



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN HAREKETİ

Ramazan ÇAKIROĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2019

KONYA

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN HAREKETİ

Ramazan ÇAKIROĞLU

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kemâl AYDIN

2019, 82+ vii Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Kemâl AYDIN
Prof. Dr. Mete KALYONCU
Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alparslan PEKER

Bu çalışmada, yüksek mertebeden fark denklem sistemlerinin çözümlerinin hareketinin Schur kararlı ve salınımlı olup olmadığı durumlar incelenmiştir. Bu kapsamda, fark denklemlerin Schur kararlı ve salınımlı olduğu durumların bozunumu, fark sistemlerin öz değerler yardımıyla Schur kararlılığı ile $\omega(A)$ parametresi ile Schur kararlılığı arasındaki kalite farkı, fark sistemlerin hem Schur kararlı hem salınımlı olması için yeni bir kriter arayışı, fark sistemlerin optimum salınımlılığı ile pratik salınımlılık ve salınımlılığın sürekliliği, yüksek mertebeden fark sistemlerin hem Schur kararlı hem salınımlı olup olamayacağı ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçlar nümerik örneklerle desteklenmiş ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fark denklem sistemleri, Optimum salınımlılık, Bozunum sistemleri, Salınımlılık, Schur kararlılık, Süreklilik teoremleri.

ABSTRACT

MS THESIS

BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF HIGH ORDER DIFFERENCE EQUATIONS SYSTEMS

Ramazan ÇAKIROĞLU

SELÇUK UNIVERSITY GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS / MASTER OF MATHEMATICS
IN MATHEMATICS DEPARTMENT

Advisor: Prof. Dr. Kemâl AYDIN

2019, 82 + vii Pages

Jury
Prof. Dr. Kemâl AYDIN
Prof. Dr. Mete KALYONCU
Assoc. Prof. Dr. Haldun Alparslan PEKER

In this study, whether the behavior of solutions of high order difference equations systems is Schur stable and oscillating is investigated. In this context, obtained the perturbation of the situations Schur stable and oscillating of difference equations, the difference in quality between Schur stability with the eigenvalues of and Schur stability with parameter $\omega(A)$, the search for a new criterion for the difference systems to be both Schur stable and oscillating, optimum oscillation of difference systems, practical oscillation continuity of the oscillations, results of whether high order difference systems can be both Schur stable and oscillating. In addition, the results were supported with numerical examples and compared with the results in the literature.

Keywords: Difference equation systems, Optimum oscillation, Perturbation systems, Oscillation, Schur stability, Continuity theorems.

ÖNSÖZ

Yüksek mertebeden fark denklem sistemlerinin çözümlerinin hareketi üzerine yaptığım bu çalışma sırasında başta hayatım boyunca her ânımda desteklerini esirgemeyen âilem olmak üzere, lisans ve lisans üstü eğitimim boyunca bana karşı dâima olumlu tutumu ve bilimsel bir çalışma yapılırken dikkat edilmesi gereken temel hususlar konusunda vermiş olduğu bilgiler, gerek mesâi saatleri içerisinde gerekse mesâi saatleri dışarısında sürekli ilgi ve alâkasından dolayı Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı öğretim üyesi Prof. Dr. Kemâl Aydın'a ve çalışma boyunca tecrübesinden yararlandığım Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı öğretim üyesi Dr. Ahmet Duman'a en samîmî şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ramazan ÇAKIROĞLU
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **İV**
ABSTRACT ..... **V**
ÖNSÖZ ..... **Vİ**
İÇİNDEKİLER ..... **Vİİ**
1. GİRİŞ **1**
1.1. Literatür Özeti ve Problemin Tanıtımı 2
1.2. Tezin Yapısı 3
2. FARK DENKLEMLERİN HEM SCHUR KARARLILIĞI HEM SALINIMLILIĞI **5**
2.1. Birinci Mertebeden Fark Denklemlerin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı 5
2.2. Reel Köklü İkinci Mertebeden Fark Denklemlerin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı 8
2.3. Karmaşık Köklü İkinci Mertebeden Fark Denklemlerin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı 13
2.4. Karmaşık Köklü İkinci Mertebeden Fark Denklemlerin Ardışık Bozunum Denklemleri 21
3. FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN HEM SCHUR KARARLILIĞI HEM SALINIMLILIĞI **27**
3.1. N. Mertebeden Fark Denkleminin N-Boyutlu Lineer Sistemle Gösterilişi 27
3.2. İki-Boyutlu Birinci Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı 28
3.3. Kötü Konulmuş Problem ve Lyapunov Teoremi 30
3.4. MVC 1.0-Matrix Vector Calculator Programı 36
3.5. N-Boyutlu Birinci Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı İçin Kriter Bulunması 37
3.6. N-Boyutlu Birinci Mertebeden Diferensiyel Denklem Sistemleri ve Hurwitz Kararlılık 41
3.7. Schur Kararlılık ve Hurwitz kararlılık İçin Öz değerler ve Parametreler Arasındaki Bağıntı 51
3.8. Fark Denklem Sistemlerini Hem Schur Kararlı Hem Salınımlı Kılan Denk Sonuçlar 53
4. FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN OPTİMUM SALINIMLILIĞI **57**
4.1. Optimum Salınımlılık 57
4.2. Pratik Salınımlılık 61
5. FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN SALINIMLILIĞININ SÜREKLİLİK TEOREMLERİ **63**
5.1. Fark Denklem Sistemlerinin Süreklilik Teoremleri ve Üst Sınırı 63
5.2. Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Süreklilik Teoremleri ve Üst Sınırı 64
5.3. Salınımlılığın Sürekliliği 65
6. YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN HEM SCHUR KARARLILIĞI HEM SALINIMLILIĞI **70**
6.1. İkinci Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı 70
6.2. Üçüncü Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı 73
7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME **79**
8. KAYNAKLAR **80**
ÖZGEÇMİŞ 82

1. GİRİŞ

Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bunlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık benzeridir. Bununla birlikte, fark denklemler teorisi, karşılık gelen diferensiyel denklemler teorisinden daha zengindir. Örneğin, birinci mertebeden bir diferensiyel denklemin benzeri olan bir fark denklemi "ghost" çözümlere veya kaotik yörüngelere sahip olabilmesine rağmen bu durum ancak yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için söz konusudur (Sümürken, 2007).

Fark denklemleri teorisinin uygulamaları, kararlılık analizinde ve kontrol teorisinde çözümlerin hareketinin analizinde, biyolojide canlı popülasyon sayısının araştırılmasında, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesinde, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesinde ve bir çok bilim dalında kullanılmaktadır.

Son yıllarda fark denklemlerin çözümlerinin davranışı üzerine; özellikle, 1- çözümlerin kararlılık özellikleri, 2- çözümlerin salınımlılık özellikleri üzerine çok sayıda çalışmalar yapılmaktadır.

Bir problemin çözümünün hareketini tahmin etmek ve teorik olarak değişik etkilere ne kadar maruz kaldığında hala yapısını, karakterini koruduğunu bilmek uygulama alanlarında önemli avantajlar sağlamaktadır. Problemin giriş elemanlarında ne kadar bir değişim yapıldığında problemin yapısının değişmediğini, hangi şartlarda karakterinin korunduğunun önceden bilinmesi uygulamada kaos oluşma riskini ortadan kaldırır.

Verilen problemin *"etkilere vereceği tepkinin sorgulanması ve yapısını değiştirmeyen etkilerin şartlarının belirlenmesi"* hassasiyet problemi olarak adlandırılmaktadır. Bir problemin hassasiyetinin, yani ne kadar dayanıklı olduğunun bilinmesi, problemin yapısı değişmeden girdilerinde uygun değişimler yapılmasına imkân sağlar. Problemin hassasiyeti, problemin dayanıklılığının ölçüsünün belirlenmesi olarak da değerlendirilebilir. Problemin türüne göre; sonuçta para, iş gücü, zaman veya can kayıpları ile karşılaşmamak için problemi çözmeden verilen sistemin dayanıklılığı önceden bilinmelidir (Duman, 2008).

1.1. Literatür Özeti ve Problemin Tanıtımı

Fark denklemlerin çözümlerinin hareketi literatürde salınımlılık (oscillation) olarak karşımıza çıkmaktadır. Salınımlılık sayesinde bir fark denklemin çözümünün nasıl bir harekete sahip olduğunu ve bu harekete etki edecek olan dış etkilerin çözümün hareketini ne şekilde değişime uğratacağını, bozunuma sokacağını görmek mümkündür. Fark denklemlerin salınımlılığı ile ilgili literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalara göre salınımlılığı kısaca tanıtacak olursak; her $n \in \mathbf{N}$ için

$$y_n y_{n+k} < 0$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbf{N}$ var ise $\{y_n\}$ dizisi *salınımlıdır* denir. Ayrıca, $\{y_n\}$ dizisi sonunda sabit işaretli ise *salınımlı olmayandır* denir (Agarwal ve ark., 2000; Çakıroğlu, 2017).

Literatürde karşımıza çıkan diğer bir kavram ise fark sistemlerin asimtotik kararlılığı (Schur kararlılığı) dır. Schur kararlılık sayesinde bir fark sistemin tam çözümünü hesaplamadan çözümün dinamiği hakkında bazı bilgiler elde etmek mümkündür. Yine fark sistemlerin Schur kararlılığı ile ilgili de literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalara göre de Schur kararlılığı kısaca tanıtacak olursak; $A \in M_N(\boldsymbol{R})$, a; N boyutlu reel vektör ve n_0 bir tam sayı olmak üzere;

$$x(n+1) = Ax(n),\ x(n_0) = a,\ n \geq n_0$$

başlangıç-değer problemi ve $x(n)$ bu problemin çözümü olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı varsa öyle ki $y(n+1) = Ay(n)$ sisteminin $\|y(n_0) - a\| < \delta$ şartını sağlayan $y(n)$ çözümü için $\|y(n) - x(n)\| < \varepsilon, n > n_0$ sağlanırsa bu taktirde başlangıç-değer probleminin $x(n)$ çözümüne *fark kararlıdır* denir. Eğer bu problemin $x(n)$ çözümü için;

a) Çözüm fark kararlı,

b) $y(n+1) = Ay(n)$ sisteminin bütün çözümleri için $\|x(n) - y(n)\| \to 0, n \to \infty$

ifadeleri doğru ise başlangıç-değer probleminin $x(n)$ çözümüne *asimtotik fark kararlıdır (Schur kararlıdır)* denir (Bulgak ve Akın, 1998; Çakıroğlu, 2017).

Fark denklemlerin salınımlılığı ve Schur kararlılığı üzerine çeşitli çalışmalar yapılmış ve sonuçlar elde edilmiştir lâkin fark sistemlerin salınımlılık ve Schur

kararlılığının birlikte sağlandığı veya sağlanmadığı durumlar üzerine çalışmalar yapılmamıştır.

Bu çalışmada;

- Fark denklemlerin hem Schur kararlı hem salınımlı olduğu şartlar incelenmiş ve bu şartların bozunuma uğraması sonucu çözümün hareketinin nasıl davrandığı incelenmiş,
- Fark sistemlerin hem Schur kararlı hem salınımlı olduğu şartlar fark denklemlerin hem Schur kararlı hem salınımlı olduğu şartlar ile ilişkilendirilmiş ve öz değer probleminin kötü konulmuşluğu îzah edilmiş,
- Fark sistemlerin Schur kararlılığını öz değerler yardımıyla ve $\omega(A)$ parametresi yardımıyla tespit edip iki durum arasındaki kalite farkı incelenmiş,
- Fark sistemlerin hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı için yeni bir kriter araştırılmış ve sonuçlar elde edilmiş,
- Öz değerler ve parametreler arasındaki bağıntı anlatılmış ve parametrelere bağlı sonuçlar elde edilmiş,
- Fark sistemlerin salınımlılığı için optimum bölge araştırılmış ve salınımlılık için bir parametre verilmeye çalışılmış,
- Fark sistemlerin salınımlılığının sürekliliği araştırılmış ve sonuçlar elde edilmiş,
- Yüksek mertebeden fark sistemlerin hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı araştırılmış ve hem Schur kararlılığın hem salınımlılığın sağlanıp sağlanmadığı îzah edilmiştir.

1.2. Tezin Yapısı

Bu tez çalışması 6 bölümden oluşmaktadır.

1. bölümde; problemin tanıtımı ve problemin literatür özeti verilmiştir.

2. bölümde; fark denklemlerin hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı için sonuçlar verilmiş ve bozunumları ile ilgili incelemeler yapılmıştır.

3. bölümde; fark denklemlerden sistemlere geçiş anlatılmış, öz değer problemi ile Schur kararlılık parametresi $\omega(A)$ arasındaki kalite farkı incelenmiş ve salınımlılık için yeni bir kriter araştırılmıştır.

4. bölümde; fark sistemlerin optimum salınımlılığı incelenmiş ve pratik salınımlılık ile mükemmel durum için bir parametre tanıtılmıştır.

5. bölümde; fark sistemlerin salınımlılığının sürekliliği için sonuçlar verilmiştir.

6. bölümde; yüksek mertebeden fark denklemlerin hem Schur kararlı hem salınımlı olup olmayacağı durumlar araştırılmıştır

2. FARK DENKLEMLERİN HEM SCHUR KARARLILIĞI HEM SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, birinci mertebeden ve ikinci mertebeden fark denklemlerin hem Schur kararlılığını hem salınımlılığını sağlayan sonuçlar verilmiştir.

2.1. Birinci Mertebeden Fark Denklemlerin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı

$a \in \boldsymbol{R}$ (veya $a \in \boldsymbol{C}$) ve $\{x(n)\}$ reel sayıların bir dizisi olmak üzere

$$\begin{aligned} &x(n+1) = ax(n), \ n \geq n_0 \geq 0 \\ &x(n_0) = x_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

fark denklemini ele alalım. Burada, $a \in \boldsymbol{R}$ veya $a \in \boldsymbol{C}$ olabileceği için şimdilik yapacağımız çalışmalarda $a \in \boldsymbol{R}$ için bu fark denklemini ele alacağız ve $a \in \boldsymbol{C}$ için ise ilerleyen çalışmalarda yeri geldiğinde değineceğiz. $a,b \in \boldsymbol{R}$ (veya $a,b \in \boldsymbol{C}$) ve $\{y(n)\}$ reel sayıların bir dizisi olmak üzere (2.1) denkleminin bozunumu (pertürbesi) olan

$$\begin{aligned} &y(n+1) = (a+b)y(n), \ n \geq n_0 \geq 0 \\ &y(n_0) = y_0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

fark denklemini ele alalım. Burada da (2.1) denkleminde olduğu gibi $a,b \in \boldsymbol{R}$ için bu denklemi ele alacağız. (2.1) denkleminin genel çözümü $x(n) = a^{n-n_0} x_0$ ve (2.2) denkleminin genel çözümü $y(n) = (a+b)^{n-n_0} y_0$ dır (Akın ve Bulgak,1998; Elaydi, 2005; Bereketoğlu, 2012). Yapacağımız çalışmalarda kolaylık sağlaması açısından (2.1) denkleminin başlangıç değerini $x(0) = 1$ ve (2.2) denkleminin başlangıç değerini $y(0) = 1$ olarak ele alacağız. Dolayısıyla bu başlangıç değerlerine göre (2.1) denkleminin genel çözümü $x(n) = a^n$ ve (2.2) denkleminin genel çözümü $y(n) = (a+b)^n$ olur.

Şimdi, (2.1) denklemi için aşağıdaki teoremi verelim (Elaydi, 2005).

Teorem 2.1.

i. (2.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart karakteristik denkleminin pozitif reel köke sahip olmaması ($a < 0$)dır.

ii. (2.1) denkleminin tüm çözümlerinin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|a|<1$ olmasıdır.

Uyarı 2.1. Literatürde asimtotik kararlılık kavramı yerine *Schur kararlılık* kavramı kullanılmaktadır (Duman, 2008). Bu çalışma boyunca *Schur kararlılık* kavramı kullanılacaktır.

Not 2.1. Teorem 2.1.'e göre; (2.1) denkleminin hem Schur kararlı hem salınımlılığı için gerek ve yeter şart $-1<a<0$ olmasıdır.

Problemimiz, (2.1) denkleminin hem Schur kararlılığının hem de salınımlılığının sağlandığı durumda (2.2) denkleminin de hem Schur kararlılığının hem de salınımlılığının hangi şartlar altında nasıl sağlandığıdır. Bunun için aşağıdaki kritiği vereceğiz.

Kritik 2.1. (2.1) denklemi hem Schur kararlı hem salınımlı *(-1<a<0)* olmak üzere

$$-1-a<b<-a$$

eşitsizliğini sağlayan b için (2.2) denklemi hem Schur kararlı hem de salınımlıdır.

Şimdi, bu verilenlere göre *-1<a<0* aralığındaki değerler için b yi inceleyelim:

$$a=-\frac{1}{2} \text{ için } -1-\left(-\frac{1}{2}\right)<b<-\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow -\frac{1}{2}<b<\frac{1}{2}$$

elde edilir. Buna göre $h_i=\frac{i}{5},(i=1,2,...,4)$ ve $\alpha_1=1,\ \alpha_2=10,\ \beta_1=-1,\ \beta_2=1$ olmak üzere $x\in[\alpha_1,\alpha_2]$ *ve* $y\in[\beta_1,\beta_2]$ aralıklarına göre aşağıdaki tabloyu verelim:

b	a+b	Çözümün Hareketi	b	a+b	Çözümün Hareketi
$b\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+$	-1^+	Salınımlı fakat Schur kararlı değil	$b\to\left(\frac{1}{2}\right)^-$	0^-	Salınımlı değil fakat Schur kararlı
$-\frac{1}{2}+h_1$	–0.8	Salınımlılık azalmakta ve Schur kararlı	$\frac{1}{2}-h_1$	–0.2	Salınımlılık belli bir aralıkta artmakta ve Schur kararlı
$-\frac{1}{2}+h_2$	–0.6	Salınımlılık sıfıra doğru yaklaşmakta ve Schur kararlı	$\frac{1}{2}-h_2$	–0.4	Salınımlılık artmakta ve Schur kararlı
$-\frac{1}{2}+h_3$	–0.4	Salınımlılık gittikçe kaybolmakta ve Schur kararlı	$\frac{1}{2}-h_3$	–0.6	Salınımlılık tüm noktalarda belirgin ve Schur kararlı

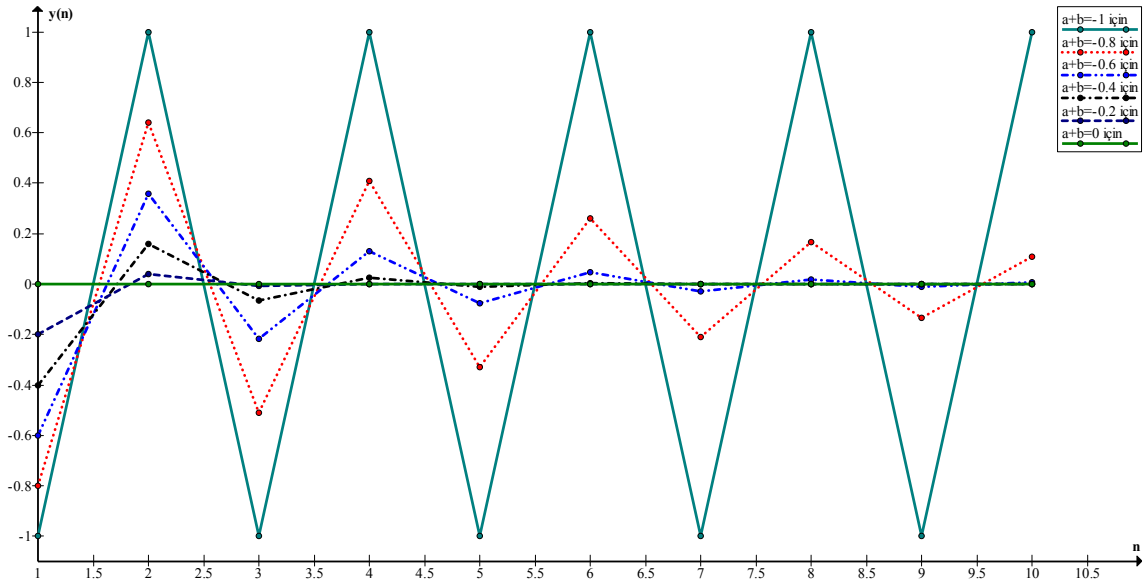
$-\frac{1}{2}+h_4$	-0.2	Salınımlılık çok az bir aralıkta gözükmekte ve Schur kararlı	$\frac{1}{2}-h_4$	-0.8	Salınımlılık artarak devam etmekte ve Schur kararlı
$b\to\left(\frac{1}{2}\right)^-$	0^-	Salınımlı değil fakat Schur kararlı	$b\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+$	-1^+	Salınımlılık her noktada eşit fakat Schur kararlı değil

Tablo 2.1. $a=-\frac{1}{2}$ için $a+b$ değerleri ve (2.2) denkleminin b aralığına göre çözümün hareketi.

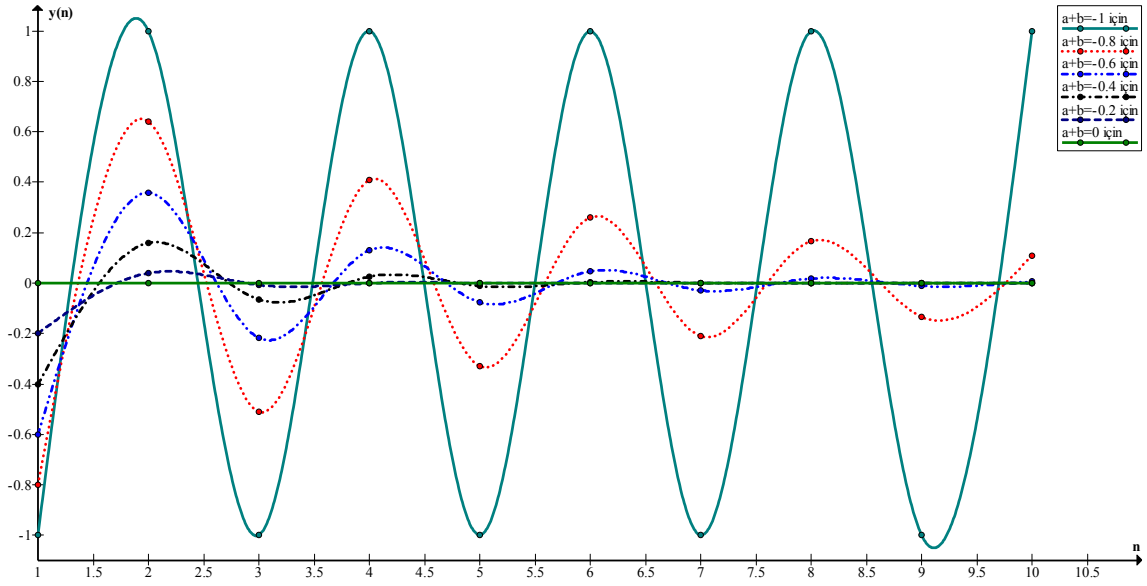
Tablo 2.1.'e göre aşağıda vereceğimiz grafikler incelendiğinde b ye bulunduğu aralıkta sol ve sağ uçlara doğru değerler verdikçe (2.2) denkleminin salınımlılığının ne şekilde değişime uğradığı görülecektir.

Uyarı 2.2. Tablo 2.1.'de a+b değerlerinin 1^+ ve 0^- olması, çözümün limitinin 1 e sağdan yaklaştığını lâkin 1 olamayacağını ve 0 a soldan yaklaştığını lâkin 0 olamayacağını göstermektedir. 1 ve 0 olamaması ise hem Schur kararlı hem salınımlılığı bozacağı içindir.

Not 2.2. (2.2) denkleminin çözümü bir dizi olduğundan noktaların hareketinin salınımlılığı ve Schur kararlılığı incelenmektedir. Dolayısıyla aşağıda vereceğimiz grafikler Lineer Enterpolasyon yardımıyla dizi noktaları birleştirilmiş olarak Graph Version 4.3 programı ile çizilmiştir.



Şekil 2.1. $a=-0.5$ ve $-0.5\le b\le 0.5$ için $x\in[1,10]$ *ve* $y\in[-1,1]$ aralıklarına göre elde edilen $a+b$ lerin bir grafikte gösterimi.



Şekil 2.2. $a=-0.5$ ve $-0.5\le b\le 0.5$ için $x\in[1,10]$ *ve* $y\in[-1,1]$ aralıklarına göre elde edilen $a+b$ lerin Kübik Spline Enterpolasyon yardımıyla bir grafikte gösterimi.

Kritik 2.1. de verilen *-1-a<b<-a* şartına göre $b\to(-1-a)^{+}$ iken (2.2) denkleminin salınımlılığı -1 e doğru artmakta ve $b=-1-a$ olduğunda salınımlılık iki değer arasında gidip gelmekte lakin Schur kararlılık bozulmaktadır; $b\to(-a)^{-}$ iken (2.2) denkleminin salınımlılığı 0 a doğru azalmakta ve $b=-a$ olduğunda salınımlılık kaybolmakta lâkin Schur kararlılık bozulmamaktadır; Bu işlemler *-1<a<0* aralığından alınacak tüm *a* değerleri için aynı şekilde sağlanmış olacaktır.

Birinci mertebeden fark denklemleri için yapmış olduğumuz çalışmayı şimdi ikinci mertebeden fark denklemleri için yapmaya çalışacağız.

2.2. Reel Köklü İkinci Mertebeden Fark Denklemlerin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı

Karakteristik denkleminin kökleri $r_1, r_2 \in \boldsymbol{R}$ olan

$$x(n+2)-(r_1+r_2)x(n+1)+r_1.r_2x(n)=0 \qquad \textbf{(2.3)}$$

fark denklemini ele alalım. Bu fark denklem (Elaydi, 2005) deki

$$y(n+2)+p_1y(n+1)+p_2y(n)=0 \qquad \textbf{(2.4)}$$

fark denkleminde $p_1 = -(r_1 + r_2),\ \ p_2 = r_1.r_2,\ \ p_1, p_2 \in \boldsymbol{R}$ olduğu göz önüne alınarak elde edilmiştir. (2.3) denkleminin genel çözümü $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere $x(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ dir (Elaydi, 2005).

Karakteristik denkleminin kökleri $\hat{r}_1, \hat{r}_2 \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere (2.3) denkleminin bozunumu olan

$$y(n+2) - (\hat{r}_1 + \hat{r}_2) y(n+1) + \hat{r}_1.\hat{r}_2 y(n) = 0 \qquad \textbf{(2.5)}$$

fark denklemini ele alalım. Burada; $\hat{r}_1 = r_1 + h_1\ \ , \hat{r}_2 = r_2 + h_2$ ve $h_1, h_2 \in \boldsymbol{R}$ dir. (2.5) denkleminin genel çözümü $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere $y(n) = c_1 \hat{r}_1^n + c_2 \hat{r}_2^n$ dir (Elaydi, 2005). Yapacağımız çalışmalarda kolaylık sağlaması için $c_1 = c_2 = 1$ olarak kabul edeceğiz. Dolayısıyla (2.3) denkleminin genel çözümü $x(n) = r_1^n + r_2^n$ ve (2.5) denkleminin genel çözümü $y(n) = \hat{r}_1^n + \hat{r}_2^n$ olur.

Şimdi, (2.3) denklemi için aşağıdaki teoremi verelim (Elaydi, 2005).

Teorem 2.2.

i. (2.3) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart karakteristik denkleminin pozitif reel köke sahip olmaması ($r_1, r_2 < 0$) dır.

ii. (2.3) denkleminin tüm çözümlerinin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|r_{1,2}| < 1$ olmasıdır.

Uyarı 2.2. Literatürde, Teorem 2.2. *ii.* şartına *Spektral Kriter* denilmektedir. Ayrıca, asimtotik kararlılık kavramı yerine de *Schur kararlılık* kavramı kullanılmaktadır. Bu çalışma boyunca da *Spektral Kriter* ve *Schur kararlılık* ifadeleri kullanılacaktır.

Not 2.3. Teorem 2.2.'ye göre; (2.3) denkleminin hem Schur kararlılığı hem de salınımlılığı için gerek ve yeter şart $-1 < r_1, r_2 < 0$ olmasıdır.

Problemimiz, (2.3) denkleminin hem Schur kararlılığının hem de salınımlılığının sağlandığı durumda (2.5) denkleminin de hem Schur kararlılığının hem de salınımlılığının hangi şartlar altında nasıl sağlandığıdır. Bunun için öncelikle (Elaydi, 2005) deki tanımı ve Teorem 2.2.'ye göre aşağıdaki kritiği verelim.

Tanım 2.1. (2.3) denkleminin karakteristik kökleri $r_1, r_2 \in \boldsymbol{R}$ ve $x_1(n) = r_1^n\ \ , x_2(n) = r_2^n$ lineer bağımsız çözümler olmak üzere $|r_1| > |r_2|$ ise $x_1(n)$ *baskın (dominant) çözüm* ve r_1

baskın (dominant) karakteristik kök olarak adlandırılır. Aksi takdirde, $x_2(n)$ *baskın (dominant) çözüm* ve r_2 *baskın (dominant) karakteristik kök* olarak adlandırılır (Elaydi, 2005).

Buna göre (2.3) denkleminin genel çözümü $x(n)=r_1^n+r_2^n$ olmak üzere $|r_1|>|r_2|$ olsun. O halde

$$x(n)=r_1^n\left[1+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n\right]$$

olup $\left|\frac{r_2}{r_1}\right|<1$ dir. Buradan $n\to\infty$ iken $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n\to 0$ dır. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty}x(n)=\lim_{n\to\infty}r_1^n$ olur (Elaydi, 2005).

Kritik 2.2. (2.3) denklemi hem Schur kararlı hem salınımlı $(-1<r_1,r_2<0)$ olmak üzere

$$-1-r_1<h_1<-r_1\ ,\ -1-r_2<h_2<-r_2$$

eşitsizliklerini sağlayan h_1 ve h_2 için (2.5) denklemi de hem Schur kararlı hem salınımlıdır.

Şimdi, bu verilenlere göre $(-1<r_1,r_2<0)$ aralığındaki değerler için h_1 ve h_2 yi inceleyelim:

$$r_1=-\frac{1}{2}\ \text{için}\ -1-\left(-\frac{1}{2}\right)<h_1<-\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow-\frac{1}{2}<h_1<\frac{1}{2}$$

$$r_2=-\frac{1}{3}\ \text{için}\ -1-\left(-\frac{1}{3}\right)<h_2<-\left(-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow-\frac{2}{3}<h_2<\frac{1}{3}$$

elde edilir. Buna göre $l_i=\frac{i}{10},(i=1,2,...,9)$ ve $\alpha_1=1,\ \alpha_2=10,\ \beta_1=-1,\ \beta_2=1$ olmak üzere $x\in[\alpha_1,\alpha_2]$ ve $y\in[\beta_1,\beta_2]$ aralıklarına göre aşağıdaki tabloyu verelim:

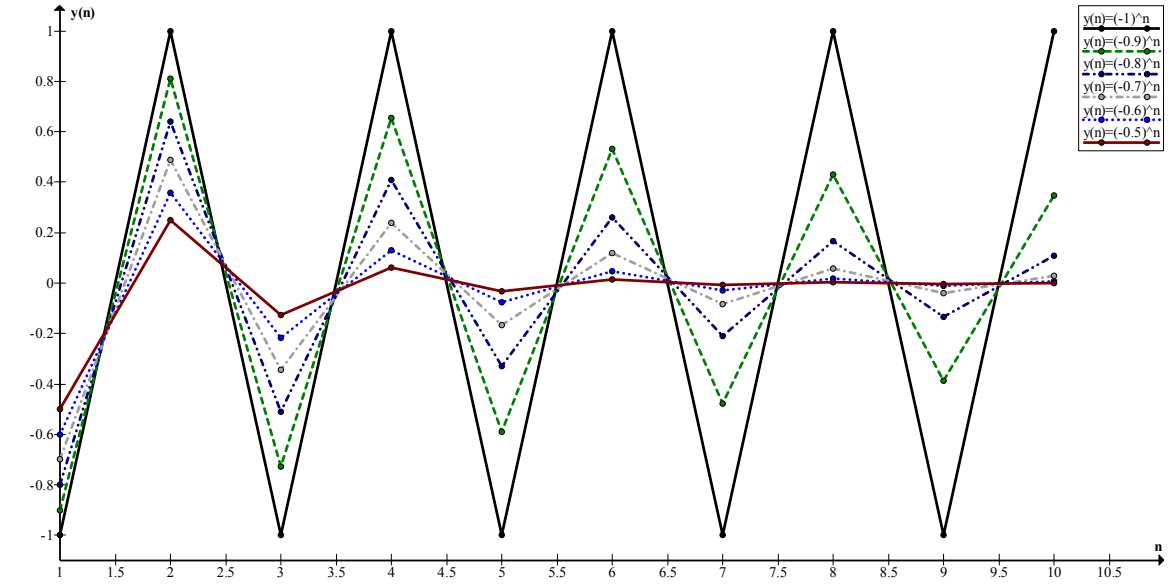
h_1	$\hat{r}_1=r_1+h_1$	h_2	$\hat{r}_2=r_2+h_2$	$y(n)=\hat{r}_1+\hat{r}_2$ **Genel Çözümü**	**Baskın (Dominant) Çözüm**
$h_1\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+$	-1^+	$h_2\to\left(\frac{1}{3}\right)^-$	0^-	$y(n)=\left(-1^+\right)^n+\left(0^-\right)^n$	$y(n)=\left(-1^+\right)^n$
$-\frac{1}{2}+l_1$	-0.9	$\frac{1}{3}-l_1$	-0.1	$y(n)=(-0.9)^n+(-0.1)^n$	$y(n)=(-0.9)^n$

$-\frac{1}{2}+l_2$	-0.8	$\frac{1}{3}-l_2$	-0.2	$y(n)=(-0.8)^n+(-0.2)^n$	$y(n)=(-0.8)^n$
$-\frac{1}{2}+l_3$	-0.7	$\frac{1}{3}-l_3$	-0.3	$y(n)=(-0.7)^n+(-0.3)^n$	$y(n)=(-0.7)^n$
$-\frac{1}{2}+l_4$	-0.6	$\frac{1}{3}-l_4$	-0.4	$y(n)=(-0.6)^n+(-0.4)^n$	$y(n)=(-0.6)^n$
$-\frac{1}{2}+l_5$	-0.5	$\frac{1}{3}-l_5$	-0.5	$y(n)=(-0.5)^n+(-0.5)^n$	$y(n)=(-0.5)^n$
$-\frac{1}{2}+l_6$	-0.4	$\frac{1}{3}-l_6$	-0.6	$y(n)=(-0.4)^n+(-0.6)^n$	$y(n)=(-0.6)^n$
$-\frac{1}{2}+l_7$	-0.3	$\frac{1}{3}-l_7$	-0.7	$y(n)=(-0.3)^n+(-0.7)^n$	$y(n)=(-0.7)^n$
$-\frac{1}{2}+l_8$	-0.2	$\frac{1}{3}-l_8$	-0.8	$y(n)=(-0.2)^n+(-0.8)^n$	$y(n)=(-0.8)^n$
$-\frac{1}{2}+l_9$	-0.1	$\frac{1}{3}-l_9$	-0.9	$y(n)=(-0.1)^n+(-0.9)^n$	$y(n)=(-0.9)^n$
$h_1\to\left(\frac{1}{2}\right)^-$	0^-	$h_2\to\left(-\frac{2}{3}\right)^+$	-1^+	$y(n)=\left(0^-\right)^n+\left(-1^+\right)^n$	$y(n)=\left(-1^+\right)^n$

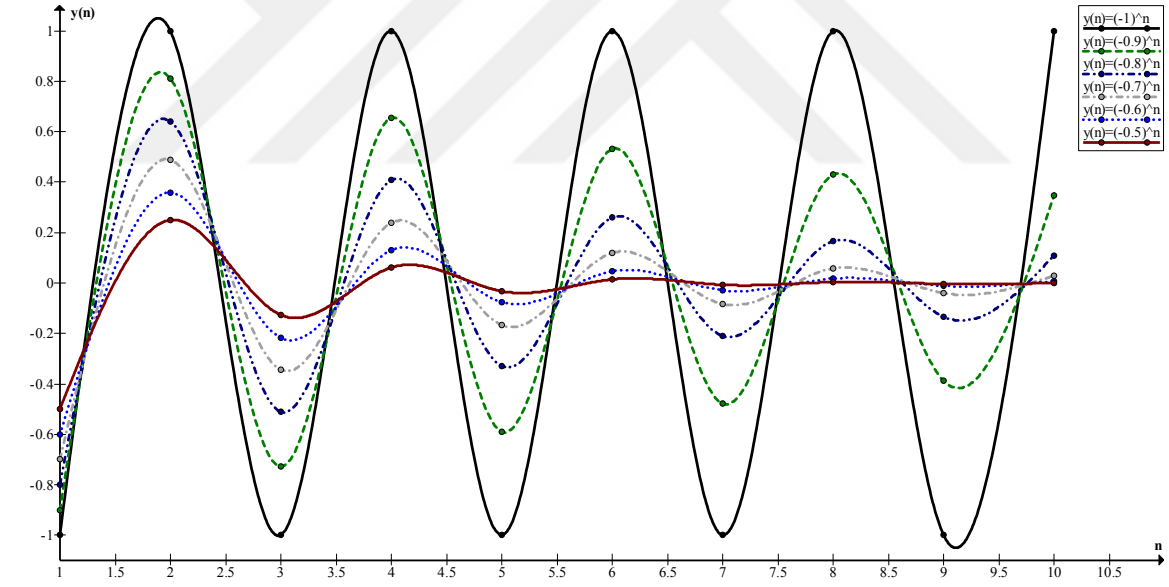
Tablo 2.2. $r_1=-\frac{1}{2}$ ve $r_2=-\frac{1}{3}$ için $\hat{r}_1=r_1+h_1$ ve $\hat{r}_2=r_2+h_2$ değerleri ile (2.5) denkleminin genel ve baskın (dominant) çözümü.

Tablo 2.2.'ye göre aşağıda vereceğimiz grafikler incelendiğinde h_1 ve h_2 ye bulunduğu aralıklarda sol ve sağ uçlara doğru değerler verdikçe (2.5) denkleminin hem Schur kararlılığının hem salınımlılığının ne şekilde değişime uğradığı görülecektir.

Not 2.4. (2.5) denkleminin çözümü bir dizi olduğundan noktaların hareketinin Schur kararlılığı incelenmektedir. Dolayısıyla aşağıda vereceğimiz grafikler Lineer Enterpolasyon yardımıyla dizi noktaları birleştirilmiş olarak Graph Version 4.3 programı ile çizilmiştir.



Şekil 2.3. $r_1 = -0.5$ ve $r_2 = -0.3333333333$ için $x \in [1,10]$, $y \in [-1,1]$ aralıklarına göre elde edilen $y(n) = \hat{r}_1^n + \hat{r}_2^n$ nin baskın (dominant) çözümlerinin bir grafikte gösterimi.



Şekil 2.4. $r_1 = -0.5$ ve $r_2 = -0.3333333333$ için $x \in [1,10]$, $y \in [-1,1]$ aralıklarına göre elde edilen $y(n) = \hat{r}_1^n + \hat{r}_2^n$ nin baskın (dominant) çözümlerinin Kübik Spline Enterpolasyon yardımıyla bir grafikte gösterimi.

(2.3) denkleminin Teorem 2.2.'ye göre hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı ile ilgili verilen şartlardan yola çıkarak (2.5) denkleminin de hem Schur kararlılığı hem salınımlılığını veren kritik görülmüş ve bu kritik yardımıyla da hedef problemimize ulaşılmıştır.

Şimdi, ikinci mertebeden fark denklemlerin karakteristik köklerini reel kabul ederek yapmış olduğumuz işlemleri, karakteristik köklerini karmaşık (kompleks) kabul ederek incelemeye çalışacağız.

2.3. Karmaşık Köklü İkinci Mertebeden Fark Denklemlerin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı

Karakteristik denkleminin kökleri $r_1, r_2 \in \boldsymbol{C}$ olan

$$x(n+2)-(r_1+r_2)x(n+1)+r_1.r_2x(n)=0 \qquad \textbf{(2.6)}$$

fark denklemini ele alalım. Burada; $r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta, \beta\neq 0$ dır. Bu fark denklem (Elaydi, 2005) deki

$$y(n+2)-p_1y(n+1)+p_2\,y(n)=0 \qquad \textbf{(2.7)}$$

fark denkleminde $p_1=-(r_1+r_2)$, $p_2=r_1.r_2$, $p_1, p_2 \in \mathbf{C}$ olduğu göz önüne alınarak elde edilmiştir. (2.6) denkleminin genel çözümü

$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \theta=arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),\ a,b\in \boldsymbol{R}$$

olmak üzere

$$x(n)=ar^n cos(n\theta-b)$$

dır (Elaydi, 2005).

Karakteristik denkleminin kökleri $\hat{r}_1, \hat{r}_2 \in \mathbf{C}$ olmak üzere (2.6) denkleminin bozunumu olan

$$y(n+2)-(\hat{r}_1+\hat{r}_2)y(n+1)+\hat{r}_1.\hat{r}_2y(n)=0 \qquad \textbf{(2.8)}$$

fark denklemini ele alalım. Burada; $h=x\pm iy$ olmak üzere

$$\hat{r}_1=r_1+h=(\alpha+x)+i(\beta+y)=\hat{\alpha}+i\hat{\beta}\ ,\hat{r}_2=r_2+h=(\alpha+x)-i(\beta+y)=\hat{\alpha}-i\hat{\beta}$$

dir. (2.8) denkleminin genel çözümü $x,y\in \boldsymbol{R}$ için

$$\hat{r}=\sqrt{(\alpha+x)^2+(\beta+y)^2}, \hat{\theta}=arctan\left(\frac{\beta+y}{\alpha+x}\right), (\beta+y)\neq 0, a,b\in \boldsymbol{R}$$

olmak üzere

$$y(n) = a\hat{r}^n \cos\left(n\hat{\theta} - b\right)$$

dir (Elaydi, 2005). Yapacağımız çalışmalarda kolaylık sağlaması için $a = 1,\ b = 0$ olarak kabul edeceğiz. Dolayısıyla (2.6) denkleminin genel çözümü $x(n) = r^n \cos(n\theta)$ ve (2.8) denkleminin genel çözümü $y(n) = \hat{r}^n \cos\left(n\hat{\theta}\right)$ olur.

Uyarı 2.3. Burada dikkat edilirse $|r_1| = |r_2| = r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ dir.

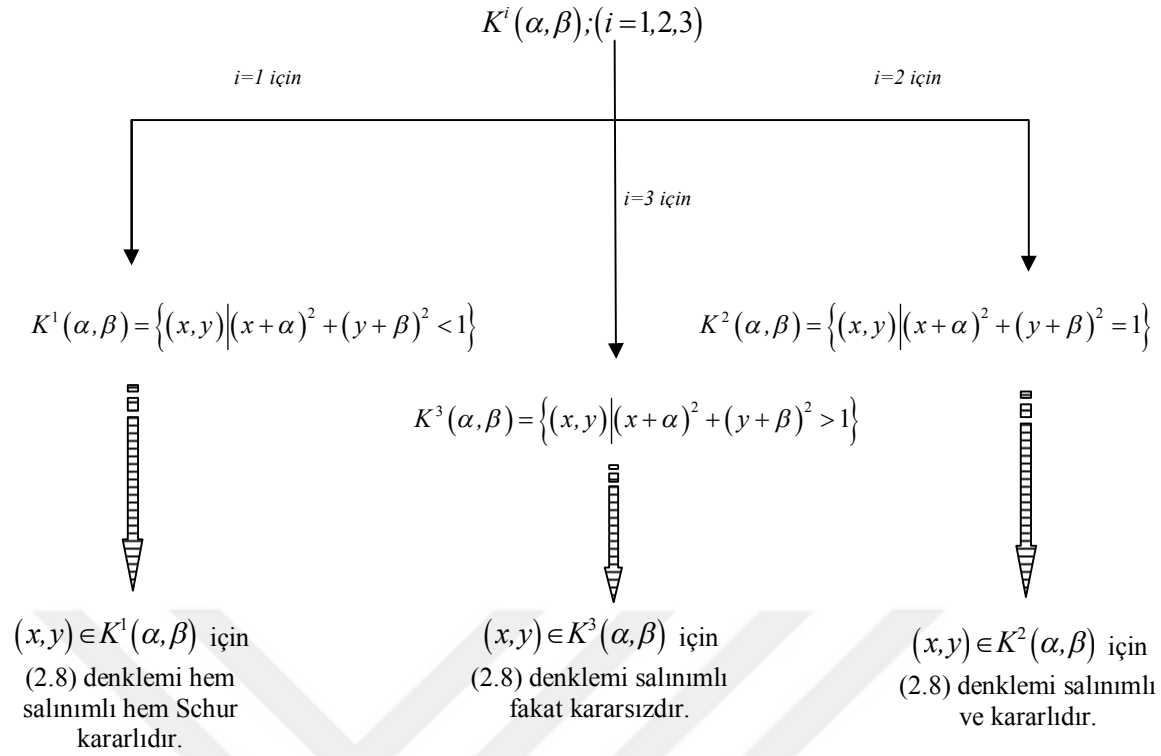
Kosinüs fonksiyonu salınımlı olduğu için (2.6) denkleminin genel çözümü olan *x(n)* salınımlıdır. Ancak, eşlenik karakteristik köklerin (karmaşık köklerin) konumuna bağlı olarak 3 farklı durumda *x(n)* çözümü salınımlıdır:

1. $r < 1$ ise $r_{1,2}$ birim diskin içinde olup *x(n)* çözümü sıfıra yakınsayarak salınımlıdır;
2. $r = 1$ ise $r_{1,2}$ birim diskin üzerinde olup *x(n)* çözümü sabit büyüklükte salınımlıdır;
3. $r > 1$ ise $r_{1,2}$ birim diskin dışında olup *x(n)* çözümü artan büyüklükte salınımlıdır

(Elaydi,2005).

Not 2.5. Teorem 2.2.' de geçen ve literatürde Spektral Kriter diye bilinen $|r_{1,2}| = r < 1$ nin aynı zamanda karmaşık sayılar için de kullanıldığını, dolayısıyla reel sayılar için *mutlak değer* kavramı olan ifadenin karmaşık sayılar için *modül* kavramı olduğunu biliyoruz. Buna göre, Spektral Kriter ve karmaşık sayılar için verdiğimiz yukarıdaki 3 farklı durum göz önünde bulundurulursa (2.6) denkleminin çözümünün hem Schur kararlı hem salınımlı olması için gerek ve yeter şart $|r_{1,2}| = r < 1$ olmasıdır.

Şimdi, (2.6) denkleminin salınımlılığının sağlandığı durumda (2.8) denkleminin de salınımlılığının sağlandığı durumları gösteren kümeleri verip şema halinde gösterelim:



Şema 2.1. $K^i(\alpha,\beta);(i=1,2,3)$ için (2.8) denkleminin salınımlılığını veren kümeler.

Şimdiki problemimiz, (2.6) denkleminin hem Schur kararlılığının hem de salınımlılığının sağlandığı durumda (2.8) denkleminin de hem Schur kararlılığının hem de salınımlılığının hangi şartlar altında sağlandığını incelemek ve çözümün nasıl hareket ettiğini görmektir. Bunun için Not 2.5.'e ve Şema 2.1.'e göre aşağıdaki kritiği vereceğiz.

Kritik 2.3. (2.6) denklemi hem Schur kararlı hem salınımlı ($|r_{1,2}|=r<1$) olmak üzere

$$K^1(\alpha,\beta)=\{(x,y)|(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2<1\} \qquad \textbf{(2.9)}$$

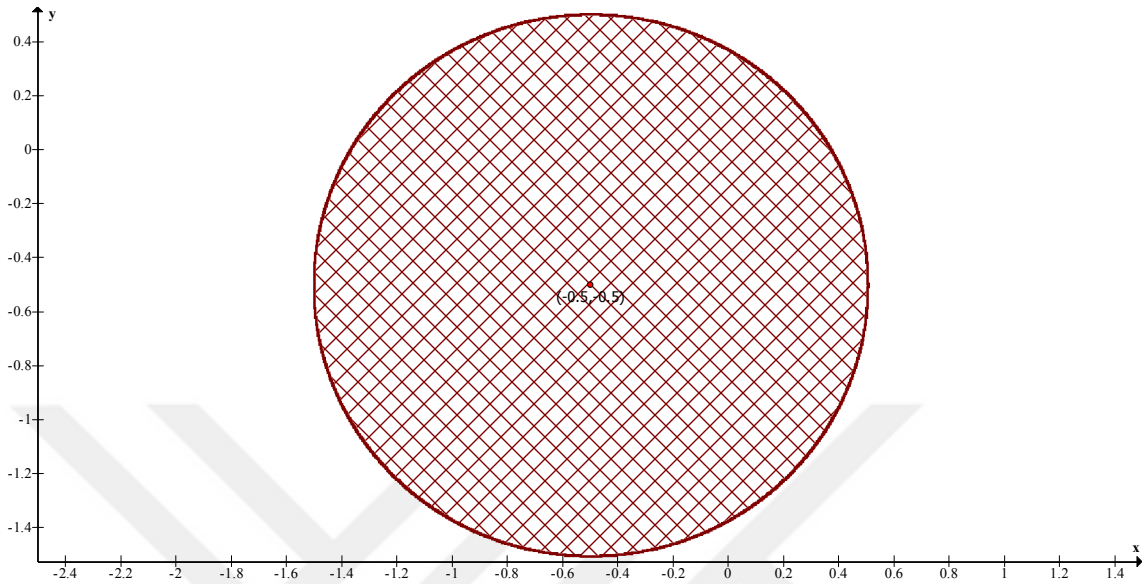
kümesinden alınan *(x,y) ler* için (2.8) denklemi de hem Schur kararlı hem salınımlıdır.

Şimdi, bu verilenlere göre ($|r_{1,2}|=r<1$) değerleri için $(x,y)\in K^1(\alpha,\beta)$ yi inceleyelim:

$r_1=0.5+0.5i,\ r_2=0.5-0.5i$ için $\alpha=0.5,\beta=0.5$ olduğundan

$$K^1(0.5,0.5)=\{(x,y)|(x+0.5)^2+(y+0.5)^2<1\}$$

elde edilir. Burada, aşağıda şekli verilen merkezi $M(-0.5,-0.5)$ olan birim disk bölgesi oluşur:

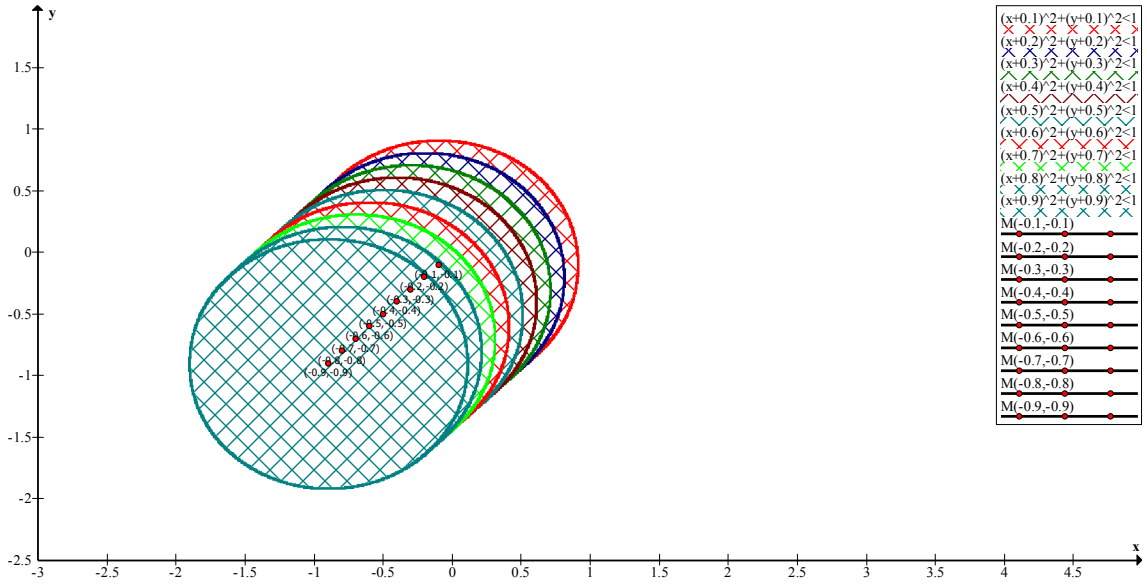


Şekil 2.5. $r_1 = 0.5 + 0.5i,\ r_2 = 0.5 - 0.5i$ için elde edilen $K^1(0.5,0.5) = \left\{(x,y)\middle|(x+0.5)^2 + (y+0.5)^2 < 1\right\}$ kümenin (birim diskin) grafiği.

Not 2.6. Kritik 2.3.'e göre; hem Schur kararlı hem salınımlı olan denklemin bozunum denkleminin, hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı için bir birim disk (küme) elde edildiği görülmektedir. Bu birim diskin (kümenin) içinden alınacak her bir $(x,y) \in K^1(\alpha,\beta)$ için bozunum denklemi hem Schur kararlı hem salınımlı olacaktır.

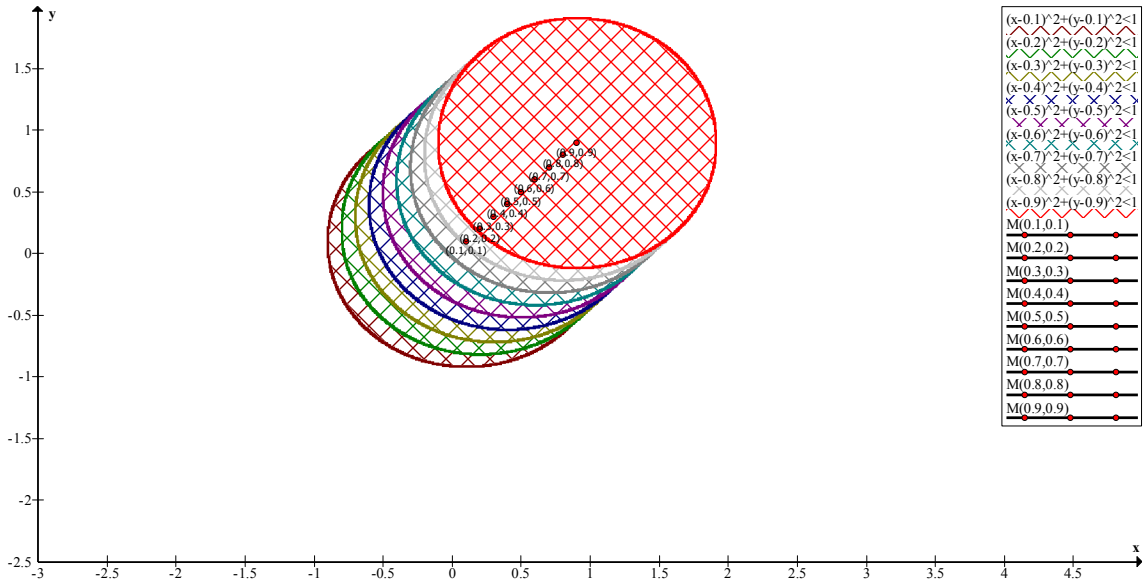
$(x,y) \in K^1(\alpha,\beta)$ noktaları ile ilgili işlemlere geçmeden önce oluşabilecek farklı $K^1(\alpha,\beta)$ birim diskleri (kümeleri) gösterelim:

- $r_1 = \alpha_j + i\beta_j,\ r_2 = \alpha_j - i\beta_j$ için $\alpha_j = \frac{j}{10}, \beta_j = \frac{j}{10}; (j = 1,2,...,9)$ olmak üzere $K^1(\alpha,\beta) = \left\{(x,y)\middle|(x+\alpha_j)^2 + (y+\beta_j)^2 < 1\right\}$ birim disklerin grafikleri aşağıda verilmiştir.



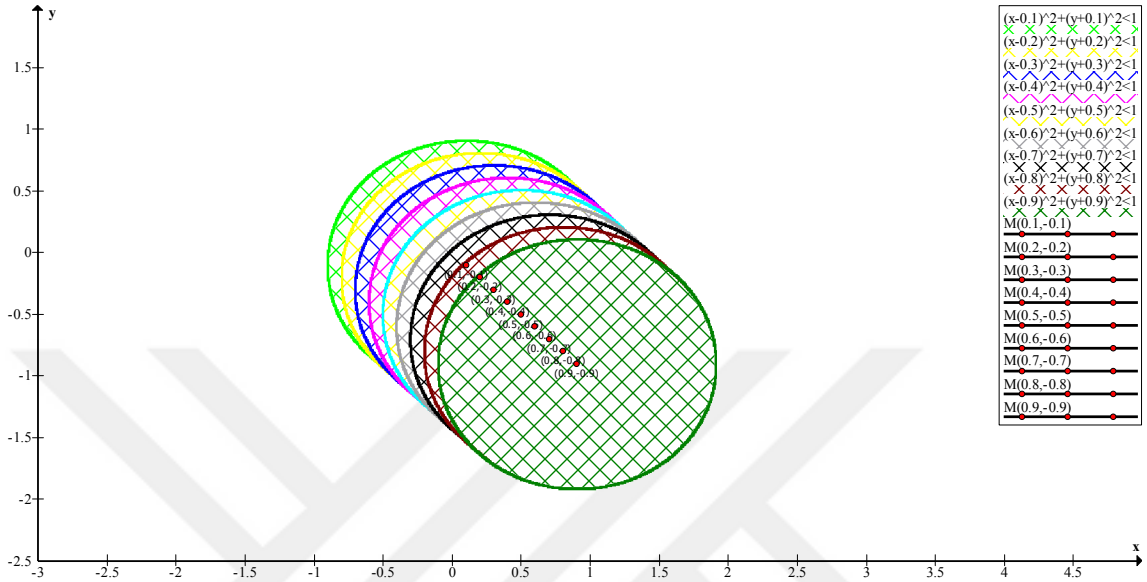
Şekil 2.5-a. $r_1=\alpha_j+i\beta_j,\ r_2=\alpha_j-i\beta_j$ için $\alpha_j=\frac{j}{10},\beta_j=\frac{j}{10};(j=1,2,...,9)$ olmak üzere $K^1(\alpha,\beta)=\left\{(x,y)\middle|(x+\alpha_j)^2+(y+\beta_j)^2<1\right\}$ birim disklerin bir grafikte gösterimi.

- $r_1=\alpha_j+i\beta_j,\ r_2=\alpha_j-i\beta_j$ için $\alpha_j=-\frac{j}{10},\beta_j=-\frac{j}{10};(j=1,2,...,9)$ olmak üzere $K^1(\alpha,\beta)=\left\{(x,y)\middle|(x+\alpha_j)^2+(y+\beta_j)^2<1\right\}$ birim disklerin grafikleri aşağıda verilmiştir.



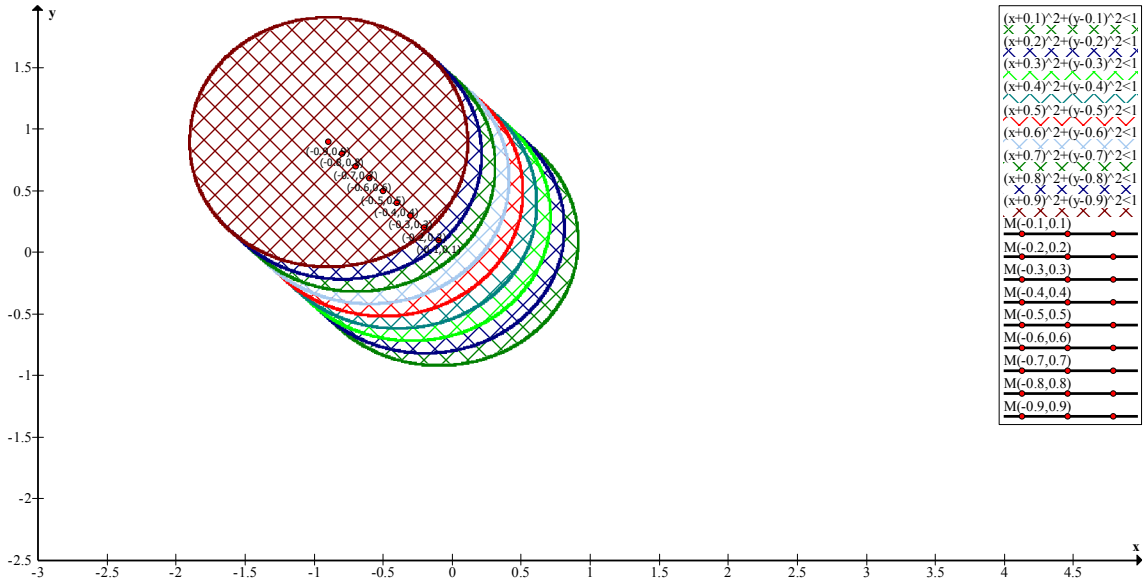
Şekil 2.5-b. $r_1=\alpha_j+i\beta_j,\ r_2=\alpha_j-i\beta_j$ için $\alpha_j=-\frac{j}{10},\beta_j=-\frac{j}{10};(j=1,2,...,9)$ olmak üzere $K^1(\alpha,\beta)=\left\{(x,y)\middle|(x+\alpha_j)^2+(y+\beta_j)^2<1\right\}$ birim disklerin bir grafikte gösterimi.

