\, dy$$

olur, buradan $\nu(y) = \left(\frac{y-x}{R}\right)$, $B(x,R)$ ye dıştan normal olan birim vektör ve

$v(y) = \frac{|y-x|^2}{2}$ seçilmiştir. Bu seçimlerle Green formülü

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\partial B(x,R)|} \int\limits_{\partial B(x,R)} u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) - \frac{1}{|B(x,R)|} \int\limits_{B(x,R)} u(y)\, dy \\ & \qquad = \frac{1}{n}\frac{1}{|B(x,R)|} \int\limits_{B(x,R)} Du(y).(y-x)\, dy \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafının kestirimi için

$$\left|\frac{1}{|B(x,R)|}\int\limits_{B(x,R)} Du(y).(y-x)\,dy\right| \le \frac{R}{|B(x,R)|}\int\limits_{B(x,R)} |Du(y)|\,dy \le RM_\Omega|Du|(x)$$

kullanılır. Böylece

$$\left|\frac{1}{|\partial B(x,R)|}\int\limits_{\partial B(x,R)} u(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) - \frac{1}{|B(x,R)|}\int\limits_{B(x,R)} u(y)\,dy\right| \le \frac{R}{n}M_\Omega|Du|(x) \qquad (4.6)$$

sonucu elde edilir.

(4.5) teki vektör özdeşliğini keyfi $e=(e_1,\dots,e_n)$ birim vektör ile çarpalım.

$R=t\delta(x)$ alınarak (4.6) yı kullanarak ve Schwarz eşitsizliğinden hemen hemen her $x\in\Omega$ için

$$\begin{aligned}|e.Du_t(x)| &\le n\frac{|e.D\delta(x)|}{\delta(x)}.\frac{t\delta(x)}{n}M_\Omega|Du|(x)\\ &\quad+\left|\frac{1}{|B(x,t\delta(x))|}\int\limits_{B(x,t\delta(x))} e.Du(y)\,dy\right|\\ &\le tM_\Omega|Du|(x)+\frac{1}{|B(x,t\delta(x))|}\int\limits_{B(x,t\delta(x))}|Du(y)|\,dy\\ &\le (t+1)M_\Omega|Du|(x)\end{aligned}$$

elde edilir. $t\le 1$ ve e keyfi olduğu için (4.4) düzgün fonksiyonlar için ispatlandı.

$p\in(1,\infty)$ ve $u\in W^{1,p}(\Omega)$ durumu yaklaşım argümanından çıkar.

Bu amaçla, $p\in(1,\infty)$ ve $u\in W^{1,p}(\Omega)$ verilsin. Bu durumda

$$\lim_{j\to\infty}\|\varphi_j-u\|_{W^{1,p}(\Omega)}=0$$

olacak şekilde, $W^{1,p}(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ da bir $\{\varphi_j\}$ fonksiyon dizisi vardır.

$t\in(0,1)$ verilsin. (4.3) ten, $x\in\Omega$ olduğunda

$$u_t(x)=\lim_{j\to\infty}(\varphi_j)_t(x)$$

olduğu görülür. $j = 1, 2, \ldots$ olmak üzere, her $x \in \Omega$ için

$$\left|\left(\varphi_j\right)_t(x)\right| \leq \frac{1}{\left|B\left(x, t\delta(x)\right)\right|} \int\limits_{B\left(x,t\delta(x)\right)} \left|\varphi_j(y)\right| \, dy \leq M_\Omega \varphi_j(x)$$

olur. (4.4) ten düzgün fonksiyonlarda $j = 1, 2, \ldots$ ve hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$\left|D(\varphi_j)_t(x)\right| \leq 2M_\Omega \left|D\varphi_j\right|(x) \qquad (4.7)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler ve Hardy-Littlewood-Wiener teoremi

$$\left\|\left(\varphi_j\right)_t\right\|_{1,p,\Omega} = \left\|\left(\varphi_j\right)_t\right\|_{p,\Omega} + \left\|D\left(\varphi_j\right)_t\right\|_{p,\Omega} \leq c\left(\left\|\varphi_j\right\|_{p,\Omega} + \left\|D\varphi_j\right\|_{p,\Omega}\right) = c\left\|\varphi_j\right\|_{1,p,\Omega}$$

