T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞIRLIKLI VE AĞIRLIKSIZ GRAFLARIN NORMALİZE LAPLACİAN MATRİSİNİN EN BÜYÜK ÖZDEĞERİ İÇİN BAZI ÜST SINIRLAR

Semra İNCİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya - 2009

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞIRLIKLI VE AĞIRLIKSIZ GRAFLARIN NORMALİZE LAPLACİAN MATRİSİNİN EN BÜYÜK ÖZDEĞERİ İÇİN BAZI ÜST SINIRLAR

Semra İNCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR

Konya - 2009

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AĞIRLIKLI VE AĞIRLIKSIZ GRAFLARIN NORMALİZE LAPLACİAN MATRİSİNİN EN BÜYÜK ÖZDEĞERİ İÇİN BAZI ÜST SINIRLAR

Semra İNCİ

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR

Jüri: Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR
Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI
Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ

Bu çalışmada, öncelikle her bir kenar ağırlığı pozitif tanımlı matris olan, basit ağırlıklı grafların normalize olmuş Laplacian matrisinin tanımı verildi. Daha sonra ise, bu matrisin en büyük özdeğeri için üst sınırlar elde edildi. Ayrıca elde edilen bu üst sınırlardan yararlanılarak, ağırlıklı ve ağırlıklı olmayan grafların normalize olmuş Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için de üst sınırlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ağırlıklı graf, Normalize olmuş Laplacian matris, Pozitif tanımlı matris, Üst sınır.

ABSTRACT

MS. THESIS

SOME UPPER BOUNDS ON THE LARGEST NORMALİZED LAPLACIAN EIGENVALUE OF WEIGHTED AND UNWEIGHTED GRAPHS

Semra İNCİ

Selcuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR

Jury: Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR
Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI
Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ

In this study, firstly, we give definition of the normalized Laplacian matrix of weighted graphs, where the edge weights are positive definite matrices. Then, we obtain upper bounds on the spectral radius of this matrix. Moreover, we have found that some upper bounds on the normalized Laplacian spectral radius of weighted and unweighted graphs can be deduced from these upper bounds.

Key Words: Weighted graph, Normalized Laplacian matrix, Positive definite matrix, Upper bound.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın birinci bölümünde, graflar, özdeğerleri ve uygulamaları, graf özdeğerlerinin tarihçesi ve literatür özetlerinden bahsedilmiştir. İkinci bölüm, giriş bölümü olup, ileriki bölümlerde kullanacağımız temel bilgiler verilmiştir. Geriye kalan bölüm çalışmanın ana bölümü olup normalize olmuş Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için üst sınırlar verilmiştir. Son olarak yararlanılan kaynaklar sunulmuştur.

Bu çalışma süresince emeği geçen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR ve arkadaşlarım Yusuf Faruk Metin ve Esra Murat'a ve çalışmam boyunca desteğini hiç esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Semra İnci

2009

İÇİNDEKİLER

Özet i

Abstract ii

Önsöz iii

1. BÖLÜM

1.1 Graflar, Özdeğerleri ve Uygulamaları 1

1.2 Graf Özdeğerlerinin Tarihçesi 3

1.3 Kaynak Araştırması 4

2. BÖLÜM

2.1 Temel Kavramlar 6

3.BÖLÜM

3.1 Normalize Olmuş Laplacian Matrisinin En Büyük Özdeğeri İçin Üst Sınırlar 11

4. BÖLÜM

4.1 Sonuç ve Öneriler 22

KAYNAKLAR 23

1. BÖLÜM

Bu bölümde genel olarak grafın özdeğerlerinin uygulamaları ve tarihi oluşumu hakkında bilgi vereceğiz. Burada grafın özdeğerleri ile ilgili çalışmaların gelişimini, konunun matematik alanındaki genişliği ve uygulama noktaları olmak üzere iki parça halinde sunacağız.

1.1 Graflar, Özdeğerleri ve Uygulamaları

Graf; hem matematiksel bir ağ modeli (şehirler, bilgisayarlar, atomlar gibi) ve hem de soyut nesnelerdir. Grafın kimya, elektrik mühendisliği, mimarlık gibi sayısal alanlarda da uygulamaları vardır. Kabaca bir graf; ağın düğüm noktalarını gösteren bir noktalar kümesi (şehirler, bilgisayarlar, atomlar) ve iki şehir arasındaki yolu, bilgisayarlar arasındaki bağlantıları, atomlar arasındaki bağları gösteren iki noktayı birleştiren kenarların kümesidir. Bu kenarlar, kapasite, güç ve uzaklıkların gösteriminde kullanılabilirler ve yönlendirilebilirler (tek yönlü trafik). Bu model basit olmasına rağmen, yani onu temsil eden ağın türü graftan görünmemesine rağmen; bu teori, çok zengin ve farklıdır.

Graf teorisi problemlerinin çok çeşitli türleri vardır. Mesela ünlü satış temsilcisi problemi; her bir noktadan geçerek grafın bir ucundan diğer ucuna en kısa yolu bulma problemidir. Küçük graflar için bu yöntem kolay gelebilir fakat nokta sayısı arttıkça bu problem çok zorlaşır. Problem, ismini problemin baş harflerinin birleşiminden alır. Fakat çok ilginçtir ki, bu problemin oldukça farklı alanlarda uygulandığı gözlenmiştir. Örneğin; Çok Büyük Ölçüde Çemberlerin Birleştirilmesi (ÇBÖÇB) gibi. Bir diğer problem ise bağlantılılık problemidir. Bu problem de; herhangi bir noktadan başka bir noktaya graf boyunca yürünmesi esnasında kaç tane kenar silinebileceğine dayanır.

Sadece simetrik graf teoride değil, graf teorinin diğer kısımlarında da lineer cebirin kullanımı yaygındır.

Özel problemler ve kişisel tercihe göre bir grafı göstermek için farklı türde matrisler kullanılmıştır. Bunlardan en bilinenleri Laplacian ve (0,1)- komşuluk matrisleridir. Genellikle matrisin cebirsel özellikleri, grafın farklı yapısal özellikleri arasında bir köprü görevi görür. Grafın yapısal özellikleriyle (kombinasyonel, topolojik)

matrisin cebirsel özellikleri arasındaki bağlantı ilgi çekicidir. Bazen bu teori daha ileriye gidebilmektedir, örneğin teorik kimyada, hidrokarbon molekülüne karşılık gelen grafın komşuluk matrisinin özdeğerleri onun kararlılığını tahmin etmek için kullanılmaktadır.