- $r_1=\alpha_j+i\beta_j,\ r_2=\alpha_j-i\beta_j$ için $\alpha_j=-\frac{j}{10},\beta_j=\frac{j}{10};(j=1,2,...,9)$ olmak üzere $K(x,y)=\left\{(x,y)\middle|(x+\alpha_j)^2+(y+\beta_j)^2<1\right\}$ birim disklerin grafikleri aşağıda verilmiştir.



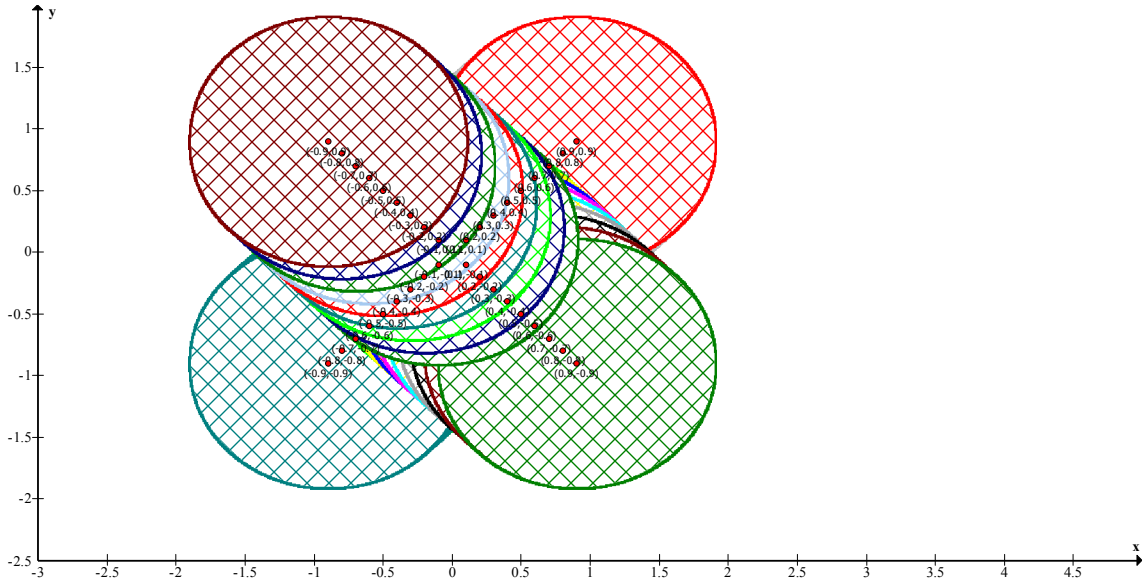
Şekil 2.5-c. $r_1=\alpha_j+i\beta_j,\ r_2=\alpha_j-i\beta_j$ için $\alpha_j=-\frac{j}{10},\beta_j=\frac{j}{10};(j=1,2,...,9)$ olmak üzere $K^1(\alpha,\beta)=\left\{(x,y)\middle|(x+\alpha_j)^2+(y+\beta_j)^2<1\right\}$ birim disklerin bir grafikte gösterimi.

- $r_1=\alpha_j+i\beta_j,\ r_2=\alpha_j-i\beta_j$ için $\alpha_j=\frac{j}{10},\beta_j=-\frac{j}{10};(j=1,2,...,9)$ olmak üzere $K^1(\alpha,\beta)=\left\{(x,y)\middle|(x+\alpha_j)^2+(y+\beta_j)^2<1\right\}$ birim disklerin grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.5-d. $r_1=\alpha_j+i\beta_j,\ r_2=\alpha_j-i\beta_j$ için $\alpha_j=\frac{j}{10},\beta_j=-\frac{j}{10};(j=1,2,...,9)$ olmak üzere $K^1(\alpha,\beta)=\left\{(x,y)\middle|(x+\alpha_j)^2+(y+\beta_j)^2<1\right\}$ birim disklerin bir grafikte gösterimi.

Aşağıda Şekil 2.5-e.'de ise, Şekil 2.5-a,b,c,d'de elde ettiğimiz merkezi farklı olan birim diskler bir grafikte gösterilmiştir. Bu grafikler bir kural üzerine elde edildiği gibi bir kuraldan bağımsız olarak da merkezi farklı birim diskler şeklinde elde edilebilir ki burada anlatılmak istenen de budur. Ayrıca, Şekil-2.5'i ele alarak göstereceğimiz üzere, bu birim disklerin her birinin içinden alınabilecek $(x,y)\in K^1(\alpha,\beta)$ noktaları için (2.8) denklemi hem Schur kararlı hem salınımlı olacaktır.



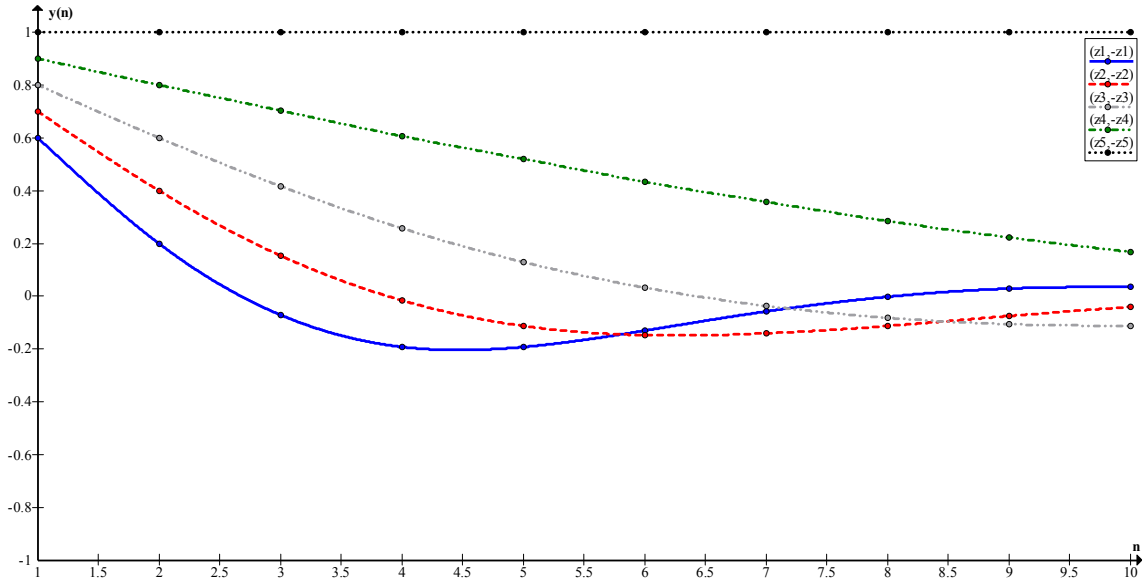
Şekil 2.5-e. $r_1=\alpha_j+i\beta_j,\ r_2=\alpha_j-i\beta_j$ için Şekil 2.5-a,b,c,d.'de elde edilen $K^1(\alpha,\beta)=\left\{(x,y)\middle|(x+\alpha_j)^2+(y+\beta_j)^2<1\right\}$ birim disklerin bir grafikte gösterimi.

Şimdi; Şekil-2.5'te elde edilen merkezi M(-0.5,-0.5) olan birim diskin içinden alacağımız $(x,y)\in K^1(\alpha,\beta)$ noktaları için, (2.8) denkleminin genel çözümünün hareketinin hem Schur kararlı hem salınımlı olduğunu gösteren grafikleri vereceğiz. Bunun için Şekil 2.5.'e göre $z_i=\frac{i}{10},(i=1,2...,5)$ ve $x_1=1,x_2=10,y_1=-1,y_2=1$ olmak üzere $x\in[x_1,x_2]$ ve $y\in[y_1,y_2]$ aralıklarına göre değerleri gösteren aşağıdaki tabloyu verelim:

$(x,y)=(z_i,-z_i)$	$\hat{r}_1=(\alpha+x)+i(\beta+y)$	$\hat{r}_2=(\alpha+x)-i(\beta+y)$	$\hat{r}=\sqrt{(\alpha+x)^2+(\beta+y)^2}$	$\hat{\theta}=arc\tan\left(\frac{\beta+y}{\alpha+x}\right)$
$(z_1,-z_1)$	$0.6+i0.4$	$0.6-i0.4$	0,7211102551	33,690067526
$(z_2,-z_2)$	$0.7+i0.3$	$0.7-i0.3$	0,7615773106	23,1985905136
$(z_3,-z_3)$	$0.8+i0.2$	$0.8-i0.2$	0,8246211251	14,0362434679
$(z_4,-z_4)$	$0.9+i0.1$	$0.9-i0.1$	0,9055385138	6,3401917459
$(z_5,-z_5)$	$1+i0$	$1-i0$	1	0

Tablo 2.3. $r_1=0.5+0.5i,\ r_2=0.5-0.5i$ için $\hat{r}_1=(\alpha+x)+i(\beta+y)$, $\hat{r}_2=(\alpha+x)-i(\beta+y)$ ve $\hat{r}=\sqrt{(\alpha+x)^2+(\beta+y)^2},\hat{\theta}=arc\tan\left(\frac{\beta+y}{\alpha+x}\right)$ değerleri.

Tablo 2.3.'e göre elde ettiğimiz aşağıdaki grafikler incelendiğinde merkezi M(-0.5,-0.5) olan birim diskin içinden alınan $(x,y)\in K^1(\alpha,\beta)$ noktalarına göre (2.8) denkleminin hem Schur kararlılığının hem salınımlılığının ne şekilde değişime uğradığı görülecektir.



Şekil 2.6. $r_1 = 0.5+0.5i,\ r_2 = 0.5-0.5i$ için $x \in [1,10]$, $y \in [-1,1]$ aralıklarına göre elde edilen $y(n) = \hat{r}^n \cos(n\hat{\theta})$ lerin Kübik Spline Enterpolasyon yardımıyla bir grafikte gösterimi.

Şimdi, (2.6) denkleminin bozunumu olan (2.8) denkleminin bozunumunu ve elde edilecek olan yeni bozunum denklemin de bozunumunu alıp bu işlemleri tekrarlayarak elde edilebilecek bozunum denklemlerini verelim ve bunlarla oluşabilecek hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı sağlayan birim diskleri göstermeye çalışalım.

2.4. Karmaşık Köklü İkinci Mertebeden Fark Denklemlerin Ardışık Bozunum Denklemleri

Karakteristik denkleminin kökleri $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \in \boldsymbol{C}$ olmak üzere (2.8) denkleminin bozunumu olan

$$\tilde{y}(n+2) - (\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2)\tilde{y}(n+1) + \tilde{r}_1.\tilde{r}_2\tilde{y}(n) = 0 \qquad \textbf{(2.10)}$$

fark denklemini ele alalım. Burada; $h = x \pm y$ olmak üzere

$$\tilde{r}_1 = \hat{r}_1 + h = (\hat{\alpha} + x) + i(\hat{\beta} + y) = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta} \ , \tilde{r}_2 = \hat{r}_2 + h = (\hat{\alpha} + x) - i(\hat{\beta} + y) = \tilde{\alpha} - i\tilde{\beta}$$

dir. (2.10) denkleminin genel çözümü $x, y \in \boldsymbol{R}$ için

$$\tilde{r} = \sqrt{(\hat{\alpha}+x)^2 + (\hat{\beta}+y)^2}, \tilde{\theta} = tan^{-1}\left(\frac{\hat{\beta}+y}{\hat{\alpha}+x}\right), (\hat{\beta}+y) \neq 0$$

olmak üzere

$$\tilde{y}(n) = \tilde{r}^n \cos(n\tilde{\theta})$$

dir.

Şimdi, (2.8) denkleminin bozunumu olan (2.10) denkleminin hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı için Kritik 2.3.'te olduğu gibi bir küme (birim disk) elde edilecektir. Bu kümeyi verip elde edilecek olan birim disk ile Kritik 2.3.'te elde edilen birim diski birlikte göstereceğiz.

Kritik 2.4. (2.8) denklemi hem Schur kararlı hem salınımlı olmak üzere

$$\hat{K}^1(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \left\{(x,y)\middle|(x+\hat{\alpha})^2 + (y+\hat{\beta})^2 < 1\right\} \qquad \textbf{(2.11)}$$

kümesinden alınan *(x,y) ler* için (2.10) denklemi de hem Schur kararlı hem salınımlıdır.

Şimdi, bu verilenlere göre $(|r_{1,2}| = r < 1)$ değerleri için $(x,y) \in \hat{K}^1(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ yi inceleyelim:

$r_1 = 0.5 + 0.5i,\ r_2 = 0.5 - 0.5i$ için $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ olduğundan

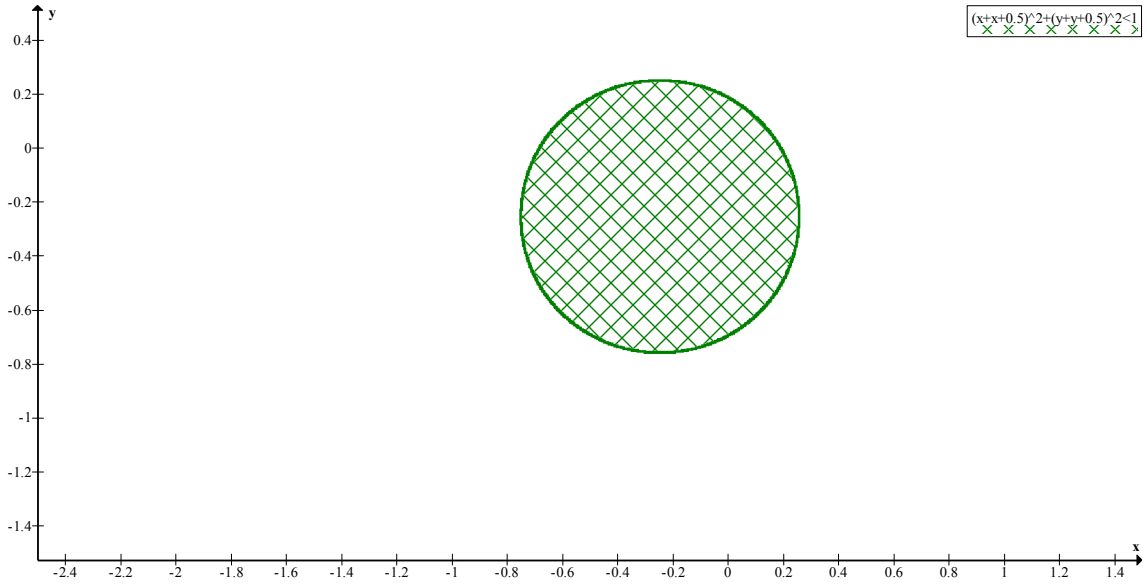
$$\hat{K}^1(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \left\{(x,y)\middle|(x+\hat{\alpha})^2 + (y+\hat{\beta})^2 < 1\right\}$$

$$\hat{K}^1(\alpha+x,\beta+y) = \left\{(x,y)\middle|(x+(\alpha+x))^2 + (y+(\beta+y))^2 < 1\right\}$$

$$\hat{K}^1(0.5+x,0.5+y) = \left\{(x,y)\middle|(x+(0.5+x))^2 + (y+(0.5+y))^2 < 1\right\}$$

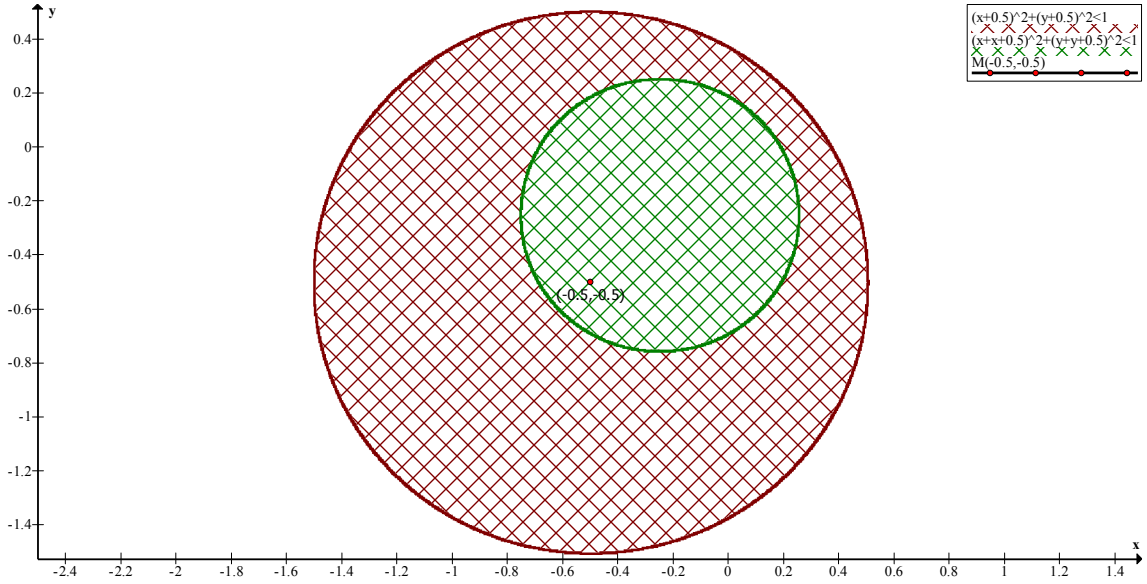
$$\hat{K}^1(0.5+x,0.5+y) = \left\{(x,y)\middle|(x+x+0.5)^2 + (y+y+0.5)^2 < 1\right\}$$

elde edilir. Burada, merkezi değişen ve hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı sağlanan Şekil 2.5.'te elde edilen birim diskten küçük yeni bir birim disk bölgesi aşağıda verildiği gibi oluşur:



Şekil 2.7. $r_1 = 0.5 + 0.5i,\ r_2 = 0.5 - 0.5i$ için elde edilen
$\hat{K}^1(0.5+x, 0.5+y) = \left\{(x,y) \middle| (x+x+0.5)^2 + (y+y+0.5)^2 < 1\right\}$ kümenin (birim diskin) grafiği.

Şimdi, (2.6) denkleminin bozunumu olan (2.8) denklemi ile oluşan Şekil 2.5.'teki birim disk bölgesi ve (2.8) denkleminin bozunumu olan (2.10) denklemi ile oluşan Şekil 2.7.'deki birim disk bölgesini birlikte gösteren grafiği verelim:



Şekil 2.8. $r_1 = 0.5 + 0.5i,\ r_2 = 0.5 - 0.5i$ için elde edilen Şekil 2.5. ve Şekil 2.7.'nin bir grafikte gösterimi.

Şekil 2.8.'de görüldüğü gibi (2.6) denkleminin bozunumunu bozunuma uğrattığımızda, (2.6) denkleminin bozunumundan elde edilen hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı, içinden alınabilecek $(x,y)\in K^1(\alpha,\beta)$ ile sağlayan birim disk bölgesinden daha küçük (veya dar) bir birim disk bölgesi elde edilebileceği görülmüştür. Aynı şekilde bu yeni birim disk bölgesinin içinden alınabilecek $(x,y)\in \hat{K}^1(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ ile de hem Schur kararlılık hem salınımlılık sağlanmış olacaktır. Çünkü Şekil 2.7.'de gösterilen bu yeni birim disk bölgesi Şekil 2.5.'te elde ettiğimiz birim disk bölgesinin içinde bir bölge olarak elde edilmiştir ve Şekil 2.8.'de de bu açık bir şekilde gösterilmiştir.

Şimdi, (2.6) denkleminin bozunumu işlemini birbirini bozunum ede ede belli bir yere kadar tekrarlayalım ve bu arka arkaya yapılan işlemleri bir tablo halinde gösterip grafiklerini çizelim:

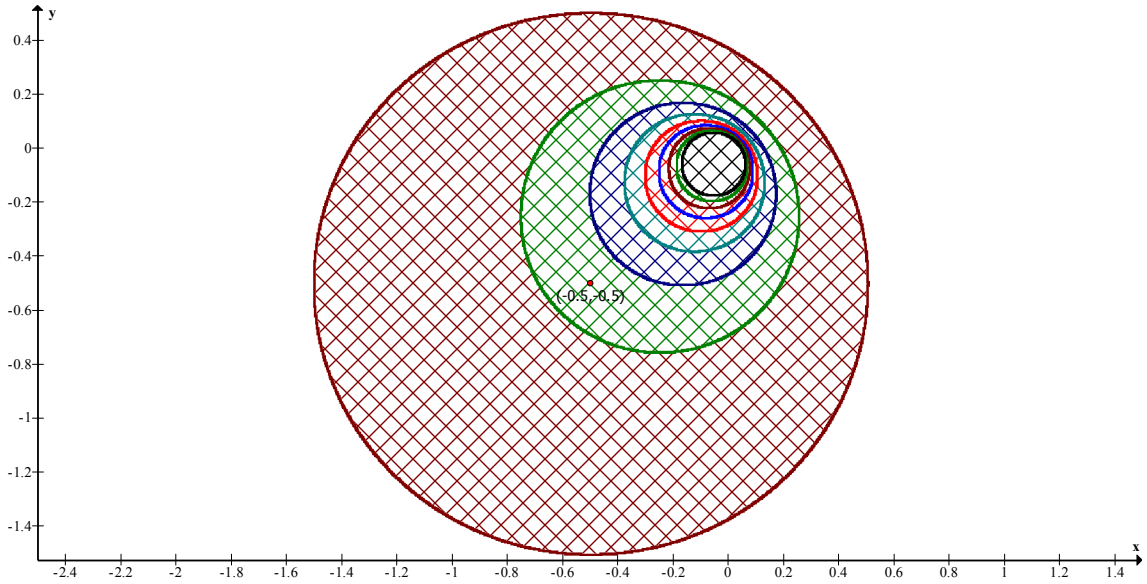
	Denklem	***Bozunum Denklem***
1.	$x(n+2)-(r_1+r_2)x(n+1)+r_1.r_2x(n)=0,\ r_{1,2}\in\mathbf{C}$	$y(n+2)-(\hat{r}_1+\hat{r}_2)y(n+1)+\hat{r}_1.\hat{r}_2y(n)=0,\ \hat{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$
2.	$y(n+2)-(\hat{r}_1+\hat{r}_2)y(n+1)+\hat{r}_1.\hat{r}_2y(n)=0,\ \hat{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$	$\tilde{y}(n+2)-(\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\tilde{y}(n+1)+\tilde{r}_1.\tilde{r}_2\tilde{y}(n)=0,\ \tilde{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$
3.	$\tilde{y}(n+2)-(\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\tilde{y}(n+1)+\tilde{r}_1.\tilde{r}_2\tilde{y}(n)=0,\ \tilde{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$	$\breve{y}(n+2)-(\breve{r}_1+\breve{r}_2)\breve{y}(n+1)+\breve{r}_1.\breve{r}_2\breve{y}(n)=0,\ \breve{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$
4.	$\breve{y}(n+2)-(\breve{r}_1+\breve{r}_2)\breve{y}(n+1)+\breve{r}_1.\breve{r}_2\breve{y}(n)=0,\ \breve{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$	$\overline{y}(n+2)-(\overline{r}_1+\overline{r}_2)\overline{y}(n+1)+\overline{r}_1.\overline{r}_2\overline{y}(n)=0,\ \overline{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$
5.	$\overline{y}(n+2)-(\overline{r}_1+\overline{r}_2)\overline{y}(n+1)+\overline{r}_1.\overline{r}_2\overline{y}(n)=0,\ \overline{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$	$\dot{y}(n+2)-(\dot{r}_1+\dot{r}_2)\dot{y}(n+1)+\dot{r}_1.\dot{r}_2\dot{y}(n)=0,\ \dot{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$
6.	$\dot{y}(n+2)-(\dot{r}_1+\dot{r}_2)\dot{y}(n+1)+\dot{r}_1.\dot{r}_2\dot{y}(n)=0,\ \dot{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$	$\ddot{y}(n+2)-(\ddot{r}_1+\ddot{r}_2)\ddot{y}(n+1)+\ddot{r}_1.\ddot{r}_2\ddot{y}(n)=0,\ \ddot{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$
7.	$\ddot{y}(n+2)-(\ddot{r}_1+\ddot{r}_2)\ddot{y}(n+1)+\ddot{r}_1.\ddot{r}_2\ddot{y}(n)=0,\ \ddot{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$	$\ddot{\overline{y}}(n+2)-(\ddot{\overline{r}}_1+\ddot{\overline{r}}_2)\ddot{\overline{y}}(n+1)+\ddot{\overline{r}}_1.\ddot{\overline{r}}_2\ddot{\overline{y}}(n)=0,\ \ddot{\overline{r}}_{1,2}\in\mathbf{C}$
8.	$\ddot{\overline{y}}(n+2)-(\ddot{\overline{r}}_1+\ddot{\overline{r}}_2)\ddot{\overline{y}}(n+1)+\ddot{\overline{r}}_1.\ddot{\overline{r}}_2\ddot{\overline{y}}(n)=0,\ \ddot{\overline{r}}_{1,2}\in\mathbf{C}$	$\hat{\overline{y}}(n+2)-(\hat{\overline{r}}_1+\hat{\overline{r}}_2)\hat{\overline{y}}(n+1)+\hat{\overline{r}}_1.\hat{\overline{r}}_2\hat{\overline{y}}(n)=0,\ \hat{\overline{r}}_{1,2}\in\mathbf{C}$
9.	$\hat{\overline{y}}(n+2)-(\hat{\overline{r}}_1+\hat{\overline{r}}_2)\hat{\overline{y}}(n+1)+\hat{\overline{r}}_1.\hat{\overline{r}}_2\hat{\overline{y}}(n)=0,\ \hat{\overline{r}}_{1,2}\in\mathbf{C}$	$\vec{y}(n+2)-(\vec{r}_1+\vec{r}_2)\vec{y}(n+1)+\vec{r}_1.\vec{r}_2\vec{y}(n)=0,\ \vec{r}_{1,2}\in\mathbf{C}$

Tablo 2.4. $r_1=0.5+0.5i,\ r_2=0.5-0.5i$ olmak üzere verilen denklemler ve bozunum denklemleri.

	$h = x \pm y$ *Olmak Üzere* *Bozunuma Uğrayan Karakteristik Kökler*	*Bozunum Denklemlerin Birim Disk Bölgesi*
1.	$\hat{r}_1 = r_1 + h = (\alpha + x) + i(\beta + y) = \hat{\alpha} + i\hat{\beta},$ $\hat{r}_2 = r_2 + h = (\alpha + x) - i(\beta + y) = \hat{\alpha} - i\hat{\beta}$	$\hat{K}^1(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \left\{(x,y)\middle\vert(x+\hat{\alpha})^2 + (y+\hat{\beta})^2 < 1\right\}$
2.	$\tilde{r}_1 = \hat{r}_1 + h = (\hat{\alpha} + x) + i(\hat{\beta} + y) = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta},$ $\tilde{r}_2 = \hat{r}_2 + h = (\hat{\alpha} + x) - i(\hat{\beta} + y) = \tilde{\alpha} - i\tilde{\beta}$	$\tilde{K}^1(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) = \left\{(x,y)\middle\vert(x+\tilde{\alpha})^2 + (y+\tilde{\beta})^2 < 1\right\}$
3.	$\breve{r}_1 = \tilde{r}_1 + h = (\tilde{\alpha} + x) + i(\tilde{\beta} + y) = \breve{\alpha} + i\breve{\beta},$ $\breve{r}_2 = \tilde{r}_2 + h = (\tilde{\alpha} + x) - i(\tilde{\beta} + y) = \breve{\alpha} - i\breve{\beta}$	$\breve{K}^1(\breve{\alpha},\breve{\beta}) = \left\{(x,y)\middle\vert(x+\breve{\alpha})^2 + (y+\breve{\beta})^2 < 1\right\}$
4.	$\overline{r}_1 = \breve{r}_1 + h = (\breve{\alpha} + x) + i(\breve{\beta} + y) = \overline{\alpha} + i\overline{\beta},$ $\overline{r}_2 = \breve{r}_2 + h = (\breve{\alpha} + x) - i(\breve{\beta} + y) = \overline{\alpha} - i\overline{\beta}$	$\overline{K}^1(\overline{\alpha},\overline{\beta}) = \left\{(x,y)\middle\vert(x+\overline{\alpha})^2 + (y+\overline{\beta})^2 < 1\right\}$
5.	$\dot{r}_1 = \overline{r}_1 + h = (\overline{\alpha} + x) + i(\overline{\beta} + y) = \dot{\alpha} + i\dot{\beta},$ $\dot{r}_2 = \overline{r}_2 + h = (\overline{\alpha} + x) - i(\overline{\beta} + y) = \dot{\alpha} - i\dot{\beta}$	$\dot{K}^1(\dot{\alpha},\dot{\beta}) = \left\{(x,y)\middle\vert(x+\dot{\alpha})^2 + (y+\dot{\beta})^2 < 1\right\}$
6.	$\ddot{r}_1 = \dot{r}_1 + h = (\dot{\alpha} + x) + i(\dot{\beta} + y) = \ddot{\alpha} + i\ddot{\beta},$ $\ddot{r}_2 = \dot{r}_2 + h = (\dot{\alpha} + x) - i(\dot{\beta} + y) = \ddot{\alpha} - i\ddot{\beta}$	$\ddot{K}^1(\ddot{\alpha},\ddot{\beta}) = \left\{(x,y)\middle\vert(x+\ddot{\alpha})^2 + (y+\ddot{\beta})^2 < 1\right\}$
7.	$\dddot{r}_1 = \ddot{r}_1 + h = (\ddot{\alpha} + x) + i(\ddot{\beta} + y) = \dddot{\alpha} + i\dddot{\beta},$ $\dddot{r}_2 = \ddot{r}_2 + h = (\ddot{\alpha} + x) - i(\ddot{\beta} + y) = \dddot{\alpha} - i\dddot{\beta}$	$\dddot{K}^1(\dddot{\alpha},\dddot{\beta}) = \left\{(x,y)\middle\vert(x+\dddot{\alpha})^2 + (y+\dddot{\beta})^2 < 1\right\}$
8.	$\hat{r}_1 = \dddot{r}_1 + h = (\dddot{\alpha} + x) + i(\dddot{\beta} + y) = \hat{\alpha} + i\hat{\beta},$ $\hat{r}_2 = \dddot{r}_2 + h = (\dddot{\alpha} + x) - i(\dddot{\beta} + y) = \hat{\alpha} - i\hat{\beta}$	$\hat{K}^1(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \left\{(x,y)\middle\vert(x+\hat{\alpha})^2 + (y+\hat{\beta})^2 < 1\right\}$
9.	$\vec{r}_1 = \hat{r}_1 + h = (\hat{\alpha} + x) + i(\hat{\beta} + y) = \vec{\alpha} + i\vec{\beta},$ $\vec{r}_2 = \hat{r}_2 + h = (\hat{\alpha} + x) - i(\hat{\beta} + y) = \vec{\alpha} - i\vec{\beta}$	$\vec{K}^1(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \left\{(x,y)\middle\vert(x+\vec{\alpha})^2 + (y+\vec{\beta})^2 < 1\right\}$

Tablo 2.5. Tablo 2.4.'te verilen bozunum denklemlerin karakteristik kökleri ve birim disk bölgeleri.

Şimdi ise Tablo 2.4. ve Tablo 2.5.'i göz önüne alarak, elde edilen birim disk bölgelerini bir şekilde aşağıda göstereceğiz:



Şekil 2.9. Tablo 2.4. ve Tablo 2.5.'te elde edilen bozunum denklemlerin oluşturduğu birim disk bölgelerinin bir grafikte gösterimi.

Şekil 2.9.'da görüldüğü üzere bir denklemi bozunuma uğratıp bozunumlarını da arka arkaya bozunuma uğrattığımızda oluşan birim disklerin merkezleri ile birlikte çapları da değişmekle beraber elde edilen her diskin içinden alınacak olan *(x,y)* ler için hem Schur kararlılık hem salınımlılık sağlanmış olacaktır.

(2.6) denkleminin (Elaydi,2005) de verilen 3 farklı duruma ve Spektral Kriter'ine göre hem Schur kararlı hem salınımlı olmasından yola çıkarak (2.6) denkleminin bozunumu olan (2.8) denkleminin de hem Schur kararlı hem salınımlı olduğu şartı veren kritik ortaya çıkmış ve bu kritik yardımıyla hedeflenen probleme ulaşılmıştır.

Şimdi, ikinci mertebeden bir fark denklemini matris formatında yazıp sistem haline getirerek çalışmalarımızı fark denklem sistemleri üzerinden gerçekleştirelim. Bunun için önce N.mertebeden bir fark denklemini N-boyutlu lineer sistemle göstereceğiz.

3. FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN HEM SCHUR KARARLILIĞI HEM SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, fark denklem sistemlerinin hem Schur kararlılığı hem salınımlılığını sağlayan sonuçlar verilmiştir.

3.1. N. Mertebeden Fark Denkleminin N-Boyutlu Lineer Sistemle Gösterilişi

$[n_0, n_1]$ aralığında tanımlı N. mertebeden, homojen, sabit katsayılı

$$y(n+N)+p_1y(n+N-1)+p_2y(n+N-2)+\ldots+p_{N-1}y(n+1)+p_Ny(n)=0 \tag{3.1}$$

lineer fark denklemini ele alalım. Bu denklem için

$$\begin{aligned} &y(n)=y_1(n)\\ &y(n+1)=y_2(n)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y(n+N-1)=y_N(n) \end{aligned}$$

olsun. Bu halde (3.1) denklemini

$$\begin{aligned} &y_1(n+1)=y_2(n)\\ &y_2(n+1)=y_3(n)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y_{N-1}(n+1)=y_N(n)\\ &y_N(n+1)=-p_Ny_1(n)-p_{N-1}y_2(n)-\ldots-p_2y_{N-1}(n)-p_1y_N(n) \end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklinde N-boyutlu bir fark sistemi olarak yazabiliriz. (3.2) sistemini de

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ -p_N & -p_{N-1} & \ldots & -p_2 & -p_1 \end{pmatrix}; y(n)=\begin{pmatrix} y_1(n)\\ y_2(n)\\ \vdots\\ y_{N-1}(n)\\ y_N(n) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$y(n+1)=Ay(n) \tag{3.3}$$

matris-vektör şeklinde yazabiliriz (Akın ve Bulgak, 1998). Verilen bu N. merteben fark denkleminin birinci mertebeden sisteme dönüşümünü, $N=2$ için düşünerek daha önce vermiş olduğumuz (2.3) ikinci mertebeden fark denklemini fark sistemi halinde gösterelim ve çalışmalarımızı bu dönüşüm sistemi ile sürdürelim.

3.2. İki-Boyutlu Birinci Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı

(2.3) denklemi (3.3) sistemine göre yazarsak,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r_1.r_2 & r_1+r_2 \end{pmatrix} \; ; \; y(n)=\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$y(n+1)=Ay(n) \qquad \textbf{(3.4)}$$

şeklinde elde edilir. Bu verilenlere göre (2.3) denkleminin karakteristik kökleri olan $r_1, r_2 \in \boldsymbol{R}$, aynı zamanda (3.4) denklem sisteminin $\lambda_1(A)=r_1 \in \boldsymbol{R}; \lambda_2(A)=r_2 \in \boldsymbol{R}$ karakteristik denkleminin kökleri (öz değerleri) olur. O halde, (2.3) denklemi için yapmış olduğumuz çalışmalar (3.4) denklem sistemi için de sağlanmış olacaktır.

Şimdi, ikinci mertebeden fark denklemleri için yapmış olduğumuz çalışmaları (3.4) fark denklem sistemine uyarlayalım. (2.3) denkleminin Schur kararlılığı ve salınımlılığı için verdiğimiz Teorem 2.2.'yi (3.4) denklem sistemi için düşünecek olursak;

1. İki-Boyutlu Sistemde Schur Kararlılık: (3.4) denklem sisteminin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\lambda_{1,2}(A)|<1$ olmasıdır. Bu kritere literatürde *Spektral Kriter* denildiğini daha önce söylemiştik (Akın ve Bulgak, 1998; Elaydi, 2005; Duman, 2008).

2. İki-Boyutlu Sistemde Salınımlılık: (3.4) denklem sisteminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart $\lambda_{1,2}(A)<0$ olmasıdır (Elaydi, 2005).

3. İki-Boyutlu Sistemde Hem Schur Kararlılık Hem Salınımlılık: (3.4) denklem sisteminin hem Schur kararlı hem salınımlı olması için gerek ve yeter şart $-1<\lambda_{1,2}(A)<0$ olmasıdır.

Şimdi ise yukarıdaki fark denklem sistemi ile ilgili işlemlere benzer şekilde, (3.4) sisteminin bozunumu olan fark denklem sistemini vereceğiz ve yaptığımız işlemleri, elde edeceğimiz yeni sistem üzerine uygulayacağız. Bunun için de (2.3) denkleminin bozunumu olan (2.5) denklemini göz önüne alacağız.

(2.5) denklemini (3.3) sistemine göre yazarsak,

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\hat{r}_1.\hat{r}_2 & \hat{r}_1+\hat{r}_2 \end{pmatrix} \; ; \; x(n)=\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} \; ; \; \hat{r}_1=r_1+h_1, \hat{r}_2=r_2+h_2$$

olmak üzere

$$x(n+1)=Bx(n) \qquad \textbf{(3.5)}$$

şeklinde elde edilir. Burada $B=A+\Delta$ olup $\Delta\in M_2(\boldsymbol{R})$ dir. Elde ettiğimiz (3.5) sistemi (3.4) sisteminin bozunumudur. Bu verilenlere göre (2.5) denkleminin karakteristik kökleri olan $\hat{r}_1,\hat{r}_2\in\boldsymbol{R}$, aynı zamanda (3.5) denklem sisteminin $\lambda_1(B)=\hat{r}_1\in\boldsymbol{R};\ \lambda_2(B)=\hat{r}_2\in\boldsymbol{R}$ karakteristik denkleminin kökleri (öz değerleri) olur. Yani;

$$\lambda_1(B)=\hat{r}_1=r_1+h_1=\lambda_1(A)+h_1(\Delta);\quad \lambda_2(B)=\hat{r}_2=r_2+h_2=\lambda_2(A)+h_2(\Delta)$$

dır. Burada; $h_{1,2}(\Delta)$, $\Delta\in M_2(\boldsymbol{R})$ nin karakteristik denkleminin kökleri (öz değerleri) dir. O halde, (2.5) denklemi için yapmış olduğumuz çalışmalar (3.5) denklemi için de sağlanmış olacaktır.

Buna göre, (2.3) fark denkleminin bozunumu olan (2.5) fark denklemi için elde ettiğimiz Schur kararlılık, salınımlılık ve hem Schur kararlılık hem salınımlılık kritiklerinden yola çıkarak (3.4) sisteminin bozunumu olan (3.5) sisteminin Schur kararlılık, salınımlılık ve hem Schur kararlılık hem salınımlılık şartlarını verebiliriz.

1. İki-Boyutlu Bozunum Sisteminde Schur Kararlılık: (3.4) sistemi Schur kararlı ($|\lambda_{1,2}(A)|<1$) olmak üzere

$$-1-\lambda_1(A)<h_1(\Delta)<1-\lambda_1(A)\ ,\ -1-\lambda_2(A)<h_2(\Delta)<1-\lambda_2(A)$$

eşitsizliklerini sağlayan $h_1(\Delta)$ ve $h_2(\Delta)$ için (3.5) sistemi de Schur kararlıdır.

2. İki-Boyutlu Bozunum Sisteminde Salınımlılık: (3.4) sistemi salınımlı ($\lambda_{1,2}(A)<0$) olmak üzere

$$h_1(\Delta)<-\lambda_1(A)\ ,\ h_2(\Delta)<-\lambda_2(A)$$

eşitsizliklerini sağlayan $h_1(\Delta)$ ve $h_2(\Delta)$ için (3.5) sistemi de salınımlıdır.

3. İki-Boyutlu Bozunum Sisteminde Hem Schur Kararlılık Hem Salınımlılık: (3.4) sistemi hem Schur kararlı hem salınımlı $(-1<\lambda_{1,2}(A)<0)$ olmak üzere

$$-1-\lambda_1(A)<h_1(\Delta)<-\lambda_1(A)\ ,\ -1-\lambda_2(A)<h_2(\Delta)<-\lambda_2(A)$$

eşitsizliklerini sağlayan $h_1(\Delta)$ ve $h_2(\Delta)$ için (3.5) sistemi de hem Schur kararlı hem salınımlıdır.

Buraya kadar olan kısımda fark denklemden fark sisteme geçiş anlatılmış ve öz değerler yardımıyla Schur kararlılık, salınımlılık ve hem Schur kararlılık hem salınımlılık kavramları îzah edilmiştir. Bundan sonraki kısımda öz değer probleminin kötü konulmuş bir problem olduğu anlatılarak Schur kararlılığı veren bir parametrenin varlığı açıklanmış ve öz değerler yardımıyla Schur kararlılık ile parametreye bağlı Schur kararlılık karşılaştırılarak hangisinin daha kaliteli olduğu incelenmiştir.

3.3. Kötü Konulmuş Problem ve Lyapunov Teoremi

Herhangi bir A kare matrisinin karakteristik denkleminin köklerini (öz değerlerini) hesaplama veya yerini tahmin etme problemi kolay bir problem değildir. Simetrik A matrisinin öz değerlerinin hesaplanması probleminin iyi konulmuş problem olduğu bilinmektedir. Genel durumda bu problem kötü konulmuş bir problemdir. Yani, matrisin elemanlarındaki küçük değişikliklere karşılık öz değerlerinde büyük değişiklik olabilmektedir. Matris elemanlarındaki değişiklik o kadar küçük olabilir ki matrisin bilgisayardaki temsiline etki etmez. Fakat bu değişiklik A matrisinin Schur kararlılığını etkileyebilir. Meselâ

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 0.5 & 10 & \cdots & 0 \\ 0 & 0.5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \omega & 0 & \cdots & 0.5 \end{pmatrix}$$

biçimindeki N boyutlu ω - parametreli A_ω matrisi,

$$det\left(A_\omega - \lambda I\right) = \left(0.5 - \lambda\right)^N \pm 10^{N-1}\omega$$

karakteristik denklemine sahiptir. $\omega = 0$ için A_0 matrisinin öz değerleri $\lambda_i\left(A_0\right) = 0.5 \ \left(i = 1,2,...,N\right)$ dir. Eğer $\omega = 10^{1-N},\ N = 101$ için $A_{10^{-100}}$ matrisinin bütün öz değerleri $\lambda\left(A_{10^{-100}}\right) = 1.5$ olur. Buradan,

$$\left\|A_{10^{-100}} - A_0\right\| = 10^{-100} \Rightarrow \left|\lambda\left(A_{10^{-100}}\right) - \lambda\left(A_0\right)\right| = 1$$

olduğu görülür. Bu örnek Ostrowski'ye aittir. Böylece Schur kararlı olan A_0 matrisinin elemanlarında yapılan 10^{-100} kadar bir değişim, matrisi Schur kararlı olmayan $A_{10^{-100}}$ matrisine dönüştürmektedir.

Öz değer problemi iyi konulmuş bir problem olmadığından Schur kararlılığı tespit için Spektral Kriter yerine, Schur kararlılığı karakterize eden bir lineer cebirsel denklemin çözümü yardımıyla hesaplanan parametreleri kullanmak daha kullanışlıdır (Akın ve Bulgak, 1998; Duman, 2008).

Şimdi, yukarıda bahsettiğimiz parametreler için gerekli Lyapunov teoremini vereceğiz.

Teorem 3.1. ***(Lyapunov Teoremi):*** Verilen bir A matrisinin (veya $y(n+1)=Ay(n)$ sisteminin $y(n)\equiv 0$ aşikâr çözümünün) Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$A^*HA-H+I=0 \qquad \textbf{(3.6)}$$

Lyapunov fark matris denkleminin

$$H=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A^*\right)^k A^k,\ H=H^*>0$$

çözümünün olmasıdır (bak.; Akın ve Bulgak, 1998; Duman, 2008; Aydın ve ark., 2016).

Lyapunov fark denklemini sağlayan $H=H^*>0$ pozitif tanımlı H matrisi varsa $\omega(A)=\|H\|$, aksi halde $\omega(A)=\infty$ olarak seçilir. Bu şekilde tanımlanan $\omega(A)$ matris fonksiyoneline A matrisinin *Schur kararlılık parametresi* ya da *Schur kararlılığının kalitesini gösteren parametre* denir (Bulgakov ve Godunov, 1988; Akın ve Bulgak, 1998; Bulgak, 1999; Duman, 2008).

Benzer şekilde, Teorem 3.1.'e göre, bir A matrisinin bozunumu olan B matrisi için de Schur kararlılık gerek ve yeter şartını verebiliriz.

Kritik 3.1. ***(Bozunum Lyapunov Teoremi)*** Bir A matrisi (veya $y(n+1)=Ay(n)$ sisteminin $y(n)\equiv 0$ aşikâr çözümü) Schur kararlı olmak üzere

$$B^*XB-X+I=0$$

Lyapunov fark matris denkleminin

$$X=\sum_{k=0}^{\infty}\left(B^*\right)^k B^k,\ X=X^*>0$$

çözümü var ise B matrisi (veya $x(n+1)=Bx(n)$ sisteminin $x(n)\equiv 0$ aşikâr çözümü) de Schur kararlıdır. Burada; $B=A+\Delta$ olup $\Delta\in M_2(\boldsymbol{R})$ dir. Lyapunov fark denklemini sağlayan $X=X^*>0$ pozitif tanımlı X matrisi varsa $\omega(B)=\omega(A+\Delta)=\|X\|$, aksi halde $\omega(B)=\omega(A+\Delta)=\infty$ olarak seçilir.

Şimdi, öz değerlerden ve Teorem 3.1.'den yola çıkarak Schur kararlılığı inceleyeceğiz ve iki durumu birbiriyle karşılaştırarak hangi durumun daha kaliteli olduğunu göstereceğiz.

İki-boyutlu bozunum sisteminde hem Schur kararlılık hem salımlılık şartına göre, $|\lambda_{1,2}(A)|<1$ öz değerleri için $h_1(\Delta)$ ve $h_2(\Delta)$ yi inceleyelim:

Öz değerleri $\lambda_1(A)=-\frac{1}{2},\lambda_2(A)=\frac{1}{2}$ olan $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 1\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ matrisi için

$$-1-\left(-\frac{1}{2}\right)<h_1(\Delta)<1-\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow -\frac{1}{2}<h_1(\Delta)<\frac{3}{2}$$

$$-1-\left(\frac{1}{2}\right)<h_2(\Delta)<1-\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow -\frac{3}{2}<h_2(\Delta)<\frac{1}{2}$$

elde edilir. Buna göre $s_i=\frac{i}{5},(i=1,2,...,9)$ olmak üzere aşağıdaki tabloyu verelim:

$h_1(\Delta)$	$\lambda_1(B)=\lambda_1(A)+h_1(\Delta)$	$h_2(\Delta)$	$\lambda_2(B)=\lambda_2(A)+h_2(\Delta)$	$\omega(A)=\|H\|$	$B=A+\Delta$	$\omega(B)=\omega(A+\Delta)=\|X\|$
$h_1(\Delta)\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+$	-1^+	$h_2(\Delta)\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+$	-1^+	3.23385	$B=\begin{pmatrix}-1^+ & 1\\ 0 & -1^+\end{pmatrix}$	$\omega(B)<\infty$
$-\frac{1}{2}+s_1$	−0.8	$-\frac{3}{2}+s_1$	−0.8	3.23385	$B=\begin{pmatrix}-0.8 & 1\\ 0 & -0.8\end{pmatrix}$	38.9812
$-\frac{1}{2}+s_2$	−0.6	$-\frac{3}{2}+s_2$	−0.6	3.23385	$B=\begin{pmatrix}-0.6 & 1\\ 0 & -0.6\end{pmatrix}$	7.13552
$-\frac{1}{2}+s_3$	−0.4	$-\frac{3}{2}+s_3$	−0.4	3.23385	$B=\begin{pmatrix}-0.4 & 1\\ 0 & -0.4\end{pmatrix}$	3.29995

$-\frac{1}{2}+s_4$	-0.2	$-\frac{3}{2}+s_4$	-0.2	3.23385	$B=\begin{pmatrix}-0.2 & 1\\ 0 & -0.2\end{pmatrix}$	2.25594
$-\frac{1}{2}+s_5$	0	$-\frac{3}{2}+s_5$	0	3.23385	$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	2
$-\frac{1}{2}+s_6$	0.2	$-\frac{3}{2}+s_6$	0.2	3.23385	$B=\begin{pmatrix}0.2 & 1\\ 0 & 0.2\end{pmatrix}$	2.25594
$-\frac{1}{2}+s_7$	0.4	$-\frac{3}{2}+s_7$	0.4	3.23385	$B=\begin{pmatrix}0.4 & 1\\ 0 & 0.4\end{pmatrix}$	3.29995
$-\frac{1}{2}+s_8$	0.6	$-\frac{3}{2}+s_8$	0.6	3.23385	$B=\begin{pmatrix}0.6 & 1\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}$	7.13552
$-\frac{1}{2}+s_9$	0.8	$-\frac{3}{2}+s_9$	0.8	3.23385	$B=\begin{pmatrix}0.8 & 1\\ 0 & 0.8\end{pmatrix}$	38.9812
$h_2(\Delta)\to\left(\frac{3}{2}\right)^-$	1^-	$h_1(\Delta)\to\left(\frac{1}{2}\right)^-$	1^-	3.23385	$B=\begin{pmatrix}1^- & 1\\ 0 & 1^-\end{pmatrix}$	$\omega(B)<\infty$

Tablo 3.1-a. $\lambda_1(A)=-\frac{1}{2},\lambda_2(A)=\frac{1}{2}$ için $\lambda_1(B)=\lambda_1(A)+h_1(\Delta)$ ve $\lambda_2(B)=\lambda_2(A)+h_2(\Delta)$ öz değerleri, $B=A+\Delta$ matrisleri ve $\omega(A)=\|H\|$, $\omega(B)=\omega(A+\Delta)=\|X\|$ parametre değerleri.

Tablo 3.1-a.'da öz değerleri verilen bir *A* matrisinin bozunumu olan *B* matrisinin öz değerleri elde edilmiş ve Lyapunov teoremine göre A matrisinin *ω(A)* parametresi ile *A* matrisinin bozunumu olan *B* matrisinin *ω(B)* parametresi elde edilmiştir. Bu tablodaki verilerin elde edilme amacı, öz değerler yardımıyla sistemin Schur kararlılığını ve Lyapunov teoremi ile elde edilen parametreler yardımıyla sistemin Schur kararlılığını tespit edip iki durum arasındaki kalite farkını incelemektir.

Görüldüğü üzere, öz değerler yardımıyla bir sistemin Schur kararlılığının kalitesi hakkında bir fikir sâhibi olamazken Lyapunov teoremi ile elde edilen parametreler yardımıyla Schur kararlılığın kalitesi hakkında yorum yapabiliyoruz. Tablo 3.1-a incelendiğinde, öz değerler $\lambda_{1,2}(A)^+\to -1$ ve $\lambda_{1,2}(A)^-\to 1$ iken Schur kararlılığın kalitesi düşmekte $\lambda_{1,2}(A)\to 0$ iken ise Schur kararlılığın kalitesi yükselmektedir. Bu ise bize parametrelerin Schur kararlılık için ne kadar önem arz ettiğini göstermektedir.

Uyarı 3.1. Tablo 3.1-a.'da elde edilen öz değerlerle sonsuz tane B matrisi yazılabilir. Aynı şekilde A matrisini, sonsuz tane Δ matrisi ile bozunuma uğratarak Tablo 3.1-a.'daki gibi öz değerler veya farklı öz değerler elde edilebilir. Dolayısıyla farklı öz değerlerle de yine sonsuz tane B matrisi yazılabilir. Buna bağlı olarak farklı $\omega(B)$ değerleri de elde edilebilir.

Tablo 3.1-a.'da $h_1(\Delta)$, $h_2(\Delta)$ değerleri ve $s_i = \frac{i}{5}, (i = 1,2,...,9)$ ile elde ettiğimiz $\lambda_{1,2}(B)$ öz değerlerinden başka öz değerler de elde edilebilir. Şimdi, $s_i = \frac{i}{5}, (i = 1,2,...,9)$ yi kullanmadan $h_1(\Delta)$, $h_2(\Delta)$ değer aralığından rastgele değerler alarak Tablo 3.1-a.'da elde ettiğimiz ifadeleri gösteren yeni bir tablo verelim:

$h_1(\Delta)$	$\lambda_1(B)=\lambda_1(A)+h_1(\Delta)$	$h_2(\Delta)$	$\lambda_2(B)=\lambda_2(A)+h_2(\Delta)$	$\omega(A)=\|H\|$	$B = A+\Delta$	$\omega(B)=\omega(A+\Delta)$ $=\|X\|$
–0.25	–0.75	–0.75	–0.25	3.23385	$B=\begin{pmatrix} -0.75 & 1 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix}$	5.09294
–0.125	–0.625	–0.375	0.125	3.23385	$B=\begin{pmatrix} -0.625 & 1 \\ 0 & 0.125 \end{pmatrix}$	3.07324
0	–0.5	–1	–0.5	3.23385	$B=\begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$	4.5425
0.5	0	–0.25	0.25	3.23385	$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$	2.13333
0.25	–0.25	–0.125	0.375	3.23385	$B=\begin{pmatrix} -0.25 & 1 \\ 0 & 0.375 \end{pmatrix}$	2.24262
0.125	–0.375	0	0.5	3.23385	$B=\begin{pmatrix} -0.375 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$	2.49623
1	0.5	0.125	0.625	3.23385	$B=\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.625 \end{pmatrix}$	6.01887
0.375	–0.125	0.25	0.75	3.23385	$B=\begin{pmatrix} -0.125 & 1 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix}$	4.21387
0.75	0.25	0.2	0.7	3.23385	$B=\begin{pmatrix} 0.25 & 1 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}$	4.96638

Tablo 3.1-b. $\lambda_1(A) = -\frac{1}{2}, \lambda_2(A) = \frac{1}{2}$ için 'farklı' $\lambda_1(B) = \lambda_1(A) + h_1(\Delta)$ ve $\lambda_2(B) = \lambda_2(A) + h_2(\Delta)$ öz değerleri, $B=A+\Delta$ matrisleri ve $\omega(A) = \|H\|$, $\omega(B) = \omega(A+\Delta) = \|X\|$ parametre değerleri.

Tablo 3.1-b. incelendiğinde, öz değerler değiştikçe parametre değerlerinin değiştiği, dolayısıyla Schur kararlılık kalitesinin de değişime uğradığı görülmektedir.

Şimdi, Tablo 3.1-a.'da elde ettiğimiz öz değerlerle farklı *B* matrislerini ele alarak *ω(B)* değerlerini gösteren tabloyu verelim:

$\lambda_1(B), \lambda_2(B)$	B_α	$\alpha=-5$ için $\omega(B)$ değeri	$\alpha=1$ için $\omega(B)$ değeri	$\alpha=2$ için $\omega(B)$ değeri	$\alpha=3$ için $\omega(B)$ değeri
–1, –1	$B_\alpha=\begin{pmatrix}-1 & \alpha\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	∞	∞	∞	∞
–0.8, –0.8	$B_\alpha=\begin{pmatrix}-0.8 & \alpha\\ 0 & -0.8\end{pmatrix}$	882.633	38.9812	144.457	320.216
–0.6, –0.6	$B_\alpha=\begin{pmatrix}-0.6 & \alpha\\ 0 & -0.6\end{pmatrix}$	131.674	7.13552	22.7201	48.6644
–0.4, –0.4	$B_\alpha=\begin{pmatrix}-0.4 & \alpha\\ 0 & -0.4\end{pmatrix}$	50.2824	3.29995	9.1799	18.9674
–0.2, –0.2	$B_\alpha=\begin{pmatrix}-0.2 & \alpha\\ 0 & -0.2\end{pmatrix}$	30.469	2.25594	5.78336	11.661
0, 0	$B_\alpha=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	26	2	5	10
0.2, 0.2	$B_\alpha=\begin{pmatrix}0.2 & \alpha\\ 0 & 0.2\end{pmatrix}$	30.469	2.25594	5.78336	11.661
0.4, 0.4	$B_\alpha=\begin{pmatrix}0.4 & \alpha\\ 0 & 0.4\end{pmatrix}$	50.2824	3.29995	9.1799	18.9674
0.6, 0.6	$B_\alpha=\begin{pmatrix}0.6 & \alpha\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}$	131.674	7.13552	22.7201	48.6644
0.8, 0.8	$B_\alpha=\begin{pmatrix}0.8 & \alpha\\ 0 & 0.8\end{pmatrix}$	882.633	38.9812	144.457	320.216

1, 1	$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	∞	∞	∞	∞

Tablo 3.1-c. Tablo 3.1-a.'da elde edilen $\lambda_{1,2}(B)$ öz değerlerine göre farklı *B* matrisleri ve $\omega(B)$ parametre değerleri.

Tablo 3.1-c.'de aynı öz değerlere sahip farklı matrislerin parametre değerlerinin de farklı olduğu ve buna bağlı olarak Schur kararlılık kalitesinin de değiştiği görülmektedir. Örneğin; tabloda öz değerleri $\lambda_{1,2}(B)=0.2$ olan $B_\alpha = \begin{pmatrix} 0.2 & \alpha \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$ matrisini incelediğimizde, $\alpha = -5,1,2,3$ için parametre değerleri değişmekte dolayısıyla Schur kararlılığın kalitesi öz değerleri aynı, farklı matrisler için farklı olmaktadır. Ayrıca, yine $B_\alpha = \begin{pmatrix} 0.2 & \alpha \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$ matrisini incelediğimizde $\alpha \to \infty$ iken $\omega \to \infty$ olduğu ve Schur kararlılığın kalitesinin bu yönde düştüğü görülmektedir.

Uyarı 3.2. Yukarıda yapmış olduğumuz işlemlerde matris bozunumundan bahsederken aslında, öz değerler bozunuma uğratılmış ve bu bozunum üzerinden sonuçlar elde edilmiştir. Dolayısıyla, öz değerlerin bozunuma uğratılması ile sonuçlar elde edildiği gibi matrislerin doğrudan bozunuma uğratılmasıyla da benzer sonuçlar elde edilebileceğine dikkat edilmelidir.

Not 3.1. Tablo 3.1-a,b,c.'de elde ettiğimiz $\omega(A),\omega(B)$ parametre değerleri '*MVC 1.0-Matrix Vector Calculator*' programıyla hesaplanmıştır. Şimdi, bu parametrelerin nasıl hesaplandığını kısaca açıklamaya çalışacağız.

3.4. MVC 1.0-Matrix Vector Calculator Programı

Programda öncelikle, boyutunu ve elemanlarını kendimiz belirleyerek bir *A* matrisi giriyoruz. Sonra, *QdaStab (100000,A,H,Omega,Error)* fonksiyonunu 'Worksheet' denilen Çalışma Alanı'na yazıyoruz. Burada; $\omega^* = 100.000$ -pratik Schur kararlılık parametresi olup verilen değer $\omega^* > 1$ olmak üzere istenildiği kadar alınabilir. *A*-boyutunu ve elemanını kendimizin belirlediği matris, *H*- Lyapunov fark matris denklemi $A^*HA - H + I = 0$ ın çözümü olan pozitif tanımlı $H = H^* > 0$ matrisi, *Omega*-Schur kararlılık parametresi (şart sayısı) olan $\omega(A)$ parametre değeri, *Error*- hata oranıdır. Fonksiyonu yazdıktan sonra ekranda fonksiyonun sonucu, hata oranı, Schur

kararlılık parametre değeri ve pozitif tanımlı H matrisi hesaplanmış olarak karşımıza çıkacaktır. Eğer fonksiyonun sonucu 'true' ise $\omega(A)<\omega^*$ olup matris Schur kararlı bölge içerisindedir; eğer 'false' ise $\omega(A)>\omega^*$ olup matris Schur kararlı bölge dışındadır. Daha sonra, fonksiyonun sonucuna göre Lyapunov Teoremi'nden yola çıkarak 'true' olan durumda $\omega(A)=\|H\|$, 'false' olan durumda ise $\omega(A)=\infty$ olarak alıyoruz. Şimdi, bu işlemleri daha iyi anlayabilmek için bir örnek verelim:

Örnek 3.1. $\omega^*=10^5$ ve $A=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}$ olmak üzere programda A matrisi girilip

$$QdaStab(100000, A, H, Omega, Error)$$

yazılırsa

Function QdaStab result = true
Error = 1.11022e-16
Omega = 5.64206

$$H=\begin{matrix}1.33333, & 0.952381\\ 0.952381, & 5.43155\end{matrix}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere fonksiyonun sonucu 'true' olduğu için $\omega(A)=\|H\|=5.64206$ olur. Eğer fonksiyonun sonucu 'false' olsaydı $\omega(A)=\infty$ olacaktı (Bulgak, 2001).

Şimdi ise iki-boyutlu birinci mertebeden fark denklem sistemleri için verdiğimiz Schur kararlılık, salınımlılık şartlarını N-boyutlu birinci mertebeden fark denklem sistemleri için vereceğiz ve hem Schur kararlılık hem salınımlılık için yeni bir kriter arayışına gireceğiz.

3.5. N-Boyutlu Birinci Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı İçin Kriter Bulunması

A, N boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $(A\in M_N(\boldsymbol{R}))$ olmak üzere

$$y(n+1)=Ay(n) \qquad \textbf{(3.7)}$$

sistemini ele alalım. Bu sistemin öz değerleri $\lambda_j(A)\in\boldsymbol{C}$, $(j=1,2,...,N)$ olmak üzere,

i. (3.7) denklem sisteminin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\lambda_j(A)|<1,\ (j=1,2,...,N)$ *(1. Fark Lyapunov Yöntemi-Spektral Kriter)* olmasıdır

(Akın ve Bulgak, 1998; Elaydi, 2005; Duman, 2008; Aydın ve Duman, 2011; Aydın ve Duman, 2014).

ii. (3.7) denklem sisteminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart $\lambda_j(A)=\alpha_j \pm i\beta_j,\ (j=1,2,...,N)$ olmak üzere

a. $\beta_j = 0$ iken $\lambda_j(A)=\alpha_j<0,\ (j=1,2,...,N)$ olmasıdır.

b. $\beta_j \neq 0$ iken;

- ✓ $\alpha_j \neq 0$ ise sistemi çözümü $r=\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2},\ \theta=arctgn\left(\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right),\ a,b\in \boldsymbol{R},\ (j=1,2,...,N)$ olmak üzere $y(n)=ar^n cos(n\theta-b)$ olup kosinüs fonksiyonu salınımlı olduğu için sistem de salınımlıdır.
- ✓ $\alpha_j = 0$ ise sistemin çözümü $r=|\beta_j|,\ \theta=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in \boldsymbol{Z}\right),\ a,b\in \boldsymbol{R},\ (j=1,2,...,N)$ olmak üzere $y(n)=ar^n cos(n\theta-b)$ olup kosinüs fonksiyonu salınımlı olduğu için sistem de salınımlıdır.

  Ancak, eşlenik karakteristik köklerin (karmaşık köklerin) konumuna bağlı olarak 3 farklı durumda sistemin çözümü salınımlıdır:

  1. $r<1$ ise $\lambda_j(A),\ (j=1,2,...,N)$ birim diskin içinde olup *y(n)* çözümü sıfıra yakınsayarak salınımlıdır;
  2. $r=1$ ise $\lambda_j(A),\ (j=1,2,...,N)$ birim diskin üzerinde olup *y(n)* çözümü sabit büyüklükte salınımlıdır;
  3. $r>1$ ise $\lambda_j(A),\ (j=1,2,...,N)$ birim diskin dışında olup *y(n)* çözümü artan büyüklükte salınımlıdır (Elaydi, 2005; Goldberg, 1958).

Şimdi; ii.'de bahsi geçen, sistemin salınımlılığını sağlayan *y(n)* çözümünün nasıl elde edildiğini îzah edelim:

Not 3.2. *A, N=2* boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $(A\in M_2(\boldsymbol{R}))$ olmak üzere öz değerleri $\lambda_1(A)=\alpha+i\beta,\ \lambda_2(A)=\alpha-i\beta$ olan

$$y(n+1)=Ay(n)$$

sistemini ele alalım. Bu sistemin genel çözümünün

$$y(n)=c_1(\alpha+i\beta)^n+c_2(\alpha-i\beta)^n;\ c_1,c_2\in \boldsymbol{R}$$

olduğunu biliyoruz. Hatırlarsak karmaşık düzlemdeki (α,β) noktası $\alpha+i\beta$ karmaşık sayısına karşılık geliyordu. Buna göre kutupsal koordinatlarda

$$\alpha=r\cos\theta,\ \beta=r\sin\theta,\ r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \theta=arctgn\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}y(n)&=c_1(r\cos\theta+ir\sin\theta)^n+c_2(r\cos\theta-ir\sin\theta)^n\\&=c_1\left(r^n\cos(n\theta)+ir^n\sin(n\theta)\right)+c_2\left(r^n\cos(n\theta)-ir^n\sin(n\theta)\right)\\&=r^n\left[(c_1+c_2)\cos(n\theta)+i(c_1-c_2)\sin(n\theta)\right]\end{aligned}$$

olup $a_1=c_1+c_2$ ve $a_2=i(c_1-c_2)$ olmak üzere

$$y(n)=r^n\left[a_1\cos(n\theta)+a_2\sin(n\theta)\right]$$

elde edilir. Şimdi,

$$\cos b=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}},\ \sin b=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}},\ b=arctgn\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

kabul edelim. O halde

$$\begin{aligned}y(n)&=r^n\left[a_1\cos(n\theta)+a_2\sin(n\theta)\right]\\&=r^n\sqrt{a_1^2+a_2^2}\left[\cos b\cos(n\theta)+\sin b\sin(n\theta)\right]\\&=r^n\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cos(n\theta-b)\\&=ar^n\cos(n\theta-b)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $a=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ ve $b=arctgn\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ olduğundan $a,b\in\boldsymbol{R}$ olur (Elaydi, 2005; Goldberg, 1958).

Böylece ii.'deki salınımlılığı sağlayan sistemin genel çözümü açıklanmıştır.

Şimdi ise açıklamış olduğumuz salınımlılığı sağlayan sistemin genel çözümünü bir örnek üzerine uygulamaya çalışalım:

Örnek 3.1-a. *A,* 2 boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $(A\in M_2(\boldsymbol{R}))$ olmak üzere öz değerleri $\lambda_1(A)=-1+i,\ \lambda_2(A)=-1-i$ olan

$$y(n+1)=Ay(n)$$

sistemini ele alalım. Bu sistemin genel çözümü

$$y(n)=c_1(-1+i)^n+c_2(-1-i)^n;\ c_1,c_2\in \boldsymbol{R}$$

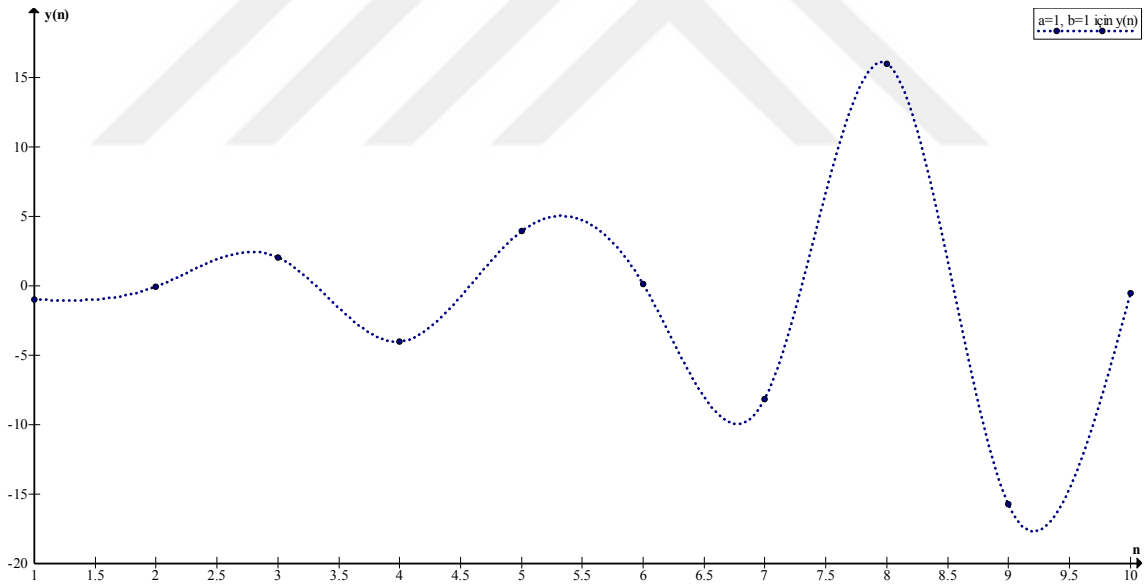
olur. Buradan Not 3.2.'ye göre

$$y(n)=a\sqrt{2}^n\cos\left(\frac{3\pi}{4}n-b\right)$$

elde edilir. Burada $a,b\in \boldsymbol{R}$ olduğundan birden fazla genel çözüm vardır fakat bu çözümlerin hareketleri aynı olmakla beraber büyüklükleri arasında farklılıklar vardır. Buna göre $a=1,\ b=1$ alırsak

$$y(n)=\sqrt{2}^n\cos\left(\frac{3\pi}{4}n-1\right)$$

olur. Kosinüs fonksiyonu salınımlı olduğu için sistemin çözümü salınımlı olacaktır. Bunu aşağıda vereceğimiz grafikte görebiliriz:

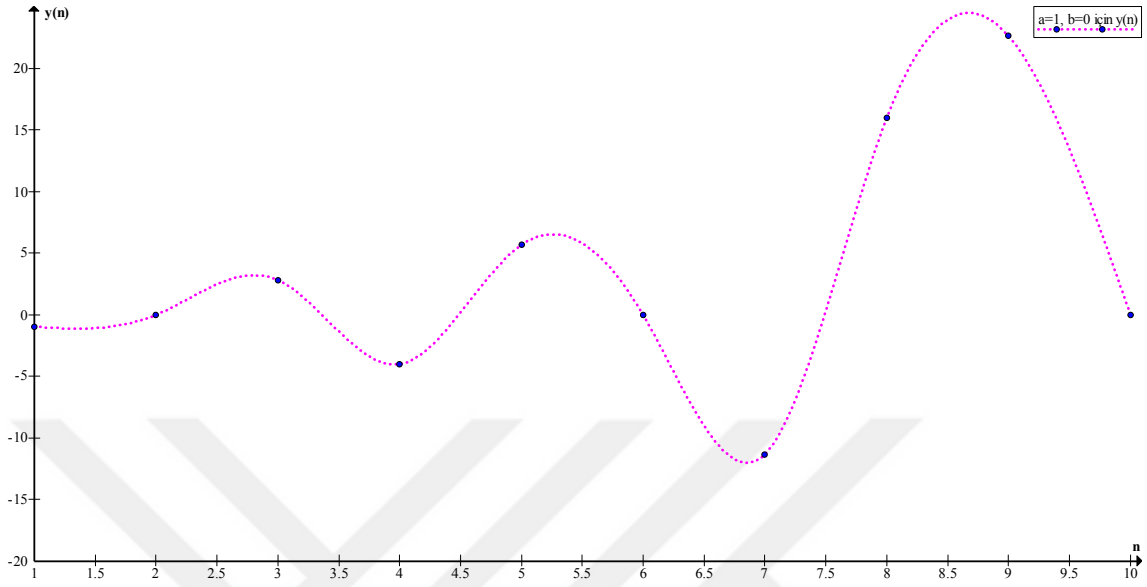


Şekil 3.1-a. $y(n)=\sqrt{2}^n\cos\left(\frac{3\pi}{4}n-1\right)$ çözümünün grafiği.

Benzer şekilde eğer $a=1,\ b=0$ alırsak

$$y(n)=\sqrt{2}^n\cos\left(\frac{3\pi}{4}n-1\right)$$

olur. Kosinüs fonksiyonu salınımlı olduğu için sistemin çözümü yine salınımlı olacaktır. Bunu da aşağıda vereceğimiz grafikte görebiliriz:



Şekil 3.1-b. $y(n)=\sqrt{2}^{n}\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$ çözümünün grafiği.

Şekil 3.1-a. ve Şekil 3.1-b. karşılaştırıldığında, denklem sisteminin çözümlerinin hareketi aynı olmakla beraber büyüklükleri arasında farklılıklar vardır. Dolayısıyla bu, çözümün hareketini bozmayacağı için $a,b\in\boldsymbol{R}$ yi yapacağımız işlemlerde keyfî olarak alabiliriz.

Şimdiki hedefimiz fark denklem sistemlerinin salınımlılığını sağlayan yeni bir kriter bulmak olduğundan diferensiyel denklem sistemlerini ve diferensiyel denklem sistemleri için bilinen asimtotik (Hurwitz) kararlılık şartını vereceğiz. Daha sonra bu iki sistemi örneklerden üzerinden karşılaştırarak fark denklem sistemlerinin hem Schur kararlılığını hem salınımlılığını sağlayan bir şart elde edeceğiz.

3.6. N-Boyutlu Birinci Mertebeden Diferensiyel Denklem Sistemleri ve Hurwitz Kararlılık

A, N boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $\left(A\in M_N(\boldsymbol{R})\right)$ olmak üzere öz değerleri $\lambda_j(A)\in\boldsymbol{C}$, $\left(j=1,2,...,N\right)$ olan

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \tag{3.8}$$

diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin genel çözümü

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_N e^{\lambda_N t};\ c_1, c_2, ..., c_N \in \boldsymbol{R} \tag{3.9}$$

dir (Akın Ö., 2008).

(3.8) sisteminin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$Re(\lambda_j(A)) < 0,\ (j = 1,2,...,N)$$ *(1. Lyapunov Yöntemi-Spektral Kriter)*

olmasıdır (Akın ve Bulgak, 1998; Elaydi, 2005; Duman, 2008). Literatürde lineer diferensiyel denklem sistemlerinin asimtotik kararlılığı yerine *Hurwitz kararlılık* kavramı kullanılmaktadır (Duman, 2008).

Şimdi, yukarıda fark denklem sistemleri için yaptığımız genel çözüm düzenleme işlemini ve Örnek 3.1-a.'yı (3.9) genel çözümündeki karşılığını verelim:

A, N=2 boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $(A \in M_2(\boldsymbol{R}))$ olmak üzere öz değerleri $\lambda_{1,2}(A) = \alpha \pm i\beta \in \boldsymbol{C}$ olan

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$$

diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin genel çözümü

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t};\ c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$$

dir. O halde Not 3.2.'ye benzer şekilde

$$x(t) = e^{\alpha t}\left[(c_1 + c_2)cos(\beta t) + (c_1 - c_2)sin(\beta t)\right]$$

olup $a_1 = c_1 + c_2$ ve $a_2 = i(c_1 - c_2)$ olmak üzere

$$x(t) = e^{\alpha t}\left[a_1 cos(\beta t) + a_2 sin(\beta t)\right]$$

elde edilir. Şimdi,

$$cos\, b = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},\ sin\, b = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},\ b = arctgn\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

kabul edelim. O halde

$$x(t) = ae^{\alpha t} cos(\beta t - b)$$

elde edilir. Burada $a=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ ve $b=arctgn\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ olduğundan $a,b\in \boldsymbol{R}$ olur.

Şimdi ise Örnek 3.1-a.'da fark denklem sistemleri üzerine yaptığımız alıştırmayı diferensiyel denklem sistemleri için yapalım ve ikisini karşılaştıralım:

Örnek 3.1-b. *A,* 2 boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $\left(A\in M_2(\boldsymbol{R})\right)$ olmak üzere öz değerleri $\lambda_1(A)=-1+i,\ \lambda_2(A)=-1-i$ olan

$$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)$$

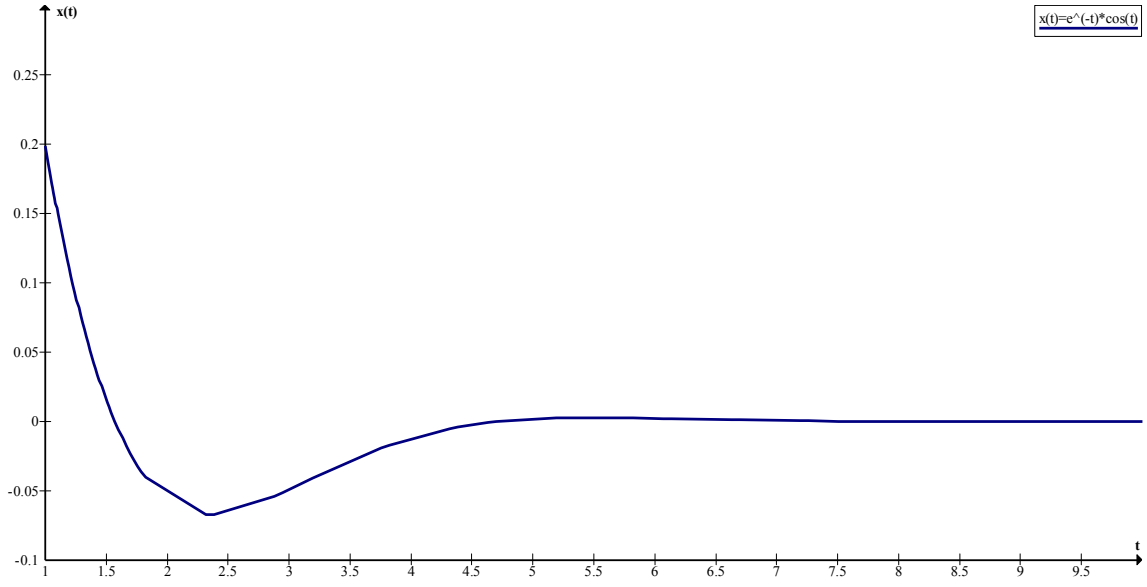
diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin genel çözümü yukarıda yaptığımız düzenlemelere göre

$$x(t)=ae^{-t}cos(t-b);\ a,b\in \boldsymbol{R}$$

dir. Burada $a,b\in \boldsymbol{R}$ olduğundan $a=1,\ b=0$ alırsak

$$x(t)=e^{-t}cos(t)$$

olur. Benzer şekilde kosinüs fonksiyonu salınımlı olduğu için sistemin çözümü salınımlı olacaktır. Bunu yine aşağıda vereceğimiz grafikte görebiliriz:



Şekil 3.1-c. $x(t)=e^{-t}cos(t)$ çözümünün grafiği.

Örnek 3.1-a. ve Örnek 3.1-b.'nin karşılaştırılması: Bu iki örnekte görüldüğü üzere Örnek 3.1-a.'da ele aldığımız fark denklem sisteminin öz değerleri ile Örnek 3.1-b.'de

ele aldığımız diferensiyel denklem sisteminin öz değerleri için $Re(\lambda_{1,2}(A)) = -1$ dir. Buna göre de bu iki sistemin çözümleri salınımlı olmaktadır. Ayrıca, ele alınan fark denklem sisteminin öz değerleri $|\lambda_{1,2}(A)| < 1$ şartını sağlamadığından Schur karar değildir; ve diferensiyel denklem sisteminin öz değerleri $Re(\lambda_{1,2}(A)) < 0$ şartını sağladığından Hurwitz kararlıdır.

Örnek 3.2-a. A, 2 boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $(A \in M_2(\boldsymbol{R}))$ olmak üzere öz değerleri $\lambda_1(A) = i,\ \lambda_2(A) = -i$ olan

$$y(n+1) = Ay(n)$$

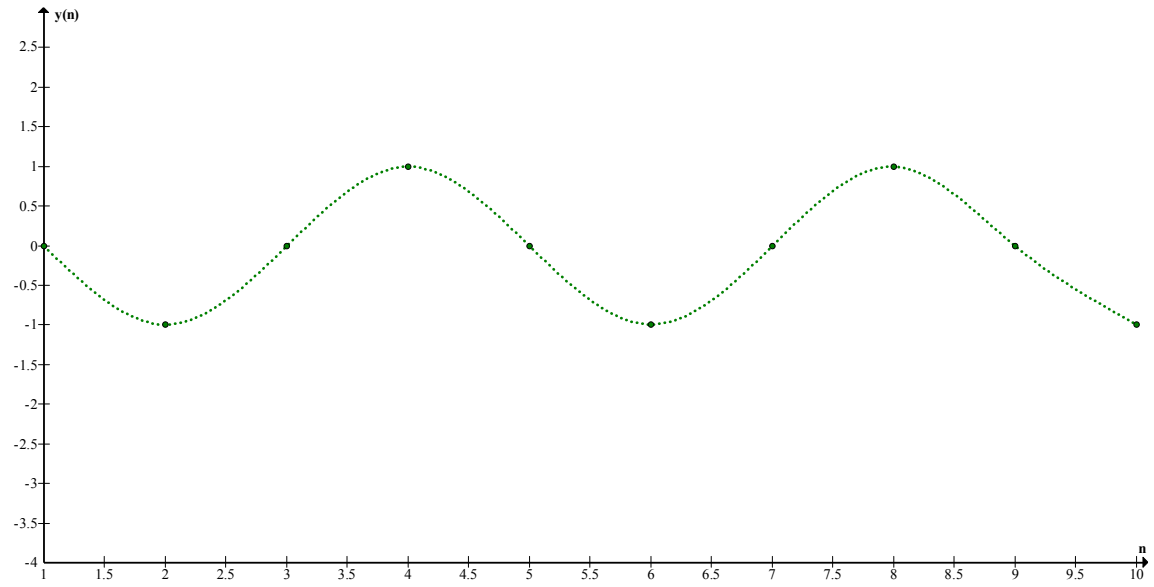
sistemini ele alalım. Bu sistemin genel çözümü $r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$a1^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n - b\right)$$

olup $a = 1,\ b = 0$ alınırsa

$$y(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

olur. Bu çözümün hareketini gösteren grafiği verelim:



Şekil 3.2-a. $r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $y(n) = r^n \cos(n\theta)$ çözümünün grafiği.

Örnek 3.2-b. *A,* 2 boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $\left(A \in M_2(\boldsymbol{R})\right)$ olmak üzere öz değerleri $\lambda_1(A) = i,\ \lambda_2(A) = -i$ olan

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$$

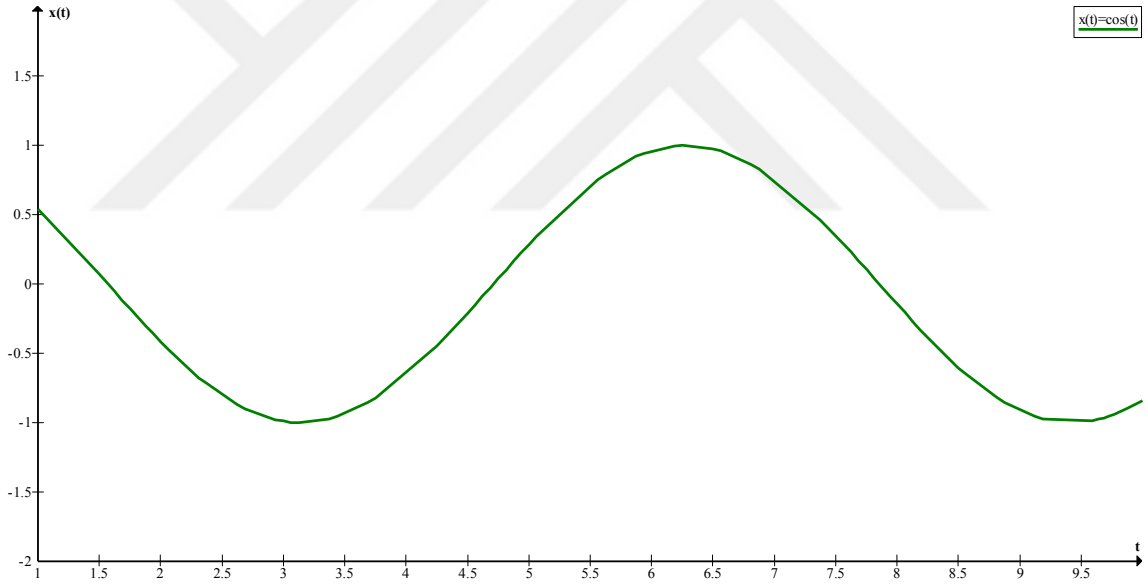
diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin genel çözümü

$$x(t) = ae^0 cos(t-b);\ a,b \in \boldsymbol{R}$$

olup $a = 1,\ b = 0$ alırsak

$$x(t) = e^0 cos(t)$$

olur. Benzer şekilde kosinüs fonksiyonu salınımlı olduğu için sistemin çözümü salınımlı olacaktır. Bunu yine aşağıda vereceğimiz grafikte görebiliriz:



Şekil 3.2-b. $x(t) = cos(t)$ çözümünün grafiği.

Örnek 3.2-a. ve Örnek 3.2-b.'nin karşılaştırılması: Bu iki örnekte de görüldüğü üzere Örnek 3.2-a.'da ele aldığımız fark denklem sisteminin öz değerleri ile Örnek 3.2-b.'de ele aldığımız diferensiyel denklem sisteminin öz değerleri için $Re\left(\lambda_{1,2}(A)\right) = 0$ dır. Buna göre de bu iki sistemin çözümleri salınımlı olmaktadır. Ayrıca, ele alınan fark denklem sisteminin öz değerleri $\left|\lambda_{1,2}(A)\right| < 1$ şartını sağlamadığından Schur karar değildir; ve

diferensiyel denklem sisteminin öz değerleri $Re(\lambda_{1,2}(A)) < 0$ şartını sağlamadığından Hurwitz kararlı değildir.

Örnek 3.3-a. *A,* 2 boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $(A \in M_2(\boldsymbol{R}))$ olmak üzere öz değerleri $\lambda_1(A) = 0.5 + 0.5i,\ \lambda_2(A) = 0.5 - 0.5i$ olan

$$y(n+1) = Ay(n)$$

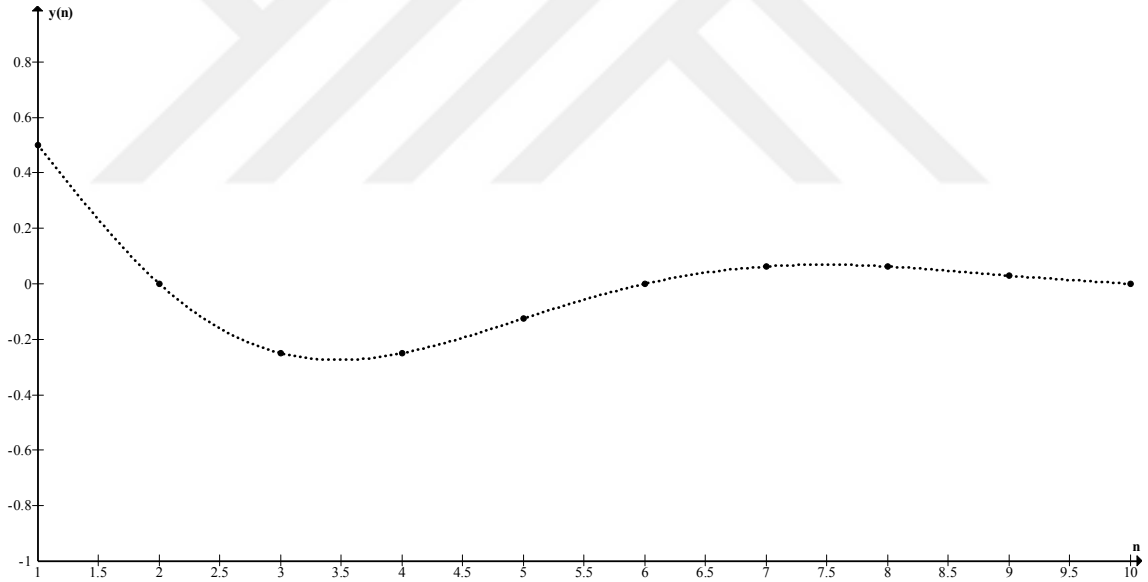
sistemini ele alalım. Bu sistemin genel çözümü $r = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta = \frac{\pi}{4}$ olmak üzere

$$ar^n cos(n\theta - b)$$

olup $a = 1,\ b = 0$ alınırsa

$$y(n) = r^n cos(n\theta)$$

olur. Bu çözümün hareketini gösteren grafiği verelim:



Şekil 3.3-a. $r = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta = \frac{\pi}{4}$ olmak üzere $y(n) = r^n cos(n\theta)$ çözümünün grafiği.

Örnek 3.3-b. *A,* 2 boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $(A \in M_2(\boldsymbol{R}))$ olmak üzere öz değerleri $\lambda_1(A) = 0.5 + 0.5i,\ \lambda_2(A) = 0.5 - 0.5i$ olan

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$$

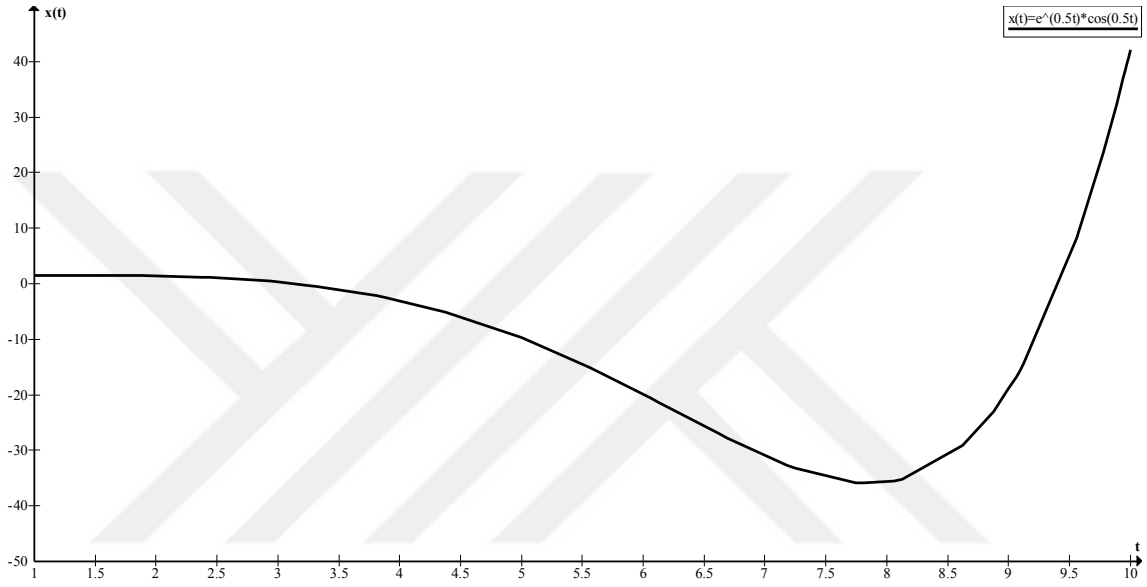
diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin genel çözümü

$$x(t) = ae^{0.5t}\cos(0.5t - b);\ a,b \in \boldsymbol{R}$$

olup $a = 1,\ b = 0$ alırsak

$$x(t) = e^{0.5t}\cos(0.5t)$$

olur. Benzer şekilde kosinüs fonksiyonu salınımlı olduğu için sistemin çözümü salınımlı olacaktır. Bunu yine aşağıda vereceğimiz grafikte görebiliriz:



Şekil 3.3-b. $x(t) = e^{0.5t}\cos(0.5t)$ çözümünün grafiği.

Örnek 3.3-a. ve Örnek 3.3-b.'nin karşılaştırılması: Bu iki örnekte de görüldüğü üzere Örnek 3.3-a.'da ele aldığımız fark denklem sisteminin öz değerleri ile Örnek 3.3-b.'de ele aldığımız diferensiyel denklem sisteminin öz değerleri için $0 < Re(\lambda_{1,2}(A)) < 1$ dır. Buna göre de bu iki sistemin çözümleri salınımlı olmaktadır. Ayrıca, ele alınan fark denklem sisteminin öz değerleri $|\lambda_{1,2}(A)| < 1$ şartını sağladığından Schur kararlıdır; ve diferensiyel denklem sisteminin öz değerleri $Re(\lambda_{1,2}(A)) < 0$ şartını sağlamadığından Hurwitz kararlı değildir.

Örnek 3.4-a. *A,* 2 boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $(A \in M_2(\boldsymbol{R}))$ olmak üzere öz değerleri $\lambda_1(A) = -0.5 + 0.5i,\ \lambda_2(A) = -0.5 - 0.5i$ olan

$$y(n+1) = Ay(n)$$

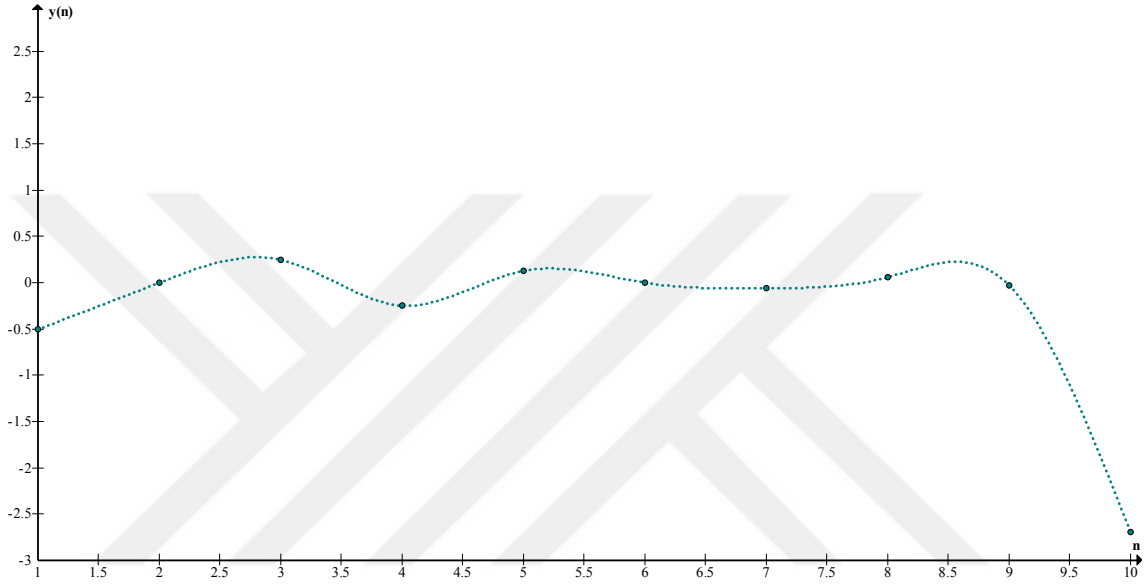
sistemini ele alalım. Bu sistemin genel çözümü $r=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta=\frac{3\pi}{4}$ olmak üzere

$$ar^n cos(n\theta-b)$$

olup $a=1,\ b=0$ alınırsa

$$y(n)=r^n cos(n\theta)$$

olur. Bu çözümün hareketini gösteren grafiği verelim:



Şekil 3.4-a. $r=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta=\frac{3\pi}{4}$ olmak üzere $y(n)=r^n cos(n\theta)$ çözümünün grafiği.

Örnek 3.4-b. A, 2 boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $(A\in M_2(\boldsymbol{R}))$ olmak üzere öz değerleri $\lambda_1(A)=-0.5+0.5i,\ \lambda_2(A)=-0.5-0.5i$ olan

$$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)$$

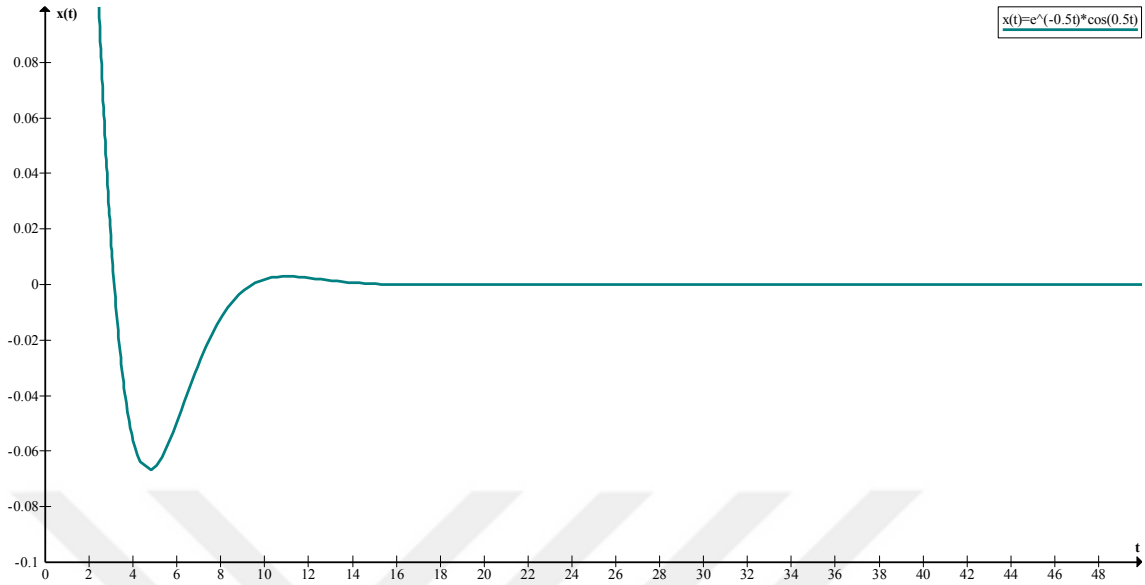
diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin genel çözümü

$$x(t)=ae^{-0.5t}cos(0.5t-b);\ a,b\in\boldsymbol{R}$$

olup $a=1,\ b=0$ alırsak

$$x(t)=e^{-0.5t}cos(0.5t)$$

olur. Benzer şekilde kosinüs fonksiyonu salınımlı olduğu için sistemin çözümü salınımlı olacaktır. Bunu yine aşağıda vereceğimiz grafikte görebiliriz:



Şekil 3.4-b. $x(t)=e^{-0.5t}\cos(0.5t)$ çözümünün grafiği.

Örnek 3.4-a. ve Örnek 3.4-b.'nin karşılaştırılması: Bu iki örnekte de görüldüğü üzere Örnek 3.4-a.'da ele aldığımız fark denklem sisteminin öz değerleri ile Örnek 3.4-b.'de ele aldığımız diferensiyel denklem sisteminin öz değerleri için $-1<Re(\lambda_{1,2}(A))<0$ dır. Buna göre de bu iki sistemin çözümleri salınımlı olmaktadır. Ayrıca, ele alınan fark denklem sisteminin öz değerleri $|\lambda_{1,2}(A)|<1$ şartını sağladığından Schur kararlıdır; ve diferensiyel denklem sisteminin öz değerleri $Re(\lambda_{1,2}(A))<0$ şartını sağladığından Hurwitz kararlıdır.

İncelediğimiz bu örneklere göre aşağıdaki sonuç ve şekil elde edilir:

Sonuç 3.1. (3.7) fark denklem sistemi Schur kararlı ($|\lambda_j(A)|<1,\ (j=1,2,...,N)$) olmak üzere aynı zamanda (3.8) diferensiyel denklem sisteminin öz değerleri

$$Re(\lambda_j(A))<0,\ (j=1,2,...,N)$$

şartını sağlıyorsa yani Hurwitz kararlı ise, oluşacak iki bölgenin kesişim bölgesini sağlayan

$$-1<Re(\lambda_j(A))<0,\ (j=1,2,...,N)$$

şartına göre (3.7) fark denklem sistemi salınımlıdır (Sunday, 2018) (Şekil 3.5.).

Sonuç 3.1.'i daha açık ve sade olarak ifade etmek maksadıyla aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 3.1. $A \in M_N(\boldsymbol{R})$ ve öz değerleri $\lambda_j(A) = \alpha_j \pm i\beta_j,\ (j = 1,2,...,N)$ olan Schur kararlı

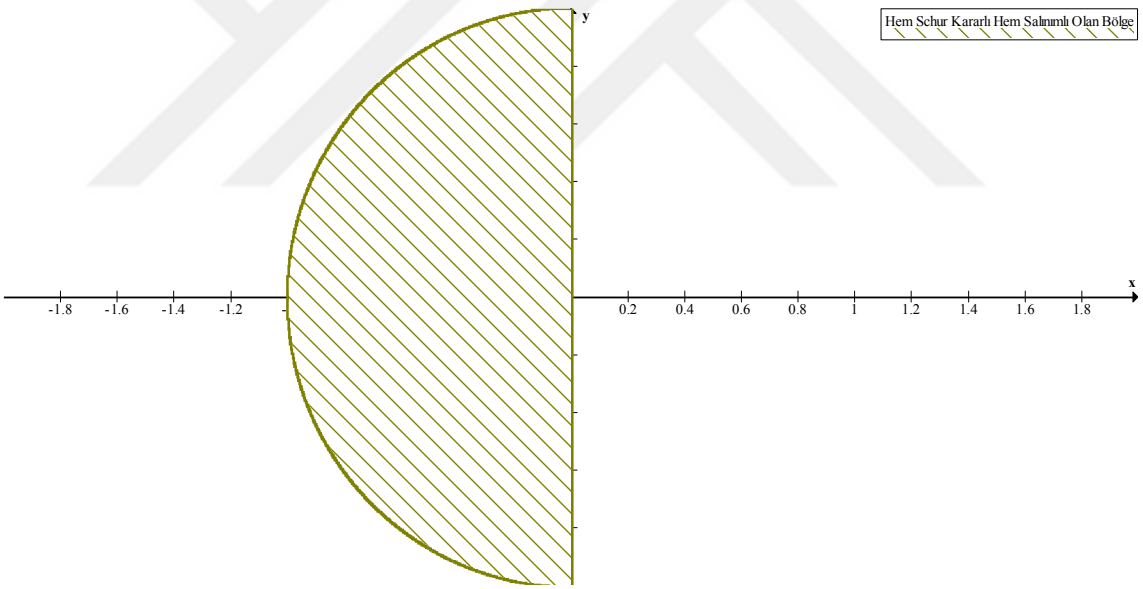
$$y(n+1) = Ay(n)$$

fark denklem sistemi

$$A \in \left\{ X \middle| \lambda_j(X) = \alpha_j + i\beta_j,\ \alpha_j < 0,\ \alpha_j^2 + \beta_j^2 < 1 \right\} \subset M_N(\boldsymbol{R})$$

olmak üzere salınımlıdır.

İspat: Lemma 3.1.'in ispatı fark denklem sistemleri ve diferensiyel denklem sistemlerinin Spektral Kriterlerinin *(1. Lyapunov Yöntemi)* ispatından âşikârdır.



Şekil 3.5. $A \in \left\{ X \middle| \lambda_j(X) = \alpha_j \pm i\beta_j,\ \alpha_j < 0,\ \alpha_j^2 + \beta_j^2 < 1 \right\} \subset M_N(\boldsymbol{R})$ olmak üzere hem Schur kararlı hem salınımlı olan bölge.

Şimdi, (3.7) fark denklem sisteminin Schur kararlılığının kalitesi ile (3.8) diferensiyel denklem sisteminin Hurwitz kararlılığının kalitesini veren parametreleri gösterip Schur kararlılık, Hurwitz kararlılık ve salınımlılık için verdiğimiz öz değerler

ile ilgili özelliği bu parametrelerle ilişkilendireceğiz. Bunun için daha önce de verdiğimiz Fark Lyapunov Teoremini burada tekrar vereceğiz.

3.7. Schur Kararlılık ve Hurwitz kararlılık İçin Öz değerler ve Parametreler Arasındaki Bağıntı

Daha önce verdiğimiz Teorem 3.1.'e göre;

Lyapunov fark denklemini sağlayan $H = H^* > 0$ pozitif tanımlı H matrisi varsa $\omega(A) = \|H\|$, aksi halde $\omega(A) = \infty$ olarak seçilir. Bu şekilde tanımlanan $\omega(A)$ matris fonksiyoneline A matrisinin *Schur kararlılık parametresi* ya da *Schur kararlılığının kalitesini gösteren parametre* denir (Bulgakov ve Godunov, 1988; Akın ve Bulgak, 1998; Bulgak, 1999; Duman, 2008).

ω^*, 1 den büyük bir sayı $(\omega^* > 1)$ olmak üzere $\omega(A) \le \omega^*$ eşitsizliği sağlanıyorsa A matrisi *pratik Schur kararlı (ω^*-Schur kararlı) matris* olarak adlandırılır. $\omega(A) > \omega^*$ ise A matrisine *ω^*-Schur kararsız matris* denir (Bulgakov, 1980; Akın ve Bulgak, 1998; Bulgak, 1999; Duman, 2008; Aydın ve Duman, 2011; Aydın ve Duman, 2014; Aydın ve ark., 2016; Duman ve ark., 2018).

Ayrıca, $A = 0$ matrisi alınırsa Lyapunov fark denkleminin çözümü $H = I$ olur ki $\omega(A) = 1$ elde edilir. Bu durum (3.7) sisteminin Schur kararlılığı için *Mükemmel Durum* olarak adlandırılır. Buradan $\omega(A) = \|H\| \ge 1$ olduğu açıktır (Duman, 2008).

(3.7) fark denklem sisteminin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şartın $|\lambda_j(A)| < 1,\ (j = 1,2,...,N)$ olması ile Teorem 3.1.'deki Schur kararlılık parametresinin $\omega(A) < \infty$ olması birbirine denktir; yani,

$$\underbrace{\left(|\lambda_j(A)| < 1,\ (j = 1,2,...,N)\right)}_{\text{1. Fark Lyapunov Yöntemi-Spektral Kriter}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\exists H = H^* > 0 \ \ni\ A^*HA - H + I = 0\right)}_{\text{2. Fark Lyapunov Yöntemi}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\omega(A) < \infty\right) \textbf{(3.10)}$$

dir.

Şimdi de fark denklem sistemlerinin salınımlılığı için diferensiyel denklem sistemlerinin Hurwitz kararlılığının kalitesini veren parametreyi vereceğiz. Daha önce 1. Lyapunov Yöntemi-Spektral Kriter olarak verdiğimiz öz değerlere bağlı Hurwitz

kararlılık şartını şimdi vereceğimiz bu parametre ile ilişkilendireceğiz. Hurwitz kararlılığı vermemizdeki maksat, Schur kararlı fark denklem sistemlerinin aynı zamanda salınımlı olduğunu gösteren bir sonuca ulaşmaktır.

Teorem 3.2. ***(Lyapunov Teoremi)*** (3.8) diferensiyel denklem sisteminin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$A^*H + HA + I = 0$$

Lyapunov matris denkleminin

$$H = \int_0^\infty e^{tA^*} e^{tA} dt,\ H = H^* > 0$$

çözümünün olmasıdır *(2. Lyapunov Yöntemi)* (Bulgakov, 1980; Bulgakov, 1995; Aydın, 1995; Bulgak, 1999).

Lyapunov matris denklemini sağlayan $H = H^* > 0$ pozitif tanımlı H matrisi varsa $\kappa(A) = 2\|A\|\|H\|$, aksi halde $\kappa(A) = \infty$ olarak seçilir. Bu şekilde tanımlanan $\kappa(A)$ matris fonksiyoneline A matrisinin *Hurwitz kararlılık parametresi* ya da *Hurwitz kararlılığının kalitesini gösteren parametre* denir (Bulgakov, 1980; Bulgakov, 1995; Aydın, 1995).

κ^*, 1 den büyük bir sayı $(\kappa^* > 1)$ olmak üzere $\kappa(A) \le \kappa^*$ eşitsizliği sağlanıyorsa A matrisi *pratik Hurwitz kararlı (κ^*-Hurwitz kararlı) matris* olarak adlandırılır. $\kappa(A) > \kappa^*$ ise A matrisine κ^*-*Hurwitz kararsız matris* denir (Bulgakov, 1995; Duman ve Aydın, 2017).

Ayrıca, $A = -I$ matrisi alınırsa Lyapunov denkleminin çözümü $2H = I$ olur ki $\kappa(A) = 1$ elde edilir. Bu durum (3.8) sisteminin Hurwitz kararlılığı için *Mükemmel Durum* olarak adlandırılır (Bulgakov, 1995).

(3.8) diferensiyel denklem sisteminin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter şartın $Re(\lambda_j(A)) < 0,\ (j = 1,2,...,N)$ olması ile Teorem 3.2.'deki Hurwitz kararlılık parametresinin $\kappa(A) < \infty$ olması birbirine denktir; yani,

$$\underbrace{\left(Re(\lambda_j(A)) < 0,\ (j = 1,2,...,N)\right)}_{\text{1. Lyapunov Yöntemi-Spektral Kriter}} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\exists H = H^* > 0 \ \ni\ A^*H + HA + I = 0\right)}_{\text{2. Lyapunov Yöntemi}} \Leftrightarrow (\kappa(A) < \infty) \quad \textbf{(3.11)}$$

dir.

Buna göre (3.10) ve (3.11) denkliği göz önüne alındığında, Sonuç 3.1.'de bahsi geçen hem Schur kararlılık hem salınımlılık şartı için oluşan bölge, Teorem 3.1. ve Teorem 3.2.'deki parametreler ile ilişkilendirilebilir. Bunu aşağıdaki kritik ile verelim:

Kritik 3.2. (3.7) fark denklem sisteminin salınımlı olması için

$$A \in \{A \mid \omega(A) < \infty\} \cap \{A \mid \kappa(A) < \infty\}$$

olması yeterlidir.

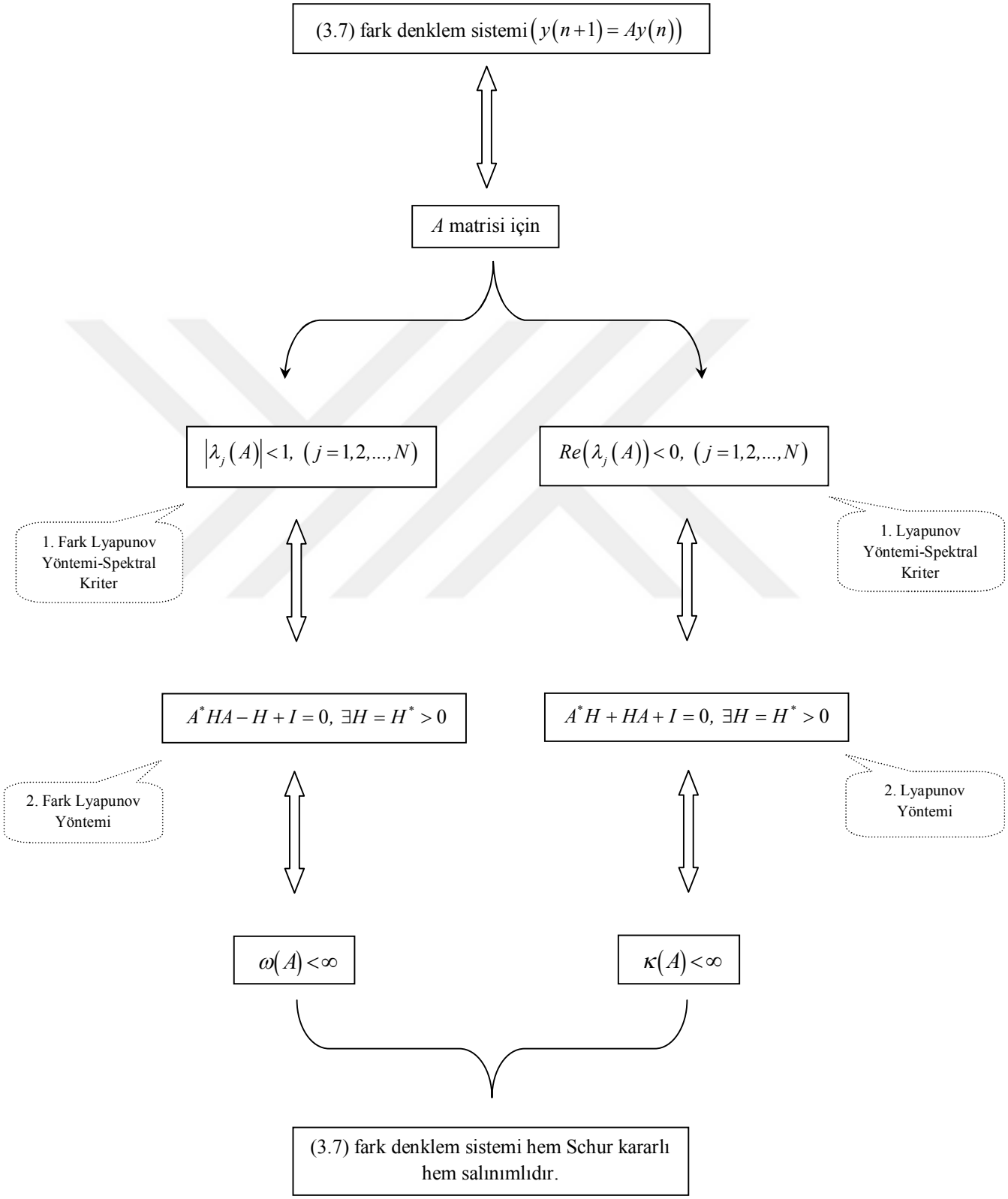
Şimdi, fark denklem sistemlerinin hem Schur kararlı hem salınımlı olması için elde ettiğimiz birbirine denk sonuçları bir arada vereceğiz.

3.8. Fark Denklem Sistemlerini Hem Schur Kararlı Hem Salınımlı Kılan Denk Sonuçlar

(3.7) fark denklem sistemi için

1. (3.7) fark sistemi Schur kararlı ve (3.8) diferensiyel sistemi Hurwitz kararlı ise;
2. $|\lambda_j(A)| < 1,\ (j = 1,2,...,N)$ *(1. F.L.Y.)* ve $Re(\lambda_j(A)) < 0,\ (j = 1,2,...,N)$ *(1.L.Y.)* ise;
3. $A^*HA - H + I = 0,\ \exists H = H^* > 0$ *(2. F.L.Y.)* ve $A^*H + HA + I = 0,\ \exists H = H^* > 0$ *(2. L.Y.)* ise;
4. $\omega(A) < \infty$ ve $\kappa(A) < \infty$ ise

(3.7) fark denklem sistemi salınımlıdır. Burada 1., 2., 3., 4. şartları birbirine denktir. Bunu bir de şema ile aşağıda gösterelim:



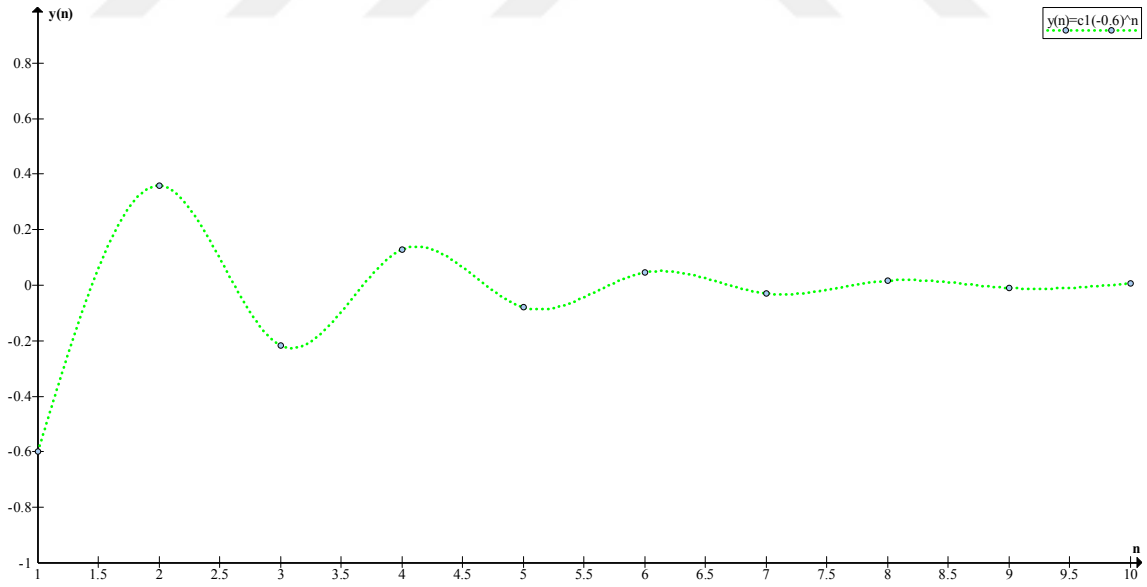
Şema 3.1. (3.7) fark denklem sisteminin $\left(y(n+1)=Ay(n)\right)$ hem Schur kararlı hem salınımlı olması için elde edilen birbirine denk sonuçlar.

Şimdi, Sonuç 3.1.'de verilen öz değerlere bağlı salınımlılık şartı ile Kritik 3.2.'de verilen parametrelere bağlı salınımlılık şartının aynı olup olmadığını görmek için örnekler verelim ve salınımlılığı da şekiller üzerinden gösterelim:

Örnek 3.5. $A=\begin{pmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.6 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+1)=Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem için

$$\omega(A)=1.5625<\infty \text{ ve } \kappa(A)=1.5<\infty$$

olduğundan Kritik 3.2.'deki şart sağlanır ve bu sistem salınımlı olur. Ayrıca $\lambda_1=-0.4,\ \lambda_2=-0.6$ olduğundan Sonuç 3.1.'deki şartta sağlanmış olur ve buradan da sistemin salınımlı olduğu görülür. O halde salınımlılığı göstermek için aşağıdaki şekli verelim. Burada; $c_1,c_2\in \boldsymbol{R}$ olduğu için $c_1=c_2=1$ olarak alınmıştır.

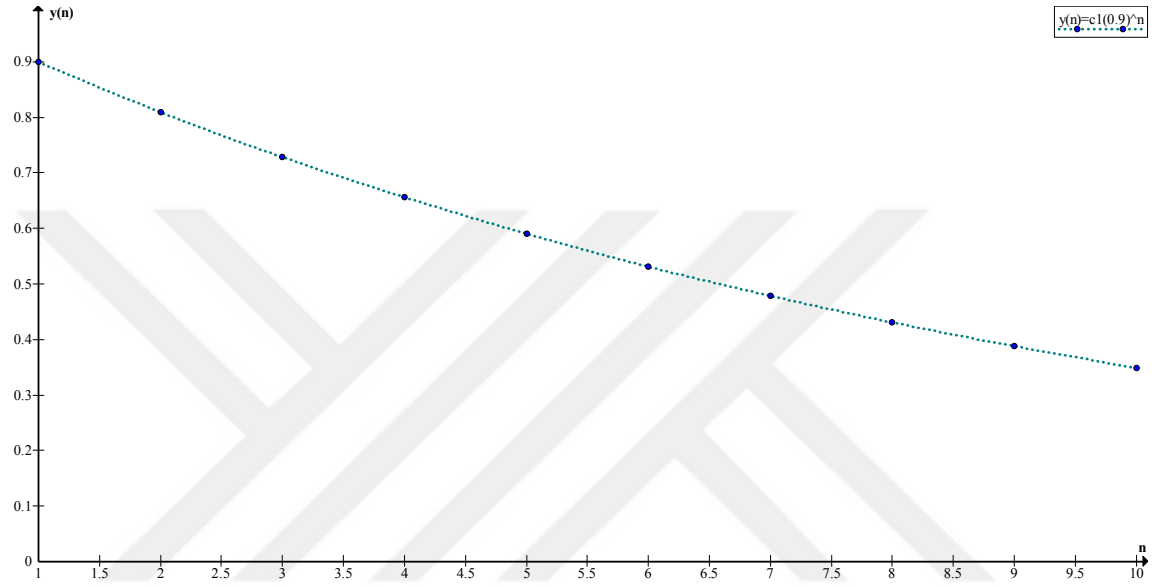


Şekil 3.6. Örnek 3.5.'teki sistemin salınımlılığını gösteren $y(n)=c_1(-0.6)^n$ baskın (dominant) çözümün grafiği.

Örnek 3.6. $A=\begin{pmatrix} -0.1 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+1)=Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem için

$$\omega(A)=5.26316<\infty \text{ ve } \kappa(A)=\infty$$

olup Kritik 3.2.'deki şart sağlanmadığından sistem salınımlı değildir. Ayrıca $\lambda_1=-0.1,\ \lambda_2=0.9$ olduğundan Sonuç 3.1.'teki şartta sağlanmamış olur ve buradan da sistemin salınımlı olmadığı görülür. O halde salınımlılığın olmadığını göstermek için aşağıdaki şekli verelim. Burada; $c_1,c_2\in \boldsymbol{R}$ olduğu için $c_1=c_2=1$ olarak alınmıştır.



Şekil 3.7. Örnek 3.6.'daki sistemin salınımlı olmadığını gösteren $y(n)=c_1(0.9)^n$ baskın (dominant) çözümün grafiği.

Örnek 3.5. ve Örnek 3.6.'da görüldüğü üzere Sonuç 3.1. ve Kritik 3.2.'de verilen şartlar denk olup salınımlılık için bu şartlardan herhangi biri kullanılabilir.

4. FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN OPTİMUM SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, fark denklem sistemlerinin pratik Schur kararlılığı ve mükemmel durumu ile diferensiyel denklem sistemlerinin pratik Hurwitz kararlılığı ve mükemmel durumunu incelemek üzere örnekler verilmiş ve buradan yola çıkarak fark denklem sistemlerinin salınımlılığı için de pratik salınımlılık ve mükemmel durumu gösteren bir parametre elde edip edilemeyeceği incelenmiştir.

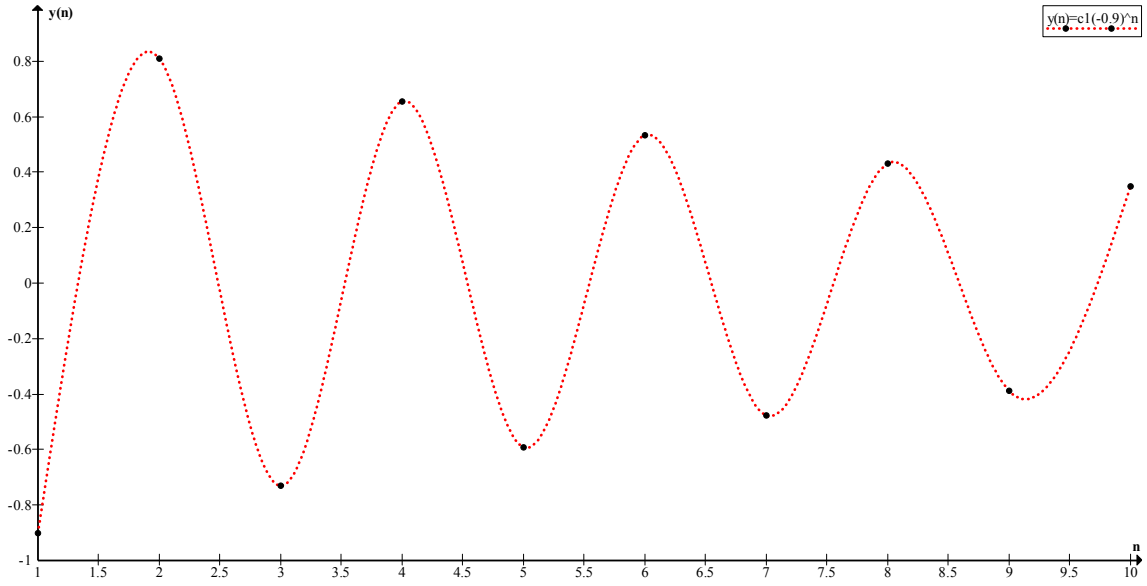
4.1. Optimum Salınımlılık

Şimdi, örnekler üzerinden Schur kararlılığın ve Hurwitz kararlılığın hangi durumlarda bozulup bozulmadığını inceleyeceğiz ve buna bağlı olarak da salınımlılık için optimum bir bölge tâyin etmeye çalışacağız.

Örnek 4.1. $A=\begin{pmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+1)=Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem için

$$\omega(A)=5.26316<\infty \text{ ve } \kappa(A)=1.125<\infty$$

olduğundan Kritik 3.2.'deki şart sağlanır ve bu sistem salınımlı olur. Ayrıca $\lambda_1=-0.9,\ \lambda_2=-0.8$ olduğundan Sonuç 3.1.'deki şartta sağlanmış olur ve buradan da sistemin salınımlı olduğu görülür. O halde salınımlılığı göstermek için aşağıdaki şekli verelim. Burada; $c_1,c_2\in \boldsymbol{R}$ olduğu için $c_1=c_2=1$ olarak alınmıştır.

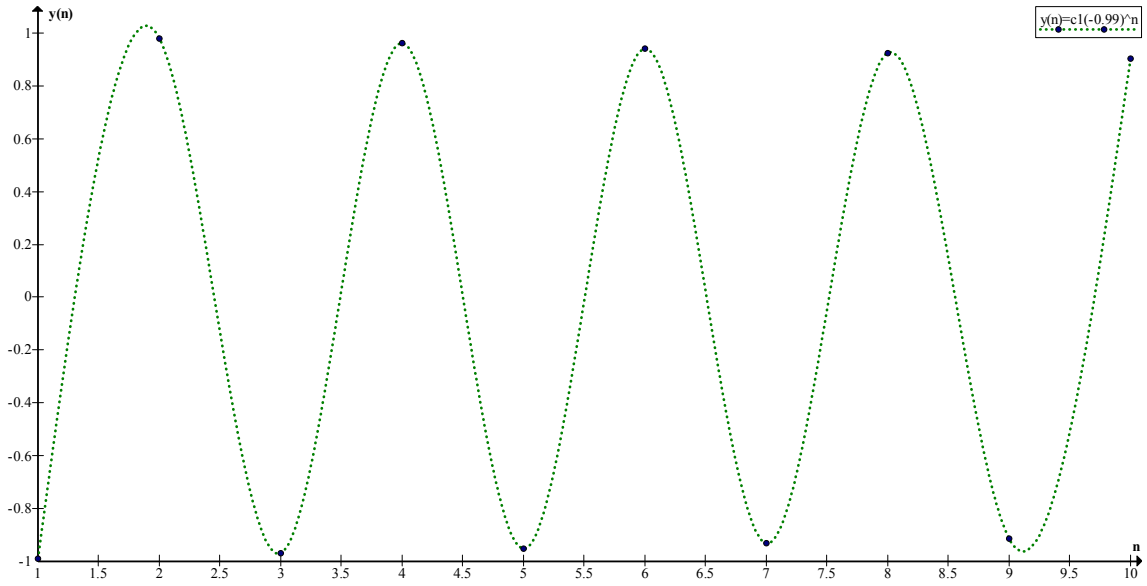


Şekil 4.1. Örnek 4.1.'deki sistemin salınımlı olduğunu gösteren $y(n)=c_1(-0.9)^n$ baskın (dominant) çözümün grafiği.

Örnek 4.2. $A=\begin{pmatrix} -0.99 & 0 \\ 0 & -0.98 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+1)=Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem için

$$\omega(A)=50.2513<\infty \text{ ve } \kappa(A)=1.0102<\infty$$

olduğundan Kritik 3.2.'deki şart sağlanır ve bu sistem salınımlı olur. Ayrıca $\lambda_1=-0.99,\ \lambda_2=-0.99$ olduğundan Sonuç 3.1.'deki şartta sağlanmış olur ve buradan da sistemin salınımlı olduğu görülür. O halde salınımlılığı göstermek için aşağıdaki şekli verelim. Burada; $c_1,c_2\in \boldsymbol{R}$ olduğu için $c_1=c_2=1$ olarak alınmıştır.

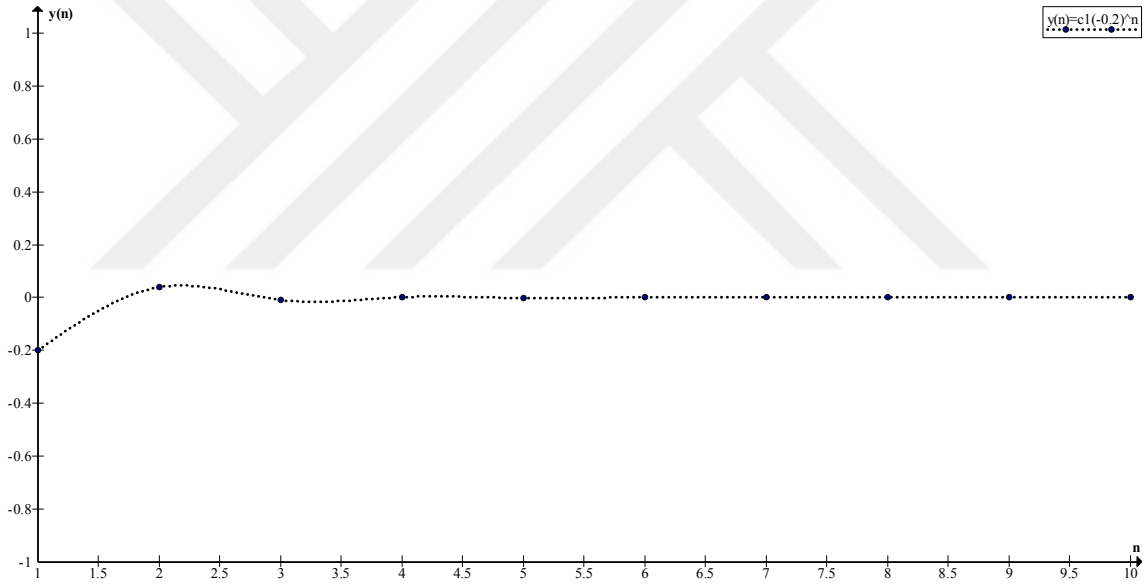


Şekil 4.2. Örnek 4.2.'deki sistemin salınımlı olduğunu gösteren $y(n)=c_1(-0.99)^n$ baskın (dominant) çözümün grafiği.

Örnek 4.3. $A=\begin{pmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+1)=Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem için

$$\omega(A)=1.04167<\infty \text{ ve } \kappa(A)=2<\infty$$

olduğundan Kritik 3.2.'deki şart sağlanır ve bu sistem salınımlı olur. Ayrıca $\lambda_1=-0.1,\ \lambda_2=-0.2$ olduğundan Sonuç 3.1.'deki şartta sağlanmış olur ve buradan da sistemin salınımlı olduğu görülür. O halde salınımlılığı göstermek için aşağıdaki şekli verelim. Burada; $c_1,c_2\in \boldsymbol{R}$ olduğu için $c_1=c_2=1$ olarak alınmıştır.

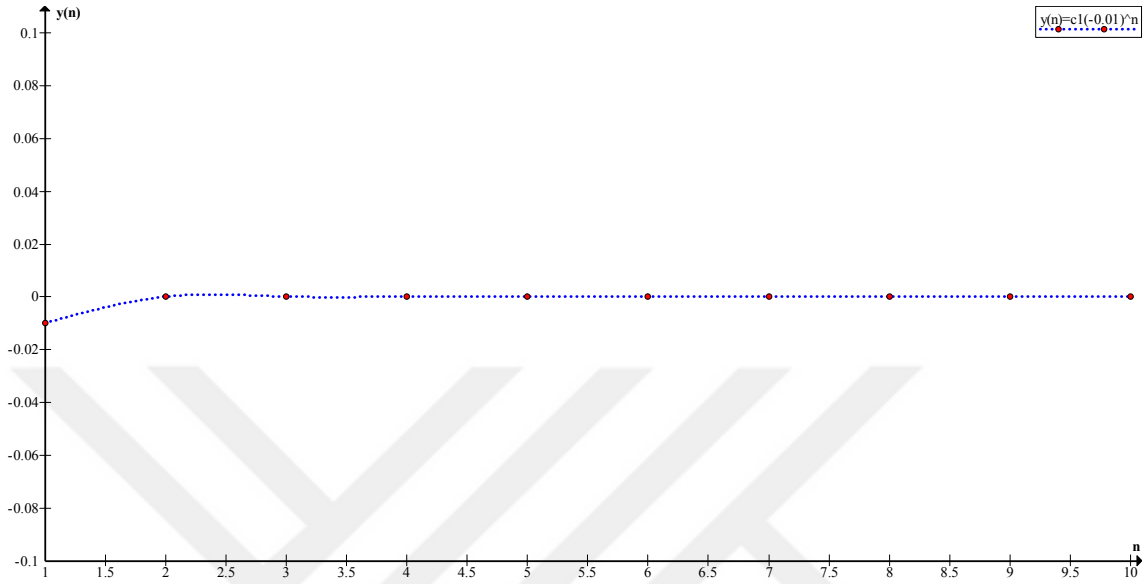


Şekil 4.3. Örnek 4.3.'teki sistemin salınımlı olduğunu gösteren $y(n)=c_1(-0.2)^n$ baskın (dominant) çözümün grafiği.

Örnek 4.4. $A=\begin{pmatrix} -0.01 & 0 \\ 0 & -0.001 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+1)=Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem için

$$\omega(A)=1.0001<\infty \text{ ve } \kappa(A)=10<\infty$$

olduğundan Kritik 3.2.'deki şart sağlanır ve bu sistem salınımlı olur. Ayrıca $\lambda_1 = -0.01,\ \lambda_2 = -0.01$ olduğundan Sonuç 3.1.'deki şartta sağlanmış olur ve buradan da sistemin salınımlı olduğu görülür. O halde salınımlılığı göstermek için aşağıdaki şekli verelim. Burada; $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ olduğu için $c_1 = c_2 = 1$ olarak alınmıştır.

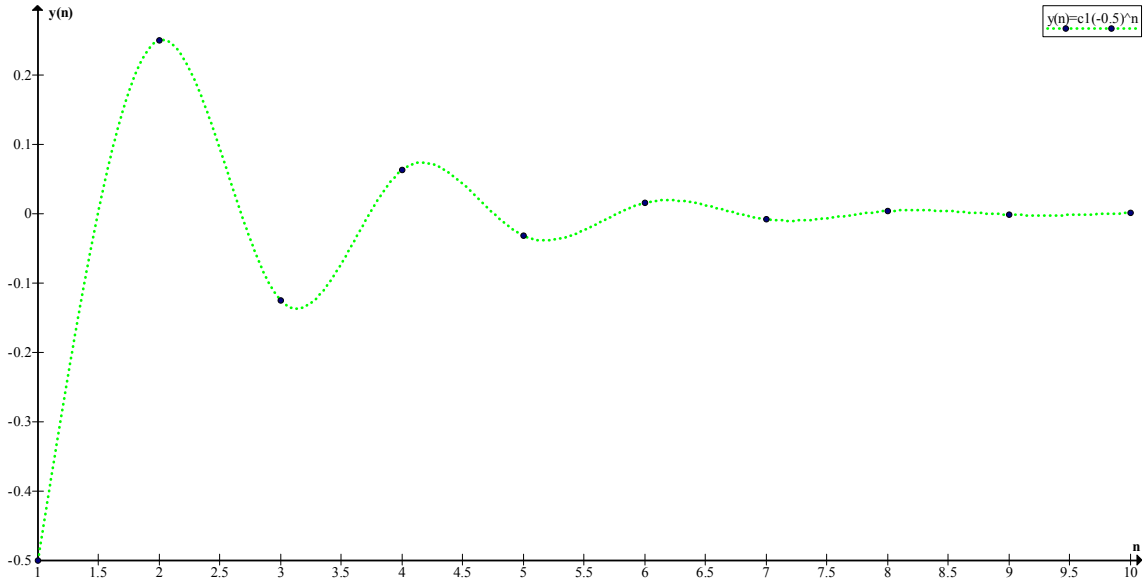


Şekil 4.4. Örnek 4.4.'teki sistemin salınımlı olduğunu gösteren $y(n) = c_1(-0.01)^n$ baskın (dominant) çözümün grafiği.

Örnek 4.5. $A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+1) = Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem için

$$\omega(A) = 1.33333 < \infty \text{ ve } \kappa(A) = 1 < \infty$$

olduğundan Kritik 3.2.'deki şart sağlanır ve bu sistem salınımlı olur. Ayrıca $\lambda_1 = -0.5,\ \lambda_2 = -0.5$ olduğundan Sonuç 3.1.'deki şartta sağlanmış olur ve buradan da sistemin salınımlı olduğu görülür. O halde salınımlılığı göstermek için aşağıdaki şekli verelim. Burada; $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ olduğu için $c_1 = c_2 = 1$ olarak alınmıştır.



Şekil 4.5. Örnek 4.5.'teki sistemin salınımlı olduğunu gösteren $y(n)=c_1(-0.5)^n$ baskın (dominant) çözümün grafiği.

Yukarıda verilen örneklerde görüldüğü üzere, öz değerler Şekil 3.5.'teki hem Schur kararlı hem salınımlı bölgenin içinden olmak üzere sola doğru yaklaştıkça $(\lambda_{1,2}\to -1)$ Schur kararlılık bozulmakta ve Schur kararlılığın kalitesi düşmektedir; sağa doğru yaklaştıkça $(\lambda_{1,2}\to 0)$ ise Hurwitz kararlılık bozulmakta ve Hurwitz kararlılığın kalitesi düşmektedir. Bu örneklerin şekilleri incelendiğinde ise fark denklem sistemlerinin salınımlılığı $\lambda_{1,2}\to -1$ doğru artmakta $\lambda_{1,2}\to 0$ doğru ise azalmaktadır. Buna göre fark denklem sistemlerinin salınımlılığını garanti eden ve kalitesini belirleyen bir parametre ile mükemmel durum tâyin edebiliriz. Bunu bir başlık altında bir kritik ile verelim**.**

4.2. Pratik Salınımlılık

Kritik 4.1. (3.7) fark denklem sistemi için $\omega(A)<\infty$ ve (3.8) diferensiyel sistemi için $\kappa(A)<\infty$ olmak üzere

$$\gamma(\omega(A),\kappa(A),A)<\infty$$

ise (3.7) sistemi salınımlı;

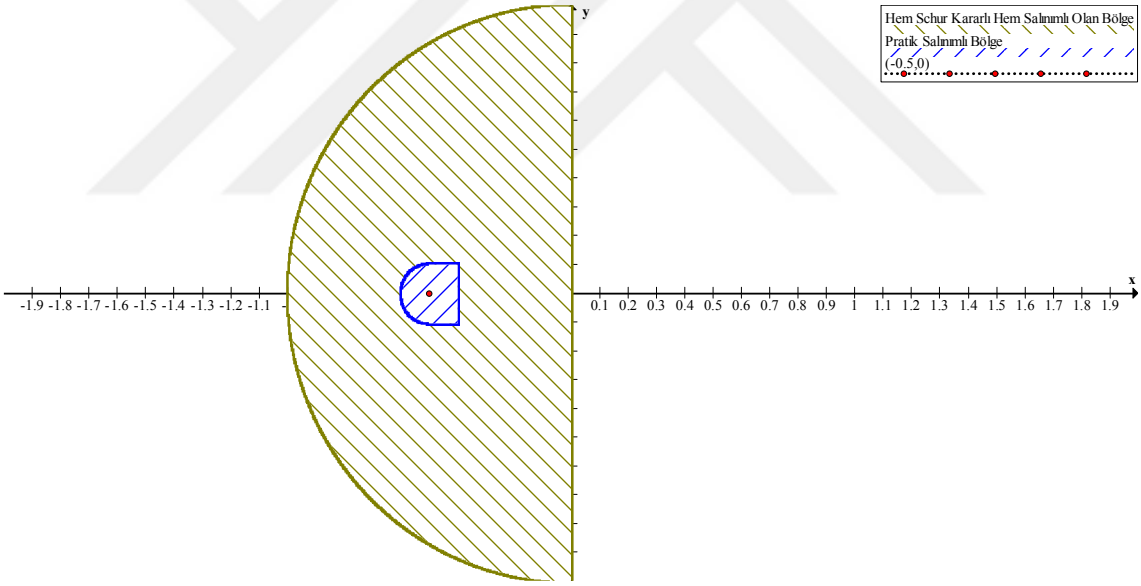
$$\gamma\left(\omega(A),\kappa(A),A\right)=\infty$$

ise (3.7) sistemi salınımsız denir. Bu şekilde tanımlanan $\gamma\left(\omega(A),\kappa(A),A\right)$ matris fonksiyoneline A matrisinin *salınımlılık parametresi* ya da *salınımlılığın kalitesini gösteren parametre* denir.

γ^*, 1.5 ten büyük bir sayı $\left(\gamma^*>1.5\right)$ olmak üzere $\gamma(A)\le\gamma^*$ eşitsizliği sağlanıyorsa A matrisi *pratik salınımlı (γ^*-salınımlı) matris* olarak adlandırılır. $\gamma(A)>\gamma^*$ ise A matrisine *γ^*-salınımsız matris* denir.

Ayrıca, $A=-\frac{1}{2}I$ matrisi alınırsa bu durum (3.7) fark denklem sisteminin salınımlılığının *mükemmel durumu* olarak adlandırılır.

Pratik salınımlı (γ^*-salınımlı) olan bölgeyi şekil üzerinden gösterecek olursak aşağıdaki gibi bir daire dilimi elde edilir:



Şekil 4.6. $\gamma^*>1.5$ olmak üzere $\gamma(A)\le\gamma^*$ eşitsizliğini sağlayan pratik salınımlı olan bölge.

Uyarı 4.1. Fark denklem sistemlerinin salınımlılığının optimumluğu incelenmiş ve netice itibariyle pratik salınımlı olan bir parametre ve bölge tâyin edilmiştir. Dikkat edilirse tâyin edilen parametre Schur kararlılık ve Hurwitz kararlılık parametrelerine bağlı kalmıştır. Bu iki parametreden bağımsız da bir parametre elde edilebileceği göz ardı edilmemelidir.

5. FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN SALINIMLILIĞININ SÜREKLİLİK TEOREMLERİ

Bu bölümde, birinci mertebeden fark denklem sistemleri ve diferensiyel denklem sistemlerinin süreklilik teoremlerini ele alıp salınımlılığın sürekliliği incelenmiştir.

5.1. Fark Denklem Sistemlerinin Süreklilik Teoremleri ve Üst Sınırı

$A,B\in M_N(\boldsymbol{R})$ olmak üzere (3.7) fark denklem sisteminin bozunum sistemi olan

$$y(n+1)=(A+B)y(n) \tag{5.1}$$

sistemini ele alalım. Buna göre literatürde süreklilik teoremleri olarak bilinen teoremleri verelim:

Teorem 5.1. (3.7) sistemi Schur kararlı $(\omega(A)<\infty)$ ve $\delta_1=\dfrac{\|A\|}{10\omega(A)}$ olmak üzere

$$\|B\|<\delta_1$$

şartını sağlayan herhangi bir B bozunum matrisi için $A+B$ matrisi ((5.1) sistemi) Schur kararlıdır ve

$$|\omega(A+B)-\omega(A)|<4\omega^2(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}$$

eşitsizliği doğrudur (Bulgakov, 1995; Akın ve Bulgak, 1998; Duman, 2008).

Teorem 5.2. (3.7) sistemi Schur kararlı $(\omega(A)<\infty)$ ve $\delta_2=\dfrac{1}{20\omega^{\frac{3}{2}}(A)}$ olmak üzere

$$\|B\|<\delta_2$$

şartını sağlayan herhangi bir B bozunum matrisi için $A+B$ matrisi ((5.1) sistemi) Schur kararlıdır ve

$$|\omega(A+B)-\omega(A)|<5\omega^{\frac{5}{2}}(A)\|B\|$$

eşitsizliği doğrudur (Bulgakov ve Godunov, 1988; Bulgak, 1999; Duman, 2008; Aydın ve Duman, 2011).

Teorem 5.3 (3.7) sistemi Schur kararlı $\left(\omega(A)<\infty\right)$ ve $\delta_3=\frac{1}{6\pi\omega(A)}$ olmak üzere

$$\|B\|<\delta_3$$

şartını sağlayan herhangi bir B bozunum matrisi için $A+B$ matrisi ((5.1) sistemi) Schur kararlıdır ve

$$\left|\omega(A+B)-\omega(A)\right|<2\omega^2(A)\left(2\|A\|+\|B\|\right)\|B\|$$

eşitsizliği doğrudur (Bulgak, 1999; Aydın ve Duman, 2011; Aydın ve Duman, 2014).

Fark denklem sistemlerinin salınımlılığının sürekliliği için verdiğimiz bu süreklilik teoremlerinden bizim için gerekli olan en büyük üst sınıra sahip olandır. Çünkü en büyük üst sınıra göre Schur kararlılık sürekli olursa diğer sınırlar için de sürekli olacaktır. Bunun için aşağıdaki kritiği verelim:

Kritik 5.1. (3.7) sistemi Schur kararlı $\left(\omega(A)<\infty\right)$ ve $\delta_1=\frac{\|A\|}{10\omega(A)}$, $\delta_2=\frac{1}{20\omega^{\frac{3}{2}}(A)}$, $\delta_3=\frac{1}{6\pi\omega(A)}$ olmak üzere

$$\|B\|<\delta=max\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$$

şartını sağlayan herhangi bir B bozunum matrisi için $A+B$ matrisi ((5.1) sistemi) Schur kararlıdır.

5.2. Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Süreklilik Teoremleri ve Üst Sınırı

Diferensiyel denklem sistemini ve süreklilik teoremlerini vermemizdeki amaç, fark denklem sistemlerinin salınımlılığının sürekliliği içindir.

$A,B\in M_N(\boldsymbol{R})$ olmak üzere (3.8) diferensiyel denklem sisteminin bozunum sistemi olan

$$\frac{d}{dt}x(t)=(A+B)x(t) \qquad \textbf{(5.2)}$$

sistemini ele alalım. Buna göre literatürde süreklilik teoremleri olarak bilinen teoremleri verelim:

Teorem 5.4. (3.8) sistemi Hurwitz kararlı $\left(\kappa(A)<\infty\right)$ ve $\Lambda_1=\frac{\|A\|}{15\kappa(A)}$ olmak üzere

$$\|B\| \le \Lambda_1$$

şartını sağlayan herhangi bir B bozunum matrisi için $A+B$ matrisi ((5.2) sistemi) Hurwitz kararlıdır ve

$$\left|\kappa(A+B)-\kappa(A)\right| \le 2.1\kappa^2(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}$$

eşitsizliği doğrudur (Bulgakov, 1995; Aydın, 1995).

Teorem 5.5. (3.8) sistemi Hurwitz kararlı $(\kappa(A)<\infty)$ ve $\Lambda_2 = \dfrac{\|A\|}{\kappa(A)}$ olmak üzere

$$\|B\| \le \Lambda_2$$

şartını sağlayan herhangi bir B bozunum matrisi için $A+B$ matrisi ((5.2) sistemi) Hurwitz kararlıdır ve

$$\kappa(A+B) \le \frac{\kappa(A)\left(\|A\|+\|B\|\right)}{\|A\|-\|B\|\kappa(A)}$$

eşitsizliği doğrudur (Duman veAydın, 2017).

Benzer şekilde, fark denklem sistemlerinin salınımlılığının sürekliliği için verdiğimiz bu süreklilik teoremlerinden bizim için gerekli olan yine en büyük üst sınıra sahip olandır. Çünkü en büyük üst sınıra göre Hurwitz kararlılık sürekli olursa diğer sınırlar için de sürekli olacaktır. Bunun için de aşağıdaki kritiği verelim:

Kritik 5.2. (3.8) sistemi Hurwitz kararlı $(\kappa(A)<\infty)$ ve $\Lambda_1 = \dfrac{\|A\|}{15\kappa(A)}$, $\Lambda_2 = \dfrac{\|A\|}{\kappa(A)}$ olmak üzere

$$\|B\| < \Lambda = max\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$$

şartını sağlayan herhangi bir B bozunum matrisi için $A+B$ matrisi ((5.2) sistemi) Hurwitz kararlıdır.

5.3. Salınımlılığın Sürekliliği

Şimdi, Schur kararlılık ve Hurwitz kararlılık için verdiğimiz bu teoremlerin salınımlılık için olan sonuçlarını verelim:

Sonuç 5.1. (3.7) sistemi salınımlı (yani; $A \in \{A \mid \omega(A)<\infty\} \cap \{A \mid \kappa(A)<\infty\}$) olmak üzere

$$B \in \{B \mid \|B\| < \delta\} \cap \{B \mid \|B\| \le \mathbf{\Lambda}\}$$

şartını sağlayan herhangi bir B bozunum matrisi için $A+B$ matrisi ((5.1) sistemi) salınımlıdır.

Sonuç 5.1.'i daha açık ve sade olarak ifade etmek maksadıyla aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 5.1. (3.7) sistemi salınımlı (yani; $A \in \{A \mid \omega(A) < \infty\} \cap \{A \mid \kappa(A) < \infty\}$) olmak üzere

i. $10\omega(A) > \kappa(A)$ için $\|B\| < \dfrac{\kappa(A)}{10\omega(A)}$,

ii. $10\omega(A) < \kappa(A)$ için $\|B\| < \dfrac{10\omega(A)}{\kappa(A)}$,

şartları sağlanıyorsa herhangi bir B bozunum matrisi için $A+B$ matrisi ((5.1) sistemi) salınımlıdır.