olmasını gerektirir. Bu nedenle $\left\{\left(\varphi_j\right)_t\right\}$ dizisi $W^{1,p}(\Omega)$ da sınırlı olur, ayrıca u_t ye noktasal yakınsak olduğundan, Du_t Sobolev türevi var olur ve $j \to \infty$ için, $L^p(\Omega)$ da $D\left(\varphi_j\right)_t \to Du_t$ zayıf yakınsaması oluşur. Bu, u_t nin $W^{1,p}(\Omega)$ ya ait olduğunun standart gösterim yoludur. (4.4) deki eşitsizliği göstermek için, (4.7) de $j \to \infty$ için limite geçilecektir. Maksimalin alt lineer olmasından her $x \in \Omega$ için,

$$\left|M_\Omega\left|D\varphi_j\right|(x) - M_\Omega|Du|(x)\right| \leq M_\Omega\left(\left|D\varphi_j\right| - |Du|\right)(x)$$

elde edilir. Ayrıca yine Hardy-Littlewood-Wiener teoremindent

$$\left\|M_\Omega\left|D\varphi_j\right| - M_\Omega|Du|\right\|_{p,\Omega} \leq \left\|M_\Omega\left(\left|D\varphi_j\right| - |Du|\right)\right\|_{p,\Omega} \leq c\left\|\left|D\varphi_j\right| - |Du|\right\|_{p,\Omega}$$

elde edilir. Böylece $j \to \infty$ için

$$M_\Omega\left|D\varphi_j\right| \to M_\Omega|Du|$$

$L^p(\Omega)$ da (güçlü) yakınsaması var olur.

İspatı tamamlamak için şu basit önermeye bakalım:

Eğer $L^p(\Omega)$ uzayında,

$$f_j \to f$$

$$g_j \to g$$

zayıf yakınsamaları var ve Ω nin hemen her yerinde $j = 1,2, \ldots$ için

$$f_j(x) \leq g_j(x)$$

oluyorsa bu durumda Ω nın hemen hemen her yerinde

$$f(x) \leq g(x)$$

olur. (4.7) yı uygulayarak istenen (4.4) eşitsizliği elde edilir.

Şimdi de $p = \infty$ durumuna bakalım. Yukarıdaki ispatı azıcık değiştirdiğimizde, her $p \in (1, \infty)$ için $u_t \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ olduğunu görürüz ve (4.4) kestirimi gradyan için doğru olur. İddia Hardy-Littlewood-Wiener teoreminden çıkar.

Bu da ispatı tamamlatır.

Teorem 4.1.2.1. ispatı: $p \in (1, \infty)$ olmak üzere, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ olsun. Bu durumda $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ olur. (4.3) te tanımlanan fonksiyonu düşünelim. $j = 1, 2, \ldots$, t_j , $(0,1)$ aralığında bulunan rasyonel sayıların bir sıralaması ve $u_j = |u|_{t_j}$ ile gösterilsin. Lemma 4.1.2.2. den, her $j = 1, 2, \ldots$ için $u_j \in W^{1,p}(\Omega)$ ve (4.4) ten hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$\left|Du_j(x)\right| \leq 2M_\Omega |Du|(x)\,, j = 1,2, \ldots$$

kestirimini verir. Burada ayrıca hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$|Du(x)| = \left|D|u(x)|\right|$$

sağlanan eşitliğide kullanıldı. Noktasal maksimum ile

$$v_k \colon \Omega \to [-\infty, \infty]$$

$$v_k(x) = \max_{1 \leq j \leq k} u_j(x)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. İki Sobolev fonksiyonun maksimumu yine Sobolev uzayına ait olma gerçeğinden, $\{v_k\}$ fonksiyon dizisi $W^{1,p}(\Omega)$ de artan bir dizi ve $M_\Omega u$ ya noktasal yakınsak olur. Hemen hemen her $x \in \Omega$ için ve $k = 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$|v_k(x)| = \left|D \max_{1 \leq j \leq k} u_j(x)\right| \leq \max_{1 \leq j \leq k} \left|Du_j(x)\right| \leq 2M_\Omega |Du|\,(x) \quad (4.8)$$

