T.C.
SELÇUK ÜNİVERİSTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CAUCHY-TOEPLİTZ ve CAUCHY-HANKEL MATRİSLERİNİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Salih ÇELİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 2007

T.C.

SELÇUK ÜNİVERİSTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CAUCHY-TOEPLITZ ve CAUCHY-HANKEL MATRİSLERİNİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Salih ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 24.05.2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından ~~oy çokluğu~~ / oy birliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ali A. SİNAN	Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL	Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CAUCHY-TOEPLITZ VE CAUCHY-HANKEL MATRİSLERİNİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Salih ÇELİK

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali A. SİNAN
2007, 96 sayfa

Jüri: Prof. Dr. Ali A. SİNAN

: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

: Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

Cauchy-Toeplitz matrislerinin singüler değerleriyle G.Szegö ilgilenmiş ve bununla ilgili bir problem ortaya koymuştur. Daha sonra bu matrisler Moler' in dikkatini çekmiş ve Moler deneysel olarak bu matrislerin singüler değerlerinin π' ye yaklaştığını tespit etmiş, ama bu analitik olarak S. V. Parter tarafından çözülmüştür. E. E. Trytyshnikov $g = 1/2$ ve $h = 1$ özel durum için bir alt sınır bulmuştur. D.Bozkurt bu matrisin genel halinin Euclide normu için bir alt ve üst sınır bulmuştur.

R. Türkmen genel Cauchy-Toeplitz matrisleri için bir alt ve üst sınır bulmuştur. Yine aynı şartlar altında Cauchy-Hankel matrisleri için bir üst sınır tespit etmiştir.Ayrıca , Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin Hadamard çarpımlarının Euclide normu için bir alt ve üst sınır bulmuştur.

S. Solak genel Cauchy-Toeplitz matrislerinin spektral normu için bir alt ve üst sınır bulmuştur. Ayrıca , Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin Hadamard çarpımlarının spektral ve ℓ_p normları için birer üst sınır bulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Matris normu, Cauchy-Toeplitz matrisleri, Cauchy-Hankel matrisleri, spektral norm, Euclide norm, ℓ_p norm, Hadamard çarpım, Singüler değerler.

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

ON THE BOUNDS FOR THE NORMS OF CAUCHY-TOEPLITZ AND CAUCHY-HANKEL MATRICES

Salih ÇELİK

Selçuk Üniversty
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Danışman: Prof. Dr. Ali A. SİNAN
2007, 96 page

Jüri: Prof. Dr. Ali A. SİNAN

: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

: Assistant Prof. Dr. Ayşe NALLI

G. Szegö interested in the singular values of Cauchy-Toeplitz matrix and forward a problem. Later, these matrices attaracted the attention of C. Moler, who had experimentaly discovered that most of their singular values are clustered near π Recently S. V. Parter gave an explanation of this phenomenon. E.E. Trytshnikov obtained a lower bound for the spectral norm of Cauchy-Toeplitz matrix such that $g = 1/2$ and $h = 1$. D. Bozkurt , found a lower and upper bound for the general condition of Euclidean norm of Cauchy-Toeplitz matrices.

R. Türkmen, established a lower and an upper bound for the spectral norms of the general Cauchy-Toeplitz matrix.Again in same position that found to upper bound for the Cauchy-Hankel matrices. İn adition that found a lower and upper bound for the Cauchy–Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices Hadamard product .

S. Solak found a lower and upper bound for the spectral norm of general Cauchy- Toeplitz matrices. İn adition that found to upper bound for the spectral and ℓ_p norm of Cauchy–Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices Hadamard product .

KEY WORDS: Matrix norm, Cauchy-Toeplitz matrices, Cauchy-Hankel matrices, spectral norm, Euclidean norm, ℓ_p norm, Hadamard product, Singular values.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Ali SİNAN yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Matrislerinin normlarının alt ve üst sınırları üzerine hazırlanmıştır.Çalışmanın birinci bölümünde matris ve iç çarpım hakkında genel tanım ve teoremler verildi.İkinci bölümde vektör normları, matris normları ve normlar arasındaki bağıntılar ile ilgili tanım ve teoremler verildi.Üçüncü bölümde ise Hadamard çarpım ve özellikleri ile ilgili tanım ve teoremler verildi.

Dördüncü bölümde Gamma, Psi, Riemann Zeta fonksiyonu verildi. Ayrıca Cauchy-Toeplitz ve Cauchy Hankel formları, singüler değerler ile ilgili tanım ve teoremler verildi.

Beşinci ve altıncı bölümde ise çalışmanın esasını teşkil eden Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Matrislerinin normları ve Hadamard çarpımları için sınırlar verilmiştir.

Bu tez çalışmamda anlattığı ders ve verdiği tavsiyeler ile yol gösteren, boş zamanlarında da bana kapısını açan çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Ali SİNAN' a teşekkür ederim.

Salih ÇELİK

Konya, 2007

İÇİNDEKİLER

1. GENEL BİLGİLER ……...1
1.1. Matris……..1
1.2. İç Çarpım ……...5

2. NORMLAR ……7
2.1. Vektör Normları..……...7
2.2. Matris Normları..……..16
2.3. Matris Normu Arasındaki Bağıntılar ……..24

3. HADAMARD ÇARPIM VE ÖZELLİKLERİ ……..27

4. CAUCHY-TOEPLİTZ ve CAUCHY-HANKEL MATRİSLERİ ……...34
4.1. Gamma, Psi ve Riemann Zeta Fonksiyonu ……..34
4.2. Cauchy, Hankel ve Toeplitz Formları ……..36
4.3. Toeplitz Matrislerinin Öz Değerlerinin ve Singüler Değerlerinin Dağılımı …40

5. CAUCHY-TOEPLİTZ ve CAUCHY-HANKEL MATRİSLERİNİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR……...43
5.1. Cauchy-Toeplitz Matrislerinin Normları İçin Sınırlar …….43
5.2. Cauchy-Hankel Matrislerinin Normları İçin Sınırlar ……..62

6. MATRİSLERİN HADAMARD ÇARPIMLARININ NORMLARI İÇİN SINIRLAR ……..72
6.1. Hadamard Çarpım İle Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Matrislerinin Normları İçin Sınırlar……..72
6.2. Cauchy-Toeplitz Matrislerinin Hadamard Çarpımlarının Normları İçin Sınırlar ……..78

7. SONUÇ ve ÖNERİLER ……..89
KAYNAKLAR ……90

1.GENEL BİLGİLER

Bu çalışmada $T_n = \left[\frac{1}{g+(i-j)h}\right]_{i,j=1}^{n}$ Cauchy-Toeplitz ve $H_n = \left[\frac{1}{g+(i+j)h}\right]_{i,j=1}^{n}$ Cauchy-Hankel matrislerinin ve bu matrislerin değişik formları için Euclidean, Spektral, ℓ_p normları için alt ve üst sınırlar üzerinde duruldu ve Hadamard çarpım yoluyla elde edilen sınırlarını verdik.Daha sonra bu matrislerin Hadamard çarpımlarının normları için elde edilen sınırları verdik.

Bu çalışmamızda kullanacağımız temel bilgileri verelim.

1.1. Matris

Günümüzde elemanter matris cebiri, teorik matematik, istatistik için olduğu kadar sosyoloji, kimya, fizik, elektrik ve bilgisayar mühendisliği gibi çeşitli teknik alanlar için de gerekli matematiksel bilginin ayrılmaz parçası haline gelmiştir. Matris kavramı, 19. yüzyıl ortalarından beri bilinmektedir. İngiliz matematikçi Sylvester, 1850 yılında "matris" kavramını kullanmıştır. 1853 yılında İngiliz bilgini Hamilton "Linear and Vector Functions" isimli çalışmasında matrislerin bazı özelliklerinden faydalanmış fakat matris ismini kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi Cayley, 1858 yılında çok meşhur olan "Memorie On The Theory of Matrices" isimli çalışmasında Matris Cebirinin modern esaslarını kurmuştur. Daha sonraları Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde durmuşlardır.

Tanım 1.1.1. $m,n \in Z^+$ ve $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ olmak üzere (i,j) ikililerin cümlesi M olsun. F herhangi bir cisim,

$$f : M \to F$$
$$(i,j) \to f(i,j) = a_{ij}$$

olmak üzere $a_{ij} \in F$ değerleri ile

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \tag{1.1}$$

şeklinde düzenlenen tabloya matris denir.

Bir matrisi oluşturan değerlere matrisin elemanları denir. Genelde $m\times n$ tipindeki bir matris (1.1) ile verilir. ve bu gösterim $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ veya $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ ile de ifade edilir. Bu gösterimde, a_{ij} matrisinin genel elemanlarının gösterimi olup *i* satırı ve *j* 'de sütunu belirtir. *i* indisi 1'den *m* 'ye kadar herhangi bir pozitif tamsayı değerini alırken, *j* indisi ise 1'den *n* 'ye kadar herhangi bir pozitif tamsayı değerini alabilir. Böylece, *i=2* ve *j=3* ise a_{ij} ; a_{23} haline gelir, 2. satır ve 3. sütundaki elemanı gösterir.

Eğer bir matrisin satır ve sütunları eşit ise, yani $m=n$ ise matrise kare matris denir ve $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{n\times n}$ biçiminde gösterilir.

A matrisinin kare matris olması durumunda, $a_{11},a_{22},...,a_{nn}$ elemanları esas köşegen üzerinde bulunurlar.

Bir matrisin elemanları fonksiyonlar, operatörler ve hatta bir matris de olabilir. Yani

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 \left(t^2+1\right)dt & t^2 & \sqrt{3t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} x^2 & x & x^3 \\ e^x & \dfrac{d}{dx}\ln x & e^{2x} \\ 5 & x+2 & \dfrac{1}{x} \end{bmatrix}$$

matrislere birer örnektir. Sonuç olarak matrislerin birer sayısal değer olmadıklarına dikkat edilmelidir.

Tanım 1.1.2.

$$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & & . \\ . & & . & . & & & . \\ . & & & & . & & . \\ & & & & & . & \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n \end{bmatrix}$$

tipindeki $n \times n$ matrisine *köşegen matris* denir ve $A = köş(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3. Esas köşegeni üzerinde elemanları 1 ve diğer bütün elemanları 0 olan köşegen matrise *birim matris* denir ve I_n veya I ile gösterilir.

O halde birim matris

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & & & . \\ . & & & & . & & . \\ . & & & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

Tanım 1.1.4. Bir kare matrisin esas köşegeninin üstündeki (altındaki) elemanlarının hepsi 0 ise, böyle matrislere *alt (üst) üçgen matris* denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisleri bu matrislere örnektirler.

Tanım 1.1.5. Bir köşegen matrisin esas köşegeni üzerindeki elemanların hepsi birbirine eşit, diğer elemanları sıfır ise , yani

$$i = j \text{ için } a_{ij} = \lambda \text{ , } i \neq j \text{ için } a_{ij} = 0$$

ise böyle matrislere *skaler matris* denir ve

$$[\lambda]=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & & & 0 \\ . & & & . & & & . \\ . & & & & . & & . \\ . & & & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \lambda \end{bmatrix}$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 1.1.6. $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$, $n\times n$ tipinde bir matris olsun . O takdirde

$$AB = BA = I$$

olacak şekilde $n\times n$ tipinde B matrisi var ise , B'ye A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.7. $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$, $m\times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen ve A^T ile gösterilen matrise , A matrisinin *transpozesi* denir. Yani, $i = 1,2,...,m$ ve $j = 1,2,...,n$ olmak üzere

$$A^T = \left(a_{ji}\right)$$

dir.

Tanım 1.1.8. $n\times n$ tipinde bir A matrise ;

i) $A^T = A$ ise *simetrik matris*

ii) $A^T = -A$ ise ters-*simetrik matris*

iii) $A^T A = AA^T = I_n$ ise *ortogonal matris* denir.

Örnek 1.1.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

simetrik matris

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

ters simetrik matris ve

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ortogonal matrislere örnek olurlar.

Uyarı 1.1.1.

1. Bir simetrik matriste, elemanlar matrisin esas köşegenine göre simetrik dizilmişlerdir.
2. Bir ters-simetrik matriste, esas köşegen elemanları sıfırdır.
3. A bir ortogonal matris ise, $A^T = A^{-1}$'dir.

Tanım 1.1.9. Bir A kare matrisinde a_{ij} elemanları yerine bu matrisin determinantında a_{ij}' lere tekabül eden A_{ij} kofaktörleri (işaretli minörleri) konulduğunda elde edilen matrisin transpozesine, A matrisinin *Adjoint*'i denir ve A^* ile gösterilir.

1.2.İç Çarpım

Tanım 1.2.1. V, F cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Buna göre

$$I : V \times V \to F$$

dönüşümü ,

I₁) $\forall x \in V$ için $(x,x) \geq 0, (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

I₂) $\forall a \in F, \forall x, y \in V$ için $(ax, y) = a(x, y)$

I₃) $\forall a \in F, \forall x, y \in V$ için $(x, y) = (y, x), (x, ay) = a(x, y)$

I₄) $\forall x, y, z \in V$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

şartlarını sağlıyorsa buna bir iç çarpım denir.

F cismi kompleks sayılar cismi ise $(x, ay) = \overline{a}(x, y)$ dır.

Tanım 1.2.2. Bir vektör uzayı üzerinde iç çarpım tanımlanmışsa bu uzaya iç çarpım uzayı denir.

Ayrıca herhangi bir υ vektörü için uzunluk (veya norm) $\|\upsilon\|$ olarak gösterilir ve

$$\|\upsilon\| = (\upsilon,\upsilon)^{1/2} = (\upsilon_1^{\,2} + \upsilon_2^{\,2} + \ldots + \upsilon_n^{\,2})^{1/2}$$

dır.

Eğer $x,y \in \mathfrak{R}^n$ ise, o takdirde $x_i,y_i \in \mathfrak{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ve $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ olarak alabiliriz. Bu durumda $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ vektörlerinin iç çarpımı

$$(x,y) = x_1.y_1 + x_2.y_2 + \ldots + x_n.y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır.

2. NORMLAR

$\mathfrak{R}$ üzerinde tanımlanan mutlak değer fonksiyonu ile; sayıların büyüklükleri, dizilerin yakınsaklığı, fonksiyonların sürekliliği, limitleri ve verilen bir reel sayı için bu sayıya en yakın asal ve tamsayıyı bulma gibi yaklaşım problemleri çözülebilir. Aynı şeyler bir vektör uzayı üzerinde tanımlanan norm için de geçerlidir.**V** reel vektör uzayı olmak üzere bu uzayda tanımlanan bir norm ile vektör normlarını karşılaştırabiliriz. Vektör dizilerinin yakınsaklığı irdelenebilir, dönüşümlerin sürekliliği ve limitleri çalışılabilir, verilen bir vektör için **V** vektör uzayının bir alt uzayı veya bir alt cümlesindeki en yakın elemanını bulmak gibi yaklaşım problemleri düşünülebilir. Bu problemler genellikle analiz, Lie teori, nümerik analiz, diferansiyel denklemler, Markov zincirleri, ekonometri, biyoloji ve sosyolojide popülasyon modellemede, fizik ve kimyada denge durumlarında ortaya çıkar. Ayrıca, normlar; singüler değer ayrışımında (SVD) $\boldsymbol{Ax=b}$ probleminin analizinde önemli rol oynarlar. Bu bölümde öncelikle vektör normları üzerinde, daha sonra da matris normları üzerinde duracağız.

Norm işlemi $\|\ \|$, $\|\ \|_a$ sembollerinden birisi ile gösterilecektir. **a** ise normun çeşidini belirten sabittir.

2.1. Vektör Normları

Tanım2.1.1. **F** reel yada kompleks sayılar cismi ve **V**, **F** cismi üzerinde tanımlanmış vektör uzayı olmak üzere;

$$\|.\| : \boldsymbol{V}\rightarrow\mathfrak{R}^{+}\cup\{\mathbf{0}\}$$

$$\mathbf{v}\rightarrow\|v\|$$

şeklinde ifade edilen ve

i) Her $v \in V$ için ,

i a) $v \neq 0$ ise , $\|v\| > 0$ dır,

i b) v=0 olması için gerek ve şart $\|v\| = 0$ olmasıdır,

ii) $\alpha \in F$ ve $v \in V$ için , $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ dir,

iii) $u, v \in V$ için , $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ dir,

aksiyomlarını sağlayan $\|.\|$ dönüşümüne, *vektör normu* denir.

Yani vektör normu, her $\boldsymbol{x}$ vektörüne karşılık gelen, $\|x\|$ şeklinde gösterilen negatif olmayan bir sayıdır.

Diğer bir ifade ile $\boldsymbol{x}$ vektörünün pozitif bir sayıya dönüştürülmesi işlemine norm denir.

Tanım 2.1.2. Üzerinde norm tanımlanmış bir vektör uzayına *normlu uzay* denir.

Teorem 2.1.1. $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{F}$ cismi üzerinde tanımlanmış bir normlu uzay ve $\boldsymbol{x,y \in V}$ olmak üzere

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

dır.

İspat: (N_3) aksiyomunu göz önüne alırsak

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

ifadesinden

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \tag{2.1}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Benzer şekilde

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

veya

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$$

eşitsizliğini yazarız. Halbuki

$$\|x - y\| = \|-1(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\|$$

olduğundan

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \tag{2,2}$$

yazabiliriz. Sonuçta (2.1) ve (2.2) eşitsizliklerinden

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

yazılabilir ki ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.2. [46] ***V*** bir iç çarpım uzayı ve $x \in V$ için

$$f: x \to \|x\| = (x,x)^{1/2}$$

dönüşümü ***V*** üzerinde bir normdur.

İspat:

N_1) İç çarpımın birinci aksiyomundan, $\forall x \in V$ için (x,x)≥0 ve $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ olduğundan $\|x\| \geq 0$ olur. $\|x\| = 0$, (x,x)=0 olmasını gerektirir. O halde (x,x)=0 ise x=0 bulunur. Diğer taraftan x=0 ise (x,x) ve dolayısıyla $\|x\| = 0$ dır. Böylece tanımlanan dönüşüm, vektör normunun pozitiflik özelliğini sağlar.

N_2) $\forall a \in F$, $\forall x \in V$ için

$$ax \to \|ax\| = (ax, ax)^{1/2}$$

$$= \left[a\bar{a}(x,x)\right]^{1/2}$$

$$= \left[|a|^2 (x,x)\right]^{1/2}$$

$$= |a|(x,x)^{1/2}$$

$$= |a|\|x\|$$

Olur ki homojenlik özelliği de sağlanır.

N_3) $\forall x,y \in V$ için

$$x+y \to \|x+y\| = (x+y, x+y)^{1/2}$$

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y)$$

$$=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)$$

$$=\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\leq \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

Olur ki , buradan üçgen eşitsizliği de sağlanmış olur.

Sonuç olarak;

$$f:\mathrm{x}\rightarrow \|x\| = (x,x)^{1/2}$$

Dönüşümü vektör normu özelliklerini sağladığı için V üzerinde bir normdur.

Teorem 2.1.3. (Paralelkenar Kuralı) V bir iç çarpım uzayı olmak üzere $u,v\in V$ için

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

dir.

İspat:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = (u+v,u+v) + (u-v,u-v)$$

$$=(u,u)+(u,v)+(v,u)+(v,v)+ (u,u)-(u,v)-(v,u)+(v,v)$$

$$=2(u,u)+2(v,v)$$

$$=2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.4. x ve y herhangi iki vektör olsun. Bu takdirde

$$|(x,y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

(Schwarz Eşitsizliği) eşitsizliği geçerlidir.

İspat. x ve y vektörleri verilsin. İç çarpım tanımını kullanarak

$$0 \leq \|x+\alpha y\|_2^2 = (x,x) + (x,\alpha y) + (\alpha y,x) + (\alpha y,\alpha y)$$

$$=\|x\|_2^2 + \alpha(x,y) + \overline{\alpha}\overline{(x,y)} + \overline{\alpha}\alpha\|y\|_2^2 \qquad (2.3)$$

Yazarız. (x,y)=0 ise Schwarz eşitsizliği sağlanmış olur. (x,y)≠0 ise

$$\alpha = -\frac{\|x\|_2^2}{(x,y)}$$

seçersek , (2.3) ifadesi

$$\frac{\|x\|_2^4 \|y\|_2^2}{(x,y)^2} \geq \|x\|_2^2$$

olur. Buradan

$$\frac{\|x\|_2^4 \|y\|_2^2}{\|x\|_2^2} \geq (x,y)^2$$

olup

$$\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \geq |(x,y)|^2$$

olur. Her iki tarafın karekökünü alırsak,

$$\|x\|_2 \|y\|_2 \geq |(x,y)|$$

olur ki, bu da istenendir.

Teorem 2.1.5. [46] x ve y herhangi iki vektör olsun.

$$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

(Üçgen eşitsizliği) eşitsizliği geçerlidir.

İspat:

$$\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|_2^2$$

$$= \|x\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|_2^2$$

$$\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

$$\leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

olur. Her iki tarafın karekökünü alırsak,

$$\|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$$

elde edilir ki, ispat tamamlanır.

Buraya kadar genel anlamda vektör normu tanımı ve özellikleri verildi. Şimdi de vektör normlarının çeşitlerinden bahsedelim.

a)Toplam normu: *x* bir vektör olmak üzere

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

şeklinde tanımlanır.

b)Euclide normu(Frobenius normu): *x* bir vektör olmak üzere

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2} = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$$

olarak tanımlanır.

c) Maksimum normu: *x* herhangi bir vektör olmak üzere

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

ile tanımlanır.