1977 de Bielr, Dill, Heilbroner ve Schmelzer eşit orbital bağ yaklaşımını geliştirmişlerdir(BDHS modeli olarak bilinir). 2000 de Merris ve Gutman, doymuş hidrokarbonların deneysel foto elektron spektrumlarının çoğalma kapasitelerinin (ki buna yüksek enerji bandı da (HEB) denmektedir), 17–26 eV görüntü kümesi içinde olduğunu göstermişlerdir. C_{2s} elektronlarının iyonlaşmasında; HEB in, karbon atomlarının 2s- orbitalleri ile uyuştuğuna inanılmaktadır. BDHS modelinin temel sonucu α ve β, yarı deneyimsel parametreler (1977 de alkanlar (formül C_nH_{2n+2}) için önerilen değerler $\alpha = -16,10 - 0,08\text{eV}$ $\beta = -2,11 - 0,03\text{eV}$ dir.) ve $x_j, j = 1,2,3,...,3n+1$ hidrojen dolu moleküler grafa denk olan çizgi grafının özdeğerleri olmak üzere,

$$E_j = \alpha + \beta x_j$$

olarak açıklanmıştır. 1999 da alkanlar için en bilinen sonuçlarından bir tanesinin, $y_j, j = 1,2,3,...,3n+1$ hidrojen dolu moleküler grafın sıfırdan farklı Laplacian özdeğerleri olmak üzere, $x_j = y_j - 2$ olduğu gösterilmiştir. Bu nedenle Laplacian matrisinin özdeğerlerini bilmek kadar komşuluk matrisinin özdeğerlerini bilmek de önemlidir.

Matematik literatüründe grafların spektrumu çok sık karşımıza çıkar. Şimdi graf spektrumlarının önemini vurgulamaya çalışalım:

1) Özdeğerler, çeşitli uygulamalarda ortaya çıkar; örneğin kuantum kimyasında, belirli doymamış hidrokarbonların yapısı graflarla gösterilir. Böyle bir moleküldeki elektronların enerji seviyeleri gerçekte ona uygun grafın özdeğerleridir. Molekülün kararlılığı, graf spektrumu ve uygun özdeğerlerle de yakından ilişkilidir.

2) Graf teori ve kombinasyonel teorideki pek çok teoremin ifadeleri açık bir şekilde spektrayı içermemesine rağmen, ispatlarında spektrum teknikleri sıkça kullanılır.

3) Spektrum çok uzun zamandan beri hesaplanabilen bir özelliktir. Buna G nin erişilebilirlik özelliği gözüyle bakılır. Tersine G nin bazı özellikleri ise erişilmez gibi düşünülür (kromatik sayılar gibi). Çünkü bugüne kadar hiç kimse kromatik sayıların nasıl hesaplanacağını bilmiyordu.

1.2 Graf Özdeğerlerinin Tarihçesi

Kombinatorikler, kombinasyonel optimizasyon ve graf teoride özdeğer metodlarının uygulamaları çok uzun bir geçmişe sahiptir. Özdeğerlerin çok önemli bir kullanımı 1979 da L. Lovász tarafından elde edilen theta fonksiyonunun Lovász notasyonudur. Bu notasyon kullanılarak beş noktalı devir için Shannon kapasite problemi çözülmüştür. Theta fonksiyonu mükemmel grafların kromatik sayısını hesaplamak için bilinen bir yol sağlar. Random (0,1) –matrislerinin özdeğerleri, random graflarının theta fonksiyonunun davranışını 1984 de analiz eden, Juhász tarafından çalışılmıştır. Grafların izoperimetrik özellikleri ve onların özdeğerleri, randomize olmuş çeşitli algoritmaların şekillendirilmesinde önemli rol oynar. Bu uygulamalar hızlı bir şekilde karışan Markov zincirlerine dayanır. Özdeğerlerin uygulamalarının kombinatöriel optimizasyon problemlerinde de önemi vardır. Onlardan sadece birkaç tanesinden söz edelim. 1987–1992 de Burkard, Finke, Rendll, Wolkowicz kuadratik işaret problemi ve genel graf parçalanış problemlerinde; 1993 de Delorme ve Poljak max-cut probleminde ve 1992–1993 de Juvan ve Mohar etiketleme problemlerinde özdeğerleri kullandılar. Grafların Laplacian özdeğerlerinin özvektörlerine bağlı spektral parçalanış; 1992 de Simon ve Wang lineer sistemlerin çözümünde, 1993–1995 de Juvan ve Mohar rank bulmada, 1992–1995 de parçalanış algoritmalarının şekillendirilmesinde en başarılı deneye dayalı yaklaşımlardan biri olarak gösterilmiştir. Bu uygulamalardan biri de negatif olmayan matrisin Perron-Frobenius özvektörünün özelliklerine dayanır. Bu teknik, rank bulma problemleri için uygundur. Kombinasyonel optimizasyonda özdeğerleri kullanmanın pek çok yolu vardır. Bunlardan ilki de, ilgili matrislerin özdeğerlerini içeren belirli sınırların formülleştirilmesidir.

1.3.Kaynak Araştırması

Bu bölümde kaynaklar kısmında kullandığımız çalışmaların kısa bir özeti verilecektir.

O. Rojo, R. Soto, H. Rojo " An Always Nontrivial Upper Bound for Laplacian Graph Eigenvalues" adlı çalışmasında; d_i, v_i nin derecesi ve $\left|N_i \cap N_j\right|$ de v_i ve v_j nin ortak komşuluklarının sayısı olmak üzere Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için

$$\lambda_1 \le \max\left\{d_i + d_j - \left|N_i \cap N_j\right| : 1 \le i < j \le n\right\}$$

üst sınırını elde etmişlerdir.