olur. Ayrıca her $x \in \Omega$ ve $k = 1,2, \ldots$ için,

$$v_k(x) \leq M_\Omega u(x)$$

olur. Geriye kalan ispat, Lemma 4.1.2.2. nin ispatının son satırlarının yolundan gidilerek elde edilir. Hardy-Littlewood-Wiener teoreminden

$$\begin{aligned}\|v_k\|_{1,p,\Omega} &= \|v_k\|_{p,\Omega} + \|Dv_k\|_{p,\Omega} \\ &\leq \|M_\Omega u\|_{p,\Omega} + 2\|M_\Omega |Du|\|_{p,\Omega} \\ &\leq c\|u\|_{1,p,\Omega}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{v_k\}$ fonksiyon dizisi $W^{1,p}(\Omega)$ da sınırlı bir dizi olur ve Ω nın hemen hemen her yerinde $v_k \to M_\Omega u$ yakınsamasına sahip olur. Bir zayıf kompakt argümanından

$$M_\Omega u \in W^{1,p}(\Omega)$$

ve

$$L^p(\Omega) \text{ da } v_k \to M_\Omega u \ , Dv_k \to DM_\Omega u$$

zayıf yakınsaklıkları elde edilir. Önceki bölümün sonunda bulunan önermeyi kullanarak (4.8) dekine zayıf limiti kullanarak yol alabiliriz.

$p = \infty$ durumuna bakalım. Tekrar yukarıdaki argümanı kullanarak $M_\Omega u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ olduğu gösterilebilir. Böylece iddia Hardy-Littlewood-Wiener teoreminden çıkar.

Şimdi maksimal fonksiyonun sınır değerlerine bakalım.

Sonuç 4.1.2.3. $p \in (1, \infty)$ olmak üzere, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise bu durumda $M_\Omega u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ olur (Kinnunen ve Lindqvist 1998).

İspat. $\{\varphi_j\}$ fonksiyon dizisi

$$\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - u\|_{1,p,\Omega} = 0$$

olacak biçimde $C_0^\infty(\Omega)$ uzayında bir dizi olsun.

Teorem 4.1.2.1. den, $j = 1, 2, \ldots$ için,

$$M_\Omega \varphi_j \in W^{1,p}(\Omega)$$

olur. Ayrıca,

$$\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < \frac{1}{2}\operatorname{dist}\left(\operatorname{supp}\varphi_j\ ,\partial\Omega\right)$$

olduğunda

$$M_\Omega\varphi_j(x) = 0$$

olur. Buradan, $j = 1, 2, \ldots$ için,

$$M_\Omega\varphi_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

olur. Maksimal operatörünün alt lineer olmasından, her $x \in \Omega$ için

$$\left|M_\Omega\varphi_j(x) - M_\Omega u(x)\right| \le M_\Omega(\varphi_j - u)(x)$$

elde edilir. Bu nedenle Hardy-Littlewood-Wiener teoreminden

$$\left\|M_\Omega\varphi_j - M_\Omega u\right\|_{p,\Omega} \le \left\|M_\Omega(\varphi_j - u)\right\|_{p,\Omega} \le c\left\|\varphi_j - u\right\|_{p,\Omega}$$

olur.

Diğer taraftan (4.2) den

$$\left\|DM_\Omega\varphi_j\right\|_{p,\Omega} \le 2\left\|M_\Omega\left|D\varphi_j\right|\right\|_{p,\Omega} \le c\left\|D\varphi_j\right\|_{p,\Omega}$$

türev kestirimi elde edilir. Bu ise $\{M_\Omega\varphi_j\}$ dizisinin $W_0^{1,p}(\Omega)$ da sınırlı bir dizi olduğunu ve

$$\lim_{j\to\infty}\left\|M_\Omega\varphi_j - u\right\|_{p,\Omega} = 0$$

yakınsamasına sahip olduğunu gösterir. Yine, zayıf kompaktlıktan

$M_\Omega u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ olur.

4.1.3. $p = 1$ ve $\Omega = \mathbb{R}$ Durumu

Bu bölümde, u, $\mathbb{R}^n$ de lokal olarak integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, maksimal fonksiyonunu

$$\mathcal{M}u(x) = \max_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy$$

olarak tanımlıyoruz. Burada supremum, $x \in \mathbb{R}^n$ noktasını kapsayan tüm Q küpleri üzerinde alınmaktadır. Yine bu durumda da Hardy-Littlewood-Wiener teoremi sağlanmaktadır.