İspat: Lemma 5.1.'in ispatı fark denklem sistemleri ve diferensiyel denklem sistemlerinin süreklilik teoremi olan Teorem 5.1. ve Teorem 5.5.'in ispatından âşikârdır. Şöyle ki;

$$\left.\begin{array}{l} \|B\| < \dfrac{\|A\|}{10\omega(A)} \\ \|B\| \le \dfrac{\|A\|}{\kappa(A)} \end{array}\right\} \text{ iken } \begin{cases} \dfrac{\|A\|}{10\omega(A)} < \dfrac{\|A\|}{\kappa(A)} \text{ ise } \kappa(A) < 10\omega(A) \text{ olur. (*)} \\ \dfrac{\|A\|}{\kappa(A)} < \dfrac{\|A\|}{10\omega(A)} \text{ ise } 10\omega(A) < \kappa(A) \text{ olur. (**)} \end{cases}$$

Buna göre, (*) ve (**)'den

$10\omega(A) > \kappa(A)$ iken $\|B\| < \dfrac{\kappa(A)}{10\omega(A)} < \dfrac{\|A\|}{\kappa(A)}$ olup $\|B\| < \dfrac{\kappa(A)}{10\omega(A)}$ olduğu

ve

$10\omega(A) < \kappa(A)$ iken $\|B\| \le \dfrac{\|A\|}{\kappa(A)} < \dfrac{\|A\|}{10\omega(A)}$ olup $\|B\| < \dfrac{10\omega(A)}{\kappa(A)}$ olduğu

görülür. Böylece Lemma 5.1. ispatlanmış olur.

Lemma 5.1. ile aynı anlama gelen aşağıdaki lemmayı da verebiliriz:

Lemma 5.2. (3.7) sistemi salınımlı (yani; $A \in \{A \mid \omega(A) < \infty\} \cap \{A \mid \kappa(A) < \infty\}$) olmak üzere

$$\|B\| < \Theta,\ \Theta = min\left\{\frac{\|A\|}{10\omega(A)}, \frac{\|A\|}{\kappa(A)}\right\}$$

şartını sağlayan herhangi bir B bozunum matrisi için $A+B$ matrisi ((5.1) sistemi) salınımlıdır.

İspat: Lemma 5.2.'nin ispatı fark denklem sistemleri ve diferensiyel denklem sistemlerinin süreklilik teoremi olan Teorem 5.1. ve Teorem 5.5.'in ispatından âşikârdır ve Lemma 5.1.'iin ispatı ile aynıdır.

Not 5.1. Fark denklem sisteminin salınımlılığının sürekliliği için verilen Sonuç 5.1., Lemma 5.1. ve Lemma 5.2.'deki şartlar birbirine denktir.

Şimdi, Sonuç 5.1.'i bir örnek üzerinden irdeleyelim:

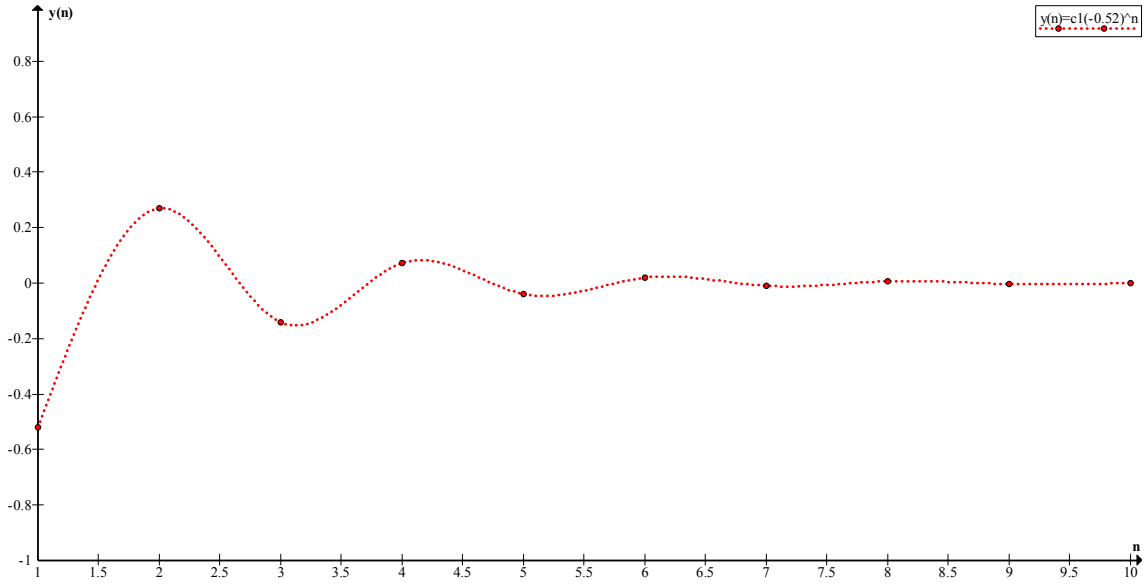
Örnek 5.1. $A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}$ olmak üzere salınımlı $y(n+1) = Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem salınımlı olduğu için $\omega(A) = 1.33333 < \infty$ ve $\kappa(A) = 5 < \infty$ dir. Şimdi ise bu sistemin bozunumu olan $B = \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & -0.03 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+1) = (A+B)y(n)$ sistemini ele alalım. Sonuç 5.1.'deki şarttan

$$\|B\| < \frac{\|A\|}{10\omega(A)} \Rightarrow 0.03 < 0.0375000938 \text{ ve } \|B\| < \frac{\|A\|}{\kappa(A)} \Rightarrow 0.03 < 0.1$$

olduğu görülür. Dolayısıyla Sonuç 5.1.'den B bozunum matrisi için $A+B$ matrisinin de salınımlı olduğu görülür.

Şimdi, süreklilik teoremi ile bulduğumuz bozunum sisteminin salınımlılığını öz değerlerinden yola çıkarak Sonuç 3.1.'deki şarta göre şekil üzerinden gösterelim:

$A + B = \begin{pmatrix} -0.52 & 0 \\ 0 & -0.13 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+1) = (A+B)y(n)$ bozunum sisteminin öz değerleri $\lambda_1 = -0.52, \lambda_2 = -0.13$ olup Sonuç 3.1.'deki $-1 < Re(\lambda_{1,2}) < 0$ şartını sağladığından sistem salınımlıdır ve genel çözümü $y(n) = c_1(-0.52)^n + c_2(-0.13)^n$ olup $y(n) = c_1(-0.52)^n$ baskın (dominant) çözüme göre çözümün hareketini gösteren grafik ise aşağıdaki gibidir. Burada; $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ olduğundan $c_1 = c_2 = 1$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.1. B bozunum sisteminin salınımlılığını gösteren $y(n)=c_1(-0.52)^n$ baskın (dominant) çözümün grafiği.

Örnek 5.1.'de görüldüğü üzere Sonuç 5.1.'de verilen salınımlılık şartı sağlandığı gibi aynı zamanda Sonuç 3.1.'de verilen salınımlılık şartı da sağlanmış ve şekil üzerinden salınımlılık görülmüştür.

Örnek 5.2. $A=\begin{pmatrix}-0.01 & 0\\ 0 & -0.02\end{pmatrix}$ olmak üzere salınımlı $y(n+1)=Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem salınımlı olduğu için $\omega(A)=1.0004<\infty$ ve $\kappa(A)=2<\infty$ dir. Şimdi ise bu sistemin bozunumu olan $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -0.1\end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+1)=(A+B)y(n)$ sistemini ele alalım. Sonuç 5.1.'deki şarttan

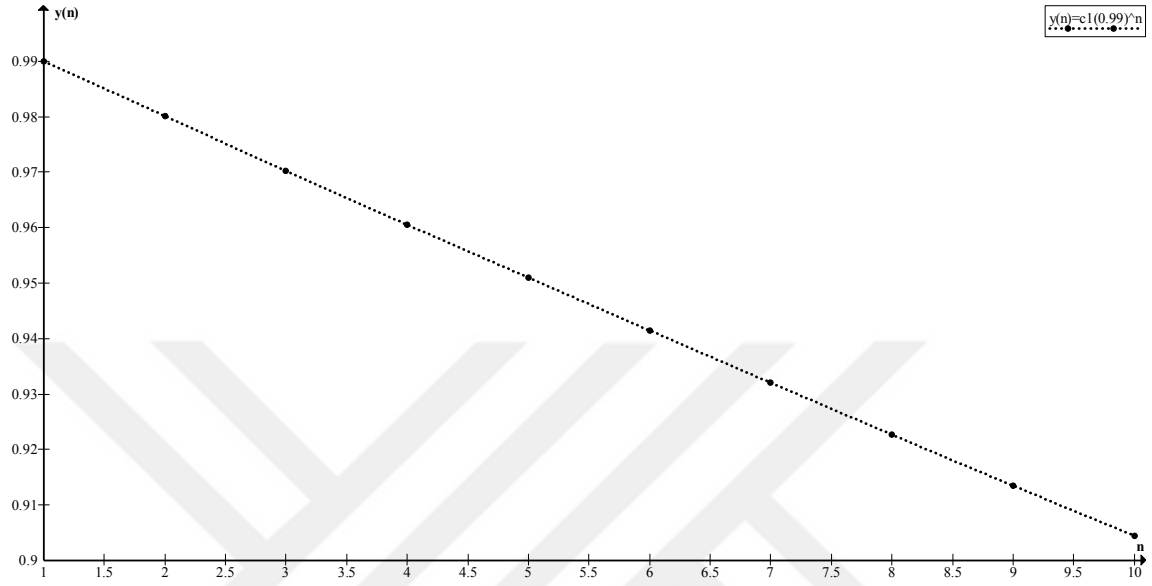
$$\|B\|<\frac{\|A\|}{10\omega(A)}\Rightarrow 1\not<0.0019992003 \text{ ve } \|B\|<\frac{\|A\|}{\kappa(A)}\Rightarrow 1\not<0.01$$

olduğu görülür. Dolayısıyla Sonuç 5.1.'den B bozunum matrisi için $A+B$ matrisinin de salınımlı olmadığı görülür.

Şimdi, süreklilik teoremi ile bulduğumuz bozunum sisteminin salınımlı olmayışını öz değerlerinden yola çıkarak Sonuç 3.1.'deki şarta göre şekil üzerinden gösterelim:

$A+B=\begin{pmatrix}0.99 & 0\\ 0 & -0.12\end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+1)=(A+B)y(n)$ bozunum sisteminin öz değerleri $\lambda_1=0.99, \lambda_2=-0.12$ olup Sonuç 3.1.'deki $-1<Re(\lambda_{1,2})<0$ şartını sağlamadığından

sistem salınım değildir ve genel çözümü $y(n)=c_1(0.99)^n+c_2(-0.12)^n$ olup $y(n)=c_1(0.99)^n$ baskın (dominant) çözüme göre çözümün hareketini gösteren grafik ise aşağıdaki gibidir. Burada; $c_1,c_2 \in \boldsymbol{R}$ olduğundan $c_1=c_2=1$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.2. *B* bozunum sisteminin salınımlı olmadığını gösteren $y(n)=c_1(0.99)^n$ baskın (dominant) çözümün grafiği.

Örnek 5.2.'de görüldüğü üzere Sonuç 5.1.'de verilen salınımlılık şartı sağlanmazken aynı zamanda Sonuç 3.1.'de verilen salınımlılık şartı da sağlanmamış, dolayısıyla şekil üzerinde salınımlı bir hareket görülmemiştir.

6. YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN HEM SCHUR KARARLILIĞI HEM SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, yüksek mertebeden fark denklem sistemleri ve diferensiyel denklem sistemleri ele alınmış ve örnekler üzerinden yüksek mertebeden fark denklem sistemlerinin hem Schur kararlı hem salınımlı olduğu durumların varlığı incelenerek bir sonuca ulaşmaya çalışılmıştır.

6.1. İkinci Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı

A, N boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $\left(A \in M_N(\boldsymbol{R})\right)$ olmak üzere

$$y(n+2) = Ay(n) \tag{6.1}$$

sistemini ele alalım. İkinci mertebeden (6.1) sistemi,

$$z(n) = \begin{pmatrix} y(n) \\ y(n+1) \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

olan birinci mertebeden

$$z(n+1) = Cz(n) \tag{6.2}$$

sistemine denktir (Duman ve ark., 2018).

Benzer şekilde; A, N boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $\left(A \in M_N(\boldsymbol{R})\right)$ olmak üzere

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = Ax(t) \tag{6.3}$$

sistemini ele alalım. İkinci mertebeden (6.3) sistemi,

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{d}{dt}x(t) \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dt}z(t) = Cz(t) \tag{6.4}$$

sistemine denktir (Apostol, 1975).

Not 6.1. (6.1) ve (6.3) sisteminin öz değerleri $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N$ ise (6.2) ve (6.4) sisteminin öz değerleri $\pm\sqrt{\lambda_1},\pm\sqrt{\lambda_2},...,\pm\sqrt{\lambda_N}$ dir (Apostol, 1975).

Bu iki sistemi ele alarak örnekler üzerinden hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı inceleyelim:

Örnek 6.1. $A=\begin{pmatrix}-0.5 & 1\\ 0 & -0.6\end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+2)=Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem

$$z(n)=\begin{pmatrix}y(n)\\ y(n+1)\end{pmatrix}\ ,\ C=\begin{pmatrix}0 & I\\ A & 0\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$z(n+1)=Cz(n)$$

sistemine denktir. Benzer şekilde aynı matris için $\frac{d^2}{dt^2}x(t)=Ax(t)$ diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistem de

$$z(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ \frac{d}{dt}x(t)\end{pmatrix}\ ,\ C=\begin{pmatrix}0 & I\\ A & 0\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dt}z(t)=Cz(t)$$

Sistemine denktir. Öz değerler yardımıyla inceleme yapacak olursak, A matrisinin öz değerleri $\lambda_1=-0.5,\ \lambda_2=-0.6$ iken C matrisinin öz değerleri Not 6.1.'e göre

$$\pm\sqrt{\lambda_1}=\pm\sqrt{-0.5}=\pm\sqrt{0.5}\,i=\lambda_{3,4}$$
$$\pm\sqrt{\lambda_2}=\pm\sqrt{-0.6}=\pm\sqrt{0.6}i=\lambda_{5,6}$$

dir. Buna göre Sonuç 3.1.'e göre $-1<Re(\lambda_j(A))<0,\ (j=3,4,5,6)$ şartı sağlanmadığından $y(n+2)=Ay(n)$ fark denklem sistemi salınımlı değildir. Dolayısıyla ikinci mertebeden fark denklem sistemi reel öz değerlere sahipken salınımlı olmayacağı için ikinci mertebeden fark denklem sistemi hem Schur kararlı hem salınımlı olmayacaktır.

Örnek 6.2. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+2)=Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem

$$z(n)=\begin{pmatrix} y(n) \\ y(n+1) \end{pmatrix} \ , \ C=\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$z(n+1)=Cz(n)$$

sistemine denktir. Benzer şekilde aynı matris için $\frac{d^2}{dt^2}x(t)=Ax(t)$ diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistem de

$$z(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{d}{dt}x(t) \end{pmatrix} \ , \ C=\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dt}z(t)=Cz(t)$$

sistemine denktir. Öz değerler yardımıyla inceleme yapacak olursak, A matrisinin öz değerleri $\lambda_1=-1+i,\ \lambda_2=-1-i$ iken C matrisinin öz değerleri Not 6.1.'e göre

$$\pm\sqrt{\lambda_1}=\pm\sqrt{-1+i}=\pm(-1+i)^{1/2}=\pm\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{1/2}$$

olur. Buradan

$$w_k=\lambda_1^{1/2}=\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)}\right)^{1/2}=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi\right)};\ k=0,1$$

olmak üzere

$$w_0=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}=\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{3\pi}{8}+i\,sin\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt[4]{2}\left(0.3826834324+i0.9238795325\right)$$
$$w_1=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}=\sqrt[4]{2}\left(cos\frac{11\pi}{8}+i\,sin\frac{11\pi}{8}\right)=\sqrt[4]{2}\left(-0.3826834324-i0.9238795325\right)$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$\pm\sqrt{\lambda_2}=\pm\sqrt{-1-i}=\pm(-1-i)^{1/2}=\pm\left(\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^{1/2}$$

olur. Buradan

$$t_k = \lambda_2^{1/2} = \left(\sqrt{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)} \right)^{1/2} = \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{8}+k\pi\right)};\ k = 0,1$$

olmak üzere

$$t_0 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{5\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{5\pi}{8} + i\, sin\frac{5\pi}{8} \right) = \sqrt[4]{2}\left(-0.3826834324 + i0.9238795325 \right)$$
$$t_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{13\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{13\pi}{8} + i\, sin\frac{13\pi}{8} \right) = \sqrt[4]{2}\left(0.3826834324 - i0.9238795325 \right)$$

elde edilir. Buna göre Sonuç 3.1.'e göre $-1 < Re\left(w_j(A), t_j(A)\right) < 0,\ (j = 0,1)$ şartı sağlanmadığından $y(n+2) = Ay(n)$ fark denklem sistemi salınımlı değildir. Dolayısıyla ikinci mertebeden fark denklem sistemi karmaşık öz değerlere sahipken de salınımlı olmayacağı için ikinci mertebeden fark denklem sistemi hem Schur kararlı hem salınımlı olmayacaktır.

Bu örnekleri göz önüne aldığımızda (6.2) sisteminin öz değerlerinin

$$-1 < Re\left(\lambda_j(A)\right) < 0,\ (j = 1,2,...,N)$$

şartını sağlamadığı görülmektedir. Buna göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1. (6.1) fark denklem sistemi Schur kararlı $\left|\lambda_j(A)\right| < 1,\ (j = 1,2,...,N)$ olmak üzere (6.2) fark denklem sistemi salınımlı değildir.

Sonuç 6.1.'e göre ikinci mertebeden fark denklem sistemleri bu şarta göre hem Schur kararlı hem salınımlı olmayacaktır.

Şimdi de üçüncü mertebeden fark denklem sistemlerini ve diferensiyel denklem sistemlerini ele alalım ve örnekler üzerinden üçüncü mertebeden fark denklem sistemlerinin hem Schur kararlı hem salınımlı olduğu durumların varlığını inceleyerek bir sonuca ulaşmaya çalışalım.

6.2. Üçüncü Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Hem Schur Kararlılığı Hem Salınımlılığı

A, N boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $\left(A \in M_N(\boldsymbol{R})\right)$ olmak üzere

$$y(n+3) = Ay(n) \qquad \textbf{(6.5)}$$

sistemini ele alalım. Üçüncü mertebeden (6.5) sistemi,

$$z(n)=\begin{pmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ y(n+2) \end{pmatrix} \ , \ C=\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

olan birinci mertebeden

$$z(n+1)=Cz(n) \tag{6.6}$$

sistemine denktir (Duman ve ark., 2018).

Benzer şekilde; A, N boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris $\left(A\in M_N(\boldsymbol{R})\right)$ olmak üzere

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t)=Ax(t) \tag{6.7}$$

sistemini ele alalım. Üçüncü mertebeden (6.7) sistemi,

$$z(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}x(t) \end{pmatrix} \ , \ C=\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dt}z(t)=Cz(t) \tag{6.8}$$

sistemine denktir (Apostol, 1975).

Not 6.2. (6.5) ve (6.7) sisteminin öz değerleri $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N$ ise (6.6) ve (6.8) sisteminin öz değerleri $\sqrt[3]{-\lambda_1},\sqrt[3]{-\lambda_2},...,\sqrt[3]{-\lambda_N}$ dir.

Bu iki sistemi ele alarak örnekler üzerinden hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı inceleyelim:

Örnek 6.3. $A=\frac{1}{2}$ olmak üzere $y(n+3)=Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem

$$z(n)=\begin{pmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ y(n+2) \end{pmatrix} \ , \ C=\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$z(n+1)=Cz(n)$$

sistemine denktir. Benzer şekilde aynı matris için $\frac{d^3}{dt^3}x(t)=Ax(t)$ diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistem de

$$z(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}x(t) \end{pmatrix}\ ,\ C=\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dt}z(t)=Cz(t)$$

sistemine denktir. Öz değerler yardımıyla inceleme yapacak olursak, A matrisinin öz değerleri $\lambda=\frac{1}{2}$ iken C matrisinin öz değerleri Not 6.2.'ye göre

$$\sqrt[3]{-\lambda}=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3}=\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}(-1)^{1/3}$$

olur. Buradan

$$-1=e^{i\pi}\Rightarrow z_k=(-1)^{1/3}=e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)};\ k=0,1,2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} z_0&=e^{i\frac{\pi}{3}} \\ z_1&=e^{i\pi}=-1 \\ z_2&=e^{i\frac{5\pi}{3}} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \lambda_1&=\frac{1}{2^{1/3}}e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2^{1/3}}\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2^{1/3}}(0.5+i0.8660254038) \\ \lambda_2&=\frac{1}{2^{1/3}}(-1) \\ \lambda_3&=\frac{1}{2^{1/3}}e^{i\frac{5\pi}{3}}=\frac{1}{2^{1/3}}\left(cos\frac{5\pi}{3}+i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2^{1/3}}(0.5-i0.8660254038) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre Sonuç 3.1.'e göre $-1 < Re\left(\lambda_j(A)\right) < 0,\ (j = 3,4,5,6)$ şartı sağlanmadığından $y(n+3) = Ay(n)$ fark denklem sistemi salınımlı değildir. Dolayısıyla üçüncü mertebeden fark denklem sistemi reel öz değerlere sahipken salınımlı olmayacağı için üçüncü mertebeden fark denklem sistemi hem Schur kararlı hem salınımlı olmayacaktır.

Örnek 6.4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y(n+3) = Ay(n)$ fark denklem sistemini ele alalım. Bu sistem

$$z(n) = \begin{pmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ y(n+2) \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$z(n+1) = Cz(n)$$

sistemine denktir. Benzer şekilde aynı matris için $\frac{d^3}{dt^3}x(t) = Ax(t)$ diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistem de

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}x(t) \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dt}z(t) = Cz(t)$$

sistemine denktir. Öz değerler yardımıyla inceleme yapacak olursak, A matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = -1+i,\ \lambda_2 = -1-i$ iken C matrisinin öz değerleri Not 6.2.'ye göre

$$\sqrt[3]{-\lambda_1} = \sqrt[3]{1-i} = (1-i)^{1/3} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^{1/3}$$

olur. Buradan

$$s_k = (-\lambda_1)^{1/3} = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)}\right)^{1/3} = \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)};\ k = 0,1,2$$

olmak üzere

$$s_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{7\pi}{12} + i\,sin\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-0.2588190451 + i0.9659258263\right)$$
$$s_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{15\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{15\pi}{12} + i\,sin\frac{15\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-0.7071067812 - i0.7071067812\right)$$
$$s_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{23\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{23\pi}{12} + i\,sin\frac{23\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(0.9659258263 - i0.2588190451\right)$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$\sqrt[3]{-\lambda_2} = \sqrt[3]{1+i} = (1+i)^{1/3} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1/3}$$

olur. Buradan

$$p_k = (-\lambda_2)^{1/3} = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\right)^{1/3} = \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)};\ k = 0,1,2$$

olmak üzere

$$p_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\,sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(0.9659258263 + i0.2588190451\right)$$
$$p_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{9\pi}{12} + i\,sin\frac{9\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-0.7071067812 + i0.7071067812\right)$$
$$p_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{17\pi}{12} + i\,sin\frac{17\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-0.2588190451 - 0.9659258263\right)$$

elde edilir. Buna göre Sonuç 3.1.'e göre $-1 < Re\left(s_j(A), p_j(A)\right) < 0,\ (j = 0,1,2)$ şartı sağlanmadığından $y(n+3) = Ay(n)$ fark denklem sistemi salınımlı değildir. Dolayısıyla üçüncü mertebeden fark denklem sistemi karmaşık öz değerlere sahipken de salınımlı olmayacağı için üçüncü mertebeden fark denklem sistemi hem Schur kararlı hem salınımlı olmayacaktır.

Bu örnekleri göz önüne aldığımızda (6.6) sisteminin öz değerlerinin

$$-1 < Re\left(\lambda_j(A)\right) < 0,\ (j = 1,2,...,N)$$

şartını sağlamadığı görülmektedir. Buna göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.2. (6.5) fark denklem sistemi Schur kararlı $\left|\lambda_j(A)\right| < 1,\ (j = 1,2,...,N)$ olmak üzere (6.6) fark denklem sistemi salınımlı değildir.

Sonuç 6.2.'ye göre üçüncü mertebeden fark denklem sistemleri bu şarta göre hem Schur kararlı hem salınımlı olmayacaktır.

Sonuç 6.3. Sonuç 6.1. ve Sonuç 6.2. göz önüne alındığında daha yüksek mertebeden fark denklem sistemlerinin de hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı, Sonuç 3.1.'de verilen şartlara göre sağlanmamış olacaktır. Buna göre, N. mertebeden $y(n+N)=Ay(n)$, $\mathrm{N}>1$ bir fark denklem sisteminin hem Schur kararlılığı hem salınımlılığı Sonuç 3.1.'teki şartlara göre bulunmamaktadır.

7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bir problemin çözümünün hareketini tahmin etmek ve teorik olarak değişik etkilere ne kadar maruz kaldığında hala yapısını, karakterini koruduğunu bilmek uygulama alanlarında önemli avantajlar sağlamaktadır. Bu tez çalışmasının ana amacı da literatürde bir problemin çözümünün hareketini veren Schur kararlılık ve salınımlılık kavramlarının birlikte sağlandığı durumları incelemek ve sonuçlar elde etmektir. Elde edilen sonuçları ana hatlarıyla verecek olursak;

- fark sistemlerin hem Schur kararlı hem salınımlı olduğu gerek ve yeter şartlar,
- karmaşık köklü fark sistemlerin ardışık bozunumlarının hem Schur kararlı hem salınımlı olduğunu gösteren uygulamalar,
- hem Schur kararlı hem salınımlılığı gösteren bölge,
- Schur kararlılık için öz değer probleminin kötü konulmuş olmasından yola çıkarak ω parametresinin kullanımı yanında salınımlılık için de Hurwitz kararlılık parametresi olan κ parametresini kullanarak fark sistemlerin hem Schur kararlı hem salınımlı olduğunu parametrelere bağlı veren sonuçlar,
- fark denklem sistemlerini hem Schur kararlı hem salınımlı kılan denk sonuçlar,
- fark sistemlerin pratik salınımlılığı için ω ve κ parametresine bağlı γ parametresi ve buna bağlı optimum bir bölgenin tâyini,
- sistemlerin Schur kararlılık ve Hurwitz kararlılığının süreklilik teoremlerini kullanarak salınımlılığın sürekliliğini veren sonuçlar,
- yüksek mertebeden fark sistemlerin hem Schur kararlı hem salınımlılığının sağlanıp sağlanmadığını veren sonuçlar,

elde edilmiştir.

8. KAYNAKLAR

Agarwal R. P., Grace S. R., O'Reagan D., 2000, Oscillation Theory For Difference And Functional Differential, *Kluwer Academic Publishers,* London.

Akın Ö., Bulgak H., 1998, Lineer Fark Denklemleri Ve Kararlılık Teorisi, *Selçuk Üniversitesi Yayınları*, Konya.

Apostol T.M., 1975, Explicit Formulas for Solutions of the Second-Order Matrix Differential Equation $Y'' = AY$, The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 2 (Feb., 1975), pp. 159-162.

Aydın K., 1995, Periyodik Adi Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Asimtotik Kararlılığı için Şart Sayısı, Doktora Tezi, Konya.

Aydın K., Duman A., 2011, Sensitivity of Schur Stability of Systems of Linear Difference Equations with Constant Coefficients, *Scientific Research and Essays Vol.6 (28), pp. 5846-5854, 23 November, 2011.*

Aydın K., Duman A., 2014, Some Results on the Sensitivity of Schur Stability of Linear Difference Equations with Constant Coefficients, *Konuralp Journal of Mathematics Volume 2 No. 2 pp. 22-34 (2014).*

Aydın K., Kızılkan Çelik G., Duman A., 2016, Sensitivity of Schur Stability of Systems of Linear Difference Equations with Periodic Coefficients, *NTMSCI 4, No. 2, 159-173 (2016).*

Bereketoğlu H., Kutay V., 2012, Fark Denklemleri, *Gazi Kitabevi*, Ankara.

Bulgakov A. Ya., 1980, An Effectively Calculable Parameter for the Stability Property of a System of Linear Differential Equations with Constant Coefficients, *in Siberia Math J.21, 339-347, 1980.*

Bulgakov A. Ya. and Godunov S. K., 1988, Circle Dichotomy of the Matrix Spectrum, *Siberia Math. J., 29, No:5, 59-70, Novosibirsk, 1988.*

Bulgakov A. Ya., 1995, Matrix Computations with Guaranteed Accuracy in Stability Theory, *Selçuk Üniversitesi Yayınları,* Konya.

Bulgak H., 1999, Pseudoeigenvalues, Spectral Portrait of a Matrix and Their Connections with Different Criteria of Stability, *Error Control and Adaptivity in Scientific Computing, 95-124, 1999.*

Bulgak H., Bulgak A., 2001, Lineer Cebir, *Selçuk Üniversitesi Yayınları*, Konya.

Çakıroğlu R., 2017, Fark Denklemlerde Salınımlılık, Yüksek Lisans Semineri, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.*

Duman A., 2008, Periyodik Lineer Fark Denklemlerin Schur Kararlılığının Hassasiyeti, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.*

Duman A., Aydın K., 2017, Sensitivity of Hurwitz Stability of Linear Differential Equation Systems with Constant Coefficients, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol. 14, No. 6 (2017) 1750084 (17 pages).*

Duman A., Kızılkan Çelik G., Aydın K., 2018, Sensitivity of Schur Stability of the *k-th* Order difference Equation System *y(n+k)=Cy(n)*, *Konuralp Journal of Mathematics, 6(1)(2018)7-13.*

Edwards C. H., Penney D. E., Çeviri Editörü: Akın Ö., 2008, Bilgisayar Destekli, Matematiksel Modellemeli Diferensiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri, *Palme Yayıncılık,* Ankara.

Elaydi S., 2005, An Introduction to Difference Equations, *Springer*, New York.

Goldberg S., 1958, Introduction to Difference Equations, *Science Editions,* New York.

Sunday J., 2018, On the Oscillation Criteria and Computation of Third Order Oscillatory Differential Equations, *Communications in Mathematics and Applications, Vol. 9, No. 4, pp. 615-626, 2018.*

Sümürken S., 2007, Diferensiyel ve Fark Denklemlerin Salınımlılık Davranışları, Yüksek Lisans Tezi, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.*

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ramazan ÇAKIROĞLU
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Eskişehir/01.10.1992
Telefon : 0534 237 0671
Faks :
e-mail : ramazan.cakiroglu@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Eskişehir Atatürk Lisesi	2010
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi	2015

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2017-2018	Kılıçarslan İMKB MTAL	Öğretmen
2018-2019	Celâleddin Karatay MTAL	Öğretmen

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

İngilizce