(a) ve (b) de verilen normlar genel olarak 1<p<∞ olmak üzere

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} \qquad (2.4)$$

Hölder normu (ℓ_p normu) olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3. Eşitlik (2.4) ile verilen Hölder (ℓ_p) normuna p-normu da denir. p-normlarının klasik bir sonucu olarak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\|(x,y)\| \le \|x\|_p \|y\|_p$$

ile tanımlanan eşitsizliğe *Hölder Eşitsizliği* denir.

x herhangi bir vektör olmak üzere normlar arasında;

a) $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$

b) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$

c) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$ bağıntıları mevcuttur.[46]

Teorem 2.1.6. Bir vektör uzayında tanımlanan

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \ ,$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \ ,$$

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$$

normları arasında

$$\frac{1}{n}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ toplamında $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$ 'lerin en büyüğü $\|x\|_\infty$ ile tanımlanmıştı. O halde

$$|x_i| \le \|x\|_\infty \quad (\text{i=1,2,…,n})$$

olup

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \le \|x\|_\infty + \|x\|_\infty + ... + \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty \qquad (2.5)$$

olur. Diğer taraftan $\|x\|_\infty$ normu $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$ sayılarından $|x_k|$ gibi bir tanesine eşit olacağından

$$\|x\|_\infty = |x_k| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = \|x\|_1 \qquad (2.6)$$

elde edilir. (2.5) ve (2.6) 'dan

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty \tag{2.7}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$|x_k|^2 \le |x_1|^2 + |x_2|^2 + ...|x_k|^2 + ... + |x_n|^2$$

olup buradan

$$\|x\|_\infty = |x_k| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \|x\|_2 \tag{2.8}$$

olur. O halde

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

$$\le \sqrt{x_k^2 + x_k^2 + ... + x_k^2}$$

olup

$$\|x\|_2 \le \sqrt{n}|x_k| = \sqrt{n}\|x\|_\infty \tag{2.9}$$

elde edilir. (2.8) ve (2.9) ‘den

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty \tag{2.10}$$

ve (2.7) ile (2.10)’den de

$$\frac{1}{n}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

bağıntısı elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

Örnek 2.1.1. x=$[1,2,3]^T$ vektörü için yukarıdaki norm özelliklerini sağlatınız.

Çözüm:

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9}$$

$$= \sqrt{14} \cong 3{,}74$$

$$\|x\|_1 = |1| + |2| + |3| = 6$$

ve

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| = 3$$

elde edilir. O halde

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2 \Rightarrow 3.74 \le 6 \le 1{,}73 \times 3{,}74 = 6{,}47 \quad ,$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty \Rightarrow 3 \le 3{,}74 \le 1{,}73 \times 3 = 5{,}19$$

ve

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty \Rightarrow 3 \le 6 \le 3 \times 3 = 9$$

olur ki , norm özellikleri gerçeklenmiş olur.

Örnek 2.1.2. x=[1,-2,3,5]^T vektörü için yukarıdaki norm özelliklerini sağlatınız.

Çözüm:

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 4 + 9 + 25}$$

$$= \sqrt{39} \cong 6{,}24$$

$$\|x\|_1 = |1| + |-2| + |3| + |5| = 11$$

ve

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| = 5$$

elde edilir. O halde

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2 \Rightarrow 6{,}2 \le 11 \le 2 \times 6{,}2 = 12{,}4 \quad ,$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty \Rightarrow 5 \le 6{,}24 \le 2 \times 5 = 10$$

ve

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty \Rightarrow 5 \le 11 \le 4 \times 5 = 20$$

olur ki , norm özellikleri gerçeklenmiş olur.

2.2. Matris Normları

Tanım.2.2.1. F, reel ya da kompleks sayılar cismi, $M_n(F)$; bileşenleri F cisminin elemanları olan n-kare mertebeli karesel matrislerin cümlesi olmak üzere ;

$$\|.\| : M_n(F) \to R^+ \cup \{0\}$$

$$A \to \|A\|$$

şeklinde ifade edilen ve

i) $A \in M_n(F)$ için,

i a) A≠0 ise, $\|A\| > 0$ dir.

i b) A=0 olması için gerek ve yeter şart $\|A\|=0$ olmasıdır,

ii) a$\in F$ ve $A \in M_n(F)$ *için,* $\|aA\| = |a|\|A\|$ dır,

iii) $A,B \in M_n(F)$ için, $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ dir,

iv) $A,B \in M_n(F)$ için, $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ dir,

aksiyomlarını sağlayan $\|.\|$ dönüşüme, *matris normu* denir.

Tanım 2.2.2. F, reel ya da kompleks sayılar cismi, $M_{n,m}(F)$; bileşenleri F cisminin elemanları olan n×m mertebeli matrislerin cümlesi olmak üzere ;

$$\|.\| : M_{n,m}(F) \to R^+ \cup \{0\}$$

$$A \to \|A\|$$

şeklinde ifade edilen ve

i) $A \in M_{n,m}(F)$ için,

i a) $A \neq 0$ ise, $\|A\| > 0$ dir.

i b) A=0 olması için gerek ve yeter şart $\|A\|$=0 olmasıdır,

ii) a$\in F$ ve $A\in M_{n,m}(F)$ *için,* $\|aA\| = |a|\|A\|$ dır,

iii) A,B$\in M_{n,m}(F)$ için, $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ dir,

aksiyomlarını sağlayan $\|.\|$ dönüşüme, *genelleştirilmiş* matris normu denir.

O halde bir matris normu daima genelleştirilmiş matris normudur. Fakat bunun tersi doğru değildir. Örneğin toplam normu $\sum_{i,j}|a_{ij}|$ genelleştirilmiş bir matris normudur, fakat bir matris normu değildir.

Ayrıca x herhangi bir vektör olmak üzere matris normları ile vektör normları arasında

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$$

şeklinde bir ilişki vardır. Bu eşitsizliği sağlayan $\|A\|$ matris normuna , $\|x\|$ *vektör normu ile uygundur* denir.

Herhangi bir vektör normundan, vektör normuyla uygun olan bir matris normu

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$$

eşitsizliğinden her $x\neq 0$ için sup, en küçük üst sınır olmak üzere

$$\|A\| \le \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

olarak elde edilir. Burada $z = \dfrac{x}{\|x\|}$ alırsak, $\|z\| = 1$ olacağından

$$\|A\| \le \sup_{|z|=1} \|Az\|$$

eşitliği yazılabilir.

Teorem 2.2.1. *A* bir matris ve z herhangi bir vektör olmak üzere

$$\|A\| = \max_{|z|=1} \|Az\|$$

ifadesi matris normudur.

İspat: İspat için $\|A\|$ normunun, matris normu şartlarını sağladığını göstermemiz gerekir.

i) $A \neq 0$ ise $\|z\| = 1$ olmak üzere $Az \neq 0$ olacak şekilde daima bir z vektörü bulunabilir. Öyle ki $\|A\| \geq 0$'dır.

$A=0$ ise $\|z\| = 1$ olacak şekilde her z için $\|Az\| = 0$ olmasını gerektirir. z'yi birim vektör olarak seçersek Az , A matrisinin sütunlarına karşılık gelir. Halbuki A matrisinin sütunlarının normları sıfırdır. Bu nedenle A matrisinin sütunları sıfırdır, yani $A=0$'dır.

ii) Herhangi bir c skaleri için

$$\|cA\| = \max_{\|z\|=1} \|cAz\|$$

$$= |c| \max_{\|z\|=1} \|Az\|$$

$$= |c| \|A\|$$

elde edilir.

iii) z_o, $\|z_0\| = 1$ ve $\|(A+B)z_0\| = \|A+B\|$ olacak şekilde bir vektör olsun. Bu takdirde

$$\|A+B\| = \|(A+B)z_0\|$$

$$\leq \|Az_0\| + \|Bz_0\|$$

$$\leq \|A\|\|z_0\| + \|B\|\|z_0\|$$

$$\leq \|A\| + \|B\|$$

olur.

iv) z_o, $\|z_0\| = 1$ ve $\|ABz_0\| = \|AB\|$ olacak şekilde bir vektör ise

$$\|AB\| = \|ABz_0\| = \|A(Bz_0)\|$$

$$\leq \|A\|\|Bz_0\|$$

$$\leq \|A\|\|B\|\|z_0\|$$

olur. $\|z_0\| = 1$ yerine yazılırsa

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

elde edilir ki bu da istenendir.

Sonuç olarak $\|A\| = \max_{|z|=1} \|Az\|$ ile tanımlı $\|A\|$, matris normu olur.

Tanım 2.2.3. A , m×n matris olmak üzere,

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

ile tanımlanan matris normuna *sütun normu* denir.

Tanım 2.2.4. A , m×n matris olmak üzere,

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

ile tanımlanan matris normuna *satır normu* denir.

Tanım 2.2.5. A , m×n matris olmak üzere,

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{iz(A^H A)} = \sqrt{iz(AA^H)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2(A)} \qquad \text{r: rank}$$

ile verilen norma *Euclide normu* denir.

Bazen Euclide norm yerine *Frobenius normu, Schur norm* veya *Hilbert-Schmidt normu* ifadeleri de kullanılır.

Tanım 2.2.6. Herhangi bir A matrisinin A^T transpozesini alalım. Bu A^T matrisinin elemanlarının her biri yerine elemanın kompleks konjugesini koymakla elde edilen yeni $\left(\overline{A^T}\right)$ matrisine A matrisinin *hermitian(eşlenik)* transpozesi denir ve A^H ile gösterilir.

Tanım 2.2.7. $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ve $A^H A$ nın özdeğerlerinin karekköküne A'nın singüler değerleri denir ve

$$\sigma(A) = \{ \sqrt{\lambda_i} \ : \ \lambda_i \ , \ A^H A \ \text{ nın özdeğerleri } \}$$

dir.

Tanım 2.2.8. A , m×n matris ve A^H matrisi A matrisinin eşlenik transpozesi olmak üzere $A^H A$ çarpım matrisinin *spektral normu* denir ve $\|A\|_2$ ile gösterilir. Yani;

$\|A\|_2$ = {λ: λ, $A^H A$'nın mutlak değerce en büyük özdeğerinin karekökü}

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda \max(A^H A)} = \sigma_{\max}(A)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.9. *A,* m×n matris olmak üzere,

$$\|A\|_P = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^P \right)^{1/P} \qquad (1<p<\infty)$$

şeklinde tanımlanan norma *A* matrisinin ℓ_P *normu* denir.

Örnek 2.2.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin normlarını bulunuz.

Çözüm: İlk olarak $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ sütun normunu bulalım.

$$\|A\|_1 = \max\{(|1|+|0|+|-2|),(|0|+|1|+|1|),(|-3|+|0|+|2|)\}$$

$$=\max\{3,2,5\}=5$$

olarak bulunur. İkinci olarak $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ satır normunu bulacak olursak,

$$\|A\|_\infty = \max\{(|1|+|0|+|-3|),(|0|+|1|+|0|),(|-2|+|1|+|2|)\}$$

$$=\max\{4,1,5\}=5$$

elde edilir. $\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ Euclide normu ise

$$\|A\|_E = \left(|1|^2+|0|^2+|-3|^2+|0|^2+|1|^2+|0|^2+|-2|^2+|1|^2+|2|^2\right)$$

$$=\sqrt{20} = 4{,}472136$$

olur.

$\|A\|_2$ = {λ: λ, $A^H A$'nın mutlak değerce en büyük özdeğerinin karekökü} olduğundan

$$\|A\|_2 = \sqrt{9+\sqrt{73}} = \sqrt{9+8{,}5440037} = \sqrt{17{,}5440037} = 4{,}1885563$$

elde edilir.

Teorem 2.2.2. [46] Genelleştirilmiş bir matris normu daima matrisin elemanlarına bağımlıdır. Yani ε>0 olmak üzere her *i,j* için $|a_{ij} - b_{ij}| < \delta$ iken $|\|A\| - \|B\|| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir δ>0 vardır.

İspat: *A* ve *B* , n-kare matrisler olsun. E_{ij} e_{ij}=1 ve diğer bütün elemanları sıfır ($E_{ij}=e_i e^T_j$) olan bir matris ise

$$A - B = \sum_{i,j} (a_{ij} - b_{ij}) E_{ij}$$

olur. $m = \max_{i,j} \|E_{ij}\|$ alırsak matris normunun M_1) aksiyomundan m>0 olacaktır. M_2) ve M_3) aksiyomlarından da

$$\|A - B\| \le \sum_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}| \|E_{ij}\| \le m \sum_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|$$

elde edilir. Herhangi bir ε>0 için $\delta = \frac{\varepsilon}{mn^2}$ alalım. Eğer *A* ve *B* matrislerini i,j=1,2,…,n için

$$|a_{ij} - b_{ij}| < \delta$$

olacak şekilde seçersek

$$\|A - B\| < mn^2 = \varepsilon$$

elde ederiz. $|a_{ij} - b_{ij}| < \delta$ ve $\|A - B\| \ge |\|A\| - \|B\|$ olduğundan

$$\|A - B\| < \varepsilon$$

olur ki, ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.3. [46] A, n-kare matris, $\|A\|_\alpha$ ve $\|A\|_\beta$ genelleştirilmiş iki matris normu olsun. Sadece normların seçimine bağlı

$$m \le \frac{\|A\|_\alpha}{\|A\|_\beta} \le M$$

olacak şekilde bir m ve M pozitif sayıları mevcuttur.

İspat: E_{ij} , e_{ij}=1 ve diğer bütün elemanları sıfır ($E_{ij}=e_i e^T_j$) olan bir matris olmak üzere $k_2 = \max_{i,j}\|E_{ij}\|_\alpha$ ve $a = \max_{i,j}|a_{ij}|$ olarak seçelim. Matris normunun M_2) ve M_3) aksiyomlarından

$$\|A\|_\alpha \le \sum_{i,j}|a_{ij}|\|E_{ij}\|_\alpha \le ak_2 \qquad (2.11)$$

olur. a=1 olacak şekilde bütün matrislerin cümlesini $\Im$ ile gösterip

$$k_1 = \min_{B\in\Im}\|B\|_\alpha$$

seçersek Teorem (2.3.1.) den $\|B\|_\alpha$, B matrisinin elemanlarına bağlı olduğundan $k_1 = \|B_0\|_\alpha$ olacak şekilde bir $B_0 \in \Im$ vardır. M_1) aksiyomundan $k_1>0$ ve k_1, A matrisinden bağımsızdır. $\|a_n\| = a$ ve $B \in \Im$ olmak üzere A matrisini $A=a_nB$ olarak seçersek

$$\|A\|_\alpha = a\|B\|_\alpha \ge ak_1 \qquad (2.12.)$$

olur. (2.11) ve (2.12) ‘ den

$$ak_1 \le \|A\|_\alpha \le ak_2 \qquad (2.13)$$

elde ederiz. Benzer şekilde $\|.\|_\beta$ normuna bağlı olarak

$$ah_1 \le \|A\|_\beta \le ah_2 \qquad (2.14)$$

olacak şekilde h_1, h_2 pozitif sayıları vardır.(2.13) ve (2.14) eşitsizliklerini taraf tarafa bölersek

$$\frac{k_1}{h_1} \leq \frac{\|A\|_\alpha}{\|B\|_\beta} \leq \frac{k_2}{h_2}$$

elde edilir ve $m = \frac{k_1}{h_1}$ ve $M = \frac{k_2}{h_2}$ dersek ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.10. *A*, n-kare matris olmak üzere *A* matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğerine *A*'nın *spectral yarıçapı* denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir.

O halde herhangi bir λ_i özdeğeri için $|\lambda_i| \leq \rho(A)$ olacaktır ve en az bir *i* $(1 \leq i \leq n)$ değeri için $|\lambda_i| = \rho(A)$ olacaktır.

Ayrıca, bir *A* kare matrisinin spektral yarıçapı, o matrisin normuna eşit veya küçüktür. Yani;

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

dır.

2.3. Matris Normları Arasındaki Bağıntılar

Matris normlarında , $\|.\|_1$ satır normunu , $\|.\|_2$ spektral normunu , $\|.\|_\infty$ sütun normunu bir önceki kısımda görmüştük. Ayrıca A , m×n matrisi için $\|A\|_\Delta = \max|a_{ij}|$ olsun. Bu durumda bu normlar arasında

1) $\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n}.\|A\|_2$

2) $\|A\|_\Delta \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m.n}.\|A\|_\Delta$

3) $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1 . \|A\|_\infty}$

4) $\frac{1}{\sqrt{n}} . \|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m} . \|A\|_\infty$

5) $\frac{1}{\sqrt{m}} . \|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n} . \|A\|_1$

bağıntıları geçerlidir.[46]

Örnek 2.3.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi için yukarıdaki bağıntıları gekçekleyelim.

Çözüm: Yukarıdaki bağıntılarda verilen normları hesaplarsak

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{(|1|+|4|+|-3|),(|0|+|1|+|-2|),(|2|+|0|+|-1|)\}$$

$$= \max\{8,3,3\} = 8 \ ,$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{(|1|+|0|+|2|),(|4|+|1|+|0|),(|-3|+|-2|+|-1|)\} = 6$$

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(|1|^2 + |0|^2 + |2|^2 + |4|^2 + |1|^2 + |0|^2 + |-3|^2 + |-2|^2 + |-1|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{36} = 6 \ ,$$

$$\|A\|_2 = \frac{\sqrt{57}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = 3{,}7749172 + 1{,}8027756 = 5{,}5776928$$

ve

$$\|A\|_\Delta = \max |a_{ij}| = 4$$

elde edilir.

Şimdi bağıntıları gerçekleyelim.

1)

$$\|A\|_2 \le \|A\|_E \le \sqrt{n}.\|A\|_2$$

$$5,5776928 \le 6 \le \sqrt{3}.(5,5776928)$$

$$5,5776928 \le 6 \le 9,6608473 \ ,$$

2) $$\|A\|_\Delta \le \|A\|_2 \le \sqrt{m.n}.\|A\|_\Delta$$

$$4 \le 5,5776928 \le \sqrt{3.3}.4 = 12 \ ,$$

3)

$$\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1.\|A\|_\infty}$$

$$5,5776928 \le \sqrt{8.6} = 6,9282032 \ ,$$

4)

$$\frac{1}{\sqrt{n}}.\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}.\|A\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}.6 \le 5,5776928 \le \sqrt{3}.6 \ ,$$

5)

$$\frac{1}{\sqrt{m}}.\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}.\|A\|_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}.8 \le 5,5776928 \le \sqrt{3}.8 = 13,856406 \ ,$$

olarak elde edilir.

3.HADAMARD ÇARPIM VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, bilinen matris çarpımından daha basit olan bir matris çarpımı üzerinde duracağız.

Tanım.3.1. $A=\lfloor a_{ij}\rfloor\in M_{m,n}$ ve $B=\lfloor a_{ij}\rfloor\in M_{m,n}$ matrisleri verilsin.

$$A\circ B=\lfloor a_{ij}b_{ij}\rfloor$$

şeklinde tanımlanan çarpıma A ve B matrislerinin Hadamard Çarpımı denir.

Hadamard çarpımı için uygun şartlar iki matrisin aynı mertebeye sahip olması gerektiğidir ve bilinen matris toplamında olduğu gibi karşılıklı aynı indisli elemanların çarpımı şeklindedir. Hadamard çarpımı alanındaki ilk sonuçlar Issai Schur tarafından elde edildiği için bu çarpım Schur çarpımı olarak da adlandırılır. Bu alandaki çalışmaların çoğunluğu Hadamard çarpımı altında pozitif yarı tanımlı matrislerin durumu ile alakalıdır.

Tanım 3.2. $A=\lfloor a_{ij}\rfloor\in M_{m,n}$ matrisi verilsin.

$$r_i(A)=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2} \qquad \text{i=1,2,…,m}$$

ve

$$c_j(A)=\left(\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2} \qquad \text{j=1,2,…,n}$$

şeklindeki normlara sırayla A matrisinin *Euclidean satır ve sütun normları* denir.[46]. Yukarıda tanımlanan $r_i(A)$, $c_j(A)$ değerlerini,

$$r_1(A)\geq r_2(A)\geq \ldots \geq r_m(A)$$

$$c_1(A)\geq c_2(A)\geq \ldots \geq c_n(A)$$

olarak sıralayalım. Bu durumda $\left\{r_1(A)^2, r_2(A)^2,..., r_m(A)^2\right\}$ kümesi AA^* matrisinin esas köşegen elemanları ve $\left\{c_1(A)^2, c_2(A)^2,..., c_n(A)^2\right\}$ kümesi de A^*A matrisinin

esas köşegen elemanlarıdır. Ayrıca $\sigma_1(A)$, A matrisinin en büyük singüler değeri olmak üzere daima

$$r_1(A) \le \sigma_1(A)$$
$$c_1(A) \le \sigma_1(A) \tag{3.1}$$

dır. [46].

Lemma 3.1.1. [46] Eğer $A, B \in M_{m,n}$ ve $D \in M_m$ ve $E \in M_n$ köşegen matrisler ise

$$D(A \circ B)E = (DAE) \circ B = (DA) \circ (BE)$$
$$(AE) \circ (DB) = A \circ (DBE)$$

dir.

Lemma 3.1.2. [46] $A, B \in M_{m,n}$ ve $x \in C^n$ olsun. $x \in C^n$ vektörü için $D_x = köş(x_1, x_2, ..., x_n)$ olmak üzere AD_xB^T matrisinin i. köşegen elemanı (i=1,…,m) $(A \circ B)x$ vektörünün i. bileşeni ile çakışır.

İspat. Eğer $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, $B = \lfloor a_{ij} \rfloor$ ve $x = \lfloor x_j \rfloor$ ise i=1,…,m için

$$(AD_xB^T)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} x_j = \left[(A \circ B)x\right]_i$$

olur ki, istenendir.

Lemma 3.1.3. [46] $A, B, C \in M_{m,n}$ olsun. i=1,…,m için $(A \circ B)C^T$ matrisinin i. köşegen elemanı $(A \circ C)B^T$ matrisinin i. köşegen elemanı ile çakışır.

Lemma 3.1.4. [46] $A, B, C \in M_{m,n}$ ve $x, y \in C^n$ için

$$y^*(A \circ B)x = iz\left(D_y^* A D_x B^T\right)$$

dir.

İspat. e=[1,1,…,1]^T olmak üzere D_xe=x olduğunu göz önüne alarak

$$y^*(A \circ B)x = e^T D_y^* (A \circ B)x = e^T \left[\left(D_y^* A \circ B\right)x\right] = iz\left(D_y^* A D_x B^T\right)$$

olduğu gösterilmiş olur. İkinci eşitlik Lemma 3.1.1 ve Lemma 3.1.2 den elde edilmiştir.

Örnek 3.1.1. $x^*(A \circ B)x = iz\left(D_x^* A D_x B^T\right) = \left\langle D_x^* A D_x \overline{B} \right\rangle$ olduğu açıktır.

Tanım 3.3. A, n-kare Hermityen matris olsun. Sıfırdan farklı $\forall x \in C^n$ vektörü için

$$x^* Ax > 0$$

ise A matrisine pozitif tanımlı matris denir. Eğer

$$x^* Ax \geq 0$$

ise bu takdirde A matrisine pozitif yarı tanımlı matris denir. Eğer A Hermityen matrisi pozitif tanımlı ise aynı zamanda pozitif yarı tanımlıdır.

Teorem 3.1.1.(Schur Teoremi) Eğer $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisler ise o zaman $A \circ B$ matrisi de pozitif yarı tanımlıdır. Ayrıca B matrisi pozitif tanımlı ve A matrisinin köşegen elemanları sıfırdan farklı ise $A \circ B$ pozitif tanımlıdır. Özellikle, A ve B matrislerinin her ikisi de pozitif tanımlı ise $A \circ B$ pozitif tanımlıdır.

İspat. Lemma 3.1.4 den herhangi bir $x \in C^n$ için

$$\begin{aligned} x^*(A \circ B)x &= iz\left(D_x^* A D_x B^T\right) \\ &= iz\left[\left(B^{1/2}\right)^T D_x^* A^{1/2} A^{1/2} D_x \left(B^{1/2}\right)^T\right] \\ &= iz\left[\left(A^{1/2} D_x \left(B^{1/2}\right)^T\right)^* \left(A^{1/2} D_x \left(B^{1/2}\right)^T\right)\right] \geq 0 \end{aligned}$$

olacağından istenilen bulunmuştur.

Teorem 3.1.2. [46] Herhangi $A, B \in M_{m,n}$ matrisleri için, $\sigma_1(A)$ A matrisinin singüler değeri olmak üzere

$$\sigma_1(A \circ B) \leq \sigma_1(A)\sigma_1(B)$$

dir.

Teorem 3.1.3. [46] Herhangi $A, B \in M_{m,n}$ matrisleri için

$$\sigma_1(A \circ B) \leq \sigma_1(A)c_1(B) \leq \left\{\begin{matrix} r_1(A)\sigma_1(B) \\ \sigma_1(A)c_1(B) \end{matrix}\right\} \leq \sigma_1(A)\sigma_1(B)$$

dir.

İspat. Yalnızca birinci eşitsizliği göstereceğiz. Her x,y birim vektörleri için $\sigma_1(A \circ B) = \max\left|x^*(A \circ B)y\right|$ olduğundan $x \in C^n$ ve $y \in C^n$ vektörleri için $\left|x^*(A \circ B)y\right|$ değerini hesaplayalım.

$$\left|x^*(A \circ B)y\right| = \left|\sum_{i,j} \overline{x_i} a_{ij} b_{ij} y_i\right|$$

$$\leq \left(\sum_{i,j} \left| x_i a_{ij} \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j} \left| b_{ij} x_j \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i} \left| x_i \right|^2 \sum_{j} \left| a_{ij} \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j} \left| y_j \right|^2 \sum \left| b_{ij} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i} \left| x_i \right|^2 r_i^2 (A) \right)^{1/2} \left(\sum_{j} \left| y_j \right|^2 c_j^2 (B) \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{i} \left| x_i \right|^2 r_1 (A)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j} \left| y_j \right|^2 c_1 (B)^2 \right)^{1/2}$$

$$= r_1 (A) c_1 (B) \|x\|_2 \|y\|_2$$

olur ki, eşitsizlik elde edilir. Birinci eşitsizliğe *Cauchy-Schwarz* eşitsizliği denir.

Şimdi de singüler değerlerin toplamı olarak tanımlanan *Ky Fan k-normunu* kullanarak teorem 3.1.2 deki eşitsizliğin genel halini verelim.

Teorem 3.1.4. [46] Herhangi $A, B \in M_{m,n}$ matrisleri için

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i (A \circ B) \leq \sum_{i=1}^{k} \sigma_i (A) \sigma_i (B) \ , \quad \text{k=1,…,n}$$

dir.

Teorem 3.1.5. [46] Herhangi $A, B \in M_{m,n}$ matrisleri

$$\left\| A \circ B \right\|_2 \leq \left\| A \circ \overline{A} \right\|_2^{1/2} \left\| B \circ \overline{B} \right\|_2^{1/2} \leq \left\| A \right\|_2 \left\| B \right\|_2$$

dir. ($\overline{A}$, A matrisinin eşleniği.)

Teorem 3.1.6. [46] $A \in M_n$ matrisi pozitif yarı tanımlı ve $B \in M_n$ herhangi bir matris olsun. $d_i (A)$, A matrisinin köşegen elemanları olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i (A \circ B) \leq \sum_{i=1}^{k} d_i (A) \sigma_i (B) \quad \text{k=1,…,n}$$

ve eğer B matrisi de pozitif yarı tanımlı ise

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (A \circ B) \leq \sum_{i=1}^{k} d_i (A) \lambda_i (B) \ , \quad \text{k=1,…,n}$$

dir.

Teorem 3.1.2. [52] $A,B,C \in M_{m,n}$ olsun. Eğer $A = B \circ C$ ise

$$\|A\|_2 \le r_1(A)c_1(C)$$

dir.

Tanım 3.4. $x = [x_i] \in R^n$ ve $y = [y_i] \in R^n$ vektörleri verilsin. Eğer x ve y vektörlerinin bileşenleri artan sırada olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \le \sum_{i=1}^{k} y_i \quad , \quad \text{k=1,2,…,n}$$

ise x vektörü, y vektörü tarafından zayıf bir şekilde majorize edilmiştir denir ve $x \alpha_w y$ şeklinde gösterilir. Hem $x \alpha_w y$ hem de

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

ise x vektörü, y vektörü tarafından majorize ediliyor denir ve $x \alpha\ y$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 3.1.2. $A \in M_n$ matrisi Hermityen olsun. O zaman A matrisinin köşegen elemanlarının vektörü, özdeğerlerinin vektörünü majorize eder. Yani,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \le \sum_{i=1}^{k} a_{ii} \quad \text{k=1,…,n-1}$$

olur. k=n durumunda eşitlik sağlanır.

Lemma 3.1.7. [2] Eğer $A, B^T \in M_{m,n}$ ise

$$\prod_{i=1}^{k} \sigma_i(AB) \le \prod_{i=1}^{k} \sigma_i(A)\sigma_i(B) \ , \ \text{k=1,…,}min\{m,n\} \qquad (3.2)$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca, zayıf çarpanlanabilir majarizasyon eşitsizliği zayıf toplanabilir eşitsizliğini ifade eder.

Lemma 3.1.8. [2] Eğer $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n \ge 0$ ve $y_1 \ge y_2 \ge ... \ge y_n \ge 0$

değerleri için

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \le \prod_{i=1}^{k} y_i \ , \ \text{k=1,…,n} \qquad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \le \sum_{i=1}^{k} y_i \quad , \quad \text{k=1,…,n} \qquad (3.4)$$

eşitsizliği de sağlanır.

Tanım 3.1.3. $A \in M_n$ matrisi verilsin. Eğer A matrisinin en büyük singüler değeri 1 veya 1'den küçük ise A matrisine büzülme matrisi denir. Yani,

$$\sigma_1(A) \leq 1$$

dir.

Lemma 3.1.9.[2] $A, B \in M_n$ matrisleri verilsin. Bu takdirde $A = X^*Y$ olacak şekildeki herhangi $X, Y \in M_{r,n}$ matrisleri için

$$\sum_{i=}^{k} \sigma_i(A \circ B) \leq \sum_{i=1}^{k} c_i(X) c_i(Y) \sigma_1(B) \text{ , k=1,2,…,n} \tag{3.5}$$

dir. Buradan şu sonuç çıkar.

$$\prod_{i=1}^{k} \sigma_i(A \circ B) \leq \prod_{i=1}^{k} c_i(X) c_i(Y) \sigma_1(B) \text{ , k=1,2,…,n} \tag{3.6}$$

Lemma 3.1.10. [2] Herhangi $A, B, C \in M_n$ için

$$iz[(A \circ B)C] = iz[(A \circ C^T)B^T] \tag{3.7}$$

Lemma 3.1.11. [2] $A \in M_n$ matrisi $|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq ... \geq |\lambda_n(A)|$ şartını sağlayan $\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A)$ öz değerlerine sahip olsun. Bu takdirde

$$\prod_{i=1}^{k} |\lambda_i(A)| \leq \prod_{i=1}^{k} \sigma_i(A) \quad , \qquad \text{k=1,…,n} \tag{3.8}$$

dir.

Lemma 3.1.8 den

$$\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i(A)| \leq \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A) \text{ , k=1,…,n} \tag{3.9}$$

elde edilir.

Lemma 3.1.12. [2] $A, K_r, K_s \in M_n$ matrisleri verilsin.

$\sigma_1(K_r) = ... = \sigma_r(K_r)$, $\sigma_1(K_s) = ... = \sigma_s(K_s) = 1$, $\sigma_{r+1}(K_r) = ... = \sigma_n = 0$ ve $\sigma_{s+1}(K_s) = ... = \sigma_n(K_s) = 0$ olsun.Bu takdirde $X^*Y = A$ olacak şekildeki herhangi $X, Y \in M_{r,n}$ için

$$|iz[(A \circ K_r)K_s]| \leq \sum_{i=1}^{\min\{r,s\}} c_i(X) c_i(Y) \tag{3.10}$$

dir.

Lemma 3.1.13. [2] $B \in M_n$ matrisi $\sigma_1(B) \geq \sigma_2(B) \geq ... \geq \sigma_n(B) \geq 0$ sıralı singüler değerlere sahip olsun. Bu takdirde her K_j bir rank j kısmi izometrisi, $\beta_j \geq 0$, (j=1,…,n) ve

$$\sum_{j=k}^{n} \beta_j = \sigma_k(B) \text{ , } \quad \text{k=1,…,n} \tag{3.11}$$

Lemma 3.1.14. [2] $C \in M_n$ ve $1 \leq k \leq n$ şartını sağlayan herhangi bir pozitif k tamsayısı için

$$\sum_{j=1}^{k} \sigma_i(C) = iz(CC_k)$$

olacak şekilde bir $C_k \in M_n$ rank k kısmi izometri vardır.

4.CAUCHY-TOPLİTZ VE CAUCHY-HANKEL MATRİSLERİ

Bu bölüm, sonraki bölümler için gerekli temel tanımlardan oluşmaktadır. Öncelikle, çalışma boyunca kullanılacak olan polygamma fonksiyonu ve onun özellikleri hakkında kısaca bilgi verelim.

4.1.GAMMA,PSİ VE RİEMANN ZETA FONKSİYONU

Tanım.4.1.1. Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

olmak üzere,

$$\Psi(x) = Psi(x) = \frac{d}{dx}\{\ln[\Gamma(x)]\}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona psi (veya digamma) fonksiyonu denir. Psi fonksiyonun n. Mertebeden türevine de polygamma fonksiyonu denir ve

$$\Psi(n,x) = \frac{d^n}{dx^n} Psi(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d}{dx}\ln[\Gamma(x)]\right]$$

şeklinde gösterilir. $n \geq 0$ dır. Eğer, $n=0$ ise

$$\Psi(0,x) = Psi(x) = \frac{d}{dx}\{\ln[\Gamma(x)]\}$$

olur. [51].

Özellik.4.1.1. $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ fark operatörü ve $\Delta^{-1} f(x) = \sum_{i=0}^{x-1} f(i)$ ters fark operatörü olmak üzere

$$\Psi(m,x) = \frac{d}{dx^m}(\ln[\Gamma(x+1)]) \qquad (m>0)$$

eşitsizliğinin her iki tarafına ileri fark operatörünü uygularsak,

$$\Delta\Psi(m,x) = \frac{d}{dx^m}\Delta(\ln[\Gamma(x+1)])$$

$$= \frac{d}{dx^m}\ln\frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+1)}$$

$$= \frac{d}{dx^m}\ln(x+1)$$

$$= \frac{d}{dx^{m-1}}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(x+1)^m}$$

olur. Şimdi de her iki yana ters fark operatörünü uygularsak,

$$\Psi(m,x) = \Delta^{-1}\left(\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(x+1)^m}\right) = (-1)^{m-1}(m-1)!\Delta^{-1}\left(\frac{1}{(x+1)^m}\right)$$

elde edilir. Buradan da

$$\Delta^{-1}\left(\frac{1}{(x+1)^m}\right) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\Psi(m,x) \tag{4.1.}$$

yazılır. Ters fark operatörü $\Delta^{-1}f(x) = \sum_{i=0}^{x-1} f(i)$ şeklinde tanımlı olduğu için (4.1.) ifadesi bir asimptotik serinin polygamma cinsinden değerini ifade eder. [57].

Özellik.4.1.2. a$\in Z^+$,b herhangi bir sayı n$\in Z^+$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\Psi(a,n+b) = 0$$

dır. .[57].

Tanım.4.1.2. $s > 1$ olmak üzere

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

fonksiyonuna *Riemann'ın zeta fonksiyonu* denir.

4.2. CAUCHY,HANKEL VE TOEPLİTZ FORMLARI

Tanım 4.2.1. $x_i \neq y_j (x_i, y_j \in C)$ ve $1 \leq i.j \leq n$ olmak üzere elemanları

$$c_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j} \tag{4.2}$$

ile tanımlı $A = \left[c_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ matrisine *Cauchy matrisi* denir. [47,84,27].

$A_n = \left[\frac{1}{x_i - y_j}\right]_{i,j=1}^{n}$ matrisi bir *Cauchy matrisi* olsun. Şimdi A_n matrisinin determinantı için bir formül verelim. A_n matrisinin en son satırını önceki satırların her birinden çıkaralım ve bu işlemi sütunlar için de yapalım. Bunları yaptıktan sonra $(n-1)$. mertebeden A_{n-1} alt matrisini sağdan ve soldan köşegen elemanları ile çarpalım. Buradan A_n matrisinin determinantını hesaplarsak

$$\det A_n = \det A_{n-1} \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(x_i - x_n)(y_n - y_i)}{(x_i - y_n)(x_n - y_i)}$$

elde edilir. Sonuçta

$$\det A_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (y_j - y_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n} (x_i - y_j)} \tag{4.3}$$

bulunur . $x_i \neq x_j$ ve $y_i \neq y_j$ ise A_n matrisi singüler değildir.

$$z = \left[z_1 ... z_n\right]^T \text{ ve } b = \left[b_1 ... b_n\right]^T$$

olmak üzere

$$A_n z = b$$

lineer denklem sistemini göz önüne alalım. Bu sistemi Cramer kuralı ile çözersek (4.3)'e benzer

$$z_\ell = (-1)^\ell \frac{1}{\det A_n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_k \frac{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i,j \neq k}} (x_i - x_j) \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i,j \neq \ell}} (y_j - y_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \neq k, j \neq \ell}} (x_i - y_j)}$$

ifadesi elde edilir. (4.3)'deki $\det A_n$ değeri z_ℓ ifadesinde yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$u_\ell = \frac{\prod_{i=1}^{n}(x_i - y_\ell)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq\ell}}^{n}(y_i - y_\ell)} \qquad (\ell = 1,2,3,...,n) \tag{4.4}$$

ve

$$v_k = \frac{\prod_{j=1}^{n}(x_k - y_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq\ell}}^{n}(x_k - x_j)} \qquad (k = 1,2,3,...,n) \tag{4.5}$$

olmak üzere

$$z_\ell = u_\ell \sum_{k=1}^{n} \frac{v_k b_k}{x_k - y_\ell} \qquad (\ell = 1,2,3,...,n)$$

elde edilir.

Tanım 4.2.2. $n \geq 1$ olmak üzere

$$H_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} h_{i+j} x_i x_j$$

kuadratik formuna *Hankel formu* denir. Bu forma uyan matrise de Hankel matrisi denir ve

$$H_{n-1} = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1} \tag{4.6}$$

olarak gösterilir. [35,48].

Bir Hankel matrisinin açık gösterimi,

$$H_{n-1} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & . & . & . & h_n & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & . & . & . & h_{n+1} & h_{n+2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ h_n & h_{n+1} & . & . & . & h_{2n-4} & h_{2n-3} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & . & . & . & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan görüldüğü gibi Hankel matrisleri simetriktir. Ayrıca sonsuz mertebeden bir Hankel matrisi de

$$H_\infty = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 4.2.3. $n \geq 1$ ve t_{i-j} ler kompleks sayılar olmak üzere

$$T_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} t_{i-j} x_i \bar{x}_j$$

kuadratik formuna *Toeplitz formu* denir. Bu forma tekabül eden

$$T_{n-1} = \left(t_{i-j}\right)_{i,j=0}^{n-1} \tag{4.7}$$

biçimindeki matrise *Toeplitz matrisi* denir. [48].

Bir Toeplitz matrisini açık olarak

$$T_{n-1} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & . & . & . & t_{-n+2} & t_{-n+1} \\ t_1 & t_0 & . & . & . & t_{-n+3} & t_{-n+2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ t_{n-2} & t_{n-3} & . & . & . & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & . & . & . & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan görüldüğü üzere bir Toeplitz matrisinin elemanları esas köşegene paralel köşegenler boyunca aynıdır. Dolayısıyla bir Toeplitz matrisini, matrisin ilk satır vektörü ile ilk sütun vektörü temsil eder diyebiliriz.

$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...$ katsayıları reel olmak üzere

$$f(x) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \tag{4.8}$$

Fourier serisini ele alalım. Bu seri kutupsal koordinatlarda bir harmonik fonksiyonun açılımıdır. Eğer $t_{i-j} = t_m$,

$t_m = a_n - ib_n$, $t_{-m} = \bar{t} = a_n + ib_n$ $\left(m = 0, \mp 1, \mp 2, ..., \mp(n-1)\right)$

olmak üzere $t_{-m} = \overline{t_m}$ ise T_{n-1} matrisi hermityen olur ve bu matris

$$T_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} t_{i-j} x_i \bar{x}_j$$

hermityen toeplitz formuna karşılık gelir. Ayrıca sonsuz mertebeden bir Toeplitz matrisi de

$$T_\infty = \left(t_{i-j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 4.2.4. (4.2) ile verilen Cauchy matrisinde *a* ve *b* keyfi sayılar olmak üzere $\left(b \neq 0, \frac{a}{b} \notin \mathrm{Z}\right)$ $x_k = a + kb$ ve $y_j = jb$ alınarak elde edilen

$$T_n = \left[\frac{1}{a + (k-j)b}\right]_{k,j=1}^{n} \tag{4.9}$$

matrisine *Cauchy-Toeplitz matrisi* denir.

T_n matrisinin elemanları

$$t_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-isx}dx \qquad (s = 0, \mp 1, \mp 2, ..., \mp(n-1)) \tag{4.10}$$

eşitliği elde edilir. Burada $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = c(s)e^{i(a+b(k-j))x} \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlı ve $i \in C$ dir. [84,22,80].

Tanım 4.2.5. (4.2) ile verilen Cauchy matrisinde *a* ve *b* keyfi sayılar olmak üzere $\left(b \neq 0, \frac{a}{b} \notin \mathrm{Z}\right)$ $x_k = a + kb$ ve $y_j = -jb$ alınarak elde edilen

$$H_n = \left[\frac{1}{a + (k+j)b}\right]_{k,j=1}^{n} \tag{4.12}$$

matrisine *Cauchy-Hankel matrisi* denir.

H_n matrisinin elemanları

$$h_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-isx}dx \qquad (s = 2,3,...,2n) \tag{4.13}$$

eşitliği ile elde edilir. Burada $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = c(s)e^{i(a+b(k+j))x} \tag{4.14}$$

şeklinde tanımlı ve $i \in C$ dir. [84].

4.3. Toeplitz Matrislerin Öz Değerlerinin ve Singüler Değerlerinin Dağılımı

$f(\theta)$; reel değerli, sınırlı ölçülebilir ve 2π periyotlu bir fonksiyon olmak üzere $T_n[f]$, Toeplitz matrislerini temsil etsin.

1920'de [69] G. Szegö $f(\theta) \in L_\infty(-\pi,\pi)$ (L_∞ ölçülebilir sınırlı fonksiyonların uzayı) olmak üzere $T_n[f]$'nin öz değerlerinin dağılımı ile ilgili bir temel teoremi ispat etmiştir. Fakat basit örnekler göstermiştir ki; $f(\theta)$ reel değerli değil ise bu sonuç geçerli değildir. Daha sonra S.V. Parter G.Szegö'nün bu teoreminden yola çıkarak $T_n[f]$ nin singüler değerlerinin dağılımı için bu teoremi genişletmiştir. [61].

$f(\theta) \in L_\infty(-\pi,\pi)$ olmak üzere $f(\theta)$'nın Fourier serisi;

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$$

olsun. $T_n[f]$ de

$$t_{ij} = c_{j-i}$$

olmak üzere

$$T_n[f] = (t_{ij}) \qquad i,j=0,1,...,n$$

ile tanımlı $(n+1)\times(n+1)$ Toeplitz matrisini göstersin. Eğer $f(\theta)$ reel değerli ise $c_k = \bar{c}_{-k}$ olup $T_n[f]$ hermityen matris olur.

$$x = (x_0, x_1, ..., x_n)^t \ , \ y = (y_0, y_1, ..., y_n)^t$$

$$\dot{x}(\theta) = \sum_{k=0}^{n} x_k e^{-ik\theta} \ , \ \dot{y}(\theta) = \sum_{k=0}^{n} y_k e^{-ik\theta}$$

ve $\dot{y}^*(\theta)$, $\dot{y}(\theta)$ 'nın kompleks eşleniği $\left(\dot{y}^*(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \bar{y}_k e^{ik\theta} \right)$ olsun. Bu durumda

$$y^* T_n[f] x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{y}^*(\theta) f(\theta) \dot{x}(\theta) d\theta \qquad (4.15)$$

olur ve buradan da

$$y^* x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{y}(\theta).\dot{x}(\theta).d\theta$$

yazılır. $f(\theta)$ reel değerli olduğunda bu formül ile birlikte $T_n[f]$'in öz değerleri

$$(\lambda_{n+1} \le \lambda_n \le ... \le \lambda_1) ,$$

$$m = \inf f(\theta) , \; M = \sup f(\theta) \tag{4.15}$$

olmak üzere

$$m \le \lambda_i \le M \tag{4.16}$$

şeklinde bir dağılıma sahiptir. [61].

Teorem 4.3.1. (Szegö Teoremi). $f(\theta) \in L_\infty[-\pi, \pi]$ reel değerli ve *m, M* değerleri (4.15) ile tanımlı olsun. $F(\lambda) \in C[m, M]$ (sürekli fonksiyonların cümlesi) olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} F(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(f(\theta)).d\theta$$

dır. Üstelik sabit bir $j \ge 2$ için , $n \to \infty$ iken

$$\lambda_i \to M \;\; , \;\; \lambda_{n+2-j} \to m$$

dır. [61,84,77].

Teorem 4.3.2. $f(\theta) \in L_\infty[-\pi, \pi]$ ve $T_n[f]$ nin singüler değerleri

$$0 \le \sigma_{n+1} \le \sigma_n \le ... \le \sigma_1$$

olsun. Kabul edelim ki ; $f_0(\theta)$ reel değerli ve $R_0(\theta)$'da $|R_0(\theta)| = 1$ şartı altında 2π periyotlu, sürekli periyodik bir fonksiyon olmak üzere

$$f(\theta) = f_0(\theta).R_0(\theta) \tag{4.17}$$

şeklinde yazılabilsin. Bu durumda $M = \sup|f(\theta)|$ ve $F(\lambda) \in C[0, M]$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} F(\sigma_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(|f(\theta)|).d\theta \tag{4.18}$$

dır. [61,77].

Lemma 4.3.1. A , $n \times n$ tipinde kompleks bir matris ve A matrisinin singüler değerleri de $0 \le \sigma_{n+1} \le \sigma_n \le ... \le \sigma_1$ olsun. Bu durumda ,

$$\sigma_k = \max_{\dim S = k} \min_{x \in S} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

dir. Burada S , $C^{n\times n}$ nin bir alt uzayıdır. [37,61].

Sonuç 4.3.1. σ_j $\left(j=1,2,...,n+1\right)$, $T_n\left[f\right]$ nin singüler değerleri ve $M=\sup\left|f\left(\theta\right)\right|$ olsun. Bu durumda

$$0\le\sigma_j\le M \tag{4.19}$$

dir. [61].

5.Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Matrislerinin Normları İçin Sınırlar

5.1. Cauchy-Toeplitz Matrislerinin Normları İçin Sınırlar

Teorem 5.1.1. [13]

$$T_n = \left[\frac{1}{g + (i-j)h} \right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklinde bir Cauchy-Toeplitz matrisi olsun. O zaman $s_n > 0$ ve $s_n = O(1/n)$ olmak üzere

$$\frac{\sqrt{n}\pi}{|h|} - s_n \le \|T_n\| \le \frac{\sqrt{n}\pi}{|h|}$$

dir.

İspat.

$$T_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{g} & \frac{1}{g-h} & \cdots & \frac{1}{g-(n-1)h} \\ \frac{1}{g+h} & \frac{1}{g} & \cdots & \frac{1}{g-(n-2)h} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{g+(n-1)h} & \frac{1}{g+(n-2)h} & \cdots & \frac{1}{g} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{g}{h}} & \frac{1}{\frac{g}{h}-1} & \cdots & \frac{1}{\frac{g}{h}-(n-1)} \\ \frac{1}{\frac{g}{h}+1} & \frac{1}{\frac{g}{h}} & \cdots & \frac{1}{\frac{g}{h}-(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\frac{g}{h}+(n-1)} & \frac{1}{\frac{g}{h}+(n-2)} & \cdots & \frac{1}{\frac{g}{h}} \end{bmatrix}$$

olduğu için $\|\cdot\|_E$ Euclide normu olmak üzere

$$\|T_n\|_E^2 = \frac{1}{h^2}\left[\frac{n}{\left(\frac{g}{h}\right)^2} + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\left(\frac{1}{\left(\frac{g}{h}+k\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{g}{h}-k\right)^2}\right)\right]$$

dir. Bu nedenle

$$\|T_n\|_E^2 = \frac{n}{h^2}\left[\frac{1}{\left(\frac{g}{h}\right)^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)}{n}\left(\frac{1}{\left(\frac{g}{h}+k\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{g}{h}-k\right)^2}\right)\right]$$

bulunur.

$$\frac{1}{\left(\frac{g}{h}\right)^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)}{n}\left(\frac{1}{\left(\frac{g}{h}+k\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{g}{h}-k\right)^2}\right) \le \pi^2$$

olduğu için

$$\|T_n\|_E \le \frac{\sqrt{n}\pi}{|h|}$$

elde edilir.

$\|T_n\|_E$ için bir alt sınır elde etmek için e_i , birim matrisinin *i*. sütununu belirtmek üzere

$$\|T_n e_i\|_E \le \|T_n\|_E$$

eşitsizliğini kullanacağız. $i = \lfloor n/2 \rfloor$ alınarak;

$$\|T_n e_i\|_E^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[g+(k-i)h]^2} \ ,$$

$$\|T_n e_i\|_E^2 = \frac{4}{h^2}\left(\sum_{k=0}^{i-\frac{g}{h}-\frac{3}{2}}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{n+\frac{g}{h}-\frac{1}{2}-1}\frac{1}{(2k+1)^2}\right)$$

elde edilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

olduğu için $n \to \infty$ için $\left\| T_n e_{[n/2]} \right\|_E^2 \to \frac{\pi^2}{h^2}$ sonucu elde edilir.

$$s_n = \frac{4}{h^2}\left(\sum_{k=\left[\frac{n}{2}-\frac{g}{h}-\frac{1}{2}\right]}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=\left[\frac{n}{2}-\frac{g}{h}-\frac{1}{2}\right]}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right)$$

olsun. $s_n \le \pi/|h|$ olduğu için

$$\frac{\sqrt{n}\pi}{|h|} - s_n \le \sqrt{\frac{n\pi^2}{h^2} - s_n} \le \|T_n\|_E$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.1.2. [13]

$$T_n = \left[\frac{1}{g + (i-j)h} \right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklinde bir Cauchy-Toeplitz matrisi olsun. Bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_n^{-1} \right\|_E = \infty \tag{5.1}$$

ve

$$\left\| T_n^{-1} \right\|_E = \frac{\sqrt{n}\pi}{|h|} O\left(\left(\frac{2g}{h} \right)^{n-1} \right)$$

dir.

İspat: $w = (1,...,1)^T$ olsun. $n \to \infty$ için $\frac{\left\| T_n^{-1} w \right\|_E}{\|w\|_E} \to \infty$ olduğunu göstermeliyiz.

u_m ; $U_n = köş(u_1, u_2, ..., u_n)$, $V_n = köş(v_1, v_2, ..., v_n)$ A_n düzgün bir Cauchy $(x_i \ne y_j)$ matrisi olmak üzere

$$A_n^{-1} = U_n A_n^T V_n \tag{5.2}$$

ve

$$A_n [u_1 ... u_n]^T = [1...1]^T \tag{5.3}$$

dir. u_m bu şekilde alınırsa,

$$T_n^{-1} w = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$$

elde edilir. $\frac{g}{2h} \ge 2$ kabul edelim. Gamma-fonksiyon teorisinden

$$\prod_{i=1}^{m-1}\left(\frac{g}{h}-i\right)=\frac{g^{m-1}}{h^{m-1}}\prod_{k=1}^{[g/2h]}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$$

ve

$$\prod_{i=1}^{m-1}\left(\frac{g}{h}+i\right)=\frac{g^{m-1}}{h^{m-1}}\prod_{k=1}^{[g/2h]}\left(1+\frac{1}{2k}\right)$$

bulunur. $u_l=\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{l-1}\left(1-\frac{1}{2i}\right)\prod_{i=1}^{n-l}\left(1+\frac{1}{2i}\right)$, $l=1,2,...,n$ ‘den

$$u_m=\frac{(-1)^{n-1}}{(m-1)!(n-m)!}gh^{n-1}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{g}{h}\right)^{n-1}+O\left(\frac{(g/h)^{n-1}}{[g/2h]}\right)+O\left(\frac{1}{[g/2h]^2}\right)\right]$$

elde edilir ki, bu

$$u_m^2=\frac{g^2h^{2n-2}}{[(m-1)!(n-m)!]^2}\left[\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{g}{h}\right)^{2n-2}+O\left(\frac{(g/h)^{2n-2}}{[g/2h]}\right)+O\left(\frac{(g/h)^n-1}{[g/2h]^2}\right)\right]$$

sonucunu doğurur. Böylece , C_1 ve C_2 pozitif sabitler olmak üzere

$$U_m^2\geq\frac{1}{[(m-1)!(n-m)!]^2}\left(\frac{4g^{2n}}{\pi^2}-C_1\frac{g^2n}{[g/2h]}-C_2\frac{g^n+1}{h^{n-1}[g/2h]}\right)\qquad(5.4)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.2) eşitsizliğinin her iki yanının *m* üzerinden toplamını alırsak

$$\sum_{m=1}^{n}U_m^2\geq\left(\frac{4g^{2n}}{\pi^2}-C_1\frac{g^2n}{[g/2h]}-C_2\frac{g^n+1}{h^{n-1}[g/2h]}\right)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{[(m-1)!(n-m)!]^2}$$

elde edilir. $h\leq 1$, $h\neq 0$ ve $\frac{g}{2h}\geq 2$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4g^{2n}}{\pi^2}-C_1\frac{g^2n}{[g/2h]}-C_2\frac{g^n+1}{h^{n-1}[g/2h]}\right)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{[(m-1)!(n-m)!]^2}\to\infty$$

dır. Bu nedenle

$$\frac{\left\|T_n^{-1}w\right\|_E}{\|w\|_E}\leq\left\|T_n^{-1}\right\|_E$$

dir ve böylece (5.1) ispatlanmış olur.

(5.2) ‘den

$$T_n^{-1}=U_nT_n^TV_n$$

yazılır. Buradan

$$\left\|T_n^{-1}\right\|_E=\left\|U_nT_n^TV_n\right\|_E\leq\|U_n\|_E\left\|T_n^T\right\|\|V_n\|_E\qquad(5.5)$$

dir. Aynı zamanda Teorem 5.1.1.'den

$$\left\|T_n^{-1}\right\|_E \le \frac{\sqrt{n}\pi}{|h|}\left\|U_n\right\|_E\left\|V_n\right\|_E \tag{5.6}$$

eşitsizliği elde edilir.. u_m ve v_k tanımlarından

$$\left\|U_n\right\|_E = O\left(\left(\frac{2g}{h}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right),\ \left\|V_n\right\|_E = O\left(\left(\frac{2g}{h}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right) \tag{5.7}$$

bulunur. (5.7)'deki değerleri (5.6)'de yerlerine koyarsak

$$\left\|T_n^{-1}\right\|_E = \frac{\sqrt{n}\pi}{|h|}O\left(\left(\frac{2g}{h}\right)^{n-1}\right)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.1.3. [73] $0 < a < 1$, $1 < b \in Z^+$ ve $a/b \notin Z$ olmak üzere $T_n = \left[\frac{1}{a+(k-j)b}\right]_{k,j=1}^{n}$ ile tanımlı Cauchy-Toeplitz matrisinin spektral normu için

$$\frac{9\pi}{10\left|b\sin\left(\frac{\pi a}{b}\right)\right|} \le \left\|T_n\right\|_2 \le \frac{\pi}{\left|\sin(\pi a)\right|} \tag{5.8}$$

alt ve üst sınırları geçerlidir.

İspat: Euclid norm tanımından ,

$$\left\|T_n\right\|_E^2 = \left\{n\frac{1}{a^2} + \sum_{s=1}^{n-1}(n-s)\left(\frac{1}{(a-sb)^2} + \frac{1}{(a+sb)^2}\right)\right\} \tag{5.9}$$

yazılır. Burada sağ toplam ifadelerini polygamma fonksiyonuna bağlı olarak ifade edersek,

$$\left\|T_n\right\|_E^2 = \left\{\begin{array}{l} n\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\Psi\left(n-\frac{a}{b}\right) + \frac{(a-bn)}{b^3}\Psi\left(1,n-\frac{a}{b}\right) - \frac{1}{b^2}\Psi\left(n+\frac{a}{b}\right) - \frac{(a+bn)}{b^3}\Psi\left(1,n+\frac{a}{b}\right) \\ \\ +\frac{1}{b^2}\Psi\left(1-\frac{a}{b}\right) - \frac{(a-bn)}{b^3}\Psi\left(1,1-\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{b^2}\Psi\left(1+\frac{a}{b}\right) + \frac{(a+bn)}{b^3}\Psi\left(1,1+\frac{a}{b}\right) \end{array}\right\}$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanını n ile böler ve sağ tarafın $n \to \infty$ için limitini polygamma fonksiyonun özelliklerinden faydalanarak alırsak,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{a^2}+\sum_{s=1}^{n-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)\left(\frac{1}{(a-sb)^2}+\frac{1}{(a+sb)^2}\right)\right\}=\frac{\pi^2}{b^2\sin^2\left(\frac{\pi a}{b}\right)}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$\frac{1}{n}\|T_n\|_E^2\to\frac{\pi^2}{b^2\sin^2\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \tag{5.10}$$

yazılır. (5.10) ifadesinin karekökünü alırsak

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|T_n\|_E\to\frac{\pi}{\left|b\sin\left(\frac{\pi a}{b}\right)\right|} \tag{5.11}$$

olur. Bu eşitsizlik $n\to\infty$ için limit durumunda elde edildiğinden, *n*'nin küçük değerleri için (5.11)'in sağ tarafındaki değer $\|T_n\|_2$ değerini çok az geçmektedir. Bunun için (5.11) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifadeyi 9/10 gibi bir katsayı ile çarpmak bu sıkıntıyı giderecektir. O halde $\frac{1}{\sqrt{r}}\|A\|_E\le\|A\|_2\le\|A\|_E$ den

$$\frac{9\pi}{10\left|b\sin\left(\frac{\pi a}{b}\right)\right|}\le\|T_n\|_2 \tag{5.12}$$

yazılır. Diğer taraftan t_m , T_n matrisinin elemanlarını temsil etmek üzere

$$t_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-imx}dx\qquad(m=0,\mp1,\mp2,...,\mp(n-1)) \tag{5.13}$$

olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu bulmalıyız. O halde (4.10) ve (4.11) den

$$t_m=\frac{1}{a+mb}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}c(m)e^{(a+mb)ix}e^{-mix}dx \tag{5.14}$$

yazılır. Burada $c(m)$, *m*'nin bir fonksiyonudur. $A=a+mb$ alırsak (5.14) den

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}c(m)e^{iAx}e^{-mix}dx=\frac{c(m)}{2\pi i(A-m)}e^{i(A-m)x}\Big|_{-\pi}^{\pi},$$

$$=\frac{c(m)}{2\pi i(A-m)}2i\sin[(A-m)\pi]$$

yazılır. Buradan

$$c(m)=\frac{\pi(A-m)}{A\sin[(A-m)\pi]}$$

bulunur ve bu değeri $f(x)$ fonksiyonunda yerine yazarsak ,

$$f(x)=\frac{\pi(A-m)}{A\sin[(A-m)\pi]}e^{Aix}$$

olur. Bu durumda (4.17) den

$$f_1(x)=\frac{\pi(A-m)}{A\sin[(A-m)\pi]}=\frac{\pi(a+m(b-1))}{(a+mb)\sin[((a+m(b-1))\pi)]}$$

elde edilir. Burada *a, b* ve *m* değerleri için daima

$$0<\left|\frac{a+m(b-1)}{a+mb}\right|\le 1 \text{ ve} \left|\sin[(a+m(b-1))\pi]\right|=\left|\sin(a\pi)\right|$$

olduğundan

$$\left|\frac{\pi(a+m(b-1))}{(a+mb)\sin[((a+m(b-1))\pi)]}\right|\le\frac{\pi}{\left|\sin(a\pi)\right|}$$

eşitsizliğini elde ederiz. O halde

$$\left|f(x)\right|=\left|f_1(x)\right|\le\frac{\pi}{\left|\sin(a\pi)\right|} \tag{5.15}$$

olur ve (4.19) eşitsizliğinden de

$$\left\|T_n\right\|_2\le\frac{\pi}{\left|\sin(\pi a)\right|} \tag{5.16}$$

elde edilir. Böylece (5.12) ve (5.16) den teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 5.1.4. [10,14,30] $0<g/h<1$ ve $(1\le p<\infty)$ olmak üzere

$T_n=\left[\frac{1}{g+(i-j)h}\right]_{i,j=1}^{n}$ Cauchy-Toeplitz matrisinin ℓ_p normu için alt ve üst sınırlar

$$\left\|T_n\right\|_p\ge\frac{1}{|h|}\begin{cases}\left[-\left(\frac{h}{g}\right)^p+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p}, p \quad tek \quad ise\\ \left[\left(\frac{h}{g}\right)^p+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p}, p \quad çift \quad ise\end{cases}$$

$$\|T_n\|_p \le \frac{1}{|h|}\begin{cases}\left[-\left(\frac{h}{g}\right)^p+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta\left(p,\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p}, & p \quad tek \quad ise\\ \left[\left(\frac{h}{g}\right)^p+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta\left(p,\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p}, & p \quad çift \quad ise\end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: T_n matrisinin ℓ_p normunu alırsak

$$\|T_n\|_p = \left\{\begin{array}{l} n\frac{1}{g}+\frac{n-1}{|g-h|^p}+\frac{n-2}{|g-2h|^p}+\frac{n-3}{|g-3h|^p}+\ldots+\frac{1}{|g-(n-1)h|^p} \\ +\frac{n-1}{|g+h|^p}+\frac{n-2}{|g+2h|^p}+\frac{n-3}{|g+3h|^p}+\ldots+\frac{1}{|g+(n-1)h|^p}\end{array}\right\}^{1/p}$$

elde ederiz. Bunu da toplam sembolü ile gösterirsek

$$\|T_n\|_p^p = \left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{|g-kh|^p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{|g+kh|^p}\right\}$$

olur. Bu toplamı

$$\|T_n\|_p^p = \left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{|g-kh|^p}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{|g-kh|^p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{|g+kh|^p}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{|g+kh|^p}\right\}$$

$$\|T_n\|_p^p = n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{|g-kh|^p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{|g+kh|^p}\right)-\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{|g-kh|^p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{|g+kh|^p}\right)$$

şeklinde ayırabiliriz. Bu ifadenin sağ tarafını *h* parantezine alırsak

$$\|T_n\|_p = \frac{1}{|h|}\left\{n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}-k\right|^p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}+k\right|^p}\right)-\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{\left|\frac{g}{h}-k\right|^p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{\left|\frac{g}{h}+k\right|^p}\right)\right\}^{1/p} \qquad (5.17)$$

olur. (5.17) ifadesinin her iki yanını n^{-p} ile çarparsak

$$\frac{1}{n^p}\|T_n\|_p = \frac{1}{|h|^p}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}-k\right|^p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}+k\right|^p}\right)-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{\left|\frac{g}{h}-k\right|^p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{\left|\frac{g}{h}+k\right|^p}\right)\right\}^{1/p} \qquad (5.18)$$

elde ederiz. (5.18)'nın sağ tarafındaki $1/n$'li ifadesinin $n \to \infty$ için limiti alınırsa, ifade sıfır olur. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\left| \frac{g}{h} - k \right|^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{\left| \frac{g}{h} + k \right|^p} \right) = 0 \tag{5.19}$$

olur. $0 < g/h < 1$ olduğundan diğer toplamlar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left| k - \frac{g}{h} \right|^p} = \left| \frac{-h}{g} \right|^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k - \frac{g}{h} \right)^p}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left| k + \frac{g}{h} \right|^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k + \frac{g}{h} \right)^p} \tag{5.20}$$

olarak yazılabilir. Riemann –Zeta(veya Hurwitz-Zeta) fonksiyonu tanımından

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k - \frac{g}{h} \right)^p} \le \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) \tag{5.21}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k + \frac{g}{h} \right)^p} \le \zeta\left(p, \frac{g}{h} \right) \tag{5.22}$$

olur. O halde (5.19), (5.21) ve (5.22) ifadelerinden

$$n^{-1/p} \left\| T_n \right\|_p \le \frac{1}{|h|} \left(\left| -\frac{h}{g} \right|^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h} \right) \right)^{1/p}$$

elde edilir. Bu da istenen üst sınırdır.

Alt sınırı bulmak için (5.20)'deki ilk iki toplamdan ikincisi ihmal edilirse

$$\frac{1}{|h|} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(k - \frac{g}{h} \right)^p} \right)^{1/p} \le n^{-1/p} \left\| T_n \right\|_p$$

elde edilir. (5.17)'den

$$\frac{1}{|h|}\left(\left(-\frac{h}{g}\right)^{p}+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)\right)^{1/p}\le n^{-1/p}\|T_n\|_p$$

bulunur. Böylece alt sınırı da tayin etmiş oluruz.

Bu alt ve üst sınırları p'ye göre irdelersek,

$$\|T_n\|_p \ge \frac{1}{|h|}\begin{cases}\left[-\left(\frac{h}{g}\right)^{p}+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p}, & p \quad tek \quad ise\\ \left[\left(\frac{h}{g}\right)^{p}+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p}, & p \quad çift \quad ise\end{cases}$$

$$\|T_n\|_p \le \frac{1}{|h|}\begin{cases}\left[-\left(\frac{h}{g}\right)^{p}+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta\left(p,\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p}, & p \quad tek \quad ise\\ \left[\left(\frac{h}{g}\right)^{p}+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta\left(p,\frac{g}{h}\right)\right]^{1/p}, & p \quad çift \quad ise\end{cases}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.5. [84] Herhangi bir n için $\alpha_n > 0$, $\alpha_n = O(1/n)$ ve T_n in $g = 1/2, h = 1$ özel durumu göz önüne alınırsa T_n matrisi

$T_n = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+(i-j)}\right]_{i,j=1}^{n}$ olmak üzere

$$\pi - \alpha_n \le \|T_n\|_2 \le \pi$$

dir.

İspat: Üst sınırın π olduğu C.Moler tarafından iddia edilmiş ve S.V. Parter tarafından ispanlanmıştır.[61]. Bunun için

$$\widetilde{T}_n = \begin{bmatrix} 0 & T_n^T \\ T_n & 0 \end{bmatrix}$$

simetrik matrisini göz önüne alalım. $\hat{T}_n$'i açık olarak yazacak olursak

$$\hat{T}_n = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & . & . & . \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & . & . & . \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & . & . & . \\ \frac{2}{3} & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

olur. Tek numaralı satırları imajiner i ile ve çift numaralı satırları imajiner $-i$ ile çarparak

$$\alpha_m = \begin{cases} 0 \quad , & m \quad \text{çift} \quad ise \\ i(2/m), & m \quad tek \quad ise \end{cases}$$

olacak şekilde

$$A = \left[\alpha_{i-j}\right]_{i,j=1}^{2n-1}$$

Hermityen Toeplitz matrisini elde ederiz. Yani,

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \le x < 0 \\ \pi, & 0 \le x \le \pi \end{cases} \tag{5.23}$$

olmak üzere

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$$

yazabiliriz.

$$w = \left[w_0 \ldots w_{2n-1}\right]^T$$

vektörü için

$$(Aw, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| w_0 + w_1 e^{ix} + \ldots + w_{2n-1} e^{i(2n-1)x} \right|^2 f(x) dx$$

ve

$$(w, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| w_0 + w_1 e^{ix} + \ldots + w_{2n-1} e^{i(2n-1)x} \right|^2 dx$$

elde edilir. (5.23)'deki $f(x)$'i kullanarak

$$\|T_n\|_2 = \|A\|_2 = \max_{w\neq 0}\left|\frac{(Aw,w)}{(w,w)}\right| \leq \pi$$

bulunur. $\|T_n\|_2$ için bir alt sınır elde etmek için e_j , birim matrisinin *j.* sütununu göstermek üzere

$$\|T_n e_j\|_2 \leq \|T_n\|_2$$

eşitsizliğini kullanalım. [a] , a'nın tam değerini göstermek üzere $j = \lceil n/2 \rceil$ için

$$\|T_n e_j\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(k-j+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= 4\left(\sum_{k=0}^{j-2}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{n-j}\frac{1}{(2k+1)^2}\right)$$

olur.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

olduğu için $n\to\infty$ için $\|T_n e_{[n/2]}\|_2^2 \to \pi^2$ olduğu görülür.

$$\alpha_n = 4\left(\sum_{k=\lceil n/2\rceil-1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=n-\lceil n/2\rceil+1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\right)$$

alınırsa $\alpha_n = O(1/n)$ ve $\alpha_n \leq \pi$ olacağından

$$\pi - \alpha_n \leq \sqrt{\pi^2 - \alpha_n} \leq \|T_n\|_2$$

olduğu görülür ki , bu da ispatı tamamlar.

α_n için daha iyi tahmin S.V. Parter tarafından Fourier açılımlarını kullanılarak elde edilmiştir.[61]

Teorem 5.1.6. [82] $1 < k \in Z - \{0\}$ olmak üzere $g = 1/k$, $h = 1$ alınarak elde edilen

$$T_n = \left[\frac{1}{\frac{1}{k}+(i-j)}\right]_{i,j=1}^{n}$$

biçimindeki *Cauchy-Toeplitz* matrisinin spektral normu

$$\|T_n\|_2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{k}}$$

dır.

İspat:

$$T_n = \left[\frac{1}{\frac{1}{k}+(i-j)}\right]_{i,j=1}^{n}$$

biçimindeki *Cauchy-Toeplitz* matrisini açık olarak yazarsak

$$T_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{k}} & \frac{1}{\frac{1}{k}-1} & \cdots & \frac{1}{\frac{1}{k}-(n-1)} \\ \frac{1}{\frac{1}{k}+1} & \frac{1}{\frac{1}{k}} & \cdots & \frac{1}{\frac{1}{k}-(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\frac{1}{k}+(n-1)} & \frac{1}{\frac{1}{k}+(n-2)} & \cdots & \frac{1}{\frac{1}{k}} \end{bmatrix}$$

olur. *Euclides normu* tanımından

$$\|T_n\|_E^2 = \left[\sum_{s=0}^{n-1}\frac{n-s}{\left(\frac{1}{k}-s\right)^2}+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{n-s}{\left(\frac{1}{k}+s\right)^2}\right] = \left.\begin{aligned} &\frac{(kn-1)\psi\left(1,n-\frac{1}{k}\right)}{k}-\psi\left(n-\frac{1}{k}\right) \\ &+\frac{(kn-1)\psi\left(1,-\frac{1}{k}\right)}{k}+\psi\left(-\frac{1}{k}\right)-\frac{(kn+1)\psi\left(1,n+\frac{1}{k}\right)}{k}-\psi\left(\frac{1}{k}+n\right)+ \\ &\frac{(kn+1)\psi\left(1,1+\frac{1}{k}\right)}{k}+\psi\left(1+\frac{1}{k}\right) \end{aligned}\right\} \quad (5.24)$$

bulunur. (5.24) ifadesinin her iki yanını n'e bölüp $n\to\infty$ için limitini alırsak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|T_n\|_E^2 = \pi^2 + \pi^2\cot^2\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafın karekökünü alırsak

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|T_n\|_E = \pi\sqrt{1+\cot^2\left(\frac{\pi}{k}\right)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{k}}$$

elde edilir.Matris normları arasındaki

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|T_n\|_E \le \|T_n\|_2$$

bağıntısından

$$\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{k}} \le \|T_n\|_2 \tag{5.25}$$

şeklinde bir alt sınır bulunur.

Üst sınır için

$$\alpha_s = \frac{1}{\frac{1}{k}+s} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-isx}dx \ , \ [\,k\in Z^+ \text{ ve } s = 0,\mp1,\mp2,...,\mp(n-1)\,]$$

olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu bulmalıyız. O halde

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c(s)e^{\left(\frac{1}{k}+s\right)ix}e^{-isx}dx = \frac{1}{\frac{1}{k}+s}$$

olacak şekilde bir $c(s)$ fonksiyonu değeri bulmalıyız. Bu eşitliğin sol tarafındaki integrali hesaplarsak

$$\alpha_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c(s)e^{\left(\frac{1}{k}+s\right)ix}e^{-isx}dx$$

$$= \frac{c(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{1}{k}ix}dx = \frac{c(s)}{2\pi}\frac{k}{i}\left(\cos\frac{\pi}{k}+i\sin\frac{\pi}{k}-\cos\frac{\pi}{k}+i\sin\frac{\pi}{k}\right)$$

$$= \frac{kc(s)}{2\pi i}2i\sin\frac{\pi}{k} = \frac{kc(s)}{\pi}\sin\frac{\pi}{k}$$

bulunur.

$$\alpha_s = \frac{1}{\frac{1}{k}+s}$$

olması için

$$c(s) = \frac{\pi}{\left(\frac{1}{k}+s\right)k\sin\frac{\pi}{k}}$$

olması gerekir. Buradan

$$f(x) = \frac{\pi}{\left(\frac{1}{k}+s\right)k\sin\frac{\pi}{k}}e^{-isx}$$

olur. $f(x)$ fonksiyonu , $f_1(x)$ reel değerli ve $|f_2(x)|=1$ olacak şekilde kompleks değerli $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarının çarpımı şeklinde düşünülürse;

$$. \; f_1(x) = \frac{\pi}{\left(\frac{1}{k}+s\right)k\sin\frac{\pi}{k}} \text{ ve } f_2(x) = e^{-isx}$$

olur. Her *s* için

$$\left|\frac{1}{k}+s\right| \geq \left|\frac{1}{k}\right|$$

olacağından

$$\frac{\pi}{\left|\left(\frac{1}{k}+s\right)k\sin\frac{\pi}{k}\right|} \leq \frac{\pi}{\left|\frac{1}{k}k\sin\frac{\pi}{k}\right|} \leq \frac{\pi}{\left|\sin\frac{\pi}{k}\right|}$$

olur. Buradan

$$\sup f_1(x) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{k}}$$

olur. O halde

$$\|T_n\|_2 \leq \sup f_1(x)$$

olduğundan

$$\|T_n\|_2 \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{k}} \tag{5.26}$$

elde edilir. (5.25) ve (5.26) eşitsizliklerinden

$$\|T_n\|_2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{k}}$$

bulunur ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.1.7. [24] $g = 1/2\,, h = 1$ alınarak elde edilen

$$T_n = \left[\frac{2}{1+2(i-j)}\right]_{i,j=1}^{n}$$

biçimindeki *Cauchy-Toeplitz* matrisinin ℓ_p normu için, $\zeta(p)$ $(p>1)$ *Riemann-Zeta* fonksiyonu olmak üzere

$$\left[\left(2^p-1\right)\zeta(p)\right]^{1/p} \le n^{-1/p}\|T_n\|_p \le 2^{1/p}\left[\left(2^p-1\right)\zeta(p)\right]^{1/p}$$

şeklinde bir alt ve üst sınır vardır.

İspat:

$$T_n = \left[\frac{2}{1+2(i-j)}\right]_{i,j=1}^{n}$$

matrisini açık olarak yazarsak

$$T_n = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{5} & \cdots & -\frac{2}{2n-3} \\ \frac{2}{3} & 2 & -2 & -\frac{2}{3} & \cdots & -\frac{2}{2n-5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & 2 & -2 & \cdots & -\frac{2}{2n-7} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{2}{2n-1} & \frac{2}{2n-3} & \frac{2}{2n-5} & \frac{2}{2n-7} & \cdots & 2 \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

elde ederiz. Şimdi (5.27)'nın ℓ_p normunu alırsak , e_i $(1 \le i \le n)$, $\Re^n$'in birim vektörü olmak üzere

$$\|A_n\|_p = \left[\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^p\right]^{1/P} = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left|a_{1i}\right|^p\|e_i\|^p + \left|a_{2i}\right|^p\|e_i\|^p + \ldots + \left|a_{ni}\right|^p\|e_i\|^p\right)\right]^{1/p} \tag{5.28}$$

yazabiliriz. (5.28) eşitliğini T_n matrisi için uygularsak , e_i $(1 \le i \le n)$ n-bileşenli birim vektör olduğundan normları 1 olup

$$\|T_n\|_p = \left[(2n-1)\left(\frac{2}{1}\right)^p + (2n-3)\left(\frac{2}{3}\right)^p + (2n-5)\left(\frac{2}{5}\right)^p + \ldots + 3\left(\frac{2}{2n-3}\right)^p + \left(\frac{2}{2n-1}\right)^p \right]^{1/p}$$

$$= \left[2^p \sum_{k=1}^{n} \frac{2n-2k+1}{(2k-1)^p} \right]^{1/p}$$

elde ederiz. Buradan ,

$$\|T_n\|_p = \left[2^{p+1} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^p} - 2^p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^{p-1}} \right]^{1/p}$$

$$\|T_n\|_p = \left[2^{p+1} n \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) - 2^p \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{p-1}} \right) \right]^{1/p}$$

bulunur. Bu ifadenin her iki tarafını $n^{-1/p}$ ile çarparsak

$$n^{-1/p} \|T_n\|_p = \left[2^{p+1} \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) - \frac{2^p}{n} \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{p-1}} \right) \right]^{1/p} \quad (5.29)$$

olur. (5.29)'da $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/p} \|T_n\|_p = \lim_{n\to\infty} \left[2^{p+1} \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) - \frac{2^p}{n} \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{p-1}} \right) \right]^{1/p}$$

elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \zeta(p) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p-1}} = 0 \quad (5.30)$$

olduğundan,

$$n^{-1/p} \|T_n\|_p \le \left[2^{p+1} \left(1 - \frac{1}{2p} \right) \zeta(p) \right]^{1/p}$$

$$= 2^{1/p} \left[\left(2^p - 1\right) \zeta(p) \right]^{1/p} \quad (5.31)$$

olur. Böylece üst sınır elde edilmiş olur.

Alt sınır için de (5.29) ifadesinden ;

$$\left[2^p \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) \right]^{1/p} \le \left[2^{p+1} \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) - \frac{2^p}{n} \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{p-1}} \right) \right]^{1/p}$$

olduğundan

$$n^{-1/p} \|T_n\|_p \ge \left[2^p \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) \right]^{1/p} \quad (5.32)$$

olur. (5.30) ve (5.32) eşitsizliklerinden ;

$$n^{-1/p}\|T_n\|_p \geq 2^{1/p}\left[\left(2^p-1\right)\zeta(p)\right]^{1/p} \tag{5.33}$$

elde edilir. Böylece (5.31) ve (5.33)'den teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.8. [30] $a<b$ ve $a,b\in\Re^+$ olmak üzere

$$T_n=\left[\frac{1}{a+(i-j)b}\right]_{i,j=1}^{n}$$

biçimindeki Cauchy-Toeplitz matrisi için

$$n^{-1/p}\|T_n\|_p \leq \left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{(p-1)!b^p}\left|\Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b}\right)+\Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b}\right)\right|\right]^{1/p} \tag{5.34}$$

$$n^{-1/p}\|T_n\|_p \geq \left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{2(b-a)^p}+\frac{1}{2(b+a)^p}\right]^{1/p}$$

biçiminde alt ve üst sınır vardır.

İspat:

$$T_n=\left[\frac{1}{a+(i-j)b}\right]_{i,j=1}^{n}$$

matrisini açık olarak yazarsak

$$T_n=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a-2b} & \frac{1}{a-3b} & \cdots & \frac{1}{a-(n-1)b} \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a-2b} & \cdots & \frac{1}{a-(n-2)b} \\ \frac{1}{a+2b} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a-b} & \cdots & \frac{1}{a-(n-3)b} \\ \frac{1}{a+2b} & \frac{1}{a+2b} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a} & \cdots & \frac{1}{a-(n-4)b} \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & \\ \frac{1}{a+(n-1)b} & \frac{1}{a+(n-2)b} & \frac{1}{a+(n-3)b} & \frac{1}{a+(n-4)b} & \cdots & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

matrisini elde ederiz. (5.35)'nin ℓ_p normunu hesaplarsak

$$\|T_n\|_p^p = \frac{n}{|a-b|^p} + (n-1)\frac{1}{|a-b|^p} + (n-2)\frac{1}{|a-2b|^p} + (n-3)\frac{1}{|a-3b|^p} + \ldots + \frac{1}{|a-(n-1)b|^p}$$

$$+ \ldots + (n-1)\frac{1}{|a+b|^p} + (n-2)\frac{1}{|a+2b|^p} + (n-3)\frac{1}{|a+3b|^p} + \ldots + \frac{1}{|a+(n-1)b|^p}$$

olur. Eşitliğin sağındaki toplamları , toplam sembolü olarak ifade edersek,

$$\|T_n\|_p = \left[\frac{n}{a^p} + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\left(\frac{1}{|kb-a|^p} + \frac{1}{|kb+a|^p}\right)\right]^{1/p}$$

elde ederiz. Bu ifade düzenlenirse,

$$\|T_n\|_p = \left[\frac{n}{a^p} + n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{|kb-a|^p} + \frac{1}{|kb+a|^p}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{|kb-a|^p} + \frac{1}{|kb+a|^p}\right)\right]^{1/p} \quad (5.36)$$

elde edilir. (5.36) ifadesinin her iki yanını $n^{-1/p}$ ile çarparsak

$$n^{-1/p}\|T_n\|_p = \left[\frac{1}{a^p} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{|kb-a|^p} + \frac{1}{|kb+a|^p}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\left(\frac{1}{|kb-a|^p} + \frac{1}{|kb+a|^p}\right)\right]^{1/p} \quad (5.37)$$

olur. (5.37) eşitliğindeki toplamları *Polygamma fonksiyonu* ile ifade edersek ,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{|kb-a|^p} + \frac{1}{|kb+a|^p}\right) =$$

$$\frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p}\left[-\psi\left(p-1, n-\frac{a}{b}\right) - \psi\left(p-1, n+\frac{a}{b}\right) + \psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right)\right]$$

elde ederiz. Bu ifadenin $n \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{|kb-a|^p} + \frac{1}{|kb+a|^p}\right) = \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p}\left[\psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right)\right]$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\left(\frac{1}{|kb-a|^p} + \frac{1}{|kb+a|^p}\right) = 0$$

olur. Elde ettiğimiz bu sonuçları (5.37)'de yazarsak

$$n^{-1/p}\|T_n\|_p \le \left\{\frac{1}{a^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p}\left[\psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right)\right]\right\}^{1/p} \quad (5.38)$$

şeklinde üst sınırı elde etmiş oluruz.

$$n^{-1/p}\|T_n\|_p \geq \left\{\frac{1}{a^p}+\frac{1}{2(b-a)}+\frac{1}{2(b+a)}\right\}^{1/p}$$

dir. Ayrıca (5.37) eşitliğinin sağ tarafında $n=2$ alırsak ,

$$n^{-1/p}\|T_n\|_p \geq \left[\frac{1}{a^p}+\sum_{k=1}^{2-1}\left(\frac{1}{|kb-a|^p}+\frac{1}{|kb+a|^p}\right)-\sum_{k=1}^{2-1}\frac{k}{2}\left(\frac{1}{|kb-a|^p}+\frac{1}{|kb+a|^p}\right)\right]^{1/p}$$

olur. Bu eşitsizliği düzenlersek

$$n^{-1/p}\|T_n\|_p \geq \left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{2(b-a)^p}+\frac{1}{2(b+a)^p}\right]^{1/p} \qquad (5.39)$$

elde edilir. Böylece (5.38) ve (5.39)'den teoremin ispatı tamamlanmış olur.

5.2. Cauchy-Hankel Matrislerinin Normları İçin Sınırlar

Teorem 5.2.1. [73,82] $0 < a \notin Z$ ve $b \in Z^+$ olmak üzere

$$H_n = \left[\frac{1}{a+(k+j)b}\right]_{k,j=1}^{n}$$

ile tanımlı *Cauchy-Hankel* matrisinin spektral ve Euclidean normları için

$$\|H_n\|_E \to \infty \ , \ \|H_n\|_2 \leq \frac{\pi}{|\sin(a\pi)|} \qquad (5.40)$$

sınırları geçerlidir.

İspat: Euclidean norm tanımından ,

$$\|H_n\|_E^2 = \left\{\sum_{s=1}^{n}\frac{s}{(a+(s+1)b)^2}+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{n-s}{(a+(s+1)b)^2}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\frac{(a+b)}{b^3}\psi\left(1,n+1+\frac{a+b}{b}\right)+\frac{1}{b^2}\psi\left(n+1+\frac{a+b}{b}\right)-\frac{(a+b)}{b^3}\psi\left(1,1+\frac{a+b}{b}\right)\\ -\frac{1}{b^2}\psi\left(1+\frac{a+b}{b}\right)-\frac{(2nb+a+b)}{b^3}\psi\left(1,n+1+\frac{a+nb+b}{b}\right)--\frac{1}{b^2}\psi\left(n+1+\frac{a+nb+b}{b}\right)\\ +\frac{(2nb+a+b)}{b^3}\psi\left(1,1+\frac{a+nb+b}{b}\right)+\frac{1}{b^2}\psi\left(1+\frac{a+nb+b}{b}\right)\end{array}\right\}$$

yazılır. $a \in Z^+$,b herhangi bir sayı $n \in Z^+$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\Psi(a,n+b)=0$$

den

$$\lim_{n\to\infty}\Psi(n+1+\frac{a+b}{b})=\infty$$

olacağından

$$\|H_n\|_E \to \infty \tag{5.41}$$

elde edilir. Teoremin diğer iddiasını ispat etmek için öncelikle h_s , H_n matrisinin elemanları olmak üzere

$$h_s=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-isx}dx \qquad (s=2,3,...,2n)$$

olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu bulmalıyız. Bu durumda (4.13) ve (4.14) ile

$$h_s=\frac{1}{a+b(k+j)}=\frac{1}{a+sb}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c(s)e^{(a+sb)ix}e^{-isx}dx$$

yazılır. Burada *c*, *s*'nin bir fonksiyonudur. Bu eşitlikte $B=a+b(k+j)$ dersek

$$\frac{1}{B}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c(s)e^{iBx}e^{-isx}dx=\frac{c(s)}{2\pi i(B-s)}e^{i(B-s)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{c(s)}{2\pi i(B-s)}2i\sin[(B-s)\pi] \tag{5.42}$$

elde edilir. Buradan

$$c(s)=\frac{\pi(B-s)}{B\sin[(B-s)\pi]}$$

ifadesini $f(x)$ fonksiyonunda yerine yazarsak ,

$$f(x)=\frac{\pi(B-s)}{B\sin[(B-s)\pi]}e^{Bix}$$

olur. (4.17) den

$$f_1(x)=\frac{\pi(B-s)}{B\sin[(B-s)\pi]}=\frac{\pi(a+s(b-1))}{(a+sb)\sin[((a+s(b-1))\pi)]}$$

yazarız. Burada *a, b* ve *s* değerleri için daima

$$0<\left|\frac{a+s(b-1)}{a+sb}\right|\le 1 \text{ ve } |\sin[(a+s(b-1))\pi]=|\sin(a\pi)|$$

olduğundan

$$|f(x)| = |f_1(x)| = \left| \frac{\pi(a + s(b-1))}{(a+sb)\sin[((a+s(b-1))\pi)]} \right| \leq \frac{\pi}{|\sin(a\pi)|}$$

elde ederiz. Sonuç olarak (4.19) den

$$\|H_n\|_2 \leq \frac{\pi}{|\sin(a\pi)|} \tag{5.43}$$

yazarız. Böylece (5.41) ve (5.43) ispatı tamamlar.

Teorem 5.2.2. [82] $g = \frac{1}{k}, k \in Z^+$ ve $h = 1$ alınarak elde edilen

$$H_n = \left[\frac{1}{\frac{1}{k} + (i+j)} \right]_{k,j=1}^{n}$$

Cauchy-Hankel matrisinin spektral normu için

$$\|H_n\|_2 \leq \frac{2\pi}{k \sin\frac{\pi}{k}}$$

üst sınır geçerlidir.

İspat: H_n matrisini açık olarak yazarsak

$$H_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{k}+2} & \frac{1}{\frac{1}{k}+3} & \cdots & \frac{1}{\frac{1}{k}+(n+1)} \\ \frac{1}{\frac{1}{k}+3} & \frac{1}{\frac{1}{k}+4} & \cdots & \frac{1}{\frac{1}{k}+(n+2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\frac{1}{k}+(n+1)} & \frac{1}{\frac{1}{k}+(n+2)} & \cdots & \frac{1}{\frac{1}{k}+2n} \end{bmatrix}$$

olur. Üst sınır için

$$h_s = \frac{1}{\frac{1}{k}+s} \quad (s = 2,3,4,...,2n)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{\frac{1}{k}+s}$$

olacak şekilde bir $g(x)$ fonksiyonu bulmalıyız. Buradan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c(s)e^{\left(\frac{1}{k}+s\right)ix}e^{-isx}dx = \frac{1}{\frac{1}{k}+s}$$

eşitliğini sağlayan $c(s)$ fonksiyonu bulalım.

$$\frac{c(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\left(\frac{1}{k}+s\right)ix}e^{-isx}dx = \frac{c(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{ix}{k}}dx = \frac{c(s)}{2\pi}\frac{k}{i}e^{\frac{ix}{k}}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{c(s)}{2\pi}\frac{k}{i}\left(e^{\frac{\pi i}{k}} - e^{-\frac{\pi i}{k}}\right)$$

$$= \frac{c(s)}{2\pi}\frac{k}{i}\left(\cos\frac{\pi}{k} + i\sin\frac{\pi}{k} - \cos\frac{\pi}{k} + i\sin\frac{\pi}{k}\right)$$

$$= \frac{kc(s)}{2\pi i}2i\sin\frac{\pi}{k} = \frac{kc(s)}{\pi}\sin\frac{\pi}{k}$$

bulunur ve buradan yukarıdaki eşitliği sağlayan $c(s)$ fonksiyonu

$$c(s) = \frac{\pi}{k\left(\frac{1}{k}+s\right)\sin\frac{\pi}{k}}$$

elde edilir ve $c(s)$ fonksiyonuna bağlı olarak da

$$g(x) = \frac{\pi}{k\left(\frac{1}{k}+s\right)\sin\frac{\pi}{k}}e^{\left(\frac{1}{k}+s\right)ix}$$

bulunur. $g(x)$ fonksiyonunu, $g_0(x)$ reel değerli ve $|g_1(x)| = 1$ olacak şekilde kompleks değerli $g_0(x)$ ve $g_1(x)$ iki fonksiyonun çarpımı olarak yazılırsa;

$$g_0(x) = \frac{\pi}{k\left(\frac{1}{k}+s\right)\sin\frac{\pi}{k}}$$

ve

$$g_1(x) = e^{\left(\frac{1}{k}+s\right)ix}$$

bulunur. O halde

$$|g_1(x)| = 1$$

olduğundan yalnız

$$g_0(x) = \frac{\pi}{k\left(\frac{1}{k} + s\right)\sin\frac{\pi}{k}}$$

fonksiyonunu maksimum yapan değeri bulmamız yeterli olacaktır. O halde

$$|1 + sk| > \left|\frac{k}{2}\right| \Rightarrow \frac{1}{|1 + sk|} < \frac{1}{\frac{k}{2}} = \frac{2}{k}$$

bulunur. Buna bağlı olarak da

$$|g_0(x)| \le \frac{2\pi}{k\sin\frac{\pi}{k}}$$

elde edilir. $\|H_n\|_2 \le \sup g_0(x)$ olduğundan

$$\|H_n\|_2 \le \frac{2\pi}{k\sin\frac{\pi}{k}}$$

bulunur ki, bu da istenendir.

Teorem 5.2.3. [30,32]

$H_n = \left[\frac{1}{g + (i+j)h}\right]_{k,j=1}^{n}$ matrisinde $g = \frac{1}{2}$ ve $h = 1$ alındığında

$$H_n = \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + (i+j)}\right]_{k,j=1}^{n}$$

biçimindeki *Cauchy-Hankel* matrisinin ℓ_p normu için, $\zeta(p)$ $(p > 1)$ *Riemann-Zeta* fonksiyonu olmak üzere

$$\|H_n\|_p \le \left[1 + \left(2^{p-1} - 1\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-1} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p) - \ln 2\right]^{1/p}$$

$$\|H_n\|_p \ge \left[\left(2^{p-2} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4}\right)\zeta(p)\right]^{1/p}$$

olacak şekilde alt ve üst sınır vardır.

İspat: ℓ_p normu tanımından

$$\|H_n\|_p = \left[2^p \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k+1)^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{(2n+2k+1)^p} \right) \right]^{1/p}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2k+1)^p} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{(2n+2k+1)^p} \right) \right]^{1/p} \quad (5.44)$$

olur. (5.44)'deki toplamları Polygamma fonksiyonu cinsinden ifade edersek ,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2k+1)^p} \right) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{(-1)^p}{2^{p-1}(p-2)!} \psi\left(p-2, n+\dfrac{3}{2} \right) + \left(1 - \dfrac{1}{2^{p-1}} \right) \zeta(p-1) \\ \\ + \dfrac{(-1)^p}{2^p (p-1)!} \psi\left(p-1, n+\dfrac{3}{2} \right) + \left(1 - \dfrac{1}{2^p} \right) \zeta(p) \end{array} \right]$$

elde ederiz. Bu ifadenin $n \to \infty$ için limitini alırsak,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2k+1)^p} \right) = \left[\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right) \zeta(p-1) - \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) \zeta(p) \right] \quad (5.45)$$

olur.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{(2n+2k+1)^p} = 0 \ , \ (p > 2)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{(2n+2k+1)^2} = \frac{1}{4}(1 - \ln 2) \quad (5.46)$$

olduğu için (5.45) ve (5.46)'dan

$$\|H_n\|_p \le \left[1 + \left(2^{p-1} - 1 \right) \zeta(p-1) - \left(2^{p-1} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p) - \ln 2 \right]^{1/p} \quad (5.47)$$

üst sınır bulunur. (5.44) ifadesinden

$$\|H_n\|_p \ge \left[2^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k+1)^p} \right) \right]^{1/p}$$

$$= \left[2^{p-2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2k+1)^p} \right) \right]^{1/p}$$

ve (5.45)'den

$$\|H_n\|_p \geq \left[\left(2^{p-2}-\frac{1}{2}\right)\zeta(p-1)-\left(2^{p-2}-\frac{1}{4}\right)\zeta(p)\right]^{1/p} \tag{5.48}$$

alt sınır bulunur. Böylece (5.47) ve (5.48) eşitsizlikleri ispatı tamamlar.

Teorem 5.2.4. [30,32] $c<d$ ve $c,d\in R^+$ olmak üzere

$$H_n=\left[\frac{1}{c-(i+j)d}\right]_{k,j=1}^{n}$$

matrisinin ℓ_p normu için;

$$\|H_n\|_p \leq \frac{1}{d}\left[\frac{1}{(p-2)!}\left|\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,2-\frac{c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,2-\frac{c}{d}\right)\right|\right]^{1/p} \quad (p>2)$$

$$\|H_n\|_p \geq \left[\frac{1}{(2d-c)^p}+\frac{1}{(3d-c)^p}+\frac{1}{(4d-c)^p}\right]^{1/p} \quad (p>2)$$

alt ve üst sınırları geçerlidir.

İspat: H_n matrisini açık olarak yazarsak,

$$H_n=\begin{bmatrix} \frac{1}{c-2d} & \frac{1}{c-3d} & \cdots & \frac{1}{c-(n+1)d} \\ \frac{1}{c-3d} & \frac{1}{c-4d} & \cdots & \frac{1}{c-(n+2)d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{c-(n+1)d} & \frac{1}{c-(n+2)d} & \cdots & \frac{1}{c-2nd} \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

matrisini elde ederiz. ℓ_p normu tanımından

$$\|H_n\|_p^p=\frac{1}{|c-2d|^p}+\frac{2}{|c-3d|^p}+\frac{3}{|c-4d|^p}+\frac{4}{|c-5d|^p}+\ldots+\frac{n}{|c-(n+1)d|^p}$$

$$+\ldots+\frac{n-1}{|c-(n+2)d|^p}+\frac{n-2}{|c-(n+3)d|^p}+\frac{n-3}{|c-(n+4)d|^p}+\ldots+\frac{1}{|c-2nd|^p}$$

olur. Eşitliğin sağındaki toplamları, toplam sembolü ile ifade edersek,

$$\|H_n\|_p=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{|(k+1)d-c|^p}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{|(n+k+1)d-c|^p}\right)\right]^{1/p} \tag{5.50}$$

olur. (5.50) ile verilen ifadedeki toplamları Polygamma fonksiyonu cinsinden yazarsak,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\left|(k+1)d-c\right|^{p}}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(-1)^{p}(c-d)}{(p-1)!d^{p+1}}\left[-\Psi\left(p-1,n+1+\dfrac{d-c}{d}\right)+\Psi\left(p-1,1+\dfrac{d-c}{d}\right)\right]\\ +\dfrac{(-1)^{p}}{(p-2)!d^{p}}\left[\Psi\left(p-2,n+1+\dfrac{d-c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,1+\dfrac{d-c}{d}\right)\right]\end{array}\right\}$$

elde ederiz. Son elde ettiğimiz ifadenin $n\to\infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\left|(k+1)d-c\right|^{p}}=\frac{(-1)^{p}}{(p-2)!d^{p}}\left[\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,1+\frac{d-c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,1+\frac{d-c}{d}\right)\right] \quad (5.51)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{\left|(n+k+1)d-c\right|^{p}}=0 \quad (5.52)$$

olur. (5.51)'deki bu değeri (5.50)'de yazarsak

$$\left\|H_{n}\right\|_{p}\le\left\{\frac{(-1)^{p}}{(p-2)!d^{p}}\left[\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,1+\frac{d-c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,1+\frac{d-c}{d}\right)\right]\right\}^{1/p}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği düzenlersek,

$$\left\|H_{n}\right\|_{p}\le\frac{1}{d}\left\{\frac{1}{(p-2)!}\left|\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,2-\frac{c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,2-\frac{c}{d}\right)\right|\right\}^{1/p} \quad (5.53)$$

üst sınır elde edilmiş olur.

Alt sınır için de (5.50) toplamının sağ tarafında $n=2$ alırsak,

$$\left\|H_{n}\right\|_{p}\ge\left[\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{k}{\left|(k+1)d-c\right|^{p}}\right)-\sum_{k=1}^{2-1}\left(\frac{2-k}{\left|(2+k+1)d-c\right|^{p}}\right)\right]^{1/p}$$

olur. Bu eşitsizliği düzenlersek

$$\left\|H_{n}\right\|_{p}\ge\left[\frac{1}{(2d-c)^{p}}+\frac{2}{(3d-c)^{p}}+\frac{3}{(4d-c)^{p}}\right]^{1/p} \quad (5.54)$$

elde edilir. Böylece (5.53) ve (5.54) 'den teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.5.[82]

$h\neq 0$, $g/h\notin Z$ olmak üzere

$$H_n = \left[\frac{1}{g+(i+j)h}\right]_{i,j=1}^{n}$$

biçimindeki *Cauchy-Hankel* matrisinde $(i+j) = k(\bmod n)$ yazılırsa

$$H_n = \left[\frac{1}{g+kh}\right]_{n\times n} \quad k = 0,1,2,...,n-1 \tag{5.55}$$

şeklini alır. (5.55)'deki *Cauchy-Hankel* matrisi için $2 \le p \le \infty$ ve $g,h \in R^+$ olmak üzere

$$n^{-1/p}\|H_n\|_p \le \left(\frac{(-1)^p}{(p-1)!h^p}\Psi(p-1,g/h)\right)^{1/p}$$

şeklinde bir üst sınır vardır.

İspat: H_n matrisi için

$$\frac{1}{n}\|H_n\|_p^p = \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{|g+(s-1)h|^p}$$

dir. Bu eşitliğin sağ tarafını değerlendirirsek

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{[g+(s-1)h]^p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!h^p}\left[\Psi(p-1,n+g/h)-\Psi(p-1,g/h)\right]$$

ifadesini elde ederiz. a$\in Z^+$,b herhangi bir sayı n$\in Z^+$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\Psi(a,n+b) = 0$$

den ve yukarıdaki eşitlikten

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{[g+(s-1)h]^p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!h^p}\Psi(p-1,g/h)$$

eşitliğini elde ederiz. Sonuç olarak

$$n^{-1/p}\|H_n\|_p \le \left(\frac{(-1)^p}{(p-1)!h^p}\Psi(p-1,g/h)\right)^{1/p}$$

dir.

Teorem 5.2.6. [82] (5.55) deki H_n matrisi için $h \in Z^+$, $g \in R^+ - Z^+$, $h > g$, $n > 1$ olmak üzere

$$\sqrt{\frac{1}{h^2}\psi(1,g/h)} \le \|H_n\|_2$$

alt sınırı vardır.

İspat: Euclidean norm tanımından

$$\frac{1}{n}\|H_n\|_E^2 = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{|g+(s-1)h|^2}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafını Polygamma fonksiyonu cinsinden yazarsak,

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{[g+(s-1)h]^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Psi(1, g/h) - \Psi(1, n+g/h)\right]$$

eşitliği yazılır. a$\in Z^+$,b herhangi bir sayı n$\in Z^+$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(a, n+b) = 0$$

den ve yukarıdaki eşitlikten

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{[g+(s-1)h]^2} = \frac{1}{h^2}\Psi(1, g/h)$$

dir. Buradan da

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|H_n\|_E = \sqrt{\frac{1}{h^2}\psi(1, g/h)}$$

dir. Matris normu özelliklerinden ,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|H_n\|_E \le \|H_n\|_2 \le \|H_n\|_E$$

eşitsizliğinden sonuç olarak

$$\sqrt{\frac{1}{h^2}\psi(1, g/h)} \le \|H_n\|_2$$

ifadesini elde ederiz ve ispat biter.

6. MATRİSLERİN HADAMARD ÇARPIMLARININ NORMLARI İÇİN SINIRLAR

6.1. Hadamard Çarpım İle Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Matrislerinin Normları İçin Sınırlar

Teorem 6.1.1. [83]

$$T_n = \left(\frac{2}{1+2(i-j)} \right)_{i,j=1}^{n}$$

matrisi için

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left\| T_n \right\|_2 \le \pi$$

dir.

İspat: $A = \left(\frac{1}{1+2(i-j)} \right)$ ve $B = (2)$ olmak üzere $T_n = A \circ B$ şeklinde yazarsak

Teorem 3.1.2'den

$$\left\| T_n \right\|_2 \le r_1(A) c_1(B)$$

yazabiliriz.

$$r_1(A) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|^2} = \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{[n/2]+1} \frac{1}{(2k-1)^2}} & , \quad n \quad tek \\ \sqrt{2\sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{(2k-1)^2}} & , \quad n \quad çift \end{cases} \tag{6.1}$$

ve

$$c_1(B) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| b_{ij} \right|^2} = 2\sqrt{n}$$

olur. (6.1)'deki toplamları hesaplarsak,

$$r_1(A)=\begin{cases}\sqrt{-\frac{1}{4}\psi\left(1,\frac{n}{2}\right)+\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{4}\psi\left(1,\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)} & , \quad n \quad tek \\ \sqrt{-\frac{1}{4}\psi\left(1,\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi^2}{4}} & , \quad n \quad çift\end{cases} \tag{6.2}$$

ve

$$c_1(B)=2\sqrt{n} \tag{6.3}$$

elde edilir. (6.2) ve (6.3)'den

$$\|T_n\|_2 \le r_1(A)c_1(B)=\begin{cases}\sqrt{n}\sqrt{-\psi\left(1,\frac{n}{2}\right)+\pi^2-\psi\left(1,\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)} & , \quad n \quad tek \\ \sqrt{n}\sqrt{-2\psi\left(1,\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)+\pi^2} & , \quad n \quad çift\end{cases} \tag{6.4}$$

bulunur. (6.4) eşitsizliğinin her iki yanını $\sqrt{n}$ ile bölüp sağ tarafından $n\to\infty$ için limitini alırsak ve (6.1)'i göz önüne alırsak

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|T_n\|_2 \le \pi$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.

Teorem 6.1.2. [83]

$$H_n=\left(\frac{2}{1-2(i+j)}\right)_{i,j=1}^{n}$$

matrisi için

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|H_n\|_2 \le \sqrt{\frac{\pi^2}{2}-4}$$

dir.

İspat: $A=(2)$ ve $B=\left(\frac{1}{1+2(i-j)}\right)$ olmak üzere $H_n=A\circ B$ şeklinde yazarsak

Teorem 3.1.2'den

$$\|H_n\|_2 \le r_1(A)c_1(B)$$

olacaktır.

$$r_1(A)=\max_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}=2\sqrt{n} \tag{6.5}$$

ve

$$c_1(B)=\max_j \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}} \tag{6.6}$$

olur. (6.6)'deki toplamın değeri

$$c_1(B)=\sqrt{\psi\left(1,n+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi^2}{8}-1}$$

olacaktır. Bu değerleri $\|H_n\|_2 \le r_1(A)c_1(B)$ eşitsizliğinde yerlerine yazarsak

$$\|H_n\|_2 \le \sqrt{4n\left(-\frac{1}{4}\psi\left(1,n+\frac{3}{2}\right)+\frac{\pi^2}{8}-1\right)}$$

ve buradan

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|H_n\|_2 \le \sqrt{4\left(-\frac{1}{4}\psi\left(1,n+\frac{3}{2}\right)+\frac{\pi^2}{8}-1\right)}$$

$$=\sqrt{-\psi\left(1,n+\frac{3}{2}\right)+\frac{\pi^2}{2}-4} \tag{6.7}$$

elde edilir.(6.7) eşitsizliğinin sağ tarafından $n\to\infty$ için limitini alınırsa

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|H_n\|_2 \le \sqrt{\frac{\pi^2}{2}-4}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.1.3. [83]

$$T=\left[\frac{1}{1/2+|i-j|}\right]_{i,j=1}^{n} \tag{6.8}$$

ve

$$H=\left[\frac{1}{1/2+(i+j)}\right]_{i,j=1}^{n} \tag{6.9}$$

matrisleri için

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|T_n\|_2 \le \sqrt{\pi^2-4}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\|H_n\|_2 \le \sqrt{\frac{\pi^2}{2}-\frac{40}{9}}$$

üst sınırları geçerlidir.

İspat: $A=[2]_{n\times n}$ ve $B=\left[\dfrac{1}{1+2|i-j|}\right]_{n\times n}$ seçersek $T=A\circ B$ olur. Teorem 3.1.2'den,

$$r_1(A)=\max_i\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=\sqrt{4n}$$

ve

$$c_1(B)=\max_j\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|^2}=\begin{cases}\sqrt{2\displaystyle\sum_{s=1}^{(n-1)/2}\frac{1}{(2s+1)^2}+1} & , \quad n \quad tek\\ \sqrt{\displaystyle\sum_{s=1}^{n/2+1}\frac{1}{(2s-1)^2}+\sum_{s=1}^{n/2-1}\frac{1}{(2s+1)^2}} & , \quad n \quad çift\end{cases} \tag{6.10}$$

elde ederiz. (6.10) eşitliğinin sağ tarafını hesaplarsak,

$$\sum_{s=1}^{(n-1)/2}\frac{1}{(2s+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-1-\frac{1}{4}\psi(1,n/2+1)\,, \tag{6.11}$$

$$\sum_{s=1}^{n/2+1}\frac{1}{(2s-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}\psi(1,(n+3)/2), \tag{6.12}$$

ve

$$\sum_{s=1}^{n/2-1}\frac{1}{(2s+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-1-\frac{1}{4}\psi(1,(n+1)/2)\,, \tag{6.13}$$

elde ederiz. Buradan

$$c_1(B)=\begin{cases}\sqrt{2\left[\dfrac{\pi^2}{8}-1-\dfrac{1}{4}\psi(1,n/2+1)\right]+1} & , \quad n \quad tek\\ \sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}-1-\dfrac{1}{4}[\psi(1,(n+3)/2)+\psi(1,(n+1)/2)]} & , \quad n \quad çift\end{cases}$$

olacaktır. $\|T_n\|_2\le r_1(A)c_1(B)$ olduğundan dolayı ,

$$\|T\|_2\le r_1(A)c_1(B)=\begin{cases}\sqrt{4n\left(2\left[\dfrac{\pi^2}{8}-1-\dfrac{1}{4}\psi(1,n/2+1)\right]+1\right)} & , \quad n \quad tek\\ \sqrt{4n\left(\dfrac{\pi^2}{4}-1-\dfrac{1}{4}[\psi(1,(n+3)/2)+\psi(1,(n+1)/2)]\right)} & , \quad n \quad çift\end{cases} \tag{6.14}$$

olur. Eğer (6.3) eşitsizliğinin her iki tarafını $\sqrt{n}$ ile bölersek , bu durumda

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|T\right\|_2 \leq \begin{cases} \sqrt{4\left(2\left[\frac{\pi^2}{8}-1-\frac{1}{4}\psi\left(1,n/2+1\right)\right]+1\right)} & , \quad n \quad tek \\ \sqrt{4\left(\frac{\pi^2}{4}-1-\frac{1}{4}\left[\psi\left(1,\left(n+3\right)/2\right)+\psi\left(1,\left(n+1\right)/2\right)\right]\right)} & , \quad n \quad çift \end{cases} \tag{6.15}$$

olur. (6.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifadenin $n \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|T_n\right\|_2 \leq \sqrt{\pi^2-4} \tag{6.16}$$

bulunur.

$A=\left[2\right]_{n\times n}$ ve $B=\left[\frac{1}{1+2\left(i+j\right)}\right]_{n\times n}$ seçersek $H = A \circ B$ olur. Teorem 3.1.2'den,

$$r_1\left(A\right)=\max_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}=\sqrt{4n}$$

ve

$$c_1\left(B\right)=\max_j \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2}=\sqrt{\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{\left(2s+3\right)^2}}=\sqrt{\frac{\pi^2}{8}-\frac{10}{9}-\frac{1}{4}\psi\left(1,n+5/2\right)} \tag{6.17}$$

olur. $\left\|H_n\right\|_2 \leq r_1\left(A\right)c_1\left(B\right)$ eşitsizliğinden,

$$\left\|H_n\right\|_2 \leq r_1\left(A\right)c_1\left(B\right)=\sqrt{4n\left[\frac{\pi^2}{8}-\frac{10}{9}-\frac{1}{4}\psi\left(1,n+5/2\right)\right]} \tag{6.18}$$

bulunur. Benzer şekilde, (6.18) eşitsizliğinin her iki yanı $\sqrt{n}$ ile bölünürse

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|H_n\right\|_2 \leq \sqrt{4\left[\frac{\pi^2}{8}-\frac{10}{9}-\frac{1}{4}\psi\left(1,n+5/2\right)\right]} \tag{6.19}$$

olur. (6.19)'deki eşitliğin sağ tarafının $n \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|H_n\right\|_2 \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{2}-\frac{40}{9}} \tag{6.20}$$

elde edilir. (6.16) ve (6.20)'den ispat tamamlanır.

Teorem 6.1.4. [83]

i)
$$T=\left[\frac{1}{1/2+|i-j|}\right]_{i,j=1}^{n}$$

matrisi olsun. Bu durumda $2 \le p < \infty$ olmak üzere

$$n^{-1/p}\|T\|_p \le \left[2\zeta(p)\left(2^p-1\right)-2^p\right]^{1/p},$$

ii)
$$H=\left[\frac{1}{1/2+(i+j)}\right]_{i,j=1}^{n}$$

matrisi için $3 \le p < \infty$ olmak üzere

$$\|H\|_p \le \left[2^P-\frac{3\left(2^p-1\right)}{2}\zeta(p)+\left(2^{p-1}-1\right)\zeta(p-1)\right]^{1/p}$$

üst sınırları geçerlidir.

İspat: i) ℓ_p normu tanımından T matrisini yazarsak

$$\|T\|_p^p = 2\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{2}{2s+1}\right)^p (n-s)+n2^p$$

$$= 2^p\left[2n\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{(2s+1)^p}-2\sum_{s=1}^{n-1}\frac{s}{(2s+1)^p}+n\right] \qquad (6.21)$$

olur. (6.21) eşitsizliğinin her iki tarafını n ile bölersek

$$\frac{1}{n}\|T\|_p^p = 2^p\left[2\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{(2s+1)^p}-\frac{2}{n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{s}{(2s+1)^p}+1\right]$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{s}{(2s+1)^p}\to 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{(2s+1)^p}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{s=1}^{2n-1}\frac{1}{s^p}-\frac{1}{2^p}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{s^p}-1\right)=\left[\zeta(p)\left(1-\frac{1}{2^p}\right)-1\right]$$

olduğu için

$$n^{-1}\|T\|_p^p \le 2^p\left\{2\left[\zeta(p)\left(1-\frac{1}{2^p}\right)-1\right]+1\right\}$$

olup

$$n^{-1/p}\|T\|_p \le \left[2\zeta(p)\left(2^p-1\right)-2^p\right]^{1/p}$$

elde edilir.

ii) ℓ_p normu tanımından H matrisini yazarsak

$$\|H\|_p^p = 2^p\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{s}{(2s+3)^p}+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{n-s}{(2s+2n+3)^p}\right]$$

olur.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{s}{(2s+3)^p} = 1-\frac{3\left(2^p-1\right)}{2^{p+1}}\zeta(p)+\frac{2^{p-1}-1}{2^p}\zeta(p-1)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{n-s}{(2s+2n+3)^p}\to 0$$

olduğundan dolayı

$$\|H\|_p^p \le \left[2^P-\frac{3\left(2^p-1\right)}{2}\zeta(p)+\left(2^{p-1}-1\right)\zeta(p-1)\right]$$

olur ki, bu da istenendir.

6.2. CAUCHY-TOEPLİTZ VE CAUCHY-HANKEL MATRİSLERİNİN HADAMARD ÇARPIMLARININ NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Teorem 6.2.1. [83]

$T_n = \left(\frac{2}{1+2(i-j)}\right)_{i,j=1}^{n}$ ve $H_n = \left(\frac{2}{1-2(i+j)}\right)_{i,j=1}^{n}$ matrisleri için

$$\left\|T_n \circ H_n\right\|_2 \le \sqrt{\frac{\pi^4}{2}-4\pi^2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Teorem 3.1.3'den $r_i(T_n) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|t_{ij}\right|^2}$, $c_i(H_n) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|h_{ij}\right|^2}$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(T_n \circ H_n) \le \sum_{i=1}^{k} r_i(T_n)c_i(H_n) \quad k=1,2,\ldots,n$$

olur. Bu eşitsizlik $k=1$ özel durumu için

$$\sigma_1(T_n \circ H_n) \le r_1(T_n) c_1(H_n) \tag{6.22}$$

eşitsizliğine dönüşür. Buradan,

$$r_1(T_n) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |t_{ij}|^2} = \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{4}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{[n/2]+1} \frac{4}{(2k-1)^2}} & , \quad n \quad tek \\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n/2} \frac{8}{(2k-1)^2}} & , \quad n \quad çift \end{cases} \tag{6.23}$$

ve

$$c_1(H_n) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |h_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(2k+1)^2}} \tag{6.24}$$

elde ederiz. Eğer (6.23) ve (6.24) ‘deki toplamlar hesaplanırsa

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{4}{(2k-1)^2}} = \sqrt{-\psi\left(1, \frac{n}{2}\right) + \frac{\pi^2}{2}},$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{[n/2]+1} \frac{4}{(2k-1)^2}} = \sqrt{-\psi\left(1, \left[\frac{n}{2}\right]+1\right) + \frac{\pi^2}{2}},$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n/2} \frac{8}{(2k-1)^2}} = \sqrt{-2\psi\left(1, \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) + \pi^2}$$

ve

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(2k+1)^2}} = \sqrt{-\psi\left(1, n+\frac{3}{2}\right) - 4 + \frac{\pi^2}{2}}$$

elde edilir. Böylece

$$r_1(T_n) = \begin{cases} \sqrt{-\psi\left(1, \frac{n}{2}\right) + \frac{\pi^2}{2} - \psi\left(1, \left[\frac{n}{2}\right]+1\right) + \frac{\pi^2}{2}} & , \quad n \quad tek \\ \sqrt{-2\psi\left(1, \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) + \pi^2} & , \quad n \quad çift \end{cases} \tag{6.25}$$

ve

$$c_1(H_n) = \sqrt{-\psi\left(1, n+\frac{3}{2}\right) - 4 + \frac{\pi^2}{2}} \tag{6.26}$$

olur. (6.25) ve (6.26)’deki eşitsizliklerin sağ taraflarının $n \to \infty$ için limitleri alınırsa

$$r_1(T_n)=\pi \ , \ c_1(H_n)=\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-4} \tag{6.27}$$

olarak elde edilir. (6.27)'de elde ettiğimiz değerleri (6.22) de yerine yazarsak,

$$\sigma_1(T_n \circ H_n) \le r_1(T_n)c_1(H_n) \le \pi\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-4}$$

olur. Aynı zamanda $\sigma_1(T_n \circ H_n) \le \|T_n \circ H_n\|_2$ olduğundan

$$\|T_n \circ H_n\|_2 \le \sqrt{\frac{\pi^4}{2}-4\pi^2}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 6.2.1. [83]

$T_n=\left(\frac{2}{1+2(i-j)}\right)_{i,j=1}^{n}$ ve $H_n=\left(\frac{2}{1-2(i+j)}\right)_{i,j=1}^{n}$ matrisleri için

$$n^{-1/p}\|T_n \circ H_n\|_p \le 2^{1/p}\left\{\left[\left(2^p-1\right)\zeta(p)\right]\left[1+\left(2^p-1\right)\zeta(p-1)-\left(2^{p-1}-1/2\right)\zeta(p)-\ln 2\right]\right\}^{1/p}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Teorem 5.1.7. ve 5.2.3.'den

$$n^{-1/p}\|T_n\|_p \le 2^{1/p}\left[\left(2^p-1\right)\zeta(p)\right]^{1/p} \tag{6.28}$$

ve

$$\|H_n\|_p \le \left[1+\left(2^{p-1}-1\right)\zeta(p-1)-\left(2^{p-1}-\frac{1}{2}\right)\zeta(p)-\ln 2\right]^{1/p} \tag{6.29}$$

olur.

$$\|T_n \circ H_n\|_p \le \|T_n\|_p\|H_n\|_p \tag{6.30}$$

olduğu için, (6.30)'deki eşitsizliğin her iki tarafını $n^{-1/p}$ ile çarparsak

$$n^{-1/p}\|T_n \circ H_n\|_p \le n^{-1/p}\|T_n\|_p\|H_n\|_p$$

olur. (6.28) ve (6.29)'den ,

$$n^{-1/p}\|T_n \circ H_n\|_p \le 2^{1/p}\left\{\left[\left(2^p-1\right)\zeta(p)\right]\left[1+\left(2^p-1\right)\zeta(p-1)-\left(2^{p-1}-1/2\right)\zeta(p)-\ln 2\right]\right\}^{1/p}$$

bulunur ve ispat biter.

Sonuç 6.2.2. [83]

$T=\left[\frac{1}{1/2+|i-j|}\right]_{i,j=1}^{n}$, $H=\left[\frac{1}{1/2+(i+j)}\right]_{i,j=1}^{n}$ matrisleri için

$$\left\|T_n \circ H_n\right\|_2 \le \sqrt{\left(\pi^2-4\right)\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{40}{9}\right)}$$

üst sınırı geçerlidir.

İspat: Maksimum satır uzunluğu normunun tanımından

$$r_1(T)=\max_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|t_{ij}|^2}=\begin{cases}\sqrt{4\left[2\sum_{s=1}^{(n-1)/2}\frac{1}{(2s+1)^2}+1\right]} & , \quad n \quad tek \\ \sqrt{4\left[\sum_{s=1}^{n/2+1}\frac{1}{(2s-1)^2}+\sum_{s=1}^{n/2-1}\frac{1}{(2s+1)^2}\right]} & , \quad n \quad çift\end{cases}$$

ve (6.11), (6.12), (6.13)'den

$$r_1(T)=\begin{cases}\sqrt{4\left[\frac{\pi^2}{4}-1-\frac{1}{4}\psi(1,n/2+1)\right]} & , \quad n \quad tek \\ \sqrt{4\left(\frac{\pi^2}{4}-1-\frac{1}{4}\left[\psi(1,(n+3)/2)+\psi(1,(n+1)/2)\right]\right)} & , \quad n \quad çift\end{cases} \tag{6.31}$$

olur. Benzer düşünce ile, maksimum sütun uzunluğu norm tanımı ve (6.17)'den

$$c_1(H)=\max_j \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|h_{ij}|^2}=\sqrt{\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{(2s+3)^2}}=\sqrt{\frac{\pi^2}{8}-\frac{10}{9}-\frac{1}{4}\psi(1,n+5/2)} \tag{6.32}$$

bulunur. $\left\|T\circ H\right\|_2 \le r_1(T)c_1(H)$ eşitsizliği, (6.31) ve (6.32)'den

$$\left\|T\circ H\right\|_2 \le \begin{cases}\sqrt{4\left[\frac{\pi^2}{4}-1-\frac{1}{4}\psi(1,n/2+1)\right]4\left[\frac{\pi^2}{8}-\frac{10}{9}-\frac{1}{4}\psi(1,n+5/2)\right]} & ,n \quad tek \\ \sqrt{4\left(\frac{\pi^2}{4}-1-\frac{1}{4}\left[\psi(1,(n+3)/2)+\psi(1,(n+1)/2)\right]\right)4\left[\frac{\pi^2}{8}-\frac{10}{9}-\frac{1}{4}\psi(1,n+5/2)\right]} & ,n \quad çift\end{cases}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki $n\to\infty$ için limitleri alınırsa

$$\left\|T_n \circ H_n\right\|_2 \le \sqrt{\left(\pi^2-4\right)\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{40}{9}\right)}$$

elde edilir. Bu da istenendir.

Sonuç 6.2.3. [83]

$T=\left[\frac{1}{1/2+|i-j|}\right]_{i,j=1}^{n}$, $H=\left[\frac{1}{1/2+(i+j)}\right]_{i,j=1}^{n}$ matrislerinin Hadamard çarpımı için

$$n^{-1/p}\|T\circ H\|_p \le \left[\left(2^P-\frac{3\left(2^p-1\right)}{2}\zeta(p)+\left(2^{p-1}-1\right)\zeta(p-1)\right)\left(2\zeta(p)\left(2^p-1\right)-2^p\right)\right]^{1/p}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $\|A\circ B\|\le\|A\|\|B\|$ eşitsizliğinden yararlanarak

$$n^{-1/p}\|T\circ H\|_p \le n^{-1/p}\|T\|_p\|H\|_p$$

yazabiliriz.

Teorem 6.1.4'deki(i-ii) istenen elde edilir.

Teorem 6.2.2. [30]

$T_n=\left(\frac{2}{1+2(i-j)}\right)_{i,j=1}^{n}$ ve $H_n=\left(\frac{2}{1-2(i+j)}\right)_{i,j=1}^{n}$ matrislerinin Hadamard çarpımlarının ℓ_p normu için

$$\|T_n\circ H_n\|_p \ge \left\{\frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{1}{2^p(p-1)!}\psi\left(p-1,\frac{1}{2}\right)-1\right]\psi\left(p-1,\frac{5}{4}\right)\right\}^{1/p}$$

ve

$$\|T_n\circ H_n\|_p \le \left\{\frac{1}{(p-1)!}\psi\left(p-1,\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{1}{2^p(p-1)!}\psi\left(p-1,\frac{1}{2}\right)-1\right]\psi\left(p-1,\frac{5}{4}\right)\right\}^{1/p}$$

alt ve üst sınırları vardır.

İspat: T_n ve H_n matrislerinin Hadamard çarpımını formüle edersek,

$$T_n \circ H_n = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{5} & \frac{4}{3.7} & \cdots & \frac{4}{(2n-3)(2n+1)} \\ -\frac{4}{3.5} & -\frac{4}{7} & \frac{4}{9} & \cdots & \frac{4}{(2n-5)(2n+3)} \\ -\frac{4}{5.7} & -\frac{4}{3.9} & -\frac{4}{11} & \cdots & \frac{4}{(2n-7)(2n+5)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{4}{(2n-1)(2n+1)} & -\frac{4}{(2n-3)(2n+3)} & -\frac{4}{(2n-5)(2n+5)} & \cdots & \frac{4}{(4n-1)} \end{bmatrix}$$

$$= 4\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3.7} & \cdots & \frac{1}{(2n-3)(2n+1)} \\ -\frac{1}{3.5} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \cdots & \frac{1}{(2n-5)(2n+3)} \\ -\frac{1}{5.7} & -\frac{1}{3.9} & -\frac{1}{11} & \cdots & \frac{1}{(2n-7)(2n+5)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} & -\frac{1}{(2n-3)(2n+3)} & -\frac{1}{(2n-5)(2n+5)} & \cdots & \frac{1}{(4n-1)} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

elde ederiz. (6.33) ifadesinin ℓ_p normu,

$$\|T_n \circ H_n\|_p = 4\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3^p}+\frac{1}{7^p}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{9^p}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)^p} \\ +\frac{1}{3^p 7^p}+\ldots+\frac{1}{(2n-3)^p(2n+1)^p}+\frac{1}{3^p 5^p}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^p(2n+1)^p} \end{array}\right\}^{1/p}$$

olur. Bu toplamlar, toplam sembolü ile ifade edilirse,

$$\|T_n \circ H_n\|_p = 4\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)^p}+\sum_{s=1}^{n-1}\left[\left(\frac{1}{(2s-1)^p}+\frac{1}{(2s+1)^p}\right)\sum_{k=1}^{n-s}\frac{1}{(4k+2s-1)^p}\right]\right\}^{1/p}$$

elde edilir. Bu eşitlikteki son toplamda $s=1$ alırsak, bu denklemin sağ tarafı büyür. Yani,

$$\|T_n \circ H_n\|_p \le 4\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)^p}+\sum_{s=1}^{n-1}\left[\left(\frac{1}{(2s-1)^p}+\frac{1}{(2s+1)^p}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(4k+1)^p}\right]\right\}^{1/p} \quad (6.34)$$

olacaktır. (6.34) eşitsizliği Polygamma fonksiyonu cinsinden ifade edilirse

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)^p} = \frac{1}{2^{2p}(p-1)!}\left[(-1)^{p-1}\psi\left(p-1,n+\frac{3}{4}\right)+(-1)^p\psi\left(p-1,\frac{3}{4}\right)\right],$$

$$\sum_{s=1}^{n-1}\left[\frac{1}{(2s-1)^p}+\frac{1}{(2s+1)^p}\right]=\frac{(-1)^{p-1}}{2^p(p-1)!}\left[\psi\left(p-1,n-\frac{1}{2}\right)+\psi\left(p-1,n+\frac{1}{2}\right)+\psi\left(p-1,\frac{1}{2}\right)-1\right]$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(4k+1)^p}=\frac{1}{2^{2p}(p-1)!}\left[(-1)^{p-1}\psi\left(p-1,n+\frac{1}{4}\right)+(-1)^p\psi\left(p-1,\frac{5}{4}\right)\right]$$

olur. (6.34) eşitsizliğinde $n\to\infty$ için limitleri alırsak,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-1)^p}=\frac{(-1)^p}{2^{2p}(p-1)!}\psi\left(p-1,\frac{3}{4}\right) \tag{6.35}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2s-1)^p}+\frac{1}{(2s+1)^p}\right]=\frac{(-1)^{p-1}}{2^p(p-1)!}\left[\psi\left(p-1,n-\frac{1}{2}\right)-1\right] \tag{6.36}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)^p}=\frac{1}{2^{2p}(p-1)!}\psi\left(p-1,\frac{5}{4}\right) \tag{6.37}$$

elde ederiz. (6.35), (6.36) ve (6.37) 'yi (6.34)'de yerine yazarsak

$$\left\|T_n\circ H_n\right\|_p\le\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(p-1)!}\psi\left(p-1,\dfrac{3}{4}\right)+\\ \dfrac{1}{(p-1)!}\times\left[\dfrac{1}{2^p(p-1)!}\psi\left(p-1,\dfrac{1}{2}\right)-1\right]\psi\left(p-1,\dfrac{5}{4}\right)\end{array}\right\}^{1/p} \tag{6.38}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir.

(6.34) eşitsizliğinin sağ tarafındaki birinci toplamı ihmal edersek

$$\left\|T_n\circ H_n\right\|_p\ge 4\left\{\sum_{s=1}^{n-1}\left[\left(\frac{1}{(2s-1)^p}+\frac{1}{(2s+1)^p}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(4k+1)^p}\right]\right\}^{1/p} \tag{6.39}$$

olur. (6.36) ve (6.37) 'yi (6.39)'de yerine yazarsak

$$\left\|T_n\circ H_n\right\|_p\ge\left\{\frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{1}{2^p(p-1)!}\psi\left(p-1,\frac{1}{2}\right)-1\right]\psi\left(p-1,\frac{5}{4}\right)\right\}^{1/p} \tag{6.40}$$

bulunur. Böylece (6.38) ve (6.40)'den teoremin ispatı tamamlanmış olur.[4]

Teorem 6.2.3. [30]

$T_n = \left[\frac{1}{a+(i-j)b}\right]_{i,j=1}^{n}$ ve $H_n = \left[\frac{1}{c-(i+j)d}\right]_{k,j=1}^{n}$ Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrisleri olsun. $a<b$, $c<d$ ve $a,b,c,d \in R^+$ olmak üzere $T_n \circ H_n$ matrislerinin ℓ_p normu için

$$\|T_n \circ H_n\|_p \le \frac{1}{2d}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{a^p(p-1)!}\left|\psi\left(p-1,1+\frac{c}{2d}\right)\right| + \\ \frac{1}{b^p[(p-1)!]^2}\left[\psi\left(p-1,1-\frac{a}{b}\right)+\psi\left(p-1,1+\frac{a}{b}\right)\right]\psi\left(p-1,1+\frac{c+d}{2d}\right)\end{array}\right\}^{1/p}$$

ve

$$\|T_n \circ H_n\|_p \ge \left\{\frac{1}{a^p}\left[\frac{1}{(2d-c)^p}+\frac{1}{(4d-c)^p}\right]+\frac{1}{(3d-c)^p}\left[\frac{1}{(b-a)^p}+\frac{1}{(b+a)^p}\right]\right\}^{1/p}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Teorem 6.2.4. [73]

$T_n = \left[\frac{1}{a+(k-j)b}\right]_{k,j=1}^{n}$, $H_n = \left[\frac{1}{a+(k+j)b}\right]_{k,j=1}^{n}$ Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrisleri olsunlar. $2 \le p < \infty$, $b>a$ ve $a,b \in R-\{0\}$ olmak üzere bu matrislerin Hadamard çarpımlarının ℓ_p normu için ,

$$\|T_n \circ H_n\|_p \le \left\{\begin{array}{l}\frac{(-1)^p}{(p-1)!2^p a^p b^p}\psi\left(p-1,1+\frac{a}{2b}\right)+ \\ \frac{1}{[(p-1)!]^2 2^p b^{2p}}\left[\psi\left(p-1,1-\frac{a}{b}\right)+\psi\left(p-1,1+\frac{a}{b}\right)\right]\times\psi\left(p-1,1+\frac{a+b}{2b}\right)\end{array}\right\}^{1/p}$$

olacak şekilde bir üst sınır vardır.

Sonuç 6.2.4. [73] $a \in R^+ - Z^+$ ve $b \in Z^+$ olmak üzere

$T_n = \left[\frac{1}{a+(k-j)b}\right]_{k,j=1}^{n}$, $H_n = \left[\frac{1}{a+(k+j)b}\right]_{k,j=1}^{n}$ Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin Hadamard çarpımlarının spektral normu için ,

$$\|T_n \circ H_n\|_2 \leq \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}$$

olacak şekilde bir üst sınır vardır.