Teorem 4.1.3.1. $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ ise bu durumda $\mathcal{M}u$ nin türevi integrallenebilir bir fonksiyon ve

$$\| (\mathcal{M}u)' \|_1 \leq 2\|u'\|_1$$

sağlanır (Tanaka 2002).

İspat. Bir $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ için,

$$\mathcal{M}_\ell u(x) = \sup_{s>0} \frac{1}{s} \int_{x-s}^{x} |u(y)|\, dy$$

$$\mathcal{M}_r u(x) = \sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_{x}^{x+t} |u(y)|\, dy$$

bir kenarlı maksimal fonksiyonları tanımlansın.

$$\mathcal{M}u(x) = \text{maks}\{\, \mathcal{M}_\ell u(x)\, , \mathcal{M}_r u(x)\} \tag{4.9}$$

olur. Bundan sonra, $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ olduğu varsayılacak sonuç sadece $\mathcal{M}_\ell$ için gösterilecektir, $\mathcal{M}_r$ için de sonucun doğru olduğu gösterilebilir. $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ ise (ölçümü sıfır olan bir küme üzerinde değişimler yapıldıktan sonra) u sürekli bir fonksiyon olarak alınabilir. Böylece, düzgün sürekli ve integrallenebilir olduğundan u sonsuzda sıfıra gider. Ayrıca $\mathcal{M}_\ell u$ sürekli ve sonsuzda sıfıra gider. Bu nedenle

$$E = \{x \in \mathbb{R}:\ \mathcal{M}_\ell u(x) > |u(x)|\}$$

kümesi açık olur. Buradan, (α_j, β_j) ayrık açık aralıklar olmak üzere,

$$E = \bigcup_j \mathrm{I}_j = \bigcup_j (\alpha_j, \beta_j)$$

olarak yazılabilir.

Lemma 4.1.3.2. Yukarıdaki tanımlara bağlı olarak, aşağıdakiler sağlanır.

a) $\mathcal{M}_\ell u$, her bir I_j üzerinde, artmayan bir fonksiyondur.

b) $\mathcal{M}_\ell u$, her bir I_j üzerinde, lokal bir Lipschitz fonksiyonudur. Özel olarak, $\mathcal{M}_\ell u$, her bir I_j kompakt aralığı üzerinde, mutlak sürekli bir fonksiyondur.

İspat. a) $K=[\alpha,\beta]\subset \mathrm{I}_j$ olsun. $\mathcal{M}_\ell u$ nun K üzerinde artmayan olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $|u|$ ve $\mathcal{M}_\ell u$ nun sürekliliğinden

$$\varepsilon \equiv \inf_{x\in K} \mathcal{M}_\ell u(x) - |u(x)| > 0$$

olur. $|u|$ nun düzgün sürekliliğinden,

$$x\in K,\ |y-x|\le \delta\,, \qquad |u(y)| < |u(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.10}$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ vardır. Buradan (4.10) ve ε tanımından , $x\in K$ için

$$\mathcal{M}_\ell u(x) = \sup_{s>\delta} \frac{1}{s} \int_{x-s}^{x} |f(y)|\,dy \tag{4.11}$$

olur. $x-h$, $x\in K$, $0<h\le\delta$ için

$$\mathcal{M}_\ell u(x-h) \ge \mathcal{M}_\ell u(x) \tag{4.12}$$

olduğunu gösterelim. $s>\delta$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.10) dan

$$\frac{1}{s}\int_{x-s}^{x}|f(y)|dy = \frac{s-h}{s}\cdot\frac{1}{s-h}\int_{x-s}^{x-h}|u(y)|\,dy + \frac{h}{s}\cdot\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}|f(y)|\,dy$$

$$\le \text{maks}\left\{\mathcal{M}_\ell u(x-h), |u(x)|+\frac{\varepsilon}{2}\right\} \tag{4.13}$$

olur. $s>\delta$ için, (4.13) nin sol tarafının supremumu alındığında, (4.11) ten

$$\mathcal{M}_\ell u(x) \le \text{maks}\left\{\mathcal{M}_\ell u(x-h), |u(x)|+\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

elde edilir. Ayrıca ε nun tanımından

$$\mathcal{M}_\ell u(x) \ge |u(x)| + \varepsilon$$

olur. Böylece (4.12) elde edilir.

