



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE KESİRLİ TÜREVLERE SAHİP KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ VE UYGULAMALARI

Serkan SÖNMEZER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE KESİRLİ TÜREVLERE SAHİP KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ VE UYGULAMALARI

Serkan SÖNMEZER

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ozan ÖZKAN

2019, 61+viii Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Vedat Suat ERTÜRK

Doç. Dr. Ozan ÖZKAN (Danışman)

Dr. Öğr. Üyesi Onur KARAOĞLU

Bu tez çalışmasında, birçok fizik ve mühendislik problemlerin matematiksel modellemesi olarak karşımıza çıkan kesirli diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri incelenmiştir. Yapılan bu çalışmada kesirli diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu (KDDM) sunulmuştur. Metodun kullanılmasıyla elde edilen sayısal çözümler tablo ve şekillerle desteklenmiştir. Elde edilen sonuçlar önerilen metodun kesirli diferensiyel denklemleri çözmek için iyi bir yöntem olduğunu ortaya koymaktadır.

Anahtar Kelimeler: Diferensiyel Dönüşüm Metodu, Kesirli Diferensiyel Denklem, Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu, Kesirli İntegral, Kesirli Türev

ABSTRACT

MS THESIS

ON SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER BY USING FRACTIONAL DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD AND APPLICATIONS

Serkan SÖNMEZER

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ozan ÖZKAN

2019, 61+viii Pages

Jury

Prof. Dr. Vedat Suat ERTÜRK

Assoc. Dr. Ozan ÖZKAN (Advisor)

Asst. Prof. Dr. Onur KARAOĞLU

In this thesis, the approximate solutions of fractional differential equations which are encountered as mathematical modelling of many phsical and engineering problems are examined. In this study, fractional differential transform method is presented to obtain approximate solutions of fractional differential equations. Numerical solutions obtained by using the method are supported by tables and figures. The results show that the proposed method is a good method for solving fractional differential equations.

Keywords: Differential Transform Method, Fractional Differential Equation, Fractional Differential Transform Method, Fractional Integral, Fractional Derivative

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Doç. Dr. Ozan ÖZKAN yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Çalışma boyunca hiçbir konuda yardım ve desteğini benden esirgemeyen, değerli görüş ve önerilerini benimle paylaşan tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Ozan ÖZKAN'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bugüne kadar manevi desteklerini benden esirgemeyen babama, anneme ve eşim Tuğçe SÖNMEZER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Serkan SÖNMEZER
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**
ABSTRACT ..... **v**
ÖNSÖZ ..... **vi**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER **7**
2.1. Diferensiyel Denklem 7
2.2. Gama Fonksiyonu 8
2.3. Beta Fonksiyonu 9
2.4. Kesirli Türev ve İntegraller 10
2.4.1. Riemann-Liouville kesirli türevi ve integrali 11
2.4.2. Caputo kesirli türevi 12
2.4.3. Caputo kesirli türevin özellikleri 14
2.5. Caputo Kesirli Türev Uygulamaları 15
3. DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU **19**
3.1. Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Metodu 19
3.2. İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Metodu 21
3.3. Üç Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Metodu 22
4. KESİRLİ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU **24**
4.1. Genelleştirilmiş Taylor Formülü 24
4.2. Bir Boyutlu Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu 26
4.2.1. Bir boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun özellikleri 27
4.3. İki Boyutlu Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu 32
4.3.1. İki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun özellikleri 33
4.4. Üç Boyutlu Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu 41
4.4.1. Üç boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun özellikleri 42
5. KESİRLİ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU UYGULAMALARI **44**
5.1. Kesirli Rosenau-Hyman Denkleminin KDDM ile Çözümü 45
5.2. Kesirli Zakharov-Kuznetsov Denkleminin KDDM ile Çözümü 50
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **56**
KAYNAKLAR **57**
ÖZGEÇMİŞ **60**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\Gamma(n)$	: Gama Fonksiyonu
$B(x,y)$	: Beta Fonksiyonu
${}_aD_t^{-\alpha}$	: Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü
${}_aD_t^{\alpha}$	: Riemann-Liouville Kesirli Türev Operatörü
${}_a^cD_t^{\alpha}$	: Caputo Kesirli Türev Operatörü
λ	: Lambda
δ	: Delta
α	: Alfa
β	: Beta
γ	: Gama
ε	: Epsilon
κ	: Kappa

Kısaltmalar

ADM	: Adomian Ayrışım Metodu
VIM	: Varyasyonel İterasyon Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
DDM	: Diferensiyel Dönüşüm Metodu
KDDM	: Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu
KdV	: Korteweg-de Vires
ZK	: Zakharov-Kuznetsov

1. GİRİŞ

Bilim dünyasında diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için hiçbir zaman tek bir yöntem yeterli olmamıştır. Problem türlerine göre yeni metotlar tanıtılmış veya var olan metotlar geliştirilmiştir. Bu yüzden herhangi bir diferensiyel denklemin çözümünün elde edilmesi için farklı metotlar kullanılmaktadır. Bu metotlar kullanılarak problemlerin teorik olarak varlık ve tekliği ile çözümlerin davranışlarıyla ilgili soruların cevapları kolaylıkla bulunabilir.

Son yıllarda problemlerin analitik çözümlerinin bulunmasına ilaveten, bu çözümlerin teknolojide kullanılabilir olması daha çok önem kazanmaktadır. Ayrıca çeşitli bilim dallarında araştırılan problemlerin matematiksel modellemelerinde; problemlerin daha doğru kurulabilmeleri için doğrusal problemlerden ziyade doğrusal olmayan problemler olarak kurulması gerekliliği sonucuna varılmıştır. Bu ise diferensiyel denklem çözümlerinin araştırılmasında artık analitik yöntemlerden daha çok sayısal ve yaklaşık çözüm metotlarının geliştirilmesini ön plana çıkarmaktadır.

Son zamanlarda diferensiyel denklem çözümlerinde analitik yöntemler yetersiz kaldığı için sayısal metotlar çok önemli rol oynamaktadır. Hızlı bir şekilde gelişen teknoloji ve bilgisayar yazılımları ile bilim dallarında ortaya çıkan karmaşık problemlerin sayısal metotlar yardımıyla çözülebilmeleri daha da kolaylaşmıştır. Bugüne kadar birbirinden farklı birçok sayısal metot ortaya konulmuştur. Son yıllarda ise daha çok; basit, kolay bir şekilde algoritması oluşturulabilen ve dolayısıyla da programlanabilen, çok daha hızlı sonuçlanan hem doğrusal hem de doğrusal olmayan karmaşık problemlerin çözümünde kullanılabilen metotlara ihtiyaç duyulmuştur. Son dönemlerde bu tür özellikleri taşıyan metotlardan bazılarını; Laplace metodu, Fourier metodu, Adomian ayrışım metodu, Homotopi perturbasyon metodu, Newton metodu, Varyasyonel iterasyon metodu ve Diferensiyel dönüşüm metodu olarak sayabiliriz.

Yapılan bu tez çalışması ise yukarıda sıralanan metotlardan biri olan diferensiyel dönüşüm metodunun kesirli mertebeden bazı kısmi diferensiyel denklemlere uygulanmasını içermektedir.

Zhou (1986) tarafından verilmiş olan diferensiyel dönüşüm metodunun diğer metotlardan farklı olarak en önemli ve ayırt edici özelliklerinden biri; diferensiyel denklem problemlerini cebirsel bir denkleme dönüştürmek için kullanılan dönüşümde yalnızca türev ifadeleri olduğundan algoritma hem daha hızlı sonuç vermekte hem de çok daha basit hesaplamalar içermektedir. Bununla birlikte geriye sadece cebirsel

denklem çözümü yapmak kalmaktadır. Yöntemin en büyük avantajlarından bir diğeri ise yöntemin hem doğrusal hem de doğrusal olmayan problemlerin çözümlerinde rahatlıkla kullanılabiliyor olmasıdır.

Diferensiyel dönüşüm metodunun bazı kesirli diferensiyel denklemlere uygulandığı bu tez çalışmasının konusunu oluşturan kesirli diferensiyel denklemler ise birçok çalışmaya imkân sağlamaktadır. Bunun temel sebebi kesirli diferensiyel denklemlerin, birçok problemin gerçeğe daha uygun modellenmesinde iyi bir araç olmasıdır. Ayrıca kesirli diferensiyel denklemler sayesinde problemleri hesaplamada hassasiyet artarak daha iyi sonuçlar elde edilmektedir.

Son yüzyılda kesirli diferensiyel denklemler, akışkanlar mekaniği, elektrik mühendisliği, elektrokimya, viskoelastisite, biyoloji, biyofizik, biyomühendislik, sinyal ve görüntü işleme, mekanik, mekatronik, fizik ve kontrol teori gibi mühendisliğin ve matematiğin hemen her alanında uygulanmıştır.

Diferensiyel dönüşüm metodu ilk olarak Zhou (1986) tarafından yapılan çalışmada kurulmuştur. Bu çalışmasında metodu, elektrik akım analizinin doğrusal ve doğrusal olmayan başlangıç değer probleminin çözümünde kullanmıştır. Chen ve Ho (1996) çalışmalarında diferensiyel dönüşüm metodunu kullanarak özdeğer problemlerin çözümü için yeni bir yöntem vermişlerdir. Chen ve Ho, metodu kullanarak *i*. özdeğeri ve özdeğer fonksiyonunu kolaylıkla bulabilmişlerdir. Chen ve Liu (1998) çalışmalarında, diferensiyel dönüşüm metodunu doğrusal olmayan ısı yayılımı problemlerinin çözümü için kullanmışlardır. Ayrıca analitik çözümün spektrumunun bulunması için yeni bir prosedür geliştirilmiş ve çözüm Taylor serileri yardımıyla verilmiştir. Chen ve Ho (1999) kısmi türevli diferensiyel denklemlerin diferensiyel dönüşüm metodu ile çözülebilmeleri için gerekli olan iki boyutlu diferensiyel dönüşüm metodunu tanımlamışlardır. Bu makaleye kadar yalnızca adi türevli diferensiyel denklemler için uygulanabilen diferensiyel dönüşüm metodu, bu makale ile kısmi türevli diferensiyel denklemler için de kullanılmaya başlanmıştır. Ayaz (2003) çalışmasında iki boyutlu diferensiyel dönüşüm metodu için bazı teoremler vermiştir. Doğrusal ve doğrusal olmayan kısmi türevli başlangıç değer problemleri, bu çalışmada ilave edilen teoremler yardımıyla çözülmüşlerdir. Ayaz (2004a) çalışmasında ise üç boyutlu diferensiyel dönüşüm metodu ve bununla ilgili teoremler vermiştir. Bu çalışmada verilen yeni teoremler yardımıyla bazı kısmi diferensiyel denklem sistemleri çözülmüştür. Ayaz (2004b) ikinci çalışmasında doğrusal cebirsel-diferensiyel denklemlerin çözümünü diferensiyel dönüşüm metodu kullanarak incelemiş ve elde

edilen sonuçlar ile analitik çözümleri karşılaştırmıştır. Bildik ve ark. (2006) tarafından yapılan çalışmada farklı türlerdeki kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümü hem Adomian ayrışım metodu ile hem de Diferensiyel dönüşüm metoduyla yapılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Odibat ve Shawagfeh (2007) çalışmalarında mertebesi $0<\alpha\leq 1$ biçiminde türevler içeren klasik Taylor formülünden elde edilen yeni bir genelleştirilmiş Taylor formülü tanımlamışlardır. Arikoglu ve Ozkol (2007) diferensiyel dönüşüm metodunu kesirli mertebeden diferensiyel denklemlere uygulamıştır. Aynı zamanda kesirli Bagley-Torvik ve Ricatti denklemlerini içeren çeşitli problemler bu metotla çözülmüştür. Metodun uygulanabilirliği açışından son derece basit, kolay ve doğruluğunun yüksek olduğu gösterilmiştir.

Odibat ve ark. (2008) yaptıkları çalışmada kesirli diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri için bir boyutlu genelleştirilmiş Diferensiyel dönüşüm metodunu sunmuştur. Metot geliştirilirken genelleştirilmiş Taylor formülü ve Caputo anlamında türevlerden faydalanılmıştır. Erturk ve ark. (2008) yine yaptıkları çalışma ile genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm metodunu uygun başlangıç şartlarıyla verilmiş olan doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferensiyel denklemlere uygulamışlardır. Ertürk ve Momani (2008) tarafından yapılan diğer çalışmada kesirli mertebeden doğrusal ve doğrusal olmayan denklem sistemlerine diferensiyel dönüşüm metodu uygulanmıştır. Çalışmada elde edilen sonuçlar ile diğer metotlarla elde edilen sonuçlar kıyaslanmış ve diferensiyel dönüşüm metodunun analitik çözüme daha yakın sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Arikoglu ve Ozkol (2009) yaptıkları bu çalışmada kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu Volterra tipi kesirli integro diferensiyel denklemlere uygulamışlardır. Odibat ve Momani (2008) çalışmalarında kesirli doğrusal kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için iki boyutlu genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm metodunu sunmuşlardır. Bir boyutlu genelleştirilmiş diferensiyel dönüşüm metodunun anlatıldığı çalışmalarında olduğu gibi yeni yöntemin temelini genelleştirilmiş Taylor formülü ve Caputo anlamında türev oluşturmaktadır. Çalışmada doğrusal kesirli kısmi diferensiyel denklemler incelenmiştir. Momani ve ark. (2007) çalışmalarında genelleştirilmiş iki boyutlu diferensiyel dönüşüm metodunu kesirli difüzyon-dalga denklemlerini çözmek için uygulamışlardır. Momani ve Odibat (2008) çalışmalarında uzay ve zaman kesirli kısmi doğrusal olmayan diferensiyel denklemleri çözmek için genelleştirilmiş iki boyutlu diferensiyel dönüşüm metodunu kullanmışlardır. Yöntemin problemlere uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar metodun doğrusal olmayan

problemler için uygun ve çok etkili olduğunu göstermiştir. Kurulay ve ark. (2010) yaptıkları çalışmada ise doğrusal olmayan kesirli kısmi diferensiyel denklem sistemlerini çözmek için üç boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu geliştirmişlerdir. Bu metodun homotopi analiz metoduna göre daha kullanışlı ve geçerli olduğu gösterilmiştir. Kurulay ve Bayram (2010) yine yaptıkları çalışma ile kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu, başlangıç şartları ile verilmiş olan kesirli Korteweg-de Vires ve kesirli iyileştirilmiş Korteweg-de Vires (KdV) denklemlerine uygulamışlardır. Nazari ve Shahmorad (2010) çalışmalarında kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu, yerel olmayan sınır şartları ile verilen kesirli integro diferensiyel denklemlere uygulamışlardır. Al-rabtah ve ark. (2010) yaptıkları çalışma ile kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu kesirli salınım denklemlerinde kullanmışlardır. Yöntemin uygulanmasıyla kesirli salınım denklemlerinin davranışlarını incelemede kullanılabilecek etkili algoritmalar elde edilmiştir. Ertürk (2011) yaptığı çalışmada kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu, kesirli mertebeden Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerlerini hesaplamada kullanmıştır. Bulunan sonuçlar diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Liu ve Hou (2011) yaptıkları bu çalışmada kesirli Burgers denklem sistemlerinin sayısal çözümlerini elde etmek için kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu kullanmışlardır. İbiş ve ark. (2011) çalışmalarında kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ile kesirli diferensiyel cebirsel denklemler üzerine uygulama yapmışlardır. Metodun kullanılmasıyla elde edilen sonuçlar ile homotopi analiz metodu kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış ve yöntemin daha etkili sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Garg ve ark. (2011) yaptıkları bu çalışmada kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu, başlangıç şartları ile verilmiş olan homojen ve homojen olmayan kesirli telgraf denklemlerine uygulamışlardır. Mohammed ve ark. (2011) yaptıkları çalışmada kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu uygun başlangıç şartlarıyla verilmiş olan bulanık kesirli diferensiyel denklemlere uygulamışlardır. Erturk ve ark. (2012) yaptıkları çalışma ile kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun, kesirli popülasyon büyüme modelinin çözümü için ideal bir sayısal yöntem olduğunu göstermişlerdir. Secer ve ark. (2012) çalışmalarında doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli kısmi diferensiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu kullanmış ve diğer yöntemlerle karşılaştırmışlardır. Merdan ve ark. (2012) yaptıkları çalışma ile kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu başlangıç ve sınır şartları verilmiş olan Fornberg-Whitham denklemine uygulamışlardır. Çetinkaya ve Kıymaz (2013) yaptıkları bu

çalışmada kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu, başlangıç şartlarıyla verilmiş olan kesirli difüzyon denklemine uygulamışlardır. Ghazanfari ve Ebrahimi (2015) çalışmalarında bulanık kesirli ısı denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kesirli diferensiyel dönüşüm metodunu kullanmışlardır. Yapılan çalışmada metodun bulanık ısı denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmede etkili ve basit olduğu belirtilmiştir.

Bu çalışmada kesirli mertebeden bazı kısmi diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri özellikle kesirli diferensiyel dönüşüm metodu kullanılarak incelenmiştir. Çalışmada ilk olarak sıvıların düşerken oluşturdukları desenleri ifade etmede kullanılan kesirli Rosenau-Hyman denkleminin yaklaşık çözümü incelenmiştir. Daha sonrasında bir KdV denklemi olan kesirli Zakharov-Kuznetsov (2,2,2) özel denkleminin kesirli Diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümü incelenmiştir. Çalışmada özellikle, ele alınan bu denklemlerin kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ile çözümlerine literatürde rastlanmamıştır.

Molliq ve Noorani (2012) çalışmalarında kesirli Rosenau-Hyman denklemini ele almışlardır. Çalışmalarında kesirli Rosenau-Hyman denklemini çözmek için Varyasyonel iterasyon metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu kullanılmıştır.

Zakharov ve Kuznetsov (1974) yapmış oldukları çalışmada düşük basınçlı manyetik plazmadaki üç boyutlu iyon-ses çözümlerinin varlığını göstermişlerdir. Munro ve Parkes (1999) modifiye edilmiş Zakharov-Kuznetsov (ZK) denkleminin çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir. Yine Munro ve Parkes (2000) çalışmalarında özel olarak modifiye edilmiş Zakharov-Kuznetsov denkleminin dalga çözümlerinin davranışlarını incelemiştir. Biazar ve ark. (2009) Zakharov-Kuznetsov denklemlerini çözmek için Homotopi pertürbasyon metodunu kullanmışlardır. Inc (2007) doğrusal olmayan Zakharov-Kuznetsov denklemlerini Adomian ayrışım metodu ile çözmeye çalışmıştır. Çalışmasında ZK (2,2,2) ve ZK (3,3,3) olan iki özel durumu incelemiş ve ZK (m,n,k) çözümü için genel bir formül ortaya koymuştur. Molliq ve ark. (2009) kesirli Zakharov-Kuznetsov denkleminin çözümünü bulmak için varyasyonel iterasyon metodunu kullanmışlardır. Elde edilen çözümler ile analitik çözümler karşılaştırılmış ve metodun çok etkili ve basit bir şekilde kullanabileceği gösterilmiştir. Hesam ve ark. (2010) yaptıkları çalışmada ZK (m,n,k) tipindeki Zakharov-Kuznetsov denklemlerinin çözümlerini bulmak için diferensiyel dönüşüm metodunu kullanmışlardır. Özel olarak ZK (2,2,2) ve ZK (3,3,3) denklemleri çözülmüştür. Hammouch ve Mekkaoui (2013) zaman kesirli Zakharov-Kuznetsov denkleminin

yaklaşık çözümünü kesirli iterasyon metodu ile elde etmiştir. Elde edilen yaklaşık çözümlerden metodun son derece etkili olduğu gösterilmiştir.

Yüksek lisans tez çalışması olarak sunulan bu çalışma altı ana bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde; kesirli Diferensiyel dönüşüm metodu üzerine yapılan çalışmalar kısaca özetlenmiştir. İkinci bölümde; kesirli analiz ile ilgili temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde; kesirli mertebeden diferensiyel dönüşüm metodunun temelini oluşturan Diferensiyel dönüşüm metodunun tanımları ve genel özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümünde; kesirli Diferensiyel dönüşüm metodu anlatılmıştır. Beşinci bölümde; kesirli Diferensiyel dönüşüm metodu ile bazı kesirli kısmi diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca hesaplamada kullanılan Maple 13 kodlarına beşinci bölüm içinde yer verilmiştir. Son olarak çalışmayla ilgili sonuç ve öneriler kısmı altıncı bölümde verilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde; tez çalışmasında kullanılan metotla ilgili gerekli olan temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. İlk olarak adi türevli diferensiyel denklemlerin, kısmi türevli diferensiyel denklemlerin ve kesirli kısmi türevli diferensiyel denklemlerin genel ifadeleri verilmiştir. Ardından kesirli analizin temel fonksiyonları olan Gama fonksiyonu ve Beta fonksiyonu tanıtılmıştır. Daha sonra ise klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmesi olan kesirli mertebeden türev ve integral ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

2.1. Diferensiyel Denklem

Bağımlı değişkenlerin türevlerini içeren her bağıntı bir diferensiyel denklem olarak karşımıza çıkar. Bir diferensiyel denklemde bir bağımlı değişken bir bağımsız değişkene bağlı ise bu diferensiyel denkleme **adi diferensiyel denklem** denir.

Adi türevli diferensiyel denklem,

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

şeklinde yazılır. Bu diferensiyel denklem n. mertebeden türevli adi diferensiyel denklem olarak adlandırılır.

Bir bağımlı değişken birden fazla bağımsız değişkene bağlı ise bu diferensiyel denkleme kısmi türevli diferensiyel denklem denir. Bir kısmi türevli diferensiyel denklem, bir bağımlı değişken ve bu bağımlı değişkenlerin türevlerini içeren bir bağıntı olarak tanımlanır.

Örneğin, $u = u(x,t)$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. Yani u bağımlı değişkeni x ve t bağımsız değişkenlere bağlı olsun. Bu değişkenleri içeren bir kısmi türevli diferensiyel denklem en genel halde,

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, ...) = 0$$

şeklinde yazılır. Kısmi türevli diferensiyel denklemler tamsayı mertebelidir. Genel haliyle verilmiş F bağıntısındaki türevlerden en az birisinin mertebesinin kesirli olması

durumunda bu diferensiyel denkleme **kesirli kısmi türevli diferensiyel denklem** denir (Podlubny, 1999).

Örneğin, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ diferensiyel denklemi bir kısmi türevli diferensiyel denklemdir. $\frac{\partial^{2.3} u}{\partial x^{2.3}}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ ise kesirli kısmi türevli diferensiyel denklemdir.

Bir diferensiyel denklem doğrusal ve doğrusal olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken ve türevleri birinci dereceden ise ve aynı zamanda denklem bağımlı değişken ve türevlerinin çarpımını içermiyorsa bu denklemlere doğrusal (lineer); aksi halde doğrusal olmayan (lineer olmayan) diferensiyel denklemler denir.

2.2. Gama Fonksiyonu

Kesirli analizin temel fonksiyonlarından biri; $n!$ i tam olmayan sayılara hatta kompleks sayılara genelleyen Euler'in $\Gamma(n)$ gama fonksiyonudur. Gama fonksiyonunun en basit anlamı, faktöriyelin bütün reel sayılar için genelleştirilmesidir.

$\Gamma(n)$ ile ifade edilen gama fonksiyonu,

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt \tag{2.1}$$

şeklindeki integralle ifade edilir (Miller ve Ross, 1993). Burada $n\in N$ için (2.1) eşitliğinden

$$n!=\int_0^{\infty} t^{n}e^{-t}dt \tag{2.2}$$

integraline geçiş yapmak mümkündür. Buradan da görüleceği üzere gama fonksiyonuna faktöriyel fonksiyonu da denir. $n>0$ için bu fonksiyon yakınsaktır.

Burada $n = 1, 2, 3, 4$ için

$\Gamma(1) = 0! = 1$

$\Gamma(2) = 1! = 1$

$\Gamma(3) = 2! = 2.1$

$\Gamma(4) = 3! = 3.2.1$

eşitlikleri mevcut olup, bu ifadeler genelleştirilir ise

$$n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \tag{2.3}$$

elde edilir (Podlubny, 1999).

Çizelge 2.1. Çalışmanın ileri aşamalarında kullanılacak gama fonksiyonuna ilişkin sayısal değerler

$\Gamma(0)$	Tanımsız
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma(\infty)$	∞

2.3. Beta Fonksiyonu

Çoğu durumda gama fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine beta fonksiyonu olarak adlandırılan bir bağıntı kullanmak daha uygundur. İki değişkenli olan beta fonksiyonu genellikle,

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\quad \mathrm{Re}(x)>0,\mathrm{Re}(y)>0 \tag{2.4}$$

şeklinde ifade edilir (Podlubny, 1999). Beta fonksiyonunun en belirgin özelliklerinden birisi beta fonksiyonu ile gama fonksiyonu arasındaki ilişkiyi veren ve Laplace dönüşümünden elde edilen,

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.5}$$

eşitliğidir. Ayrıca buradan da

$$B(x,y)=B(y,x)$$

elde edilir (Podlubny, 1999).

2.4. Kesirli Türev ve İntegraller

Kesirli türev ifadesi birçok kaynakta da belirtildiği gibi ilk defa 1695 yılında L'Hospital'ın Leibniz'e yazdığı mektupta geçmektedir (Ross, 1977). L'Hospital'ın mektubunda yer alan "Tam sayı basamaktan türevler kesirli basamaktan türevlere genişletilebilir mi?" sorusu, kesirli diferensiyel kavramının ilk ortaya çıkışı olarak gösterilebilir. Leibniz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Lagrange, Fourier, Euler ve Abel gibi birçok matematikçi de aynı konu üzerine çalışmışlardır (Loverro, 2004). Kesirli türev için literatürde çeşitli tanımlar verilmiştir. Bunlardan bazıları Riemann-Liouville, Caputo, Euler, Fourier, Weyl, Riesz kesirli türevleridir (Podlubny, 1999). Yapılan çalışmalarda belirli şartlar altında bu tanımların eşdeğer olduğu gösterilmiştir (Oldham ve Spanier, 1974; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1999). Kesirli analizde birden fazla türev tanımının olması, problemin türüne göre en uygun olanının kullanılmasını ve en iyi çözümün elde edilmesini sağlar.

Bu bölümde ilk olarak Riemann-Liouville kesirli türev ve kesirli integral tanımları ile Caputo kesirli türev tanımı verilecektir. Ardından Caputo kesirli türevin bazı özellikleri verilip son olarak bazı fonksiyonların kesirli türevinin Caputo kesirli türev tanımıyla hesaplanması gösterilecektir.

2.4.1. Riemann-Liouville kesirli türevi ve integrali

Kesirli mertebeden türevlerin birbirinden farklı bir çok tanımı literatürde mevcuttur (Podlubny, 1999). Fakat yapılan çalışmalar incelendiğinde, bu tanımların aslında Riemann-Liouville türev tanımının genelleştirilmiş şekli ya da belirli şartlar altında Riemann-Liouville türev tanımı ile bağlantılı olduğu görülmektedir. Çalışmamızda tamsayı mertebeli başlangıç koşullarını içeren kesirli diferensiyel denklemler tercih edildiğinden, bu tip denklemler için daha kullanışlı olan Caputo türev tanımı kullanılmıştır. Caputo türev tanımlanırken, Riemann-Louville türev tanımından yararlanıldığı için önce Riemann-Liouville kesirli integral ve kesirli türev tanımları verilecektir.

Bazı kaynaklarda Riemann-Liouville kesirli integral ve kesirli türev tanımları ve teoremleri detaylı şekilde verilmiştir (Oldham ve Spanier, 1974; Kilbas ve ark., 2006).

Çalışmamızda ise sadece kullanacağımız tanım ve özelliklere yer verilecektir.

Tanım 2.1. $a \geq 0$ olmak üzere α. mertebeden ($\alpha > 0$) ve ${}_aD_t^{-\alpha} = {}_aI_t^{\alpha}$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integral operatörü,

$$ {}_aD_t^{-\alpha} f(t) = {}_aI_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad , \qquad t > a \tag{2.6} $$

biçiminde tanımlanır. Özel olarak $\alpha = 0$ için Riemann-Liouville kesirli integral operatörü, ${}_aI_t^0 f(t) = f(t)$ olarak bulunur (Podlubny, 1999).

$f \in C_{\alpha}$, $\alpha, \beta > 0$, $a \geq 0$ ve $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

i) $\left({}_aI_t^{\alpha} \, {}_aI_t^{\beta} f \right)(t) = \left({}_aI_t^{\alpha+\beta} f \right)(t)$

ii) $\left({}_aI_t^{\alpha} \, {}_aI_t^{\beta} f \right)(t) = \left({}_aI_t^{\beta} \, {}_aI_t^{\alpha} f \right)(t)$

iii) ${}_aI_t^{\alpha} x^{\gamma} = \frac{x^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \gamma+1)$

Beta fonksiyonunun (2.5) özelliği kullanılırsa,

$$ {}_aI_t^{\alpha} x^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma} $$

eşitliği elde edilir.

Bir $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi, $n-\alpha$ mertebeli kesirli integral yardımıyla tanımlanır.

Tanım 2.2. $\alpha > 0$, $a \in R$, $t > a$ ve $n-1 < \alpha \leq n$ olmak üzere f fonksiyonunun α mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n {}_aD_t^{\alpha-n} f(t) \tag{2.7} $$

biçiminde tanımlanır. Özel olarak,

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = {}_aD_t^n \left({}_aI_t^{n-\alpha} f(t) \right) = \begin{cases} \dfrac{d^n}{dt^n}\left[\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right] , & n-1 < \alpha < n \\ \dfrac{d^n}{dt^n} f(t) , & n = \alpha \end{cases} \tag{2.8} $$

şeklinde yazılabilir (Podlubny, 1999).

2.4.2. Caputo kesirli türevi

Kesirli türev tanımları arasında en çok kullanılan Riemann-Liouville kesirli türev tanımıdır. Ancak modern teknolojinin gelişimiyle beraber uygulamalarda bu tanımın bazı değişikliklere ihtiyaç duyulduğu görülmüştür. Uygulamadaki problemler, başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren kesirli diferensiyel denklemleri gerektirmektedir. Riemann-Liouville yaklaşımı ise $t = \alpha$ noktasında Riemann-Liouville kesirli türevinin limit değerlerini içeren başlangıç şartlarını içermektedir. Örneğin;

$$\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-1} f(t) = b_1$$
$$\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-2} f(t) = b_2$$
$$\vdots$$
$$\lim_{t\to a} {}_aD_t^{\alpha-n} f(t) = b_n$$

şeklindedir. Burada $k = 1, 2, ..., n$ olmak üzere b_k 'lar verilen sabitlerdir.

Böyle başlangıç koşulları ile verilen başlangıç değer problemleri Riemann-Liouville türev tanımı ile başarılı bir şekilde çözülebilmektedir. Fakat bu çözümler pratikte kullanışlı değildir. Çünkü bu tip başlangıç koşullarına fiziksel bir yorum yapılamaz (Podlubny, 1999).

İtalyan matematikçi M. Caputo tarafından 1960'lı yıllarda önerilen Caputo kesirli türev tanımının bu tip problemler için daha kullanışlı olduğu görülmüştür (Caputo, 1967).

Caputo yaklaşımının en önemli avantajı, Caputo türevli kesirli diferensiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile tamsayı mertebeli diferensiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır. Bu yüzden yapılan son çalışmalarda Riemann-Liouville anlamında kesirli türev operatörü yerine Caputo anlamında kesirli türev operatörü tercih edilmektedir.

Riemann-Liouville türev tanımı ile Caputo türev tanımı arasındaki diğer bir önemli fark ise sabitin Caputo türevinin sıfır olmasına rağmen, sabitin Riemann-Liouville kesirli türevi α 'nın sonlu bir değeri için sıfıra eşit değildir.

Bizimde çalışmamızda kesirli türev olarak Caputo kesirli türev operatörü kullanılmaktadır. Caputo kesirli türev tanımının özellikleri detaylı şekilde ilk olarak Caputo (1967) tarafından ve daha sonra bazı kaynaklarda verilmiştir (Podlubny, 1999; Momani ve Al-Khaled, 2005). Bu sebepten çalışmamızda sadece kullanılacak özellikler verilecektir.

Tanım 2.3. $n-1 < \alpha \le n$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$, $f \in C_{-1}^n$ olmak üzere, f fonksiyonunun α. mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo kesirli türev tanımı,

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \left({}_aI_t^{n-\alpha} D^n f(t) \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau & , \ n-1 < \alpha < n \\ \dfrac{d^n}{dt^n} f(t) & , \ n = \alpha \end{cases} \tag{2.9}$$

biçiminde tanımlanır (Caputo, 1967).

Ayrıca $n-1<\alpha\le n$, $n\in\mathbb{N}$, $x>0$ ve $f\in C_\alpha^n$, $\alpha\ge -1$ olmak üzere, Caputo kesirli türev tanımına ait,

i) $\left({}_aD_t^\alpha\ {}_aI_t^\alpha f\right)(t)=f(t)$

ii) $\left({}_aI_t^\alpha\ {}_a^CD_t^\alpha f\right)(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$

özellikleri mevcuttur (Podlubny, 1999).

Uyarı : Caputo kesirli türev operatörü ${}_a^CD_t^\alpha$ olarak yazılsada çalışmamızda sadece Caputo anlamında kesirli mertebeden türevler kullanıldığı için Caputo kesirli türev operatörü ${}_aD_t^\alpha$ ile gösterilecektir.

2.4.3. Caputo kesirli türevin özellikleri

Lemma 2.1. Doğrusallik Özelliği

Kesirli türevler tamsayı türevlerine benzer bir doğrusallik özelliğine sahiptir. Yani $\lambda_1,\lambda_2\in R$ olmak üzere α. mertebeden ($\alpha>0$ ve $n-1<\alpha\le n$, $n\in\mathbb{N}$) Caputo kesirli türevi için

$${}_aD_t^\alpha(\lambda_1 f(t)+\lambda_2 g(t))=\lambda_1\,{}_aD_t^\alpha f(t)+\lambda_2\,{}_aD_t^\alpha g(t)$$

yazılabilir ki bu özellik Caputo tanımından kolayca elde edilebilir (Podlubny, 1999).

Lemma 2.2. Homojen Olma Özelliği

A bir sabit ve α. mertebeden ($\alpha>0$ ve $n-1<\alpha\le n$, $n\in\mathbb{N}$) Caputo kesirli türevi için homojen olma özelliği,

$$D_t^\alpha\left[Af(t)\right]=A\left[D_t^\alpha f(t)\right]$$

ile verilir (Podlubny, 1999).

Lemma 2.3. Kesirli Türevler için Leibniz Kuralı

$f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının türevleri $[a,t]$ aralığında sürekli olsun. $\alpha > 0$ ve $n-1 < \alpha \le n \ \ (n \in \mathbb{N})$ için

$$ {}_aD_t^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \left[{}_aD_t^{\alpha} g(t) \right] \left[{}_aD_t^{(\alpha-k)} f(t) \right] $$

ifadesi Leibniz kuralı olarak adlandırılır. Leibniz kuralı özellikle kesirli türevi bilinen bir fonksiyon ile bir polinomun çarpımının kesirli türevini hesaplamada çok kullanışlıdır (Podlubny, 1999).

2.5. Caputo Kesirli Türev Uygulamaları

Çalışmanın bu kısmında bazı fonksiyonların kesirli türevinin, bir önceki bölümde verilen Caputo kesirli türev tanımıyla hesaplanması gösterilecektir.

Örnek 2.5.1. $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}.$ türevini bulalım.

Çözüm : Caputo kesirli türev tanımı kullanılırsa;

$0 < \frac{1}{2} < 1, \quad n = 1$ olmak üzere,

$$ D_x^{\frac{1}{2}}\{x\} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dt}\{t\} dt $$

$$ = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \qquad , \qquad \{t = ux, \ dt = xdu\} $$

$$ = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \qquad , \qquad \left\{ B\left(1,\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \right\} $$

$$ = \frac{B\left(1,\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} $$

dir. (2.5) beta fonksiyonunun özelliği ve Çizelge 2.1'den $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$D_x^{\frac{1}{2}}\{x\}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Polinom fonksiyonların kesirli mertebeden türevleri Caputo türev tanımı kullanılarak bulunabileceği gibi aynı zamanda gama fonksiyonu yardımıyla daha pratik bir şekilde de hesaplanabilir.

$$f(x)=x^k \qquad (k\in\mathbb{N})$$

polinom fonksiyonunun $\alpha.$ mertebeden kesirli türevi,

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^k=\frac{k!}{(k-\alpha)!}x^{k-\alpha}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifade gama fonksiyonu yardımı ile

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^k=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}x^{k-\alpha} \tag{2.10}$$

olarak elde edilir (Podlubny, 1999).

Örneğin; $f(x)=x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}.$ türevi bulunurken (2.10) eşitliğinde $\alpha=\frac{1}{2}$ ve $k=1$ yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+1\right)}x^{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında Caputo kesirli türev tanımıyla bulunan sonuç ile gama fonksiyonu ile elde edilen sonucun aynı olduğu görülmektedir.

Örnek 2.5.2. $f(x)=x^3$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}.$ türevini bulalım.

Çözüm : Caputo kesirli türev tanımı kullanılırsa;

$0<\frac{1}{2}<1, \quad n=1$ olmak üzere,

$$D_x^{\frac{1}{2}}\{x^3\} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dt}\{t^3\}dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}3t^2dt \quad , \quad \{t=ux,\ dt=xdu\}$$
$$= \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}u^2du \quad , \quad \left\{B\left(3,\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}u^2du\right\}$$
$$= \frac{B\left(3,\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}3x^{\frac{5}{2}}$$

elde edilir.

(2.5) beta fonksiyonunun özelliği ve Çizelge 2.1'den $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$D_x^{\frac{1}{2}}\{x^3\}=\frac{16}{5\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}} \tag{2.11}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde (2.10) formülünde $\alpha=\frac{1}{2}$ ve $k=3$ yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d^{\frac{1}{2}}x^3}{dx^{\frac{1}{2}}}&=\frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma\left(3-\frac{1}{2}+1\right)}x^{3-\frac{1}{2}}\\&=\frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}x^{\frac{5}{2}}\\&=\frac{16}{5\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}}\end{aligned} \tag{2.12}$$

elde edilir. (2.11) ile (2.12)'den elde edilen sonuçların aynı olduğu görülmektedir.

3. DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

Zhou (1986) tarafından tanımlanmış olan Diferensiyel dönüşüm metodu (DDM) ilk olarak elektrik devreleri analizi içinde yer alan doğrusal ve doğrusal olmayan başlangıç değer problemlerinin çözümü için kullanılmıştır. Taylor seri açılımını temel alan bu metodun en önemli avantajlarından biri problemde verilen diferensiyel denklemi basit ve sade bir yolla cebirsel bir denkleme dönüştürmesidir.

Diferensiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürerek çözen DDM pratik, zaman kazandırıcı ve ardışık tekrar yapısına sahip bir metot olduğundan bilgisayar programlama yardımıyla çözüme de uygundur. Literatüre bakıldığında DDM ile her mertebeden doğrusal ve doğrusal olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümleri elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen çözümlere yarı analitik çözüm adı da verilmektedir. Diferensiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerini veren ve son yıllarda birçok bilimsel çalışmaya konu olan Adomian ayrışım metodu (ADM), Homotopi pertürbasyon metodu (HPM), Varyasyonel iterasyon metodu (VIM) gibi yöntemler mevcuttur (Adomian, 1988; He, 1997; He, 1999).

Bu bölümde, diferensiyel denklemde bulunan bağımsız değişken sayısına göre farklı isimlendirilen metodun daha iyi anlaşılması için öncelikle bir değişkene bağlı diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir boyutlu diferensiyel dönüşüm metodu ve özellikleri ispatsız ifade edilecektir. Daha sonra iki ve üç boyutlu diferensiyel dönüşüm metotları tanıtılarak özellikleri ispatsız verilecektir.

3.1. Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Tanım 3.1. Bir değişkenli $y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $Y(k)$ ($k \in \mathbb{N}$) olmak üzere, $y(x)$ fonksiyonunun bir boyutlu diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Chen ve Ho, 1996).

Tanım 3.2. $Y(k)$ dönüşüm fonksiyonunun ters dönüşüm fonksiyonu,

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}Y(k)x^k \tag{3.2}$$

biçiminde tanımlanır. (3.2) eşitliğinde (3.1) ifadesi yazılarak aşağıdaki (3.3) eşitliği elde edilir.

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}x^k \tag{3.3}$$

(3.3) eşitliğinden de görüldüğü üzere diferensiyel dönüşüm metodunda Taylor seri açılımından faydalanılmaktadır (Chen ve Ho, 1996).

$y(x)$ orijinal fonksiyon ve $Y(k)$ bu fonksiyona ait diferensiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere, bazı cebirsel işlem içeren fonksiyonların diferensiyel dönüşüm fonksiyonu Çizelge 3.1'de verilmiştir (Chen ve Ho, 1996).

Çizelge 3.1. Bazı fonksiyonların bir boyutlu diferensiyel dönüşüm fonksiyonları

Orijinal Fonksiyon	**Dönüşüm Fonksiyonu**
$y(x)=u(x)\pm v(x)$	$Y(k)=U(k)\pm V(k)$
$y(x)=au(x)$	$Y(k)=aU(k)$
$y(x)=\frac{du(x)}{dx}$	$Y(k)=(k+1)U(k+1)$
$y(x)=\frac{d^2u(x)}{dx^2}$	$Y(k)=(k+1)(k+2)U(k+2)$
$y(x)=\frac{d^ru(x)}{dx^r}$	$Y(k)=(k+1)(k+2)...(k+r)U(k+r)=\frac{(k+r)!}{k!}U(k+r)$
$y(x)=u(x)v(x)$	$Y(k)=\sum_{l=0}^{k}U(l)V(k-l)$
$y(x)=x^m$	$Y(k)=\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$

3.2. İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Tanım 3.3. İki değişkenli $w(x,y)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k,h)$ olmak üzere, $w(x,y)$ fonksiyonunun iki boyutlu diferensiyel dönüşümü,

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır (Chen ve Ho, 1999).

Tanım 3.4. $W(k,h)$ dönüşüm fonksiyonunun ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}W(k,h)x^{k}y^{h} \tag{3.5}$$

biçiminde tanımlanır. (3.4) ve (3.5) eşitlikleri göz önüne alınırsa aşağıdaki (3.6) eşitliği elde edilir (Chen ve Ho, 1999).

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}x^{k}y^{h} \tag{3.6}$$

İki boyutlu diferensiyel dönüşüm kavramının iki boyutlu Taylor seri açılımından elde edildiği (3.6) eşitliğinden görülmektedir.

$w(x,y)$ iki değişkenli fonksiyon ve $W(k,h)$ bu fonksiyona ait diferensiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere, bazı cebirsel işlem içeren fonksiyonların diferensiyel dönüşüm fonksiyonu Çizelge 3.2'de verilmiştir (Chen ve Ho, 1999).

Çizelge 3.2. Bazı fonksiyonların iki boyutlu diferensiyel dönüşüm fonksiyonları

Orijinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$w(x,y)=u(x,y)\pm v(x,y)$	$W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$
$w(x,y)=\lambda u(x,y)$	$W(k,h)=\lambda U(k,h)$
$w(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$	$W(k,h)=(k+1)U(k+1,h)$
$w(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$	$W(k,h)=(h+1)U(k,h+1)$
$w(x,y)=\dfrac{\partial^{r+s}u(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}$	$W(k,h)=\dfrac{(k+r)!}{k!}\dfrac{(h+s)!}{h!}U(k+r,h+s)$
$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)V(k-r,s)$
$w(x,y)=x^m y^n$	$W(k,h)=\delta(k-m,h-n)=\begin{cases}1, & k=m \text{ ve } h=n\\ 0, & \text{aksi halde}\end{cases}$

3.3. Üç Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Tanım 3.5. Üç değişkenli $w(x,y,t)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k,h,m)$ olmak üzere, $w(x,y,t)$ fonksiyonunun üç boyutlu diferensiyel dönüşümü,

$$W(k,h,m)=\frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k\partial y^h\partial t^m}w(x,y,t)\right]_{\substack{x=0\\y=0\\t=0}} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır (Ayaz, 2004a).

Tanım 3.6. $W(k,h,m)$ dönüşüm fonksiyonunun ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}W(k,h,m)x^k y^h t^m \tag{3.8}$$

biçiminde tanımlanır. (3.8) eşitliğinde (3.7) ifadesi yazılırsa aşağıdaki (3.9) eşitliği elde edilir (Ayaz, 2004a).

$$w(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^{k}\partial y^{h}\partial t^{m}}w(x,y,t)\right]_{\substack{x=0\\y=0\\t=0}}x^{k}y^{h}t^{m} \tag{3.9}$$

$w(x,y,t)$ üç değişkenli bazı fonksiyonların diferensiyel dönüşüm fonksiyonları Çizelge 3.3'te verilmiştir (Ayaz, 2004a).

Çizelge 3.3. Bazı fonksiyonların üç boyutlu diferensiyel dönüşüm fonksiyonları

Orijinal Fonksiyon	**Dönüşüm Fonksiyonu**
$w(x,y,t)=u(x,y,t)\pm v(x,y,t)$	$W(k,h,m)=U(k,h,m)\pm V(k,h,m)$
$w(x,y,t)=cu(x,y,t)$	$W(k,h,m)=cU(k,h,m)$
$w(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}$	$W(k,h,m)=(k+1)U(k+1,h,m)$
$w(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}$	$W(k,h,m)=(h+1)U(k,h+1,m)$
$w(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}$	$W(k,h,m)=(m+1)U(k,h,m+1)$
$w(x,y,t)=\frac{\partial^{r+s+p}u(x,y,t)}{\partial x^{r}\partial y^{s}\partial t^{p}}$	$W(k,h,m)=\frac{(k+r)!}{k!}\frac{(h+s)!}{h!}\frac{(m+p)!}{m!}U(k+r,h+s,m+p)$
$w(x,y,t)=u(x,y,t)v(x,y,t)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)$

4. KESİRLİ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

L'Hospital tarafından Leibniz'e, türev operatörünün kesirli olmasının anlamının sorulduğu mektupla (Ross, 1977) literatürde yerini alan kesirli diferensiyel denklemler birçok çalışmaya imkân sağlamış ve sağlamaktadır. Böylece kesirli diferensiyel denklemler ile birçok problemin gerçeğe daha uygun matematiksel modellenmesi mümkün olmuştur. Bu sayede kesirli diferensiyel denklemler ile modellenen problemlerden elde edilen sonuçlarda hassasiyet artarak daha iyi sonuçlar elde edilmektedir.

Kesirli diferensiyel denklemlerin analitik çözümü genellikle bulunamadığından bu tip denklemlerin sayısal ve yaklaşık çözümlerini veren yöntemler geliştirilmiştir. Özellikle doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferensiyel denklemlerin başlangıç koşulları ile birlikte yaklaşık çözümünü elde etmek için homotobi perturbasyon metodu, varyasyonel iterasyon metodu, adomian ayrışım metodu ve diferensiyel dönüşüm metodu gibi yöntemlere başvurulduğu görülmektedir (Momani ve Al-Khaled, 2005; Odibat ve Momani, 2006; Momani ve Odibat, 2007; Odibat ve ark., 2008).

Tezin bu bölümünde ilk olarak Momani ve ark. (2007) tarafından geliştirilen kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun temel dayanağı olan genelleştirilmiş Taylor formülü (2007) verilecektir. Ardından bir boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu, iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ve üç boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu tanıtılacaktır. Bu metodların özellikleri ispatsız sunulacak olup diğer bölümlerde bu özelliklerden faydalanılacaktır. Kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun uygulamalardaki kullanışlılığı ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması literatürdeki mevcut çalışmalarda yer alan uygulamalar ile gösterilecektir.

4.1. Genelleştirilmiş Taylor Formülü

Tez çalışmasının bu bölümünde kesirli diferensiyel dönüşüm metodunda kullanılan genelleştirilmiş Taylor formülü ile ilgili temel bilgiler verilecektir. Genelleştirilmiş Taylor formülü kullanılan kesirli türev tanımına göre değişiklik göstermektedir. Caputo anlamında kesirli türev içeren Taylor formülü ile Riemann-Liouville anlamında kesirli türev içeren Taylor formülleri literatürde mevcuttur (Odibat ve Shawagfeh, 2007). Caputo anlamında genelleştirilmiş Taylor formülü ile Riemann-Liouville anlamında genelleştirilmiş Taylor formülleri kıyaslandığında Caputo

anlamındaki genelleştirilmiş Taylor formülünde katsayıların daha basit ve hesaplanmasının daha kolay olduğu görülebilir. Ayrıca son zamanlarda Caputo kesirli türevinin birçok fizik ve mühendislik problemlerinde Riemann-Liouville kesirli türevinden daha çok kullanıldığı görülmektedir. Bunun sebebi ise Caputo kesirli türevinin başlangıç ve sınır koşullarını da problemin çözümüne dahil etmesidir (Gorenflo ve Mainardi, 2008).

Bu tez çalışmasında Caputo anlamında kesirli mertebeden türevler kullanıldığı için bu bölümde sadece Caputo anlamında genelleştirilmiş Taylor formülü verilecektir.

Tanım 4.1. (Kesirli Kuvvet Serisi) $0 \le n-1 < \alpha \le n$ ve $t \ge t_0$ olmak üzere,

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (t-t_0)^{m\alpha} = c_0 + c_1 (t-t_0)^{\alpha} + c_2 (t-t_0)^{2\alpha} + c_3 (t-t_0)^{3\alpha} \ldots \tag{4.1}$$

kuvvet seri açılımına $t = t_0$ civarında kesirli kuvvet serisi denir. (4.1) kesirli kuvvet seri açılımında değişken t, katsayılar ise $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$ sabitleridir (El-Ajou ve ark., 2015).

Tanım 4.2. (Genelleştirilmiş Taylor Formülü) $0 < \alpha \le 1$ ve $k = 0, 1, \ldots, n+1$ için $D_a^{k\alpha} f(x) \in C(a,b]$ olsun. $a \le \xi \le x$ ve $\forall x \in (a,b]$ olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} \left[D_a^{i\alpha} f(a) \right] + \frac{D_a^{(n+1)\alpha} f(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha} \tag{4.2}$$

eşitliğine genelleştirilmiş Taylor formülü adı verilir. Burada $\left(D_a^{\alpha}\right)^k = D_a^{\alpha}.D_a^{\alpha}...D_a^{\alpha}$ (k defa) olarak tanımlanmış olup $\alpha = 1$ için (4.2) genelleştirilmiş Taylor formülü, klasik Taylor formülüne indirgenir (Odibat ve Shawagfeh, 2007).

Teorem 4.1.1: $f(x) = x^{\lambda} g(x)$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunda $\lambda > -1$ ve yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ olan $g(x)$ fonksiyonu da $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n\alpha}$ genelleştirilmiş kuvvet seri açılımına sahip olsun. Bu durumda $0 < \alpha \le 1$ için $f(x)$ fonksiyonu

(a) $\beta < \lambda + 1$ ve α keyfi bir değer

veya

(b) $\beta \geq \lambda + 1$ ve γ keyfi bir değer, $a_k = 0$, $k = 0,1,...,m-1$ ve $m-1 < \beta \leq m$

şartlarından herhangi birini sağlıyorsa

$$D_\alpha^\gamma D_\alpha^\beta f(x) = D_\alpha^{\gamma+\beta} f(x) \tag{4.3}$$

eşitliği elde edilir (Odibat ve ark., 2008).

4.2. Bir Boyutlu Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Tezin bu kısmında bir değişkene bağlı olan kesirli diferensiyel denklemler için bir boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ve özellikleri sunulacaktır. Metodun uygulamalardaki kullanışlılığı literatürdeki mevcut çalışmalarda yer alan uygulamalar ile gösterilecektir.

Tanım 4.4. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, bir değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun $\alpha.$ mertebeden kesirli türevinin kesirli diferensiyel dönüşümü $F_\alpha(k)$ olmak üzere, bir değişkenli $f(x)$ 'in bir boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümü,

$$F_\alpha(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left[(D_x^\alpha)^k f(x) \right]_{x=x_0} \tag{4.4}$$

olarak tanımlanır (Odibat ve ark., 2008). Burada $\left(D_x^\alpha\right)^k = D_x^\alpha . D_x^\alpha ... D_x^\alpha$ (k defa) şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.5. $F_\alpha(k)$ dönüşüm fonksiyonunun ters kesirli diferensiyel dönüşümü,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_\alpha(k)(x - x_0)^{k\alpha} \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanır (Odibat ve ark., 2008). (4.4) ifadesindeki $F_\alpha(k)$, (4.5) ifadesinde yerine yazılıp (4.2) genelleştirilmiş Taylor formülü kullanılırsa,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha k+1)}\left[(D_x^{k\alpha})\,f(x)\right]_{x=x_0} \tag{4.6}$$

elde edilir. Yani (4.4) kesirli diferensiyel dönüşümün ters dönüşümü (4.6) ifadesidir. Burada (4.6) eşitliğinden, kesirli diferensiyel dönüşüm kavramının (4.1) kesirli kuvvet serileri açılımından elde edildiği görülmektedir. $\alpha=1$ olması durumunda (4.4) kesirli diferensiyel dönüşümünden klasik diferensiyel dönüşüm ifadesi elde edileceği açıktır.

4.2.1. Bir boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun özellikleri

Bu bölümde bir boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun bazı özellikleri ispatsız olarak sunulmuştur. Bir boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metoduna ait özellikler detaylı bir şekilde literatürde mevcuttur (Odibat ve ark., 2008).

$0<\alpha\le 1$ olmak üzere (4.4) ve (4.5) eşitlikleri temel alınarak bir boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümün temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.2.1: $f(x)=g(x)\pm h(x)$ ise $F_\alpha(k)=G_\alpha(k)\pm H_a(k)$ olur (Odibat ve ark., 2008).

Teorem 4.2.2: $a\in R$, $f(x)=ag(x)$ ise $F_\alpha(k)=a.G_\alpha(k)$ olur (Odibat ve ark., 2008).

Teorem 4.2.3: $f(x)=g(x)h(x)$ ise $F_\alpha(k)=\sum_{l=0}^{k}G_\alpha(l)H_a(k-l)$ olur (Odibat ve ark., 2008).

İspat : (4.5) eşitliği kullanıldığında,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}G_\alpha(k)(x-x_0)^{\alpha k}\times\sum_{k=0}^{\infty}H_\alpha(k)(x-x_0)^{\alpha k}$$

$$=(G_\alpha(0)+G_\alpha(1)(x-x_0)^{\alpha}+G_\alpha(2)(x-x_0)^{2\alpha}+\ldots)(H_\alpha(0)+H_\alpha(1)(x-x_0)^{\alpha}+H_\alpha(2)(x-x_0)^{2\alpha}+\ldots)$$

$$= G_\alpha(0)H_\alpha(0) + (G_\alpha(0)H_\alpha(1) + G_\alpha(1)H_\alpha(0))(x-x_0)^\alpha + (G_\alpha(0)H_\alpha(2) + G_\alpha(1)H_\alpha(1)$$

$$+G_\alpha(2)H_\alpha(0))(x-x_0)^{2\alpha} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} G_\alpha(l)H_a(k-l)(x-x_0)^{\alpha k}$$

olur. Burada kesirli diferensiyel dönüşümün tanımından faydalanılırsa,

$$F_\alpha(k) = \sum_{l=0}^{k} G_\alpha(l)H_a(k-l)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.2.4: $f(x) = g_1(x)g_2(x)\ldots g_{n-1}(x)g_n(x)$ ise

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \ldots \sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2-k_1)\ldots G_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-1})G_n(k-k_{n-1})$$

olur (Arikoglu ve Ozkol, 2007).

Teorem 4.2.5: $f(x) = D_{x_0}^{\alpha} g(x)$ ise $F_\alpha(k) = \dfrac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} G_\alpha(k+1)$ olur (Odibat ve ark., 2008).

İspat : (4.4) denkleminden

$$F_\alpha(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)}\left[(D_x^\alpha)^k D_x^\alpha g(x)\right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)}\left[(D_x^\alpha)^{k+1} g(x)\right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha k+\alpha+1)}\left[(D_x^\alpha)^{k+1} g(x)\right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} G_\alpha(k+1)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6: Eğer $f(x)=(x-x_0)^{n\alpha}$ ise $F_\alpha(k)=\delta(k-n)$ olur. Burada δ fonksiyonu,

$$\delta(k)=\begin{cases}1, & k=0 \text{ ise}\\ 0, & k\neq 0 \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Odibat ve ark., 2008).

İspat : (4.5) eşitliği ile verilen gösterim dikkate alınırsa $f(x)=(x-x_0)^{n\alpha}$ biçiminde verilen $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(k-n)(x-x_0)^{k\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. (4.4) kesirli diferensiyel dönüşümün tanımından,

$$F_\alpha(k)=\delta(k-n)$$

elde edilir.

Uyarı : $f(x)$ fonksiyonu Teorem 4.1.1.'deki şartları sağlamak üzere $f(x)$ fonksiyonunun (4.4) bir boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümü aşağıdaki gibi olur.

$$F_\alpha(k)=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)}\left[D_x^{\alpha k}f(x)\right]_{x=x_0} \tag{4.7}$$

(4.7) ifadesi, β. mertebeden ($\beta>1$) kesirli türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için çok yararlı olan aşağıdaki sonuca ulaşmamızı sağlar (Odibat ve ark., 2008).

Teorem 4.2.7: $m-1<\beta\leq m$ için $f(x)=D^\beta g(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonu Teorem 4.1.1.'deki şartları sağlıyorsa,

$$F_\alpha(k)=\frac{\Gamma(\alpha k+\beta+1)}{\Gamma(\alpha k+1)}G_\alpha(k+\beta/\alpha) \tag{4.8}$$

olur (Odibat ve ark., 2008).

İspat : (4.7) ifadesinden

$$F_\alpha(k)=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)}\left[D^{\alpha k}D^{\beta}g(x)\right]_{x=x_0}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)}\left[D^{\alpha k+\beta}g(x)\right]_{x=x_0}\text{ , ((4.3) eşitliğinden)}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha k+\beta+1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha k+\beta+1)}\left[D^{\alpha k+\beta}g(x)\right]_{x=x_0}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha k+\beta+1)}{\Gamma(\alpha k+1)}G_\alpha(k+\beta/\alpha)$$

elde edilir.

Uyarı : Bilimin çeşitli dallarında karşılaşılan uygulamalarda kesirli başlangıç koşulları sıklıkla mevcuttur ve bu başlangıç koşullarının fiziksel anlamı da net değildir. Bu nedenle Caputo anlamında kesirli türev kullanılır. Caputo anlamında kesirli türev tam sayı mertebeden türevli başlangıç koşullarını sağladığından dolayı, başlangıç koşullarının dönüşümü

$0<\alpha\le 1$ olmak üzere,

$$F_\alpha(k)=\begin{cases}k\alpha\in Z^+\ için, & \dfrac{1}{(k\alpha)!}\left[\dfrac{d^{k\alpha}f(x)}{dx^{k\alpha}}\right]_{x=x_0} \quad , \quad k=0,1,2,...(\dfrac{n}{\alpha}-1)\\ k\alpha\notin Z^+\ için, & 0\end{cases} \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada n kesirli diferensiyel denklemin mertebesidir (Arikoglu ve Ozkol, 2007).

Örnek 4.2.1. $D^{\alpha} y(x) = y^2(x) + 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < x < 1$ (4.10)

doğrusal olmayan kesirli diferensiyel denklemi,

$$y(0) = 0 \tag{4.11}$$

başlangıç şartıyla verilmiş olsun (Odibat ve ark., 2008).

Teorem (4.2.3) kullanılarak kesirli diferensiyel dönüşümü (4.10) ile verilen kesirli diferensiyel denklemin her iki tarafına uygulanırsa, (4.10) diferensiyel denklemi (Odibat ve ark., 2008),

$$\frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} Y_{\alpha}(k+1) = \sum_{l=0}^{k} Y_{\alpha}(l) Y_{\alpha}(k-l) + \delta(k) \tag{4.12}$$

yineleme bağıntısına ulaşılır. (4.12) bağıntısı düzenlendiğinde ise

$$Y_{\alpha}(k+1) = \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \left\{ \sum_{l=0}^{k} Y_{\alpha}(l) Y_{\alpha}(k-l) + \delta(k) \right\} \tag{4.13}$$

eşitliği elde edilir. (4.11) başlangıç koşulunun kesirli diferensiyel dönüşümü alınırsa,

$$Y_{\alpha}(0) = 0 \tag{4.14}$$

olur.

(4.13) yineleme bağıntısında (4.14) başlangıç koşulu kullanılırsa verilen kesirli diferensiyel denkleme ait çözüm fonksiyonunun $Y_{\alpha}(i)$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ şeklinde ifade edilen spektrumları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_{\alpha}(0) = 0 \quad , \quad Y_{\alpha}(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$Y_{\alpha}(2) = 0 \quad , \quad Y_{\alpha}(3) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)^2} \cdot \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}$$

$$Y_{\alpha}(4) = 0 \quad , \quad Y_{\alpha}(5) = \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)^3} \cdot \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(5\alpha+1)}$$

$$Y_\alpha(6)=0 \qquad , \qquad Y_\alpha(7)=\left\{\frac{4\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}\cdot\frac{\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(5\alpha+1)}+\frac{\Gamma(2\alpha+1)^2}{\Gamma(3\alpha+1)^2}\right\}\frac{\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^4\Gamma(7\alpha+1)}$$

$$\vdots$$

Yukarıda bulunan $Y_\alpha(k)$ spektrum değerleri (4.6)'da yerine yazılırsa verilen başlangıç değer probleminin aşağıdaki yarı analitik çözümü elde edilir:

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot x^\alpha+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)^2}\cdot\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}\cdot x^{3\alpha}+\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)^3}\cdot\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}\cdot\frac{\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(5\alpha+1)}\cdot x^{5\alpha}$$
$$+\left\{\frac{4\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}\cdot\frac{\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(5\alpha+1)}+\frac{\Gamma(2\alpha+1)^2}{\Gamma(3\alpha+1)^2}\right\}\frac{\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^4\Gamma(7\alpha+1)}\cdot x^{7\alpha}+\ldots$$

4.3. İki Boyutlu Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Bir önceki bölümde gösterildiği gibi iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu da Caputo anlamında genelleştirilmiş Taylor formülü ve Caputo kesirli türevi temel alınarak geliştirilmiştir (Momani ve ark., 2007; Odibat ve Shawagfeh, 2007).

Tanım 4.5. İki değişkenli $u(x,y)$ fonksiyonunu $u(x,y)=f(x).g(y)$ olacak şekilde, bir değişkenli iki fonksiyonunun çarpımı olarak ele alalım. İki boyutlu diferensiyel dönüşüm metodunun temel özellikleri (Bildik ve ark., 2006; Abdel-Halim Hassan, 2008) göz önüne alınırsa $u(x,y)$ fonksiyonu, $0<\alpha,\ \beta\le 1$ olmak üzere,

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}F_\alpha(k)(x-x_0)^{k\alpha}\sum_{h=0}^{\infty}G_\beta(h)(y-y_0)^{h\beta}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U_{\alpha,\beta}(k,h)(x-x_0)^{k\alpha}(y-y_0)^{h\beta} \qquad (4.15)$$

olarak ifade edilebilir (Momani ve ark., 2007).

