



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ İNTEGRAL VE TÜREVLERİ ÜZERİNE

Raad Ali AMEEN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temuz-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

KESİRLİ İNTEGRAL VE TÜREVLERİ ÜZERİNE

Raad Ali AMEEN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hasan KÖSE

2019, 112 Sayfa

Jüri
Dr. Öğr. Üyesi Hasan KÖSE
Prof.Dr. Fatma AYAZ
Doç. Dr. Ozan ÖZKAN
Doç. Dr. Tuncer ACAR
Dr. Öğr. Üyesi Dumitru BALEANU

Bu tezde ilk olarak, diferansiyel denklemler için sürekli türevlenebilir fonksiyonların belirli bir genelleştirilmiş kesirli türevi (Caputo-Katukampola) ile bazı Cauchy problemler çalışılmıştı. Cauchy problemlerine karşılık gelen ikinci tip lineer olmayan Volterra integral denklemleri sunulmuştur. Banach sabit nokta teoremlerini kullanarak, düşünülen Cauchy probleminin çözümünün varlık ve tekliği elde edilen sonuçlara dayanarak ispatlanmıştır.

Bu tezin ikinci amacı ise çekirdek fonksiyonuna bağımlı genelleştirilmiş kesirli türevinin bir sınıfının çerçevesinde gecikmeli kesirli diferansiyel denklemlerin Ulam-Hyers kararlılık ve Ulam-Hyers-Rassias kararlılık teorisini genişletmektir. Bahsedilen tür gecikmeli genelleştirilmiş Caputo kesirli diferansiyel denklemlerin Ulam-Hyers ve Ulam-Hyers-Rassias anlamında kararlı olması için gerekli olan koşulları araştırılmıştır. Elde edilecek sonuçları göstermek için bazı örnekler sunulmuştur.

Tezin üçüncü amacı, ayrık ve sürekli kesirli operatörlerin Laplace dönüşümlerini incelemektir.

Bu tez altı bölüm içerir. İlk bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölümde ise konunun temel öğeleri olarak, kesirli analiz ve kesirli operatörler ele alındıştır. Bu çalışmanın orjinal kısımları üçüncü, dördüncü ve beşinci kısımda görülmektedir. Elde edilen sonuçlara dayanarak, Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevleri çerçevesinde kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği üçüncü kısımda, gecikmeli kesirli diferansiyel denklemler için Ulam kararlılığı ise dördüncü kısımda ispatlanmıştır. Ayrıca beşinci kısımda hem ayrık hem sürekli kesirli operatörler için Laplace dönüşümü incelenmiştir. Son kısımda ise Ulam-Hyers karalılık ve Ulam-Hyers-Rassias kararlılıkla ilgili sonraki çalışmalarda yapılabilecek bazı önerilere yer verilmektedır.

Anahtar Kelimeler: Ayrık Laplace dönüşümü, Cauchy problemi, Varlık ve Teklik, Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevleri, Ulam-Hyers Karalılık, Ulam-Hyer-Rassias kararlılık.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

ON THE FRACTIONAL INTEGRAL AND DERIVATIVE

Raad Ali AMEEN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE
OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATİC

Advisor: Assist. Prof. Dr. Hasan KÖSE

2019, 112 Pages

Jury
Assist. Prof. Dr. Hasan KÖSE
Prof.Dr. Fatma AYAZ
Assoc. Prof. Dr. Ozan ÖZKAN
Assoc. Prof. Dr. Tuncer ACAR
Assist. Prof. Dr. Dumitru BALEANU

In this thesis firstly, Cauchy problems for differential equations with the generalized Caputo-Katugampola fractional derivative in the space of continuously differentiable functions are studied. Nonlinear Volterra type integral equations of the second kind corresponding to the Cauchy problem are presented. Using Banach fixed point theorem, the existence and uniqueness of solution to the considered Cauchy problem is proven based on the results obtained.

Second objective of this thesis is to extend Ulam-Hyers stability and Ulam-Hyers-Rassias stability theory to differential equations with delay and in the frame of a certain class of a generalized Caputo fractional derivative with dependence on a kernel function. We discuss the conditions such delay generalized Caputo fractional differential equations should satisfy to be stable in the sense of Ulam-Hyers and Ulam-Hyers-Rassias. To demonstrate our results some examples are presented.

A third aim of this thesis is to study the Laplace transforms for fractional operators.

This thesis involves six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, fractional analysis and fractional operators have been dealt with as a fundamental of the subject. The original parts of this study appear in Chapters three, four and five. Existence and uniqueness of solutions to fractional differential equations in the frame of generalized Caputo fractional derivatives in Chapter 3, Ulam Stability for Delay Fractional Differential Equations with a Generalized Caputo Derivative in Chapter 4 and we also investigated the Laplace transform for fractional discrete and continuous operators in Chapter 5. The last Chapter involves some remarks and the future works related to the Ulam-Hyers stability and Ulam-Hyers-Rassias stability.

Keywords: Cauchy problem, Dıscrete Laplace Transform, Existence and uniqueness, Generalized Caputo fractional derivatives, Ulam-Hyers stability, Ulam-Hyers-Rassias stability.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının başından sonuna kadar her aşamasında benden yardımlarını esirgemeyen, beni yönlendiren değerli tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Hasan KÖSE'ye teşekkür ediyorum.

Ayrıca gerek ders aşamasında gerekse tez aşamasında desteğini hep hissettiğim, fikirlerinden yararlandığım ikinci tez danışmanım Prof. Dr. Fahd JARAD' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan anlayışları, sevgileri sabırlarıyla destekleyen, yüreklendiren ve motive eden eşim Fidan KASSAB'a, anneme, kardeşlerime ve çocuklarım Elaf, Ali ve Mustafa'ya içtenlikle teşekkür ederim.

Doktora yaptığım süre içerisinde tüm ders aldığım ve tanıştığım öğretim üyelerine teşekkür ediyorum.

Son olarak, bana bu fırsatı sağladığı için Irak Eğitim Bakanlığı'na teşekkür ediyorum.

Raad Ali AMEEN
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

ÇİZELGELERİN LİSTESİ ..... **ix**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **x**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **3**

2.1. Kesirli Analiz 6

2.1.1. Gamma fonksiyonu 7

2.1.2. Beta fonksiyonu 9

2.1.3. Lebesgue uzayı 9

2.1.4. Mittag-Leffler fonksiyonu 10

2.2. Kesirli Operatörler 12

2.2.1. Riemann-Liouville kesirli integral operatörü 12

2.2.2. Riemann-Liouville kesirli türev operatörü 12

2.2.3. Caputo kesirli türev operatörü 17

2.2.4. Hadamard kesirli operatörleri 20

2.2.5. Caputo-Hadamard kesirli operatörleri 25

2.2.6. Genelleştirilmiş kesirli operatörler (Bir f fonksiyonun başka bir g fonksiyonu aracılığıyla kesirli operatörleri) 26

2.2.7. Katugampola kesirli operatörleri 32

2.2.8. Caputo - Katugampola kesirli türev operatörü 33

3. CAPUTO – KATUGAMPOLA ÇERÇEVESİNDE KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIK VE TEKLİĞİ **34**

3.1. Yardımcı Sonuçlar 34

3.2. Cauchy Probleminin Çözümünün Varlık ve Tekliği 38

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ CAPUTO KESİRLİ TÜREV İLE GECİKMELİ KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ULAM KARARLILIK **47**

4.1. Varlık ve Teklik Sonuçları 52

4.2. Ulam –Hyers Kararlılığı 54

4.3. Ulam-Hyers-Rassias Kararlılığı 59

4.4. Uygulamalar 62

5. KESİRLİ OPERATÖRLER İÇİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ 65

5.1. (Sürekli) Kesirli Operatörlerin Laplace Dönüşümü 65

5.2. Genelleştirilmiş Kesirli Operatörler ve Laplace Dönüşümleri 66

5.3. Ayrık kesirli operatörler ve Laplace dönüşümleri 71

5.3.1. Ayrık kesirli operatörlerin Laplace dönüşümü 71

5.3.2. Ayrık Laplace dönüşümleri 75

5.3.3. Temel Fonksiyonların Ayrık Laplace Dönüşümleri 85

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 96

6.1. Sonuçlar 96

6.2. Öneriler 96

7. KAYNAKLAR 97

ÖZGEÇMİŞ 102

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge No Sayfa No

Çizelge 2.1. Gamma fonksiyonunun bazı sayısal değerleri.....8

Çizelge 5.1. Ayrık Laplace dönüşümü'nün listesi……..…….94

Çizelge 5.2. Ayrık Laplace dönüşümü'nün listesi …….…….95

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\Gamma(n)$	Gamma fonksiyonu
$\beta(m,n)$	Beta fonksiyonu
$L_p[a,b]$	Lebesgue uzayı
$E_\alpha(z)$	Mittag-Leffler fonksiyonu
I_a^α	Riemann-Liouville kesirli integrali
D_a^α	Riemann-Liouville kesirli türevi
${}_a^C D^\alpha$	Caputo kesirli türevi
${}_a\mathcal{J}^\alpha$	Hadamard kesirli integrali
${}_aD^\alpha$	Hadamard kesirli türevi
${}_a^C D^\alpha$	Caputo–Hadamard kesirli türevi
${}_aI^{\alpha,g}f(x)$	f fonksiyonun g fonksiyonuna göre kesirli integrali
${}_aD^{\alpha,g}f(x)$	f fonksiyonun g fonksiyonuna göre kesirli türevi
${}_aI^{\alpha,\rho}$	Katugampola kesirli integralleri
${}_aD^{\alpha,\rho}$	Katugampola kesirli türevleri
${}_a^C D^{\alpha,\rho}$	Katugampola Caputo kesirli türevi
$\mathcal{L}_d$	Ayrık Laplace dönüşüm

1. GİRİŞ

Türev ve integral operatörleri genel olarak matematiksel modellerin temelini oluşturmakta ve aynı zamanda doğal ve yapay sistemlerin çalışma prensiplerini anlamada araç olarak kullanılmaktadır. Bu yüzden türev ve integral operatörlerine olan ilgi, konunun daha da derinlemesine incelenerek, tamsayı mertebeli hallerinin genelleştirilmiş hali olan kesirli türev ve kesirli integral operatörlerinin bulunmasını sağlamıştır. Bu operatörlere olan merak 1695'te L'Hospital'in Leibniz'e sorduğu "Bir f fonksiyonu n tamsayılı mertebeden türevini tanımladın peki $n=\frac{1}{2}$ olduğunda $\frac{d^n f}{dx^n}$ kavramının bir anlamı var mı? " sorusu ile başlamıştır ve böylece kesirli analizin temelleri atılmış dır (Oldham ve Spanier, 1974). Leibniz' den sonra Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Grunwald, Letnikov, Lacroix gibi birçok ünlü matematikçi de bu konu üzerinde çalışmıştır.

Kesirli analiz, reel veya kompleks mertebeden türev ve integrallerin çalışıldığı bir matematik dalıdır. Günümüzde kesir mertebeli türev, integral ve bunları içeren denklemler fizik, kimya, elektrik ve elektronik, termodinamik, kontrol teorisi gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. Konunun çeşitli uygulamalarda gösterdiği potansiyel ile son kırk yıldır popülaritesi ve önemi artmıştır. Bu yüzden yeterince farklı uygulamaları görülmektedir (Podlubny,1999; Samko ve ark., 1993; Hilfer, 2000; Lorenzo ve Hartley, 2002; Kilbas ve ark., 2006; Magin, 2006; Machado ve ark., 2011).

Kesirli analizin en ilginç özelliği ise çoğu operatörü içermesidir. Bu durum, bir araştırmacının gerçek dünya problemindeki dinamikliği tanımlamak için en uygun operatörü seçebilmesini sağlar. Dolayısıyla gerçek dünya olaylarının daha iyi tanımlanması adına, bazı bilim insanları Dirac Delta foksiyonlarının yardımıyla limit çalışarak, kesirli operatörlerdeki çekirdek fonksiyonunun karmaşıklığını giderme ihtiyacıyla veya doğa olaylarına her seferinde daha iyi sonuçlar bulmak için kullanılan diğer kesirli operatörlerin gerektirdiklerini ortaya koyma ihtiyacı ile yeni kesirli operatörler keşfetmelerini sağlamıştır. Bu araştırmacılar tekil olmayan çekirdek fonksiyonuna sahip yeni kesirli operatörleri ortaya çıkardı (Caputo ve Fabrizio, 2015; Atangana ve Baleanu, 2016; Yang ve ark., 2016). Diğer farklı tipteki yeni kesirli türevler (da Vanterler ve ark., 2016; da Vanterler ve ark., 2018; Oliveria ve ark., accepted for publication) de bulunmaktadır. Bu tezde yeni kesirli operatörlerden biri olan Hadamard kesirli operatörlerinden de bahsedildi ve bu kesirli operatörler uygun

türevler aracığıyla üretildi (Hilfer, 2000; Kilbas, 2001; Lorenzo ve ark., 2002; Katugampola, 2011).

Bu üretilen kesirli operatörler aracılığıyla örneğin; sönümleme yasası, difüzyon süreçleri ve fraktallar gibi konular daha iyi tanımlanabilmektedir ve bu durum günümüzde kesirli analize ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere olan ilgiyi artırmıştır.

Diğer taraftan çözümlerin varlık ve tekliği, diferansiyel denklemlerin en önemli nitelikleri arasındadır ve birçok araştırmacı kesirli türevleri içeren diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğini ele almıştır (Daftardar-Gejji ve Jaffari, 2007; Delbosco ve Rodino, 1996; Abdeljawad ve ark., 2008; 2018; Adjabi ve ark., 2016).

Aynı şekilde çözümlerin karalılığı, diferansiyel denklemlerin bir diğer önemli niteliğidir ve birçok araştırmacı kesirli türevleri içeren diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığını da ele almıştır (Rus, 2010; Wang ve Zhou, 2011; Benchohra ve Lazreg, 2015).

Tüm bunlardan hareketle hazırlanan bu tez çalışmasının, ilk bölümünde kesirli türev ve integral kavramları hakkında kısa bir giriş yapılmış, ikinci bölümünde çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanımlara, teoremlere yer verilmiş ve öncelikle Riemann-Liouville integral ve türev operatörleri ile Caputo türev operatörü olmak üzere kullanacağımız diğer tipteki kesirli operatörlerde tanıtılmıştır. Ayrıca bunların genel bazı özelliklerine değinilmiştir.

Üçüncü bölümde, Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi aracılığıyla kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği incelenmiş, dördüncü bölümde ise gecikmeli kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi ile Ulam karalılığından bahsedilmiştir ve beşinci bölümde, Riemann-Lioville kesirli operatörler ve Caputo kesirli türev için Laplace dönüşümünü ele almakla beraber kesirli ayrık operatörleri tanımlayıp, onlar için uygun Laplace dönüşümünü inceleyeceğiz.

En son bölümde, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1: (Bayraktar, 2006)

X boş olmayan bir küme olsun. Eğer $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\, x, y, z \in X$ için

a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (2.1)

b) $d(x,y) = d(y,x)$ (2.2)

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (2.3)

koşullarını sağlarsa, d ye X üzerinde bir *metrik* ve (X,d) ikilisine de bir *metrik uzay* denir.

Tanım 2.2: (Bayraktar, 2006)

(X,d) metrik uzayında herhangi bir dizi $(x_n)_{n\in \mathrm{N}}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $n_0(\varepsilon) \in$ N sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.3: (Bayraktar, 2006)

Eğer (X,d) metrik uzayı içindeki her Cauchy dizisi, bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (X,d) metrik uzayına *tam metrik uzay* denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.4: (Bayraktar, 2006)

X bir lineer uzay olsun. $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlarsa, $\|.\|$ gösterimine X uzayı üzerinde bir *norm* denir. $(X, \|.\|)$ ikilisine de *normlu uzay* adı verilir.

a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (2.4)

b) $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (2.5)

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (2.6)

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan d bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Dolayısıyla her normlu uzay bir metrik uzaydır.

Tanım 2.5: (Bayraktar, 2006)

$(N, \|.\|)$ normlu lineer uzay olsun. N, norm metriğine göre tam ise N ye *Banach uzay* denir.

Tanım 2.6: (Türkoğlu ve Altun, 2007)

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay, $U \subset X$ kapalı bir küme ve $A: U \to U$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in U$ için;

$$\|Ax - Ay\| \leq \alpha\|x - y\| \quad (2.7)$$

olacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$ sayısı varsa, A operatörüne U üzerinde *daralma operatörü* denir.

$Au^* = u^*$ olacak şekilde $u^* \in U$ varsa, u^* vektörüne A operatörünün U üzerinde sabit noktası denir.

Teorem 2.1: (Türkoğlu ve Altun, 2007; Soykan, 2008)

(Daralma Dönüşüm Prensibi)

$(X, \|.\|)$ Banach uzayının $U \subset X$ kapalı kümesinde $A: U \to U$ daralma operatörünün bir tek $u^* \in U$ sabit noktası vardır ve her bir $u_0 \in U$ başlangıç noktası verildiğinde, ardışık olarak (iterasyonla) her $n \in N$ için

$$u_n = A(u_{n-1}), \qquad n = 1,2, \ldots \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanan (u_n) iterasyon dizisi, A, bu sabit u^* noktasına yakınsar ve

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{\alpha^*}{1-\alpha} \|u_1 - u_0\| \tag{2.9}$$

eşitsizliği doğrudur.

Teorem 2.2: (Türkoğlu ve Altun, 2007)

$(X, \|.\|)$ Banach uzayının $U \subset X$ kapalı kümesi için $A: U \to U$ şeklinde bir dönüşüm ve bir $n \in N$ için A^n operatörü U üzerinde daralma operatörü olsun. Bu durumda, A operatörünün bir tek $u^* \in U$ sabit noktası vardır.

Teorem 2.3: (Gambo ve ark., 2018)

(Banach sabit nokta teoremi)

(X, d) boş olmayan bir tam metrik uzay olsun ve $0 \leq \lambda < 1$ alalım. Eğer her $x, \tilde{x} \in X$ için $T: X \to X$ tanımlıysa ve

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \tag{2.10}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa o zaman T operatörünün $x^* \in X$ olacak şekilde bir tek sabit noktası (yani $T(x^*) = x^*$'i sağlayan noktası) vardır. Ayrıca, eğer $T^k (k \in \mathbb{N})$ dizisi

$$\begin{cases} T^k = TT^{k-1}, & k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \\ T^1 = T, \end{cases} \tag{2.11}$$

ifadesi ile tanımlanırsa o zaman herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^k x_0\}_{k=1}^{k=\infty}$ dizisi yukarıdaki x^* sabit noktasına yakınsamaktadır.

Tanım 2.7: (Gambo ve ark., 2018)

(Lipschitz koşulu)

$m \in \mathbb{N}, G \subset \mathbb{R}^m, [a,b] \subset \mathbb{R}$ alalım ve $f: [a,b] \times G \to \mathbb{R}$ ile tanımlı bir fonksiyon olsun. Öyle ki, herhangi bir $(x_1, \ldots, x_m), (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \in G$ için f fonksiyonu, $A_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m$ olmak üzere

$$|f[t, x_1, \ldots, x_m] - [t, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m]| \leq A_1|x_1 - \tilde{x}_1| + \cdots + A_m|x_m - \tilde{x}_m| \tag{2.12}$$

genelleştirilmiş Lipschitz koşulunu sağlar.

Özellikle, eğer f fonksiyonu ikinci değişkene göre Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, her $t \in [a,b]$ için ve herhangi bir $x, \tilde{x} \in G$ için

$$|f[t,x] - [t,\tilde{x}]| \leq A|x - \tilde{x}|, \quad A > 0 \tag{2.13}$$

koşuluna sahiptir.

2.1. Kesirli Analiz

Kesirli hesap, n inci mertebeden bir fonksiyonun integralini elde etmek için bir integrale iterasyon yapmak ve daha sonra n yi herhangi bir sayı ile değiştirmek suretiyle elde edilen kesirli integral ile ilişkilendirilerek ve sonra klasik yöntem kullanılarak bunlara karşılık gelen kesirli türevler tanımlanıştır. (Kilbas, 2001; Katugampola, 2011, 2014; Jarad ve ark. 2012; 2014; 2017; Jarad, Uğurlu ve ark., 2017)

$D = d/dx$ diferansiyel operatörü ve n bir pozitif tamsayı olmak üzere $D^n f(x)$'in anlamının $f(x)$ fonksiyonunun n'inci türevi olduğu iyi bilinmektedir. Fakat n pozitif bir tamsayı değilse $\Re(\alpha) > 0$ için $D^{-\alpha}$ sembolünün veya D^{α} sembolünün anlamını yorumlaması zordur. Bu kısımda bu sembollerin anlamları açıklanacaktır.

Farklı tipte kesirli türev ve integral tanımı ve özellikleri çeşitli kaynaklarda yer almaktadır. Bunlardan en yaygın olarak kullanılanlar Riemann-Liouville ve Caputo ' nun tanımlarıdır. Kesirli analizin türevinin en genel gösterimi,

$$\left({}_aD^{\alpha}f\right)(x) \tag{2.14}$$

şeklindedir (Kilbas ve ark., 2006). Bu gösterim $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere keyfi değerli *kesirli türev* gösterimidir a ise kesirli türev işleminin sınır değeridir. Kesirli mertebeden integral anlamına gelen *kesirli integral* 'in gösterimi ise, $\Re(\alpha) > 0$ için

$$\left({}_aI^{\alpha}f\right)(x) \tag{2.15}$$

şeklindedir. Bazı kaynaklarda kesirli integral $D^{-\alpha}$ şeklinde de gösterilmektedir.