b) K ve δ a)'nın ispatındaki gibi olsun. $x\,, x+h\in K\,, h>0$ ve $s>\delta$ olduğunu varsayalım. Bu durumda a) dan

$$\frac{1}{s}\int_{x-s}^{x}|u(y)|dy - \mathcal{M}_\ell u(x+h) \le \frac{1}{s}\int_{x-s}^{x}|u(y)|\,dy - \frac{1}{s+h}\int_{x-s}^{x+h}|u(y)|\,dy$$

$$\leq \frac{1}{s}\int_{x-s}^{x}|u(y)|\,dy - \frac{1}{s+h}\int_{x-s}^{x}|u(y)|\,dy$$

$$= \frac{1}{s+h}\cdot\frac{1}{s}\int_{x-s}^{x}|f(y)|\,dy.h \leq \frac{\mathcal{M}_{\ell}u(x).h}{\delta}$$

$$\leq \frac{\mathcal{M}_{\ell}u(x)}{\delta}\,.h \qquad (4.14)$$

çıkar. Sonra (6) nın, $s > \delta$ için, sol tarafının supremumu alındığında, (4.11) ve a) dan

$$0 \leq \mathcal{M}_{\ell}u(x) - \mathcal{M}_{\ell}u(x+h) \leq ch$$

elde edilir.

Önerme 4.1.3.3. $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ ise bu durumda $\mathcal{M}_{\ell}u$ ve $\mathcal{M}_{r}u$ nun zayıf türevleri integrallenebilir fonksiyon ve

$$\|(\mathcal{M}_{\ell}u)'\|_1 \leq \|u'\|_1\ , \qquad \|(\mathcal{M}_{r}u)'\|_1 \leq \|u'\|_1 \qquad (4.15)$$

olur.

İspat. İspat sadece $\mathcal{M}_{\ell}u$ için yapılacaktır. $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ ise bu durumda $|u| \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ ve

$$\|\,|u|'\|_1 = \|u'\|_1 \qquad (4.16)$$

olur.

$$E = \bigcup_j \mathrm{I}_j = \bigcup_j (\alpha_j, \beta_j)$$

olduğunu hatırlayalım.

$$F = \mathbb{R} \setminus E$$

olsun. Lemma 4.1.3.2. den, $\mathcal{M}_{\ell}u$ her bir I_j aralığında hemen hemen her yerde diferansiyellenebilirdir ve türevine v dersek, $v \leq 0$ olur. $\mathcal{M}_{\ell}u$ nun zayıf türevinin

$$(\mathcal{M}_{\ell}u)' = \chi_E v + \chi_F |f|' \qquad (4.17)$$

ile verilebileceğini göstereceğiz.

Bir $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ test fonksiyonu için, $\mathcal{M}_\ell u$ nin sürekliliği ve bir limitleme argümanından

$$\int_{I_j} \mathcal{M}_\ell u(y)\, \phi'(y)\, dy = \left[|u(\beta_j)|\phi(\beta_j) - |u(\alpha_j)|\phi(\alpha_j)\right] - \int_{I_j} v(y)\phi(y)\, dy \qquad (4.18)$$

elde edilir. (Burada ve sonrasında, eğer $\alpha_j = -\infty$ veya $\beta_j = \infty$ ise bu durumda $u(\alpha_j) = 0$ ve $u(\beta_j) = 0$ olur, benzer durum $\mathcal{M}_\ell u(\alpha_j)$ ve $\mathcal{M}_\ell u(\beta_j)$ ye de uygulanır). (4.18) den

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_\ell u(y)\, \phi'(y)\, dy &= \int_{E \cup F} \mathcal{M}_\ell u(y)\, \phi'(y) dy \\
&= \sum_J \left[|u(\beta_j)|\phi(\beta_j) - |u(\alpha_j)|\phi(\alpha_j)\right] - \int_E v(y)\phi(y)\, dy \\
&+ \int_F |u(y)|\phi'(y)\, dy \\
&= \int_E |u(y)|\phi'(y)\, dy + \int_E |u|'(y)\phi(y)\, dy - \int_E v(y)\phi(y)\, dy \\
&+ \int_F |u(y)|\phi'(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} |u(y)|\phi'(y)\, dy + \int_E |u|'(y)\phi(y)\, dy \\
&- \int_E v(y)\phi(y)\, dy = -\int_{\mathbb{R}} \left(\chi_E(y)v(y) + \chi_F(y)|u|'(y)\right)\phi(y) dy
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum (4.17) yi gerektirir.