İspat: Teorem 3.1.5.'den

$$\|T_n \circ H_n\|_2 \leq \|T_n \circ \overline{T}_n\|_2^{1/2} \|H_n \circ \overline{H}_n\|_2^{1/2} \leq \|T_n\|_2 \|H_n\|_2 \tag{6.41}$$

vardır. Diğer taraftan Teorem 5.1.3.'den $\|T_n\|_2 \leq \frac{\pi}{|\sin(\pi a)|}$ ve Teorem 5.2.1.'den

$$\|H_n\|_2 \leq \frac{\pi}{|\sin(a\pi)|}$$

olup (6.41) ifadesi ile birlikte

$$\|T_n \circ H_n\|_2 \leq \|T_n\|_2 \|H_n\|_2 \leq \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}$$

yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.2.5. [82] $1 < k \in Z^+$ olmak üzere

$T_n = \left[\frac{k}{1+(i-j)k}\right]_{i,j=1}^{n}$, $H_n = \left[\frac{k}{1+(i+j)k}\right]_{i,j=1}^{n}$ şeklinde tanımlı Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin Hadamard çarpımlarının Euclide normu için

$$\|T_n \circ H_n\|_E \leq \frac{k}{2}\left\{\psi\left(1,1+\frac{1}{2k}\right)\left[\psi\left(1,1-\frac{1}{k}\right)+\psi\left(1,1+\frac{1}{k}\right)+1\right]\right\}^{1/2}$$

ve

$$\|T_n \circ H_n\|_E \geq \frac{1}{2}\left\{\psi\left(1,1+\frac{1}{2k}\right)\left[\psi\left(1,1+\frac{1}{k}\right)+\psi\left(1,1-\frac{1}{k}\right)\right]\right\}^{1/2}$$

olacak şekilde alt ve üst sınır vardır.

İspat: T_n ve H_n matrislerinin Hadamard çarpımını yazarsak

$$T_n \circ H_n = \begin{bmatrix} \frac{k^2}{1+2k} & \frac{k^2}{(1+3k)(1-k)} & \cdots & \frac{k^2}{(1+(n+1)k)(1-(n-1)k)} \\ \frac{k^2}{(1+3k)(1+k)} & \frac{k^2}{1+4k} & \cdots & \frac{k^2}{(1+(n+2)k)(1-(n-2)k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{k^2}{(1+(n+1)k)(1+(n-1)k)} & \cdots & \cdots & \frac{k^2}{1+2nk} \end{bmatrix}$$

$$= k^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{1+2k} & \frac{1}{(1+3k)(1-k)} & \cdots & \frac{1}{(1+(n+1)k)(1-(n-1)k)} \\ \frac{1}{(1+3k)(1+k)} & \frac{1}{1+4k} & \cdots & \frac{1}{(1+(n+2)k)(1-(n-2)k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(1+(n+1)k)(1+(n-1)k)} & \cdots & \cdots & \frac{1}{1+2nk} \end{bmatrix}$$

şeklinde formüle edebiliriz. Euclide normu tanımından

$$\|T_n \circ H_n\|_E^2 = k^4 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{(1+2k)^2} + \frac{1}{(1+3k)^2(1-k)^2} + \ldots + \frac{1}{[1+(n+1)k]^2[1-(n-1)k]^2} \right)^2 \\ + \frac{1}{(1+3k)^2(1+k)^2} + \frac{1}{(1+4k)^2} + \ldots + \frac{1}{[1+(n+2)k]^2[1-(n-2)k]^2} \\ + \frac{1}{[1+(n+1)k]^2[1+(n-1)k]^2} + \ldots + \frac{1}{(1+2nk)^2} \end{array} \right\}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadeyi toplam formunda yazarsak

$$\|T_n \circ H_n\|_E^2 = k^4 \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(1+2ks)^2} + \\ \sum_{s=1}^{n-1} \left[\left(\frac{1}{(1-sk)^2} + \frac{1}{(1+sk)^2} \right) \left(\sum_{t=1}^{n-s} \frac{1}{(1+(2t+s)k)^2} \right) \right] \end{array} \right\} \qquad (6.42)$$

olur. Bu eşitlikte

$$\sum_{t=1}^{n-s} \frac{1}{(1+(2t+s)k)^2} < \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+2kt)^2}$$

olduğundan,

$$\|T_n \circ H_n\|_E \le k^2 \left[\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(1+2ks)^2} + \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(1-sk)^2} + \frac{1}{(1+sk)^2} \right) \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+2kt)^2} \right]^{1/2} \qquad (6.43)$$

elde edilir. Polygamma fonksiyon özelliğinden

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{(1+2ks)^2}=\frac{1}{4k^2}\left[\psi\left(1,1+\frac{1}{2k}\right)-\psi\left(1,n+1+\frac{1}{2k}\right)\right],$$

$$\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(1-sk)^2}+\frac{1}{(1+sk)^2}\right)=\frac{1}{k^2}\left[\begin{array}{l}\psi\left(1,1-\frac{1}{k}\right)+\psi\left(1,1+\frac{1}{k}\right)\\ -\psi\left(1,n+\frac{1}{k}\right)-\psi\left(1,n-\frac{1}{k}\right)\end{array}\right] \quad \text{ve}$$

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+2kt)^2}=\frac{1}{4k^2}\left[\psi\left(1,1+\frac{1}{2k}\right)-\psi\left(1,n+1+\frac{1}{2k}\right)\right]$$

elde ederiz. $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(1+2ks)^2}=\frac{1}{4k^2}\psi\left(1,1+\frac{1}{2k}\right), \tag{6.44}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(1-sk)^2}+\frac{1}{(1+sk)^2}\right)=\frac{1}{k^2}\left[\psi\left(1,1-\frac{1}{k}\right)+\psi\left(1,1+\frac{1}{k}\right)\right] \tag{6.45}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(1+2kt)^2}=\frac{1}{4k^2}\psi\left(1,1+\frac{1}{2k}\right) \tag{6.46}$$

elde edilir. Bu değerler (6.42) eşitliğinde yerine konulursa

$$\left\|T_n\circ H_n\right\|_E^2\le k^2\left\{\frac{1}{4k^2}\psi\left(1,1+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{4k^4}\left[\psi\left(1,1-\frac{1}{k}\right)+\psi\left(1,1+\frac{1}{k}\right)\psi\left(1,1+\frac{1}{2k}\right)\right]\right\}^{1/2}$$

bulunur. (6.44) , (6.45) ve (6.46)'den

$$\left\|T_n\circ H_n\right\|_E\le\frac{k}{2}\left\{\psi\left(1,1+\frac{1}{2k}\right)\left[\frac{1}{k^2}\psi\left(1,1-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k^2}\psi\left(1,1+\frac{1}{k}\right)+1\right]\right\}^{1/2}$$

olur. Böylece $\left\|T_n\circ H_n\right\|_E$ için bir üst sınır elde ettik.

Alt sınır elde etmek için (6.41) eşitliğinde ilk toplamı ihmal edersek,

$$\left\|T_n\circ H_n\right\|_E\ge k^2\left[\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(1-sk)^2}+\frac{1}{(1+sk)^2}\right)\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+2kt)^2}\right]^{1/2}$$

elde ederiz. (6.45) ve (6.46)'den

$$\left\|T_n\circ H_n\right\|_E\ge\frac{1}{2}\left\{\psi\left(1,1+\frac{1}{2k}\right)\left[\psi\left(1,1+\frac{1}{k}\right)+\psi\left(1,1-\frac{1}{k}\right)\right]\right\}^{1/2} \tag{6.47}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada , Cauchy-Toeplitz ve Cauchy Hankel matrislerin normlarının sınırları için yapılan sınır çalışmalarının bir özeti çıkarıldı.Hadamard çarpım yardımıyla elde edilen Cauchy-Toeplitz ve Cauchy Hankel matrislerin normları için sınırlar özetlendi.Ayrıca Cauchy-Toeplitz ve Cauchy Hankel matrislerin Hadamard çarpımları için yapılmış olan sınır çalışmalarının özeti çıkarıldı.

İnterval matrislerin Hadamard çarpımlarının sınırları üzerine çalışılabilir.Toeplitz ve Hankel formuna uyan yeni formda bir matris tanımlayarak bunun üzerine sınır değerleri araştırması yapılabilir. Ayrıca yapılan bu tezin nümerik uygulamaları yapılarak sınırların karşılaştırılması yapılabilir.

KAYNAKLAR.

1. Altınışık, Ercan.(1991). Doktara tezi, Selçuk Üniversitesi.
2. Ando, T.,Horn, Roger A. and Johnson, Charles R. (1987). The Singular Values of a Hadamard Product: A Basic İneguality, Linear and Multilinear Algebra. 21: 345-365.
3. Apostol, Tom M. (1976). Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York Inc.
4. Barnett, S. (1990). Matrices, Methods and Applications, Clarendon Pres, Oxford.
5. Belitskii, G.R., Lyubıch, Y.I. 1988. Matrix norms and Their Applications, Birkha user Verlag, Basel.
6. Ben, A, Shalon,T.(1986) On Inversion of Toeplitz and Close to Toeplitz Matrices. Linear Algebra and Its Applications 75:173-192.
7. Bini, D., Capovani, M. (1983). Spektral and Computational Properties of Band Symmetric Toeplitz Matrices. Linear Algebra and Its Applications.52/53:99-126.
8. Bozkurt, D., (1994). On the Inverses of Toeplitz and Hankel Matrices, Jour. Inst. Math. Comp. Sci. (Math. Ser.), Vol:7, No:1,pp:1-9..
9. Bozkurt, D., (1995). Almost Cauchy-Toeplitz Matrislerinin ℓ_p Normları Üzerine , *VIII*. Ulusal Matematik Sempozyumu, Çukurova Üniversitesi, Adana.
10. Bozkurt, D., (1995). Cauchy-Toeplitz Matrislerinin ℓ_p Normları Üzerine , Ord. Prof. Dr. Cahit Arf'ın 85. Doğum Günü Onuruna Matematik Sempozyumu.
11. Bozkurt, D. ve Çelik, H. A.(1996). On the Distributions of the Eigenvalues of a Non-Symmetric Matrix. The Journal of Interdiscipilinary Studies 9:87-90.
12. Bozkurt, D., (1996). On the Bounds of Cauchy-Toeplitz Matrices. *Siberian J.of Diff. Equations* 2:B 125-131.

13. Bozkurt, D., (1996). On the Bounds of Cauchy-Toeplitz Matrices. *Siberian J. Diff. Equations* Vol:3, No:2, pp:135-142.
14. Bozkurt, D., (1996). On the Bounds of the ℓ_p Norm of Cauchy-Toeplitz Matrices. Proceeding of the *I*. Symposiom on Mathematical and Computational Applications pp:30-36.
15. Bozkurt, D., (1996). On the ℓ_p Norms of Cauchy-Hankel Matrices. Journal *of Scientific Research Foundation,* Vol:1, No:2, pp:27-32.
16. Bozkurt, D., (1996). On the ℓ_p Norm of Almost Cauchy-Toeplitz Matrices, Tr. J. of Mathematics, 20:545-552.Tübitak..
17. Bozkurt, D., (1996). Genel Cauchy-Hankel Matrislerinin ℓ_p Normları için Sınırlar. 9. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildiri Özetleri (İ.T.Ü.).
18. Bozkurt, D., (1997). On the ℓ_p Norms of Hadamard Product of Cauchy-Toeplitz Matrices and Cauchy-Hankel Matrices, Linear and Multilinear Algebra, Vol:45, pp:333-339
19. Bozkurt, D., (1997). Cauchy-Toeplitz Matrislerinin Normları İçin Sınırlar. Sakarya Matematik Sempozyumu.
20. Bozkurt, D.,(1998). On the ℓ_p Norms of Cauchy-Toeplitz Matrices.*Linear and Multilinear Algebra* Vol. 33:231-236.
21. Bozkurt, D.,(1998). On the ℓ_p Norms of Cauchy-Toeplitz Matrices.*Linear and Multilinear Algebra* Vol:44, pp:341-346.
22. Bozkurt, D., (1998). Cauchy-Toeplitz Matrislerinin Normları için Sınırlar. 11. Matematik Sempozyumu.
23. Bozkurt, D.,(1999). On the ℓ_p Norms of Hadamard Product of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel Matrices. *Linear and Multilinear Algebra* Vol.35:231-236.
24. Bozkurt, D.,(1999). On the ℓ_p Norms of Hadamard Product of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel Matrices. *Linear and Multilinear Algebra* Vol.45:341-346.
25. Bozkurt, D. ve Türen, B. 2000. Lineer Cebir, Sel-Ün Yayınları,Konya.
26. Bozkurt, D. ve Türen, B. 2001. Lineer Cebir, Sel-Ün Yayınları,Konya.

27. Calvetti, D., Reichel L. 1997. Factorizations of Cauchy matrices. Journal of computation and applied mathematics 86:103-123.
28. Civciv, H. (2005). Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Matrislerinin Khatri-Rao ve Trach-Singh Çarpımlarının Normları Üzerine. Yüksek Lisans Tezi, S.Ü. Fen Bil. Ent. Konya.
29. Cramer,H. (1946). Mathematical Methods in Statistics, Princeton University Pres, Princeton
30. Çatak, Ö. (2001). Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Matrislerinin ℓ_p Normları İçin Sınırlar.Yükek Lisans Tezi. S. Ü. Fen Bil. Enst. Konya.
31. Çelik, H.A., Bozkurt, D. (1996). An upper Bound fort he spektral norms of Non-Negative Symmetric Toeplitz Matrices. The Journal of Interdiscipilinary Studies 9:91-94.
32. Dal, R.V. ve ark. 1996. Hamiltonian properties of Toeplitz graphs. Discrete mathematics 159:69-81
33. Fejer, L. (1918). Über die Eindeutigkeit der Lösüng der Linearen Partillen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Math. Zeit 1:70-79.
34. Fuhrmann, P. A. (1986). Remarks on the Inversion of Hankel Matrices. Linear Algebra and Its Applications 81:89-104.
35. Gantmacher,F.R. 1960, The Theory of Matrices, Volume One, Chelsea Publishing Company, New York.
36. Garloff, J. 1986. On power-boundness of interval matrices. Journal of computational and applied mathematics 14:353-360.
37. Golub, G.H., Loan, C.F.V. 1983. Matrix Computations, North Oxford Academic Publishing.
38. Gunzburger, M. D. (1982). Stability of Gaussian Elimination Without Pivoting On Tridiagonal Toeplitz Matrices. Linear Algebra and its Applications, 45:21-28.
39. Güngör, A. D. (2004). Singüler ve Norm Değerleri İçin Sınırlar. Doktora Tezi, S.Ü. Fen Bil. Enst. Konya.
40. Hadamard.(1899). Theoreme sur les Series Entieres. Acta. Math. 22:55-63.
41. Heining, G., Rost, K. (1989). Matrix Representation of Toeplitz-plus-Hankel Matrix Inverse. Linear Algebra and its Applications, 113:65-78.

42. Horn, A. on the singular values of a product of completely continuous operators, *Proc. National Acad. Science,* 26 (1950),273-275.
43. Horn R.A., ve Johnson C.R. (1985). Matrix Analysis, Cambridge University Pres.
44. Horn R.A., ve Johnson C.R. , Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Pres, New York , 1987.
45. Horn R.A., ve Johnson C.R. (1990). Matrix Analysis, Cambridge University Pres.
46. Horn R.A., ve Johnson C.R. (1991). Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Pres, New York.
47. Horn, R.A.,Kıttaneh F. 1998. Two applications of a bound on the Hadamard product with a Cauchy matrix. The electronic journal of linear albebra 3:4-12.
48. Iohvidov, I.S. 1982. Hankel and Toeplitz Matrices and Forms, BirkHauser, Boston.
49. Jansson, C., Rohn J. 1999. An Algorithm for checking regularity of interval matrices. SIAM Journal of matrix analysis and applications. 20:756-776.
50. Johnson, C. R. (1988). Inegualities Relating Unitarily Invariant Norm and the Numerical Radius. Linear Algebra and its Applications, 23:183-191.
51. Kölbig, K.S. 1972. Programs for computing the logarithm of the gamma function and the gamma function, for complex arguments, Computer phys. Comm.4:221-226
52. Mathias, R. (1990).The Spectral Norm of a Nonnegative Matrix, Linear
53. Algebra and its Applications, 131:269-284.
54. Mathias, R.1992. The singular values of the Hadamard product of a positive semidefinite and a skew-symetric matrix. Linear and multilinear algebra 31:57-70
55. Mathias, R. (1993). The Hadamard operatör norm of a Circulant and Applications. Siam J. Matrix Aanl. Appl. Vol:14, No:4, 1152-1167.
56. Mayer, G. 1984. On tthe converge of powers of interval matrices. Linear algebra and its applications 58:201-206.
57. Moenck, R. 1977. On computing closed forms for summations. Proc.MACSYMA users conf. 225-236.

58. Moutard, Th.(1894). Notes sur les Derivees Partielles. J. De L'Ecole Polytechnigue 64:55-69.
59. Noble, B. 1969. Applied Linear Algebra, Prentice-Hall, New Jersey.
60. Noble, B. And Daniel, J. W. (1998). Applied Linear Algebra , Prentice-Hall International Inc.
61. Parter, S.V. 1986. On the Distribution of Singular Values of Toeplitz Matrices. Linear Algebra and Its Applications 139:1-18.
62. Rex, G., Rohn J. 1998. Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices. SIAM Journal of matrix analysis and applications.20:437-447.
63. Roch, S. And Silbermann, B.1998. A note on Singular Values of Cauchy Toeplitz Matrices. Linear Algebra and Its Applications 175-176:521-526.
64. Roch, S. And Silbermann, B.1998. A note on Singular Values of Cauchy Toeplitz Matrices. Linear Algebra and Its Applications 275-276:531-536.
65. Rohn; J. (Technical report no:686) Czech Republic. 1996. Checking properties of interval matrices.
66. Schur I., Bemerkungen zur Theorie der beschrankten Bilinearformen mit unendlich vielen Veranderlichen, *J. Für reine und Angewandte Math.* 130 (1911) , 1-18.
67. Schur I., Bemerkungen zur Theorie der beschrankten Bilinearformen mit unendlich vielen Veranderlichen, *J. Für reine und Angewandte Math.* 140 (1911) , 1-28.
68. Scott, Belsin and Steve, Ligh.(1989). Greatest Common Divisors Matrices, Linear Algebra and Its Application, 118:69-76.
69. Seymour, V. P. (1986). On the Distribution of the Singular Values of Toeplitz Matrices, Linear Algebra and Its Applications, 80:115-130.
70. Silbermann, B. (1993). On the Limiting Set of Singular Values of Toeplitz Matrices. Linear Algebra and Its Applications 182:35-43.
71. Sinan, A. A.(1979). Matrislerin Mutlak Değeri En Büyük Olan Öz Değeri İçin Sınırlar. Doçentlik Tezi, Atatürk Üniversitesi.
72. Smith, H.J.S. (1876). On the value of certain arithmetical determinant. Proc. London math. Soc., 7:208-212.

73. Solak, S. (2001). Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Matrislerin Spektral Normları İçin Sınırlar ve Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel İnterval Matrislerin Normları , Doktara Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
74. Sun, J. 1996. On the variation of the spectrum of a normal matrix. Linear algebra and its applications 246:215-223.
75. Taşçı, D. (1999). Lineer Cebir, Sel-Ün Yayınları, Konya.
76. Tekin, H. (1996). Cauchy-Toeplitz Matrislerinin ℓ_p Normları için Sınırlar, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
77. Tilli, P. 1998. Locally Toeplitz sequences:spectral properties and applications. Linear algebra and its applications 278:91-89.
78. Tilli, P. 1998. Singular values and eigenvector of non-Hermitian block Toeplitz matrices. Linear algebra and its applications 275:59-89.
79. Tismenetsky, M.(1987). Determinant of Block-Toeplitz Band Matrices. Linear Algebra and its Applications, 85:165-184..
80. Trench, W.F. 1999. Asymptomatic distribution of the evn and odd spectra of real symmetric Toeplitz matrices. Linear algebra and its applications 302-303:155-162.
81. Türkmen, R. (1999). Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Matrislerin Normları İçin Sınırlar, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
82. Türkmen R., ve Bozkurt D., On the bounds fort he norms of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel Matrices. Applied Mathematics and Computation 132 (2002) 633-642
83. Türkmen, R. (2003). Matrislerin Hadamard Çarpımlarının Normları ve Singüler Değerleri, Doktora Tezi, S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
84. Tyrtyshnikov, E.E. (1991). Cauchy-Toeplitz Matrices and Some Applications, Linear Algebra and Its Applications, Vol:149, pp:1-18.
85. Tyrtyhnikov, E.F. 1994. Influence of matrix operations on the distribution of eigenvalues and singular values of Toeplitz matrices . Linear algebra and its applications 207:225-249.
86. Visick, G. 2000. A quantitative version of the observation that the Hadamard product is a principal submatrix of the Kronecker product. . Linear algebra and its applications 304:45-68.

87. Wang, B. and Zhang, F. (1997). Schur Complement and Matrix Inegualities of Hadamard Products. Linear and Multilinear Algebra Vol:43:315-326.
88. Weyl, H., (1939),.Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, *Proc. National Acad. Science,* 25,308-311.
89. Weyl, H., (1949). Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, *Proc. National Acad. Science,* 35, 408-411.
90. Z. Xıngzhı, Inegualities For The Singular Values of Hadamard Products
91. Yıldırım M.Ö.E., Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Matrislerin Singüler Değerleri.Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Yüksek Lisans Tezi (2004).
92. Wang, B. and Zhang, F. (1988). Another Prof of a Singular Value Ineguality concerning Hadamard Products of Matrices. Linear and Multilinear Algebra Vol:22:341-346.
93. Zhang, F.(2001) Matrix inegualities by means of block matrices. Mathematical Inegualities and Applications Vol:4,481-490.
94. Zielke, G. 1988. Some remarks on matrix norms, condition numbers and error estimates for linear equations. . Linear algebra and its applications 110:29-41.
95. Zurhmul, R. 1978. Matrisler ve Mühendislik Problemlerine Uygulamaları, (Çev:Birkan,İ.İ.T.Ü. İstanbul)