Tez için gerekli olan kesirli hesabın tanımlarını ve kullanımlarını anlamak için bazı matematiksel tanımları iyi bilmek gerekir, bunlar aşağıda verilmiştir.

2.1.1. Gamma fonksiyonu

Gamma fonksiyonu faktöriyel fonksiyonun genelleştirilmiş halidir diyebiliriz. Matematikte analiz, cebir gibi önemli alanlarda kullanılan bir tanımdır. Aynı gereksinim karmaşık sayılar ve tamsayı olmayan reel sayılar için duyulunca *Euler Gamma fonksiyonu* $n > 0$ için, aşağıdaki genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanmıştır.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1}e^{-u}du \tag{2.16}$$

Bu ismi almasının nedeni integralin ikinci tip Euler integrali olmasından kaynaklıdır (Baltacı, 2009).

Faktöriyel fonksiyonun üstel fonksiyon ile ilgili aşağıdaki eşitliği kullanılarak

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{n}du = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{(n+1)-1}du = \Gamma(n+1) \tag{2.17}$$

gamma fonksiyonu ile faktöriyel fonksiyonu arasındaki ilişki özelleştirilir (Baltacı, 2009; Mathai, 2010).

Gamma fonksiyonu kesirli integral ve kesirli türev ile doğrudan ilişkilidir. Bu ilişkiler Gamma fonksiyonunun aşağıda verilen özelliklerinden faydalanılarak bulunabilir.

1) $\Gamma(n)$ fonksiyonuna karşılık gelen $\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du$ integrali $n>0$ için yakınsak olup, $c>0$ olmak üzere bu integral her $[c,d]$ sonlu aralığında düzgün yakınsaktır.
2) Tanım kümesi $\{n: n>0\}$ dır.
3) Gamma fonksiyonu $n>0$ için süreklidir.
4) Özellik (1) den dolayı n değişkenine göre integral işareti altında türev alarak $\Gamma(n)$ in türevi elde edilebilir.
5) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n), \quad n>0.$
6) $0<n<1$ için $\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$ ve $n=\frac{1}{2}$ için $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.
7) $2^{2x-1}\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$ formülüne, Gamma fonksiyonu için *çoğalma formülü* denir.
8) γ Euler sabiti olmak üzere $\acute{\Gamma}(1)=\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx=-\gamma$ dır.

Çizelge 2.1. Gamma fonksiyonunun bazı sayısal değerleri

$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$	$\frac{4\pi}{3}$	$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-2\sqrt{\pi}$	$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
$\Gamma(0)$	Tanımsız	$\Gamma(3)$	2
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$	$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$
$\Gamma(1)$	1	$\Gamma(4)$	6
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\Gamma(\infty)$	∞

2.1.2. Beta fonksiyonu

Beta fonksiyonu $\beta(m,n)$ ile gösterilir ve

$$\beta(m,n)=\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}du \tag{2.18}$$

ile tanımlanır. Bu integral $Re(m)>0,\ Re(n)>0$ için yakınsaktır (Diethelm, 2010).

Beta fonksiyonu ile ilgili önemli bazı özellikler şu şekilde verilebilir:

1) Beta fonksiyonu, Gamma fonksiyonuna $\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ ifadesiyle bağlıdır.

2) $\beta(m,n)=\beta(n,m),\ (Re(m)>0,\ Re(n)>0$ için)

2.1.3. Lebesgue uzayı

$p\geq 1$ olsun,

$L_p[a,b]:=\left\{f:[a,b]\to R; f,[a,b]\right.$ üzerinde ölçülebilirdir ve $\left.\int_a^b|f(x)|^p dx<\infty\right\}$ ifadesi $1\leq p<\infty$ için alışılmış *Lebesgue uzayı*dır (Mathai, 2010). $L_p[a,b]$ uzayında norm:

$1\leq p<\infty,\ \ f\in L_p[a,b]$ ise

$$\|f\|_{L_p[a,b]}=\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.19}$$

şeklindedir. Eğer f fonksiyonu sürekli ise : $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$ olur. Burada

$$\|f\|_\infty=\underbrace{sup}_{a\leq x\leq b}|f(x)| \tag{2.20}$$

ile ifade edilmektedir. Bu tez de Lebesgue uzayının aşağıdaki gösterimi kullanılmıştır,

$a < b,\ c \in \mathbb{R}$ ve $1 \leq\ p < \infty$ için, ölçülebilir Lebesgue fonksiyon uzayı

$$X_c^p(a,b) = \left\{ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}\colon \|f\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty \right\}. \tag{2.21}$$

2.1.4. Mittag-Leffler fonksiyonu

$z \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \qquad \alpha > 0 \tag{2.22}$$

ile tanımlı E_α fonksiyonuna, yakınsak seri olduğunda, *α mertebeli Mittag-Leffler fonksiyonu* denir (Samko ve ark., 1993; Kilbas ve ark., 2006). Yukarıdaki gösterim, Mittag-Leffler fonksiyonunun bir parametreli gösterimidir. $z \in \mathbb{C}$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere,

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{2.23}$$

ile tanımlı $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonuna, yakınsak seri olduğunda, α ve β parametreleri ile birlikte *iki parametreli (genelleştirilmiş) Mittag-Leffler fonksiyonu* denir (Diethelm, 2010). Ayrıca bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonlarının iki parametreli karşılıkları

$$E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z) \tag{2.24}$$

biçiminde tanımlanır.

Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir (Weilbeer, 2005):

1) Bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu, her $z \in \mathbb{C}$ için yakınsaktır.
2) $|z| < 1$ için genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z)dt = \frac{1}{1-z} \tag{2.25}$$

eşitliğini sağlar.

3) $|z| < 1$ için $E_\alpha(z^\alpha)$ Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$\int_0^\infty e^{-zt} E_\alpha(z^\alpha)dt = \frac{1}{z - z^{1-\alpha}} \tag{2.26}$$

şeklindedir.

4) Özel α değerleri için Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_0(z) = \frac{1}{1-z}, \qquad E_1(z) = e^z$$
$$E_2(z^2) = \cosh z, \qquad E_2(-z^2) = \cos z \tag{2.27}$$

şeklinde verilir.

2.2. Kesirli Operatörler

Kesirli analizin en ilginç özelliğinden birinin, çoğu operatörü içermesi olduğundan daha önce bahsedilmiştir. Böylece bir araştırmacının gerçek dünya problemindeki dinamikliği tanımlamak için en uygun operatörü seçebilme şansı söz konusudır. İşte bu operatörlerden bizim kullanacaklarımız aşağıda verilmiştir.

2.2.1. Riemann-Liouville kesirli integral operatörü

$\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ olsun:

α mertebeli soldan Riemann–Liouville kesirli integrali, $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $(\Re(\alpha) > 0)$ için aşağıda tanımlanmıştır (Kilbas ve ark.,2006).

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-u)^{\alpha-1} f(u) du \qquad (t > a; \quad \Re(\alpha) > 0) \tag{2.28}$$

α mertebeli sağdan Riemann–Liouville kesirli integrali, $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ için aşağıda tanımlanmıştır (Kilbas ve ark.,2006).

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{b} (u-t)^{\alpha-1} f(u) du \qquad (t < b; \quad \Re(\alpha) > 0) \tag{2.29}$$

2.2.2. Riemann-Liouville kesirli türev operatörü

α mertebeli soldan Riemann–Liouville kesirli türevi, $(\Re(\alpha) \geq 0)$ için

$$\begin{aligned}(D_{a+}^{\alpha} f)(t) &:= \frac{d^n}{dt^n} (I_{a+}^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{\frac{d^n}{dt^n}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-u)^{n-\alpha-1} f(u) du, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1; \ t > a)\end{aligned} \tag{2.30}$$

şeklindedir (Kilbas ve ark.,2006).

α mertebeli sağdan Riemann–Liouville kesirli türevi, $\Re(\alpha) \geq 0$ için

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(t) := (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} (I_{b-}^{n-\alpha} f)(t)$$

$$= \frac{(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (u-t)^{n-\alpha-1} f(u) du, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1; \ t < b) \tag{2.31}$$

ile gösterilir (Kilbas ve ark.,2006).

Şimdi Riemann-Liouville kesirli operatörlerine ait bazı özellik ve lemmaları verelim.

Özellik 2.1. (Kilbas ve ark.,2006)

Eğer $\Re(\alpha) \geq 0$ ve $\beta \in \mathbb{C}\ (\Re(\beta) > 0)$ ise , o zaman

$$\left(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}, (\Re(\alpha) > 0), \tag{2.32}$$

$$\left(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}, (\Re(\alpha) \geq 0) \tag{2.33}$$

ve

$$\left(I_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}, (\Re(\alpha) > 0), \tag{2.34}$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}, (\Re(\alpha) \geq 0). \tag{2.35}$$

Özel olarak, genelde eğer $\beta = 1$ ve $\Re(\alpha) \geq 0$ olursa, o zaman a sabitinin Riemann-Liouville kesirli türevi sıfıra eşit değildir.

$$(D_{a+}^{\alpha} 1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \qquad (D_{b-}^{\alpha} 1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \ \ (0 < \Re(\alpha) < 1). \tag{2.36}$$

Diğer taraftan, $j = 1,2, \ldots, [\Re(\alpha)] + 1$ için

$$\left(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j}\right)(x)=0, \qquad \left(D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\alpha-j}\right)(x)=0. \tag{2.37}$$

Lemma 2.1. (Kilbas ve ark.,2006)

a) I_{a+}^{α} ve I_{b-}^{α} kesirli integral operatörleri $\Re(\alpha)>0$ için $L_q(a,b)$ $(1\le p\le\infty)$ uzayında sınırlıdırlar:

$$\| I_{a+}^{\alpha}f\|_p \le K\|f\|_p\,, \quad \|I_{b-}^{\alpha}f\|_p \le K\|f\|_p \qquad \left(K=\frac{(b-a)^{\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha)|\Gamma(\alpha)|}\right). \tag{2.38}$$

b) Eğer $0<\alpha<1$ ve $1<p<1/\alpha$ ise, o zaman I_{a+}^{α} ve I_{b-}^{α} kesirli integral operatörleri $L_p(a,b)$ den $L_q(a,b)$ ' ye sınırlıdır, burada $q=p/(1-\alpha p)$ dir.

Lemma 2.2. (Kilbas ve ark.,2006)

$\Re(\alpha)\ge 0$ alalım ve $n=[\Re(\alpha)]+1$. Eğer $y(x)\in AC^n[a,b]$ ise o zaman $D_{a+}^{\alpha}y$ ve $D_{b-}^{\alpha}y$ kesirli türevleri $[a,b]$ üzerinde hemen hemen her yerde vardır ve bunu aşağıdaki formda

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{2.39}$$

ve

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(b-x)^{k-\alpha}+\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b\frac{y^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \tag{2.40}$$

ifade edebiliriz.

Lemma 2.3. (Kilbas ve ark.,2006)

Eğer $\Re(\alpha)>0$ ve $\Re(\beta)>0$ ise o zaman

$$(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x) \quad \text{ve} \quad (I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f)(x) = (I_{b-}^{\alpha+\beta} f)(x) \tag{2.41}$$

denklemleri $(1 \leq p \leq \infty)$ $f(x) \in L_p(a,b)$ için $x \in [a,b]$ noktası üzerinde hemen hemen her yerde sağlanır. Eğer $\alpha + \beta > 1$ olursa, o zaman yukardaki denklemler $[a,b]$ üzerinde herhangi bir noktada sağlanır.

Lemma 2.4. (Kilbas ve ark.,2006)

Eğer $\Re(\alpha) > 0$ ve $f(x) \in L_p(a,b)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ olursa o zaman

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) \quad \text{ve} \quad (D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f)(x) = f(x) \tag{2.42}$$

denklemleri $[a,b]$ üzerinde hemen hemen her yerde geçerlidir.

Özellik 2.2. (Kilbas ve ark.,2006)

Eğer $\Re(\alpha) > \Re(\beta) > 0$ olursa, o zaman , $f(x) \in L_p(a,b)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ için aşağıdaki ilişkiler

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = I_{a+}^{\alpha-\beta} f(x) \quad \text{ve} \quad (D_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f)(x) = I_{b-}^{\alpha-\beta} f(x) \tag{2.43}$$

$[a,b]$ üzerinde hemen hemen her yerde geçerlidir.

Özel olarak, $\beta = k \in N$ ve $\Re(\alpha) > k$ olduğunda

$$(D^k I_{a+}^{\alpha} f)(x) = I_{a+}^{\alpha-k} f(x) \quad \text{ve} \quad (D^k I_{b-}^{\alpha} f)(x) = (-1)^k I_{b-}^{\alpha-k} f(x) \tag{2.44}$$

olmaktadır.

Özellik 2.3. (Kilbas ve ark.,2006)

$\Re(\alpha) \geq 0, m \in N$ ve $D = \frac{d}{dx}$ olsun.

(a) Eğer $(D_{a+}^{\alpha} y)(x)$ ve $(D_{a+}^{\alpha+m} y)(x)$ türevleri varsa, o zaman

$$(D^m D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D_{a+}^{\alpha+m} y)(x) \tag{2.45}$$

olur.

(b) Eğer $(D_{b-}^{\alpha} y)(x)$ ve $(D_{b-}^{\alpha+\mathrm{m}} y)(x)$ türevleri varsa, o zaman

$$(D^m D_{b-}^{\alpha} y)(x) = (-1)^m (D_{b-}^{\alpha+m} y)(x) \tag{2.46}$$

olur.

Özellik 2.4. (Kilbas ve ark.,2006)

$\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olsun öyle ki $n-1 < \alpha < n,\ m-1 < \beta < m\ (n, m \in N)$ ve $\alpha + \beta < n$, ayrıca $f \in L_1(a,b)$ ve $f_{m-\alpha} \in AC^m([a,b])$ olsun. O zaman aşağıdaki indeks kuralı geçerlidir:

$$(D_{a+}^{\beta} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha+\beta} f\right)(x) - \sum_{j=1}^{m} (D_{a+}^{\beta-j} f)(a^+) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)} \tag{2.47}$$

Lemma 2.5. (Kilbas ve ark.,2006)

$\Re(\alpha) > 0$ ve $n = [\Re(\alpha)] + 1$ alalım. Bir de $g_{n-\alpha}(x) = (I_{b-}^{n-\alpha} g)(x)$ olmak üzere

(a) Eğer $1 \le p \le \infty$ ve $g(x) \in I_{b-}^{\alpha}(L_p)$ ise, o zaman

$$(I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} g)(x) = g(x). \tag{2.48}$$

(b) Eğer $g(x) \in L_1(a,b)$ ve $g_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a,b]$ olursa bu formül

$$(I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} g)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{n-j} g_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (b-x)^{\alpha-j} \tag{2.49}$$

$[a,b]$ üzerinde hemen hemen her yerde geçerlidir.

Özel olarak, $0 < \Re(\alpha) < 1$ için

$$(I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} g)(x) = g(x) - \frac{g_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(b-x)^{\alpha-1} \tag{2.50}$$

olur, burada $g_{1-\alpha}(x) = (I_{b-}^{1-\alpha} g)(x)$ şeklindedir. $\alpha = n \in N$ olduğunda aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$(I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} g)(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k g^{(k)}(b)}{k!}(b-x)^k. \tag{2.51}$$

2.2.3. Caputo kesirli türev operatörü

Bu bölümde Caputo kesirli türev operatörünün tanımları ve bazı özelliklerini vereceğiz (Kilbas ve ark.,2006).

$\mathbb{R}$, reel sayıların sonlu bir aralığı $[a,b]$ olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$) mertebeli Riemann- Liouville kesirli türev operatörü aracılığıyla Caputo türev operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$({}_a^C D^{\alpha} f)(t) \coloneqq \left({}_a D^{\alpha} \left[f(u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(u-a)^k \right] \right)(t) \tag{2.52}$$

ve

$$\left({}^C D_b^{\alpha} f \right)(t) := \left(D_b^{\alpha} \left[f(u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k \right] \right)(t), \tag{2.53}$$

burada $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ için $n = [\Re(\alpha)] + 1$; $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $n = \alpha$, şeklindedir. Bu türevler sırasıyla α mertebeli, soldan (*left-sided*) ve sağdan (*right-sided*) Caputo kesir türev operatörleri diye isimlendirilir.

Özellikle, $0 < \Re(\alpha) < 1$ olduğunda yukarıdaki türevler aşağıdaki formda olurlar:

$$({}_a^C D^\alpha f)(t) = ({}_a D^\alpha [f(u) - f(a)])(t), \tag{2.54}$$

$$\left({}^C D_b^\alpha f\right)(t) = (D_b^\alpha [f(u) - f(b)])(t). \tag{2.55}$$

Eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ve n_inci mertebeden klasik türev $f^{(n)}(t)$ varsa, o zaman $f^{(n)}(t)$ türevini içeren $({}_a^C D^n f)(t)$ ve $\left({}^C D_b^n f\right)(t)$ türevleri;

$$({}_a^C D^n f)(t) = f^{(n)}(t) \quad \text{ve} \quad \left({}^C D_b^n f\right)(t) = (-1)^n f^{(n)}(t), (n \in \mathbb{N}) \tag{2.56}$$

olmaktadır.

Teorem 2.1. (Kilbas ve ark.,2006)

$\alpha \notin \mathbb{N}_0$ için $n = [\Re(\alpha)] + 1$; $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $n = \alpha$ olsun ve $\Re(\alpha) \geq 0$ alalım. Eğer $f(t) \in AC^n[a, b]$ ise, o zaman $({}_a^C D^\alpha f)(t)$ ve $\left({}^C D_b^\alpha f\right)(t)$ Caputo kesirli türevleri $[a, b]$ aralığı üzerinde hemen hemen her yerde vardır.

(a) Eğer $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ise, $({}_a^C D^\alpha f)(t)$ ve $\left({}^C D_b^\alpha f\right)(t)$ ifadeleri aşağıdaki gibidir

$$({}_a^C D^\alpha f)(t) =: \left({}_a I^{n-\alpha} f^{(n)}\right)(t)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u) du\,, \qquad n = [\Re(\alpha)] + 1 \tag{2.57}$$

ve

$$\left({}^C D_b^\alpha f\right)(t) =: \left(I_b^{n-\alpha} (-1)^n f^{(n)}\right)(t)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (u-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u) du\,, \;\; n = [\Re(\alpha)] + 1. \tag{2.58}$$

Özellikle, $0 < \Re(\alpha) < 1$ ve $f(t) \in AC[a, b]$ olduğunda

$$({}_a^C D^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{-\alpha} f'(u) du =: \left({}_a I^{1-\alpha} f'\right)(t) \tag{2.59}$$

ve

$$\left({}^{C}D_{b}^{\alpha}f\right)(t)=\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t}^{b}(u-t)^{-\alpha}f'(u)du=:-(I_{b}^{1-\alpha}f')(t) \tag{2.60}$$

olur ve $n=[\Re(\alpha)]+1$.

(b) Eğer $\alpha=n\in\mathbb{N}_0$ ise, o zaman $({}_{a}^{C}D^{\alpha}f)(t)$ ve $\left({}^{C}D_{b}^{\alpha}f\right)(t)$ ifadeleri (2.56) eşitliği aracılığıyla aşağıdaki gibi olur,

$$({}_{a}^{C}D^{0}f)(t)=\left({}^{C}D_{b}^{0}f\right)(t)=f(t). \tag{2.61}$$

Teorem 2.2. (Kilbas ve ark.,2006)

$\Re(\alpha)\geq 0$ ve $\alpha\notin\mathbb{N}_0$ için $n=[\Re(\alpha)]+1$; $\alpha\in\mathbb{N}_0$ için $n=\alpha$ alalım. Ayrıca $f(t)\in C^{n}[a,b]$ olsun. O zaman $({}_{a}^{C}D^{\alpha}f)(t)$ ve $\left({}^{C}D_{b}^{\alpha}f\right)(t)$ Caputo kesirli türev operatörleri [a, b] üzerinde süreklidirler:

$({}_{a}^{C}D^{\alpha}f)(t)\in C[a,b]$ ve $\left({}^{C}D_{b}^{\alpha}f\right)(t)\in C[a,b]$.

(a) Eğer $\alpha\notin\mathbb{N}_0$ ise, o zaman (2.57) ve (2.58) denklemleriyle Caputo türevleri için aşağıdaki eşitlik sağlanır,

$$({}_{a}^{C}D^{\alpha}f)(a)=\left({}^{C}D_{b}^{\alpha}f\right)(b)=0. \tag{2.62}$$

(b) Eğer $n=\alpha\in\mathbb{N}_0$ ise, o zaman $({}_{a}^{C}D^{\alpha}f)(t)$ ve $\left({}^{C}D_{b}^{\alpha}f\right)(t)$ Caputo türevleri (2.56) denklemlerini sağlarlar. Özel olarak (2.61) deki ilişki içinde geçerlidir.

Özellik 2.5. (Kilbas ve ark.,2006)

$\alpha\notin\mathbb{N}_0$ için $n=[\Re(\alpha)]+1$; $\alpha\in\mathbb{N}_0$ için $n=\alpha$ alalım. Burada $\Re(\alpha)>0$ olmak üzere aşağıdaki denklemler doğrudur:

$$\left({}_{a}^{C}D^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-1},\qquad(\Re(\beta)>n), \tag{2.63}$$

$$\left({}^{C}D_{b}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-1},\qquad(\Re(\beta)>n),\tag{2.64}$$

ve

$$({}_{a}^{C}D^{\alpha}(t-a)^{k})(x)=0\quad\text{ve}\quad\left({}^{C}D_{b}^{\alpha}(b-t)^{k}\right)(x)=0,\quad(k=0,1,\dots,n-1).\tag{2.65}$$

Özellikle,

$$({}_{a}^{C}D^{\alpha}1)(x)=0\quad\text{ve}\quad\left({}^{C}D_{b}^{\alpha}1\right)(x)=0.\tag{2.66}$$

Lemma 2.6. (Kilbas ve ark.,2006)

$\Re(\alpha)>0$ ve $y(x)\in L_{\infty}(a,b)$ veya $y(x)\in C[a,b]$ alalım:

(a) Eğer $\Re(\alpha)\notin\mathbb{N}$ veya $\alpha\in\mathbb{N}$ ise, o zaman

$$\left({}_{a}^{C}D^{\alpha}\,{}_{a}I^{\alpha}y\right)(x)=y(x)\ \text{ve}\ ({}^{C}D_{b}^{\alpha}\,I_{b}^{\alpha}\,y)=y(x)\tag{2.67}$$

(b) Eğer $\Re(\alpha)\in\mathbb{N}$ ve $\Im(\alpha)\neq 0$ ise, o zaman

$$\left({}_{a}^{C}D^{\alpha}\,{}_{a}I^{\alpha}y\right)(x)=y(x)-\frac{({}_{a}I^{\alpha+1-n}y)(a)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha}\tag{2.68}$$

ve

$$\left({}^{C}D_{b}^{\alpha}I_{b}^{\alpha}y\right)(x)=\ y(x)-\frac{(I_{b}^{\alpha+1-n}y)(b)}{\Gamma(n-\alpha)}(b-x)^{n-\alpha}\tag{2.69}$$

olmaktadır.

2.2.4. Hadamard kesirli operatörleri

Hadamard kesirli integrali ve kesirli türevi J. Hadamard tarafından tanıtılmış ve formülleri aşağıda verilmiştir (Kilbas, 2001). Bunlar;

α mertebeli, sol Hadamard kesirli integrali , $\Re(\alpha) > 0$ için

$$\left({}_a\mathcal{J}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\log t - \log u)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{u} \qquad (a < t < b) \tag{2.70}$$

α mertebeli, sağ Hadamard kesirli integrali $\Re(\alpha) > 0$ için

$$\left(\mathcal{J}_b^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\log u - \log t)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{u} \qquad (a < t < b) \tag{2.71}$$

α mertebeli, sol Hadamard kesirli türevi $\Re(\alpha) \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \left({}_aD^{\alpha} f\right)(t) &=: \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left({}_a\mathcal{J}^{n-\alpha} f\right)(t) \\ &= \frac{\left(t\frac{d}{dt}\right)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (\log t - \log u)^{n-\alpha+1} f(u) \frac{du}{u}, \qquad n = [\Re(\alpha)] + 1. \end{aligned} \tag{2.72}$$

α mertebeli, sağ Hadamard kesirli türevi $\Re(\alpha) \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \left(D_b^{\alpha} f\right)(t) &=: \left(-t\frac{d}{dt}\right)^n \left(\mathcal{J}_b^{n-\alpha} f\right)(t) \\ &= \frac{\left(-t\frac{d}{dt}\right)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\log u - \log t)^{n-\alpha+1} f(u) \frac{du}{u}, \qquad n = [\Re(\alpha)] + 1 \end{aligned} \tag{2.73}$$

şeklindedir.

Şimdi ise Hadamard kesirli operatörlerine ait bazı teorem ve özellikleri vereceğiz.

Özellik 2.6. (Kilbas ve ark.,2006)

Eğer $\Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0$ ve $0 < a < b < \infty$ ise , o zaman

$$\left({}_aJ^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1} \tag{2.74}$$

$$\left({}_aD^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1} \tag{2.75}$$

ve

$$\left(J_b^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\log\frac{b}{x}\right)^{\beta+\alpha-1} \tag{2.76}$$

$$\left(D_b^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{b}{x}\right)^{\beta-\alpha-1}. \tag{2.77}$$

Özel olarak, eğer $\beta=1$ ve $\Re(\alpha)\geq 0$ olursa, o zaman bir sabitin Hadamard kesirli türevleri genelde sıfıra eşit olmamaktadır:

$$\left({}_aD^{\alpha}1\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-\alpha} \quad \text{ve} \quad \left(D_b^{\alpha}(l)\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{b}{x}\right)^{-\alpha}, \tag{2.78}$$

$0<\Re(\alpha)<1$ olduğunda. Diğer taraftan $j=[\Re(\alpha)]+1$ için

$$\left({}_aD^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x)=0 \quad \text{ve} \quad \left(D_b^{\alpha}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{\alpha-j}\right)(x)=0 \tag{2.79}$$

olmaktadır.

Özellik 2.7. (Kilbas ve ark.,2006)

$\Re(\alpha)>0, \Re(\beta)>0$ alalım ve $1\leq p\leq\infty$ olsun.

(a) Eğer $0<a<b<\infty$ ise, o zaman, $f\in L^p(a,b)$ için

$${}_a\mathcal{J}^{\alpha}\ {}_a\mathcal{J}^{\beta}f = {}_a\mathcal{J}^{\alpha+\beta}f,\ (c \le 0)\ \text{ve}\ \mathcal{J}_b^{\alpha}\mathcal{J}_b^{\beta}f = \mathcal{J}_b^{\alpha+\beta}f,\ (c \ge 0). \tag{2.80}$$

(b) Eğer $\mu \in \mathbb{C},\ c \in \mathbb{R}, a = 0$ ve $b = \infty$ ise, o zaman, $f \in X_c^p(\mathbb{R}^+)$ için

$${}_{0,\mu}\mathcal{J}^{\alpha}\ {}_{0,\mu}\mathcal{J}^{\beta}f = {}_{0,\mu}\mathcal{J}^{\alpha+\beta}f,\ (\Re(\mu) > c)\ \text{ve}\ \mathcal{J}_{0,\mu}^{\alpha}\mathcal{J}_{0,\mu}^{\beta}f = \mathcal{J}_{0,\mu}^{\alpha+\beta}f,\ (\Re(\mu) > -c) \tag{2.81}$$

olmaktadır. Özel bir durum olarak $\mu = 0$ olduğunda ise

$${}_{0+}\mathcal{J}^{\alpha}\ {}_{0+}\mathcal{J}^{\beta}f = {}_{0+}\mathcal{J}^{\alpha+\beta}f,\ (c < 0)\ \text{ve}\ \mathcal{J}_{-}^{\alpha}\mathcal{J}_{-}^{\beta}f = \mathcal{J}^{\alpha+\beta}f, \qquad (c > 0) \tag{2.82}$$

olur.

Özellik 2.8. (Kilbas ve ark.,2006)

$\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ alalım öyle ki $\Re(\alpha) > \Re(\beta) > 0$ olsun.

(a) Eğer $0 < a < b < \infty$ ve $1 \le p \le \infty$ olursa, o zaman, $f \in L^p(a,b)$ için

$${}_aD^{\beta}\ {}_a\mathcal{J}^{\alpha}f = {}_a\mathcal{J}^{\alpha-\beta}f,\ (c \le 0)\ \text{ve}\ D_b^{\beta}\mathcal{J}_b^{\alpha}f = \mathcal{J}_b^{\alpha-\beta}f \tag{2.83}$$

eşitlikleri sağlanır. Özel olarak $\beta = m \in \mathbb{N}$ olursa aşağıdaki eşitlikler geçerlidir,

$${}_aD^{m}\ {}_a\mathcal{J}^{\alpha}f = {}_a\mathcal{J}^{\alpha-m}f,\ (c \le 0)\ \text{ve}\ D_b^{m}\mathcal{J}_b^{\alpha}f = \mathcal{J}_b^{\alpha-m}f\ . \tag{2.84}$$

(b) Eğer $\mu\epsilon\ \mathbb{C}\ , c \in \mathbb{R},\ a = 0$ ve $b = \infty$ ise, o zaman, $f \in X_c^p(\mathbb{R}^+)$ için

$${}_{0,\mu}D^{\beta}\ {}_{0,\mu}\mathcal{J}^{\alpha}f = {}_{0,\mu}\mathcal{J}^{\alpha-\beta}f,\ (\Re(\mu) > c)\ \text{ve}\ D_{0,\mu}^{\beta}\mathcal{J}_{0,\mu}^{\alpha}f = \mathcal{J}_{0,\mu}^{\alpha-\beta}f,\ (\Re(\mu) > -c) \tag{2.85}$$

olmaktadır. Özel bir durum olarak $\beta = m \in \mathbb{N}$ olduğunda ise

$${}_{0,\mu}D^{m}\,{}_{0,\mu}\mathcal{J}^{\alpha}f = {}_{0,\mu}\mathcal{J}^{\alpha-m}f, (\Re(\mu) > c) \text{ ve } D^{m}_{-,\mu}\mathcal{J}^{\alpha}_{-,\mu}f = \mathcal{J}^{\alpha-m}_{-,\mu}f, (\Re(\mu) > -c). \quad (2.86)$$

Özellik 2.9. (Kilbas ve ark.,2006)

$\Re(\alpha) > 0$ alalım.

(a) Eğer $0 < a < b < \infty$ ve $1 \le p \le \infty$ olursa, o zaman, $f \in L^{p}(a,b)$ için

$${}_{a}D^{\alpha}\,{}_{a}\mathcal{J}^{\alpha}f = f, \ \ (c \le 0) \ \ \text{ve} \ \ D^{\alpha}_{b}\mathcal{J}^{\alpha}_{b}f = f\,, \qquad (c \ge 0) \quad (2.87)$$

olur.

(b) Eğer $\mu\epsilon\,\mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$, $a = 0$ ve $b = \infty$ ise, o zaman, $f \in X^{p}_{c}(\mathbb{R}^{+})$ için

$${}_{0,\mu}D^{\alpha}\,{}_{0,\mu}\mathcal{J}^{\alpha}f = f, \ \ (\Re(\mu) > c) \ \text{ve} \ D^{\alpha}_{0,\mu}\mathcal{J}^{\alpha}_{0,\mu}f = f, \qquad (\Re(\mu) > -c), \quad (2.88)$$

olmaktadır. Özel bir durum olarak $\mu = 0$ olduğunda ise

$${}_{0+}D^{\alpha}\,{}_{0+}\mathcal{J}^{\alpha}f = f, \ \ (c < 0) \ \text{ve} \ D^{\alpha}_{-}\mathcal{J}^{\alpha}_{-}f = f, \qquad (c > 0) \quad (2.89)$$

olur.

Teorem 2.3. (Kilbas ve ark.,2006)

$\Re(\alpha) > 0$, $n = -[-\Re(\alpha)]$ ve $0 < a < b < \infty$ olsun. $\left({}_{a}\mathcal{J}^{n-\alpha}y\right)(x)$ ise (2.70) ifadesine uygun Hadamard kesirli integrali olsun. Eğer $y(x) \in L(a,b)$ ve $\left({}_{a}\mathcal{J}^{n-\alpha}y\right)(x) \in AC^{n}_{\delta}[a,b]$ ise, o zaman

$$\left({}_{a}\mathcal{J}^{\alpha}\,{}_{a}D^{\alpha}y\right)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\delta^{n-k}({}_{a}\mathcal{J}^{n-\alpha}y))(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(log\,\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} \quad (2.90)$$

olur. Özellikle, eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ve $y(x) \in AC^{n}_{\delta}[a,b]$ için,

$$\left({}_a\mathcal{J}^n\ {}_aD^n y\right)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^k y)(a)}{k!}\left(log\frac{x}{a}\right)^k \tag{2.91}$$

olmaktadır.

2.2.5. Caputo-Hadamard kesirli operatörleri

α mertebeli, sol Caputo–Hadamard kesirli türevi $\Re(\alpha) \geq 0$ için aşağıdaki gibi sunulur, (Jarad ve ark., 2012; 2014).

$$({}_a^C D^\alpha f)(t) = {}_aD^\alpha \left[f(u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k f(a)}{k!}\left(log\frac{u}{a}\right)^k\right](t), \quad \delta = t\frac{d}{dt}, \tag{2.92}$$

ve $AC_\delta^n\ [a,b] = \{g: [a,b] \to \mathbb{C}: \delta^{n-1}[g(t)] \in AC[a,b]\}$ uzayında

$$({}_a^C D^\alpha f)(t) = \left({}_a\mathcal{J}^{n-\alpha}\left(t\frac{d}{dt}\right)^n f\right)(t), \ \ n = [\Re(\alpha)] + 1. \tag{2.93}$$

ifadesine eşdeğer olur.

α mertebeli, Sağ Caputo–Hadamard kesirli türevi $\Re(\alpha) \geq 0$ için aşağıdaki gibi sunulur (Jarad ve ark., 2012; 2014).

$$\left({}^C D_b^\alpha f\right)(t) = D_b^\alpha \left[f(u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \delta^k f(b)}{k!}\left(log\frac{b}{u}\right)^k\right](t) \tag{2.94}$$

ve $AC_\delta^n\ [a,b]$ uzayında

$$\left({}^C D_b^\alpha f\right)(t) = \left(\mathcal{J}_b^{n-\alpha}\left(-t\frac{d}{dt}\right)^n f\right)(t) \tag{2.95}$$

ifadesine eşdeğer olur.

2.2.6. Genelleştirilmiş kesirli operatörler (Bir f fonksiyonun başka bir g fonksiyonu aracılığıyla kesirli operatörleri)

$\alpha > 0$, $I = [a, b]$ sonlu veya sonsuz bir aralık olsun, f fonsiyonu I üzerinde integrallenebilir olsun ve $g \in C^1(I)$ artan bir fonksiyon olsun öyle ki her $x \in I$ için $g'(x) \neq 0$'dır. $n \in [\alpha] + 1$ olmak üzere f fonksiyonun g fonksiyonuna göre soldan kesirli türevi ve kesirli integrali aşağıdaki gibi tanımlanmıştır,

$$ {}_aI^{\alpha,g} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x g'(t)\big(g(x) - g(t)\big)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{2.96} $$

ve

$$ \begin{aligned} {}_aD^{\alpha,g} f(x) &:= \left(\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n {}_aI^{n-\alpha,g} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x g'(t)\big(g(x) - g(t)\big)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \end{aligned} \tag{2.97} $$

Eğer $g(x) = x$ veya $g(x) = \ln x$ seçersek, Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli operatörleri elde edilir.

Benzer şekilde sağdan kesirli türev ve integrali:

$$ I_b^{\alpha,g} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b g'(t)\big(g(t) - g(x)\big)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{2.98} $$

ve

$$ \begin{aligned} D_b^{\alpha,g} f(x) &:= \left(-\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n I_b^{n-\alpha,g} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b g'(t)\big(g(t) - g(x)\big)^{n-\alpha-1} f(t)dt \end{aligned} \tag{2.99} $$

şeklindedir (Osler1970; Samko ve ark., 1993; Kilbas ve ark., 2006).

Teorem 2.4. (Almedia,2016)

Eğer $\alpha, \beta > 0$ ise, aşağıdaki kesirli integral özellikleri de vardır

$$ {}_aI^{\alpha,g}\ {}_aI^{\beta,g} f(x) = {}_aI^{\alpha+\beta,g} f(x) \quad \text{ve} \quad I_b^{\alpha,g} I_b^{\beta,g} f(x) = I_b^{\alpha+\beta,g} f(x). \tag{2.100} $$

Tanım 2.1. (Almedia,2016)

$\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$, I ise $-\infty \leq a < b \leq \infty$ da bir aralık, $f, g \in C^n(I)$ iki fonksiyondur öyle ki her $x \in I$ için g artandır ve $g'(x) \neq 0$. f fonksiyonunun α mertebeli soldan g-Caputo kesirli türevi:

$$ {}_a^C D^{\alpha,g} f(x) \coloneqq {}_aI^{n-\alpha,g} \left(\frac{1}{g'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n f(x), \tag{2.101} $$

ve sağdan g-Caputo kesirli türevi

$$ {}^C D_b^{\alpha,g} f(x) \coloneqq I_b^{n-\alpha,g} \left(-\frac{1}{g'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \tag{2.102} $$

ile verilir. Burada $\alpha \notin \mathbb{N}$ için $n \in [\alpha] + 1$ ve $\alpha \in \mathbb{N}$ için $n = \alpha$' dır.

Bundan sonraki kısımlarda daha basit ifade edebilmek için $\left(-\frac{1}{g'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n f(x)$ yerine aşağıdaki gösterimi kullanacağız,

$$ f_g^{[n]} f(x) \coloneqq \left(-\frac{1}{g'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n f(x). \tag{2.103} $$

Teorem 2.5. (Almedia,2016)

Varsayalım ki $f, g \in C^{n+1}[a, b]$ olsun. O zaman her $\alpha > 0$ için,

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D^{\alpha,g} f(x) = {} & \frac{\big(g(x)-g(a)\big)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f_g^{[n]}(a) \\
& + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_a^x \big(g(x)-g(t)\big)^{n-\alpha} \frac{d}{dt} f_g^{[n]}(t)dt
\end{aligned}
\tag{2.104}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
{}^C D_b^{\alpha,g} f(x) = {} & (-1)^n \frac{\big(g(b)-g(x)\big)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f_g^{[n]}(b) \\
& - \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_x^b \big(g(t)-g(x)\big)^{n-\alpha} (-1)^n \frac{d}{dt} f_g^{[n]}(t)dt
\end{aligned}
\tag{2.105}
$$

olur.

Teorem 2.6. (Almedia,2016)

Eğer $f \in C^n[a,b]$ ve $\alpha > 0$ ise,

$$
{}_a^C D^{\alpha,g} f(x) = {}_a D^{\alpha,g} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \big(g(x)-g(a)\big)^k f_g^{[k]}(a) \right] \tag{2.106}
$$

ve

$$
{}^C D_b^{\alpha,g} f(x) = D_b^{\alpha,g} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \big(g(b)-g(x)\big)^k f_g^{[k]}(b) \right] \tag{2.107}
$$

yazılabilir.

Lemma 2.7. (Almedia,2016)

$\beta \in \mathbb{R}$ verilsin, aşağıdaki fonksiyonları ele alalım

$$
f(x) = \big(g(x)-g(a)\big)^{\beta-1} \text{ ve } \psi(x) = (g(b)-g(x))^{\beta-1}, \tag{2.108}
$$

burada $\beta > n$' dır. O zaman $\alpha > 0$ için,

$$ {}_{a}^{C}D^{\alpha,g} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \big(g(x) - g(a)\big)^{\beta-\alpha-1} \tag{2.109} $$

ve

$$ {}^{C}D_{b}^{\alpha,g} \psi(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \big(g(b) - g(x)\big)^{\beta-\alpha-1}. \tag{2.110} $$

Teorem 2.7. (Almedia,2016)

Eğer $f \in C^n[a,b]$ ve $\alpha > 0$ ise, o zaman:

$$ {}_{a}I^{\alpha,g}\, {}_{a}^{C}D^{\alpha,g} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_g^{[k]}(a)}{k!} \big(g(x) - g(a)\big)^{k} \tag{2.111} $$

ve

$$ I_{b}^{\alpha,g}\, {}^{C}D_{b}^{\alpha,g} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k} \frac{f_g^{[k]}(b)}{k!} \big(g(b) - g(x)\big)^{k} . \tag{2.112} $$

Teorem 2.8. (Almedia,2016)

$f \in C^1[a,b]$ fonksiyonu verilsin ve $\alpha > 0$ olsun, o zaman:

$$ {}_{a}^{C}D^{\alpha,g}\, {}_{a}I^{\alpha,g} f(x) = f(x) \quad \text{ve} \quad {}^{C}D_{b}^{\alpha,g} I_{b}^{\alpha,g} f(x) = f(x). \tag{2.113} $$

Teorem 2.9. (Almedia,2016)

$\alpha, \beta > 0$ olsun öyle ki $\beta, \alpha + \beta \in [k-1, k]$ ile bazı $k \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman, $f \in C^k[a,b]$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$({}_a^C D^{\alpha,g}\,{}_a^C D^{\beta,g})f(x) = {}_a^C D^{\alpha+\beta,g} f(x) \text{ ve}$$
$$({}^C D_b^{\alpha,g}\,{}^C D_b^{\beta,g})f(x) = (-1)^{[\alpha+\beta]}\,{}^C D_b^{\alpha+\beta,g} f(x). \tag{2.114}$$

Lemma 2.8. (Samko ve ark., 1993)

$\Re(\alpha) > 0$ ve $\Re(\beta) > 0$ alalım, öyleyse

$${}_a I^{\alpha,g}\big(g(x) - g(a)\big)^{\beta-1}(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\big(g(t) - g(a)\big)^{\beta+\alpha-1} \tag{2.115}$$

olmaktadır.

Lemma 2.9. (Samko ve ark., 1993)

$\Re(\alpha) \geq 0$ ve $\Re(\beta) > 0$ alalım, öyleyse:

$${}_a D^{\alpha,g}\big(g(x) - g(a)\big)^{\beta-1}(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\big(g(t) - g(a)\big)^{\beta-\alpha-1}. \tag{2.116}$$

Lemma 2.10. (Samko ve ark., 1993)

$g \in C^n[a,b]$ alalım, öyle ki $[a,b]$ aralığında $g'(t) > 0$ olsun. O zaman $f \in AC_g^n$ olursa ancak ve ancak aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t \big(g(t) - g(s)\big)^{n-1} f_g^{[k]}(s) g'(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_g^{[k]}(a)}{k!}\big(g(t) - g(a)\big)^k. \tag{2.117}$$

Teorem 2.10. (Samko ve ark., 1993)

$\Re(\alpha) > 0, n = [\Re(\alpha)] + 1$ ve $f \in AC_g^n[a,b]$ olsun. O zaman f fonksiyonunun g aracılığıyla genelleştirilmiş kesirli türevi hemen hemen her yerde vardır ve

$$({}_aD^{\alpha,g}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} f_g^{[k]}(s)g'(s)ds + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f_g^{[k]}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\big(g(t)-g(a)\big)^{k-\alpha}. \tag{2.118}$$

Teorem 2.11. (Samko ve ark., 1993)

$\alpha > m, m \in \mathbb{N}$ alalım. O zaman

$$\left(\frac{1}{g'(t)}\frac{d}{dt}\right)^m {}_aI^{\alpha,g}f(t) = {}_aI^{\alpha-m,g}f(t). \tag{2.119}$$

Teorem 2.11. (Samko ve ark., 1993)

$\Re(\alpha) > 0, n = -[-\Re(\alpha)]$ ve $f \in L[a,b]$ ve ${}_aI^{\alpha,g}f \in AC_g^n[a,b]$ olsun.

Bu durumda:

$$({}_aI^{\alpha,g}\,{}_aD^{\alpha,g})f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_aI^{k-\alpha,g}f(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}\big(g(t)-g(a)\big)^{\alpha-k}. \tag{2.120}$$

Sonuç 2.1. (Samko ve ark., 1993)

$\alpha > \beta, m-1 < \beta < m, m \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman,

$$({}_aD^{\beta,g}\,{}_aI^{\alpha,g})f(t) = {}_aI^{\alpha-\beta,g}f(t). \tag{2.121}$$

Özel olarak,

$$({}_aD^{\alpha,g}\,{}_aI^{\alpha,g})f(t) = f(t) \tag{2.122}$$

olmaktadır.

2.2.7. Katugampola kesirli operatörleri

$p = \infty, \|f\|_{X_c^p} = \text{ess sup}_{a \le t \le b}[t^c|f\ (t)|]$ için α mertebeli Katugampola sağ ve sol kesirli integralleri $\Re(\alpha) > 0$ için sırasıyla

$$\left({}_aI^{\alpha,\rho}f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{t^\rho - u^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{u^{1-\rho}} \tag{2.123}$$

ve

$$\left(I_b^{\alpha,\rho}f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b \left(\frac{u^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{u^{1-\rho}} \tag{2.124}$$

olarak tanımlanmıştır (Katugampola, 2011).

Burada görülmektedir ki eğer $\rho = 1$ alınırsa, (2.123) ve (2.124) integralleri sırasıyla (2.28) ve (2.29) integrallerine dönmektedir. Ayrıca, $\rho \to 0$ iken (2.123) ve (2.124) integrallerinin limiti alındığı takdirde, sırasıyla (2.70) ve (2.71) denklemlerindeki Hadamard kesirli integralleri elde edilir.

$\Re(\alpha) \ge 0$ için α mertebeli sol ve sağ Katugampola kesirli türevleri sırasıyla,

$$\left({}_aD^{\alpha,\rho}f\right)(t) = \gamma^n\left({}_aI^{n-\alpha,\rho}f\right)(t) = \frac{\gamma^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \left(\frac{t^\rho - u^\rho}{\rho}\right)^{n-\alpha-1} f(u)\frac{du}{u^{1-\rho}} \tag{2.125}$$

ve

$$\left(D_b^{\alpha,\rho}f\right)(t) = (-\gamma)^n\left({}_aI^{n-\alpha,\rho}f\right)(t) = \frac{(-\gamma)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b \left(\frac{u^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{n-\alpha-1} f(u)\frac{du}{u^{1-\rho}} \tag{2.126}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Katugampola, 2014), burada $\gamma = t^{1-\rho}\ \frac{d}{dt}$ ' dir.

Görülüyor ki, (2.125) ve (2.126)'da $\rho = 1$ oldugu zaman (2.30) ve (2.31)'deki Riemann–Liouville kesirli türevleri elde edilir. Ayrıca, (2.125) ve (2.126)'da eğer $\rho \to 0$ yaklaşıyorsa (2.72) ve (2.73)'deki Hadamard kesirli türevleri elde edilir.

2.2.8. Caputo - Katugampola kesirli türev operatörü

$$AC_{\gamma}^{n}[a,b] = \left\{f:[a,b] \to \mathbb{C} \text{ ve } \gamma^{n-1}f \in AC[a,b], \quad \gamma = t^{1-\rho}\,\frac{d}{dt}\right\} \text{ ve}$$

$C_{\gamma}^{n}[a,b] = \left\{f:[a,b] \to \mathbb{C} \text{ ve } \gamma^{n-1}f \in C[a,b], \gamma = t^{1-\rho}\,\frac{d}{dt}\right\}$ aralığında ki fonksiyonlar için, α mertebeli sol ve sağ Katugampola Caputo kesirli türevi $\Re(\alpha) > 0$ için sırasıyla (Jarad ve ark., 2017) 'de olduğu gibi

$$\begin{aligned} {}_{a}^{C}D^{\alpha,\rho}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\left(\frac{t^{\rho}-u^{\rho}}{\rho}\right)^{n-\alpha-1}\frac{(\gamma^{n}f)(u)du}{u^{1-\rho}} \\ &= {}_{a}I^{n-\alpha,\rho}(\gamma^{n}f)(t) \end{aligned} \tag{2.127}$$

ve

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{b}^{\alpha,\rho}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t}^{b}\left(\frac{u^{\rho}-t^{\rho}}{\rho}\right)^{n-\alpha-1}\frac{(-1)^{n}(\gamma^{n}f)(u)du}{u^{1-\rho}} \\ &= I_{b}^{n-\alpha,\rho}((-1)^{n}\gamma^{n}f)(t) \end{aligned} \tag{2.128}$$

şeklindedir.

Görülmektedir ki eğer (2.127) denkleminde $\rho = 1$ alınırsa bu ifade (2.57) denklemindeki sol Caputo kesirli türevine döner ve aynı zamanda (2.127) denkleminde $\rho \to 0$ için limit alındığında (2.93)'deki Caputo–Hadamard kesirli türevine döner. Benzer ilişki (2.128) ve (2.58), (2.128) ve (2.95) ifadeleri arasında da vardır.

3. CAPUTO – KATUGAMPOLA ÇERÇEVESİNDE KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIK VE TEKLİĞİ

Bu bölümde sürekli türevlenebilir fonksiyonlar üzerinde soldan Caputo - Katugampola kesirli türevi aracılığıyla kesirli Cauchy problemleri çalışıldı ve bu problemlerin varlık ve tekliği ispatlandı. Bunu göstermek için aşağıdaki Cauchy Problemi'ni göz önüne alalım:

$$({}_a^C D^{\alpha,\rho} x)(t) = h[t, x(t), ({}_\alpha^C D^{\alpha_1,\rho} x)(t), \dots, ({}_\alpha^C D^{\alpha_m,\rho} x)(t)], \tag{3.1}$$

bu denklem aşağıdaki başlangıç koşullarına bağlıdır

$$(\gamma^k x)(a) = d_k, \qquad d_k \in \mathbb{R}\ (k = 0,1, \dots, n-1), \tag{3.2}$$

Burada $\rho \in \mathbb{R}^+$, $n = [\alpha] + 1$, $\alpha_j \in (j-1, j]$, $j = 1,2, \dots, m < n$; $\alpha_0 = 0$, $\gamma = t^{1-\rho}\frac{d}{dt}$ olmak üzere ve ${}_\alpha^C D^{\alpha_j,\rho}$, α_j mertebeden, genelleştirilmiş Caputo kesirli türev operatörünü belirtmektedir.

Ana çalışmanın bir parçası olarak, Cauchy problemlerine karşılık gelen ikinci tür lineer olmayan Volterra integral denklemleri incelendi ve daha sonra Banach sabit nokta teoremi uygulandı. Bu uygulamalara başlamadan önce bu çalışma için gerekli olan tanımlar, lemmalar ve bazı notasyonlar verelim. Daha sonra varlık ve tekliği incelenen Cauchy problemini sunalım (Gambo ve ark., 2018).

3.1. Yardımcı Sonuçlar

$C^n([a,b], \mathbb{C})$; $[a,b] \to \mathbb{C}$'ye, tüm sürekli türevlenebilir fonksiyonların banach uzayı olsun. $C_\gamma^n[a,b]$ uzayını hatırlayalım, ve bir f fonksiyonu için $C_{\epsilon,\rho}[a,b]$, $C_{\gamma,\epsilon}^n[a,b]$ ve $C_\gamma^{\alpha,r}[a,b]$ ağırlıklı uzaylarını tanımlayalım. Bunların ifadesi $\rho \in \mathbb{R}^+$, $0 \le \Re(\epsilon) < 1$ ve $n-1 < \Re(\alpha) \le n$ için

$$C_\gamma^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{C}, \gamma^n f \in C[a,b]\} \tag{3.3}$$

$$C_{\epsilon,\rho}[a,b] = \left\{f : \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\epsilon f(x) \in C[a,b]\right\}; \quad C_{0,\rho}[a,b] = C[a,b] \quad \forall\ \rho \neq 0 \tag{3.4}$$

şeklindedir ve burada f fonksiyonu

$$\|f\|_{C_{\epsilon,\rho}} = \left\|\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\epsilon f\right\|_C = \max_{t \in [a,b]} \left|\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\epsilon f)\right| \tag{3.5}$$

normuna sahiptir. Ayrıca

$$C_{\epsilon,\rho}[a,b] = \left\{f: \left(log\frac{x}{a}\right) f(x) \in C[a,b]\right\}; \qquad C_{0,\rho}[a,b] = C[a,b] \quad \forall\, \rho \neq 0 \tag{3.6}$$

tanımına göre f fonksiyonu

$$\|f\|_{C_{\epsilon,\rho}} = \|f\|_{C_{\epsilon,log}} = \left\|\left(log\frac{x}{a}\right)^\epsilon f\right\|_C = \max_{x \in [a,b]} \left|\left(log\frac{x}{a}\right)^\epsilon f\right| \tag{3.7}$$

normuna sahiptir.

$C_{\gamma,\epsilon}^n[a,b]$ uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$C_{\gamma,\epsilon}^n[a,b] = \left\{f: \gamma^{n-1} f \in C[a,b] \; ve \; \gamma^n f \in C_{\epsilon,\rho}[a,b], \rho > 0\right\} \tag{3.8}$$

ve aşağıdaki norma sahiptir.

$$\begin{aligned} &\|f\|_{C_{\gamma,\epsilon}^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma^n f\|_C + \|\gamma^n f\|_{C_{\epsilon,\rho}} \\ &(\epsilon = 0 \Rightarrow) \|f\|_{C_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in [a,b]} |\gamma^n f(x)|, \quad \rho > 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

$0 \leq \epsilon < 1, \; \epsilon \leq \alpha$ için, $C_\gamma^{\alpha,r}[a,b]$ aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$\begin{aligned} &C_{\gamma,\epsilon}^{\alpha,r}[a,b] = \left\{f \in C_\gamma^r[a,b]: ({}_a^C D^{\alpha,\rho} f) \in C_{\epsilon,\rho}[a,b], r \in \mathbb{N}\right\}, \\ &C_\gamma^{r,r}[a,b] = C_{\gamma,\epsilon}^r[a,b]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Burada $C_{\gamma,\epsilon}^{\alpha,0}[a,b] = C_{\gamma,\epsilon}^{\alpha}[a,b]$ ve $C_{0,\rho}[a,b] = C_{\gamma}^{0}[a,b] = C[a,b]$ olmaktadır.

Genelleştirilmiş kesirli integraller ve genelleştirilmiş kesirli türevler aşağıdaki yarıgrup (semigroup) özelliklerini sağlar (Gambo ve ark., 2018).

Lemma 3.1: (Katugampola, 2011)

$[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için

$$\left({}_aI^{\alpha.\rho}\left({}_aI^{\beta.\rho}f\right)\right)(t) = \left({}_aI^{\alpha+\beta,\rho}f\right)(t), \quad \Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0 \tag{3.11}$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 3.2: (Jarad ve ark., 2017)

$f \in X_c^{\rho}(a,b)$ fonksiyonu için $\rho \geq c$ olmak üzere

$$\left({}_aD^{\alpha.\rho}\left({}_aI^{\beta.\rho}f\right)\right)(t) = \left({}_aI^{\alpha-\beta,\rho}f\right)(t), \quad \beta > \alpha > 0, \tag{3.12}$$

eşitliği $[a,b]$ aralığı üzerinde hemen hemen her yerde sağlanır.

Burada $\alpha = \beta$ olduğunda, hemen hemen her yerde $\left({}_aD^{\alpha.\rho}\left({}_aI^{\alpha.\rho}f\right)\right)(t) = f(t)$ olur.

Lemma 3.3: (Jarad ve ark., 2017)

$\Re(\alpha) > 0, n = [\Re(\alpha)] + 1$, ve $\Re(\beta) > 0$ olsun, o zaman

$${}_a^cD^{\alpha.\rho}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\beta-\alpha-1}, \Re(\beta) > n \tag{3.13}$$

olur.

Burada $k = 0,1,\ldots,n-1$ için,

$${}_a^cD^{\alpha.\rho}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{k} = 0 \tag{3.14}$$

olmaktadır.

Lemma 3.4: (Jarad ve ark., 2017)

$\alpha \in \mathbb{C}, n = [\Re(\alpha)] + 1, f \in \{AC_\gamma^n[a,b]$ veya $C_\gamma^n[a,b]\}$ olsun, o zaman

$$\left({}_aI^{\alpha.\rho}({}_a^CD^{\alpha.\rho}f)\right)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma^k f)(a)}{k!}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k \tag{3.15}$$

olur.

Lemma 3.5: (Jarad ve ark., 2017)

$\rho > 0$ olsun. $C_\gamma^n[a,b]$ uzayı sadece ve sadece aşağıdaki forma sahip f fonksiyonunu içermektedir,

$$f(t) = \frac{a}{(n-1)!}\int_a^t \left(\frac{t^\rho - u^\rho}{\rho}\right)^{n-1} \frac{(\gamma^n f)(u)}{u^{1-\rho}} du + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma^k f)(a)}{k!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k. \tag{3.16}$$

Lemma 3.6: (Adjabi ve ark., 2017)

$0 < a < b < \infty,\ \alpha > 0,$ ve $0 \le \epsilon < 1$ olsun.

a. Eğer $0 < \alpha < \epsilon$ olursa, bu halde ${}_aI^{\alpha,\rho}$ integrali $C_{\epsilon,\rho}[a,b],\ C_{\epsilon-\alpha,\rho}[a,b]$ aralığında sınırlıdır:

$$\left\| {}_aI^{\alpha,\rho} f\right\|_{C_{\epsilon-\alpha,\rho}} \le \left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\alpha \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1+\alpha-\epsilon)} \|f\|_{C_{\epsilon,\rho}}; \tag{3.17}$$

b. Eğer $\alpha \ge \epsilon$ olursa, o zaman ${}_aI^{\alpha,\rho}$ integrali $C_{\epsilon,\rho}[a,b], C[a,b]$ aralığında sınırlıdır

$$\left\| {}_aI^{\alpha,\rho} f\right\|_C \le \left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-\epsilon} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1+\alpha-\epsilon)} \|f\|_{C_{\epsilon,\rho}}; \tag{3.18}$$

c. ${}_aI^{\alpha,\rho}$ kesirli integral operatörü, $C[a,b]$ aralığından $C[a,b]$ aralığına dönüşüm gösterir ve

$$\left\| {}_aI^{\alpha,\rho} f \right\|_C \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha \|f\|_C. \tag{3.19}$$

3.2. Cauchy Probleminin Çözümünün Varlık ve Tekliği

Şimdi ise Caputo - Katugambola kesirli türevi ile lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem için $C_\gamma^{\alpha,r}[a,b]$ uzayında (3.2) koşulu altındaki (3.1) Cauchy probleminin çözümlerinin varlık ve tekliğini sunacağız (Gambo ve ark., 2018).

$h[t, x(t), ({}_a^C D^{\alpha_1 \cdot \rho} x)(t), \ldots, ({}_a^C D^{\alpha_m \cdot \rho} x)(t)\,]$ ifadesini daha basit olması için $h[t, \psi(t,x)]$ ile gösterelim.

(3.1)-(3.2) Cauchy problemine karşılık gelen Volterra tip integral denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz

$$x(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d_j}{j!} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^j + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^x \left(\frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} h[\tau, \psi(\tau,x)] \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} dt\,, t > a. \tag{3.20}$$

Teorem 3.1. (Gambo ve ark., 2018)

$\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$, ve $\alpha_j \in \mathbb{R} (j = 0, \ldots, m)$ olsun, öyle ki

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m < n - 1. \tag{3.21}$$

$G \in \mathbb{R}^{m+1}$ açık alt kümelerini belirtsin ve $x, x_1, \ldots, x_m \in C_{\epsilon,\rho}[a,b]$ için $h[t, x, x_1, \ldots, x_m] \in C_{\epsilon,\rho}[a,b]$ olmak üzere $h: (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun, ayrıca (2.11) sağlansın.

a. Eğer $x \in C_\gamma^{\alpha,n-1}[a,b]$ olursa, ancak ve ancak x, (3.20) denklemini sağlarsa, o zaman x, (3.1) - (3.2) arasındaki ilişkileri sağlar.
b. Eğer $0 < \alpha < 1$ olursa, bu halde $x \in C_\gamma^\alpha[a,b]$ aşağıdaki bağıntıyı sağlar

$$({}_a^C D^{\alpha \cdot \rho} x)(t) = h[t, \psi(t,x)], \quad x(a) = d_0, \quad d_0 \in \mathbb{R} \tag{3.22}$$

ancak ve ancak x aşağıdaki denklemi sağlarsa

$$x(t) = d_0 + \left({}_aI^{\alpha,\rho} h[\tau, \psi(\tau, x)]\right)(x), \quad t > a. \tag{3.23}$$

İspat 3.1.

$\alpha \in (n-1, n)$ olsun ve varsayalım ki $x \in C_\gamma^{n-1}[a, b]$ için (3.1) ve (3.2) denklemlerini sağlasın. (Jarad ve ark., 2017) 'deki Tanım 3.1 'e göre

$$({}_a^C D^{\alpha.\rho} x)(t) = {}_aD^{\alpha.\rho}\left[x(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma^k x)(a)}{k!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k\right](t) \tag{3.24}$$

şeklindedir. O zaman $({}_a^C D^{\alpha.\rho} x)(t) \in C_{\epsilon,\rho}[a, b]$'ye sahibiz, bu da

$$\gamma^n \, {}_aI^{n-\alpha.\rho}\left[x(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma^k x)(a)}{k!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k\right](t) \in C_{\epsilon,\rho}[a, b] \tag{3.25}$$

anlamına gelir.

Sonra (3.1),(3.2) ve Lemma 3.4.'ü kullanarak,

$$\begin{aligned} x(t) &= \left({}_aI^{\alpha.\rho}({}_a^C D^{\alpha.\rho} x)\right)(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma^k x)(a)}{k!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k \\ &= {}_aI^{\alpha,\rho} h[\tau, \psi(\tau, x)](t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k}{k!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k, \quad t > a \end{aligned} \tag{3.26}$$

elde ederiz.

Bunun da anlamı şudur ki $x \in C_\gamma^{n-1}[a, b]$, (3.20) denklemini sağlar.

Yeterliliği kanıtlamak için, $x \in C_\gamma^{n-1}[a, b]$ için (3.20) denkleminin sağlandığını kullanalım. O zaman

$$ {}_aI^{\alpha,\rho}h[\tau,\psi(\tau,x)](t) = x(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d_j}{j!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^j. \tag{3.27} $$

h için koşulları göz önünde bulundurarak, yukarıdaki bağıntının her iki tarafının genelleştirilmiş kesirli türevini alırsak

$$ {}_aD^{\alpha,\rho}\ {}_aI^{\alpha,\rho}h[\tau,\psi(\tau,x)](t) = {}_aD^{\alpha,\rho}\left[x(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d_j}{j!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^j\right] = \left({}_a^cD^{\alpha,\rho}x\right)(t), \tag{3.28} $$

bağıntısını elde ederiz, burada (Jarad ve ark., 2017) 'deki 3.1 tanımını kullandık. Böylece, $x \in C_\gamma^{n-1}[a,b]$, (3.1) denklemini sağlar.

Diğer bir taraftan da, (3.20) 'nin her iki tarafı için $\gamma^k, k = 0,1,\dots,n-1$, uygulanarak

$$ \begin{aligned} \gamma^k x(t) &= \sum_{j=k}^{n-1} \frac{d_j}{(j-k)!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{j-k} \gamma^k\ {}_aI^{\alpha,\rho}h[\tau,\psi(\tau,x)](t), \quad t > a \\ &= \sum_{j=k}^{n-1} \frac{d_j}{(j-k)!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{j-k} + {}_aD^{\alpha,\rho}h[\tau,\psi(\tau,x)](t), \quad t > a \end{aligned} \tag{3.29} $$

elde edilir.

Kesirli türev uç noktada sıfır olduğundan, yani $\left({}_aD^{\alpha,\rho}f\right)(a) = 0$, o zaman $\tau \to a$ alırsak aşağıdaki sonucu

$$ (\gamma^k x)(a) = d_k, \qquad k = 0,1,\dots,n-1 \tag{3.30} $$

elde ediliriz.

Böylece, eğer x, (3.20) denklemini sağlarsa, o zaman (3.2)'deki başlangıç koşulunu da sağlar. Dolayısıyla $x \in C_\gamma^{n-1}[a,b]$, (3.1) - (3.2) Cauchy problemini sağlar.

Teoremin ikinci kısmı ise benzer şekilde ispatlanabilir. Unutmamalıdır ki $0 < \alpha < 1$ arasında olduğu sürece, $n = 1$ anlamına gelir, ve böylece aşağıdaki terim

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma^k x)(a)}{k!} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k \tag{3.31}$$

$x(a)$'ya eşit olur.

Teorem 3.2. (Gambo ve ark., 2018)

$\alpha \in \mathbb{R}, n = [\alpha] + 1, 0 \leq \epsilon < 1$ olsun öyle ki $\epsilon \leq \alpha$ ve $\alpha_j > 0,\ j = 1, \ldots, m$ aldığımızda (3.5) formülünü sağlasın. Varsayalım ki G, $\mathbb{R}^{m+1}$'de bir açık küme olsun ve $h: (a, b] \times G \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun öyle ki $h[t, x, x_1, \ldots, x_m] \in C_{\epsilon,\rho}[a, b]$ ve Lipschitz koşulu (2.12)'yi sağlasın.

a. Eğer $n - 1 < \alpha < n$ olursa, o zaman (2.46)-(2.47)' ye göre problemin $\mathrm{C}_{\gamma,\epsilon}^{\alpha,\mathrm{n}-1}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ uzayında tek bir x çözümü vardır.
b. Eğer $0 < \alpha < 1$ olursa, o zaman (2.47)'ye göre problemin $x(a) = d_0 \in \mathbb{R}$ koşulu ile tek bir $x \in C_{\gamma,\epsilon}^{\alpha}[a, b]$ çözümü vardır.

İspat 3.2.

Teorem 3.1 bize (3.20) denkleminin bir tek $x \in C_{\gamma,\epsilon}^{\alpha,n-1}[a, b]$ çözümünün varlığını kanıtlama yeterliliğini veriyor. Bunun için

<u>İlk adım:</u> Bir tek çözüm $x \in C_\gamma^{n-1}[a, b]$'in varlığını gösteriyoruz.

(a) $t_1 \in [a, b]$ alarak, aşağıdaki koşulları sağlayan tek bir çözüm $x \in C_\gamma^{n-1}[a, t_1]$'in varlığını ispatlarız

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} A_j \left(\frac{t_1^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{Re(\alpha-\alpha_j)-k} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon+\alpha-\alpha_j-k)} < 1, \qquad \epsilon \leq \alpha. \tag{3.32}$$

Sonra (3.20) denklemi için $x \in C_\gamma^{n-1}[a, t_1]$'in tek bir çözüm olduğunu kanıtlamak için Teorem 2.3.'ü kullanırız. (3.20) denklemini, $x(t) = (Tx)(t)$ şeklinde yeniden yazılabilir. Burada

$$(Tx)(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d_j}{j!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^j + \frac{1}{\Gamma(a)}\int_a^t \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} h[\tau, \psi(\tau, x)]\frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \tag{3.33}$$

$x_0(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d_j}{j!}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^j$ ifadesinden anlaşılıyor ki $x_0(t) \in C_\gamma^{n-1}[a, t_1]$ olmaktadır, bu nedenle $x_0(t)$, $C_\gamma^{n-1}[a, t_1]$'deki fonksiyonların sonlu bir toplamı olarak ifade edilebilir. Ayrıca

$$h[\tau, \psi(\tau, x)] \in C_{\epsilon,\rho}[a, b] \implies h[\tau, \psi(\tau, x)] \in C_{\epsilon,\rho}[a, t_1] \tag{3.34}$$

ve (3.18) denklemini kullanarak,

$${}_aI^{\alpha,\rho} h[\tau, \psi(\tau, x)](t) \in C[a, t_1] \quad \text{eğer} \quad \epsilon \le \alpha, \tag{3.35}$$

elde ederiz, burada $\alpha > 0$ ve $0 \le \epsilon < 1$.

$x \in C_\gamma^{n-1}[a, t_1]$ olsun, sonra (3.19) denklemini kullanarak, (3.20)'nin sağ tarafındaki integral teriminin $C_\gamma^{n-1}[a, t_1]$ 'ye ait olduğu görülmektedir. Bu da demektir ki ${}_aI^{\alpha,\rho} h[\tau, \psi(\tau, x)](t) \in C_\gamma^{n-1}[a, t_1]$. Böylece $Tx \in C_\gamma^{n-1}[a, t_1]$ olur ve sonuç olarak T'nin $C_\gamma^{n-1}[a, t_1]$ üzerinde sürekli olduğunu ispatlamış oluruz.

Daha sonra, verilen $x_1, x_2 \in C_\gamma^{n-1}[a, t_1]$ için

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]} \le u\|x_1 - x_2\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]} \tag{3.36}$$

eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayarak T'nin bir daralma olduğunu göstereceğiz, öyle ki $\exists\, u > 0$ 'dır.

Lemma 3.1, Lemma 3.4 ve (2.12) denklemini kullanarak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz

$$\left\| \left({}_aI^{\alpha,\rho}\left(h\left[\tau, x_1, {}_a^C D^{\alpha_1,\rho} x_1, \dots, {}_a^C D^{\alpha_m,\rho} x_1\right] - h\left[\tau, x_2, {}_a^C D^{\alpha_1,\rho} x_2, \dots, {}_a^C D^{\alpha_m,\rho} x_2\right]\right)\right) \right\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]}$$

$$\le {}_aI^{\alpha,\rho}\left(\left\| h\left[\tau, x_1, {}_a^C D^{\alpha_1,\rho} x_1, \dots, {}_a^C D^{\alpha_m,\rho} x_1\right] - h\left[\tau, x_2, {}_a^C D^{\alpha_1,\rho} x_2, \dots, {}_a^C D^{\alpha_m,\rho} x_2\right] \right\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]} \right)$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{m} A_j \left\| \left({}_a I^{\alpha-\alpha_j,\rho} \right) {}_a I^{\alpha_j,\rho} \left({}_a^C D^{\alpha_j,\rho} \right)(x_1 - x_2) \right\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]} \right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{m} A_j \, {}_a I^{\alpha-\alpha_j,\rho} \left\| {}_a I^{\alpha_j,\rho} \left({}_a^C D^{\alpha_j,\rho} \right)(x_1 - x_2) \right\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]} \right)$$

$$= \left[\left(\sum_{j=0}^{m} A_j \, {}_a I^{\alpha-\alpha_j,\rho} \left\| (x_1 - x_2) \right\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]} \right)(\tau) - \sum_{k_j=0}^{n_j-1} \frac{\gamma^{k_j}(x_1 - x_2)(a)}{k_j!} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^{k_j} \right].$$

Şimdi, $x_1, x_2 \in C_\gamma^{n-1}[a,t_1]$ ifadesinden anlaşılır ki $\gamma^{k_j} x_1(a) = \gamma^{k_j} x_2(a)$ olmaktadır ve bundan dolayı

$$\left\| \left({}_a I^{\alpha,\rho} \left(h\left[\tau, x_1, {}_a^C D^{\alpha_1,\rho} x_1, \ldots, {}_a^C D^{\alpha_m,\rho} x_1\right] - h\left[\tau, x_2, {}_a^C D^{\alpha_1,\rho} x_2, \ldots, {}_a^C D^{\alpha_m,\rho} x_2\right] \right) \right) \right\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m} A_j \left({}_a I^{\alpha-\alpha_j,\rho} \left\| (x_1 - x_2) \right\| \right) \tag{3.37}$$

veya

$$\left\| {}_a I^{\alpha,\rho} (h[\tau, \psi(\tau, x_1)] - h[\tau, \psi(\tau, x_2)])(t) \right\| \leq \sum_{j=0}^{m} A_j \, {}_a I^{\alpha-\alpha_j,\rho} \left\| (x_1 - x_2) \right\|(t) \tag{3.38}$$

olmaktadır.

Daha sonra, (3.38) denklemi ve Lemma 3.6 'nin ikinci bölümüne göre,

$$\left\| {}_a I^{\alpha,\rho} (h[\tau, \psi(\tau, x_1)] - h[\tau, \psi(\tau, x_2)])(t) \right\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]}$$

$$\leq \left\| \sum_{k=0}^{n-1} {}_a I^{\alpha-k,\rho} (h[\tau, \psi(\tau, x_1)] - h[\tau, \psi(\tau, x_2)])(t) \right\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} A_j \left(\frac{t_1^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^{Re(\alpha-\alpha_j)-k} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma\left(1 - \epsilon + \alpha - \alpha_j - k\right)} \left\| x_1 - x_2 \right\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]} \tag{3.39}$$

elde ederiz.

Böylece anlaşılır ki $\forall\, x_1, x_2 \in C_\gamma^{n-1}[a,t_1]$ için

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]} \leq u\|x_1 - x_2\|_{C_\gamma^{n-1}[a,t_1]} \tag{3.40}$$

olur.

Bu bize, T fonksiyonunun iterasyonlarının bir limiti olarak açıkça tanımlanan, $x_f^* \in C_\gamma^{n-1}[a,t_1]$ sabit noktasının var ve tek olduğunu ifade ediyor. Yani,

$$\lim_{\rho\to\infty}\left\|x_p(t) - x^*(t)\right\|_{C_\gamma^{n-1}[a,b]} = 0, \tag{3.41}$$

burada

$$x_p(t) = T^p x_{f_i}^*, \qquad x_{f_i}^*(t) = x_f(t), \qquad x^*(t) = x_i^*(t), \qquad i = 0,1,\dots,M, \tag{3.42}$$

ve

$$x_i^*(t_{i+1}) = x_{i+1}^*(t_{i+1}), \qquad [a,b] = \bigcup [t_i + t_{i+1}], \qquad a = t_0 < \cdots < t_m. \tag{3.43}$$

<u>İkinci adım:</u> İspati tamamlamak için $C_{\gamma,\epsilon}^{n-1}[a,b]$ uzayına ait $x^*(t)$' nin tek bir çözüm olduğunu kanıtlamak yeterlidir. O zaman $({}_a^C D^{\alpha.\rho}x)(t) \in C_{\epsilon,\rho}[a,b]$ olduğunu göstermek yeterli olur. (3.38) denkleminden,

$$\begin{aligned}
&\left\|\left({}_a^C D^{\alpha.\rho}x_p\right) - \left({}_a^C D^{\alpha.\rho}x^*\right)\right\|_{C_{\epsilon,\rho}[a,b]} = \left\|h\left[t,\psi\left(t,x_p\right)\right] - h[t,\psi(t,x^*)]\right\|_{C_{\epsilon,\rho}[a,b]} \\
&\leq \sum_{j=0}^{m} A_j \left\|{}_a^C D^{\alpha.\rho}\left(x_p - x^*\right)\right\|_{C_{\epsilon,\rho}[a,b]} \\
&\leq \sum_{j=0}^{m} A_j \left\| {}_aI^{n-1-\alpha_j.\rho}\gamma^{n-1}\left(x_p - x^*\right)\right\|_{C_{\epsilon,\rho}[a,b]} \\
&\leq \sum_{j=0}^{m} A_j \left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\epsilon} \left\| {}_aI^{n-1-\alpha_j.\rho}\gamma^{n-1}\left(x_p - x^*\right)\right\|_{C_{\epsilon,\rho}[a,b]}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m} A_j \frac{\left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\epsilon}{\Gamma(n-\alpha_j)} \left\|\gamma^{n-1}(x_p - x^*)\right\|_{C_{\epsilon,\rho}[a,b]}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m} A_j \frac{\left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\epsilon}{\Gamma(n-\alpha_j)} \left\|(x_p - x^*)\right\|_{C_{\epsilon,\rho}[a,b]} \tag{3.45}$$

olur.

Yukarıdaki eşitsizlikte $p \to \infty$ için limiti alındığında, eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yakınsar, yani aşağıdaki sonuç elde edilir

$$\lim_{p\to\infty} \left\|\left({}_a^C D^{\alpha.\rho} x_p\right) - \left({}_a^C D^{\alpha.\rho} x^*\right)\right\|_{C_{\epsilon,\rho}[a,b]} = 0. \tag{3.46}$$

Böylece (3.20) denklemi tek bir $x^* \in C_\gamma^{\alpha,n-1}[a,b]$ çözümüne sahiptir.

(b) Aynı şekilde teoremin ikinci kısmı ispatlanabilir.

Sonuç 3.3. (Gambo ve ark., 2018)

$\epsilon = 0$ olduğunda ve Teorem 3.2' nin varsayımlarıyla, (3.1)-(3.2) probleminin tek bir $x^* \in C_\gamma^{n-1}[a,b]$ çözümü vardır.

İspat 3.3.

Sonuç 3.3. 'ün ispatı teorem 3.2' nin ispatına benzer şekildedir. Burada

$$\left\| {}_a I^{\alpha,\rho}(h[\tau,\psi(\tau,x_1)] - h[\tau,\psi(\tau,x_2)])(t)\right\|_{C[t_i,t_{i+1}]} \tag{3.47}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} A_j \frac{\left(\frac{t_{i+1}^\rho - t_i^\rho}{\rho}\right)^{(\alpha-\alpha_j)-k}}{\Gamma(\alpha-\alpha_j-k+1)} \times \|x_1(t) - x_2(t)\|_{C[t_i,t_{i+1}]},$$

$i = 0,1,\dots,M$ ile $t_0 = a, t_m = b$ ve

$$\left\|\left({}_a^C D^{\alpha.\rho} x_p\right) - \left({}_a^C D^{\alpha.\rho} x^*\right)\right\|_{C_{\epsilon,\rho}[a,b]} \tag{3.48}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m} A_j \frac{\left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\epsilon}{\Gamma(n-\alpha_j)} \times \left\| x_p - x^* \right\|_{C^{n-1}[a,b]}. \tag{3.49}$$

Şeklindedir.

Sonuç 3.4. (Gambo ve ark., 2018)

$\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ ve $0 \leq \epsilon < 1$ olsun. Öyle ki $\epsilon \leq a$ 'dır. Sıfırdan farklı pozitif tamsayı olan m değeri için, eğer $f(t) \in C_{\epsilon,\rho}[a,b]$, $d_j(t) \in C[a,b]$, ve $\alpha_j > 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ denklem (3.21) 'i sağlıyorsa, o zaman aşağıdaki α mertebeli lineer kesirli denklem için (3.2) başlangıç koşullarına sahip Cauchy probleminin tek bir $x(t) \in C_\gamma^{\alpha,n-1}[a,b]$ çözümü vardır:

$$\left({}_a^C D^{\alpha.\rho} x_p\right)(t) + \sum_{j=1}^{m} d_j(t)({}_a^C D^{\alpha_j.\rho} x)(t) + d_0(t)\, x(t) = f(t), \quad t > a \tag{3.50}$$

İspat 3.4. İspatımızı kolay bir şekilde Teorem 3.2. den yapabiliriz.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ CAPUTO KESİRLİ TÜREV İLE GECİKMELİ KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ULAM KARARLILIK

Veri bağlılığının özel bir tipi olarak düşünülen Ulam kararlılığı kavramı, Ulam tarafından başlatıldı (Ulam, 1940; 1960). Bu alanın gelişmesinde Hyers, Aoki, Rassias ve Obloza katkıda bulundu (Hyers, 1941; Oaki, 1950; Rassias, 1978; Oblaza, 1993; Rassias, 2003). Benzer şekilde kesirli diferansiyel denklemlerin sınıflarının çeşitliliğinin Ulam kararlılığı üzerine yapılan birkaç çalışmada vardır (Benchohra ve Lazreg, 2015; 2017; Wang ve Zhou, 2011).

Bu bölümde amacımız aşağıdaki forma sahip problemlerin çözümlerinin Ulam kararlılığını çalışmaktır,

$$ {}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha}x(t) = f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big), \qquad t \in [t_0, t_1], \tag{4.1} $$

$$ x(t) = \phi(t), \quad t_0 - \tau \le t \le t_0, \qquad \tau > 0. \tag{4.2} $$

Burada ${}_{t_0}^{c}D_g^{\alpha}$; α mertebeli x' e göre Caputo kesirli türevidir, $0 < \alpha \le 1$ iken g fonksiyonu süreklidir öyle ki $g'(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$, $\mathrm{C}([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ve ${}_{t_0}^{c}D_g^{\alpha}x(t) \in \mathrm{C}[t_0, t_1]$ dir.

Şimdi bazı tanımları ve özellikleri hatırlayalım. $\alpha \in \mathbb{C}$; $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ için $x(t)$ fonksiyonun α mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali, sürekli türevlenebilir ve artan $g(t)$ fonksiyonu aracılığıyla aşağıdaki gibi ifade edilir (Samko ve ark., 1993; Kilbas ve ark., 2006)

$$ \big({}_{t_0}I_g^{\alpha}\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}\big(g(t) - g(s)\big)^{\alpha-1}x(s)\acute{g}(s)ds. \tag{4.3} $$

$\alpha \in \mathbb{C}$; $\mathrm{Re}(\alpha) \ge 0$, $-\infty \le t_0 < t_1 \le \infty$ için $x(t)$ fonksiyonun α mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi sürekli türevlenebilir ve artan $g(t)$ fonksiyonu aracılığıyla aşağıdaki gibi ifade edilir (Samko ve ark., 1993; Kilbas ve ark., 2006)

$$ {}_{t_0}D_g^{\alpha}x(t) = \left(\frac{1}{\acute{g}(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \left({}_{t_0}I_g^{n-\alpha}x\right)(t) $$

$$ = \frac{\left(\frac{1}{\acute{g}(t)}\frac{d}{dt}\right)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} x(s)\acute{g}(s)ds, \tag{4.4} $$

burada $n=[\alpha]+1$'dir.

Özellik 4.1. (Ameen ve ark., 2018)

$Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$ için,

$$ {}_{t_0}I_g^{\alpha}\big(g(s)-g(t_0)\big)^{\beta-1}(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\big(g(t)-g(t_0)\big)^{\beta+\alpha-1} \tag{4.5} $$

$Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$ için,

$$ {}_{t_0}D_g^{\alpha}\big(g(s)-g(t_0)\big)^{\beta-1}(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\big(g(t)-g(t_0)\big)^{\beta-\alpha-1}. \tag{4.6} $$

Re(α) ≥ 0 için $x(t)$ fonksiyonun α mertebeli Caputo kesirli türevi, $g(t)$ fonksiyonu ile (Almeida, 2016) aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$ {}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha}x(t) = {}_{t_0}I_g^{n-\alpha}\left(\frac{1}{\acute{g}(t)}\frac{d}{dt}\right)^n x(t) $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \big(g(t)-g(s)\big)^{n-\alpha-1} \left[\left(\frac{1}{\acute{g}(s)}\frac{d}{ds}\right)^n x(s)\right] \acute{g}(s)ds, \tag{4.7} $$

burada $n=[\alpha]+1$, $g \in \mathrm{C}^n[t_0,t_1]$, $[t_0,t_1]$ aralığında $g'(t) > 0$ ve $x \in \mathrm{C}^{n-1}[t_0,t_1]$.

Özellik 4.2. (Ameen ve ark., 2018)

$Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > n$ için,

$$ {}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha}\big(g(s) - g(t_0)\big)^{\beta-1}(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\big(g(t) - g(t_0)\big)^{\beta-\alpha-1}. \tag{4.8} $$

$k = 0,1, \dots, n-1$ için,

$$ {}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha}\big(g(s) - g(t_0)\big)^{\beta-1}(t) = 0. \tag{4.9} $$

Uyarı 4.1. (Ameen ve ark., 2018)

Belirtmeliyiz ki; eğer $g(t) = t$ olursa, o zaman (4.3), (4.4) ve (4.5) denklemleri sırasıyla klasik soldan Riemann-Liouville kesirli integrali, Riemann-Liouville kesirli türevi ve Caputo kesirli türevi olurlar (Samko ve ark., 1993; Kilbas ve ark., 2006). Eğer $g(t) = \ln t$ olursa, o zaman (4.3), (4.4) ve (4.7) denklemleri sırasıyla soldan Hadamard kesirli integrali, Hadamard kesirli türevi ve Caputo-Hadamard kesirli türevi olurlar (Wang ve Zhou, 2011; Jarad ve ark., 2012; Gambo ve ark., 2014; Adjabi ve ark., 2016). Eğer $g(t) = \frac{t^{\rho}}{\rho}$ olursa (4.3), (4.4) ve (4.7) deki kesirli operatörler (Katugampola,2011; 2014; Jarad ve ark., 2017) kaynaklarında olanlarla çakışır ve eğer $g(t) = \frac{(t-a)^{\rho}}{\rho}$ alınırsa (4.3), (4.4) ve (4.7) deki kesirli operatörler (Jarad, Uğurlu ve ark. 2017) de bulunanlarla çakışır.

Bir başka fonksiyon aracılığıyla kesirli integraller ve kesirli türevlerin kombinasyonları aşağıdaki teorem ile verilir,

Teorem 4.1. (Ameen ve ark., 2018)

$\alpha > 0$ ve $x \in C[t_0, t_1]$ için

$${}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha}\,{}_{t_0}I_g^{\alpha}x(t) = x(t). \tag{4.10}$$

$\alpha > 0$ ve $x \in C^n[t_0, t_1]$ için

$${}_{t_0}I_g^{\alpha}\,{}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha}x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{1}{\acute{g}(t)}\frac{d}{dt}\right)^k x\right](t_0)\big(g(t) - g(t_0)\big)^k. \tag{4.11}$$

Aşağıda, (2.28) kesirli integralinin çerçevesinde, bu bölümün geri kalan kısmında önemli bir rolü olan Gronwall eşitsizliğini sunuyoruz (Vanterler da Sousa ve Capelas de Oliveira, 2017).

Teorem 4.2. (Ameen ve ark., 2018)

u ve v integrallenebilir iki fonksiyon olsun ve $[t_0, t_1]$ aralığında w sürekli bir fonksiyon olsun. $g \in \mathrm{C}^1[t_0, t_1]$ alalım öyle ki $\forall t \in [t_0, t_1]$ için $g'(t) > 0$.

Varsayalım ki

- u ve v negatif olmayan fonksiyonlardır,
- w negatif olmayan ve azalmayan fonksiyondur.

Eğer

$$u(t) \le v(t) + w(t)\int_{t_0}^{t} \acute{g}(s)\big(g(t) - g(s)\big)^{\alpha-1}u(s)ds \tag{4.12}$$

ise o zaman $\forall t \in [t_0, t_1]$ için

$$u(t) \le v(t)E_{\alpha}\big(w(t)\Gamma(\alpha)\big(g(t) - g(t_0)\big)^{\alpha}\big), \forall t \in [t_0, t_1] \tag{4.13}$$

olur.

Aşağıda tanımlayacağımız (4.1) denkleminin Ulam kararlılıklarının tanımları (Rus, 2010)' de ifade edilen tanımlara benzemektedir.

Tanım 4.1. (Ameen ve ark., 2018)

Eğer reel bir sayı c_f varsa (4.1) denklemine Ulam-Hyers kararlıdır denir öyle ki $\forall \epsilon > 0$ için ve her bir $y(t) \in \mathrm{C}([t_0 - \tau, t_1], \mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\left| {}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha} y(t) - f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big) \right| \leq \epsilon, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{4.14}$$

(4.1) denkleminin bir $x(t) \in \mathrm{C}([t_0 - \tau, t_1], \mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ çözümü vardır ve

$$|y(t) - x(t)| \leq c_f \epsilon, \qquad t \in [t_0 - \tau, t_1] \tag{4.15}$$

özelliğini sağlar.

Tanım 4.2. (Ameen ve ark., 2018)

Eğer reel bir sayı c_f varsa (4.1) denklemine $\varphi(t) \in \mathrm{C}[t_0, t_1], \mathbb{R}_+)$ aracılığıyla Ulam-Hyers-Rassias kararlıdır denir öyle ki $\forall \epsilon > 0$ için ve her bir $y(t) \in \mathrm{C}([t_0 - \tau, t_1], \mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\left| {}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha} y(t) - f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big) \right| \leq \epsilon\varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_1]. \tag{4.16}$$

(4.1) denkleminin bir $x(t) \in \mathrm{C}([t_0 - \tau, t_1], \mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ çözümü vardır ve

$$|y(t) - x(t)| \leq c_f \epsilon \varphi(t), \qquad t \in [t_0 - \tau, t_1] \tag{4.17}$$

özelliğini sağlar.

Bu bölümde aşağıdaki alt bölümler çalışıldı. Kısım 4.1. de (4.1)-(4.2) Cauchy probleminin çözümlerinin varlık ve tekliği tartışıldı. 4.2.Kısımda , (4.1)'in Ulam – Hyers kararlılığı çalışıldı. 4.3.Kısımda, (4.1)'in Ulam-Hyers-Rassias kararlılığı çalışıldı. 4.4. Kısımda örnekler çözüldü.

4.1. Varlık ve Teklik Sonuçları

Varlık ve teklik teoremini vermeden önce teorem ispatı için önemli olan Lemma' yı yazalım.

Lemma 4.1. (Ameen ve ark., 2018)

$x(t)$, (4.1) - (4.2) problemini sağlar ancak ve ancak $x(t)$ aşağıdaki integral denklemini sağlarsa

$$x(t) = \begin{cases} \emptyset(t) & t \in [t_0 - \tau, t_1] \\ \emptyset(a) + {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big) & t \in [t_0, t_1]. \end{cases} \tag{4.18}$$

İspat 4.1.

(i) Yeterlilik:

Eğer $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ ise , $x(t) = \emptyset(t)$ olduğu açıktır. (4.18) da özdeşliğin her iki tarafına $t \in [t_0, t_1]$ için ${}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha}$'yı uygularsak,

$${}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha} x(t) = {}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha} \emptyset(a) + {}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha}\, {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big) \tag{4.19}$$

ifadesini elde ederiz.

Bu sonuç teorem 4.1 'in ilk savı ve özellik 4.2. kullanılarak elde edilir.

(ii) Gereklilik :

Bir kez daha söyleyelim ki, eğer $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ ise , $x(t) = \phi(t)$ olduğu açıktır. (4.1) denkleminin her iki tarafına $t \in [t_0, t_1]$ için ${}_{t_0}I_g^{\alpha}$ 'yı uygularsak,

$${}_{t_0}I_g^{\alpha}\,{}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha}x(t) = {}_{t_0}I_g^{\alpha}f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big) \tag{4.20}$$

ifadesini elde ediriz.

Bu sonuca teorem 4.1' in ikinci savı kullanılarak ulaşılır.

Şimdi varlık ve teklik teoreminin ifadesini yazabiliriz.

Teorem 4.3. (Ameen ve ark., 2018)

Aşağıdaki özellikler sağlansın,

1. $f \in C([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ve $\emptyset \in C([t_0 - \tau, t_0]$
2. $|f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)| \leq L(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|)$
3. $\frac{2L\left(g(t_1)-g(t_0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$

o zaman (4.1)-(4.2) problemi $\mathrm{C}([t_0 - \tau, t_1], \mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ de tek bir çözüme sahiptir.

İspat 4.3.

Çalışacağımız uzay ; $X = \mathrm{C}([t_0 - \tau, t_1], \mathbb{R})$ şeklinde ve operatör aşağıdaki gibidir

$$Tx(t)=\begin{cases}\emptyset(t) & t\in[t_0-\tau,t_0]\\ \emptyset(a)+{}_{t_0}I_g^{\alpha}f\big(t,x(t),x(t-\tau)\big) & t\in[t_0,t_1].\end{cases} \tag{4.21}$$

$t\in[t_0-\tau,t_0]$ için, eğer $x,y\in \mathrm{C}([t_0-\tau,t_1],\mathbb{R})$ ise $|Tx(t)-Ty(t)|=0$ elde ederiz.

Şimdi ise $t\in[t_0,t_1]$ için,

$$|Tx(t)-Ty(t)|={}_{t_0}I_g^{\alpha}f\big(t,x(t),x(t-\tau)\big)-{}_{t_0}I_g^{\alpha}f\big(t,y(t),y(t-\tau)\big) \tag{4.22}$$

$$\leq {}_{t_0}I_g^{\alpha}\big(\big|f\big(t,x(t),x(t-\tau)\big)-f\big(t,y(t),y(t-\tau)\big)\big|\big) \tag{4.23}$$

$$\leq {}_{t_0}I_g^{\alpha}(L|x(t)-y(t)|+L|x(t-\tau)-y(t-\tau)|) \tag{4.24}$$

$$\leq L\left(\max_{t_0-\tau\leq t\leq t_1}|x(t)-y(t)|+\max_{t_0-\tau\leq t\leq t_1}|x(t-\tau)-y(t-\tau)|\right){}_{t_0}I_g^{\alpha}1$$

$$\leq \frac{2L\big(g(t)-g(t_0)\big)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|x(t)-y(t)\|_{C[t_0-\tau,t_1]}$$

$$\leq \frac{2L\big(g(t_1)-g(t_0)\big)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|x(t)-y(t)\|_{C[t_0-\tau,t_1]}$$

$$\leq \|x(t)-y(t)\|_{C[t_0-\tau,t_1]}. \tag{4.25}$$

buluruz.

Sonuç olarak, $\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|$ ve $\frac{2L\big(g(t_1)-g(t_0)\big)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}<1$ için, T operatörü bir daralmadır ve böylece Banach sabit nokta teoremine göre tek bir sabit noktaya sahiptir.

4.2. Ulam –Hyers Kararlılığı

(4.1) denkleminin Ulam-Hyers kararlılığını yazmadan önce aşağıdaki Lemma'yı ifade edelim.

Lemma 4.2. (Ameen ve ark., 2018)

Eğer $y(t) \in \mathrm{C}([t_0 - \tau, t_1], \mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ fonksiyonu (4.14) eşitsizliğinin bir çözümü ise, o zaman $y(t)$

$$\left|y(t) - y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\left(t, y(t), y(t-\tau)\right)\right| \leq \frac{\left(g(t_1) - g(t_0)\right)^{\alpha} \epsilon}{\Gamma(\alpha + 1)} \tag{4.26}$$

ifadesini sağlar.

İspat 4.2.

Açıkça görülüyor ki; $y(t)$ çözümü (4.14) ' ü sağlar ancak ve ancak bir $h(t)$ çözümü varsa, öyle ki $|h(t)| \leq \epsilon$ ve

$${}_{t_0}^{C}I_g^{\alpha} y(t) - f\left(t, y(t), y(t-\tau)\right) = h(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{4.27}$$

(4.27)' nin her iki tarafına (4.3) kesirli integralini uyguladığımızda ve Teorem 4.1.'i kullandığımızda

$$y(t) - y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\left(t, y(t), y(t-\tau)\right) = {}_{t_0}I_g^{\alpha} h(t) \tag{4.28}$$

elde ediliriz.

Böylece;

$$\left|y(t) - y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\left(t, y(t), y(t-\tau)\right)\right| \leq {}_{t_0}I_g^{\alpha} h(t)$$

$$\leq {}_{t_0}I_g^{\alpha}\epsilon = \frac{\big(g(t)-g(t_0)\big)^{\alpha}\epsilon}{\Gamma(\alpha+1)}$$
$$\leq \frac{\big(g(t_1)-g(t_0)\big)^{\alpha}\epsilon}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (4.29)$$

buluruz.

Teorem 4.4. (Ameen ve ark., 2018)

(4.1) denklemi Teorem 4.3' ün hipotezleri altında Ulam-Hyers kararlıdır.

İspat 4.4.

(4.14) eşitsizliğinin bir çözümü $y(t) \in \mathsf{C}([t_0-\tau, t_1], \mathbb{R}) \cap \mathsf{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ olsun ve (4.1) denkleminin tek çözümü $t \in [t_0-\tau, t_0]$ için $x(t) = y(t)$ koşulunu sağlayan $x(t)$ olsun. Yani

$$x(t) = \begin{cases} y(t) & t \in [t_0-\tau, t_0] \\ y(t_0) + {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big) & t \in [t_0, t_1]. \end{cases}, \qquad (4.30)$$

şeklindeki $x(t)$ Teorem 4.3.'ü garanti eder. Burada $t \in [t_0-\tau, t_0]$ için $|x(t)-y(t)| = 0$ olur. $t \in [t_0, t_0+\alpha]$ için bu fark

$$|y(t)-x(t)| = \big|y(t)-y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big)\big| \qquad (4.31)$$
$$= \big|y(t)-y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big) + {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big)$$
$$- {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big)\big|$$
$$\leq \big|y(t)-y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big)\big|$$
$$+ \big|{}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big)\big|$$

$$\leq \left|y(t) - y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big)\right|$$
$$+ \left|{}_{t_0}I_g^{\alpha}\left(f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big) - f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big)\right)\right|$$
$$\leq \left|y(t) - y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big)\right| + L\,{}_{t_0}I_g^{\alpha}(|y(t) - x(t)|)$$

olur. Burada son eşitsizlik $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için $x(t-\tau) - y(t-\tau) = 0$ da geçerlidir.

Şimdi ise Lemma 4.2 ve (4.3) kesirli integralinin tanımını kullanarak,

$$|y(t) - x(t)| \leq \frac{\big(g(t_1) - g(t_0)\big)^{\alpha}\epsilon}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} \acute{g}(s)\big(g(t) - g(s)\big)^{\alpha-1}|y(s) - x(s)|ds, \tag{4.32}$$

buluruz.

Teorem 4.2 de Gronwall eşitsizliğinden yararlanarak

$$|y(t) - x(t)| \leq \frac{\big(g(t_1) - g(t_0)\big)^{\alpha}\epsilon}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha}\big(L\big(g(t) - g(t_0)\big)^{\alpha}\big) \tag{4.33}$$

elde ederiz.

Böylece,

$$|y(t) - x(t)| \leq \left[\frac{\big(g(t_1) - g(t_0)\big)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha}\big(L\big(g(t_0+\tau) - g(t_0)\big)^{\alpha}\big)\right]\epsilon, \tag{4.34}$$

$\forall\, t \in [t_0, t_0 + \tau]$

olur. Eğer $t \in [t_0 + \tau, t_1]$ için yukarıdaki benzer adımları uygularsak bu eşitsizliği

$$|y(t) - x(t)| \leq \frac{\big(g(t_1) - g(t_0)\big)^{\alpha}\epsilon}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} \acute{g}(s)\big(g(t) - g(s)\big)^{\alpha-1}|y(s) - x(s)|ds + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0+\tau}^{t} \acute{g}(s)\big(g(t) - g(s)\big)^{\alpha-1}|y(s-\tau) - x(s-\tau)|ds \tag{4.35}$$

olarak ede ederiz.

Eğer $z(t) = \sup_{u\in[t_0-\tau,t_0]} \big|y(t+u) - x(t+u)\big|$ alırsak, buluruz ki

$$z(t) \leq \frac{\big(g(t_1) - g(t_0)\big)^{\alpha}\epsilon}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} \acute{g}(s)\big(g(t) - g(s)\big)^{\alpha-1}z(s)ds + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0+\tau}^{t} \acute{g}(s)\big(g(t) - g(s)\big)^{\alpha-1}z(s)ds \tag{4.36}$$

$$\leq \frac{\big(g(t_1) - g(t_0)\big)^{\alpha}\epsilon}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} \acute{g}(s)\big(g(t) - g(s)\big)^{\alpha-1}z(s)ds. \tag{4.37}$$

Teorem 4.2. den Gronwall eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki sonucu buluruz

$$z(t) \leq \left[\frac{\big(g(t_1) - g(t_0)\big)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha}\big(2L\big(g(t_0+\tau) - g(t_0)\big)^{\alpha}\big)\right]\epsilon \quad \forall t. \tag{4.38}$$

$|y(t) - x(t)| \leq z(t)$ olduğunda

$$|y(t)-x(t)| \leq \left[\frac{\left(g(t_1)-g(t_0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha}\left(2L\left(g(t_0+\tau)-g(t_0)\right)^{\alpha}\right)\right]\epsilon \quad \forall t. \tag{4.39}$$

olur. Bu da ispatı sonlandırır.

4.3. Ulam-Hyers-Rassias Kararlılığı

Teorem 4.5. (Ameen ve ark., 2018)

Varsayalım ki

1. $f \in C([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ve $\emptyset \in C([t_0-\tau, t_0]$
2. $|f(t,u_1,u_2)-f(t,v_1,v_2)| \leq L(|u_1-v_1|+|u_2-v_2|)$
3. $\frac{2L\left(g(t_1)-g(t_0)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$
4. $\lambda_{\varphi} > 0$ reel sayısı ve $\varphi(t) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu vardır öyle ki ${}_{t_0}I_g^{\alpha}\varphi(t) \leq \lambda_{\varphi}\varphi(t)$

koşulları sağlansın. O zaman (4.1) denklemi φ' ye göre Ulam-Hyers-Rassias kararlıdır.

İspat 4.5.

(4.16) eşitsizliğinin bir çözümü $y(t) \in \mathrm{C}([t_0-\tau, t_1], \mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ olsun. Böylece

$$-\epsilon\varphi(t) \leq {}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha}y(t) - f\left(t, y(t), y(t-\tau)\right) \leq \epsilon\varphi(t) \tag{4.40}$$

olur. Şimdi bu ifadeye (4.3) kesirli integralini uygulayarak

$$-\epsilon\, {}_{t_0}I_g^{\alpha}\varphi(t) \le y(t) - y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big) \le \epsilon\, {}_{t_0}I_g^{\alpha}\varphi(t) \tag{4.41}$$

yazabiliriz. Dördüncü koşulu kullandığımızda

$$-\epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t) \le y(t) - y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big) \le \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t) \tag{4.42}$$

elde ederiz. Bu nedenle

$$\big|y(t) - y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big)\big| \le \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t). \tag{4.43}$$

$x(t)$ ' yi öyle seçelim ki

$$ {}_{t_0}^{C}D_g^{\alpha}x(t) = f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big), \;\; t \in [t_0, t_1], \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{4.44}$$

$$x(t) = y(t), \quad t_0 - \tau \le t \le t_0, \qquad \tau > 0 \tag{4.45}$$

olsun.

Eğer $t \in [t_0 + \tau, t_0]$ olursa $|x(t) - y(t)| = 0$ bulunur. Eğer $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ üzerinde Lemma4.1. 'i uygularsak

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= \big|y(t) - y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big)\big| \\ &= \big|y(t) - y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big) + {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big) \\ &\qquad - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big)\big| \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} &\le \big|y(t) - y(t_0) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big)\big| \\ &\qquad + \big|{}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big) - {}_{t_0}I_g^{\alpha} f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big)\big| \end{aligned}$$

$$\leq \left|y(t)-y(t_0)-{}_{t_0}I_g^{\alpha} f\left(t,y(t),y(t-\tau)\right)\right| + \left|{}_{t_0}I_g^{\alpha}\left(f\left(t,y(t),y(t-\tau)\right)-f\left(t,x(t),x(t-\tau)\right)\right)\right|$$

$$\leq \left|y(t)-y(t_0)-{}_{t_0}I_g^{\alpha} f\left(t,y(t),y(t-\tau)\right)\right| + L\,{}_{t_0}I_g^{\alpha}(|y(t)-x(t)|)$$

$$\leq \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t) + L\,{}_{t_0}I_g^{\alpha}(|y(t)-x(t)|)$$

$$|y(t)-x(t)| \leq \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t)E_{\alpha}\left(L\left(g(t_0+\tau)-g(t_0)\right)^{\alpha}\right) \tag{4.47}$$

yazabiliriz. Burada son eşitsizlik Teorem 4.2.' de Gronwall eşitsizliğinden dolayı sağlanır. Eğer $t \in [t_0+\tau, t_1]$ için yukarıdaki benzer adımları uygularsak bu eşitsizliği aşağıdaki gibi elde ederiz

$$\begin{aligned}|y(t)-x(t)| \leq\ & \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t) \\ & + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} \acute{g}(s)\left(g(t)-g(s)\right)^{\alpha-1}|y(s)-x(s)|ds \\ & + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0+\tau}^{t} \acute{g}(s)\left(g(t)-g(s)\right)^{\alpha-1}|y(s-\tau)-x(s-\tau)|ds.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Tekrar, $z(t)=\sup_{u\in[t_0-\tau,t_0]}\left|y(t+u)-x(t+u)\right|$ alırsak,

$$\begin{aligned}z(t) \leq\ & \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t) \\ & + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} \acute{g}(s)\left(g(t)-g(s)\right)^{\alpha-1}z(s)ds \\ & + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0+\tau}^{t} \acute{g}(s)\left(g(t)-g(s)\right)^{\alpha-1}z(s)ds\end{aligned}$$

$$\leq \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t) + \frac{2L}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} \acute{g}(s)\left(g(t)-g(s)\right)^{\alpha-1}z(s)ds \tag{4.49}$$

bulunur ve Teorem 4.2.' de Gronwall eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki sonucu buluruz

$$z(t) \leq \left[\epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t)E_{\alpha}\left(2L\left(g(t_1)-g(t_0+\tau)\right)^{\alpha}\right)\right]\epsilon \quad \forall t. \tag{4.50}$$

$|y(t)-x(t)| \leq z(t)$ olduğunda

$$|y(t)-x(t)| \leq \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t)E_{\alpha}\left(2L\left(g(t_1)-g(t_0+\tau)\right)^{\alpha}\right) \quad \forall t \tag{4.51}$$

olur. Bu da ispatı sonlandırır.

4.4. Uygulamalar

Örnek 4.1. (Ameen ve ark., 2018)

Aşağıdaki Chauchy problemini ele alalım

$$ {}_{1}^{C}D_{\sqrt{t}}^{\frac{1}{2}}x(t) = \frac{\sqrt{t}\left(\sin\left(x(t)\right)+\cos x(t-1)\right)}{200}, \quad t \in [1,4], \tag{4.52}$$

$$x(t) = 1, \qquad t \in [0,1]. \tag{4.53}$$

Burada $f(t,u,v) = \frac{\sqrt{t}(\sin u+\cos v)}{200}$ yazılabilir ve f süreklidir

$$|f(t,u_2,v_2)-f(t,u_1,v_1)| \leq \frac{1}{200}\sqrt{t}(|\sin u_2-\sin u_1|)+(|\cos v_2-\cos v_1|) \tag{4.54}$$

$$\leq \frac{\sqrt{t}}{200}(|u_2-u_1|+|v_2-v_1|)$$

$$\leq \frac{1}{100}(|u_2-u_1|+|v_2-v_1|). \tag{4.55}$$

Böylece Lipschitz sabiti $L = \frac{1}{100}$ olur. Dahası $\frac{2L(g(t_1)-g(t_0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$ değerininde 1 den küçük kaldığını gösterebiliriz

$$\frac{2L}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{g(t)-g(t_0)}{\rho}\right)^{\alpha} = \frac{1}{50}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\sqrt{\sqrt{t}-1} \tag{4.56}$$

$$\leq \frac{1}{25\sqrt{\pi}} < 1. \tag{4.57}$$

Dolayısıyla Teorem4.4.' e göre (4.52) problemi Ulam-Hyers karalıdır.

Örnek 4.2. (Ameen ve ark., 2018)

$${}_1^{C}D_{t^2}^{\frac{1}{3}}x(t) = \frac{|x(t)| + \left|x\left(t-\frac{1}{2}\right)\right|}{200}, \quad t \in [1,3], \tag{4.58}$$

$$x(t) = t, \qquad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \tag{4.59}$$

Cauchy problemini inceleyelim.

Açıkça görülüyor ki $f(t,u,v) = \frac{|u|+|V|}{200}$ ' dir, f süreklidir ve $L = \frac{1}{200}$ olur. Şimdi ise yukarıdaki örnekte yaptığımız gibi $\frac{2L(g(t_1)-g(t_0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$ olduğunu gösterelim

$$\frac{2L}{\Gamma(\alpha+1)}\left(g(t)-g(t_0)\right)^{\alpha} = \frac{1}{100\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}(t^2-1^2)^{\frac{1}{3}} \tag{4.60}$$

$$\leq \frac{1}{50\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} < 1. \tag{4.61}$$

$\varphi(t) = t^2 - 1$ alalım. O zaman

$$ {}_1I_{t^2}^{\frac{1}{3}}\varphi(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}(t^2-1)^{\frac{1}{3}} \tag{4.62} $$

$$ \leq \frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}(t^2-1)^{\frac{1}{3}}\varphi(t) \tag{4.63} $$

$$ \leq \frac{2}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}\varphi(t). \tag{4.64} $$

olur.

$\lambda_\varphi = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}$ alındığında Teorem 4.5. 'ün tüm koşulları sağlanmış olur. Bu nedenle (4.58) problemi $\varphi(t) = t^2 - 1$ 'e göre Ulam-Hyers-Rassias karalıdır.

5. KESİRLİ OPERATÖRLER İÇİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

5.1. (Sürekli) Kesirli Operatörlerin Laplace Dönüşümü

Lemma 5.1. (Kilbas ve ark., 2006)

$\Re(\alpha) > 0$ olsun ve herhangi bir $b > 0$ için $f \in L_1(a,b)$ olsun. Ayrıca varsayalım ki $A > 0$ ve $p_0 > 0$ sabitleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlansın

$$|f(x)| \leq Ae^{p_0 x} \quad (x > b > 0). \tag{5.1}$$

O zaman

a. Eğer herhangi bir $b > 0$ için $f \in L_1(0,b)$ ise, bu durumda $\Re(p) > p_0$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir

$$(\mathcal{L} I_{0+}^{\alpha} f)(p) = p^{-\alpha}(\mathcal{L}f)(p). \tag{5.2}$$

b. Eğer herhangi bir $b > 0$ için $n = [\Re(\alpha)] + 1$, $y(x) \in AC^n[0,b]$ ise, (5.1) eşitsizliğinden

$$|y(x)| \leq Be^{q_0 x} \quad (x > b > 0) \tag{5.3}$$

elde edilebilir. Buradan $B > 0$ ve $q_0 > 0$ sabitleri için (5.2) eşitliği

$$(\mathcal{L}D_{0+}^{\alpha}y)(p) = p^{\alpha}(\mathcal{L}y)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1}D^{k}(I_{0+}^{n-\alpha}y)(0+) \ (\Re(\alpha) > q_0 \tag{5.4}$$

haline gelir.

Lemma 5.2. (Kilbas ve ark., 2006)

$\alpha > 0, n-1 < \alpha \leq n \ (n \in N)$ olsun öyle ki $y(x) \in C^n(\mathbb{R}^+)$, herhangi bir $b > 0$ için $y^{(n)}(x) \in L_1(0,b)$ 'dir. Varsayalım ki (5.3) ifadesi $y^{(n)}(x)$ için sağlansın, $(\mathcal{L}_y)(p)$ ve $\mathcal{L}[D^n y(t)]$ Laplace dönüşümleri var ve $k = 0,1,\dots,n-1$ için $\lim_{n\to\infty}(D^k y)(x) = 0$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$(\mathcal{L}^C D_{0+}^{\alpha}y)(p) = p^{\alpha}(\mathcal{L}y)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1}(D^k y)(0) \tag{5.5}$$

Özel olarak, eğer $0 < \alpha \leq 1$ ise, o zaman

$$(\mathcal{L}^C D_{0+}^{\alpha}y)(p) = p^{\alpha}(\mathcal{L}y)(p) - p^{\alpha-1}y(0) \tag{5.6}$$

eşitliği elde edilir.

5.2. Genelleştirilmiş Kesirli Operatörler ve Laplace Dönüşümleri

Genelleştirilmiş kesirli operatorler için bilineer Laplace dönüşümünün kullanılmayacağını biliyoruz. Bunun için dönüşümün aşağıdaki şekilde modifiye edilmesi gerekmektedir (Jarad ve ark., 2010).

Tanım 5.1. (Jarad ve ark., 2010)

$f, g: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlar olsun öyle ki g sürekli ve $[a, \infty)$ üzerinde $g'(t) > 0$ olsun. f 'in genelleştirilmiş Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}_g\{f(t)\}(p) = \int_a^{\infty} e^{-p(g(t)-g(a))} f(t) g'(t) dt, \tag{5.7}$$

olarak tanımlanır, p'nin tüm değerleri için bu integral geçerlidir.

Aşağıdaki teoremde genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ve klasik bir tanesi arasındaki ilişkiyi verdik.

Teorem 5.1. (Jarad ve ark., 2010)

$f, g: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlar olsun öyle ki $g(t)$ sürekli ve $[0, \infty)$ üzerinde $g'(t) > 0$ olsun. O halde f 'in genelleştirilmiş Laplace dönüşümü vardır. O zaman

$$\mathcal{L}_g\{f(t)\}(p) = \mathcal{L}\{f(g^{-1}(t + g(a)))\}(p), \tag{5.8}$$

yazılabilir, burada $\mathcal{L}\{f\}$, f' in klasik Laplace dönüşümüdür.

İspat 5.1.

Eğer (5.8) denkleminde $u = g(t) - g(a)$ değişken değişimi yapılırsa teoremin ispatı kolayca yapılabilmektedir.

Tanım 5.2. (Jarad ve ark., 2010)

Eğer $t \geq T$ için $|f(t)| \leq Me^{cg(t)}$ koşulu altında negatif olmayan M, c, T sabitleri varsa, o zaman $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonun $g(t)$ üstel mertebeli olduğu söylenebilmektedir.

Şimdi, bir fonksiyonun genelleştirilmiş Laplace dönüşümünün varlığı için gerekli koşullardan bahsedelim.

Teorem 5.2. (Jarad ve ark., 2010)

Eğer $p > c_1$ için $f_1: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ 'in genelleştirilmiş Laplace dönüşümü varsa ve $p > c_2$ için $f_2: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ 'in genelleştirilmiş Laplace dönüşümü varsa, o zaman, herhangi a_1 ve a_2 sabitleri için, $a_1 f_1 + a_2 f_2$'nin genelleştirilmiş Laplace dönüşümü vardır ve $p > max\{c_1, c_2\}$ için

$$\mathcal{L}_g\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\}(p) = a_1 \mathcal{L}_g\{f_1(t)\}(p) + a_2 \mathcal{L}_g\{f_2(t)\}(p), \tag{5.9}$$

ile ifade edilir.

Bazı temel fonksiyonların genelleştirilmiş Laplace dönüşümleri aşağıdaki lemmada verildi.

Lemma 5.3. (Jarad ve ark., 2010)

1. $\mathcal{L}_g\{1\}(p) = \dfrac{1}{p}, \quad p > 0.$
2. $\mathcal{L}_g\left\{\left(g(t) - g(a)\right)^{\beta}\right\}(p) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{p^{\beta}}, \Re(\beta) > 0, \quad p > 0.$
3. $\mathcal{L}_g\left\{e^{\lambda g(t)}\right\}(p) = \dfrac{e^{\lambda g(t)}}{p - \lambda}, \quad p > \lambda.$

Teorem 5.3. (Jarad ve ark., 2010)

$f(t) \in C_g[a,T]$ fonksiyonu $g(t)$-üstel mertebeli olsun öye ki her sonlu aralık $[a,T]$ üzerinde $f^{[1]}(t)$ parçalı süreklidir. O zaman $f^{[1]}(t)$ 'in genelleştirilmiş Laplace dönüşümü vardır,

$$\mathcal{L}_g\{f^{[1]}(t)\}(p) = p\mathcal{L}_g\{f(t)\}(p) - f(a). \tag{5.10}$$

Sonuç 5.1. (Jarad ve ark., 2010)

$f(t) \in C_g^{n-1}[a,t)$ olsun öyle ki $f^{[i]}$, $i = 0,1,2,\dots,n-1$, g-üstel mertebelidir. $f^{[n]}$, $[a,T]$ aralığı üzerinde parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman, $f^{[n]}(t)$ 'nin genelleştirilmiş Laplace dönüşümü vardır ve

$$\mathcal{L}_g\{f^{[n]}(t)\}(p) = p^n\mathcal{L}_g\{f(t)\}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1}\left(f^{[k]}\right)(a). \tag{5.11}$$

olmaktadır.

Tanım 5.3. (Jarad ve ark., 2010)

f ve h her $[0,T]$ aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeli olan iki fonksiyon olsun. Bu durumda f ve h 'nin genelleştirilmiş konvülasyonunu

$$\left(f *_g h\right)(t) = \int_a^t f(\tau)\, h\left(g^{-1}(g(t) + g(a) - g(\tau))\right) g'(\tau) d\tau. \tag{5.12}$$

olarak tanımlarız. İki fonksiyonun genelleştirilmiş konvülasyonu değişmelidir.

Teorem 5.4. (Jarad ve ark., 2010)

f ve h herbir $[a,T]$ aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeli olan bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\mathcal{L}_g\{f *_g h\} = \mathcal{L}_g\{f\}\mathcal{L}_g\{h\}. \tag{5.13}$$

Teorem 5.5. (Jarad ve ark., 2010)

$\alpha > 0$ ve f herbir $[a,t]$ aralığı üzerinde parçalı sürekli ve $g(t)$-üstel mertebeli olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}_g\{({}_aI^{\alpha,\rho}f)(t)\} = \frac{\mathcal{L}_g\{f(t)\}}{p^\alpha} \tag{5.14}$$

olur.

Sonuç 5.2. (Jarad ve ark., 2010)

$\alpha > 0$ ve $b > a$ için $f \in AC_g^n[a,b]$ olsun. $g'(t) > 0$ olmak üzere $g \in C^n[a,b]$ ve $k = 0,1,\dots,n-1$ için ${}_aI^{n-k-\alpha,\rho}\ g(t)$-üstel mertebeli olsun. O zaman

$$\mathcal{L}_g\{({}_aD_g^\alpha f)(t)\}(p) = p^\alpha \mathcal{L}_g\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1}({}_aI_g^{n-k-\alpha}f)(a^+). \tag{5.15}$$

olmaktadır.

Sonuç 5.3. (Jarad ve ark., 2010)

$\alpha > 0$ ve $b > a$ için $f \in AC_\gamma^n[a,b]$ ve $f^{[k]}$, $k = 0,1,2,\dots,n$, g-üstel mertebeli olsun. O halde

$$\mathcal{L}_g\{({}_a^C D_g^\alpha f)(t)\}(p) = p^\alpha \left[\mathcal{L}_g\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} p^{-k-1}\left(f^{[k]}\right)(a^+)\right]. \tag{5.16}$$

eşitliği sağlanır.

5.3. Ayrık kesirli operatörler ve Laplace dönüşümleri

5.3.1. Ayrık kesirli operatörlerin Laplace dönüşümü

Daha verimli bir şekilde kullanılması için doğal sayılar kümesinde tanımlanan bir f fonksıyonu için Ayrık Laplace Dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$\mathbb{N}_a \coloneqq \mathbb{N}_0 + \{a\} = \{a, a+1, a+2, \dots\}$, $(a \in \mathbb{R})$ için

$$\mathcal{L}_d\{f\}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k+a)}{(s+1)^{k+1}} \tag{5.17}$$

Tanım 5.4. (Holm, 2011)

Eğer $(k-a)^{\underline{\mu}} = \dfrac{\Gamma(k-a+1)}{\Gamma(k-a+1-\mu)}$, olursa

$$\mathcal{L}_d(k-a)^{\underline{\mu}} = \frac{\Gamma(k-a+1)}{\Gamma(k+1-\mu)} \tag{5.18}$$

olur.

Tanım 5.5. (Holm, 2011)

Her $\mu \in \mathbb{R}\backslash(-\mathbb{N})$ için μ_inci Taylor Monomial

$$h_\mu(k,a) := \frac{(k-a)^{\underline{\mu}}}{\Gamma(\mu+1)} \quad , \qquad (k \in \mathbb{N}_a) \tag{5.19}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 5.4. (Holm, 2011)

$\mu \in \mathbb{R}\backslash(-\mathbb{N})$ alalım ve varsayalım ki $a, b \in \mathbb{R}$ olsun öyle ki $b - a = \mu$. Böylece $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ için

$$\mathcal{L}_d\{h_\mu(k,a)\}(s) = \frac{(s+1)^\mu}{s^{\mu+1}} \tag{5.20}$$

şeklindedir.

Tanım 5.6. (Holm, 2011)

$f, g: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ için f ve g 'nin konvülasyon tanımı $k \in \mathbb{N}_a$ için

$$(f * g)(k) \coloneqq \sum_{r=0}^{k-1} f(r) g(k-1-r+a) \tag{5.21}$$

ile verilmektedir.

Not: Toplamlara yapılan standart işlemlerle $(f * g)(k) = 0$ olduğu anlaşılmaktadır.

Kesirli sınır değer problemlerinin çözümü için gerekli olan konvülasyon ile Laplace dönüşümünü oluşturmanın standart kuralı aşağıda verildi.

Lemma 5.5. (Holm, 2011)

$f, g: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını $r > 0$ üstel mertebeli alalım. O zaman $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_d\{f * g\}(s) = \mathcal{L}_d\{f\}(s)\mathcal{L}_d\{g\}(s). \tag{5.22}$$

Lemma 5.6. (Holm, 2011)

$f, g: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ alalım ve $\nu > 0$ verilsin, $N \in \mathbb{N}$ seçilsin öyle ki $N - 1 < \nu \leq N$. f 'in ν_inci mertebeden kesirli toplamı

$$\Delta_a^{-\nu} f(t) := \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \sum_{r=a}^{t-\nu} \big(t - \sigma(r)\big)^{\underline{\nu-1}} f(r), \qquad t \in \mathbb{N}_{a+\nu-N}, \tag{5.23}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{a + \nu - N, \dots, a + \nu - 1\}$ kümesi üzerinde $\Delta_a^{-\nu} f$ sıfırdır. Benzer şekilde . f 'nin ν_inci mertebeden kesirli farkı $t \in \mathbb{N}_{a+N-\nu}$ için

$$\Delta_a^{\nu} f(t) := \Delta^N \Delta_a^{-(N-\nu)} f(t), \qquad t \in \mathbb{N}_{a+N-\nu} \text{ için} \tag{5.24}$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıdaki tanımların eşdeğeri (Holm, 2011)'de şu şekilde sunulmuştur

$$\Delta_a^{\nu} f(k) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\nu)} \displaystyle\sum_{s=a}^{k-\nu} \big(t - \sigma(s)\big)^{\underline{\nu-1}} f(s), & \nu \in (N-1, N), \\ \Delta^N f(k), & \nu = N \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_{k+N-\nu} \text{ için.} \tag{5.25}$$

Laplace dönüşümlerinin teorisinde, $N \in \mathbb{N}_a$ için benzer sonuçlar şöyle bilinmektedir,

$$\mathcal{L}_d\{\Delta_d^{-N} f\}(s) = \frac{\mathcal{L}_d\{f\}(s)}{s^N}, \tag{5.26}$$

ve

$$\mathcal{L}_d\{\Delta^N f\}(s) = s^N \mathcal{L}_d\{f\}(s) - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta^{N-1-j} f(a). \tag{5.27}$$

Amacımız kesirli mertebeden toplamların ve farkların Laplace dönüşümlerini alarak (5.26) ve (5.27) ifadelerini genelleştirmektir.

Lemma 5.7. (Holm, 2011)

Varsayalım ki $f: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $r \geq 1$ üstel mertebeli olsun ve $\nu > 0$ verilsin. O zaman her bir $\epsilon > 0$ sabiti için $\Delta_a^{-\nu} f$ ve $\Delta_a^{\nu} f$ ifadeleri $r + \epsilon$ üstel mertebelidirler.

Teorem 5.6. (Holm, 2011)

Varsayalım ki $f: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $r \geq 1$ üstel mertebeli olsun ve $N - 1 < \nu \leq N$ olmak üzere $\nu > 0$ verilsin. O zaman $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_{d+v}\{\Delta_a^{-v} f\}(s) = \frac{(s+1)^v}{s^v}\mathcal{L}_d\{f\}(s) \tag{5.28}$$

ve

$$\mathcal{L}_{d+v-N}\{\Delta_a^{-v} f\}(s) = \frac{(s+1)^{v-N}}{s^v}\mathcal{L}_d\{f\}(s) \tag{5.29}$$

olur.

Teorem 5.7. (Holm, 2011)

Varsayalım ki $f: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $r \geq 1$ üstel mertebeli olsun ve $N-1 < v \leq N$ olmak üzere $v > 0$ verilsin. O zaman $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_{d+N-v}\{\Delta_d^{v} f\}(s) = s^v(s+1)^{N-v}\mathcal{L}_d\{f\}(s) - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta_d^{v-1-j} f(a+N-v). \tag{5.30}$$

5.3.2. Ayrık Laplace dönüşümleri

Ayrık Laplace Dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımladık: (Bohner ve Guseınov, 2010; Bohner ve Peterson, 2001; Bohner ve Peterson, 2003)

Tanım 5.7. (Ameen ve ark., 2019)

Bir $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ dizisinin "$\mathcal{L}_d$-dönüşümü" dizinin yakınsadığı p' nin tüm değerleri için tanımlanan karmaşık değişkenli bir $X(p)$ fonksiyonudur ve

$$X(p) = \mathcal{L}_d\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}} \tag{5.31}$$

şeklindedir.

Ayrıca $N > 0$ olması şartıyla $\mathcal{L}_d$-dönüşümünün var olduğunu söyleyebiliriz öyle ki : $|p+1| > N$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}} \tag{5.32}$$

yakınsaktır.

Eğer $R = lim\ sup|x_k|^{\frac{1}{k}}$ kabul edilirse, o zaman aşağıdaki durumlardan biri geçerlidir:

a. Eğer $0 < R < \infty$ ise, (5.31) serisi $|p+1| > R$ için yakınsar ve aksi halde ıraksar;
b. Eğer $R = 0$ ise, (5.31) serisi muhtemelen $p = -1$ değeri hariç p'nin tüm değerleri için yakınsar;
c. Eğer $R = 0$ ise, (5.31) serisi her yerde ıraksar.

Tanım 5.8. (Ameen ve ark., 2019)

Eğer bir $M > 0$ ve $c > 1$ varsa, o zaman $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ dizisinin "üstel sınırlanmış" olduğu söylenir, öyle ki $k \geq 0$ için $|x_k| \leq Mc^k$.

Teorem 5.8. (Ameen ve ark., 2019)

Eğer $\{x_k\}$ dizisi üstel sınırlı ise, o zaman $\{x_k\}$'nin $\mathcal{L}_d$-dönüşümü vardır.

İspat 5.8.

$\{x_k\}$ dizisinin üstel sınırlı olduğunu varsyalım. O zaman bir $M > 0$ ve $c > 1$ vardır öyle ki $k \geq 0$ için $|x_k| \leq Mc^k$.

Biliyoruz ki:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k|}{|p+1|^{k+1}} \leq \frac{M}{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{c}{(p+1)} \right|^k \tag{5.33}$$

ve son seri $|p+1| > c$ olduğunda yakınsayan bir geometrik seridir.

Bu da $\{x_k\}$ dizisinin $\mathcal{L}_d$-dönüşümünün var olduğunu gösterir.

Lemma 5.8. (Ameen ve ark., 2019)

Eğer $r > R$ ise, $|p+1| \geq r$ olduğundaki p' nin değerleri için (5.31) serisi düzgün yakınsaktır.

İspat 5.8.

$r > R$ olduğunda, $\varepsilon > 0$ sayısı vardır öyle ki

$r > R + \varepsilon$ ve $R = lim\ sup|x_k|^{\frac{1}{k}}$ olduğunda, aynı ε değeri için, bir doğal sayı vardır ve

$|x_k| \leq (R+\varepsilon)^k$, her $k \geq n$ için,

olur. Şimdi ise,

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |x_k| \left| \frac{1}{p+1} \right|^{k+1} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{R+\varepsilon}{r} \right)^{k+1}. \tag{5.34}$$

elde ederiz. Sonuç olarak, ne zaman $n \to \infty$ ise o zaman

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}} \right| \leq \frac{r}{r-R-\varepsilon} \left(\frac{R+\varepsilon}{r} \right)^{n+1} \to 0. \tag{5.35}$$

Aşağıda Ayrık Laplace Dönüşümü ile ilgili temel teoremlerden bahsedeceğiz,

Teorem 5.9. (Lineerlik özelliği) (Ameen ve ark., 2019)

Eğer a ve b sabitlerse, o zaman

$$\mathcal{L}_d\{ax_k + by_k\} = a\mathcal{L}_d\{x_k\} + b\mathcal{L}_d\{y_k\}. \tag{5.36}$$

İspat 5.9.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d\{ax_k + by_k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ax_k + by_k}{(p+1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ax_k}{(p+1)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{by_k}{(p+1)^{k+1}} \\ &= a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}} + b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{(p+1)^{k+1}} \end{aligned} \tag{5.37}$$

Sonuç olarak, elde ederiz ki

$$\mathcal{L}_d\{ax_k + by_k\} = a\mathcal{L}_d\{x_k\} + b\mathcal{L}_d\{y_k\} \tag{5.38}$$

Teorem 5.10. (Shifted dizinin Ayrık Laplace Dönüşümü) (Ameen ve ark., 2019)

$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ dizisini ele alalım öyle ki $|p+1|>R$ ve bir n pozitif tamsayı için Ayrık Laplace Dönüşümü var olsun, o zaman $|p+1|>R$ için, aşağıdaki ifade geçerlidir:

$$\mathcal{L}_d\{x_{k+n}\} = (p+1)^n \mathcal{L}_d\{x_k\} - \sum_{m=0}^{n-1} x_m (p+1)^{n-m-1} \tag{5.39}$$

İspat 5.10.