Şimdi (4.15) ispatlayacağız. Her bir I_j aralığı için $v \leq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{I_j} |v(y)| dy &= \mathcal{M}_\ell u(\alpha_j) - \mathcal{M}_\ell u(\beta_j) \\
&= |u(\alpha_j)| - |u(\beta_j)| \\
&= -\int_{I_j} |u|'(y)\, dy \leq \int_{I_j} ||u|'(y)|\, dy \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

olur. (4.19) ve (4.16) den

$$\|(\mathcal{M}_\ell u)'\|_1 = \int_E |v| + \int_F ||u|'| \leq \| \, |u|'\|_1 = \|u'\|_1$$

elde edilir.

Lemma 4.1.3.4. Reel değerli f ve g fonksiyonları doğru üzerinde integrallenebilir olsunlar.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(y)\, dy$$

$$H(x) = \text{maks}\{F(x)\,, G(x)\}$$

olsunlar. Bu durumda H nin zayıf türevi integrallenebilir bir fonksiyon ve

$$\|H'\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

olur.

Bunun ispatı için (Gilbarg ve Trudinger 1983) kaynağına bakılabilir. Böylece teorem 4.1.3.1.; (4.9) dan, Lemma 4.1.3.4.ten ve Önerme 4.1.3.3. ten elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sobolev uzayları ve Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu analizdeki en önemli konulardandır. 1930'lardan beri bu konular çeşitli yönleriyle çalışılmıştır. Fakat (Kinnunen 1997) makalesine kadar kimse maksimal operatörün $W^{1,p}$ Sobolev uzayındaki sınırlılığını incelemeyi gündeme getirmemiştir. Maksimal operatör L^1 de sınırlı olmadığı için bu makaledeki sonuç ancak $p > 1$ durumunda geçerli olmuştur. Bu nedenle bu alandaki en zor durumlardan biri $W^{1,1}$ uzayı ile yaşanmaktadır. $n = 1$ durumu, Tanaka (2002) tarafından çözülmüştür.

Küresel Maksimal fonksiyonu

$$Su(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} |u(y)| d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

olarak tanımlanır. (Hajlasz ve Onninen 2004) makalesinde $n \geq 2$ olmak üzere, $p \in \left(1, \frac{n}{n-1}\right)$ için

$$S: W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

operatörünün sınırlı olup olmadığı bir açık soru olarak verilmiştir. Bu nedenle, ileriki zamanlarda bu soruya yoğunlaşılabilir.

6. KAYNAKLAR

Aalto, D., Kinnunen, J. 2009. Maximal functions in Sobolev spaces. In Sobolev Spaces in Mathematics I . Springer. New York, NY.

Adams, R. A., Fournier, J. J. 2003. Sobolev Spaces. Academic Press.

Aldroubi, A., Cabrelli, C., Jaffard, S., Molter, U. 2019. New Trends in Applied Harmonic Analysis, Volume 2. Birkhäuser.

Athreya, K. B., Lahiri, S. N. 2006. Measure Theory and Probability Theory. Springer Science & Business Media.

Bass, R. F. 2011. Real Analysis for graduate Students. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Bass, R. F. 2016. Real Analysis for Graduate Students. Storrs, CT.

Braides, A., Defranceschi, A. 1998. Homogenization of Multiple Integrals. Oxford University Press.

Carl, S., Le, V. K., Motreanu, D. 2007. Nonsmooth Variational Problems and Their Inequalities. Springer Science & Business Media.

Cheney, W. 2013. Analysis for Applied Mathematics. Springer Science & Business Media.

DiBenedetto, E., Debenedetto, E. 2002. Real Analysis. Birkhäuser. Boston.

Fefferman, C. 2005. Maximal Functions in Analysis Erisim: http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2005/Fefferman.pdf . Erisim Tarihi: 21.07.2020

Evans, L. C. 2010. Partial Differential Equations. American Mathematical Society.