R. Merris "A Note On Laplacian Graph Eigenvalues" adlı çalışmasında; $v \in V$ için, v nin derecesi d(v) ve v ye komşu olan noktaların derecelerinin ortalaması m(v) olmak üzere bir G grafının Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için

$$b(G) = \max\left\{m(v) + d(v) : v \in V\right\}$$

üst sınırını elde etmiştir.

W. N. Anderson ve T. D. Morley "Eigenvalues of the Laplacian Matrix of A Graph" adlı çalışmasında Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için

$$\lambda_1 \le d_1 + d_2$$

üst sınırını elde etmiştir.

K. C. Das "An Improved Upper Bound for Laplacian Graph Eigenvalues" adlı çalışmasında bir grafın Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için

$$\lambda_1 \le \max\left\{\sqrt{2\left(d_i^2 + d_i m_i^2\right)} \quad : \quad 1 \le i \le n\right\},$$

$$\left(m_i = \frac{\sum_j \left\{d_i - \left|N_i - N_j\right|\right\} : v_i v_j \in E}{d_i}\right)$$

üst sınırını elde etmiştir.

J. – S. Li, D. Zhang " A New Upper Bound for Eigenvalues of the Laplacian Matrix of A Graph" adlı çalışmalarında bir grafın Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için

$$\lambda_1 \le 2+\sqrt{(d_1+d_2-2)(d_1+d_3-2)}$$

üst sınırını elde etmişlerdir.

J. – S. Li, D. Zhang "On Laplacian Eigenvalues of A Graph" adlı çalışmalarında bir G grafının Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için

$$\lambda_1 \le \max\left\{\frac{d_u(d_u+m_u)+d_v(d_v+m_u)}{d_u+d_v} : uv \in E\right\}$$

üst sınırını elde etmişlerdir.

Kinkar Ch. Das " Extremal Graph Characterization from the Upper Bound of the Laplacian Spectral Radius of Weighted Graphs" adlı çalışmasında, kenar ağırlıkları pozitif tanımlı matrisler olan ağırlıklı graflar incelenmiştir. Ağırlıklı grafların Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için iki üst sınır elde edilmiş ve bu sınırlar için eşitlik koşulları verilmiştir. Ayrıca elde edilen bu üst sınırlardan ağırlıklı ve ağırlıklı olmayan grafların Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için bilinen bazı üst sınırlara indirgeme yapılmıştır.

Kinkar Ch. Das, R. B. Bapat " A Sharp Upper Bound on the Largest Laplacian Eigenvalue of Weighted Graphs" adlı çalışmalarında kenar ağırlıkları pozitif tanımlı matrisler olan ağırlıklı graflar incelenmiştir. Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için bir üst sınır ve bu sınır için eşitlik koşulları elde edilmiştir.

2. BÖLÜM

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde literatürde önemli bir yere sahip olan graflarla ilgili bazı tanımlar verilecek, temel kavramlar üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.1 Bir graf; V boş olmayan bir küme ve E, her elemanı V nin farklı elemanlarının oluşturduğu sıralı olmayan çiftlerden oluşan küme olmak üzere, V ve E kümelerinden meydana gelir. V nin elemanlarına nokta, E nin elemanlarına kenar denir. V sonlu küme, $E(V)=\{(u,v)|u,v\in V, u\neq v\}$ olsun. $G=(V_G,E_G)(E\subseteq E(V))$ çiftine V üzerinde graf denir.
(Chung, 1997)

Tanım 2.2 $V_G=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ olsun. G nin komşuluk matrisi; $v_iv_j\in E_G$ ise $A_{ij}=1$ ve $v_iv_j\notin E_G$ ise $A_{ij}=0$ biçiminde tanımlanan $n\times n$ tipinde bir A matrisidir. Yani kısaca,

$$A=(A_{ij})_{n\times n}=\begin{cases}1\ , & v_iv_j\in E_G\\ 0\ , & v_iv_j\notin E_G\end{cases}$$

matrisi G nin komşuluk matrisidir.
(Chung, 1997)

Tanım 2.3 $v\in G$, G grafının bir noktası olsun. v nin komşuluğu,

$$N_G(v)=\{u\in G\,|\,vu\in E_G\}$$

kümesidir. v nin derecesi komşularının sayısıdır. Yani,

$$d_G(v)=|N_G(v)|$$

dir.
(Chung, 1997)

Tanım 2.4 $e_i = u_i u_{i+1} \in E_G$, $i \in [1,k]$ için G nin kenarları olsun. $W = e_1 e_2 e_3 ... e_k$ dizisine u_1 den u_{k+1} e k- uzunluğunda bir yürüme denir ve

$$W : u_1 \to u_2 \to ... u_k \to u_{k+1}$$

veya

$$W : u_1 \xrightarrow{k} u_{k+1}$$

biçiminde gösterilir. u dan v ye belirli bir uzunluğa sahip yürümeyi $u \xrightarrow{*} v$ biçiminde de yazabiliriz. Bir W yürümesinin uzunluğu $|W|$ ile gösterilir.

(Chung, 1997)

Tanım 2.5 $W = e_1 e_2 e_3 ... e_k \left(e_i = u_i u_{i+1}\right)$ bir yürüme olsun. " $i \neq j$ için $u_i \neq u_j$" ise W ye yol denir.

(Chung, 1997)

Tanım 2.6 G bir graf olsun. G nin herhangi iki u ve v noktası için G de bir u-v yolu varsa, bu u ve v noktalarına bağlantılıdır denir. Bağlantılılık bağıntısı, $V(G)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $V_1, V_2, ..., V_c$ denklik sınıfları olsun. $G[V_1], G[V_2], ..., G[V_c]$ alt graflarına G nin bileşenleri denir. c=1 olursa graf bağlantılı olur; aksi halde, c tane bileşene sahip bağlantısız graf olur.

(Chung, 1997)

Tanım 2.7 G nin Laplacian matrisi, $D(G) = \text{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$ G grafının noktalarının dereceleri olan bir köşegen matris ve A(G), G nin komşuluk matrisi olmak üzere, $L(G) = D(G) - A(G)$ biçiminde tanımlanır. Bu matrisi aşağıdaki gibi ifade etmek de mümkündür.

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} d_i & , \quad i = j \text{ ise} \\ -1 & , \quad ij \in E \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

(Chung, 1997)

Tanım 2.8 G izole noktaları olmayan bir graf olsun. G nin normalize olmuş Laplacian matrisi $D=D(G)=\mathrm{diag}(d_1,d_2,...,d_n)$ ve L=L(G), G nin Laplacian matrisi olmak üzere, $\mathcal{L}(G)=D^{-\frac{1}{2}}LD^{-\frac{1}{2}}$ biçiminde tanımlanır. Bu matrisi aşağıdaki gibi ifade etmek de mümkündür.

$$\mathcal{L}(G)_{ij}=\begin{cases}1 & , \quad i=j \text{ ve } i\neq 0 \text{ ise}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{d_i d_j}} & , \quad ij\in E \text{ ise}\\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

(Chung, 1997)

Tanım 2.9 A, $n\times n$ kare matris olmak üzere $A^T=A$ ise A matrisine simetrik matris denir.
(Johnson and Horn, 1985)

Tanım 2.10 A, $n\times n$ kare matris olsun. Eğer $A.v=\lambda.v$ olacak şekilde (kompleks) sıfırdan farklı bir vektör var ise $\lambda\in\mathbb{C}$ ya A nın özdeğeri denir. v vektörüne ise λ özdeğerine karşılık gelen A nın özvektörü denir.
(Johnson and Horn, 1985)

Tanım 2.11 A, $n\times n$ simetrik matris olsun. Eğer her $x\in R^n$ için $x^TAx>0$ ise A matrisine pozitif tanımlı matris denir.
(Johnson and Horn, 1985)

Tanım 2.12 G, bir graf olsun. G nin her bir e kenarı için, w(e) pozitif sayısına e kenarının ağırlığı denir. Bu şekilde elde edilen grafa da ağırlıklı graf denir.
(Chung, 1997)

Tanım 2.13 G, kenar ağırlığı w_{ij} pozitif sayısı olan basit bağlantılı ağırlıklı bir graf olsun. Bu takdirde,

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} d_i - w_i, & i = j \text{ ise} \\ -w_{ij}, & ij \in E \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ve

$$\mathcal{L}(G)_{ij} = \begin{cases} 1 - \dfrac{w_i}{d_i}, & i = j \text{ ve } d_i \neq 0 \text{ ise} \\ -\dfrac{w_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}}, & ij \in E \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

dir.
(Chung, 1997)

Tanım 2.14 G, n noktalı ağırlıklı bir graf olsun. ij kenarının p mertebeden pozitif tanımlı ağırlık matrisini w_{ij} ile gösterelim ve $w_{ij} = w_{ji}$ olduğunu kabul edelim. i ve j noktalarının birbirine komşu olmasını $i \sim j$ biçiminde gösterelim ve $w_i = \sum_{j \in N_i} w_{ij}$ olsun. w_i yi *i* noktasının ağırlık matrisi olarak tanımlayalım. G grafının $L(G) = (l_{ij})$ Laplacian matrisi bir blok matris olup aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$l_{ij} = \begin{cases} w_i, & i = j \text{ ise} \\ -w_{ij}, & i \sim j \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Burada 0, $p \times p$ sıfır matrisini göstermektedir.
(Das, 2007)

Lemma 2.15 (Rayleigh-Ritz) A, $n \times n$ mertebeli $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ özdeğerlerine sahip reel simetrik bir matris olsun. Bu takdirde $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \left(\bar{x} \neq \bar{0}\right)$ için,

$$\bar{x}^T A \bar{x} \geq \lambda_n \bar{x}^T \bar{x} \tag{2.1}$$

dir. Eşitlik için gerek ve yeter şart $\bar{x}$ nin λ_n e karşılık gelen A nın bir özvektörü olmasıdır.
(Zhang, 1999)

Lemma 2.16 A, $n \times n$ mertebeli $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ özdeğerlerine sahip reel-simetrik-pozitif tanımlı bir matris olsun. Bu takdirde $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \left(\bar{x} \neq \bar{0}\right)$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n \left(\bar{y} \neq \bar{0}\right)$ için,

$$\left|\bar{x}^T A \bar{y}\right| \leq \lambda_1 \sqrt{\bar{x}^T \bar{x}} \sqrt{\bar{y}^T \bar{y}} \tag{2.2}$$

dir. Eşitlik için gerek ve yeter şart, $\bar{x}$ nin λ_1 e karşılık gelen A nın bir özvektörü ve herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\bar{y} = \alpha \bar{x}$ olmasıdır.
(Johnson and Horn, 1985)

3. BÖLÜM

3.1 Normalize Olmuş Laplacian Matrisinin En Büyük Özdeğeri İçin Üst Sınırlar

Bu bölümde her bir kenar ağırlığı pozitif tanımlı matris olan, ağırlıklı grafların normalize olmuş Laplacian matrisinin öncelikle tanımı verildi. Daha sonra en büyük özdeğeri için üst sınırlar elde edildi. Ayrıca elde edilen bu üst sınırlardan yararlanılarak, ağırlıklı ve ağırlıklı olmayan grafların normalize olmuş Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için de üst sınırlar elde edilmiştir.

Tanım 3.1 G, n noktalı ağırlıklı bir graf olsun. ij kenarının p mertebeden pozitif tanımlı ağırlık matrisini w_{ij} ile gösterelim ve $w_{ij} = w_{ji}$ olduğunu kabul edelim. i ve j noktalarının birbirine komşu olmasını $i \sim j$ biçiminde gösterelim ve $w_i = \sum_{j \in N_i} w_{ij}$ olsun. w_i yi i noktasının ağırlık matrisi olarak tanımlayalım. G grafının $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G) = (\ell_{ij})$ normalize olmuş Laplacian matrisi bir blok matris olacağından, aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$\ell_{ij} = \begin{cases} I_p & , \quad i = j \text{ ise} \\ -w_i^{-\frac{1}{2}} \, w_{ij} \, w_j^{-\frac{1}{2}} & , \quad i \sim j \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Burada 0, $p \times p$ sıfır matrisini göstermektedir. Böylece $\mathcal{L}(G)$, $n \times p$ mertebeli simetrik bir kare matris olur.

Herhangi bir B simetrik matrisi için $\lambda_1(B)$, B nin en büyük özdeğerini göstersin. Biz burada $\lambda_1(\mathcal{L}(G)) = \lambda_1$ biçiminde göstereceğiz.

Şimdi elde ettiğimiz teoremleri verelim:

Teorem 3.1 G, basit bağlantılı ağırlıklı graf olsun. Bu taktirde w_{ij}, ij kenarının p mertebeli pozitif tanımlı ağırlık matrisi olmak üzere,

$$\lambda_1 \le \max_{i\sim j}\left\{1+\sqrt{\left[\sum_{k\in Ni}\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}\ w_{ik}\ w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\left[\sum_{k\in Nj}\lambda_1\left(w_j^{-\frac{1}{2}}\ w_{jk}\ w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\right]}\right\} \tag{3.1}$$

dir.

İspat. $\mathcal{L}(G)$ nin en büyük λ_1 özdeğerine karşılık gelen özvektörü $\overline{X}=\left(\overline{x}_1^{\,T},\overline{x}_2^{\,T},...,\overline{x}_n^{\,T}\right)^T$ olsun. $\overline{X}$ in $\overline{x}_i$ vektör bileşenini, $\overline{x}_i^{\,T}\overline{x}_i=\max_k\left\{\overline{x}_k^{\,T}\overline{x}_k\right\}$ olacak şekilde alalım. $\overline{X}$ sıfır olmadığından, $\overline{x}_i$ da sıfırdan farklıdır.

$$\overline{x}_j^{\,T}\overline{x}_j=\max_{k\in N_i}\left\{\overline{x}_k^{\,T}\overline{x}_k\right\} \tag{3.2}$$

Yani,

$$\overline{x}_j^{\,T}\overline{x}_j\ge\overline{x}_k^{\,T}\overline{x}_k \qquad ,k\in N_i$$

olsun.

$$\mathcal{L}\,\overline{X}=\lambda_1\,\overline{X} \tag{3.3}$$

eşitliğini ele alalım. (3.3) ün i-inci eşitliğinden, (2.2) ve (3.2) eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\lambda_1\overline{x}_i=I_p\overline{x}_i-\sum_{k\in N_i}\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\overline{x}_k$$

$$\begin{aligned}\overline{x}_i^{T}\left(\lambda_1 I_p-I_p\right)\overline{x}_i &=-\sum_{k\in N_i}\overline{x}_i^{T}\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\overline{x}_k\\ &\le\sum_{k\in N_i}\left|\overline{x}_i^{T}\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\overline{x}_k\right| \qquad (3.4)\\ &\le\sum_{k\in N_i}\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\overline{x}_i^{T}\overline{x}_i}\ \sqrt{\overline{x}_k^{T}\overline{x}_k} \qquad (3.5)\end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{\bar{x}_i^T \bar{x}_i}\sqrt{\bar{x}_j^T \bar{x}_j}\sum_{k\in N_i}\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad (3.6)$$

bulunur. (3.6) ve (2.1) den,

$$\left[\lambda_1-\lambda_1\left(I_p\right)\right]\bar{x}_i^T\bar{x}_i \leq \bar{x}_i^T\left(\lambda_1 I_p - I_p\right)\bar{x}_i \leq \sqrt{\bar{x}_i^T \bar{x}_i}\sqrt{\bar{x}_j^T \bar{x}_j}\sum_{k\in N_i}\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad (3.7)$$

yazılır. Benzer şekilde (3.3) nin j-ıncı eşitliği kullanılarak,

$$\left[\lambda_1-\lambda_1\left(I_p\right)\right]\bar{x}_j^T\bar{x}_j \leq \sqrt{\bar{x}_i^T \bar{x}_i}\sqrt{\bar{x}_j^T \bar{x}_j}\sum_{k\in N_j}\lambda_1\left(w_j^{-\frac{1}{2}}w_{jk}w_k^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad (3.8)$$

elde edilir. (3.7) ve (3.8) den sonuç olarak,

$$\left(\lambda_1-1\right)^2 \leq \left[\sum_{k\in N_i}\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\left[\sum_{k\in N_j}\lambda_1\left(w_j^{-\frac{1}{2}}w_{jk}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \qquad (3.9)$$

$$\lambda_1 \leq 1+\sqrt{\left[\sum_{k\in N_i}\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\left[\sum_{k\in N_j}\lambda_1\left(w_j^{-\frac{1}{2}}w_{jk}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\right]} \qquad (3.10)$$

bulunur.

Teorem 3.2 G, kenar ağırlığı w_{ij} pozitif sayısı olan basit bağlantılı ağırlıklı bir graf olsun. Bu taktirde,

$$\lambda_1 \leq \max_{i\sim j}\left\{1+\sqrt{\left[\sum_{k\in N_i}\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\left[\sum_{k\in N_j}\left(w_j^{-\frac{1}{2}}w_{jk}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\right]}\right\} \qquad (3.11)$$

dir.

İspat. Kenar ağırlığı w_{ij} pozitif sayısı olan ağırlıklı graf için, $\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right) = w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}$ olduğundan istenen elde edilir.

Teorem 3.3 G basit bağlantılı ağırlıksız graf olsun. Bu takdirde d_i, i noktasının derecesi olmak üzere,

$$\lambda_1 \le \max_{i\sim j}\left[1+\sqrt{\left(\sum_{k\in N_i}\frac{1}{\sqrt{d_i d_k}}\right)\left(\sum_{k\in N_j}\frac{1}{\sqrt{d_j d_k}}\right)}\right] \tag{3.12}$$

dir.

İspat. Ağırlıksız graflar için $w_{ik}=1$ ve $w_k = d_k$ olduğundan Teorem 3.2 den ispat açıktır.

Teorem 3.4 G basit bağlantılı ağırlıklı graf olsun. Bu takdirde w_{ij}, ij kenarının p mertebeli pozitif tanımlı ağırlık matrisi olmak üzere,

$$\lambda_1 \le \max_i\left\{1+\sum_{k\in N_i}\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\right\} \tag{3.13}$$

dır.

İspat. $\mathcal{L}(G)$'nin en büyük λ_1 özdeğerine karşılık gelen özvektörü $\overline{X}=\left(\overline{x}_1^{\,T},\overline{x}_2^{\,T},...,\overline{x}_n^{\,T}\right)^T$ olsun. $\overline{X}$ in $\overline{x}_i$ vektör bileşenini,

$$\overline{x}_i^{\,T}\overline{x}_i = \max_k\left\{\overline{x}_k^{\,T}\overline{x}_k\right\} \tag{3.14}$$

olacak şekilde alalım. $\overline{X}$ sıfır olmadığından, $\overline{x}_i$ da sıfırdan farklıdır.

$\mathcal{L}(G)$'nin (i,j)-inci bloğu,

$$\begin{cases} I_p & , \quad i=j \\ -w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ij}w_j^{-\frac{1}{2}} & , \quad i\sim j \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

dır.

$$\mathcal{L}\overline{X} = \lambda_1\overline{X} \tag{3.15}$$

eşitliğini ele alalım. (3.15) in i-inci eşitliğinden,

$$\lambda_1 \bar{x}_i = I_p \bar{x}_i - \sum_{k \in N_i} \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right) \bar{x}_k \tag{3.16}$$

olsun. Buradan (2.2) ve (3.14) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^T \left(\lambda_1 I_p - I_p \right) \bar{x}_i &= -\sum_{k \in N_i} \bar{x}_i^T \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right) \bar{x}_k \\ &\le \sum_{k \in N_i} \left| \bar{x}_i^T \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right) \bar{x}_k \right| \qquad (3.17) \\ &\le \sum_{k \in N_i} \lambda_1 \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right) \sqrt{\bar{x}_i^T \bar{x}_i} \sqrt{\bar{x}_k^T \bar{x}_k} \qquad (3.18) \\ &\le \bar{x}_i^T \bar{x}_i \sum_{k \in N_i} \lambda_1 \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right) \qquad (3.19) \end{aligned}$$

olur. (3.19) dan,

$$\frac{\bar{x}_i^T \left(\lambda_1 I_p - I_p \right) \bar{x}_i}{\bar{x}_i^T \bar{x}_i} \le \sum_{k \in N_i} \lambda_1 \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right)$$

yazılır. (2.1) eşitsizliğinden,

$$\lambda_1 - \lambda_1 \left(I_p \right) \le \frac{\bar{x}_i^T \left(\lambda_1 I_p - I_p \right) \bar{x}_i}{\bar{x}_i^T \bar{x}_i} \tag{3.20}$$

olduğundan,

$$\lambda_1 \le 1 + \sum_{k \in N_i} \lambda_1 \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right)$$

elde edilir.

Teorem 3.5 G, her bir kenar ağırlığı w_{ij} pozitif sayısı olan basit bağlantılı ağırlıklı bir graf olsun. Bu takdirde,

$$\lambda_1 \le \max_i \left\{ 1 + \sum_{k \in N_i} \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right) \right\} \tag{3.21}$$

dir.

İspat. w_{ij} ağırlığı pozitif sayı olan ağırlıklı graf için, $\lambda_1 \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right) = w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}}$ olduğundan istenen elde edilir.

Teorem 3.6 G basit bağlantılı ağırlıksız graf olsun. Bu takdirde d_i, i noktasının derecesi olmak üzere,

$$\lambda_1 \le \max_i \left\{ 1 + \sum_{k \in N_i} \frac{1}{\sqrt{d_i d_k}} \right\} \tag{3.22}$$

dir.

İspat. Ağırlıksız graflar için $w_{ik} = 1$ ve $w_k = d_k$ olduğundan Teorem 3.5 den ispat açıktır.

Teorem 3.7 G basit bağlantılı ağırlıklı graf olsun. w_{ij} ij kenarının p mertebeden pozitif tanımlı ağırlık matrisi,

$$\bar{\gamma}_i = \frac{\sum_{k \in N_i} \lambda_1 \left(w_k^{-\frac{1}{2}} \right) \lambda_1 \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right)}{\lambda_1 \left(w_i^{-\frac{1}{2}} \right)} \tag{3.23}$$

olmak üzere,

$$\lambda_1 \le \max_i \left\{ 1 + \bar{\gamma}_i \right\} \tag{3.24}$$

dir.

İspat. $\gamma_i = \lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}\right)\ (i=1,2,...,n\ )$ olmak üzere $M(G)$, $\mathrm{diag}\left(\gamma_1 I_{p,p}, \gamma_2 I_{p,p}, ..., \gamma_n I_{p,p}\right)$ olacak şekilde blok köşegen bir matris olsun. $M(G)^{-1}\,\mathcal{L}(G)\,M(G)$ nin en büyük λ_1 özdeğerine karşılık gelen özvektörü ise $\overline{X} = \left(\overline{x}_1^{\,T}, \overline{x}_2^{\,T}, ..., \overline{x}_n^{\,T}\right)^T$ olsun. $\overline{X}$ in $\overline{x}_i$ bileşenini,

$$\overline{x}_i^{\,T}\overline{x}_i = \max_j\left\{\overline{x}_j^{\,T}\overline{x}_j\right\} \tag{3.25}$$

olacak şekilde alalım. $\overline{X}$ sıfır olmadığından, $\overline{x}_i$ de sıfırdan farklıdır. $M(G)^{-1}\,\mathcal{L}(G)\,M(G)$' nin (i,j)- inci bloğu,

$$\begin{cases} I_p & , \ i = j \\ -\dfrac{\gamma_j}{\gamma_i} w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ij} w_j^{-\frac{1}{2}} & , \ i \sim j \\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

dir.

$$\left\{M(G)^{-1}\,\mathcal{L}(G)M(G)\right\}\overline{X} = \lambda_1\overline{X} \tag{3.26}$$

eşitliğini alalım. (3.26) in i-inci eşitliğinden, (2.2) ve (3.25) eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\lambda_1\overline{x}_i = I_p\overline{x}_i - \sum_{j\in N_i}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}\left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ij} w_j^{-\frac{1}{2}}\right)\overline{x}_j \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} \overline{x}_i^{\,T}\left(\lambda_1 I_p - I_p\right)\overline{x}_i &= -\sum_{j\in N_i}\overline{x}_i^{\,T}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}\left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ij} w_j^{-\frac{1}{2}}\right)\overline{x}_j \\ &\le \sum_{j\in N_i}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}\left|\overline{x}_i^{\,T}\left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ij} w_j^{-\frac{1}{2}}\right)\overline{x}_j\right| \qquad (3.28) \\ &\le \sum_{j\in N_i}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ij} w_j^{-\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\overline{x}_i^{\,T}\overline{x}_i}\sqrt{\overline{x}_j^{\,T}\overline{x}_j} \qquad (3.29) \\ &\le \overline{x}_i^{\,T}\overline{x}_i\sum_{j\in N_i}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ij} w_j^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad (3.30) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.30) dan,

$$\frac{\bar{x}_i^T\left(\lambda_1 I_p - I_p\right)\bar{x}_i}{\bar{x}_i^T\bar{x}_i} \le \sum_{j\in N_i}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ij}w_j^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad , \qquad \bar{x}_i^T\bar{x}_i > 0$$

yazılır. (2.1) den ,

$$\lambda_1 - \lambda_1\left(I_p\right) \le \frac{\bar{x}_i^T\left(\lambda_1 I_p - I_p\right)\bar{x}_i}{\bar{x}_i^T\bar{x}_i} \le \sum_{j\in N_i}\frac{\gamma_j}{\gamma_i}\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ij}w_j^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad (3.31)$$

olur. Buradan,

$$\lambda_1 \le \lambda_1\left(I_p\right) + \frac{1}{\gamma_i}\sum_{j\in N_i}\gamma_j\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ij}w_j^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= 1 + \bar{\gamma}_i$$

elde edilir.

Teorem 3.8 G, her bir kenar ağırlığı w_{ij} pozitif sayısı olan basit bağlantılı ağırlıklı graf olsun. Bu takdirde,

$$\lambda_1 \le \max_i\left\{1 + \sum_{k\in N_i}\left(\frac{w_{ik}}{w_k}\right)\right\} \qquad (3.32)$$

dır.

İspat. $\forall$ i, j için $\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}\right) = w_i^{-\frac{1}{2}}$ ve $\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right) = w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}$ olduğundan Teorem 3.7 kullanılarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.9 G basit bağlantılı ağırlıksız graf olsun. Bu takdirde d_i, i noktasının derecesi, olmak üzere,

$$\lambda_1 \le \max_i\left\{1 + \sum_{k\in N_i}\left(\frac{1}{d_k}\right)\right\} \qquad (3.33)$$

dir.

İspat. Ağırlıksız graflar için $w_{ik}=1$ ve $w_k=d_k$ olduğundan Teorem 3.8 den ispat açıktır.

Teorem 3.10 G basit bağlantılı ağırlıklı graf olsun. Bu taktirde w_{ij} , ij kenarının p mertebeli pozitif tanımlı ağırlık matrisi,

$$\bar{\gamma}_i=\frac{\sum_{k\in N_i}\lambda_1\left(w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)}{\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}\right)} \tag{3.34}$$

olmak üzere,

$$\lambda_1\le\max_{i\sim j}\left\{1+\sqrt{\bar{\gamma}_i\bar{\gamma}_j}\right\} \tag{3.35}$$

dir.

İspat. $\gamma_i=\lambda_1\left(w_i^{-\frac{1}{2}}\right)\ (i=1,2,...,n)$ olmak üzere $M(G)$, $\operatorname{diag}\left(\gamma_1 I_{p,p},\gamma_2 I_{p,p},...,\gamma_n I_{p,p}\right)$ olacak şekilde blok köşegen bir matris olsun. $M(G)^{-1}\mathcal{L}(G)M(G)$ nin en büyük λ_1 özdeğerine karşılık gelen özvektörü $\bar{X}=\left(\bar{x}_1^{\,T},\bar{x}_2^{\,T},...,\bar{x}_n^{\,T}\right)^T$ olsun. $\bar{X}$ in $\bar{x}_i$ vektör bileşenini, $\bar{x}_i^{\,T}\bar{x}_i=\max_k\left\{\bar{x}_k^{\,T}\bar{x}_k\right\}$ olacak şekilde alalım. $\bar{X}$ sıfır olmadığından, $\bar{x}_i$ da sıfırdan farklıdır.

$$\bar{x}_j^{\,T}\bar{x}_j=\max_{k\in N_i}\left\{\bar{x}_k^{\,T}\bar{x}_k\right\} \tag{3.36}$$

olsun.

$$\left\{M(G)^{-1}\mathcal{L}(G)M(G)\right\}\bar{X}=\lambda_1\bar{X} \tag{3.37}$$

eşitliğini ele alalım. (3.37) nin i-inci eşitliğinden, (2.2) ve (3.36) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\lambda_1\bar{x}_i=I_p\bar{x}_i-\sum_{k\in N_i}\frac{\gamma_k}{\gamma_i}\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\bar{x}_k$$

$$\bar{x}_i^{\,T}\left(\lambda_1 I_p-I_p\right)\bar{x}_i=-\sum_{k\in N_i}\frac{\gamma_k}{\gamma_i}\bar{x}_i^{\,T}\left(w_i^{-\frac{1}{2}}w_{ik}w_k^{-\frac{1}{2}}\right)\bar{x}_k$$

$$\leq \sum_{k\in N_i} \frac{\gamma_k}{\gamma_i} \left| \bar{x}_i^T \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right) \bar{x}_k \right| \tag{3.38}$$

$$\leq \sum_{k\in N_i} \frac{\gamma_k}{\gamma_i} \lambda_1 \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right) \sqrt{\bar{x}_i^T \bar{x}_i} \sqrt{\bar{x}_k^T \bar{x}_k} \tag{3.39}$$

$$\leq \sqrt{\bar{x}_i^T \bar{x}_i} \sqrt{\bar{x}_j^T \bar{x}_j} \sum_{k\in N_i} \frac{\gamma_k}{\gamma_i} \lambda_1 \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right) \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.40) ve (2.1) den,

$$\left[\lambda_1 - \lambda_1 \left(I_p \right) \right] \bar{x}_i^T \bar{x}_i \leq \bar{x}_i^T \left(\lambda_1 I_p - I_p \right) \bar{x}_i \leq \bar{\gamma}_i \sqrt{\bar{x}_i^T \bar{x}_i} \sqrt{\bar{x}_j^T \bar{x}_j} \tag{3.41}$$

yazılır. Benzer şekilde (3.37) nin j-inci eşitliği kullanılarak,

$$\left[\lambda_1 - \lambda_1 \left(I_p \right) \right] \bar{x}_j^T \bar{x}_j \leq \bar{\gamma}_j \sqrt{\bar{x}_j^T \bar{x}_j} \sqrt{\bar{x}_i^T \bar{x}_i} \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.41) ve (3.42) den sonuç olarak,

$$\lambda_1 \leq 1 + \sqrt{\bar{\gamma}_i \bar{\gamma}_j}$$

elde edilir.

Teorem 3.11 G, her bir kenar ağırlığı w_{ij} pozitif sayısı olan basit bağlantılı ağırlıklı graf olsun. Bu takdirde, w_i i noktasının ağırlığı olmak üzere,

$$\lambda_1 \leq \max_{i\sim j} \left\{ 1 + \sqrt{\sum_{k\in N_i} \left(\frac{w_{ik}}{w_k} \right) \sum_{s\in N_j} \left(\frac{w_{js}}{w_s} \right)} \right\} \tag{3.43}$$

dir.

İspat. $\forall$ i, j için $\lambda_1 \left(w_i^{-\frac{1}{2}} \right) = w_i^{-\frac{1}{2}}$ ve $\lambda_1 \left(w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}} \right) = w_i^{-\frac{1}{2}} w_{ik} w_k^{-\frac{1}{2}}$ olduğundan Teorem 3.10 u kullanarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.12 G basit bağlantılı ağırlıksız graf olsun. Bu takdirde d_i, i noktasının derecesi olmak üzere,

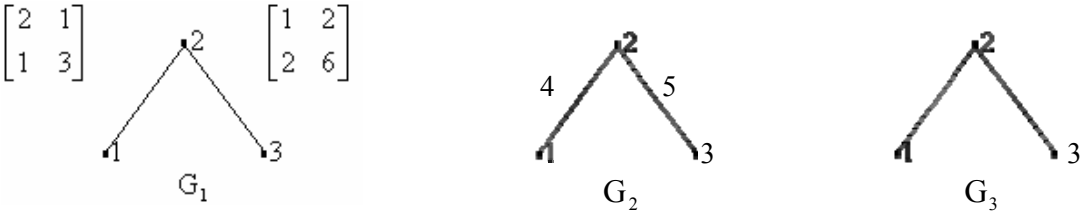
$$\lambda_1 \leq \max_{i\sim j}\left\{1+\sqrt{\sum_{k\in N_i}\left(\frac{1}{d_k}\right)\sum_{s\in N_j}\left(\frac{1}{d_s}\right)}\right\} \tag{3.44}$$

dir.

İspat. Ağırlıksız graflar için $w_{ik}=1$ ve $w_k=d_k$ olduğundan Teorem 3.11 den ispat açıktır.

Örnek.

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$



Şekil olarak yukarıda verilen G_1, G_2 ve G_3 graflarının normalize olmuş Laplacian matrislerinin en büyük özdeğerleri sırasıyla $\lambda_1(G_1)=2.029$, $\lambda_1(G_2)=0.999$ ve $\lambda_1(G_3)=2$ dir. Yukarıdaki teoremlerde elde edilen sınır değerleri aşağıdaki tablolarda gösterilmiştir:

	(3.1)	**(3.13)**	**(3.23)**	**(3.35)**
$\lambda_1(G_1)$	2.186	2.726	4.005	2.558

	(3.11)	**(3.21)**	**(3.32)**	**(3.43)**
$\lambda_1(G_2)$	2.353	2.441	3	2.055

	(3.12)	**(3.22)**	**(3.33)**	**(3.44)**
$\lambda_1(G_3)$	2	2.414	3	2

4. BÖLÜM

4.1 Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada kenar ağırlıkları pozitif tanımlı kare matrisler olan ağırlıklı grafların normalize olmuş Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için üst sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca bu sınırlar kullanılarak, kenar ağırlıkları pozitif sayı olan ve ağırlıklı olmayan grafların normalize olmuş Laplacian matrisinin en büyük özdeğeri için de sınırlar elde edilmiştir. Bu çalışmanın ötesinde, elde edilen bu sınırlar için eşitlik koşulları da oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

Anderson W. N. , Morley T. D. , Eigenvalues of the Laplacian of a graph, Linear and Multilinear Algebra 18 : (1985) 141–145.

Chung F. R. K. , Spectral Graph Theory, Regional conference series in mathematics, American Mathematical Society, 1997.

Das Kinkar Ch. , Extremal graph characterization from the upper bound of the Laplacian spectral radius of weighted graphs, Linear Algebra and its Aplications 427 : (2007) 55–69.

Das Kinkar Ch. , Bapat R. B. , A sharp bound on the largest Laplacian eigenvalue of weighted graphs, Linear Algebra and its Aplications 409 : (2005) 153–165.

Das K. C. , An improved upper bound for Laplacian graph eigenvalues, Linear Algebra and its Aplications 368 : (2003) 269–278.

Johnson C. R. , Horn R. A. , Matrix Analysis, Cambridge University Pres.,New York, 1985.

Li J. -S. , Zhang D. , A new upper bound for eigenvalues of the Laplacian matrix of a graph, Linear Algebra and its Aplications 265 : (1997) 93–100.

Li J. -S. , Zhang D. , On Laplacian eigenvalues of a graph, Linear Algebra and its Aplications 285 : (1998) 305–307.

Merris R. , A note on Laplacian graph eigenvalues, Linear Algebra and its Aplications 285 : (1998) 33–35.

Rojo O. , Soto R. , Rojo H. , An always nontrivial upper bound for Laplacian graph eigenvalues, Linear Algebra and its Aplications 312 : (2000) 155–159.

Zhang F. , Matrix Theory Basic Results and Techniques,Springer- Verlag, New York, 1999.