$U_{\alpha,\beta}(k,h)=F_\alpha(k)G_\beta(h)$ ifadesi $u(x,y)$ fonksiyonunun spektrumu olarak adlandırılır. $u(x,y)$ fonksiyonunun kesirli diferensiyel dönüşümü $U_{\alpha,\beta}(k,h)$ ile gösterilmek üzere, $u(x,y)$ fonksiyonunun iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümü,

$$U_{\alpha,\beta}(k,h)=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)}\left[(D_x^{\alpha})^k(D_y^{\beta})^h u(x,y)\right]_{(x,y)=(x_0,y_0)} \tag{4.16}$$

şeklindedir. Burada $\left(D_x^{\alpha}\right)^k = D_x^{\alpha}.D_x^{\alpha}...D_x^{\alpha}$ (k defa) şeklinde ifade edilir. $\alpha=1$ ve $\beta=1$ olması durumunda (4.15) ve (4.16) iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm tanımlarının klasik iki boyutlu diferensiyel dönüşüm tanımlarına dönüşeceği açıktır (Bildik ve ark., 2006).

Tanım 4.6. $U_{\alpha,\beta}(k,h)$ dönüşüm fonksiyonun ters kesirli diferensiyel dönüşümü ise

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U_{\alpha,\beta}(k,h)(x-x_0)^{k\alpha}(y-y_0)^{h\beta} \tag{4.17}$$

şeklinde ifade edilir.

4.3.1. İki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun özellikleri

İki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu tanımı göz önüne alındığında aşağıdaki özellikler elde edilir (Momani ve ark., 2007; Odibat ve Momani, 2008).

$U_{\alpha,\beta}(k,h)$, $V_{\alpha,\beta}(k,h)$ ve $W_{\alpha,\beta}(k,h)$ sırasıyla $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ fonksiyonlarının kesirli diferensiyel dönüşümleri olsun. Buna göre;

Teorem 4.3.1: $u(x,y)=v(x,y)\pm w(x,y)$ biçiminde ise

$$U_{\alpha,\beta}(k,h)=V_{\alpha,\beta}(k,h)\pm W_{\alpha,\beta}(k,h)$$

'dir (Momani ve ark., 2007).

Teorem 4.3.2: $a\in R$ ve $u(x,y)=av(x,y)$ için

$$U_{\alpha,\beta}(k,h)=aV_{\alpha,\beta}(k,h)$$

'dir (Odibat ve Momani, 2008).

Teorem 4.3.3: $u(x,y)=v(x,y).w(x,y)$ ise

$$U_{\alpha,\beta}(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V_{\alpha,\beta}(r,h-s)W_{\alpha,\beta}(k-r,s)$$

'dir (Momani ve ark., 2007).

İspat : (4.15) eşitliğinden,

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}V_{\alpha,\beta}(k,h)(x-x_0)^{k\alpha}(y-y_0)^{h\beta}\times\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}W_{\alpha,\beta}(k,h)(x-x_0)^{k\alpha}(y-y_0)^{h\beta}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V_{\alpha,\beta}(r,h-s)W_{\alpha,\beta}(k-r,s)(x-x_0)^{k\alpha}(y-y_0)^{h\beta}$$

elde edilir. Burada iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm tanımından faydalanılırsa,

$$U_{\alpha,\beta}(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V_{\alpha,\beta}(r,h-s)W_{\alpha,\beta}(k-r,s)$$

elde edilir (Momani ve ark., 2007).

Teorem 4.3.4: $m,n\in Z$ ve $0<\beta\le 1$ olmak üzere $u(x,y)=(x-x_0)^{n\alpha}(y-y_0)^{m\beta}$ ise

$$U_{\alpha,\beta}(k,h)=\delta(k-n)\delta(h-m)=\begin{cases}1\ ,\ k=n\ ve\ h=m\\ 0\ ,\ diğer\ durumlarda\end{cases}$$

olur (Momani ve ark., 2007).

İspat : (4.15) eşitliğinden $u(x,y)=(x-x_0)^{n\alpha}(y-y_0)^{m\beta}$ ifadesi

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\delta(k-n)\delta(h-m)(x-x_0)^{k\alpha}(y-y_0)^{h\beta}$$

şeklinde yazılabilir. (4.16) kesirli diferensiyel dönüşüm tanımı kullanılırsa,

$$U_{\alpha,\beta}(k,h)=\delta(k-n)\delta(h-m)$$

elde edilir.

Teorem 4.3.5: $0<\alpha\le 1$ için $u(x,y)=D_{x_0}^{\alpha}v(x,y)$ ise

$$U_{\alpha,\beta}(k,h)=\frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)}V_{\alpha,\beta}(k+1,h)$$

'dir (Momani ve ark., 2007).

İspat : (4.16) tanımından,

$$\begin{aligned}U_{\alpha,\beta}(k,h)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)}\left[(D_x^{\alpha})^k(D_y^{\beta})^h D_x^{\alpha}v(x,y)\right]_{(x,y)=(x_0,y_0)}\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)}\left[(D_x^{\alpha})^{k+1}(D_y^{\beta})^h v(x,y)\right]_{(x,y)=(x_0,y_0)}\\&=\frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)\Gamma(\alpha(k+1)+1)}\left[(D_x^{\alpha})^{k+1}(D_y^{\beta})^h v(x,y)\right]_{(x,y)=(x_0,y_0)}\\&=\frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)}V_{\alpha,\beta}(k+1,h)\end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı : İki değişkenli $u(x,y)$ fonksiyonu, $u(x,y)=f(x).g(y)$ olacak şekilde bir değişkenli iki fonksiyonunun çarpımı olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu Teorem 4.1.1.'deki şartları sağlıyorsa bu durumda $u(x,y)$ fonksiyonunun (4.16) iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümü aşağıdaki gibi olur:

$$U_{\alpha,\beta}(k,h)=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)}\left[D_x^{\alpha k}(D_y^{\beta})^h u(x,y)\right]_{(x,y)=(x_0,y_0)} \tag{4.18}$$

(4.18) ifadesi γ. dereceden ($\gamma > 1$) kesirli türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için çok yararlı olan aşağıdaki sonuca ulaşmamızı sağlar (Momani ve ark., 2007).

Teorem 4.3.7: $u(x,y) = D^{\gamma}_{x_0} v(x,y)$ ve $m-1 < \gamma \le m$ olmak üzere $v(x,y) = f(x)g(y)$ olacak şekilde bir değişkenli iki fonksiyonunun çarpımı ve $f(x)$ fonksiyonu Teorem 4.1.1.'deki şartları sağlıyorsa,

$$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \frac{\Gamma(\alpha k + \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)} V_{\alpha,\beta}(k + \gamma/\alpha, h) \tag{4.19}$$

olur (Momani ve ark., 2007).

Yukarıdaki teoremler temel alınarak iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm temel işlemleri Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Kesirli iki boyutlu diferensiyel dönüşüm temel işlemleri

Orijinal Fonksiyon	**Dönüşüm Fonksiyonu**
$u(x,y) = v(x,y) \pm w(x,y)$	$U_{\alpha,\beta}(k,h) = V_{\alpha,\beta}(k,h) \pm W_{\alpha,\beta}(k,h)$
$u(x,y) = av(x,y)$	$U_{\alpha,\beta}(k,h) = aV_{\alpha,\beta}(k,h)$
$u(x,y) = D^{\alpha}_{x_0} v(x,y)$	$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} V_{\alpha,\beta}(k+1,h)$
$u(x,y) = D^{\beta}_{y_0} v(x,y)$	$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \frac{\Gamma(\beta(h+1)+1)}{\Gamma(\beta h+1)} V_{\alpha,\beta}(k,h+1)$
$u(x,y) = D^{\alpha}_{x_0} D^{\beta}_{y_0} v(x,y)$	$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)\Gamma(\beta(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)} V_{\alpha,\beta}(k+1,h+1)$
$u(x,y) = D^{\gamma}_{x_0} v(x,y)$	$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \frac{\Gamma(\alpha k+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} V_{\alpha,\beta}(k+{}^{\gamma}\!/_{\alpha}, h)$
$u(x,y) = D^{\gamma}_{x_0} D^{\delta}_{y_0} v(x,y)$	$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+\gamma)\Gamma(\beta(h+1)+\delta)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)} V_{\alpha,\beta}(k+{}^{\gamma}\!/_{\alpha}, h+{}^{\delta}\!/_{\beta})$
$u(x,y) = (x-x_0)^{n\alpha}(y-y_0)^{m\beta}$	$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \delta(k-n)\delta(h-m)$
$u(x,y) = v(x,y)w(x,y)$	$U_{\alpha,\beta}(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V_{\alpha,\beta}(r,h-s) W_{\alpha,\beta}(k-r,s)$

Uyarı : Caputo anlamında kesirli türevler başlangıç koşullarını sağladığından dolayı bir boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodunda kullanılan başlangıç koşullarının dönüşümü, iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu için genelleştirilirse $0<\alpha\le 1$ ve $0<\beta\le 1$ olmak üzere başlangıç koşullarının dönüşümü,

$$F_{\alpha,\beta}(k,h)=\begin{cases} k\alpha, h\beta \in Z^{+} \ için, & \dfrac{1}{(k\alpha)!}\dfrac{1}{(h\beta)!}\left[\dfrac{\partial^{k\alpha}\partial^{h\beta}u(x,t)}{\partial x^{k\alpha}\partial t^{h\beta}}\right]_{\substack{x=x_0\\ t=t_0}} \\ k\alpha, h\beta \notin Z^{+} \ için, & 0 \end{cases},$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ (\dfrac{n}{\alpha}-1)$ veya $h=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ (\dfrac{n}{\beta}-1)$

şeklinde tanımlanır. Burada n, kesirli mertebeden diferensiyel denklemin mertebesidir.

Örnek 4.3.1.

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}+x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=2t^{\alpha}+2x^{2}+2\ ,\ t>0\ ,\ 0<\alpha\le 1 \tag{4.20}$$

$$u(x,0)=x^{2} \tag{4.21}$$

doğrusal homojen olmayan zaman-kesirli başlangıç değer problemini ele alalım (Odibat ve Momani, 2008). $\beta=1$ alınarak, (4.20) denkleminin her iki yanına iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümü uygulanırsa (4.20) kesirli diferensiyel denkleminin KDD'ü,

$$U_{\alpha,1}(k,h+1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}\left[-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1)\delta(h-s)(k-r+1)U_{\alpha,1}(k-r+1,s)\right.$$
$$\left.-(k+1)(k+2)U_{\alpha,1}(k+2,h)+2\delta(k)\delta(h-1)+2\delta(k-2)\delta(h)+2\delta(k)\delta(h)\right] \tag{4.22}$$

olur. (4.21) başlangıç şartının kesirli diferensiyel dönüşümü ise

$$U_{\alpha,1}(k,0)=\delta(k-2) \tag{4.23}$$

'dir.

Başlangıç şartının kesirli diferensiyel dönüşümü olan (4.23) eşitliği, (4.22) yineleme bağıntısında kullanılırsa; (4.20)-(4.21) probleminin çözümü olan $u(x,t)$ fonksiyonunun $U_{\alpha,1}(k,h)$ ile gösterilen spektrumlarından bazıları,

$$U_{\alpha,1}(2,0)=1,\ U_{\alpha,1}(0,2)=2\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\ \text{ve}\ k\neq 2\ ,\ h\neq 2\ \text{için}\ U_{\alpha,1}(k,h)=0$$

şeklinde elde edilir. İki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm tanımı dikkate alındığında (4.20)-(4.21) probleminin yukarıda bulunan spektrumları (4.17)'de yerlerine yazıldığında,

$$u(x,t)=x^2+2\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan çözüm fonksiyonu aynı zamanda (4.20)-(4.21) doğrusal homojen olmayan zaman-kesirli başlangıç değer probleminin analitik çözümüdür (Odibat ve Momani, 2008).

Örnek 4.3.2.

$$\begin{aligned} u(0,t)&=e^{-t}\\ u_x(0,t)&=e^{-t}\end{aligned} \qquad (4.24)$$

başlangıç şartlarıyla verilen

$$\frac{\partial^{1.5}x}{\partial x^{1.5}}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}+u\ ,\ x>0 \qquad (4.25)$$

doğrusal konum-kesirli telgraf denklemini ele alalım (Odibat ve Momani, 2008). Varsayalım ki iki değişkenli $u(x,t)$ fonksiyonu $u(x,t)=f(x).g(t)$ olacak şekilde, bir değişkenli iki fonksiyonun çarpımı biçiminde olsun. Aynı zamanda $f(x)$ fonksiyonu da Teorem 4.3.6.'daki şartları sağlasın. $\alpha=0.5,\ \beta=1$ alındığında, (4.25) eşitliğinin her iki

yanına iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümü uygulanırsa verilen doğrusal konum-kesirli telgraf denkleminin kesirli diferensiyel dönüşümü,

$$U_{1/2,1}(k+3,h)=\frac{\Gamma(k/2+1)}{\Gamma(k/2+5/2)} \times\left[(h+1)(h+2)U_{1/2,1}(k,h+2)+(h+1)U_{1/2,1}(k,h+1)+U_{1/2,1}(k,h)\right] \tag{4.26}$$

olur. (4.24) başlangıç şartlarının iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümü ise

$$\begin{aligned} U_{1/2,1}(0,h)&=\frac{(-1)^h}{h!}\\ U_{1/2,1}(1,h)&=0\\ U_{1/2,1}(2,h)&=\frac{(-1)^h}{h!} \end{aligned} \tag{4.27}$$

‘dir.

Başlangıç koşullarının kesirli diferensiyel dönüşümü olan (4.27)’daki değerler (4.26) yineleme bağıntısında kullanılırsa, $U_{1/2,1}(k,h)$ biçiminde verilen spektrumlarından bazıları kolaylıkla elde edilebilir. Yapılan hesaplamalar sonrasında bu spektrumlarından bazıları aşağıdaki Çizelge 4.2.’de sunulmuştur.

Çizelge 4.2. $U_{1/2,1}(k,h)$ iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümünün terimlerinden birkaçı

	$U_{1/2,1}(0,h)$	$U_{1/2,1}(1,h)$	$U_{1/2,1}(2,h)$	$U_{1/2,1}(3,h)$	$U_{1/2,1}(4,h)$	$U_{1/2,1}(5,h)$
$U_{1/2,1}(k,0)$	1	0	1	$\frac{1}{\Gamma(5/2)}$	0	$\frac{1}{\Gamma(7/2)}$
$U_{1/2,1}(k,1)$	-1	0	-1	$-\frac{1}{\Gamma(5/2)}$	0	$-\frac{1}{\Gamma(7/2)}$
$U_{1/2,1}(k,2)$	$\frac{1}{2!}$	0	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{2!\Gamma(5/2)}$	0	$\frac{1}{2!\Gamma(7/2)}$
$U_{1/2,1}(k,3)$	$-\frac{1}{3!}$	0	$-\frac{1}{3!}$	$-\frac{1}{3!\Gamma(5/2)}$	0	$-\frac{1}{3!\Gamma(7/2)}$
$U_{1/2,1}(k,4)$	$\frac{1}{4!}$	0	$\frac{1}{4!}$	$\frac{1}{4!\Gamma(5/2)}$	0	$\frac{1}{4!\Gamma(7/2)}$
$U_{1/2,1}(k,5)$	$-\frac{1}{5!}$	0	$-\frac{1}{5!}$	$-\frac{1}{5!\Gamma(5/2)}$	0	$-\frac{1}{5!\Gamma(7/2)}$

İki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm tanımı dikkate alındığında (4.25) doğrusal konum-kesirli telgraf denkleminin yaklaşık çözümü,

$$u(x,t)=\left(1-t+\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{5!}t^5+\ldots\right)+\left(1-t+\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{5!}t^5+\ldots\right)x$$
$$+\left(1-t+\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{5!}t^5+\ldots\right)\frac{x^{1.5}}{\Gamma(5/2)}$$
$$+\left(1-t+\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{5!}t^5+\ldots\right)\frac{x^{2.5}}{\Gamma(7/2)}+\ldots$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$u(x,t)=e^{(-t)}\left(1+x+\frac{x^{1.5}}{\Gamma(5/2)}+\frac{x^{2.5}}{\Gamma(7/2)}+\frac{x^3}{\Gamma(4)}+\frac{x^4}{\Gamma(5)}+\frac{x^{4.5}}{\Gamma(11/2)}+\ldots\right) \tag{4.28}$$

elde edilir (Odibat ve Momani, 2008). Momani (2005) tarafından yapılan çalışmada aynı sonucun Adomian ayrışım metodu ile elde edildiği görülmektedir.

4.4. Üç Boyutlu Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Tezin bu bölümünde üç değişkene bağlı olan kesirli diferensiyel denklemler için üç boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ve özellikleri ispatsız sunulacaktır. Üç boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu da Caputo anlamında genelleştirilmiş Taylor formülü ve Caputo kesirli türevi temel alınarak geliştirilmiştir.

Tanım 4.6. Üç değişkenli $u(x,y,t)$ fonksiyonunu $u(x,y,t)=f(x).g(y).j(t)$ olacak şekilde, bir değişkenli üç fonksiyonunun çarpımı olarak ele alalım. Üç boyutlu diferensiyel dönüşüm metodunun temel özellikleri (Ayaz, 2004a) göz önüne alınırsa $u(x,y,t)$ fonksiyonu, $0<\alpha,\beta,\gamma\le 1$ olmak üzere,

$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}F_{\alpha}(k)(x-x_0)^{k\alpha}\sum_{h=0}^{\infty}G_{\beta}(h)(y-y_0)^{h\beta}\sum_{m=0}^{\infty}J_{\gamma}(m)(t-t_0)^{m\gamma}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)(x-x_0)^{k\alpha}(y-y_0)^{h\beta}(t-t_0)^{m\gamma} \qquad (4.29)$$

olarak ifade edilebilir (Kurulay ve ark., 2010). $u(x,y,t)$ fonksiyonunun üç boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümü ise

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)\Gamma(\gamma m+1)}\left[(D_x^{\alpha})^k(D_y^{\beta})^h(D_t^{\gamma})^m u(x,y,t)\right]_{(x,y,t)=(x_0,y_0,t_0)} \qquad (4.30)$$

şeklinde verilir (Kurulay ve ark., 2010). $\left(D_x^{\alpha}\right)^k=D_x^{\alpha}.D_x^{\alpha}...D_x^{\alpha}$ (k defa) şeklinde ifade edilir. Burada $u(x,y,t)$ fonksiyonu $U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)$ dönüşüm fonksiyonunu temsil etmektedir. $\alpha=1$, $\beta=1$ ve $\gamma=1$ olması durumunda (4.29) ve (4.30) kesirli üç boyutlu diferensiyel dönüşüm tanımlarının klasik üç boyutlu diferensiyel dönüşüm tanımlarına dönüşeceği açıktır (Kurulay ve ark., 2010).

4.4.1. Üç boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun özellikleri

Üç boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm tanımı göz önüne alındığında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiş olup teoremlerin ispatları literatürde mevcuttur (Kurulay ve ark., 2010).

$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)$, $V_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)$ ve $W_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)$ sırasıyla $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ ve $w(x,y,t)$ fonksiyonlarının diferensiyel dönüşümleri olsun. Buna göre,

Teorem 3.4.1: $u(x,y,t)=v(x,y,t)\pm w(x,y,t)$ ise

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=V_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)\pm W_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)$$

olur (Kurulay ve ark., 2010).

Teorem 3.4.2: $a\in R$ için $u(x,y,t)=av(x,y,t)$ ise

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h)=aV_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)$$

olur (Kurulay ve ark., 2010).

Teorem 3.4.3: $u(x,y,t)=v(x,y,t).w(x,y,t)$ ise

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=\sum_{p=0}^{m}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V_{\alpha,\beta,\gamma}(r,h-s,m-p)W_{\alpha,\beta,\gamma}(k-r,s,p)$$

olur (Kurulay ve ark., 2010).

Teorem 3.4.5: $0<\alpha\leq 1$ için $u(x,y,t)=D_{x_0}^{\alpha}v(x,y,t)$ ise

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=\frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)}V_{\alpha,\beta,\gamma}(k+1,h,m)$$

olur (Kurulay ve ark., 2010).

Teorem 3.4.6: Eğer $u(x,y,t)=D_{x_0}^{\lambda}v(x,y,t)$, $m-1<\lambda\le m$ ve $m\in N$ ise

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)=\frac{\Gamma(\alpha(k+1)+\lambda)}{\Gamma(\alpha k+1)}V_{\alpha,\beta,\gamma}(k+{}^{\lambda}\!/_{\alpha},h,m)$$

olur (Kurulay ve ark., 2010).

5. KESİRLİ DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU UYGULAMALARI

Kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun bazı özel denklemlere uygulandığı bu bölüm, tez çalışmasının amacını ve önemini teşkil etmektedir. Çünkü bir önceki bölümde ele alınan problemlerin kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ile bulunan yaklaşık çözümleri literatürde mevcut olmasına rağmen bu bölümde ele alınan denklemlerin ise kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ile çözümüne literatürde rastlanmamıştır.

Tez çalışmasının bu bölümünde ilk olarak sıvıların düşerken oluşturdukları desenleri ifade etmede kullanılan kesirli Rosenau-Hyman denkleminin yaklaşık çözümü incelenmiştir. Yapılan literatür incelemesinde, Molliq ve Noorani (2012) kesirli Rosenau-Hyman denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için HPM ve VIM kullanmıştır.

İkinci kısımda ise ise uygulamalı matematik ve fizikte pek çok uygulama alanı bulunan KdV denklemi hakkında bilgi verilmiş ve soliton kavramı anlatılmıştır. Daha sonrasında bir KdV denklemi olan kesirli ZK (2,2,2) özel denkleminin kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümü incelenmiştir. Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde Molliq ve ark. (2009) yaptıkları çalışma ile kesirli ZK (2,2,2) denkleminin yaklaşık çözümünü VIM kullanarak elde etmişlerdir. Yıldırım ve Gülkanat (2010) ise yaptıkları çalışma ile HPM kullanarak kesirli ZK (2,2,2) denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmiştir.

Kesirli Rosenau-Hyman ve kesirli ZK (2,2,2) denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için yapılan bu çalışmalarda kullanılan metotların, çok fazla işlem gerektirmesi ve çok zaman almasından dolayı çalışmamızda kesirli diferensiyel dönüşüm metodu kullanılmıştır.

Kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ile bulunan sonuçlar şekiller ve tablolar ile desteklenmiştir. Problemlerin çözümünde ve şekil çizimlerinde Maple 13 programı kullanılmıştır. Ayrıca hesaplamada kullanılan Maple 13 kodları bölüm içinde verilmiştir.

5.1. Kesirli Rosenau-Hyman Denkleminin KDDM ile Çözümü

$$u_t - \varepsilon u_{xxt} + 2\kappa u_x - u u_{xxx} - \alpha u u_x - \beta u_x u_{xx} = 0$$

Clarkson ve ark. (1997) tarafından sunulan üçüncü mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklemde $\varepsilon, \kappa, \alpha$ ve β keyfi parametreler olmak üzere $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$ ve $\kappa = 0$ alınırsa,

$$u_t = u u_{xxx} + u u_x + 3 u_x u_{xx}$$

Rosenau-Hyman denklemi elde edilir (Rosenau ve Hyman, 1993).

Bu denklem sıvı damlasındaki desen oluşumunu açıklama ihtiyacından dolayı ortaya çıkmıştır (Rosenau ve Hyman, 1993). Ayrıca bu denklem fizik ve mühendislik alanlarındaki çeşitli problemleri modellemede de önemli bir yere sahiptir. Örneğin, hareketli dalga çözümleri gibi özel fiziksel olayları açıklamada kullanıldığı bilinmektedir. Ancak Rosena-Hyman denklemi integrallenemediği için analitik çözümünü bulmak zordur. Bu sebepten sayısal metotlar kullanılarak yaklaşık çözüm elde edilebilir. Çalışmamızda daha doğru sonuçlar verebilen kesirli Rosenau-Hyman denklemi ele alınmış olup KDDM ile yaklaşık çözümü bulunmuştur.

Örnek 5.1:

$$D_t^{\alpha} u = u D_{xxx}(u) + u D_x(u) + 3 D_x(u) D_{xx}(u) \qquad t > 0, 0 < \alpha \le 1 \tag{5.1}$$

kesirli Rosenau-Hyman başlangıç değer problemini,

$$u(x,0) = -\frac{8}{3} c \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) \tag{5.2}$$

başlangıç şartıyla ele alalım (Molliq ve Noorani, 2012). $U_{\alpha,\beta}(k,h)$ kesirli diferensiyel dönüşümünde $\beta = 1$ alınarak, (5.1) denkleminin her iki yanına iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümü uygulanırsa kesirli Rosenau-Hyman diferensiyel denklemi,

$$U_{\alpha,1}(k,h+1)=\frac{\Gamma(\alpha h+1)}{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}\Bigg[\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U_{\alpha,1}(r,h-s)(k-r+1)(k-r+2)(k-r+3)U_{\alpha,1}(k-r+3,s)$$

$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U_{\alpha,1}(r,h-s)(k-r+1)U_{\alpha,1}(k-r+1,s) \qquad (5.3)$$

$$+3\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)U_{\alpha,1}(r+1,h-s)(k-r+1)(k-r+2)U_{\alpha,1}(k-r+2,s)\Bigg]$$

yineleme bağıntısına dönüşür. (5.2) ile verilen başlangıç şartının kesirli diferensiyel dönüşümü $U_{\alpha,1}(k,0)$, $k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,...$ için

$$U_{\alpha,1}(0,0)=-\frac{8}{3}c,\ U_{\alpha,1}(1,0)=0,\ U_{\alpha,1}(2,0)=\frac{c}{6},\ U_{\alpha,1}(3,0)=0,\ U_{\alpha,1}(4,0)=-\frac{c}{288},\ \ldots$$

değerlerini alır.

(5.3) yineleme bağıntısı ve $k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,...$ için başlangıç şartının diferensiyel dönüşümü olan $U_{\alpha,1}(k,0)$ değerleri kullanılırsa, $U_{\alpha,1}(k,h)$ iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümünün terimlerinden birkaçı elde edilir. Bu değerlere Çizelge 5.1.'de yer verilmiştir.

Çizelge 5.1. $U_{\alpha,1}(k,h)$ iki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümünün terimlerinden birkaçı

	$U_{\alpha,1}(0,h)$	$U_{\alpha,1}(1,h)$	$U_{\alpha,1}(2,h)$	$U_{\alpha,1}(3,h)$	$U_{\alpha,1}(4,h)$
$U_{\alpha,1}(k,0)$	$\frac{-8c}{3}$	0	$\frac{c}{6}$	0	$\frac{-c}{288}$
$U_{\alpha,1}(k,1)$	0	$\frac{-c^2}{3\Gamma(\alpha+1)}$	0	$\frac{c^2}{72\Gamma(\alpha+1)}$	0
$U_{\alpha,1}(k,2)$	$\frac{c^3}{3\Gamma(2\alpha+1)}$	0	$\frac{-c^3}{24\Gamma(2\alpha+1)}$	0	$\frac{c^3}{1152\Gamma(2\alpha+1)}$
$U_{\alpha,1}(k,3)$	0	$\frac{c^4}{12\Gamma(3\alpha+1)}$	0	$\frac{-c^4}{288\Gamma(3\alpha+1)}$	0

İki boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm tanımı göz önüne alındığında (5.1) kesirli Rosenau-Hyman denkleminin yaklaşık çözümü,

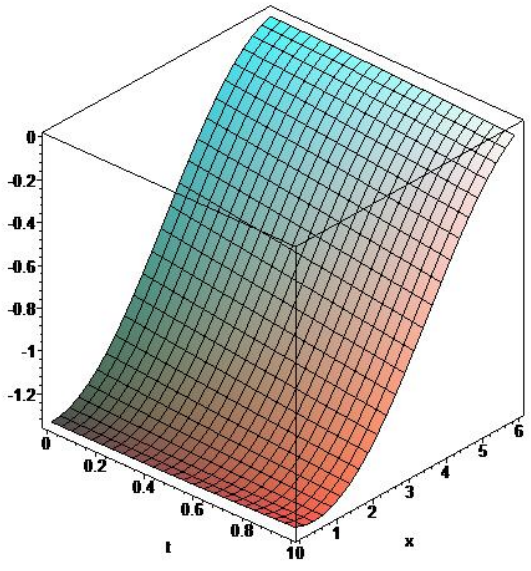
$$u(x,t)=\left(-\frac{8}{3}c+\frac{1}{6}cx^2-\frac{1}{288}cx^4+\ldots\right)+\left(-\frac{1}{3\Gamma(\alpha+1)}c^2x+\frac{1}{72\Gamma(\alpha+1)}c^2x^3+\ldots\right)t^{\alpha}$$
$$+\left(\frac{1}{3\Gamma(2\alpha+1)}c^3-\frac{1}{24\Gamma(2\alpha+1)}c^3x^2+\frac{1}{1152\Gamma(2\alpha+1)}c^3x^4+\ldots\right)t^{2\alpha}$$
$$+\left(\frac{1}{12\Gamma(3\alpha+1)}c^4x-\frac{1}{288\Gamma(3\alpha+1)}c^4x^3+\ldots\right)t^{3\alpha} \qquad (5.4)$$
$$+\left(-\frac{1}{12\Gamma(4\alpha+1)}c^5+\frac{1}{96\Gamma(4\alpha+1)}c^5x^2-\frac{1}{4608\Gamma(4\alpha+1)}c^5x^4+\ldots\right)t^{4\alpha}+\ldots$$

şeklinde elde edilir. $\alpha=1$ için (5.4) yaklaşık çözümü,

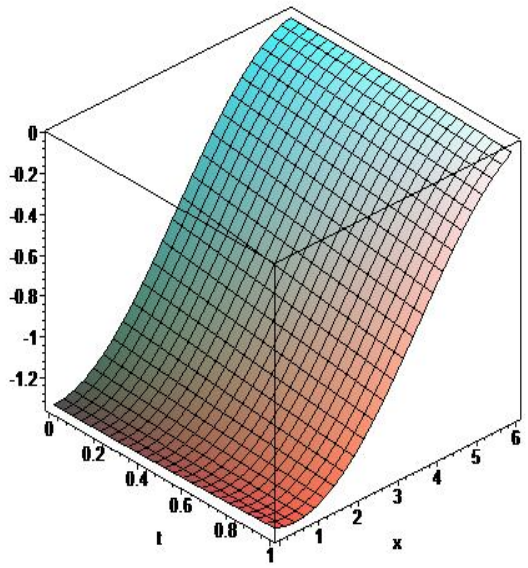
$$u(x,t)=-\frac{8}{3}c\cos^2\left(\frac{1}{4}(x-ct)\right),\ |x-ct|\le 2\pi$$

analitik çözümünü verir.

Şekil 5.1 ve Şekil 5.2'de $\alpha=1.0$ ve $c=0.5$ için kesirli Rosenau-Hyman denkleminin sırasıyla yaklaşık ve analitik çözümlerinin grafikleri verilmiştir.



Şekil 5.1. $\alpha=1.0$ ve $c=0.5$ için kesirli Rosenau-Hyman denkleminin yaklaşık çözümünün grafiği



Şekil 5.2. $\alpha = 1.0$ ve $c = 0.5$ için kesirli Rosenau-Hyman denkleminin analitik çözümünün grafiği

Çizelge 5.2 ve Çizelge 5.3'te $c = 0.5$ olmak üzere α 'nın alacağı bazı değerler için kesirli Rosenau-Hyman denkleminin KDDM ile elde edilen sonuçları ile, Molliq ve Noorani (2012)'nin yaptıkları çalışmada kullandıkları VIM ve HPM ile elde edilen sonuçları karşılaştırılmıştır. Çizelgelerde yer alan sonuçlara bakıldığında α 'nın alacağı değerlere göre KDDM ile bulunan sonuçların, Molliq ve Noorani (2012)'nin çalışmalarında kullandıkları VIM ve HPM ile elde edilen sonuçlardan daha başarılı ve analitik çözüm sonuçlarına daha yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.2. $c = 0.5$ olmak üzere $\alpha = 0.7$ ve $\alpha = 0.8$ için kesirli Rosenau-Hyman denkleminin KDDM ile elde edilen sonuçlar ile Molliq ve Noorani (2012)'nin çalışmalarında kullandıkları VIM ve HPM ile elde ettikleri sonuçların karşılaştırılması

x	t	VIM	HPM	KDDM	VIM	HPM	KDDM	ANALİTİK
		$\alpha = 0.7$			$\alpha = 0.8$			
$\frac{\pi}{4}$	0.2	-1.3027037	-1.3020263	**-1.3020263**	-1.2995666	-1.2994063	**-1.2994063**	-12945674
	0.6	-1.3163161	-1.3160219	**-1.3160249**	-1.3159022	-1.3158706	**-1.3158717**	-1.3137952
	1.0	-1.3194666	-1.3204884	**-1.3205051**	-1.3228476	-1.3231121	**-1.3231207**	-1.3265572
$\frac{\pi}{2}$	0.2	-1.1781765	-1.1775095	**-1.1775097**	-1.1715349	-1.1713677	**-1.1713678**	-1.1610425
	0.6	-1.2168471	-1.2161259	**-1.2161320**	-1.2124978	-1.2123777	**-1.2123801**	-1.2032236
	1.0	-1.2404292	-1.2410937	**-1.2411295**	-1.2415934	-1.2417625	**-1.2417802**	-1.2400437
$\frac{3\pi}{4}$	0.2	-0.4677769	-0.9752216	**-0.9752219**	-0.4579952	-0.9664930	**-0.9664934**	-0.9522533
	0.6	-0.5359648	-1.0325797	**-1.0325874**	-0.5255989	-1.0258054	**-1.0258081**	-1.0109660
	1.0	-0.5899819	-1.0742478	**-1.0742960**	-0.5848618	-1.0728597	**-1.0728828**	-1.0662388
π	0.2	-0.7263173	-0.7259589	**-0.7259662**	-0.7160797	-0.7159725	**-0.7159811**	-0.6999861
	0.6	-0.7945239	-0.7933266	**-0.7933321**	-0.7847888	-0.7845575	**-0.7845587**	-0.7662921
	1.0	-0.8456349	-0.8453513	**-0.8453944**	-0.8421984	-0.8421178	**-0.8421330**	-0.8316026

Çizelge 5.3. $c=0.5$ olmak üzere $\alpha=0.9$ ve $\alpha=1.0$ için kesirli Rosenau-Hyman denkleminin KDDM ile elde edilen sonuçlar ile Molliq ve Noorani (2012)'nin çalışmalarında kullandıkları VIM ve HPM ile elde ettikleri sonuçların karşılaştırılması

x	t	VIM	HPM	KDDM	VIM	HPM	KDDM	ANALİTİK
			$\alpha=0.9$			$\alpha=1.0$		
$\frac{\pi}{4}$	0.2	-1.2968978	-1.2968865	**-1.2968865**	-1.1139217	-1.2945674	**-1.2945674**	-12945674
	0.6	-1.3150924	-1.3150940	**-1.3150944**	-1.3137953	-1.3137952	**-1.3137952**	-1.3137952
	1.0	-1.3251352	-1.3251648	**-1.3251690**	-1.3265574	-1.3265572	**-1.3265572**	-1.3265572
$\frac{\pi}{2}$	0.2	-1.1658775	-1.1658583	**-1.1658655**	-1.1610425	-1.1610425	**-1.1610425**	-1.1610425
	0.6	-1.2080227	-1.2079404	**-1.2080170**	-1.2032236	-1.2032236	**-1.2032236**	-1.2032236
	1.0	-1.2413894	-1.2412100	**-1.2414131**	-1.2400439	-1.2400437	**-1.2400437**	-1.2400437
$\frac{3\pi}{4}$	0.2	-0.4496547	-1.1658655	**-0.9588464**	-0.4426464	-0.2194117	**-0.9522538**	-0.9522533
	0.6	-0.5158600	-1.0185228	**-1.0185236**	-0.5064510	-0.2710013	**-1.0109658**	-1.0109660
	1.0	-0.5788060	-1.0701462	**-1.0701562**	-0.5718564	-0.3265443	**-1.0662377**	-1.0662388
π	0.2	-0.7073528	-0.7073345	**-0.7073549**	-0.6999861	-0.699861	**-0.6999973**	-0.6999861
	0.6	-0.7754812	-0.7753489	**-0.7754630**	-0.7662921	-0.7662921	**-0.7662928**	-0.7662921
	1.0	-0.8374790	-0.8371566	**-0.8374629**	-0.8316027	-0.8316026	**-0.8315927**	-0.8316026

Kod 1: Örnek 5.1. için Maple Kodu

```
> restart:
> n:=50:
> β:=1:
> with(student):
> Digits:=10:
> func:=-8/3*c*(cos(x/4))^2:
> for k from 0 to n do
> u[k,0]:=coeftayl(func,x=0,k):
> od:
> for k from 0 to 13 do
> for h from 0 to 7 do
>
u[k,h+1]:=(GAMMA(h*α+1)/GAMMA(α*(h+1)+1))*((sum(sum(u[r,
h-s]*(k-r+1)*(k-r+2)*(k-r+3)*u[k-
r+3,s],s=0..h),r=0..k))+(sum(sum(u[r,h-s]*(k-r+1)*u[k-
r+1,s],s=0..h),r=0..k))+3*(sum(sum((r+1)*u[r+1,h-s]*(k-
r+1)*(k-r+2)*u[k-r+2,s],s=0..h),r=0..k))):
> od:
> od:
> u1:=0:
> for k from 0 to 8 do
> for h from 0 to 8 do
> u1:=u1+u[k,h]*x^(k*β)*t^(h*α):
> od:
> od:
> u1;
```

5.2. Kesirli Zakharov-Kuznetsov Denkleminin KDDM ile Çözümü

İskoç bilim adamı John Scott Russel 1834'te tek dalga (solitary wave)'yı Edinburg-Glasgow kanalında sığ sularda şeklini değiştirmeyen uzun bir su dalgası olarak gözlemlemiştir. Russell (1845) "Report on Wave" isimli makalesinde bu dalgayı "büyük dalga kayması" olarak adlandırmış ve gözlemlerini açıklamıştır. Bu makalede, tek dalganın periyodik bir dalga olmayıp seklini koruyan, tümsek şeklinde, simetrik izole edilmiş bir biçimde yayılan bir dalga olduğunu söylemiştir. Bu çalışmadan 50 yıl kadar sonra Diederik Johannes Korteweg ve Gustav de Vries adındaki iki Hollandalı bilim adamı Scott tarafından gözlemlenen olayın bir açıklamasını veren basit ve faydalı matematiksel bir model ortaya koyarak tek yöndeki dalgaların yayılışı için KdV denklemini elde etmişlerdir (Korteweg ve De Vries, 1895).

Doğrusal olmayan denklemler içerisinde en iyi bilinenlerden biri de KdV denklemidir. Bununla birlikte matematik ve fiziğin çeşitli dallarında doğrusal olmayan KdV denklemi ile karşılaşılmaktadır. Bu denklem soğuk bir plazmadaki akustik iyon dalgalarında, elastiki çubuklardaki dalgalarda, akışkanlar dinamiği, elektromanyetik dalgalarda ve trafik akışları gibi birçok fiziksel olayda uygulama alanına sahiptir. Zabusky ve Kruskal (1965) dalga hareketine benzer tekrarlanan olayları anlamak için KdV denklem sistemlerini gözlemlemişlerdir. Yaptıkları çalışma sonucunda tek dalganın en önemli özelliklerinden birisinin, birbiriyle çarpışmaları ve bu çarpışma hareketi sonucunda şekil ve biçimlerini korumasıdır. Bu da tek dalga için KdV denkleminin elastik olduğunu gösterir. Dalganın doğal yapısından dolayı Zabusky ve Kruskal (1965) bu tek dalgayı "soliton" olarak adlandırmışlardır. Soliton kavramı sayesinde uygulamalı matematikte ve fizikte pek çok doğrusal olmayan denklem bulunmuştur. Bu denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için pek çok metot geliştirilmiştir. Buna rağmen soliton kavramının kesin tanımını vermek kolay değildir. Bununla birlikte bu kavram doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklem veya sistemlerin herhangi bir çözümüyle ilişkilendirilebilir. Son zamanlarda soliton kavramı çok yaygın kullanılmıştır. Örneğin, doğrusal olmayan Schröndinger denklemi, plazma dalgalarını ve doğrusal olmayan optik dalgaları modellemek için kullanılır. Bir başka önemli denklem de Sine-Gordon denklemidir. Bu denklem de manyetik akıntıyı ve kristallerdeki bozukluğu tanımlamak için kullanılır.

Çalışmamızın temelini oluşturan doğrusal olmayan Zakharov-Kuznetsov (ZK) (p, q, r) saçılma denklemleri,

$$u_t + a(u^p)_x + b(u^q)_{xxx} + k(u^r)_{yyx} = 0 \ , \ \ a > 0, \ \ b > 0, \ k > 0, p, q, r > 1 \tag{5.5}$$

formunda bir doğrusal olmayan KdV denklemidir (Zakharov ve Kuznetsov, 1974).

$p = q = r$ olması halinde (5.5) denklemi kompakt destekli solitary dalgaları verir ve bu solitary dalgalara kompakton denir. Kompaktonlar, solitonların olağanüstü bir özelliği olan, diğer kompaktonlarla çarpışmadan sonra aynı şekil ile ortaya çıkma özellikli, solitary dalgaları olarak tanımlanır (Rosenau ve Hyman, 1993).

Kompaktonların bu önemli keşfi, son yıllardaki birçok önemli çalışmaya öncülük etmiştir. Kompakton çalışması hidrodinamik modellerdeki demetlerin performasyonu, akışkan damlalarının fizyonu ve eylemsiz füzyon gibi birçok bilimsel yöntemi anlayabilme imkânı verir. ZK (p, q, r) denklemleri düşük basınçlı manyetik plazmadaki soğuk iyonları ve eşit dağılımlı manyetik alandaki sıcak izotermal elektronları oluşturan plazma içindeki zayıf doğrusal olmayan iyon akustik dalgaların davranışlarını ifade eder (Munro ve Parkes, 1999; 2000).

Örnek 5.2.

$$u(x, y, 0) = \frac{4}{3} p \sinh^2(x + y) \tag{5.6}$$

başlangıç şartıyla verilen

$$D_t^{\gamma} u + (u^2)_x + \frac{1}{8}(u^2)_{xxx} + \frac{1}{8}(u^2)_{xyy} = 0 \ , \ \ 0 < \gamma \leq 1 \tag{5.7}$$

kesirli ZK (2,2,2) denklemini ele alalım. $u(x, y, t)$ fonksiyonunun bir değişkenli üç fonksiyonun çarpımı olarak ifade edilebileceğini kabul edelim.

p keyfi sabit olmak üzere $\gamma = 1$ alınırsa (5.7) denkleminin analitik çözümü,

$$u(x, y, t) = \frac{4}{3} p \sinh^2(x + y - pt) \tag{5.8}$$

biçimindedir (Inc, 2007).

$U_{\alpha,\beta,\gamma}(k,h,m)$ kesirli diferensiyel dönüşümünde $\alpha=1$ ve $\beta=1$ alınarak, (5.7) denkleminin her iki yanına üç boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümü uygulanırsa (5.7) kesirli diferensiyel denklemi,

$$U_{1,1,\gamma}(k,h,m+1)=-\frac{\Gamma(m\gamma+1)}{\Gamma(\gamma(m+1)+1)}\Bigg[2\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{j=0}^{m}(k-r+1)U_{1,1,\gamma}(r,h-s,m-j)U_{1,1,\gamma}(k-r+1,s,j)$$
$$+\frac{3}{4}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{j=0}^{m}(r+1)U_{1,1,\gamma}(r+1,h-s,m-j)(k-r+1)(k-r+2)U_{1,1,\gamma}(k-r+2,s,j)$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{j=0}^{m}U_{1,1,\gamma}(r,h-s,m-j)(k-r+1)(k-r+2)(k-r+3)U_{1,1,\gamma}(k-r+3,s,j) \qquad (5.9)$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{j=0}^{m}(r+1)U_{1,1,\gamma}(r+1,h-s,m-j)(s+1)(s+2)U_{1,1,\gamma}(k-r,s+2,j)$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{j=0}^{m}U_{1,1,\gamma}(r,h-s,m-j)(k-r+1)(s+1)(s+2)U_{1,1,\gamma}(k-r+1,s+2,j)\Bigg]$$

yineleme bağıntısına dönüşür. (5.6) ile verilen başlangıç şartının kesirli diferensiyel dönüşümünü alırsak,

$$U_{1,1,\gamma}(k,h,0)=\frac{-2p}{3}\delta(k)\delta(h)+\frac{p}{3}\frac{2^k2^h}{k!h!}+\frac{p}{3}\frac{(-2)^k(-2)^h}{k!h!} \qquad (5.10)$$

elde ederiz. (5.9) yineleme bağıntısı ve (5.10) başlangıç şartının kesirli diferensiyel dönüşümü kullanılırsa, $U_{1,1,\gamma}(k,h,m)$ üç boyutlu kesirli diferensiyel dönüşümünden elde edilen terimlerinden birkaçı aşağıdaki gibi olur.

$U_{1,1,\gamma}(0,0,0)=0$ hariç $k+h+m=tek\ sayı$ ise $U_{1,1,\gamma}(k,h,m)=0$ 'dır. Diğer durumlarda ise

$$U_{1,1,\gamma}(1,1,0)=\frac{8p}{3} \quad , \quad U_{1,1,\gamma}(1,0,1)=-\frac{32}{3}\frac{p^2}{\Gamma(\gamma+1)} \quad , \quad U_{1,1,\gamma}(0,1,1)=-\frac{32}{3}\frac{p^2}{\Gamma(\gamma+1)}$$

$$U_{1,1,\gamma}(2,0,0)=\frac{4p}{3} \quad , \quad U_{1,1,\gamma}(0,2,0)=\frac{4p}{3} \quad , \quad U_{1,1,\gamma}(0,0,2)=0 \quad , \quad U_{1,1,\gamma}(2,2,0)=\frac{8p}{3}$$

$$U_{1,1,\gamma}(2,0,2)=\frac{4352}{9}\frac{p^3}{\Gamma(2\gamma+1)} \ , \ U_{1,1,\gamma}(0,2,2)=\frac{1280}{9}\frac{p^3}{\Gamma(2\gamma+1)} \ , \ U_{1,1,\gamma}(2,1,1)=-\frac{128p^2}{\Gamma(\gamma+1)}$$

$$U_{1,1,\gamma}(1,2,1)=-\frac{128p^2}{\Gamma(\gamma+1)} \ , \ U_{1,1,\gamma}(1,1,2)=\frac{5632}{9}\frac{p^3}{\Gamma(2\gamma+1)} \ , \ldots$$

elde edilir. $U_{1,1,\gamma}(k,h,m)$ terimlerini üç boyutlu kesirli diferensiyel dönüşüm tanımı (4.28)'de yerine yazarsak (5.7) kesirli ZK (2,2,2) başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü,

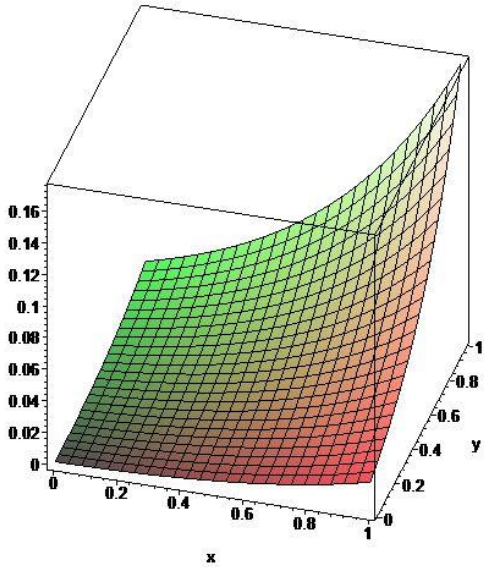
$$\begin{aligned} u(x,y,t)=&\left(\frac{8p}{3}xy+\frac{4p}{3}x^2+\frac{4p}{3}y^2+\frac{8p}{3}x^2y^2+\ldots\right)\\ &+\left(-\frac{32p^2}{3\Gamma(\gamma+1)}x-\frac{32p^2}{3\Gamma(\gamma+1)}y-\frac{128p^2}{\Gamma(\gamma+1)}xy^2-\frac{128p^2}{\Gamma(\gamma+1)}x^2y+\ldots\right)t^{\gamma}\\ &+\left(\frac{4352p^3}{9}x^2+\frac{1280}{9}\frac{p^3}{\Gamma(2\gamma+1)}y^2+\frac{5632}{9}\frac{p^3}{\Gamma(2\gamma+1)}xy+\ldots\right)t^{2\gamma}+\ldots \end{aligned} \qquad (5.11)$$

şeklinde elde edilir. $\gamma=1$ için (5.7) kesirli ZK (2,2,2) başlangıç değer probleminin (5.11) yaklaşık çözümünden kapalı seri açılımı

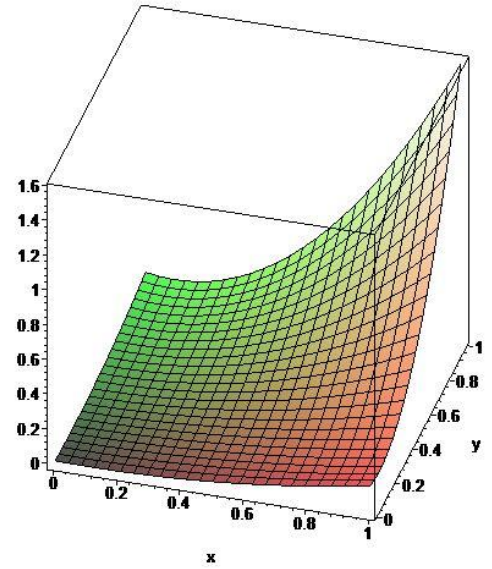
$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}U_{1,1,1}(k,h,m)(x)^k(y)^h(t)^m=\frac{4}{3}p\sinh^2(x+y-pt)$$

şeklinde elde edilir.

Aşağıda Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'te $\gamma=1$, $p=0.1$ ve $t=0.5$ için kesirli ZK (2,2,2) denkleminin analitik çözümünün grafiği ile yaklaşık çözümün grafiği verilmiştir.



Şekil 5.3. $\gamma = 1.0$, $p = 0.1$ ve $t = 0.5$ için kesirli ZK (2,2,2) denkleminin analitik çözümünün grafiği



Şekil 5.4. $\gamma = 1.0$, $p = 0.1$ ve $t = 0.5$ için kesirli ZK (2,2,2) denkleminin yaklaşık çözümünün grafiği

Kod 2: Örnek 5.2. için Maple Kodu

```
> restart:
> n:=4:
> for k from 0 to 5 do:
> for h from 0 to 5 do:
> for m from 0 to 5 do:
> u[k,h,m]:=0:
> od:
> od:
> od:
> Digits:=10:
> for k from 0 to 5 do:
> for h from 0 to 5 do:
>
u[k,h,0]:=coeftayl(4/3*p*(sinh(1/2*(x+y)))^2,[x,y,t]=[0,
0,0],[k,h,0]):
> od:
> od:
> for k from 0 to n do
> for h from 0 to n do
> for m from 0 to n+1 do
> u[k,h,m+1]:=-
(GAMMA(m*γ+1)/GAMMA(γ*(m+1)+1))*(2*(sum(sum(sum((k-
r+1)*u[r,h-s,m-p]*u[k-
r+1,s,p],p=0..m),s=0..h),r=0..k))+3/4*(sum(sum(sum((r+1)
*u[r+1,h-s,m-p]*(k-r+1)*(k-r+2)*u[k-
r+2,s,p],p=0..m),s=0..h),r=0..k))+1/4*(sum(sum(sum(u[r,h
-s,m-p]*(k-r+1)*(k-r+2)*(k-r+3)*u[k-
r+3,s,p],p=0..m),s=0..h),r=0..k))+1/2*(sum(sum(sum((h-
s+1)*u[r,h-s+1,m-p]*(s+1)*(k-r+1)*u[k-
r+1,s+1,p],p=0..m),s=0..h),r=0..k))+1/4*(sum(sum(sum((r+
1)*u[r+1,h-s,m-p]*(s+1)*(s+2)*u[k-
r,s+2,p],p=0..m),s=0..h),r=0..k))+1/4*(sum(sum(sum(u[r,h
-s,m-p]*(k-r+1)*(s+1)*(s+2)*u[k-
r+1,s+2,p],p=0..m),s=0..h),r=0..k))):
> od:
> od:
> od:
> u1:=0:
> for k from 0 to 2 do
> for h from 0 to 2 do
> for m from 0 to 2 do
> u1:=u1+u[k,h,m]*x^(k)*y^(h)*t^(m*γ):
> od:
> od:
> od:
> u1;
```

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında; son zamanlarda bilim dünyasında önemli bir yer edinen kesirli diferensiyel denklemlerin kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ile çözümü ele alınmıştır.

Çalışmada; kesirli diferensiyel dönüşüm metodu, özellikleri ve metodun kesirli diferensiyel denklemlere uygulaması verilmiştir. Daha sonra kesirli Rosenau-Hyman denklemi ve kesirli ZK (2,2,2) denklemi için kesirli diferensiyel dönüşüm metodu uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar ile farklı metotlar kullanılarak bulunan sonuçlar tablo ve şekillerle karşılaştırılmıştır.

Kesirli diferensiyel dönüşüm metodunun diğer metotlara göre daha etkili, sade ve uygulanabilir olduğu görülmüştür. Kesirli diferensiyel dönüşüm metodu, kesirli diferensiyel denklemler üzerine çalışmak isteyen kişilere yol gösterici olacak ve daha önce uygulanmamış matematiksel modellerin çözümlerini bulmak için faydalı bir araç olacaktır.

KAYNAKLAR

Abdel-Halim Hassan, I. H., 2008, Comparison differential transformation technique with Adomian decomposition method for linear and nonlinear initial value problems, *Chaos, Solitons & Fractals*, 36 (1), 53-65.

Adomian, G., 1988, A review of the decomposition method in applied mathematics, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 135 (2), 501-544.

Al-rabtah, A., Ertürk, V. S. ve Momani, S., 2010, Solutions of a fractional oscillator by using differential transform method, *Computers & Mathematics with Applications*, 59 (3), 1356-1362.

Arikoglu, A. ve Ozkol, I., 2007, Solution of fractional differential equations by using differential transform method, *Chaos, Solitons & Fractals*, 34 (5), 1473-1481.

Arikoglu, A. ve Ozkol, I., 2009, Solution of fractional integro-differential equations by using fractional differential transform method, *Chaos, Solitons & Fractals*, 40 (2), 521-529.

Ayaz, F., 2003, On the two-dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 143 (2–3), 361-374.

Ayaz, F., 2004a, Solutions of the system of differential equations by differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 147 (2), 547-567.

Ayaz, F., 2004b, Applications of differential transform method to differential-algebraic equations, *Applied Mathematics and Computation*, 152 (3), 649-657.

Biazar, J., Badpeima, F. ve Azimi, F., 2009, Application of the homotopy perturbation method to Zakharov–Kuznetsov equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 58 (11–12), 2391-2394.

Bildik, N., Konuralp, A., Orakçı Bek, F. ve Küçükarslan, S., 2006, Solution of different type of the partial differential equation by differential transform method and Adomian's decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 172 (1), 551-567.

Caputo, M., 1967, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II, *Geophysical Journal International*, 13 (5), 529-539.

Chen, C.-K. ve Ho, S.-H., 1996, Application of differential transformation to eigenvalue problems, *Applied Mathematics and Computation*, 79 (2–3), 173-188.

Chen, C. L. ve Liu, Y. C., 1998, Solution of Two-Point Boundary-Value Problems Using the Differential Transformation Method, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 99 (1), 23-35.

Chen, C. o. K. ve Ho, S. H., 1999, Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 106 (2-3), 171-179.

Clarkson, P., Mansfield, E. L. ve Priestley, T., 1997, Symmetries of a class of nonlinear third-order partial differential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 25 (8-9), 195-212.

Çetinkaya, A. ve Kıymaz, O., 2013, The solution of the time-fractional diffusion equation by the generalized differential transform method, *Mathematical and Computer Modelling*, 57 (9-10), 2349-2354.

El-Ajou, A., Arqub, O. A. ve Momani, S., 2015, Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV–Burgers equation: A new iterative algorithm, *Journal of Computational Physics*, 293, 81-95.

Erturk, V., Yıldırım, A., Momanic, S. ve Khan, Y., 2012, The differential transform method and Padé approximants for a fractional population growth model, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 22 (6), 791-802.

Erturk, V. S., Momani, S. ve Odibat, Z., 2008, Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13 (8), 1642-1654.

Ertürk, V. S. ve Momani, S., 2008, Solving systems of fractional differential equations using differential transform method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215 (1), 142-151.

Ertürk, V. S., 2011, Computing eigenelements of Sturm–Liouville problems of fractional order via fractional differential transform method, *Mathematical and Computational Applications*, 16 (3), 712-720.

Garg, M., Manohar, P. ve Kalla, S. L., 2011, Generalized differential transform method to space-time fractional telegraph equation, *International Journal of Differential Equations*, 2011.

Ghazanfari, B. ve Ebrahimi, P., 2015, Differential transformation method for solving fuzzy fractional heat equations, *Int. J. Math. Modll. Comput*, 5 (1), 81-89.

Gorenflo, R. ve Mainardi, F., 2008, Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order, *arXiv preprint arXiv:0805.3823*.

Hammouch, Z. ve Mekkaoui, T., 2013, Approximate analytical solution to a time-fractional Zakharov-Kuznetsov equation, *International Journal of Physical Research*, 1 (2), 28-33.

He, J.-H., 1999, Homotopy perturbation technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178 (3), 257-262.

He, J., 1997, A new approach to nonlinear partial differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2 (4), 230-235.

Hesam, S., Nazemi, A. ve Haghbin, A., 2010, Analytical solution for the Zakharov–Kuznetsov equations by differential transform method, *International Journal of Engineering Science*, 4, 235-240.

İbiş, B., Bayram, M. ve Ağargün, A. G., 2011, Applications of fractional differential transform method to fractional differential-algebraic equations, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4 (2), 129-141.

Inc, M., 2007, Exact solutions with solitary patterns for the Zakharov–Kuznetsov equations with fully nonlinear dispersion, *Chaos, Solitons & Fractals*, 33 (5), 1783-1790.

Kilbas, A., Srivastave, H. ve Trujillo, J., 2006, Theory and applications of fractional differential equations, north-hollan math, *Studies*, 204, 135-209.

Korteweg, D. J. ve De Vries, G., 1895, XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39 (240), 422-443.

Kurulay, M. ve Bayram, M., 2010, Approximate analytical solution for the fractional modified KdV by differential transform method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15 (7), 1777-1782.

Kurulay, M., Ibrahimoglu, B. A. ve Bayram, M., 2010, Solving a system of nonlinear fractional partial differential equations using three dimensional differential

transform method, *International Journal of the Physical Sciences*, 5 (6), 906-912.

Liu, J. ve Hou, G., 2011, Numerical solutions of the space-and time-fractional coupled Burgers equations by generalized differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (16), 7001-7008.

Loverro, A., 2004, Fractional Calculus: History, *Definitions and Applications for the Engineer*, 84.

Merdan, M., Gökdoğan, A., Yıldırım, A. ve Mohyud-Din, S. T., 2012, Numerical simulation of fractional Fornberg-Whitham equation by differential transformation method, *Abstract and Applied Analysis*.

Miller, K. S. ve Ross, B., 1993, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.

Mohammed, O. H., Fadhel, S. F. ve Abdul-Khaleq, F. A., 2011, Differential Transform method for solving fuzzy fractional initial value problems, *J. Basrah Res*, 37 (4), 158-170.

Molliq, R., Noorani, M. S. M., Hashim, I. ve Ahmad, R. R., 2009, Approximate solutions of fractional Zakharov–Kuznetsov equations by VIM, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233 (2), 103-108.

Molliq, R. ve Noorani, M. S. M., 2012, Solving the Fractional Rosenau-Hyman Equation via Variational Iteration Method and Homotopy Perturbation Method, *International Journal of Differential Equations*, 2012, 1-14.

Momani, S., 2005, Analytic and approximate solutions of the space- and time-fractional telegraph equations, *Applied Mathematics and Computation*, 170 (2), 1126-1134.

Momani, S. ve Al-Khaled, K., 2005, Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 162 (3), 1351-1365.

Momani, S. ve Odibat, Z., 2007, Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order, *Physics Letters A*, 365 (5-6), 345-350.

Momani, S., Odibat, Z. ve Erturk, V. S., 2007, Generalized differential transform method for solving a space- and time-fractional diffusion-wave equation, *Physics Letters A*, 370 (5–6), 379-387.

Momani, S. ve Odibat, Z., 2008, A novel method for nonlinear fractional partial differential equations: Combination of DTM and generalized Taylor's formula, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 220 (1–2), 85-95.

Munro, S. ve Parkes, E. J., 1999, The derivation of a modified Zakharov-Kuznetsov equation and the stability of its solutions, *Journal of Plasma Physics*, 62, 305-317.

Munro, S. ve Parkes, E. J., 2000, Stability of solitary-wave solutions to a modified Zakharov-Kuznetsov equation, *Journal of Plasma Physics*, 64, 411-426.

Nazari, D. ve Shahmorad, S., 2010, Application of the fractional differential transform method to fractional-order integro-differential equations with nonlocal boundary conditions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234 (3), 883-891.

Odibat, Z. ve Momani, S., 2008, A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order, *Applied Mathematics Letters*, 21 (2), 194-199.

Odibat, Z., Momani, S. ve Erturk, V. S., 2008, Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractional order, *Applied Mathematics and Computation*, 197 (2), 467-477.

Odibat, Z. M. ve Shawagfeh, N. T., 2007, Generalized Taylor's formula, *Applied Mathematics and Computation*, 186 (1), 286-293.

Odibat, Z. ve Momani, S., 2006, Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7 (1), 27-34.

Oldham, K. ve Spanier, J., 1974, The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, Elsevier, p.

Podlubny, I., 1999, Fractional Differential Equations, *San Diego*, Academic Press, p.

Rosenau, P. ve Hyman, J. M., 1993, Compactons: solitons with finite wavelength, *Physical Review Letters*, 70 (5), 564.

Ross, B., 1977, The development of fractional calculus 1695–1900, *Historia Mathematica*, 4 (1), 75-89.

Russell, J. S., 1845, Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43, p.

Secer, A., Akinlar, M. A. ve Cevikel, A., 2012, Efficient solutions of systems of fractional PDEs by the differential transform method, *Advances in Difference Equations*, 2012 (1), 188.

Yıldırım, A. ve Gülkanat, Y., 2010, Analytical approach to fractional Zakharov–Kuznetsov equations by He's homotopy perturbation method, *Communications in Theoretical Physics*, 53 (6), 1005.

Zabusky, N. J. ve Kruskal, M. D., 1965, Interaction of" solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters*, 15 (6), 240.

Zakharov, V. E. ve Kuznetsov, E. A., 1974, On three-dimensional solitons, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 66, 594-597.

Zhou, J. K., 1986, Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits (in Chinese), *Wuhan,China* Huazhong University Press, p.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Serkan SÖNMEZER
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Emirdağ 30.09.1988
Telefon : 0538 498 32 23
Faks : -
E-mail : serkansonmezer@gmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	**Ermenek Lisesi, Ermenek, Karaman**	**2006**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2011**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2019**
Doktora	:	-	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2014-	**Millî Eğitim Bakanlığı**	**Öğretmen**

YABANCI DİLLER

İngilizce (B Seviye)

YAYINLAR

O. ÖZKAN, Ü. CANSU, S. SÖNMEZER Numerical Solution of Time-Fractional Zakharov-Kuznetsov Equation via Generalized Differential Transform Method, Ifors 2014 - 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies Abstract kitabında basılmıştır.