Gilbarg, D., Trudinger, N. S. 1983. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag.

Haddad, W. M., Chellaboina, V. 2011. Nonlinear Dynamical Systems and Control: a Lyapunov-based approach. Princeton university press.

Hajłasz, P., Onninen, J. 2004. On boundedness of maximal functions in Sobolev spaces. ***In Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*** (Vol. 29, No. 1, pp. 167-176). Finnish Academy of Science and Letters.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. 1930. A maximal theorem with function-theoretic applications. ***Acta Mathematica***, 54, 81-116.

Heil, C. 2018. Metrics, Norms, Inner Products, and Operator Theory. Birkhäuser.

Heil, C. 2019. Introduction to Real Analysis. Springer.

Hunter, J. K., Nachtergaele, B. 2001. Applied Analysis. World Scientific Publishing Company.

Hutson, V., Pym, J., Cloud, M. 2005. Applications of Functional Analysis and Operator Theory. Elsevier.

Johnson, W. B., Lindenstrauss, J. 2001. Handbook of the Geometry of Banach spaces. Elsevier.

Jones, F. 2001. Lebesgue Integration on Euclidean Space. Jones & Bartlett Learning.

Kadets, V. 2018. A Course in Functional Analysis and Measure Theory. Cham: Springer International Publishing.

Kinnunen, J. 1997. The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function. ***Israel Journal of Mathematics***, 100(1), 117-124.

Kinnunen, J., Lindqvist, P. 1998. The derivative of the maximal function. ***Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik***, 161-167.

Khrennikov, A. Y. 2012. Superanalysis. Springer Science & Business Media.

Krantz, S. G. 2007. Complex Variables: a physical approach with applications and MATLAB. CRC Press.

Krantz, S. G. 2011. The Integral: a crux for analysis. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, 4(1), 1-105.

Leoni, G. 2017. A First Course in Sobolev Spaces. American Mathematical Soc.

Loeb, P. A. 2016. Real Analysis. Boston: Birkhäuser.

Luiro, H. 2007. Continuity of the maximal operator in Sobolev spaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, *135*(1), 243-251.

Mitrovic, D., Zubrinic, D. 1997. Fundamentals of Applied Functional Analysis. CRC Press.

Muscat, J. 2014. Functional analysis: an introduction to metric spaces, Hilbert spaces, and Banach algebras. Springer.

Protter, M. H., Charles Jr, B. 2012. A First Course in Real Analysis. Springer Science & Business Media.

Robinson, J. C. 2001. Infinite-Dimensional Dynamical Systems: an introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors. Cambridge University Press.

Sawano, Y. 2018. Theory of Besov spaces. Springer. Singapore.

Siddiqi, A. H., Nanda, S. 1986. Functional Analysis with Applications. Tata McGraw-Hill.

Sobolev, S. L. 1938. On a theorem of functional analysis. ***Mat. Sbornik***, 4, 471-497.

Sofonea, M., Matei, A. 2009. Variational Inequalities with Applications: a study of antiplane frictional contact problems . Springer Science & Business Media.

Stein, E. M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton university press.

Stein, E. M., Strömberg, J. O. 1983. Behavior of maximal functions in $\mathbb{R}^n$ for large n. ***Ark. Mat.*** 21 no. 2, 259–269.

Taheri, A. 2015. Function Spaces and Partial Differential Equations*:* Volume 2-Contemporary Analysis. Oxford University Press.

Tanaka, H. 2002. A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy-Littlewood maximal function***. Bulletin of the Australian Mathematical Society***. *65*(2), 253-258.

Tao, T. 2016. Analysis II. Springer.

Vestrup, E. M. 2003. The Theory of Measures and Integration. John Wiley & Sons.

Wiener, N. 1939. ***Duke Math. J.*** The ergodic theorem,, 5, 1-18.

Yeh, J. 2006. Real analysis: theory of measure and integration second edition. World Scientific Publishing Company.

Zhang, F. 2011. Matrix Theory: basic results and techniques. Springer Science & Business Media.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Siirt-Eruh ilçesinde doğdum. 2004 yılında Eruh Lisesi'nden mezun oldum. 2016 yılında Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldum. 2018 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım.