T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SKALER YOĞUNLUK ALANLI MODİFİYE EDİLMİŞ KÜTLEÇEKİM TEORİSİ

Mehmet Faruk KARABAT

DOKTORA TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR OCAK-2021

T.C. DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DİYARBAKIR

Mehmet Faruk KARABAT tarafından yapılan "**Skaler Yoğunluk Alanlı Modifiye Edilmiş Kütleçekim Teorisi**" konulu bu çalışma, jürimiz FİZİK Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ

Üye : Doç. Dr. Mustafa SALTI

Üye : Doç. Dr. Murat KORUNUR

Üye : Doç. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİOĞLU

Üye : Dr. Öğrt. Üyesi F. Figen BİNBAY

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 29/01/2021

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../.....

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması için problemi ortaya koyan ve çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren, hiçbir konuda yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİOĞLU'na çok teşekkür ederim.

Bu çalışmamda benimle görüş, öneri ve düşüncelerini paylaşan, emeklerini esirgemeyen ve ayrıca deneyimleri ile teze değerli katkılar sunan Doç. Dr. Mustafa SALTI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Doç. Dr. Murat KORUNUR'a yardımları için teşekkür ederim. Dr. Öğr. Üyesi. Figen BİNBAY ve Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ hocalarıma yardımlarından ve pozitif yaklaşımlarından ötürü teşekkür ederim.

Çocukluğumdan itibaren adını her duyduğumda beni heyecanlandıran ve akademik araştırmalara yönelmemde önemli etkisi olan Albert EINSTEIN'a da teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
TEŞEKKÜR		I
İÇİNDEKİLER		II
ÖZET		IV
ABSTRACT		V
ŞEKİL LİSTESİ		VI
KISALTMA VE SİMGELER		VII
1.	**GİRİŞ**	1
2.	**KAYNAK ÖZETLERİ**	9
3.	**MATERYAL VE METOT**	13
3.1.	Notasyon Hakkında	13
3.2.	Metot Hakkında	13
3.2.1.	Genel Görelilik Teorisi	13
3.2.2.	Mach Prensibi	14
3.2.3.	Eşdeğerlik İlkesi	16
3.2.4.	Genel Kovaryanslık Prensibi	17
3.2.5.	Einstein Alan Denklemleri	17
3.2.6.	Genişleyen Evren ve Mükemmel Akışkan İçin Enerji-Momentum Tensörü	22
3.2.7.	Maddenin Baskın Olduğu Dönem	25
3.2.8.	Radyasyonun Baskın Olduğu Dönem	26
3.2.9.	Vakumun Baskın Olduğu Dönem	27
3.2.10.	Skaler Alan	27
3.2.11.	Skaler Yoğunluk	28
3.2.12.	Lagrange Hareket Denklemi	30
3.2.13.	Klein-Gordon Denklemi	34
4.	**BULGULAR VE TARTIŞMA**	37

4.1. Kozmolojik Çıkarımlar İçin Kullanılacak Metrik ……...…. 37

4.2. Skaler Alan Durumu …… 39

4.3. Skaler Yoğunluk Durumu …… 48

4.4. *f(R)*-gravite Metrik Formalizmi ……...…. 53

4.5. Modifikasyon …… 56

5. SONUÇ VE ÖNERİLER …… 59

6. KAYNAKLAR …… 63

ÖZGEÇMİŞ ……... 67

ÖZET

SKALER YOĞUNLUK ALANLI MODİFİYE EDİLMİŞ KÜTLEÇEKİM TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Mehmet Faruk KARABAT

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

2021

Genel Görelilik teorisini modifiye etmeye yönelik öncü girişimler, Einstein'ın 1915'te teoriyi tanıtmasının hemen ardından 1920'lerde başlatıldı. Bununla birlikte, bu tür girişimler, Evrenin hızlandırılmış bir genişleme aşamasına girdiğinin fark edilmesinden sonra (özellikle 1990'lardan itibaren) önemli ölçüde artmıştır. Bu gizemli hızlı genişlemeyi Genel görelilik teorisinin orijinal formuyla açıklamak mümkün olmadığından, onu değiştirmemiz veya yeni alternatif teoriler sunmamız gerekmektedir. Bu bağlamda, literatürde Genel Görelilik teorisinin modifikasyonu üzerine kapsamlı araştırmalar yapılmıştır. Örneğin, MOND, TeVeS, skaler-tensör, metrik f(R)-gravite, Palatini f(R)-gravite ve metrik-affine f(R)-gravite teorileri yoğun bir şekilde dikkate alınmıştır. Bu tezde, temel olarak ağırlığı 2 olan bir skaler yoğunluğu içeren yeni bir modifiye edilmiş yerçekimi teorisi önerilmiştir. Sırasıyla bir skaler alan ve yukarıda bahsedilen skaler yoğunluk için hareket denklemleri türetilmiş ve karşılaştırılmıştır. Son olarak, elde edilen sonuçlar FRW kozmolojisi çerçevesinde farklı bir bakış açısıyla karşılaştırmalı olarak tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Skaler alan, skaler yoğunluk, modifiye teori.

ABSTRACT

MODIFIED THEORY OF GRAVITY WITH A SCALAR DENSITY FIELD

PhD THESIS

Mehmet Faruk KARABAT

DEPARTMENT OF PHYSICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2021

Pioneering attempts to modify the General Theory of Relativity were initiated in the 1920s, just after Einstein introduced the theory in 1915. However, such initiatives have increased significantly (especially since the 1990s), after realizing that the Universe has entered in an accelerated expansion phase. Because it is not possible to explain this mysterious speedy expansion with the original form of the General Theory of Relativity, we need to modify it or introduce new alternative theories. In this context, extensive investigations have been performed in literature on the modification of General Theory of Relativity. For instance, the MOND, TeVeS, scalar-tensor, metric f(R)-gravity, Palatini f(R)-gravity and the metric-affine f(R)-gravity theories have been taken into account intensively. In this thesis, we mainly intorduce a new modified gravitational theory including a weight 2 scalar density. We derive equations of motion for a scalar field and the aforementioned scalar density, respectively, and compare them. Finally, the results are discussed comparatively from a different perspective within the framework of FRW cosmology.

Keywords: Scalar field, scalar density, modified theory.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil No		Sayfa
Şekil 1.1.	Aralarında R mesafesi bulunan farklı kütleli iki cisim	1
Şekil 1.2.	Planck Grubu verilerine göre evrenin CMB haritası	3
Şekil 1.3.	Evreni oluşturan bileşenler	5
Şekil 3.1.	Işığın bükülmüş uzay-zamandaki yörüngesi	14
Şekil 3.2.	Kova ve su hareketsiz (A), Kova dönüyor su hareketsiz (B), Kova ve su ikisi de dönüyor (C)	15
Şekil 3.3.	İvmeli hareket ile gravitasyon etkisi altındaki hareket arasında fark yoktur.	16
Şekil 3.4.	Bir parçacığın A ve B noktaları arasındaki yörünge eğrisi	30
Şekil 4.1.	Evren için uzay-zaman eğriliği tipleri	39

KISALTMA VE SİMGELER

∇_μ	: Kovaryant türev operatörü
$G_{\mu v}$	: Einstein tensörü
M_{pl}	: Planck kütlesi
$R_{\mu v}$	: Ricci tensörü
S_{EH}	: Einstein-Hilbert eylemi
S_m	: Madde eylemi
$\mathcal{L}_m$	: Madde lagranjiyen yoğunluğu
$T_{\mu v}$	: Enerji-momentum tensörü
$g_{\mu v}$	: Metrik tensör
$\Gamma^{\lambda}_{v\mu}$	: Christoffel bağlantısı
CMB	: Kozmik mikrodalga ardalanı
CMBR	: Kozmik mikrodalga ardalan ışınımı
EAD	: Einstein Alan Denklemleri
FRW	: Friedmann-Robertson-Walker
GG	: Genel Görelilik
$\mathcal{L}$	: Lagranjiyen yoğunluğu
MOND	: Modifiye Edilmiş Newton Dinamiği
ÖG	: Özel görelilik
ϕ	: Skaler alan fonksiyonu
TeVeS	: Tensör-Vektör-Skaler
V	: Potansiyel
WMAP	: Wilkinson mikrodalga anizotropi sondası
Λ	: Kozmolojik sabit
ΛCDM	: Kozmolojik sabit ve soğuk karanlık madde
EH	: Einstein-Hilbert
F	: Newton kütleçekim kuvveti
G	: Evrensel çekim sabiti
H	: Hubble parametresi
KG	: Klein-Gordon
L	: Lagranjiyen
N	: Parçacık sayısı

w : Durum denklemi parametresi

R : Ricci skaleri

a : Kozmik ölçek çarpanı

g : Metrik tensörün determinantı

p : Basınç

ρ : Enerji yoğunluğu

Ω : Skaler yoğunluk

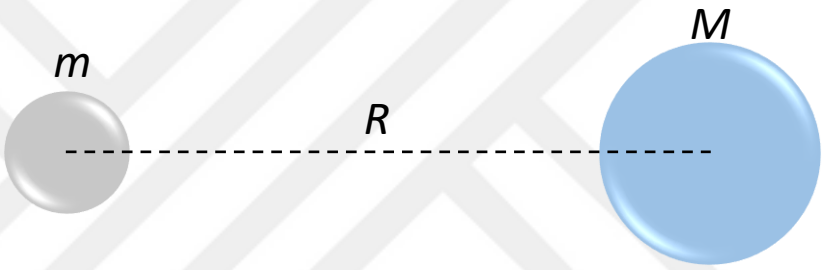
κ : Evrensel sabit

$\hat{k}$: Eğrilik parametresi

Gözlemlediğimiz aslında evren değildir!
Bizim sorgulama yöntemimiz doğrultusunda onun ortaya döktükleridir.
Werner Heisenberg

1. GİRİŞ

Şimdiye kadar doğadaki etkileşimler için dört temel kuvvetin söz sahibi olduğu bilinmektedir: elektromanyetik, güçlü nükleer, zayıf nükleer ve kütleçekim kuvveti. Bunlar arasında kütleçekim kuvvetinin etkisi atomik ölçekte diğerlerine nazaran en zayıf olanıdır. Doğası halen tam olarak anlaşılamayan bu etkileşim türü ilk olarak 1687'de Newton tarafından matematiksel bir ifade ile başarılı biçimde açıklanmıştır (Newton 1687).



Şekil 1.1. Aralarında R mesafesi bulunan farklı kütleli iki cisim.

Aralarında belli bir mesafe bulunan iki kütle (bakınız Şekil 1.1) arasındaki kütleçekim kuvveti, bu iki kütlenin çarpımıyla doğru orantılı olup aralarındaki mesafenin karesiyle de ters orantılıdır:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}. \tag{1.1}$$

Buradaki $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ çarpanı evrensel çekim sabiti olarak bilinmektedir.

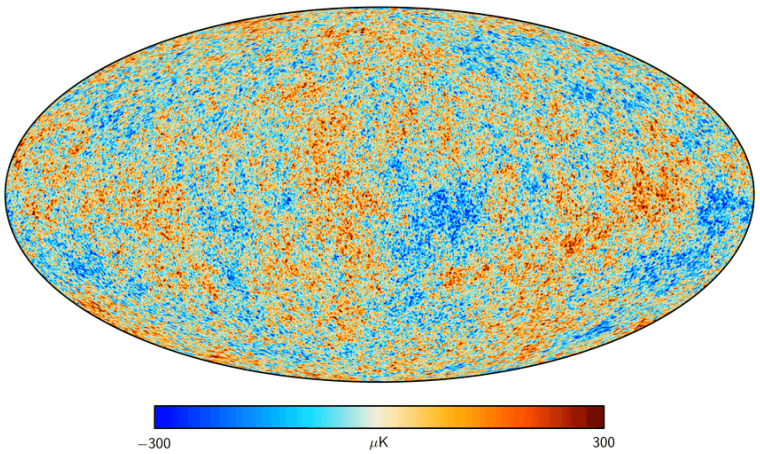
Newton'un kütleçekim teorisinin temelini mutlak zaman ve mutlak uzay kavramları oluşturmaktadır. Yeryüzündeki bazı olaylara ilişkin doğrudan gözlemlerimiz ve hatta gezegenlerin hareketi ve birbiriyle olan etkileşimleri Newton'un önerdiği bakış açısıyla oldukça başarılı biçimde açıklanabilmektedir. Newton'un fikrinin en önemli başarılarından bir tanesi de Neptün gezegeninin keşfedilmesini sağlamasıdır. Bu keşif Uranüs ile diğer gezegenler arasındaki kütleçekim etkilerinin sonucu olarak ortaya çıkan

hareketlerin Newton mekaniği yardımıyla yeniden yorumlanması sayesinde gerçekleşmiştir. Diğer yandan, Merkür'ün gözlenen günberi devinimi hareketi Newton mekaniği ile yapılan tahminlerle uyuşmamıştır. Newton mekaniğine göre gezegenin yörüngesindeki sapma yüzyılda yaklaşık 532 yay saniyesi olarak elde edilirken gözlemsel veriler Merkür'ün yörüngesinin yüzyılda yaklaşık olarak 574 yay saniyesi kadar saptığını göstermiştir. Newton'un teorisi ile açıklanamayan bu sapma miktarı daha sonra Einstein'ın Genel Görelilik (GG) teorisi kullanılarak yeniden hesaplanmış ve anlaşılmıştır ki Güneş etrafında dolanan gezegenlere nazaran daha büyük kütleye sahip olması nedeniyle uzay-zamanda neden olduğu eğrilikle Merkür'ün yörüngesinde bir sapma oluşturmaktadır. Aslında bu sapma olayı güneş sistemindeki tüm gezegenler için gerçekleşmektedir, fakat Merkür Güneşe en yakın gezegen olduğundan uzay-zaman eğriliğinden en fazla etkilenen gök cismidir ve bu etki gözlemlerle ölçülebilecek büyüklüktedir. GG teorisi sayesinde Merkür'ün gözlenen günberi devinimi hareketi kuramsal açıdan tam olarak açıklanabilmiştir.

Newton'un kütleçekim etkileşmesi ile ilgili fikrine göre, hareket edip etmediklerine bakılmaksızın bütün eylemsiz gözlemciler için çevrelerindeki olaylar eşdeğerdir. Farklı yönlerde hareket eden iki gözlemci etrafındaki olayları yine aynı eşdeğerlikte gözlemleyecektir. Öte yandan, 1865 yılında James Clerk Maxwell elektrik, manyetizma ve ışığı tek bir çatı altında birleştiren bir dizi denklem yayınlayınca (elektromanyetik teori) ve ışık hızı civarındaki hızlar içeren hareketler incelenince fizikçilerin gözlemciler ve olaylar hakkındaki fikirleri değişmeye başlamıştır. Örneğin, Galileo dönüşümlerinde ışık hızından daha yüksek hızlarda göreli hareket eden olaylar gözlemek mümkün hale gelmiştir. Lorentz dönüşümlerine kadar da bu durum kabul görmüştür. Fakat Einstein'in 1905 yılında ortaya koyduğu Özel Görelilik (ÖG) teorisiyle birlikte Newton'un kütleçekim fikrindeki "mutlak uzay" ve "mutlak zaman" kavramlarının artık kabul edilemeyeceği anlaşılmıştır. ÖG kuramında bütün eylemsiz referans sistemleri için fizik yasalarının aynı olduğunun ortaya konmasına ek olarak ışık hızının sabit ve bir üst sınır olduğu gösterilmiştir. Einstein 1915 yılında yayınladığı bir makalesinde sunduğu GG teorisi ile ÖG fikrinin temelinde yer alan yasaları eylemli referans sistemlerine genelleştirmiştir (tezin ikinci bölümde ayrıntılı biçimde ele alınacaktır). Böylece, eylemli ya da eylemsiz olsun bütün referans sistemlerinde fizik yasalarının tüm gözlemciler için aynı olduğunu ortaya koymuştur. GG teorisi, sadece

Güneş sistemimizde değil, çok daha büyük kozmik ölçeklerde de test edilmiş ve çok başarılı sonuçlar vermiştir. Örneğin evrende var olan ikili pulsarların yörünge dönemindeki değişimler kütleçekim dalgaları sayesinde iyi bir duyarlılıkla hesaplanabilmiştir. 100 yılı aşmış yaşına ve çok çeşitli başarılarına rağmen, GG teorisi özellikle son yıllarda fark edilen evrenin tahmin edilenden daha hızlı genişlemesi söz konusu olduğunda yetersiz kalmaktadır. Dolayısıyla, bilim insanları hem GG teorisini hem de yine Einstein tarafından 1928'de ortaya konan alternatif kütleçekim teorisi olan teleparalel gravite fikirlerini modifiye ederek geliştirmeye yönelmiştir. Bu amaca ulaşmak adına çeşitli yöntemler geliştirilmiştir (Brans ve Dicke 1961, Dicke 1962). Bunlardan bazıları skaler-tensör teorisi, Dvali-Gabadad-Porrati gravite (Dvali, Gabadadze ve Porrati 2000), brane-world gravite (Maartens 2004), vektör-skaler-tensör teorisi (Bekenstein 2004) ve Einstein eter teorisidir (Jacobson ve Mattingly 2001).

Kozmolojik ölçekte evrenin fiziksel süreçleri Standart Büyük Patlama Modeli sayesinde başarılı olarak açıklanabilmektedir, fakat bu model "kozmik çakışma"[1] ve "ince ayar"[2] gibi sorunlarla boğuşmaktadır (Weinberg 1972). Büyük Patlama Modeli GG ve kozmolojik prensip olmak üzere iki önemli temel üzerine inşa edilmiştir. Kozmolojik prensip evrenin uzaysal olarak homojen ve kozmolojik ölçeklerde izotropik olduğu varsayımına dayanmaktadır (bakınız Şekil 1.2). Bu varsayım yakın zamanda CMB'nin hassas ölçümleri sayesinde doğrulanabilmiştir (Spergel ve ark. 2003, Planck 2013).



Şekil 1.2. Planck Grubu verilerine göre evrenin CMB haritası

[1] *İvmeli genişleme neden şimdi gerçekleşmektedir?*
[2] *Bazı kozmolojik parametreler diğerlerine göre neden çok daha büyük mertebelerde değerler almaktadırlar?*

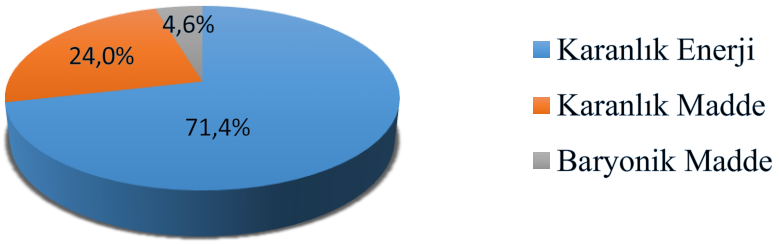
Şekil 1.2'deki CMB haritasında sıcaklık ve polarizasyon için oldukça hassas ölçümler yapılmış ve aslında ihmal edilebilir mertebede küçük ama tespit edilebilir anizotropiler gözlemlenmiştir (Spergel ve ark. 2003, Planck 2013). Yine de bu harita evrenin galaktik ölçekte izotropik olduğunu ortaya koymaktadır.

Son yıllarda astrofizik ve kozmoloji alanlarında yapılan bilimsel çalışmalar, evrenimizin tahmin edilenden daha büyük bir hızda genişlediğini doğrulamıştır. Evrenimizin artan bir hızla genişlediğine dair kanıtlara geniş ölçekli kozmik sistemlerden elde edilen bilgiler (Tegmark ve ark. 2004) ve Tip Ia süpernova araştırmalarından gelen veriler (Riess ve ark. 1998, Perlmutter ve ark. 1999, Tonry ve ark. 2003) örnek olarak gösterilebilir. Bunlara ek olarak, WMAP (Briddle ve ark. 2003) data analizlerinden elde edilen sonuçlar da ivmelenmeye kanıt olarak sayılırlar. Bilim insanları, deneysel verilerin ortaya çıkardığı bu gizemli genişleme durumunun altında yatan fiziksel süreci kozmolojinin temel problemi olarak görmeye başladılar. Bu ivmeli genişlemenin nedenini açıklamaya yönelik ileri sürülen iki temel yaklaşım vardır (Perlmutter ve ark. 1999, Adam ve ark. 1998):

- Evrenin baskın bir bileşeni olarak sayılan negatif basınçlı karanlık enerjinin varlığının öngörülmesi yaklaşımlardan bir tanesidir (Edmund ve ark. 2006, Kazuharu ve ark. 2012). Bazı bilim insanları evrenin genişleme hızına sebep olabilecek kozmolojik sabit ya da quintessence gibi karanlık enerji kaynaklarının olabileceğini düşünmüşlerdir (Padamanabhan 2003 ve Parker ve ark. 2003).
- GG teorisi ve ona alternatif fikirler olan modifiye edilmiş teorilerin kullanılması ise diğer yaklaşımdır (Shin'ichi ve ark. 2007, Thomas ve ark. 2010, Antonio ve Tsujikawa 2010).

Literatürde sunulan çalışmalara bakıldığında karanlık enerjinin, evrenin başlangıç döneminde şişmesine sebep olduğu ve geç dönem ivmelenme de dahil, evrenin daha sonraki süreçlerinde de dinamik bir rol oynadığı düşünülmektedir (Padamanabhan 2003, Parker ve ark. 2003, Edmund ve ark. 2006, Kazuharu ve ark. 2012). Karanlık enerjiyi oluşturduğuna inanılan muhtemel adaylara Quintessence, Chaplygin Gas, Phantom ve ΛCDM modelinde yer alan kozmolojik sabit örnek olarak verilebilir. Bunlar arasında üzerinde daha çok araştırma yapılan ve en çok öne çıkan ΛCDM modelidir.

Yakın zamanlarda WMAP'tan (WMAP 2012) elde edilen verilere göre evrendeki baryonik madde miktarı %4,6, soğuk karanlık madde miktarı %24 ve karanlık enerji miktarı da %71,4 olarak ölçülmüştür (bakınız Şekil 1.3).



Şekil 1.3. Evreni oluşturan bileşenler

Bu şekilden görüldüğü üzere evrenin çok büyük bir kısmı (%95,4) ΛCDM modeline göre soğuk karanlık madde ve karanlık enerjinin kombinasyonundan oluşmaktadır. Gözlemlenen ivmeli genişlemenin nedeni olduğu düşünülen ve kozmolojik prensip temeline dayanan standart ΛCDM modeline göre evren bir büyük patlama olayıyla oluşmuştur. Standart kozmolojiye giren ve Einstein'ın GG teorisini içeren varsayımlar (Bertschinger 2011) gözlemlerle karşılaştırıldığında, karanlık madde ve karanlık enerjinin varlığını gerektirir. Bu varsayımlar kısaca şöyle sıralanabilir;

- Serbest düşüşün evrenselliği,
- Lokal Lorentz değişmezliği,
- Üç uzamsal boyut (en azından elektro-zayıf ölçeğin altında),
- Enerji-momentum korunumu,
- Büyük ölçeklerde uzayın homojenliği ve izotropisi,
- Madde alanları, toz ve radyasyon varsayımı.

Kozmolojik sabit Λ başlangıçta Einstein tarafından kendi denkleminin sol tarafına aşağıda gösterildiği gibi geometrik bir terim olarak eklenmiştir (Einstein 1917).

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \, . \qquad (1.2)$$

Bu denklemde sırasıyla $R_{\mu\nu}$ Ricci tensörünü, $g_{\mu\nu}$ metrik tensörünü, R Ricci skalerini ve $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörünü ifade etmektedir. Einstein başlangıçta GG alan denklemini (dinamik bir yapıda olduğunu bilmeden) kozmolojik sabit terimi olmaksızın

yazmıştır. O dönemdeki bilim çevrelerine göre evrenin durağan olduğu anlayışı hâkimdi ve Einstein da buna inanıyordu. Daha sonra Einstein alan denklemlerinin genişleyen bir evren yapısına işaret ettiği gösterilince, hiçbir gözlemsel nedene dayanmadan Einstein kendi yazdığı alan denklemine 1917 yılında elle kozmolojik sabit terimini eklemiştir. Fakat sonrasında Edwin Huble (Huble 1929) tarafından galaksilerin hızlarının aralarındaki mesafeyle orantılı olduğu ve hiçbir şekilde rasgele olmadığı keşfedildi. Bu veriler ışığında evrenin kozmik olarak genişlediğine yönelik olarak kanıtlar da elde edilince, Einstein kendi denklemine yaptığı bu eklemeyi hayatının 'en büyük gafı' olarak değerlendirmiştir.

GG kuramının temelini oluşturan Einstein-Hilbert kütleçekim fikrine yönelik literatürde çok kapsamlı çalışmalar yapılmıştır (Starobinsky 1980, Barrow ve Ottewill 1983, Dobado ve Maroto 1995, Nojiri ve Odintsov 2004, Dvali ve ark. 2000, Cembranos 2006). Öte taraftan Einstein-Hilbert lagranjiyeninin genelleştirilmesine yönelik ikinci mertebeden eğrilik skaleri içeren araştırmalar da yapılmıştır (Sotiriou ve Faraoni 2010, Felice ve Tsujikawa 2010, Capozziello ve Laurentis 2011, Lobo 2009, Nojiri ve Odintsov 2011, Cruz-Dombriz ve Saez-Gomez 2012). Boehmer ve arkadaşları da alternatif bir yaklaşım formüle etmişlerdir (Boehmer ve Tamanini 2013, Boehmer ve ark. 2014). Eğrilik madde etkileşimi (kuplajı) ayrıca geniş bir şekilde ele alınmıştır (Allemandi ve ark. 2005, Bertolamiand ve ark. 2007, Harko ve ark. 2011, Harko ve Lobo, 2014, Harko ve ark. 2011, Haghani ve ark. 2013, Odintsov ve Gomez, 2013).

Einstein-Hilbert eylemindeki lagranjiyanın değiştirilmesine yönelik modifiye gravite teorilerinde Ricci skaleri R keyfi olarak yine Ricci skalerinin bir fonksiyonu olan $f(R)$ ile değiştirilir. Einstein-Hilbert eylemi şöyle yazılmaktadır:

$$S_{EH} = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,R\,. \tag{1.3}$$

Burada $k^2 = 8\pi G$ biçiminde tanımlanmasına ek olarak işlemlerde sadelik ve kolaylık sağlaması amacıyla $c = \hbar = 1$ birim seçimi kullanılmıştır. Yukarıda yazılan (1.3) numaralı denklemde aşağıdaki gibi bir modifikasyon yapılarak $f(R)$-gravite teorisi tanımlanır (Sotiriou ve Faraoni 2010):

$$S_{EH} = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\;f(R)\,. \tag{1.4}$$

Bilim insanlarının böyle bir modifikasyon fikrine yönelmelerinin başlıca iki nedeni vardır;

- Karanlık enerjiyi açıklamak için ortaya çıkan kozmolojik sabit fikrinin yaşadığı sorunların (kozmik çakışma ve ince yapı) aşılamayışı,
- Yapılan gözlemler sonucunda şimdiye kadar karanlık enerji parçacıklarının gözlemlenmemesi.

Bu doktora tez çalışmasında modifiye gravite çalışmaları çerçevesinde Einstein-Hilbert eylem integralinde R Ricci skaleri yerine, sırasıyla bir skaler alan ve ağırlığı 2 olan bir skaler yoğunluk alanı içerecek yeni bir $f(R)$ fonksiyonu yazılarak ve minimum eylem ilkesi yardımıyla modifiye edilmiş Einstein Alan Denklemleri (EAD) elde edilecek ve sonrasında Friedmann denklemlerinin yazılmasıyla belli bir çerçevede kozmolojik çıkarımlar yapılacaktır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bir önceki bölümde Evrenin durağan değil de dinamik bir davranış sergilemekte olduğunun anlaşılmasından hemen sonra GG denklemlerini modifiye etme çabalarının başladığından bahsedilmiştir. Bu çabaların öncülerinden olan Weyl, 1919 yılında, Einstein-Hilbert hareket denklemine yüksek mertebeden değişmezler ekleyerek GG alan denklemlerini modifiye etmiştir (Weyl 1919). Daha sonra, Eddington benzer bakış açısıyla GG denklemlerini modifiye çalışmalarına yeni bir katkı sunmuştur (Eddington 1923). Öte yandan modifikasyon fikri çerçevesinde çok farklı müdahaleler de yapılmıştır. Örneğin, kozmolojik sabit olarak bilinen Λ'ya eşdeğer bir skaler alanın kullanıldığı çeşitli modeller öne sürülmüştür. Bu bakış açıları hem evrenin başlangıç evresi olan şişmeyi, hem de evrenin geç zaman ivmelenme evresini kuramsal olarak açıklayabilmeyi amaçlamaktadır. Bunlardan bazıları fiziksel sebeplerden ötürü öne sürülürken, önemli bir kısmı ise fenomonolojik sebeplere dayanmaktadır (Ratra ve Peebles, 1988). Skaler alan modellerine örnek olarak gösterilebilecek fikirlerden bir tanesi de sadece kütleçekimi ile bağlanan zamanla değişen, negatif basınçlı ve uzamsal olarak dalgalanan bir enerji yoğunluğuna sahip quintessence modelidir (Caldwell ve ark. 1998). GG kuramını modifiye etmeye yönelik farklı ve ilginç olan teşebbüslerinden bazıları $f(R)$-gravite fikri üzerine inşa edilmiştir. Literatürde bir araştırma yapıldığında şimdiye kadar çeşitli formlarda $f(R)$-gravite teorilerinin öne sürülmüş olduğu görülmektedir (Nojiri ve Odintsov 2004).

Dinamik bir davranış sergileyen kozmosun değişmeli süreçleri incelendiğinde, üç önemli davranış değişimi safhasının ön plana çıktığı anlaşılmıştır (Weinberg 1972, Caldwell ve ark. 1998, Nojiri ve Odintsov 2004):

i. Evrenin başlangıç aşaması olan şişme (enflasyon) evresi,
ii. Genişleme durumunu betimleyen kesilim dönemi,
iii. Evrenin şu an içinde olduğu geç ivmelenme aşaması.

Evrenin özellikle geç dönem ivmeli genişleme dönemini açıklama çabasının yanı sıra diğer iki aşamayı da kuramsal olarak modelleyebilmek amacıyla çeşitli bakış açıları önerildiğini yukarıda vurgulamıştık. En önemli perspektiflerden olan $f(R)$-gravite fikri temelli teoriler evrenin gelişim evrelerini açıklamak amacıyla tanımlı belirli skaler alanlar içermektedirler (Nojiri ve Odintsov 2004). Böylece, kozmolojik sabitin kullanımı fikrine alternatif yeni ve farklı modellemeler ileri sürülebilmiştir (Bean 2002,

Sotirou 2009, Clifton ve ark. 2011, Pirinççioğlu ve Sert 2012, Faraoni 2014, Prinsen 2015). Bean yayınladığı bir çalışmasında evrenin geç dönem genişlemesine sebep olarak düşünülen dinamik karanlık enerjiyi bir skaler alan kullanarak modellemiştir (Bean 2002). Çalışmada minimal ve minimal olmayan skaler alan etkileşimleri göz önüne alınmış, sonrasında yapılan buna benzer araştırmalarla birlikte dinamik bir skaler alan kullanımı fikrinin önemi ve kozmolojik sabit fikrine alternatif olabileceği anlaşılmıştır (Thomas 2009, Timoty ve ark. 2011, Nurettin ve İlker 2012, Faraoni 2014, Prinsen 2015). 2009 yılında yayınlanan bir makalede, evrenin dinamik doğasını fizik yasalarıyla başarılı biçimde açıklayabilmek amacıyla sunulan mevcut $f(R)$-gravite modelleri ile birlikte GG teorisine yapılan modifiye çalışmaların da yeterli olmadığı ve yapılanların aslında basit sapmalar içerdiği bu nedenle bu fikirlerin ötesine geçmek zorunda olduğumuz ileri sürülmüştür (Sotirou 2009). Clifton ve arkadaşları, 2011 yılında sundukları bir çalışmada, modifiye edilmiş kütleçekim teorileri üzerine çok kapsamlı bir araştırma yapmışlardır (Clifton ve ark. 2011). Bu çalışmada ele alınan modeller arasında GG, Skaler-Tensör, Einstein-Aether, Bimetric, TeVeS, $f(R)$-gravite, genel yüksek mertebe, Horava-Lifschitz, Galileonlar ve hayalet kondensatlar fikirlerine ek olarak Kaluza-Klein, Randall-Sundrum ve DGP gibi ilave boyut veya boyutlar içeren modeller ve brane world teorisi yer almaktadır. Clifton ve arkadaşları altını çizerek zayıf etkileşiminden dolayı kütleçekim etkilerinin şimdiye kadar çok az anlaşıldığını ve gelecekte kütleçekim alanı konusunun bilim insanlarının çalışmalarının odak noktasını oluşturacağını vurgulamışlardır. Pirinççioğlu ve Sert, 2012 yılında, Robertson-Walker (RW) metriğini kullanarak skaler alan ve skaler yoğunluk çözümleri arasındaki farkları tartışmış ve bir post-Newton yaklaşımı kullanarak skaler yoğunluk alanı için göreli olmayan Hamilton denklemini yazmışlardır (Pirinççioğlu ve Sert 2012). Yazarlar bu çalışmada metrik tensörün determinantını betimleyen g'nin ağırlığını $W = +2$ seçerek bir skaler alan ve ağırlığı +1 olan bir skaler yoğunluk için Einstein-Hilbert eylemini göz önüne almışlardır. Pirinççioğlu ve Sert'in sundukları sonuçlara göre, skaler alanla karşılaştırıldığında skaler yoğunluğun hem Klein-Gordon hem de Friedmann denklemini etkilediği anlaşılmaktadır. Diğer yandan, kullanılan post-Newton yaklaşımı neticesinde skaler yoğunluk çözümünün hem Darwin terimini hem de kütleçekim ivmesini değiştirdiği görülmüş ve bu durumun Einstein kütleçekim fikri çerçevesindeki skaler alan çözümünü yaklaşık olarak 1.6 kat arttırdığı ifade edilmiştir (Pirinççioğlu ve

Sert 2012). 2014'te, Faraoni evrenin şimdiki genişlenme ivmesi için $f(R)$gravite teorilerini karanlık enerjiye bir alternatif olarak yeniden tanıtmıştır (Faraoni 2014). 2015'te, Prinsen modifiye edilmiş kütleçekim teorileri ve standart kozmoloji modellerinin birbirini tamamen dışlamak adına henüz yeterli kanıtlara sahip olmadığını ileri sürmüştür (Prinsen 2015).

Joyce ve çalışma arkadaşları, 2016 yılında yayınladıkları bir makalede, karanlık enerji ve modifiye edilmiş kütleçekim modellerini fenomonolojik ve gözlemsel farklılıkları ile birlikte inceleyerek, kozmoloji alanında karanlık enerji ve modifiye edilmiş kütleçekim modelleri olmak üzere iki önemli ve farklı kategorinin ortaya çıktığını belirtmiş ve bu iki bakış açısı arasındaki temel farkın da zayıf ve güçlü eşdeğerlik prensipleri sayesinde ortaya çıktığını ileri sürmüşlerdir (Joyce ve ark. 2016). Buna göre, GG alan denkleminin sağ tarafında bulunan stress-enerji tensörüne yapılan değişiklikler karanlık enerji modelleri kategorisinde, alan denkleminin sol tarafı olan geometri kısmına yapılan değişiklikler ise modifiye edilmiş kütleçekim teorileri olarak ele alınmalıdır (Joyce ve ark. 2016). Aynı çalışmada karanlık enerji kozmolojik sabitin yerini alırken, modifiye edilmiş kütleçekim durumunda ise yeni serbestlik derecelerinin ortaya çıktığı vurgulanmıştır. Sonrasında, 2016 yılında yayınlanan bir çalışmada Tian evrenin genişleme hızının nedenlerini tüm yönleriyle açıklayabilmek için karanlık enerji yerine GG çerçevesinde modifiye edilmiş kütleçekim teorilerinin kullanılması gerektiğini belirtmiştir (Tian 2016). Yazar, buna benzer fikirler arasında Lovelock teorisinin modifiye edilmesinin ve onun da ötesine geçebilecek teoriler olabileceğini göstermiştir. Tian, aynı çalışmada, Einstein'ın GG teorisine eklediği kozmolojik sabit terimi ekleyerek aslında dördüncü ve daha yüksek mertebeden gravitasyonel alanları temsil edebilecek $f(R)$-gravite teorilerinin türetilebileceğini gösterdiğini ortaya koymuştur (Tian 2016). Yakın zamanda basılan bir başka makalede, Souza hem GG alan denkleminin sol tarafına yapılan modifikasyonların hem de madde bölümüne yapılan değişikliklerin Einsten-Hilbert eyleminin yeni serbestlik dereceleri içermesi nedeniyle yeni madde olarak yorumlanacağını dolayısıyla bu iki fikrin aslında farksız olduğunu ileri sürmüştür (Souza 2018). Ayrıca, GG teorisi ile birleştirilmeye çalışılan kuantum kütleçekim fikri için efektif alan teorisini kullanan Souza GG teorisinde var olan tekillik problemini ortadan kaldırmak için tanımlanabilecek başarılı bir kuantum

kütleçekim teorisinin kızılötesi dalga boyundaki kuantum kütleçekim etkilerini açıklayarak başarılı olacağını ileri sürmüştür.

"Uzay-zaman maddeye nasıl hareket edeceğini söyler,
madde de uzay-zamana nasıl bükülecegini söyler!"
John Wheeler

3. MATERYAL VE METOT

Bu doktora tez çalışması teorik hesaplamalar içerdiğinden çalışmada herhangi bir materyal kullanılmamıştır. Diğer yandan, metrik tensör, Chriftoffel sembolleri, Ricci tensörü, Ricci skaleri ve rnerji-momentum tensörü gibi bazı temel nicelikler kuramsal materyal olarak değerlendirilebilirler.

3.1. Notasyon Hakkında

Bu tez çalışmasında tensörel ifadeler için indisler 0-3 aralığında değerler almaktadırlar. Burada, "0" zaman koordinatını temsil ederken "1", "2", ve "3" ise uzay koordinatlarına karşılık gelmektedir. Ayrıca, sadelik olması adına kuramsal hesaplamalarda $c = \hbar = 1$ biçimindeki doğal birim sistemi kullanılacaktır.

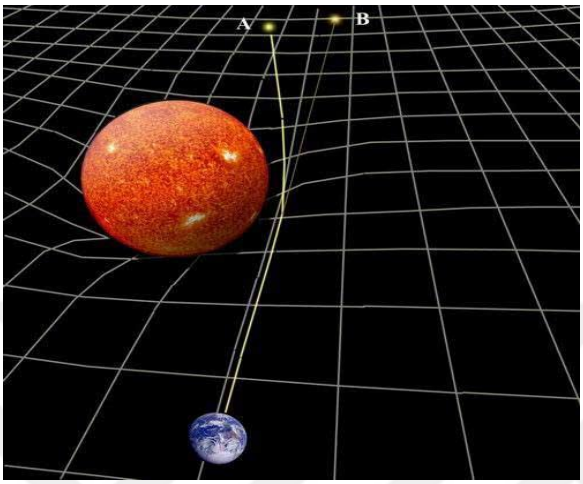
3.2. Metot Hakkında

Tez araştırması kapsamında literatürde yaygın olarak kullanılan kabul görmüş yöntemler takip edilecektir. Kullanılacak metodu ve aynı zamanda kuramsal materyalleri daha anlaşılır biçimde aktarabilmek adına burada bölümler halinde bir özet sunulacaktır.

3.2.1. Genel Görelilik Teorisi

GG teorisi evrendeki bütün hareket türlerinin görelilik temelli olması gerektiği fikri üzerine kurulmuştur (Einstein 1917). Einstein ÖG teorisini sunduktan iki yıl sonra 1907'de bu yeni teorinin Newton'un kütleçekimi fikri ile tam olarak uyuşmadığını fark etti. Zira, ÖG teorisi aslında sadece eylemsiz referans sistemlerinde geçerliydi. Bunun üzerine yaklaşık dokuz yıl boyunca kütleçekim etkilerini yeni teorisine eklemeye çalışmıştır. 1916 yılında, ÖG teorisini genelleştirerek GG teorisini bütün referans sistemleri için geçerli olacak biçimde matematiksel olarak formüle etmeyi başarmıştır. GG teorisi diferansiyel geometrik bir tanımlama getirmiş ve Newton'un bakış açısı ile karşılaştırıldığında daha kapsamlı olduğu anlaşılmıştır (Einstein 1917). Newton'un

fikrinin aksine, GG teorisine göre kütleçekimi bir kuvvet değil yalnızca uzay-zaman eğriliğinin bir sonucudur (Einstein 1917): kütleli bütün cisimler uzay-zamanı büker ve bükülmüş uzay-zamanda hareket eden tüm cisimler uzay-zamanın eğri dokusunda hareket ederler ve bunlara ışık da dahildir (bakınız Şekil 3.1):



Şekil 3.1. Işığın bükülmüş uzay-zamandaki yörüngesi

Gerçek konumu A noktası olan bir yıldız düz uzay-zaman fikrine göre B noktasındaymış gibi sanılır. Oysaki, güneşin büyük kütlesi sayesinde uzay-zamanda yarattığı eğrilik ışığın yörüngesini yani eğri uzay-zamanı takip ettiği yolu etkilemektedir yani yıldızın gerçek görüntüsü sapmaya uğramaktadır.

Einstein'ın GG teorisi

- Mach,
- Eşdeğerlik,
- Genel Kovaryanslık,

olmak üzere üç önemli temel prensip üzerine kurulmuştur (Einstein 1917). Şimdi bu prensipleri kısaca irdeleyelim.

3.2.2. Mach Prensibi

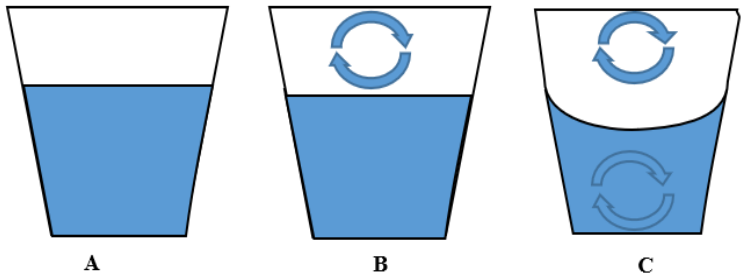
Filozof Ernst Mach'a atfen Einstein tarafından Mach prensibi ismi verilmiştir. Bu prensibe göre;

- Bir hareketin başka bir referans noktasına göre değerlendirmesi o hareketin yapıldığı gözlem çerçevesi dışında kalan evrendeki

diğer tüm madde dağılımının göz önünde bulundurulmasına bağlıdır,

- Kütleçekim etkileşiminden dolayı evrendeki tüm enerji-madde dağılımı lokal olarak bir yerdeki hareketi etkiler,
- Eğer uzay boş ise hareket de olamaz: bir cismin hareket edip etmediği ancak onu tespit edecek bir referans çerçevesi varlığında anlaşılabilir.

Buradaki durumlar bizi hareketin göreceli olduğu fikrine götürmektedir. Newton tarafından cisimlerin hareketini açıklamak için kullanılan su dolu bir kova örneği bu prensip kapsamında tekrar ele alınmıştır (bakınız Şekil 3.2):



Şekil 3.2. Kova ve su hareketsiz (A), Kova dönüyor su hareketsiz (B), Kova ve su ikisi de dönüyor (C).

Bu prensip öncesi yorumlamalara göre:

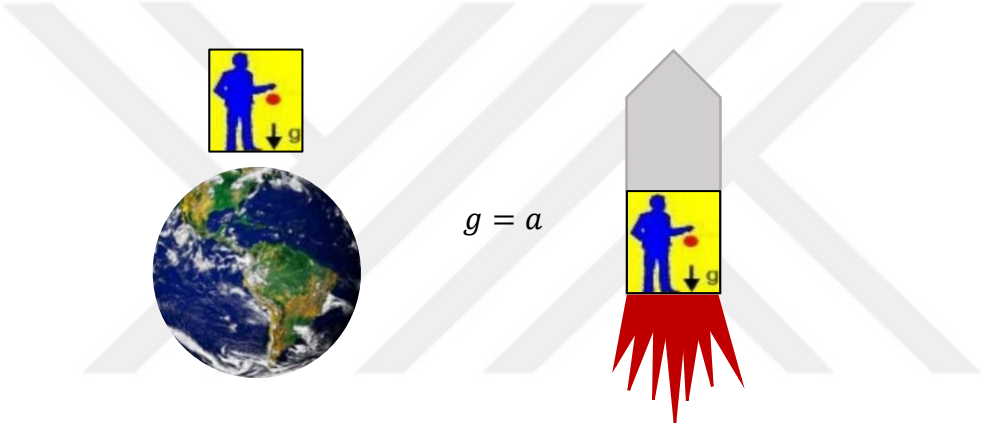
- A'da su yüzeyi düzdür, çünkü kova ve su henüz hareketsizdir.
- B'de sadece kova dönmeye başlıyor ve ilk birkaç saniye boyunca suyun yüzeyi hala düzdür.
- C'de ise artık kova ve içindeki su birlikte dönmeye başlıyor ve şekilden de anlaşılabileceği üzere su kovanın kenarlarına doğru yakınlaşır ve yüzeyinde bir çukurluk oluşturur.

C'de, tıpkı A'da olduğu gibi, belli bir zaman geçtikten sonra kova ve içindeki su aynı hareket döngüsüne gireceğinden aralarında bir hareket farkı kalmayacaktır. Yani, A ve C arasındaki tek fark aslında görüntüden ibarettir. Newton bu deneyde, mutlak uzayı referans alarak, kova içindeki suyun hareketini açıklamaya çalışmıştır. Ancak, Mach prensibinde mutlak uzay kavramı kabul edilmeyerek farklı bir açıklama öne sürülmüştür:

- Kovadaki su dışında evrendeki diğer tüm madde dağılımı kovanın etrafında dönseydi suda yine C'deki gibi çukurluk oluşacaktır,
- Evren sadece içi su dolu olan bir kovadan oluşmuş olsa dahi kovanın ya da içindeki suyun döndüğünü varsayamazdık,
- Tek başına bir nesnenin hareket edip etmediğini illeri sürmek anlamsızdır.

3.2.3. Eşdeğerlik İlkesi

Bu ilkeye göre bir cismin eylemsizlik kütlesi ile gravitasyonel kütlesi arasında bir fark yoktur (bakınız Şekil 3.3):



Şekil 3.3. İvmeli hareket ile gravitasyon etkisi altındaki hareket arasında fark yoktur.

İlkenin vurguladığı temel durumlar özetle şunlardır:

- Kütleçekimsel bir alandaki bütün fizik yasaları, ivmeli bir referans sistemindeki ile aynı eşdeğerliktedir,
- Kütleçekimsel bir alanda ivmelenen bir cismin yörüngesi eğri uzay-zamanda bir jeodezik çizer,
- Uzay-zamanda her nokta için uzay-zamanın lokal olarak düz görünmesini sağlayan genel bir koordinat değişikliği mevcuttur. Yani, matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, uzay-zaman serbest parçacıkların jeodezikleri boyunca hareket eder ve bu da dört boyutlu bir Lorentz manifoldu ile tanımlanmaktadır. Böylece, kütleçekimi uzay-zaman eğriliğinin bir sonucu haline gelir.

3.2.4. Genel Kovaryanslık Prensibi

Genel kovaryanslık prensibi temel olarak Einstein'ın GG teorisini genelleştirmek için kullandığı "*eylemsiz ya da eylemli bütün koordinat dönüşümleri altında fizik yasaları aynı kalmalıdır*" fikrine dayanmaktadır. Özetlemek gerekirse, bu prensibe göre, "*fizik yasaları incelendikleri koordinat çerçevesinden bağımsızdır*" ya da başka bir deyişle "*fizik yasaları tüm referans sistemlerinde aynı forma sahiptir*". Bu durum genel kovaryanslık prensibine göre fizik yasalarının neden tensörel bir formda ifade edildiğini açıklar.

Einstein alan denklemi kapalı formda şöyle yazılmaktadır (Einstein 1917):

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

Burada, $G_{\mu\nu}$ evrenin geometrik yapısını temsil ederken $T_{\mu\nu}$ ise evrendeki madde ve enerji dağılımını betimleyen enerji-momentum tensörüdür. Ayrıca, κ da bir orantı sabitidir. GG teorisinin matematiksel olarak ifade edildiği tensörel formunda yer alan $G_{\mu\nu}$ şu kısıtlamaları içermektedir (Revelles 2013):

- İki indise göre simetrik olmalıdır,
- İkinci mertebeden diferansiyel denklemleri sağlamak için lineer bir eğrilikte olmalıdır,
- Yalnızca metrik ve onun türevlerine bağlı olmalıdır,
- $\nabla_\mu G_{\mu\nu} = 0$ olmalıdır,
- Düz uzay-zaman için sadeleşmelidir,
- Dinamik bir teori olması ve Poisson denkleminin türetilebilmesi için metriğin ikinci türevlerini içermelidir.

3.2.5. Einstein Alan Denklemleri

Bölüm 3.2.1'de bahsedilen üç temel ilke çerçevesinde, GG teorisine göre kütleçekimin kaynağı olan madde ve enerji eşdeğer olup bunlar tek bir tensör (enerji-momentum tensörü) ile betimlenirler. Denklem (1.2)'de verilen GG alan denkleminin sağ tarafında yer alan enerji-momentum tensörünün, alan denkleminin sol kısmında yer alan geometrik niceliklerden dolayı uzay-zaman eğriliğinin bir sonucu olduğu

anlaşılmaktadır. Maddesel ve geometrik etkilerin birlikte ele alındığı toplam eylem şu biçimde yazılır;

$$S = S_{EH} + S_m \ . \tag{3.2}$$

GG alan denklemini kozmolojik sabit terimi olmadan elde etmek için S_{EH} ile temsil edilen Einstein-Hilbert eylemi şöyle yazılmaktadır

$$S_{EH} = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g}\, R. \tag{3.3}$$

Denklem (3.2)'deki S_m terimi madde eylemi olarak adlandırılmaktadır. Enerji-momentum tensörünü içermektedir ve minimum eylem ilkesi uygulanırken uygun biçimde tanımlanır. Denklem (3.3) te verilen tanım denklem (3.2)'de yerine yazıldığında

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g}\, R + S_m \tag{3.4}$$

biçiminde bir genel eylem integrali elde edilecektir. Bu integral minimum eylem ilkesinde kullanılarak hem vakum durumu ($S_m = 0$) hem de bir enerji-momentum tensörü varlığında ($S_m \neq 0$) EAD elde edilebilmektedir. Şimdi sırası ile bu durumlar için GG alan denklemlerini elde edelim.

Vakum durumu alan denklemini elde etmek için denklem (3.3)'te verilen eylem integralinin kontravaryant metrik tensör olan $g^{\mu\nu}$'ye göre varyasyonu alınacaktır. Bu bağlamda minimum eylem ilkesine göre,

$$\delta S_{EH} = 0 \tag{3.5}$$

olmaktadır. Einstein-Hilbert eylemi bu denklemde yerine yazıldığında

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2k^2} \int d^4x\, \delta(\sqrt{-g}\, R) \tag{3.4}$$

biçimindeki ifadeye ulaşılmaktadır. Burada yazılan $\delta(\sqrt{-g}\,R)$ ifadesi için çarpım durumundaki fonksiyonların varyasyonunun alınması kuralı uygulandığında ve sonuç denklem (3.5)'de yerine yazıldığında

$$\frac{1}{2k^2}\int d^4x\,(\sqrt{-g}\;\delta R+\delta\sqrt{-g}\;R)=0 \tag{3.7}$$

ifadesine ulaşılmaktadır. Burada birkaç basit matematiksel basamaktan sonra elde edilebilen $\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta^{\mu\nu}$ eşitliği[3] kullanılacaktır. Bununla beraber,

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{3.8}$$

biçiminde tanımlanan Ricci skalerinin varyasyonu aşağıdaki gibi alınmaktadır

$$\delta R=\;R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \tag{3.9}$$

Böylece, δR ile $\delta\sqrt{-g}$ ifadelerini denklem (3.7)'de yerlerine yazdığımızda şu sonuca ulaşılmaktadır

$$\frac{1}{2k^2}\int d^4x\left[\sqrt{-g}\;\left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta^{\mu\nu}R\right]=0. \tag{3.10}$$

Bu denklemde karşımıza çıkan $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ teriminin kısmi integrasyon işlemi sonrasında elde edilen 4-boyutlu hacim integralinin Gauss teoremi yardımıyla 3-boyutlu hiper-yüzey integraline indirgenmesi ve yüzeyin sonsuza götürülmesiyle genel sonuca bir katkı vermeyeceği görülmektedir. Dolayısıyla, denklem (3.10) aşağıda gösterildiği gibi yeniden düzenlenerek yazılabilmektedir:

$$\frac{1}{2k^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\delta g^{\mu\nu}=0\;. \tag{3.11}$$

[3] *Bu ifade tezin dördüncü bölümünde ayrıntılı biçimde irdelenecektir*.

Burada yazılan integralin sıfır olabilmesi için köşeli parantez içerisinde yazılan kısmın sıfır olması gerektiği aşikardır. Yani

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R = 0 \tag{3.12}$$

olmalıdır. Bu sonuç vakum durumu için EAD olarak bilinmektedir. Diğer taraftan enerji-madde varlığındaki denklemi de elde etmek için $S_m \neq 0$ durumunun göz önüne alınması gerekmektedir. Bunun için denklem (3.11)'in biçimine bakılarak uygun bir tanımlama yapılmalıdır ve bu gereksinim de bizi $\delta g^{\mu v}$ çarpanına yönlendirmektedir. Denklem (3.2)'de yazılan toplam eylem integraline kontravaryant biçimli metrik tensör olan $g^{\mu v}$'ye göre varyasyon ilkesi uygulandığında

$$\delta S = \delta S_{EH} + \delta S_m \tag{3.13}$$

olması gerektiği anlaşılmaktadır. Böylece, minimum eylem ilkesine göre

$$\delta S_{EH} + \delta S_m = 0 \tag{3.14}$$

sonucuna ulaşılır. Vakum durumu tartışılırken δS_{EH} terimini zaten hesaplanmış ve denklem (3.11)'de sunulmuştur. Denklem (3.14)'te yazılan S_m terimi ise

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m \tag{3.15}$$

şeklinde verilir. Buradaki $\mathcal{L}_m$ çarpanı maddesel lagranjiyen yoğunluğu olarak bilinmektedir. Denklem (3.15) kontravaryant biçimli metrik tensör olan $g^{\mu v}$'ye göre varyasyon alma işlemine tabi tutulduğunda,

$$\delta S_m = \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu v}} \delta g^{\mu v} \tag{3.16}$$

ifadesi elde edilmektedir. Bu denklem biraz düzenlendiğinde

$$\delta S_m = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{\delta(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m)}{\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu} \tag{3.17}$$

biçiminde yazılabilmektedir. Bu ifade denklem (3.11)'de verilen sonuçla birlikte denklem (3.14)'te kullanıldığında

$$\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\delta g^{\mu\nu}+\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{\delta(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m)}{\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu}=0 \tag{3.18}$$

eşitliğine ulaşılmaktadır. Düzenlenme işlemine devam edildiğinde öncelikle

$$\frac{1}{2k^2}(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)+\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}=0 \tag{3.19}$$

elde edilir ve bu ifade de bize

$$(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)=-2\frac{k^2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{3.20}$$

olduğunu söylemektedir. Öte taraftan, enerji-momentum tensörü için sonuçlarımıza göre uygun biçimli olan

$$T_{\mu\nu}=-2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{3.21}$$

tanımı yapılabilir. Bu tanımlama ile birlikte denklem (3.20)

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=k^2T_{\mu\nu} \tag{3.22}$$

halini almaktadır. Bu sonuç enerji-madde katkılarını içeren fakat kozmoloji sabit terimini içermeyen EAD olarak bilinmektedir.

3.2.6. Genişleyen Evren ve Mükemmel Akışkan İçin Enerji-Momentum Tensörü

Kozmolojik prensibe göre evrenin büyük ölçeklerde homojen ve izotropik olduğu önceki bölümde aktarılmıştı. Evrenin içinde olduğu genişleme evresini en başarılı biçimde açıklayan modelleme Friedmann-Robertson-Walker[4] (FRW) metriğine dayanmaktadır. Bu bölümde EAD kullanılarak kozmoloji alanında büyük önem arz eden Friedmann denklemleri elde edilecektir. Bunun için $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu}$ biçiminde Einstein tensörü tanımının kullanılmasıyla EAD şu formda yazılır

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \, . \tag{3.23}$$

Mükemmel (ya da kusursuz) akışkan genel olarak şu enerji-momentum tensörü ile betimlenmektedir

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}. \tag{3.24}$$

Bu denklemde ρ enerji yoğunluğunu p ise basıncı temsil etmektedir. U_μ ise dörtlü hız vektörü olup aşağıdaki gibi seçilebilmektedir

$$U_\mu = (1, 0, 0, 0). \tag{3.25}$$

Sonuç olarak, denklem (3.24)'te yazılan ve mükemmel akışkan durumunu temsil eden enerji-momentum tensörü matris formunda yeniden yazıldığında şu sonuca ulaşılmaktadır

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

[4] *Bu metrik tezin dördüncü bölümünde ayrıntılı biçimde ele alınacaktır.*

Bu aşamada FRW metriği kullanılarak Friedmann denklemi elde edilebilmektedir. Sadelik olması adına EAD denkleminin

$$G_{\mu v} = 8\pi G T_{\mu v} \tag{3.27}$$

biçimindeki kozmolojik sabit terimi olmadan yazılan durumu kullanılabilir. Bu denklemin 00 (ya da zaman-zaman) bileşeni kullanıldığında birinci Friedmann denklemi olarak ifade edilmektedir:

$$G_{00} = 8\pi G T_{00} \tag{3.28}$$

Ya da daha açık biçimde yani düz FRW metriğinin (yani eğrilik parametresinin sıfır alındığı durum) ve mükemmel akışkan enerji-momentum tensörünün kullanıldığı durum ışığında

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{3.29}$$

olacaktır. Buradaki "." işareti zamana göre bir defa türevi temsil etmektedir. İkinci Friedmann denklemi için (3.27) alan denkleminin 11, 22 ve 33 (yani uzay-uzay) bileşenleri kullanıldığında FRW metriğinin özelliğinden dolayı 3 bileşen bizi tek sonuca götürmektedir:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{3.30}$$

Elden edilen (3.29) ve (3.30) denklemleri kozmolojik bakış açısına göre bizi evrenin homojen ve izotropik özelliklerinin zamanla değişmediği sonucuna götürmektedir. Ancak, ölçek faktörü olan fonksiyonun[5] zamana bağlı olarak değiştiğine dikkat edilmelidir ki bu fonksiyon evrenin genişlediğine işaret etmektedir. Yani; $\dot{a}$ fonksiyonu evrenin genişleme hızı hakkında $\ddot{a}$ ise evrenin ivmelenmesi hakkında bilgiler içermektedir. Friedmann denklemlerinde Hubble genişleme parametresi ve durum

[5] Burada *a(t)* fonksiyonu kastedilmektedir.

denklemi parametresi tanımlarının yapılması literatürde yaygın olarak takip edilen bir yöntemdir. Bu iki önemli kozmolojik parametre genel olarak şöyle tanımlanmaktadır:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \tag{3.31}$$

$$p = w\rho. \tag{3.32}$$

Birinci ve ikinci Friedmann denklemlerinin birlikte kullanılmasıyla evrenin madde-enerji korunumunu betimleyen şu matematiksel sonuca ulaşılmaktadır:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \tag{3.33}$$

Dolayısıyla bu denklemden

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{3}{a}(\rho + p)\frac{da}{dt} \tag{3.34}$$

olduğu anlaşılmaktadır. Elde edilen bu denklem literatürde süreklilik denklemi olarak da adlandırılmaktadır. Ayrıca,

$$\nabla_\mu T_0^\mu = 0 \tag{3.35}$$

biçimindeki enerji-momentum tensörünün kullanıldığı korunum denkleminden de süreklilik denklemine ulaşmak mümkündür. Denklem (3.35)'den

$$\partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\mu\beta}^\mu T_0^\beta - \Gamma_{\mu 0}^\beta T_\beta^\mu = 0 \tag{3.36}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuçta bizi aşağıdaki bağıntıya yönlendirecektir:

$$-\partial_0\rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0\,. \tag{3.37}$$

Burada, $\partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ olduğunu yani zamana göre türev almaya işaret ettiğini hatırlatmakta fayda vardır. Süreklilik denkleminin çözümünden enerji yoğunluğu ve ölçek faktörü arasındaki ilişki genel olarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} . \tag{3.38}$$

Şimdi evrenin ivmelenme süreçleri hakkında bilgiler veren ikinci Friedmann denklemini biraz daha yakından inceleyelim. Bu denklem evrenin geçirdiği temel evrelerin yanı sıra birçok ara durum ve sonuçlara da işaret etmektedir: Kozmoloji alanında büyük önem taşıyan durum denklemi parametresi olan w'nın bazı değerleri kozmolojik yorumlamalar bakımında ön plana çıkmaktadır:

- $w \geq 1$ (ultra-göreli madde),
- $w = \frac{1}{3}$ (radyasyon ya da ışınım),
- $w = 0$ (tozumsu ya da basınçsız madde),
- $w < -1$ (Phantom tipi karanlık enerji),
- $w = -1$ (vakum ya da kozmolojik sabit davranışı),
- $-1 < w < -\frac{1}{3}$ (quintessence tipi karanlık enerji).

Özellikle son dönemlerde önemi daha da artan geç ivmelenme döneminin gizemi evrenin evrimsel davranış sürecinde üç önemli ve aynı zamanda temel duruma odaklanmaya yönlendirmektedir:

A) Madde baskın evre (yani $w = 0$ durumu),

B) Radyasyon evresi (yani $w = \frac{1}{3}$ durumu),

C) Vakum evresi (yani $w = -1$ durumu).

Şimdi bu durumları sırasıyla biraz daha ayrıntılı irdeleyelim.

3.2.7. Maddenin baskın olduğu dönem

Bu evre gaz ya da göreli olmayan dönem olarak da değerlendirilmektedir. Bu kabullenmenin temel nedeni madde parçacıklarının sahip olduğu kinetik enerjiler durgunken sahip oldukları enerjiye kıyasla ihmal edilebilir düzeydedir. Süreklilik denkleminde durum denklemi parametresinin $w = 0$ değeri yerine yazıldığında $\rho = \frac{1}{a^3}$

çözümü elde edilmektedir[6]. Dolayısıyla ivmelenme aşağıdaki gibi bir denklemle temsil edilmektedir:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = -\frac{4G\pi}{3}\frac{1}{a^3}. \tag{3.39}$$

Dikkat edildiğinde $\ddot{a} < 0$ olduğu yani evrenin madde baskın dönemde yavaşlayan bir genişlemeye sahip olduğu anlaşılmaktadır. Sonuç olarak, Friedmann denklemleri bizi kozmik ölçek çarpanı olarak bilinen $a(t)$ fonksiyonunun

$$a(t) = a_0(\frac{t}{t_0})^{2/3} \tag{3.40}$$

biçimindeki çözümüne götürmektedir. Burada, t_0 evrenin şu anki yaşını ve a_0 ise görünen evrenin yarıçapını temsil etmektedir.

3.2.8. Radyasyonun baskın olduğu dönem

Bu dönem göreli madde baskın evre olarak da değerlendirilmektedir. Bu farklı değerlendirmenin başlıca sebebi madde parçacıklarının[7] durgunken sahip oldukları enerjinin hareketli iken sahip oldukları kinetik enerjiye kıyasla ihmal edilebilir düzeyde olmasıdır. Buna göre durum denklemi parametresinin $w = \frac{1}{3}$ değeri ve süreklilik denklemi bizi enerji yoğunluğunun $\rho = \frac{1}{a^4}$ çözümüne ulaştırmaktadır[8]. Diğer yandan, ivmelenme ise şu ifadeyle betimlenmektedir:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3}\rho = -\frac{8\pi G}{3}\frac{1}{a^4}. \tag{3.41}$$

Yine $\ddot{a} < 0$ olduğundan radyasyonun baskın olduğu dönemde de evrenin yavaşlayan bir genişleme davranışı sergilediği sonucu çıkmaktadır. Radyasyon evresi için Friedmann denklemleri ile birlikte süreklilik denkleminden

[6] Burada sadelik olması açısından integral sabiti olan ve aynı zamanda enerji yoğunluğunun günümüz değeri olarak yorumlanan ρ_0 çarpanı için $\rho_0 = 1$ seçimi yapılmıştır.
[7] Nötrinolar gibi bazı parçacıklar bunlara örnek gösterilebilir.
[8] Burada yine $\rho_0 = 1$ seçimi kullanılmıştır.

$$a(t) = a_e(\frac{t}{t_e})^{1/2} \tag{3.42}$$

sonucu elde edilmektedir. Burada, $t_e \approx 10^5$ olup madde ve radyasyon arasındaki zaman dengesini temsil etmektedir. Ayrıca, ve a_e ile a_0 arasındaki ilişki ise şu şekilde ifade edilmektedir:

$$a_e = \frac{a_0}{1100}\,. \tag{3.43}$$

3.2.9. Vakumun baskın olduğu dönem

Bu evre her ne kadar erken dönem enflasyon evresini temsil etse de evrenin geç dönem şişme (ivmeli hacim kazanma) dönemi için de kullanılmaktadır. Bu durumu betimleyen $w = -1$ değeri kullanıldığında vakum dönemi çözümü ρ = 1 olacak şekilde elde edilmektedir. Diğer yandan, ivmelenme ise şu şekilde bir denklem ile betimlenir:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho = sabit \tag{3.44}$$

Bu durum için $\ddot{a} > 0$ olduğundan evrenin hızlanan bir genişleme sürecine girdiği ortaya çıkmaktadır[9]. Vakum evresi için Friedmann denklemleri ile birlikte süreklilik denkleminin göz önüne alınması

$$a(t) \propto e^{H_0 t} \tag{3.45}$$

sonucuna ulaşılmasını sağlamaktadır. Bu denklemde, H_0 Hubble sabiti olarak kullanılmıştır.

3.2.10. Skaler Alan

Skaler alan kavramı modern kozmolojide genellikle uzay-aman dokusundaki zamana bağlı değişim bilgisini ifade etmek için kullanılmaktadır. Kütle, enerji yoğunluğu, enerji akısı, momentum yoğunluğu ve stres gibi nicelikler belirli bir skaler

[9] Burada evrenin ivmelenmesi kozmolojik sabit tarafından sağlanmaktadır.

alan dağılımında kullanılan en önemli kavramlar olarak sayılabilir. Skaler alan kavramı tarihsel olarak ilk kez 1938 yılında Dirac tarafından ortaya atılmıştır. Öte yandan, EAD'de karşımıza çıkan kozmolojik sabit Λ'nın fiziksel karşılığı olarak da değerlendirilen karanlık enerjiyi açıklamak için kullanılan skaler alan kavramı kozmolojik betimlemelerde klasik alan teorisi olarak şimdiye kadar çoğu kez kullanılmıştır[10]. Bununla birlikte, Jordan-Brans-Dicke skaler-tensör teorisi, $f(R)$-gravite teorileri ve MOND teorisi gibi birçok modifiye kütleçekim teorisi de skaler alan temeline dayanmaktadır (Joyce ve ark. 2016, Tian 2016). Farklı bir bakış açısında skaler alanın kuantizasyonu temeline dayanan yöntem hem kuantum alan teorisi hem de standart modeldeki Higgs alanı için de kullanılmaktadır. GG teorisi ile kuantum alan teorisini birleştirmeye yönelik çabaların nihai hedefi olan büyük birleşme teorisi de yine bir vakum skaler alan teorisi temeli üzerine kurulmaya çalışılmaktadır. Ancak, bu birleştirme çalışmalarının önündeki en büyük engel kozmolojik sabitin karşılaştığı problemlerdir (Weinberg 1972). Kozmolojik sabitin Planck ölçeği ile karşılaştırıldığında çok küçük olması ve bundan dolayı renormalize edilemeyişi birleşmenin önündeki mevcut en büyük problem olarak görülmektedir[11] (Weinberg 1972).

3.2.11. Skaler Yoğunluk

Skaler bir nicelik bütün koordinat dönüşümleri altında değişmezdir:

$$\phi'(x') = \phi(x). \tag{3.46}$$

Diğer yandan, dört boyutta hacim elemanı genel olarak koordinat dönüşümleri altında,

$$d^4x = \left|\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}\right| d^4x' \tag{3.47}$$

biçiminde değişmektedir. Bu denklemi J dönüşüm Jakobiyeni tanımı yardımıyla

$$d^4x = Jd^4x' \tag{3.48}$$

[10] Tezin Giriş bölümünde ayrıntılı biçimde kaynaklarıyla birlikte bahsedilmiştir.
[11] Bu problem literatürde meşhur "kozmolojik sabit problemi" olarak bilinmektedir.

formunda yeniden yazmak mümkündür. Diğer yandan, ters dönüşüm durumu için Jakobiyen

$$d^4x' = J^{-1}d^4x \tag{3.49}$$

denklemiyle betimlenmektedir. Buradaki d^4x ifadesi ağırlığı[12] $W = -1$ olan bir skaler yoğunluğa sahiptir.

Benzer şekilde metrik tensör için de bir dönüşüm kuralı uygulanmalıdır. Bu bağlamda, metrik tensörün determinantı g aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$g(x) = detg_{\mu\nu}(x). \tag{3.50}$$

Metrik tensör genel dönüşüm kuralları altında

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^p}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}g_{p\sigma}(x) \tag{3.51}$$

biçiminde dönüşmektedir. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafının determinantını aldığımızda

$$\det g'_{\mu\nu}(x') = \det\left(\frac{\partial x^p}{\partial x'^{\mu}}\right)\det\left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\right)detg_{p\sigma}(x) \tag{3.52}$$

olması gerektiği anlaşılmaktadır. İlgili işlem yapılırken karşılaşılan matematiksel basamakta $\det(ABC) = (detA)(detB)(detC)$ özelliği kullanılmıştır. Böylece,

$$g'(x') = J^2 g(x) \tag{3.53}$$

sonucu elde edilecektir. Buradaki, J^2 terimi $g(x)$'in bir skaler yoğunluk olmasına yol açmaktadır. Dikkat edildiğinde bu denklemdeki $g(x)$ ağırlığı 2 olan (yani $W = 2$) bir skaler yoğunluk gibi davranmaktadır.

[12] Literatürde *weight* olarak bilinmektedir.

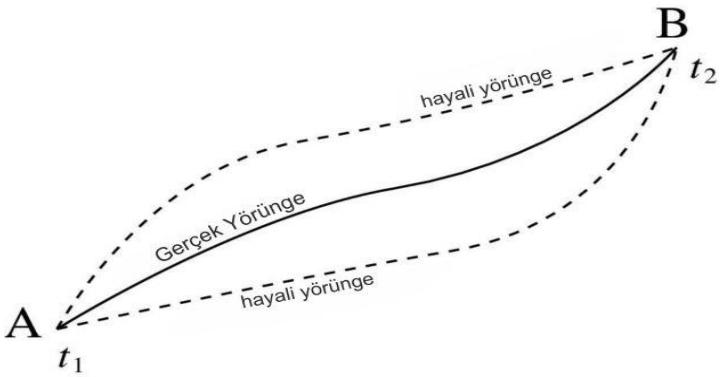
Ağırlığı W ile betimlenen herhangi bir tensör yoğunluğu normal bir tensör ile $g^{-W/2}$ faktörünün çarpımı olarak ifade edilebilir (Weinberg 1972). Çalışmamızda Ω niceliği $W = 2$ olan bir skaler yoğunluk olarak ele alındığından normal bir skaler elde etmek için

$$\phi = \frac{\Omega}{g} \tag{3.54}$$

ifadesinin kullanılması gerekmektedir. Netice olarak hem Ω'nın hem de g'nin ağırlığı $W = 2$ olan bir skaler yoğunluk davranışına sahip olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla (3.54) ifadesi normal bir skaleri ifade etmektedir.

3.2.12. Lagrange Hareket Denklemi

Lagranjiyen dinamiği özellikle modern kozmolojide skaler alanları betimlemek için çok yaygın kullanılmaktadır. Klasik mekanikte ise lagranjiyen eşitliği hareket denklemlerinden elde edilebilmektedir. Minimum eylem ilkesine dayanan bu eşitlik Euler-Langrange eşitliği olarak da bilinmektedir. Bu bölümde önce klasik mekanikteki bir parçacık sistemi için hareket denklemi irdelenecek, daha sonra da klasik alan teorisi bakış açısı kullanılarak alan etkileşimli Langrange denklemi elde edilecektir.



Şekil 3.4. Bir parçacığın A ve B noktaları arasındaki yörünge eğrisi

Şekilde (3.4)'te gösterildiği gibi A ve B noktaları arasında bir parçacığın izleyebileceği sonsuz sayıda yörünge mevcuttur[13], ancak parçacığın hareketi esnasında

[13] Şekilde temsili olarak parçacığın sadece iki hayali yörüngesi verilmiştir. Bilindiği üzere, teorik olarak iki nokta arasında bir parçacığın izleyebileceği sonsuz sayıda yörünge olasılığı mevcuttur.

bunlardan bir tanesi (eylemin minimize olduğu yörünge) gerçekleşecektir. Parçacığın, t_1 ile t_2 zamanları aralığında, A noktasından B noktasına izlediği yörünge hareketi aşağıdaki şekilde eylem itegrali ile formüle edilebilir:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \tag{3.55}$$

Burada, L sistemin Langrange fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır ve sistemin davranışı yani özellikleri hakkında bilgiler içermektedir. Langrange fonksiyonu klasik mekanikten de bilindiği üzere parçacıkların toplam kinetik ve toplam potansiyel enerjileri arasındaki farka eşittir. N tane ayrık noktasal parçacıktan oluşan bir sistemi betimleyen lagranjiyen tüm hızlar ve koordinatlar üzerinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L = T(\dot{q}_i) - V(q_i). \tag{3.56}$$

Yukarıda yazılan ifadede karşımıza çıkan $\dot{q}_i$ genelleştirilmiş hızlar ve q_i de genelleştirilmiş koordinatlar olarak bilinmekte olup bunlar birbirinden bağımsız parametrelerdir. Minimum eylem ilkesine göre sistemin eylem integralinin varyasyonu için $\delta S = 0$ olması gerekmektedir. Zira, sistemin ekstremum noktalarındaki değişimi sabittir. Lagranjiyen burada sadece $\dot{q}_i$ ve q_i'ye bağlı olarak da yazılabilir. Buna göre, (3.55) denklemini varyasyon alma işlemine tabi tutarsak,

$$\delta S = \delta(\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_i\,, q_i\,) dt) \tag{3.57}$$

olmalıdır. Minimum eylem ilkesi yardımıyla da

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L(\dot{q}_i, q_i\,) dt = 0 \tag{3.58}$$

sonucu elde edilecektir. Varyasyon alma işlemi bir basamak öteye götürüldüğünde

$$\int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i) dt = 0 \tag{3.59}$$

eşitliği elde edilmektedir. Burada, $\frac{\partial q_i}{\partial t} = \dot{q}_i$ olduğundan

$$\int_{t_1}^{t_2}(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial t}\delta q_i)dt = 0 \tag{3.60}$$

yazılabilir. Kısmi integrasyon yöntemi ile bu denklemde parantez içinde yazılan ikinci terim şu biçimde yeniden ifade edilebilmektedir

$$\int_{t_1}^{t_2}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial t}\delta q_i)dt = -\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\,\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{3.61}$$

Bu denklemin sağ tarafındaki ikinci terim yüzey terimi olduğundan yüzeyin sonsuza götürülmesiyle Gauss yasasından toplam akı sıfıra eşit elde edileceğinden etkisiz kalacaktır. Dolayısıyla (3.61) denklemini (3.60)'ta yerine yazdığımızda,

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\,\delta q_i dt = 0 \tag{3.62}$$

olur. Matematiksel düzenlemeler yapıldığında bu denklem

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\right)\delta q_i dt = 0 \tag{3.63}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Sonuç olarak bu eşitliğin sağlanabilmesi için büyük parantez içinde verilen kısım sıfıra eşit olmalıdır, yani literatürde Euler-Langrange denklemi olarak şu sonuca ulaşılır:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = 0. \tag{3.64}$$

Denklem (3.56)'da verilen Lagranjiyen tanımı daha açık bir şekilde yeniden yazılabilir. Bir *V* potansiyeli içinde *m* kütleli *N* tane noktasal parçacıktan oluşan bir sistemin toplam enerjisi, genelleştirilmiş hızlar ve koordinatlar üzerinden,

$$L = \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i{}^2 - V(q_i) \tag{3.65}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu tanım bizi Euler-Langrange denkleminde kullanılmak üzere

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \tag{3.66}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = m_i \ddot{q}_\iota \tag{3.67}$$

sonuçlarına götürecektir. Dolayısıyla sistemin hareket denklemi

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i} = m_i \ddot{q}_\iota \tag{3.68}$$

biçiminde elde edilir. Burada bu sonucun Newton'un ikinci yasasının matematiksel formu olan $F = ma$ denkleminin farklı biçimi olduğunu vurgulamakta fayda vardır.

Şimdi klasik alan teorisini kullanarak Euler-Langrange denklemini elde edelim. ϕ dört-boyutlu uzay-zamanda bir skaler alan olmak üzere aşağıdaki gibi yazılan eylem integraline odaklanalım

$$S = \int dtdxdydz\, \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi\right). \tag{3.69}$$

Burada, $\mathcal{L}$ lagranjiyen yoğunluğu olup $\partial_\nu \phi$ ile ϕ'ye bağlıdır. Dört boyutlu Minkowski uzay-zamanı metriği Lorentz dönüşümleri altında değişmez olduğundan, S eylemi integrali de değişmez olmalıdır. Ayrıca, hareket denklemi enerji boyutunda olması gerektiği için lagranjiyen ve onun yoğunluğu arasında şöyle bir ilişki vardır:

$$L = \int dxdydz\, \mathcal{L}. \tag{3.70}$$

Denklem (3.69)'da sunulan ifadeyi yeniden şu şekilde yazmak mümkündür:

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{3.71}$$

Bu aşamada, minimum eylem ilkesinde kullanılmak üzere bu ifade varyasyon alma işlemine tabi tutulursa,

$$\delta S = 0 \tag{3.72}$$

olması gerekmektedir. Matematiksel işlemleri bir adım öteye daha götürecek olursak

$$\int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\mu \phi}\delta(\partial_\mu \phi)\right] = 0 \tag{3.73}$$

yazılabilir. Bu denklemde, $\delta(\partial_\mu \phi)$ ifadesi türev operatörleri yer değiştirebildiğinden dolayı $\partial_\mu(\delta\phi)$ olarak da yazılabilir. Böylece,

$$\int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\mu \phi}\, \partial_\mu(\delta\phi)\right] = 0 \tag{3.74}$$

olacaktır. Parantez içerisinde yer alan ikinci terime kısmi integrasyon uygulanıp Gauss yasası kullanıldığında ve elde edilen denklem yeniden düzenlendiğinde,

$$\int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\mu \phi}\, \delta\phi\right] = 0 \tag{3.75}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\mu \phi} = 0 \tag{3.76}$$

biçiminde skaler alan etkileşimli Euler-Langrange denklemi elde edilir.

3.2.13. Klein-Gordon Denklemi

Dört-boyutlu bir uzay-zaman çerçevesinde kütleli reel bir skaler alan için Lorentz dönüşümü altında değişmez kalan bir lagranjiyen

$$L = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\,\partial^{\mu}\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.77}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu tanımda yer alan $\partial^{\mu}\phi$ ifadesi kontravaryant metrik tensör ile aşağıdaki gibi yazılabilmektedir

$$g^{\mu v}\,\partial_v\phi = \partial^{\mu}\phi. \tag{3.78}$$

Bu ifade yerine yazıldığında

$$L = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi g^{\mu v}\,\partial_v\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.79}$$

sonucu elde edilmektedir. Şimdi de bu lagranjiyeni daha önce bulduğumuz skaler alan etkileşimli Euler-Langrange denkleminde yerine yazalım:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi. \tag{3.80}$$

Böylece,

$$\partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_{\mu}\phi} = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\phi + \partial^{\mu}\phi) = \partial_{\mu}\,\partial^{\mu}\phi \tag{3.81}$$

sonucunu elde ederiz. Daha önce elde edilen ifadelerle birlikte

$$\partial_{\mu}\,\partial^{\mu}\phi + m^2\phi = 0 \tag{3.82}$$

şeklinde yazılan Klein-Gordon (KG) denklemine ulaşılır. Buradaki $\partial^2 = \partial_{\mu}\,\partial^{\mu}$ biçiminde tanımlan d'Alembert operatörü açık halde

$$\partial^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2} - \nabla^2 \tag{3.83}$$

biçiminde yazılmaktadır. Böylece, Klein-Gordon denkleminin son hali

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0 \qquad (3.84)$$

şeklinde olacaktır.

"Bilim gidebildiği kadar ilerlediğinde, aklın doğaya vermesi gerektiğinden fazlasını doğadan aldığını anladık. Bilinmeyenin kıyılarında acayip ayak izleri bulduk. Bu ayak izlerinin kökenini açıklayabilmek için birbiri ardı sıra sağlam teoriler kurduk. Ve sonunda bu ayak izini bırakan canlıyı bulduk. O da ne? Bu iz bize ait!

Arthur Eddington

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Kozmolojik Çıkarımlar İçin Kullanılacak Metrik

Üç boyutlu düz Öklid uzayında iki nokta arasındaki mesafe bilindiği üzere

$$ds^2 = (dx \quad dy \quad dz)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\ dy\\ dz\end{pmatrix} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4.1}$$

çizgi-elemanı ile temsil edilmektedir. Buradaki

$$\Theta = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

matrisi Öklid metriğinin matris biçimi olarak bilinmektedir. Burada tanımlanan ds^2 çizgi-elemanı koordinat dönüşümleri altında değişmez kalan bir niceliktir. Einstein'in ÖG teorisinden sonra Minkowski muazzam bir sezgiyle geliştirdiği (ya da genelleştirdiği) ve kendi adıyla anılan bir metrik tanımladı. Artık, iki uzay-zaman noktası arasındaki mesafe dört boyutlu uzay-zamanda Minkowski metriği ile verilmektedir:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (dt \quad dx \quad dy \quad dz)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\ dx\\ dy\\ dz\end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Buradaki ds^2 çizgi-elemanı da yine Lorentz dönüşümleri altında değişmeyen bir niceliktir.

GG'de artık uzay-zaman düz olmak zorunda olmadığından bir metrik genel olarak şöyle tanımlanır;

$$ds^2 = g_{\mu v} dx^{\mu} dx^{v}. \tag{4.4}$$

Kozmolojide en iyi çalışan model olarak bilinen FRW metrik tensörü diagonal[14] yapıdadır. Yani, $\mu \neq v$ ise $g_{\mu v} = 0$ olur ve $x^{\mu} = x^0, x^1, x^2, x^3$ şeklinde seçilir. Çalışmamızda da evrenin genişlemesini başarılı olarak tanımlayabilen FRW metriği kullanılacaktır. Bu metrik evreni galaktik ölçeklerde izotropik ve homojen olarak tanımlar. Yani, uzay-zaman her yönde ve her yerde aynı doğaya ve davranışa sahiptir ve metrik uzay-zaman değişmezidir. Bu iki önemli özellik CMBR ölçümleriyle doğrulanmıştır. Dört-boyutlu uzay-zamanı tanımlayan FRW metriğinin çizgi elemanı,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-\hat{k}r^2} + r^2 d\Omega^2\right] \tag{4.5}$$

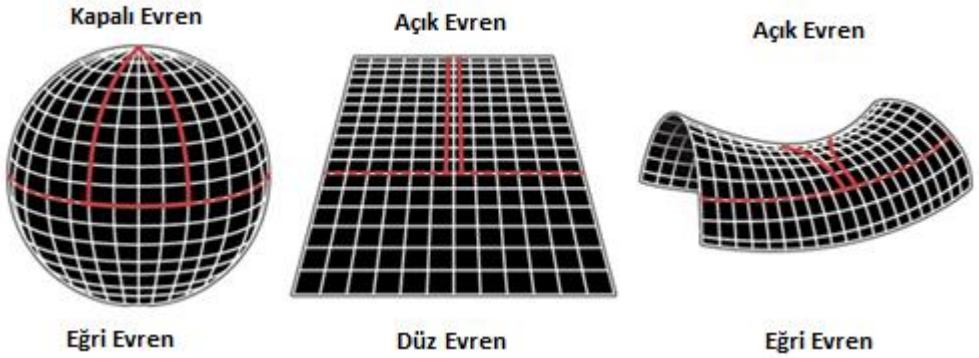
şeklinde gösterilmektedir. Burada $d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2$ biçiminde tanımlanmakta olup $\hat{k} = 0$ ile birlikte $a(t) = 1$ seçildiğinde FRW çizgi elemanı küresel koordinatlarda düz statik Minkowski uzay-zaman modeline indirgenmektedir:

$$ds^2 = cdt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 \tag{4.6}$$

Yukarıdaki (4.5) denkleminde verilen eğrilik parametresi $\hat{k}$ üç farklı değer alabilmektedir:

- $\hat{k} = +1 \rightarrow$ kapalı evren yapısı (pozitif uzaysal eğrilik),
- $\hat{k} = 0 \rightarrow$ düz evren tipi (sıfır uzaysal eğrilik),
- $\hat{k} = -1 \rightarrow$ açık evren yapısı (negatif uzaysal eğrilik).

[14] Bu özellik Türkçede *köşegenel* olarak da anılmaktadır.



Şekil 4.1. Evren için uzay-zaman eğriliği tipleri.

Evrendeki tüm madde yoğunluğu ve enerji evrenin geometrisini doğrudan etkilemektedir (bakınız Şekil 3.1 ve Şekil 4.1). Madde yoğunluğu ve kritik yoğunluk arasındaki üç tane temel durum dikkat çekmektedir:

- Madde yoğunluğu kritik yoğunluktan fazla ise evren nihayetinde kendi üzerine çökecektir. Böyle bir geometrik yapıda başlangıçta paralel olan iki doğru nihayetinde mutlaka birleşecektir. Bu tip evren modeli pozitif uzaysal eğriliğe sahiptir ve kapalı evren modeli olarak değerlendirilir.
- Madde yoğunluğu kritik yoğunluktan az ise, evren sonsuza kadar genişleyecektir. Bu tip geometriye sahip modellerde başlangıçta paralel olan iki doğru hiçbir zaman birleşmeyecektir. Böyle bir evren yapısı negatif uzaysal eğriliğe sahiptir ve açık evren olarak tanımlanır.
- Evrendeki madde yoğunluğu kritik yoğunluğa eşitse evren sonsuza kadar genişleyecektir. Bu tür geometriye sahip evren modeli sıfır uzaysal eğriliğe sahiptir ve düz evren olarak tanımlanır. Böyle bir geometrik yapı (*diğer bir deyişle Öklid geometrisi*) için başlangıçta paralel olan iki doğru hiçbir zaman çakışmayacaktır.

4.2. Skaler Alan Durumu

Bir ϕ skaler alanı için

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} M_{pl}^2 R - f(\phi) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \tag{4.7}$$

biçimindeki Einstein-Hilbert tipi eylem integralini ele alalım. Burada M_{pl} Planck kütlesi olup $M_{pl}^2 = \frac{1}{8\pi G}$ şeklinde tanımlanır. Bu eylemin skaler alana göre değişimi (yani varyasyonu) alındığında

$$f'(\phi) + g^{\mu v}\nabla_\mu\nabla_v\phi - m^2\phi=0 \tag{4.8}$$

denklemi elde edilmektedir. Burada, $f'(\phi) = \frac{df}{d\phi}$ olarak verilmektedir.

Bir eğri uzay-zaman yapısında, herhangi bir vektör için normal türev alınmaz, yerine kovaryant türev kullanılır. X_v bir dörtlü-vekör olmak üzere, kovaryant türev tanımı genel olarak

$$\nabla_\mu X_v = \partial_\mu X_v - \Gamma^\alpha_{v\mu}\ X_\alpha \tag{4.9}$$

şeklinde ifade edilir (Carroll 2004). Bu tanımdan hareketle denklem (4.8) yeniden düzenlenirse

$$f'(\phi) + g^{\mu v}\left[\partial_\mu\nabla_v\phi - \Gamma^\alpha_{a\mu}\,\partial_\mu\phi\right] - m^2\phi=0 \tag{4.10}$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$\nabla_v\phi \equiv \partial_v\phi \tag{4.11}$$

olmalıdır. Denklem (4.10)´u düzenlemeye devam ettiğimizde,

$$g^{\mu v}\,\partial_\mu\partial_v\phi - g^{\mu v}\Gamma^\alpha_{v\mu}\ \partial_a\phi - m^2\phi + f'(\phi) = 0 \tag{4.12}$$

sonucu elde edilir. Şimdi bulduğumuz bu son denklemde FRW metriğini kullanabiliriz. Bunu yapmadan önce Christoffel bağlantılarını hesaplamamız gerekmektedir. Uzay-zaman geometrisinin eğriliği hakkında bilgiler içeren Christoffel bağlantıları şöyle tanımlanır (Carroll 2004);

$$\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right). \quad (4.13)$$

Denklem (4.4)'te verilen metrik için 64 adet olan Christoffel bağlantı bileşenlerinin çoğunun değeri sıfırdır ve geriye kalan, yani sıfır olmayan bileşenler hesaplandığında;

$$\Gamma^{0}_{11} = \frac{a\dot{a}}{1-\hat{k}r^2}, \quad (4.14)$$

$$\Gamma^{0}_{22} = a\dot{a}r^2, \quad (4.15)$$

$$\Gamma^{0}_{33} = a\dot{a}r^2 \sin^2\theta, \quad (4.16)$$

$$\Gamma^{1}_{01} = \Gamma^{1}_{10} = \Gamma^{2}_{02} = \Gamma^{2}_{20} = \Gamma^{0}_{03} = \Gamma^{3}_{30} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.17)$$

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{\hat{k}r}{1-kr^2}, \quad (4.18)$$

$$\Gamma^{1}_{22} = -r\left(1-\hat{k}r^2\right), \quad (4.19)$$

$$\Gamma^{1}_{33} = -r(1-\hat{k}r^2)\sin^2\theta, \quad (4.20)$$

$$\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \Gamma^{3}_{13} = \Gamma^{3}_{31} = \frac{1}{r}, \quad (4.21)$$

$$\Gamma^{2}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad (4.22)$$

$$\Gamma^{3}_{23} = \Gamma^{3}_{32} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \quad (4.23)$$

sonuçları elde edilmektedir. Denklem (4.12)'de sunulan ifade denklem (4.13)'te yazılan tanım yardımıyla metrik tensör cinsinden yeniden yazıldığında

$$g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\partial_\nu\phi - g^{\mu\nu}\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\,\partial_\alpha\phi - m^2\phi + f'(\phi) = 0 \quad (4.24)$$

denklemi elde edilmektedir. Bu denklemle birlikte hesaplanan Christoffel sembolü bileşenleri dikkate alındığında sadece zamana bağlı olarak değişen skaler alan fonksiyonu için

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - m^2\phi + f'(\phi) = 0 \tag{4.25}$$

biçiminde ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilmektedir.

Denklem (4.7)'de verilen eylem integralinin $g^{\mu\nu}$'ye göre varyasyonuna bakılıp elde edilen sonuç minimum eylem ilkesinde kullandığında

$$\int d^4x[\delta\left(\sqrt{-g}\right)\left(-\frac{1}{2}M_{pl}^2R - f(\phi) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right) + \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}M_P^2\delta(R) + \frac{1}{2}\delta(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi)\right)] = 0 \tag{4.26}$$

denklemi elde edilmektedir. Buradan alan denklemine ulaşabilmek için $\delta\sqrt{-g}$ ve $\delta(R)$ terimlerini hesaplamamız gerekmektedir. Öncelikle $\delta\sqrt{-g}$ terimine odaklanacağız. Bilindiği üzere, eksponansiyel bir kare matris ifadesi olan e^A için

$$\det(e^A) = e^{Tr(A)} \tag{4.27}$$

yazılabilmektedir. Burada Tr, transpozu tanımlar ve $M = e^A$ tanımı yapıldığında $A = lnM$ elde edilmektedir. Diğer yandan

$$Tr(lnM) = ln(detM) \tag{4.28}$$

biçiminde ifade etmek mümkündür. Elde edilen eşitlik M'ye göre varyasyon alma işlemine tabi tutulduğunda

$$Tr(M^{-1}\delta M) = \frac{1}{detM}\delta detM \tag{4.29}$$

elde edilmektedir. Bilindiği gibi $M = g_{\mu v}$, $detM = g$ ve $M^{-1} = g^{\mu v}$ yazılabildiğinden denklem (4.29)'dan

$$\delta g = g g^{\mu v} \delta g_{\mu v} \tag{4.30}$$

ifadesine ulaşılır. Böylece,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta(g) \tag{4.31}$$

ve

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu v} \delta^{\mu v} \tag{4.32}$$

olduğu anlaşılmaktadır (Carroll 2004). Ricci skalerinin

$$R = g^{\mu v} R_{\mu v} \tag{4.33}$$

biçiminde metrik tensör ile Ricci tensörünün çarpımı olarak tanımlandığı bilinmektedir (Carroll 2004). Bu eşitlik için de varyasyon alma işlemi uygulandığında

$$\delta R = R_{\mu v} \delta g^{\mu v} + g^{\mu v} \delta R_{\mu v} \tag{4.34}$$

sonucu elde edilmektedir. Elde edilen bu sonuç (4.26) numaralı denklemde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} &\int d^4x - \frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu v} \delta^{\mu v} \left(-\frac{1}{2} M_{pl}^2 R - f(\phi) + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \\ &+\sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} M_P^2 (R_{\mu v} \delta g^{\mu v} + g^{\mu v} \delta R_{\mu v}) + \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_v \phi \delta g^{\mu v} \right) = 0 \end{aligned} \tag{4.35}$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Buradaki $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ teriminin kısmi integrasyon sonrası uygulanan Gauss yasası yardımıyla sıfıra eşit çıktığı bilinmektedir (Carroll 2004). Böylece, denklem (4.35) yeniden düzenlendiğinde

$$\int d^4x[-\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta^{\mu\nu}\left(-\tfrac{1}{2}M_{pl}^2R - f(\phi) + \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2\right) + \sqrt{-g}\left(-\tfrac{1}{2}M_{pl}^2R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_v\phi\delta g^{\mu\nu}\right)] = 0 \quad (4.36)$$

ifadesi elde edilmektedir. Bu denklemin sıfıra eşit olması için

$$\tfrac{1}{4}M_{pl}^2g_{\mu\nu}R - \tfrac{1}{2}M_{pl}^2R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}f(\phi) - \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}m^2\phi^2 + \tfrac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_v\phi = 0 \quad (4.37)$$

ifadesinin sağlanması gerektiği aşikar biçimde ortaya çıkmaktadır. Bu denklemi geleneksel yöntemi takip etme adına EAD'ye benzer formda yazmak mümkündür:

$$G_{\mu v} = R_{\mu v} - \tfrac{1}{2}g_{\mu v}R = \tfrac{1}{2M_{pl}^2}\left[g_{\mu v}f(\phi) - \tfrac{1}{2}g_{\mu v}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + \tfrac{1}{2}g_{\mu v}m^2\phi^2 + \nabla_\mu\phi\nabla_v\phi\right]. \quad (4.38)$$

Bu denklemin sağ tarafının aslında $T_{\mu v}{}'$ye yani enerji-momentum tensörüne eşit olduğu bilinmektedir (Einstein 1917). Böylece, enerji-momentum tensörünün

$$T_{\mu v} = \tfrac{1}{2M_{pl}^2}\left[g_{\mu v}f(\phi) - \tfrac{1}{2}g_{\mu v}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + \tfrac{1}{2}g_{\mu v}m^2\phi^2 + \nabla_\mu\phi\nabla_v\phi\right] \quad (4.39)$$

biçiminde yazıldığı görülmektedir. Bu eşitliğin her iki tarafı $g^{\mu v}$ ile kontrakt edildiğinde,

$$T = \tfrac{1}{2M_{pl}^2}\left[4f(\phi) - 2g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + 2m^2\phi^2 + g^{\mu v}\nabla_\mu\phi\nabla_v\phi\right] \quad (4.40)$$

ifadesi elde edilmektedir. Farklı terimlerde kullanılan indisler birbirinden bağımsız olduğundan bu denklem düzenlendiğinde

$$T = \frac{1}{2M_{pl}^2}\left[4f(\phi) - g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + 2m^2\phi^2\right] \tag{4.41}$$

şeklinde daha sade biçimde ifade edilebilmektedir. Bu denklemi R'ye bağlı olarak yeniden yazmadan önce, birbirleriyle bağlantılı olan $G_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, ve R niceliklerini hesaplamak yerinde olacaktır. Einstein tensörünün

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{4.42}$$

şeklinde tanımlandığı bilinmektedir (Einstein 1917). Bu denklemin 00 (yani zaman-zaman) bileşenli hali yazıldığında

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \tag{4.43}$$

biçiminde olacaktır. Bu denklemde, G_{00} bileşeninin hesaplanabilmesi için R_{00} ve R niceliklerinin gerektiği görülmektedir. Bu nicelikleri hesaplamak için Ricci tensörünün

$$R_{\mu\nu}=\partial_a\Gamma^a_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^a_{\mu a} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^a_{\lambda a} - \Gamma^\lambda_{\mu a}\Gamma^a_{\nu\lambda} \ . \tag{4.44}$$

şeklinde ifade edilen tanımını kullanmak yeterlidir (Einstein 1917, Carroll 2004). Bu durumda R_{00} bileşeni

$$R_{00}=\partial_a\Gamma^a_{00} - \partial_0\Gamma^a_{0a} + \Gamma^\lambda_{00}\Gamma^a_{\lambda a} - \Gamma^\lambda_{0a}\Gamma^a_{0\lambda} \tag{4.45}$$

biçiminde tanımlanır. Daha önce hesaplanan ve (4.14)-(4.23) denklemlerinde sunulan Chiristoffel sembolü bileşenleri dikkate alındığında FRW metriği için

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} \tag{4.46}$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Benzer şekilde, (4.44) denklemi kullanılarak, uzay-uzay bileşenleri olan R_{11} , R_{22} , R_{33} nicelikleri de hesaplanabilir:

$$R_{11} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\hat{k}}{a^2}\right) g_{11}, \tag{4.47}$$

$$R_{22} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\hat{k}}{a^2}\right) g_{22}, \tag{4.48}$$

$$R_{33} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\hat{k}}{a^2}\right) g_{33}. \tag{4.49}$$

Buradaki simetri aynı zamanda uzay-zamanın izotropisini yansıttığından (4.49) denklemi i ve j indisleri kullanılarak şöyle genelleştirilebilir:

$$R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\hat{k}}{a^2}\right) g_{ij}. \tag{4.50}$$

Diğer yandan, Ricci skaleri olarak bilinen R niceliği de metrik tensör ve Ricci tensörü yardımıyla hesaplanmaktadır. Böylece

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \tag{4.51}$$

olarak yazılabildiğinden

$$R = -6(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\hat{k}}{a^2}) \tag{4.52}$$

bulunacaktır. Denklem (4.46) ve denklem (4.52)'de sunulan sonuçlar denklem (4.43)'te yerine yazıldığında G_{00} bileşeni

$$G_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} + 3(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\hat{k}}{a^2}) \tag{4.53}$$

biçiminde yazılır. Burada gerekli sadeleştirme işlemi yapıldığında

$$G_{00} = 3(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\hat{k}}{a^2}) \, . \tag{4.54}$$

elde edilecektir. Benzer yöntem uygulandığında Einstein tensörünün uzay-uzay bileşenleri i ve j indisleri yardımıyla

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\hat{k}}{a^2}\right) g_{ij} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\hat{k}}{a^2}\right) g_{ij} \tag{4.55}$$

biçiminde genelleştirilmektedir. Burada matematiksel sadeleştirmeler sonrasında yeniden düzenleme yapıldığında

$$G_{ij} = \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\hat{k}}{a^2}\right) g_{ij} \tag{4.56}$$

biçiminde bir ifade elde edilmektedir.

Elde edilen sonuçlar ışığında eğrilik skaleri için

$$R \; = -\frac{1}{2M_{pl}^2}\left[4f(\phi) - g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + 2m^2\phi^2\right] \tag{4.57}$$

sonucu elde edilmektedir. Bu sonuç bizi denklem (4.52) ile birlikte aşağıdaki gibi bir ifadeye yönlendirmektedir:

$$-6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\hat{k}}{a^2}\right) = -\frac{1}{2M_{pl}^2}\left[4f(\phi) - \dot{\phi}^2 + 2m^2\phi^2\right]. \tag{4.58}$$

Son olarak, bu denklem Hubble genişleme parametresi cinsinden düzenlendiğinde

$$\dot{H} + 2H^2 = \frac{1}{12M_{pl}^2}\left[4f(\phi) - \dot{\phi}^2 + 2m^2\phi^2\right] \tag{4.59}$$

biçiminde yazılan modifiye Friedmann denklemi elde edilir[15].

4.3. Skaler Yoğunluk Durumu

Buraya kadar skaler alan teorisi kullanılarak bir skaler alan için alan denklemleri elde edilmiştir. Bu kısımdan itibaren bir skaler yoğunluk için karşılık gelen alan denklemlerini tartışacağız. Bunu yaparken skaler alan fonksiyonu ϕ için Ω ve g skaler yoğunluklarını kullanarak $\phi = \frac{\Omega}{g}$ tanımına odaklanacağız. Dolayısıyla, (4.7) denklemini aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz;

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} M_{pl}^2 R - f\left(\frac{\Omega}{g}\right) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \left(\frac{\Omega}{g}\right) \nabla_\nu \left(\frac{\Omega}{g}\right) - \frac{1}{2} m^2 \left(\frac{\Omega}{g}\right)^2 \right] \quad (4.60)$$

Burada, Ω ve g skaler yoğunluklarının her ikisinin de ağırlığı 2'dir (yani W=2). Bu denklemde Ω'ya göre varyasyona alma işlemi uygulandığında

$$f'\left(\frac{\Omega}{g}\right) + g^{\mu\nu} \frac{1}{g^2} \nabla_\mu \nabla_\nu \Omega - m^2 \Omega \frac{1}{g^2} = 0 \quad (4.61)$$

ifadesi elde edilmektedir. Burada, $f'\left(\frac{\Omega}{g}\right) = \frac{df}{d\Omega}$ tanımının yapıldığını vurgulamak yerinde olacaktır. Böylece, bazı matematiksel basamaklardan sonra

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Omega - m^2 \Omega + g^2 f'\left(\frac{\Omega}{g}\right) = 0 \quad (4.62)$$

denklemi elde edilir. Bu sonuç ile birlikte homojenlik ve izotropiyi kullanarak Friedmann denklemini elde etmek mümkündür. Ağırlığı W olan bir skaler yoğunluk alanın kovaryant türevi genel olarak aşağıdaki gibi alınır;

$$\nabla_\mu \Omega = \partial_\mu \Omega - W \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} \Omega \, . \quad (4.63)$$

[15] Galaktik ölçekte gözlemsel verilere dayanarak evrenin düz geometrik yapıya sahip olduğu kabul edildiğinden, burada $\hat{k} = 0$ alınmıştır.

Bu eşitlik kullanılarak ağırlığı $W = 2$ olan bir özel skaler yoğunluk durumu için

$$g^{\mu\nu}(\partial_\mu \nabla_\nu \Omega - \Gamma^a_{\mu\nu}\partial_a \Omega - 2\Gamma^\beta_{\beta\mu}\nabla_\nu \Omega) - m^2\Omega + g^2 f'\left(\frac{\Omega}{g}\right) = 0 \tag{4.64}$$

sonucu elde edilmektedir. Bu ifade biraz düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} &g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\Omega - g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\partial_\sigma\Omega - 4g^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\beta\nu}\partial_\mu\Omega - 2g^{\mu\nu}\partial_\mu\Gamma^\alpha_{\alpha\nu}\,\Omega \\ &+2g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\beta\sigma}\,\Omega + 4g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\Gamma^\beta_{\beta\nu}\,\Omega - m^2\Omega + g^2 f'\left(\frac{\Omega}{g}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.65}$$

denklemi elde edilmektedir. Bu sonuç için Christoffel sembolleri kullanıldığında

$$\ddot{\widetilde{\Omega}} + 6\dot{H}\widetilde{\Omega} - 9H\dot{\widetilde{\Omega}} + 18H^2\widetilde{\Omega} - m^2\widetilde{\Omega} + g^2 f'\left(\frac{\Omega}{g}\right) = 0 \tag{4.66}$$

biçiminde bir skaler yoğunluk alan denklemi elde edilir. Burada, $\Omega = r^4 sin^2\theta\widetilde{\Omega}$ dönüşümün yapıldığını hatırlatmak gerekmektedir ve $f\left(\frac{\Omega}{g}\right)$ fonksiyonu, $g^2 f'\left(\frac{\Omega}{g}\right)$ çarpımı uzaysal sabit olacak şekilde seçilir. Ayrıca $k = 0$ olarak alındı.

Şimdi de denklem (4.60) ile verilen ifadenin kontravaryant metrik tensör $g^{\mu\nu}$'ye göre değişimine bakalım. Bir önceki kısımda takip edilen yönteme benzer şekilde ilgili eylem integralinin varyasyonu minimum eylem ilkesine göre

$$\delta S_{EH} = 0 \tag{4.67}$$

denklemini sağlaması gerekmektedir. Bu durum bizi

$$\int d^4x\,\delta\left[\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}M_{pl}^2 R - f\left(\frac{\Omega}{g}\right) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\left(\frac{\Omega}{g}\right)\nabla_\nu\left(\frac{\Omega}{g}\right) - \frac{1}{2}m^2\left(\frac{\Omega}{g}\right)^2\right)\right] = 0 \tag{4.68}$$

denklemine götürmektedir. Böylece, yukarıdaki denklemin doğru olabilmesi için

$$\int d^4x\,\delta\sqrt{-g}\,[-\tfrac{1}{2}M_{pl}^2R - f\left(\tfrac{\Omega}{g}\right) + \tfrac{1}{2}g^{\mu v}\nabla_\mu(\tfrac{\Omega}{g})\nabla_v(\tfrac{\Omega}{g}) - \tfrac{1}{2}m^2\left(\tfrac{\Omega}{g}\right)^2]$$
$$+\int d^4x\,\sqrt{-g}[-\tfrac{1}{2}M_{pl}^2\delta R - \delta f\left(\tfrac{\Omega}{g}\right) + \tfrac{1}{2}\delta g^{\mu v}\nabla_\mu(\tfrac{\Omega}{g})\nabla_v(\tfrac{\Omega}{g})$$
$$+\tfrac{1}{2}\delta(g^{-2})\nabla_\mu\Omega\nabla_v\Omega - \tfrac{1}{2}m^2\delta\left(\tfrac{\Omega}{g}\right)^2] = 0 \qquad (4.69)$$

olması gerektiği anlaşılmaktadır. Bu ifadeyi daha sade ve estetik biçimde yazabilmek için $\delta\sqrt{-g}$, $\delta(R)$, $\delta f\left(\frac{\Omega}{g}\right)$ ve δg^{-2} terimlerinin hesaplanması gerekmektedir. Daha önce $\delta\sqrt{-g}$ ve $\delta(R)$ ifadelerini zaten bulmuştuk. $\delta g^{-2\prime}$nin açık hali denklem (4.30)'dan bulunabilir. $\delta f\left(\frac{\Omega}{g}\right)$'nin değeri ise aşağıdaki gibi hesaplanabilmektedir;

$$\delta f\left(\frac{\Omega}{g}\right) = f'\left(\frac{\Omega}{g}\right)\delta\left(\frac{\Omega}{g}\right) = f'\left(\frac{\Omega}{g}\right)\delta(g^{-1})\Omega. \qquad (4.70)$$

Denklem (4.30)'da sunulan eşitlik kullanılarak bu denklemi

$$\delta f\left(\frac{\Omega}{g}\right) = f'\left(\frac{\Omega}{g}\right)\Omega\frac{1}{g}g_{\mu v}\delta g^{\mu v} \qquad (4.71)$$

şeklinde yeniden ifade etmek mümkündür. Elde edilen hesaplamalar ile birlikte uygun ve doğru biçimde yapılacak indis değişiklikleri sonrasında denklem (4.69) yeniden düzenlendiğinde

$$\int d^4x\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu v}\delta^{\mu v}\right)[-\tfrac{1}{2}M_{pl}^2R - f\left(\tfrac{\Omega}{g}\right) + \tfrac{1}{2}g^{a\beta}\nabla_a\left(\tfrac{\Omega}{g}\right)\nabla_\beta\left(\tfrac{\Omega}{g}\right) - \tfrac{1}{2}m^2\left(\tfrac{\Omega}{g}\right)^2]$$
$$+\int d^4x\,\sqrt{-g}[-\tfrac{1}{2}M_{pl}^2\left(R_{\mu v}\delta g^{\mu v} + g^{\mu v}\delta R_{\mu v}\right) - f'\left(\tfrac{\Omega}{g}\right)\Omega\frac{1}{g}g_{\mu v}\delta g^{\mu v}$$
$$+\tfrac{1}{2}\delta g^{\mu v}\nabla_\mu\left(\tfrac{\Omega}{g}\right)\nabla_v\left(\tfrac{\Omega}{g}\right) + \tfrac{1}{2}g^{\mu v}\delta\nabla_\mu\left(\tfrac{\Omega}{g}\right)\nabla_v\left(\tfrac{\Omega}{g}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}g^{\mu v}\nabla_\mu\left(\tfrac{\Omega}{g}\right)\delta\nabla_v\left(\tfrac{\Omega}{g}\right) - \tfrac{1}{g^2}\Omega^2m^2g_{\mu v}\delta g^{\mu v}] = 0 \qquad (4.72)$$

biçimini almaktadır. Burada kısmi integrasyon işlemi sonrasında $g^{\mu v}\delta R_{\mu v} = 0$ elde edildiği durumu kullanılırsa

$$\frac{1}{4}M_{pl}^2 R g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}M_{pl}^2 R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} f'\left(\frac{\Omega}{g}\right)\frac{\Omega}{g} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu} f\left(\frac{\Omega}{g}\right)$$
$$-\frac{1}{4}g_{\mu\nu} g^{a\beta}\nabla_a\left(\frac{\Omega}{g}\right)\nabla_\beta\left(\frac{\Omega}{g}\right) + \frac{1}{4}g_{\mu\nu} m^2\left(\frac{\Omega}{g}\right)^2$$
$$+ g_{\mu\nu} g^{a\beta}\nabla_a\left(\frac{\Omega}{g}\right)\nabla_\beta\left(\frac{\Omega}{g}\right) - g_{\mu\nu} m^2\left(\frac{\Omega}{g}\right)^2 + \frac{1}{2}\nabla_\mu(\frac{\Omega}{g})\nabla_v(\frac{\Omega}{g}) = 0 \qquad (4.73)$$

sonucuna ulaşılacaktır. Düzenleme işlemi bir adım daha öteye taşındığında

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{1}{M_{pl}^2}[\frac{3}{2}g_{\mu\nu} g^{a\beta}\nabla_a(\frac{\Omega}{g})\nabla_\beta(\frac{\Omega}{g}) + \nabla_\mu(\frac{\Omega}{g})\nabla_v(\frac{\Omega}{g}) - \frac{3}{2}g_{\mu\nu} m^2(\frac{\Omega}{g})^2$$
$$+ g_{\mu\nu} f(\frac{\Omega}{g}) - 2g_{\mu\nu}(\frac{\Omega}{g})f'(\frac{\Omega}{g})] \qquad (4.74)$$

elde edilmektedir. Bu sonuç EAD ile karşılaştırıldığında

$$M_{pl}^2 T_{\mu\nu} = \frac{3}{2}g_{\mu\nu} g^{a\beta}\nabla_a\left(\frac{\Omega}{g}\right)\nabla_\beta\left(\frac{\Omega}{g}\right) + \nabla_\mu(\frac{\Omega}{g})\nabla_v\left(\frac{\Omega}{g}\right) - \frac{3}{2}g_{\mu\nu} m^2\left(\frac{\Omega}{g}\right)^2$$
$$+ g_{\mu\nu} f\left(\frac{\Omega}{g}\right) - 2g_{\mu\nu}\left(\frac{\Omega}{g}\right)f'\left(\frac{\Omega}{g}\right) \qquad (4.75)$$

olduğu anlaşılmaktadır. (4.75) denklemi $g^{\mu\nu}$ ile kontrakt edilip R eğrilik skaleri cinsinden düzenlendiğinde

$$-M_{pl}^2 R = 6g^{a\beta}\nabla_a\left(\frac{\Omega}{g}\right)\nabla_\beta\left(\frac{\Omega}{g}\right) + g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\frac{\Omega}{g})\nabla_v\left(\frac{\Omega}{g}\right)$$
$$-6m^2\left(\frac{\Omega}{g}\right)^2 + 4f\left(\frac{\Omega}{g}\right) - 8\left(\frac{\Omega}{g}\right)f'\left(\frac{\Omega}{g}\right) \qquad (4.76)$$

sonucu elde edilir. Bu denklemde kullanılan indisler birbirinden bağımsız olduklarından ifadeyi şöyle yeniden düzenlemek mümkündür;

$$R = -\frac{1}{M_{pl}^2}\left[7g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\frac{\Omega}{g})\nabla_v\left(\frac{\Omega}{g}\right) - 6m^2\left(\frac{\Omega}{g}\right)^2 + 4f\left(\frac{\Omega}{g}\right) - 8\frac{\Omega}{g}f'\left(\frac{\Omega}{g}\right)\right]. \qquad (4.77)$$

Düzenleme işlemi bir adım daha öteye taşındığında

$$R = -\frac{1}{M_{pl}^2}\left[\frac{7}{g^2} g^{\mu v}\nabla_\mu \Omega \nabla_v \Omega \; - \frac{6}{g^2} m^2 \Omega^2 + 4f\left(\frac{\Omega}{g}\right) - \frac{8\Omega}{g} f'\left(\frac{\Omega}{g}\right)\right] \tag{4.78}$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Bir skaler yoğunluk için daha önce de verildiği gibi kovaryant türev alma işlemi $\nabla_\mu \Omega = \partial_\mu \Omega - W\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\,\Omega$ biçiminde gerçekleştirildiğinden (4.78) denklemi

$$R = -\frac{1}{M_{pl}^2}[\frac{7}{g^2} g^{\mu v}(\partial_\mu \Omega - 2\Gamma^{\sigma}_{\sigma\mu}\Omega)(\partial_v \Omega - 2\Gamma^{\beta}_{\beta v}\Omega) - \frac{6}{g^2} m^2\Omega^2 + 4f(\frac{\Omega}{g}) - \frac{8\Omega}{g} f'(\frac{\Omega}{g})] \tag{4.79}$$

halini alacaktır. Bu ifadeyi

$$R = -\frac{1}{M_{pl}^2}[\frac{7}{g^2} g^{\mu v}(\partial_\mu \Omega \partial_v \Omega - 4\Gamma^{\sigma}_{\sigma v}\Omega\partial_v\Omega - 4\Gamma^{\sigma}_{\sigma\mu}\Gamma^{\beta}_{\beta v}\Omega^2) - \frac{6}{g^2} m^2\Omega^2 + 4f(\frac{\Omega}{g}) - \frac{8\Omega}{g} f'(\frac{\Omega}{g})] \tag{4.80}$$

biçiminde de yazmak mümkündür. Elde edilen ifadeyle birlikte evrenin büyük ölçekte homojen ve izotropik olduğu kabullenmesi de kullanıldığında modifiye Friedmann denklemine ulaşmak adına Ricci skaleri skaler yoğunluk cinsinden

$$R = -\frac{1}{M_{pl}^2}[\frac{1}{a^{12}}(7\dot{\widetilde{\Omega}}^2 - 84H\widetilde{\Omega}\dot{\widetilde{\Omega}} + 252H^2\widetilde{\Omega}^2 - 6m^2\widetilde{\Omega}^2) + 4f(\frac{\Omega}{g}) + \frac{8\widetilde{\Omega}}{a^6} f'(\frac{\Omega}{g})] \tag{4.81}$$

biçiminde yeniden ifade edilebilir. Burada, $\Omega = r^4 sin^2\theta\widetilde{\Omega}$ dönüşümü ile birlikte eğrilik parameteresi için düz uzay-zaman durumu kullanılmıştır. Sonuç olarak, Hubble parametresinin tanımıyla birlikte

$$\dot{H} + 2H^2 = \frac{1}{6M_{pl}^2}[\frac{1}{a^{12}}(7\dot{\widetilde{\Omega}}^2 - 84H\widetilde{\Omega}\dot{\widetilde{\Omega}} + 252H^2\widetilde{\Omega}^2 - 6m^2\widetilde{\Omega}^2) + 4f(\frac{\Omega}{g}) + \frac{8\widetilde{\Omega}}{a^6} f'(\frac{\Omega}{g})] \tag{4.82}$$

denklemi elde edilmektedir.

4.4. *f(R)*-gravite Metrik Formalizmi

Metrik formalizmi için eylem integrali aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir;

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g}\ \left[\frac{1}{2k^2} f(R) + \mathcal{L}_m\right]. \tag{4.83}$$

Bu eylemin varyasyonu metrik tensör $g^{\mu v}$'ye göre alınırsa minimum eylem çerçevesinde

$$\delta S = \int d^4x\ \left[\frac{1}{2k^2}\delta(\sqrt{-g}\ f(R)) + \ \delta(\sqrt{-g}\ \mathcal{L}_m)\right] = 0 \tag{4.84}$$

olması gerekmektedir. Matematiksel işlem bir adım öteye taşındığında

$$\frac{1}{2k^2}\int d^4x\delta\sqrt{-g}\,f(R) + \frac{1}{2k^2}\int d^4x\,\delta f(R)\sqrt{-g} = -\int d^4x\,\delta(\sqrt{-g}\ \mathcal{L}_m) \tag{4.85}$$

elde edilir. Bu denklemdeki $\delta\sqrt{-g}$ terimini daha önce hesaplamıştık. Diğer yandan, $\delta f(R)$ terimi ise aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\delta f(R)=\frac{\partial f}{\partial R}\delta R \tag{4.86}$$

Burada, $R = g^{\mu v}R_{\mu v}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\delta f(R) = \frac{\partial f}{\partial R}\delta g^{\mu v}R_{\mu v} + \frac{\partial f}{\partial R}\delta R_{\mu v}g^{\mu v} \tag{4.87}$$

olacaktır. Bu değer (4.85) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{1}{2k^2}\int d^4x\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)f(R)$$
$$+\frac{1}{2k^2}\int d^4x\left(\frac{\partial f}{\partial R}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}+\frac{\partial f}{\partial R}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}=-\int d^4x\,\delta(\sqrt{-g}\ \mathcal{L}_m) \quad (4.88)$$

elde edilir. Bir sonraki matematiksel basamakta

$$-\frac{1}{2k^2}\int d^4x\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}f(R)\delta g^{\mu\nu}+\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\frac{\partial f}{\partial R}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$
$$+\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\frac{\partial f}{\partial R}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=-\int d^4x\,\delta(\sqrt{-g}\ \mathcal{L}_m) \quad (4.89)$$

ifadesine ulaşılmaktadır. Bu denklemin sol tarafındaki üçüncü teriminde bulunan $\delta R_{\mu\nu}$ ifadesinin değeri aşağıdaki şekilde verilmektedir

$$\delta R_{\mu\nu}=\nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\ -\nabla_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\ . \quad (4.90)$$

Denklem (4.89)'un sol tarafında yer alan üçüncü terimi S_3 ile gösterip önce bu terimi hesaplayalım. İlgili denklem

$$-\frac{1}{2k^2}\int d^4x\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}f(R)\delta g^{\mu\nu}$$
$$+\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\frac{\partial f}{\partial R}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+S_3=-\int d^4x\,\delta(\sqrt{-g}\ \mathcal{L}_m) \quad (4.91)$$

biçimine dönüşecektir. Burada

$$S_3=\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\frac{\partial f}{\partial R}g^{\mu\nu}(\nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\ -\nabla_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\ ) \quad (4.92)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanımı

$$S_3=\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,F(R)(\nabla_\lambda g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\ -\nabla_\nu g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\ ) \quad (4.93)$$

biçiminde de yeniden ifade etmek mümkündür. Burada yapılacak uygun matematiksel sadeleştirme işlemi bizi

$$S_3 = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,F(R)(\nabla_\sigma g^{\mu v}\delta\Gamma^\sigma_{\mu v} - \nabla_\sigma g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \tag{4.94}$$

ifadesine yönlendirmektedir. Son bir düzenleme işlemi ile

$$S_3 = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,F(R)\nabla_\sigma(g^{\mu v}\delta\Gamma^\sigma_{\mu v} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \tag{4.95}$$

sonucu elde edilir. Bu denklemi daha farklı ve işimize yarayacak biçimde yazmak için $\delta\Gamma^\sigma_{\mu v}$ teriminin $\delta g^{\mu v}$'ye göre varyasyonu alınırsa

$$\delta\Gamma^\sigma_{\mu v} = -\frac{1}{2}\left[g_{\lambda\mu}\nabla_v(\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\mu}\nabla_\mu(\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\mu\alpha}g_{v\beta}\nabla^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})\right] \tag{4.96}$$

sonucu elde edilir (Carroll 2004). Elde edilen bu son eşitlik yardımıyla denklem (4.95) şu şekilde yeniden yazılabilir;

$$S_3 = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}F(R))\nabla_\sigma\left[\delta^\lambda_v\,\nabla_v(\delta g^{\lambda\sigma}) + \delta^\lambda_v\,\nabla_\mu(\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\alpha\beta}\nabla^\sigma(\delta g^{\alpha\beta}) - \delta^\sigma_\rho\,\nabla_v(\delta g^{\lambda\rho}) - g^{\mu\sigma}g_{\rho\lambda}\nabla_\mu(\delta g^{\lambda\rho}) + \delta^\sigma_\beta\,g_{\lambda\alpha}\nabla^\lambda(\delta g^{\alpha\beta})\right] \tag{4.97}$$

Bu ifadede uygun düzenlemeler yapıldığında

$$S_3 = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}F(R))\nabla_\sigma\left[\nabla_\lambda(\delta g^{\lambda\sigma}) + \nabla_\mu(\delta g^{\mu\sigma}) - g_{\alpha\beta}\nabla^\sigma(\delta g^{\alpha\beta}) - \nabla_\lambda(\delta g^{\lambda\sigma}) - g^{\mu\sigma}g_{\rho\lambda}\nabla_\mu(\delta g^{\lambda\rho}) + g_{\lambda\alpha}\nabla^\lambda(\delta g^{\alpha\sigma})\right] \tag{4.98}$$

sonucu elde edilmektedir. Burada sadeleştirme işlemi yardımıyla

$$S_3 = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}F(R))\nabla_\sigma\left[\nabla_\mu(\delta g^{\mu\sigma}) - g_{\alpha\beta}\nabla^\sigma(\delta g^{\alpha\beta}) - g_{\rho\lambda}\nabla^\sigma(\delta g^{\lambda\rho}) + \nabla_\alpha(\delta g^{\alpha\sigma})\right] \tag{4.99}$$

ifadesinin elde edilebileceği anlaşılmaktadır. Bu denklemi de

$$S_3 = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}F(R))\nabla_\sigma\big[\nabla_\mu(\delta g^{\mu\sigma}) - g_{\mu\nu}\nabla^\sigma(\delta g^{\mu\nu}) - g_{\mu\nu}\nabla^\sigma(\delta g^{\mu\nu}) + \nabla_\mu(\delta g^{\mu\sigma})\big] \quad (4.100)$$

biçiminde yeniden düzenlemek mümkündür. Son olarak yukarıdaki denklemi

$$S_3 = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(\,F(R))\nabla_\sigma\big[\nabla_\mu(\delta g^{\mu\sigma}) - g_{\mu\nu}\nabla^\sigma(\delta g^{\mu\nu})\big] \quad (4.101)$$

biçiminde yeniden yazmak sonraki basamaklarda daha kullanışlı olacaktır. Elde edilen bu S_3 değeri ile birlikte (4.91) denklemi yeniden yazıldığında,

$$-\frac{1}{2k^2}\int d^4x\,\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}f(R)\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\frac{\partial f}{\partial R}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(\,F(R))\nabla_\sigma\big[\nabla_\mu(\delta g^{\mu\sigma}) - g_{\mu\nu}\nabla^\sigma(\delta g^{\mu\nu})\big] = -\int d^4x\,\delta(\sqrt{-g}\;\mathcal{L}_m) \quad (4.102)$$

eşitliği elde edilecektir (Karakatsanis, 2010). Burada enerji-momentum tensörünü de açık olarak ifade etmemiz gerekmektedir. Bu tensör şöyle tanımlanabilir

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\;\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.103)$$

Bu tanım da dikkate alındığında denklem (4.102)'den GG alan denkleminin genelleştirilmiş bir biçimi olan

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu}\nabla^2F(R) = k^2T_{\mu\nu} \quad (4.104)$$

şeklinde bir ifade elde edilmektedir. Burada, $F(R) = R$ olması durumunda denklem (4.104)'ün GG alan denklemine indirgenebildiğini vurgulamak yerinde olacaktır.

4.5. Modifikasyon

Bu kısımda Ω ve g skaler yoğunlukları için bir modifiye kütleçekim teorisi kurulacaktır. Bu modelleme için eylem integrali aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2k^2} f\left(R, \frac{\Omega}{g}\right) + \mathcal{L}_m \right]. \tag{4.105}$$

Bu eylem integralinin metrik tensör $g^{\mu\nu}$'ye göre varyasyonunu alınıp minimum hareket ilkesinde yerine yazıldığında

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2k^2} f\left(R, \frac{\Omega}{g}\right) + \mathcal{L}_m \right]) = 0 \tag{4.106}$$

ifadesi elde edilmektedir. Bu denklemi

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2k^2} \delta(\sqrt{-g} f\left(R, \frac{\Omega}{g}\right)) + \delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m) \right] = 0 \tag{4.107}$$

biçiminde yeniden ifade etmek mümkündür. Daha önce elde edilen $\delta\sqrt{-g}$, $\delta f\left(R, \frac{\Omega}{g}\right)$ ve δR ifadelerinin açık hallerinin burada yeniden kullanılması gerektiği anlaşılmaktadır. Ayrıca, burada $\phi = \frac{\Omega}{g}$ eşitliği de kullanılacaktır. (4.107) denklemine dönersek ilgili ifadeyi

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2k^2} \delta\sqrt{-g} f(R, \phi) + \frac{1}{2k^2} \sqrt{-g} \delta f(R, \phi) + \delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m) \right] = 0 \tag{4.108}$$

biçiminde yeniden yazabiliriz. Bu denklemden

$$-\frac{1}{4k^2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} f(R, \phi) + \frac{1}{2k^2} \sqrt{-g} \left(\delta R \frac{\partial f(R,\phi)}{\partial R} + \delta\phi \frac{\partial f(R,\phi)}{\partial \phi} \right) = -\delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m) \tag{4.109}$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Bu denklem düzenlenirse

$$-\frac{1}{4k^2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} f(R, \phi) + \frac{1}{2k^2} \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \frac{\partial f(R,\phi)}{\partial R} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2k^2} \sqrt{-g} \delta\phi \frac{\partial f(R,\phi)}{\partial \phi} = -\delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m) \tag{4.110}$$

biçiminde yazılabilmektedir. Bir sonraki düzenleme işlemi bizi

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\upsilon}f(R,\phi)+R_{\mu\upsilon}\frac{\partial f(R,\phi)}{\partial R}+\frac{1}{g}\Omega g_{\mu\upsilon}\frac{\partial f(R,\phi)}{\partial \phi}=k^2T_{\mu\upsilon} \tag{4.111}$$

ifadesine götürmektedir. Bu denklemi daha sade ve estetik biçimde yeniden yazmak istersek

$$R_{\mu\upsilon}F_R-\frac{1}{2}g_{\mu\upsilon}f(R,\phi)+\frac{1}{g}\Omega g_{\mu\upsilon}F_\phi=k^2T_{\mu\upsilon} \tag{4.112}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde

$$F_R=\frac{\partial f(R,\phi)}{\partial R} \tag{4.113}$$

$$F_\phi=\frac{\partial f(R,\phi)}{\partial \phi} \tag{4.114}$$

$$\delta\phi=\delta\left(\frac{\Omega}{g}\right)=\frac{1}{g}\Omega g_{\mu\upsilon}\delta g^{\mu\upsilon} \tag{4.115}$$

tanımlamalarının kullanıldığını belirtmek yerinde olacaktır. Son olarak, denklem (4.112)'de verilen ifade $g^{\mu\upsilon}$ ile kontrakt edildiğinde.

$$RF_R-2f(R,\phi)+\frac{4}{g}\Omega F_\phi=k^2T \tag{4.116}$$

sonucu elde edilir. Burada, $f\left(R,\frac{\Omega}{g}\right)=f(R)$ olması durumunda $f(R)$ metrik formalizminin alan denklemi elde edilebilmektedir. Bu durum da bizi modifiye edilmiş EAD'ye götürecektir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu doktora tez çalışmasında çıkış noktamız

$$S_{EH=}\int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}M_P^2R-f(\phi)+\frac{1}{2}g^{\mu v}\nabla_\mu\phi\nabla_v\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2\right] \tag{5.1}$$

biçiminde yazılan ve bir skaler alan içeren Einstein-Hilbert eylemi olmuştur. Bu tanım ile birlikte evrenin büyük ölçekte homojen ve izotropik olduğuna işaret eden FRW metriği kullanılarak alan denklemleri önce bir skaler alan durumunda sonra da skaler yoğunluk durumu için elde edilmiştir.

Bir skaler alan için

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}-m^2\phi+f'(\phi)=0 \tag{5.2}$$

sonucu elde edildi. Bu denklem bir homojen skaler alanın zamanla evrimini tanımlamaktadır. Skaler potensiyel alanın türevi sürücü bir kuvvet gibi davranırken evrenin genişlemesi sürtünme terimi olan $3H\dot{\phi}$'nın ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Burada H sürtünme terimi ihmal edilirse (yani $m^2 \gg H^2$ olursa) evren sönümsüz bir salınıcı gibi davranacaktır, yani evrenin bu garip davranışı bir harmonik salınıcı hareketine benzetilebilmektedir. Tersi durumunda ise (yani m^2 terimi ihmal edilirse) evren sönümlü bir salınıcı gibi davranır.

Diğer alan denklemi ise metrik tensöre bağlı olarak elde edilen ve modifiye Friedmann denklemi olarak adlandırdığımız

$$\dot{H}+2H^2=\frac{1}{12M_{pl}^2}\left[4f(\phi)-\dot{\phi}^2+2m^2\phi^2\right] \tag{5.3}$$

ifadesidir.

Diğer yandan bu çalışmanın temelini oluşturan bir skaler yoğunluk durumu için $\phi=\frac{\Omega}{g}$ tanımı dikkate alınarak,

$$S_{EH=}\int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}M_P^2R-f\left(\frac{\Omega}{g}\right)+\frac{1}{2}g^{\mu v}\nabla_\mu(\frac{\Omega}{g})\nabla_v(\frac{\Omega}{g})-\frac{1}{2}m^2(\frac{\Omega}{g})^2\right] \tag{5.4}$$

eylem integrali yazılmıştır. Daha sonra, bu eylemin skaler yoğunluk olan Ω'ya göre değişimi alındı ve FRW metriği kullanılarak

$$\ddot{\tilde{\Omega}} + 6\dot{H}\tilde{\Omega} - 9H\dot{\tilde{\Omega}} + 18H^2\tilde{\Omega} - m^2\tilde{\Omega} + g^2 f'\left(\frac{\Omega}{g}\right) = 0 \tag{5.5}$$

denklemi elde edildi. Aynı eylem integralinin metrik tensöre göre de değişimi alındı

$$\dot{H} + 2H^2 = \frac{1}{6M_{pl}^2}\left[\frac{1}{a^{12}}\left(7\dot{\tilde{\Omega}}^2 - 84H\tilde{\Omega}\dot{\tilde{\Omega}} + 252H^2\tilde{\Omega}^2 - 6m^2\tilde{\Omega}^2\right) + 4f\left(\frac{\Omega}{g}\right) + \frac{8\tilde{\Omega}}{a^6}f'\left(\frac{\Omega}{g}\right)\right] \tag{5.6}$$

sonucuna ulaşıldı. Her iki denklemde de Ω ve g skaler yoğunluklarının ağırlığı $W = 2$ alınmıştır.

Bir skaler alan için elde edilen Friedmann denklemi ile bir skaler yoğunluk için yazılan Friedmann denklemi karşılaştırıldığında, skaler yoğunluğa ait değişkenlerin ölçek faktörüne göre hızlı bir şekilde zamanla azaldığı görülmüştür. Buna ek olarak, bir skaler alan için elde edilen (5.2) ve (5.3) denklemleri ile bir skaler yoğunluk için yazılan (5.5) ve (5.6) denklemlerine bakıldığında, skaler yoğunluk alan denklemlerinin daha fazla terim içerdiği anlaşılmaktadır. Ayrıca, denklem (5.6)'da skaler yoğunluk ve kütle yoğunluğu katsayılarının her ikisinin de a^{-12} ile orantılı olduğu görülmekte yani hem skaler yoğunluğun hem de kütle yoğunluğunun evrenin hızlanan genişleme sürecinde aynı oranda azalma katkısı sunduğu ortaya çıkmaktadır. Skaler alan için, yoğunluk ölçek faktöründen etkilenmezken, skaler yoğunluk alanının yoğunluğu ölçek faktöründen etkilenmektedir, a^{-12}, denklem (5.6). Aynı zamanda, denklemde fonksiyonun türevinin etkisi de önemli ölçüde mevcuttur ve bu etki a^{-6} ile azalmaktadır.

Astrofiziksel gözlemler neticesinde elde edilen ölçümler evrenin genişlemesinin son zamanlarda yeni bir ivmelenme evresine girdiğini göstermiştir. GG teorisinin bu hızlanmanın nedenini tam olarak açıklayamaması bilim insanlarını karanlık enerji modelleri ve modifiye edilmiş kütleçekim teorileri gibi yeni ve farklı yaklaşımlara yöneltmiştir. Bilim insanları evrenin gizemli ivmelenerek genişleme davranışının ardındaki fiziksel süreçleri anlamak için genellikle Einstein'in GG teorisini esas

almaktadırlar. GG teorisi çerçevesinde ivmeli genişleme evresini açıklayabilmek adına üç farklı bakış açısı ön plana çıkmaktadır (Dombriz 2010);

- Negatif bir basınca sahip karanlık enerji tanımı (kozmolojik sabit Λ gibi),
- Bir skaler alan tanımı içeren quintessence modeli gibi dinamik karanlık enerji fikirleri,
- Kütleçekim etkisinin farklı bir sonucu olarak açıklanmaya çalışılan ivmelenme (Carroll ve ark. 2005, Nojiri ve Odintsov 2007).

Bu son kategorideki teorilerden bazıları Riemann ve Ricci tensörlerinin daha yüksek veya daha düşük mertebeli eğrilik skalerleri terimlerini veya bunların türevlerini içermektedir (Dobado ve Maroto 1994). Son yıllarda, kütleçekim modifikasyonu yardımıyla, bazı $f(R)$-gravite modelleri karanlık madde ile bağdaştırılmaya çalışılmıştır (Cembranos 2009). Bazıları ise hem evrenin şu anki ivmelenme sürecinin hem de erken dönem enflasyon evresinin nedenini açıklamak için ileri sürülmüştür (Nojiri ve Odintsov 2003). Modifiye edilmiş kütleçekim teorileri karanlık enerji modellerine alternatif olarak öne sürülen önemli fikirlerdendir. Bu teoriler evrenin genişlemesinin nedenini ortaya koymak adına genellikle değişik varyasyonlara sahip belirli skaler alanlar tanımlar. Öte yandan, bu teorilerde skaler yoğunluk temelli araştırmalar yeterince yapılmamıştır.

Bu doktora tez çalışmasında temel amacımız evrenin evrimsel süreçlerine bakarak şu an içinde bulunduğumuz genişleme fazının dinamik davranışlarını yeni ve özgün bir bakış açısıyla incelemekti. Bunu başarabilmek adına skaler yoğunluk tanımı kullanılarak GG teorisi alan denklemleri modifiye edilmiştir. Bu tez çalışmasında sunulan sonuçlar ileride ele alınabilecek farklı problemlere de kaynak olabilme özelliğindedir. Bu bağlamda tez kapsamında yapılan araştırmanın yeni makale, tez ve proje araştırmalarına da ilham vereceği düşünülmektedir. Örneğin, tezde sunulan kuramsal sonuçlar ışığında

- Nötron yıldızlarının varlığı problemi farklı bir perspektiften tartışılabilir,
- Gravitasyonel pertürbasyon işlemi ele alınarak kütleçekimsel dalgaların böyle bir modeldeki doğası ele alınabilir,

- Karadeliklerin yerel dörtlü-momentum dağılımı problemi için burada sunulan modelleme kullanılarak özgün sonuçlar elde edilebilir,
- Gravastar ve karanlık enerji yıldızları gibi astrofizikte hipotetik kozmik kompakt nesneler olarak bilinen ve alternatif kara delik yorumu olarak da kabul edilen gök cisimleri için gözlemcilere ilham verebilecek yeni çözümler elde edilebilir,
- Termodinamik yasaları yardımıyla farklı kozmolojik verilere ulaşmak mümkündür,
- Holografik, Ricci, Chaplygin gaz, Çokısılı gaz, Hobbit ve Newagegraphic gibi farklı karanlık enerji modelleri burada sunulan teori çerçevesinde tekrar ele alınabilir ve hangisinin daha başarılı model olduğu farklı bir bakış açısıyla ortaya konabilir,
- Bilim dünyasında özellikle son 10 yılda çok büyük önem kazanan makine öğrenme algoritmaları yardımıyla bu tez çalışmasında önerilen modelin evrenin geleceğine dair öngörüleri farklı bakış açısıyla incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

Allemandi, G., Borowiec, A., Francaviglia, M. and Odintsov, S. D. Dark energy dominance and cosmic acceleration in first order formalism. ***Phys. Rev.,*** D72:063505, 2005.

Bamba, K., Capozziello, S., Nojiri, S., Odintsov, S. D. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests. Astrophysics and Space Science (2012), 342(1): 155-228. arXiv:1205.3421 [gr-qc]

Barrow, J. D. and Ottewill, A. C.***, J. Phys. A*** 16, 2757 (1983).

Bekenstein, J.D. (2004) ***Physical Review D***, 70, Article ID: 083509. https://doi.org/10.1103/PhysRevD .70. 083509

Bertolami, O. Boehmer, C. G., Harko, T. and Lobo. F. S. N. Extra force in f(R) modified theories of gravity. ***Phys. Rev.,*** D75:104016, 2007

Bertschinger, E. Testing General Relativity with Cosmology. The Royal Society, February 2011.

Boehmer, C. G. and Tamanini, N. A New Approach to Modifying Theories of Gravity. Found.Phys., 43:1478–1488, 2013.

Boehmer, C. G., Tamanini, N. and Wright. M. On galaxy rotation curves from a new approach to modified gravity. 2014.

Brans, C. and Dicke, R.H. (1961) ***Physical Review***, 124, 925. https://doi.org/10.1103/***PhysRev.***124.925

Briddle, S. Lahav, O., Ostriker, J.P. and Steinhardt, P.J. "Precision cosmology? Notjustyet," ***Science, vol***.299, pp.1532–1533,2003

Caldwell, R.R., Dave, R. and Steinhardt, P.J. ***Phys. Rev. Lett.*** 80 (1998) 1582.

Capozziello, S. and Laurentis, M. D. Extended Theories of Gravity. Phys. Rept., 509:167–321, 2011.

Carroll, S. M., Felice, A. D., Duvvuri, V. Easson, D. A., Trodden M. and Turner, M. S. ***Phys. Rev. D*** 71, 063513 (2005).

Carroll, S. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Addison Wesley, San Fransisco, 2004.

Cembranos, J. A. R. ***Phys. Rev. D*** 73, 064029 (2006).

Cembranos, J. A. R. ***Phys. Rev. Lett.*** 102, 141301 (2009).

Clifton, T., Ferreira, P. G., Padilla, A., Skordis, C. Physics Reports, Volume 513, Issues 1-3, March 2012 Pages 1-189

Copeland, E. J., Sami, M, Tsujikawa, S. Dynamics of dark energy. ***International Journal of Modern Physics D*** (2006), 15(11): 1753-1936. arXiv:hep-th/0603057.

Dirac, P.A.M. 1938. A New Basis for Cosmology. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 165 (921): 199208

Dobado, A. and Maroto, A. L. ***Phys. Lett. B*** 316, 250 (1993) [Erratum-ibid. B 321, 435 (1994)].

Dobado, A. and Maroto, A. L. ***Phys. Rev. D*** 52, 1895 (1995).

Dombriz, A. C. and Gomez, D. S. Black holes, cosmological solutions, future singularities, and their thermodynamical properties in modified gravity theories. Entropy, 14:1717–1770, 2012.

Dombriz, A. C. Some cosmological and astrophysical aspects of modified gravity theories, 2010)

Dvali, G., Gabadadze G. and Porrati, M. ***Phys. Lett.*** B485, 208 (2000).

Dvali, G.R., Gabadadze, G. and Porrati, M. (2000) ***Physics Letters B***, 485, 208-214.

Eddington, A.S. (1923) Mathematical Theory of Relativity**.** Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Einstein, A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 142-152 (1917).

Faraoni, V. (2004) Cosmology in Scalar-Tensor Gravity. Kluwer Academic, Dordrecht .https://doi.org/10.1007/978-1- 4020-1 989-0

Faraoni, V. Nine Years of f(R) Gravity and Cosmolgy, ***Springer***

Felice A. D., Tsujikawa. S. f(R) theories. Living Review on Relativity (2010),13: 3. arXiv**:**1002.4928 [gr-qc]

Felice, A D. and Tsujikawa, S. f(R) theories. Living Rev. Rel., 13:3, 2010.

Haghani, Z., Harko, T., Lobo, F. S. N., Sepangi, H. R. and Shahidi, S. Further matters in space time geometry: f(R, T, RμνT μν) gravity. ***Phys.Rev.,*** D88(4):044023, 2013.

Harko, T. and Lobo,. F. S. N. Generalized curvature-matter couplings in modified gravity. Galaxies, 2(3):410–465, 2014.

Harko, T., Koivisto, T. S. and Lobo. F. S. N. Palatini formulation of modified gravity with a nonminimal curvature-matter coupling. ***Mod. Phys. Lett.,*** A26:1467–1480, 2011.

Harko, T., Lobo, F. S. N., Nojiri, S. and Odintsov, S. D. f(R, T) gravity. ***Phys. Rev.,*** D84:024020, 2011.

Jacobson, T. and Mattingly, D. (2001) ***Physical Review D***, 64, Article ID: 024028. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.024028

Joyce, A. Lombriser, L. and Schmidt, F. Dark energy versus modified gravity, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 66, 95–122 (2016). doi: 10.1146/annurev-nucl-102115-044553

Karakatsanis, K. Dissertation, Implications of f(R) modification to gravity, 2010.

Lobo, F. S. N. The Dark side of gravity: Modified theories of gravity. 173-204:Research Signpost, ISBN 978–81–308–0341–8, 2009.

Maartens, R. (2004), Living Reviews in Relativity, 7, 7. https://doi.org/10.12942/lrr-2004-7

Newton. Philosophiae naturalis principia mathematica**.** 1687. URL https: //www.gutenberg.org/files/28233/28233-pdf.pdf

Nojiri, S. and Odintsov, S. D. Gen. Rel. Grav. 36, 1765 (2004).

Nojiri, S. and Odintsov, S. D. Int. J. Geom. Meth. ***Mod. Phys.*** 4, 115 (2007).

Nojiri, S. and Odintsov, S. D. ***Phys. Rev. D*** 68, 123512 (2003).

Nojiri, S. and Odintsov, S. D. Unified cosmic history in modified gravity: from F(R) theory to Lorentz non-invariant models. Phys. Rept., 505:59– 144, 2011

Nojiri, S. and Odintsov, S.D. (2004) General Relativity and Gravitation , 36, 1765- 1780. https://doi.org/10.1023/B:GERG.0000035950.40718.48

Nojiri, S., Odintsov, S. D Introductionto modified gravity and gravitational alternative fordar kenergy. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics (2007),4(1): 115-145. arXiv:hep-th/0601213

Odintsov, S. D. and G´omez, D. S. f(R, T, RμνT μν) gravity phenomenology and ΛCDM universe. ***Phys.Lett.,*** B725:437–444, 2013.

Padamanabhan, T. Phys. Rep**.** 380 (2003) 235, hep-th/0212290.

Parker, L., Komp, W., Vanzella, D.A.T. ***Astrophys. J***. 588 (2003) 663

Perlmutter, S. Aldering, G., Goldhaber, G. et al (The Supernova Cosmology Project). Measurements of Ω and Λ from 42 High Red shift Supernovae. ***The Astrophysical Journal*** (1999),517(2): 565-586. arXiv:astro-ph/9812133

Perlmutter, S. et al. [Supernova Cosmology Project Collaboration], ***Astrophys. J.*** 517, 565 (1999).

Pirinccioglu, N. and Sert, İ. "Differences between scalar field and scalar density solutions" , ***Can.J.Phys***. 90 (2012) 91-95.

Prinsen, E. Bachelor Thesis, Theories of Modified Gravity, 2015.

Ratra, B. and Peebles, P.J.E. ***Phys. Rev.*** D37 (1988) 3406

Revelles, A. J. L. PhD thesis, 2013,Theories of modified gravity and reconstruction schemes of cosmological models.

Riess, A. G. et al. [Supernova Search Team Collaboration], ***Astrom. J***. 116, 1009 (1998).

Riess, A. G. Filippenko, A. V., Challis, P. etal. Observational Evidence from Supernova for an Acceleating Universe and a Cosmological Constant**.** ***The Astrophysical Journal*** (1998),116(3): 1009-1038. arXiv:astro-ph/9805201

Sotiriou, T. P. and Faraoni, V. (2010). f(R) theories of gravity. ***Rev. Mod. Phys.,*** 82:451–497

Sotiriou, T. P. and Faraoni, V. f(R) theoriesof gravity. ***Review of Modiew Physics*** (2010),82,451-497.arXiv:0805.1726 [gr-qc]

Sotirou, T. P. 6+1 Lessons f(R) Gravity, **Journal of Physics:** Conference Series 189 (2009) 012039

Spergel, D. N., Verde L. Peirisetal, H.V. Firstyear Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters," ***The Astrophysical Journal Supplement***,vol.148,no.1,pp.175–194,2003.

Starobinsky A. A., ***Phys. Lett.*** 91B, 99 (1980).

Tonry, J. L. et al**.** ***Astrophys. J***. 594, 1 (2003).

Weinberg, S. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity, Jhon Willey and Sons, Newyork (1972).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Mehmet Faruk KARABAT

Doğum Yeri : Derik

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise **:** Namık Kemal Lisesi, 1995

Lisans **:** Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fizik Öğretmenliği, 2002

Yüksek Lisans **:** Bingöl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Bölümü, 2014

Bilimsel çalışmalar:

- **Makale:**
  Karabat, M. F., Arsel, İ. "Al/CuO/p-Si/Al Diyot Yapısının Elektriksel Özellikleri". ***Batman Üniversitesi Yaşam Bilimleri Dergisi*** 5 (2015): 40-53.
- **Poster Bildiri**
  Arsel, İ. ve Karabat M.F., PYM-34 Al/CuO/p-Si/Al MIS fotovoltaik yapıların elektriksel karakterizasyonu. Adım Fizik Günleri IV Dumlupınar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü 28 – 29 Mayıs 2015 Kütahya / Türkiye.