İlk önce şunu inceleyelim:

$$\mathcal{L}_d\{x_{k+n}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+n}}{(p+1)^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} (p+1)^{-k} x_{k+n} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n}^{\infty} (p+1)^{-k+n} x_k$$

$$= \frac{(p+1)^n}{p+1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (p+1)^{-k} x_k - \sum_{m=0}^{n-1} (p+1)^{-m} x_m \right]$$

$$= (p+1)^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x_m}{(p+1)^{m+1}} \right] \tag{5.40}$$

Sonuç olarak, elde ederiz ki

$$\mathcal{L}_d\{x_{k+n}\} = (p+1)^n \mathcal{L}_d\{x_k\} - \sum_{m=0}^{n-1} x_m (p+1)^{n-m-1} \tag{5.41}$$

Teorem 5.11. (Başlangıç Değer ve Son Değer Teoremi) (Ameen ve ark., 2019)

a. Eğer $|p+1| > R$ için $X(p) = \mathcal{L}_d\{x_k\}$ varsa, o zaman

$$\lim_{p\to\infty}(p+1)\,X(p) = x_0\,,\ \lim_{p\to\infty} X(p) = 0 \tag{5.42}$$

b. Eğer $|p+1| > 1$ için $X(p) = \mathcal{L}_d\{x_k\}$ varsa ve $p = 1$ de $pX(p)$ analitikse, o zaman

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{p\to 0} p\mathcal{L}_d\{x_k\} \tag{5.43}$$

İspat 5.11.

(a) Kısmı:

$$\mathcal{L}_d\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}} \tag{5.44}$$

olduğunda

$$(p+1)\mathcal{L}_d\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^k} = x_0 + \frac{x_1}{p+1} + \frac{x_2}{(p+1)^2} + \cdots \tag{5.45}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\lim_{p\to\infty}(p+1)L_d\{x_k\} = x_0 \tag{5.46}$$

$$\lim_{p\to\infty}(p+1)\,X(p) = x_0. \tag{5.47}$$

olur. Sonuç olarak

$$\lim_{p\to\infty} X(p) = \lim_{p\to\infty}\frac{x_0}{p+1} = 0 \tag{5.48}$$

bulunur.

(b) Kısmı:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_d\{x_{k+1}-x_k\} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_{k+1}}{(p+1)^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{(p+1)^{k+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x_{k+1}}{(p+1)^{k+1}} - \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{x_0}{p+1} + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}\right)x_1 + \left(\frac{1}{(p+1)^2}\right.\right.\\ &\quad \left.\left. - \frac{1}{(p+1)^3}\right)x_2 + \cdots + \left(\frac{1}{(p+1)^n} - \frac{1}{(p+1)^{n+1}}\right)x_n\right.\\ &\quad \left. + \frac{x_{n+1}}{(p+1)^{n+1}}\right]\end{aligned} \tag{5.49}$$

olduğunda

$$\lim_{p\to 0}\mathcal{L}_d\{x_{k+1}-x_k\}$$
$$= \lim_{p\to 0}\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{x_0}{p+1}+\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2}\right)x_1\right.$$
$$+\left(\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{(p+1)^3}\right)x_2+\cdots \tag{5.50}$$
$$\left.+\left(\frac{1}{(p+1)^n}-\frac{1}{(p+1)^{n+1}}\right)x_n+\frac{x_{n+1}}{(p+1)^{n+1}}\right].$$

elde ederiz. Böylece,

$$\lim_{p\to 0}\mathcal{L}_d\{x_{k+1}-x_k\}=\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to 0}[-x_0+x_{n+1}] \tag{5.51}$$
$$\lim_{p\to 0}\mathcal{L}_d\{x_{k+1}-x_k\}=\lim_{n\to\infty}[-x_0+x_{n+1}] \tag{5.52}$$
$$\lim_{p\to 0}\mathcal{L}_d\{x_{k+1}-x_k\}=\left(\lim_{n\to\infty}x_{n+1}\right)-x_0. \tag{5.53}$$

olur. Bundan dolayı

$$\lim_{p\to 0}[\mathcal{L}_d\{x_{k+1}\}-\mathcal{L}_d\{x_k\}]=\left(\lim_{n\to\infty}x_{n+1}\right)-x_0. \tag{5.54}$$

bulunur.

Diğer taraftan, Teorem 5.10.'i kullanarak

$$\lim_{p\to 0}[(p+1)\mathcal{L}_d\{x_k\}-x_0-\mathcal{L}_d\{x_k\}]=\left(\lim_{n\to\infty}x_{n+1}\right)-x_0 \tag{5.55}$$
$$\lim_{p\to 0}p\mathcal{L}_d\{x_k\}-x_0=\left(\lim_{n\to\infty}x_{n+1}\right)-x_0. \tag{5.56}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{p\to 0} p\mathcal{L}_d\{x_k\} \tag{5.57}$$

olur.

Tanım 5.9. (Ameen ve ark., 2019)

$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ ve $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ şeklinde iki dizi ele alalım. O zaman x_k ve y_k'nın konvolüsyonu aşağıdaki gibi tanımlanır

$$x_k * y_k = \sum_{m=0}^{k-1} x_{k-m} y_m. \tag{5.58}$$

Aşağıdaki teoremde iki dizinin konvolüsyonunun Ayrık Laplace Dönüşümü verilmektedir.

Teorem 5.12. (Konvolüsyon Teoremi) (Ameen ve ark., 2019)

Eğer $|p+1| > a$ için $X(p)$ varsa ve $|p+1| > b$ için $Y(p)$ varsa, o zaman:

$$\mathcal{L}_d\{x_k * y_k\} = \mathcal{L}_d\{x_k\}\mathcal{L}_d\{y_k\}, \tag{5.59}$$

$|p+1| > max\{a, b\}$ için olmaktadır.

İspat 5.12.

$$\mathcal{L}_d\{x_k\}.\mathcal{L}_d\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{(p+1)^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{(p+1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{(p+1)^k}$$

$$= \frac{1}{(p+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{x_{k-m} y_m}{(p+1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k-1} x_{k-m} y_m \right) \frac{1}{(p+1)^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k * y_k}{(p+1)^{k+1}} = \mathcal{L}_d\{x_k * y_k\}. \tag{5.60}$$

Sonuç olarak,

$$\mathcal{L}_d\{x_k * y_k\} = \mathcal{L}_d\{x_k\}.\mathcal{L}_d\{y_k\} \tag{5.61}$$

elde ederiz.

Örnek 5.1. (Ameen ve ark., 2019)

Biz bu örnekte $\{x_k = 1\}$ 'in $|p+1| > 1$ için ayrık Laplace dönüşümünü bulduk

$$X(p) = \mathcal{L}_d\{1\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{(p+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^k} = \frac{1}{(p+1)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p+1}} = \frac{1}{p}. \tag{5.62}$$

5.3.3. Temel Fonksiyonların Ayrık Laplace Dönüşümleri

Bu bölümde bazı temel ayrık fonksiyonların Ayrık Laplace Dönüşümleri'ni çalışıldı.

Aşağıdaki teoremde ayrık üstel fonksiyonun Ayrık Laplace Dönüşümü verildi.

Teorem 5.13. (Ameen ve ark., 2019)

a bir reel sayı olsun. O zaman

$$\mathcal{L}_d\{a^k\} = \frac{1}{p+1-a}, \quad |p+1| > |a| \text{ için} \tag{5.63}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat 5.13. $|p+1| > |a|$ $için$

$$\mathcal{L}_d\{a^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{(p+1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)} \frac{a^k}{(p+1)^k} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{(p+1)}\right)^k$$

$$= \frac{1}{p+1} \frac{1}{1-\frac{a}{p+1}} = \frac{1}{p+1} \frac{(p+1)}{(p+1-a)} = \frac{1}{p+1-a}. \tag{5.64}$$

Teorem 5.13.'i kullanarak bazı trigonometrik fonksiyonların Ayrık Laplace Dönüşümleri'ni bulalım.

Sonuç 5.4. (Ameen ve ark., 2019)

a. Bir a reel sayısı için a ve $|p+1|>1'$dir.

$$\mathcal{L}_d\{\cos(ak)\}=\frac{p+1-\cos a}{p^2-2p\cos a+2} \tag{5.65}$$

$$\mathcal{L}_d\{\sin(ak)\}=\frac{\sin a}{p^2-2p\cos a+2} \tag{5.66}$$

b. Bir a reel sayısı için a ve $|p+1|>max\{e^a,e^{-a}\}$'dir.

$$\mathcal{L}_d\{\cosh(ak)\}=\frac{p+1-\cosh(a)}{p^2+2(p+1)(1-\cosh(a))} \tag{5.67}$$

$$\mathcal{L}_d\{\sinh(ak)\}=\frac{\sinh(a)}{p^2+2(p+1)(1-\cosh(a))} \tag{5.68}$$

İspat 5.4.

Ayrık Laplace Dönüşümü'nün tanımını kullanarak ispatı kolayca yapabiliriz.

Teorem 5.14. (Ameen ve ark., 2019)

Eğer $|p+1|>r$ için $X(p)=\mathcal{L}_d\{x_k\}$ varsa, o zaman herhangi bir $a\neq 0$ sabiti için

$$\mathcal{L}_d\{a^k x_k\}=\frac{1}{a}X\left(\frac{p+1-a}{a}\right). \tag{5.69}$$

sağlanır.

İspat 5.14.

$$X(p)=\mathcal{L}_d\{a^k x_k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k x_k}{(p+1)^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a}\frac{a^{k+1}x_k}{(p+1)^{k+1}}=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{\left(\frac{p+1}{a}\right)^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{\left(\frac{p}{a}+\frac{1}{a}\right)^{k+1}}=\frac{1}{a}X\left(\frac{p+1}{a}-1\right). \tag{5.70}$$

Sonuç olarak,

$$\mathcal{L}_d\{a^k x_k\}=\frac{1}{a}X\left(\frac{p+1-a}{a}\right) \tag{5.71}$$

elde ederiz.

Teorem 5.15. (Ameen ve ark., 2019)

Eğer $|p+1|>r$ için $X(p)=\mathcal{L}_d\{x_k\}$ ise o zaman :

$$\mathcal{L}_d\{(k+n)^{\underline{n}}x_k\}=(-1)^n(p+1)^n\frac{d^n}{dp^n}X(p). \tag{5.72}$$

olur.

İspat 5.15.

$$X(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (p+1)^{-k-1} x_k \tag{5.73}$$

$$X'(p) = -\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(p+1)^{-k-2} x_k \tag{5.74}$$

$$X''(p) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)(p+1)^{-k-3} x_k \tag{5.75}$$

$$X''(p) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)(p+1)^{-k-3} x_k \tag{5.76}$$

$$X'''(p) = -\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)(k+3)(p+1)^{-k-4} x_k. \tag{5.77}$$

p'ye göre sürekli olarak türev alırsak,

$$X^{(n)}(p) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) \dots (k+n)(p+1)^{-k-n-1} x_k. \tag{5.78}$$

buluruz. Bu nedenle

$$\mathcal{L}_d\{(k+n)^{\underline{n}} x_k\} = (-1)^n (p+1)^n \frac{d^n}{dp^n} X(p). \tag{5.79}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\mathcal{L}_d\{(k+n)^{\underline{n}} x_k\} = (-1)^n (p+1)^n \frac{d^n}{dp^n} X(p). \tag{5.80}$$

Teorem 5.16. (Ameen ve ark., 2019)

$k^{\underline{n}} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$ bir düşen faktöriyel ise, $n = 1,2,3,\ldots$ için

$$\mathcal{L}_d\{k^{\underline{n}}\} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad |p| > 0 \text{ için.} \tag{5.81}$$

olmaktadır.

İspat 5.16.

Matematiksel tümevarımı kullanırsak

$n = 1$ için

$$\mathcal{L}_d\{k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(p+1)^{k+1}} \tag{5.82}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)} \cdot \frac{k}{(p+1)^k} = \frac{1}{(p+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(p+1)^k} = \frac{1}{(p+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(p+1)^k}$$

$$= \frac{1}{(p+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(p+1)^{k+1}} = \frac{1}{(p+1)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(p+1)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^{k+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{(p+1)} [\mathcal{L}_d\{k\} + \mathcal{L}_d\{1\}]$$

$(p+1)\mathcal{L}_d\{k\} - \mathcal{L}_d\{k\} = \mathcal{L}_d\{1\}$

$\mathcal{L}_d\{k\}(p+1-1) = \mathcal{L}_d\{1\}$

$$p\mathcal{L}_d\{k\} = \frac{1}{p}. \tag{5.83}$$

elde edilir. Böylece

$$\mathcal{L}_d\{k\} = \frac{1}{p^2} \tag{5.84}$$

bulunur.

Şimdi $n \leq m$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$\mathcal{L}_d\{k^{\underline{m+1}}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\underline{m+1}}}{(p+1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} k^{\underline{m+1}} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{k+1} \tag{5.85}$$

$$= \left[-k^{\underline{m+1}} \frac{1}{p(p+1)^k}\Big|_0^{\infty} - \sum_{k=0}^{\infty} (m+1)k^{\underline{m}} \left(\frac{-1}{p}\right) \frac{1}{(p+1)^{k+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} (m+1)k^{\underline{m}} \frac{1}{(p+1)^{k+1}}$$

$$= \frac{m+1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} k^{\underline{m}} \frac{1}{(p+1)^{k+1}} = \frac{m+1}{p} L_d\{k^{\underline{m}}\} = \frac{m+1}{p} \frac{m!}{p^{m+1}}. \tag{5.86}$$

Sonuçta

$$\mathcal{L}_d\{k^{\underline{m+1}}\} = \frac{(m+1)!}{p^{m+2}} \tag{5.87}$$

elde ederiz.

Teorem 5.17. (Ameen ve ark., 2019)

Pozitif bir tamsayı n için,

$$\mathcal{L}_d\left\{\binom{k}{n}\right\} = \frac{1}{p^{n+1}}. \tag{5.88}$$

olmaktadır.

İspat 5.17.

$$\mathcal{L}_d\left\{\binom{k}{n}\right\} = \mathcal{L}_d\left\{\frac{k^{\underline{n}}}{n!}\right\} = \frac{1}{n!}\mathcal{L}_d\{k^{\underline{n}}\} = \frac{1}{n!}\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{1}{p^{n+1}}. \tag{5.89}$$

Sonuç olarak,

$$\mathcal{L}_d\left\{\binom{k}{n}\right\} = \frac{1}{p^{n+1}} \tag{5.90}$$

elde ederiz.

Tanım 5.10. (Ameen ve ark., 2019)

Birim darbe dizisi (Unit impulse function)

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } k = n \\ 0 & \text{eğer } k \neq n \end{cases} \tag{5.91}$$

Aşağıdaki teoremde unit impulse dizisinin Ayrık Laplace Dönüşümü verildi.

Teorem 5.18. (Ameen ve ark., 2019)

$$\mathcal{L}_d\{\,\delta_k(n)\} = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{n+1}. \tag{5.92}$$

İspat 5.18.

$$\mathcal{L}_d\{\,\delta_k(n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k(n)}{(p+1)^{k+1}} = \frac{1}{(p+1)^{n+1}}. \tag{5.93}$$

Şimdi de unit step dizisini tanımladıktan sonra onun Laplace Dönüşümü'nü verelim.

Tanım 5.11. (Ameen ve ark., 2019)

Birim basamak dizisi (Unit step function)

$$u_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } 0 \le k \le n-1 \\ 1 & \text{eğer } \quad k \ge n \end{cases}. \tag{5.94}$$

Teorem 5.19. (Ameen ve ark., 2019)

Herhangi bir pozitif tamsayı n ve $|p+1| > 1$ için,

$$\mathcal{L}_d\{\,u_k(n)\} = \frac{1}{p(p+1)^n}. \tag{5.95}$$

olur.

İspat 5.19.

$$\mathcal{L}_d\{\, u_k(n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(n)}{(p+1)^{k+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^{n+k+1}} \tag{5.96}$$

$$\mathcal{L}_d\{\, u_k(n)\} = \frac{1}{(p+1)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^{k+1}} = \frac{1}{(p+1)^n} \mathcal{L}_d\{\, 1\} = \frac{1}{(p+1)^n} \frac{1}{p}. \tag{5.97}$$

Teorem 5.19. aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz.

Teorem 5.20. (Ameen ve ark., 2019)

Herhangi bir pozitif tamsayı n için,

$$\mathcal{L}_d\{x_{k-n} u_k(n)\} = (p+1)^{-n} \mathcal{L}_d\{x_k\}. \tag{5.98}$$

sağlanır.

İspat 5.20.

$$\mathcal{L}_d\{x_{k-n} u_k(n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k-n} u_k(n)}{(p+1)^{k+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_{k-n}}{(p+1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^{k+n+1}} \tag{5.99}$$

$$= \frac{1}{(p+1)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(p+1)^{k+1}}. \tag{5.100}$$

Sonuç olarak,

$$\mathcal{L}_d\{x_{k-n}u_k(n)\} = \frac{1}{(p+1)^n}\mathcal{L}_d\{x_k\} \tag{5.101}$$

elde ederiz.

Çizelge 5.1. Ayrık Laplace dönüşümü'nün listesi

Dizi	d- Laplace dönüşümü
1	$\frac{1}{p}$
a^k	$\frac{1}{p+1-a}$
k	$\frac{1}{p^2}$
k^2	$\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}$
$k^{\underline{n}}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin(ak)$	$\frac{\sin a}{p^2-2p\cos a+2}$
$\cos(ak)$	$\frac{p+1-\cos a}{p^2-2p\cos a+2}$
$\sinh(ak)$	$\frac{\sinh a}{p^2+2(p+1)(1-\cosh a)}$
$\cosh(ak)$	$\frac{p+1-\cosh a}{p^2+2(p+1)(1-\cosh a)}$

Çizelge 5.2. Ayrık Laplace dönüşümü'nün listesi

Dizi	d- Laplace dönüşümü
$\delta_k(n)$	$\left(\frac{1}{p+1}\right)^{n+1}$
$u_k(n)$	$\frac{1}{p(p+1)^n}$
kx_k	$-(p+1)X'(p) - X(p)$
$x_k * y_k$	$(p+1)X(p).Y(p)$
$\sum_{m=0}^{k} x_m$	$\frac{p+1}{p}X(p)$
$a^k x_k$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{p+1-a}{a}\right)$
x_{k+n}	$(p+1)^n \mathcal{L}_d\{x_k\} - \sum_{m=0}^{n-1} x_m (p+1)^{n-m-1}$
$x_{k-n}x_k(n)$	$\frac{1}{(p+1)^n}X(p)$

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Bu tezde sürekli türevlenebilir fonksiyonlar üzerinde soldan Caputo - Katugampola kesirli türevi aracılığıyla kesirli Cauchy problemleri çalışıldı ve bu problemlerin varlık ve tekliği ispatlandı. Aynı zamanda klasik Caputo kesirli türevini ve iyi bilinen Caputo tip kesirli türevleri genelleştiren belirli bir genelleştirilmiş Caputo kesirli türevini içeren başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin Ulam karalılığını inceledi. Bu çözümlerinin hangi koşullar altında Ulam-Hyers ve Ulam-Hyers-Rasiass olduğunu belirttidi. Bu nedenle, sonuçlarımız Caputo veya Caputo-Hadamard kesirli türevleri söz konusu olduğunda Ulam karalılığı ile ilgili önceki çalışmaların bir genellemesidir.

Son olarak genelleştirilmiş kesirli operatörler için ayrık Laplace dönüşümü irdelenedi.

6.2. Öneriler

Kesirli türevleri içeren diferansiyel denklemlerin niteliksel özelliklerinin araştırılmasının ilginç olacağını ve çözümlerinin karalılığının bu özelliklerinden biri olduğunu düşünmekteyiz.

Son olarak sürekli, ayrık ve genelleştirilmiş (sürekli) kesirli operatörlerin Laplace dönüşümlerini irdeledik.

Literatürde (sürekli) kesirli türevleri içeren diferansiyel denklemlerin Ulam karalılığını inceleyen bir çok çalışma bulunmaktadır. Fakat kesirli ayrık fark denklemini inceleyen makaleler yok denecek kadar azdır.

Dolayısıyla, bu tip denklemlerin Ulam çerçevesinde karalığının incelemesi gerekmektedır. Buna ilaveten, modife edilmiş Laplace dönüşümü kullanılarak, genelleştirilmiş kesirli türevleri bulunduran adi ve kısmi türevli denklemlerin çözümüne ulaşılabilir.

7. KAYNAKLAR

Abdeljawad T., 2017, A Lyapunov type inequality for fractional operators with nonsingularMittag-Leffler kernel, *Journal of Inequalities and Applications*, 2017:130.

Abdeljawad T., 2017, Fractional operators with exponential kernels and a Lyapunov type inequality, *Advances in Difference Equations*, 2017:313.

Abdeljawad T., Baleanu D., 2016, Discrete fractional differences with nonsingular discrete Mittag-Leffler kernels, *Advances in Difference Equations*,232.

Abdeljawad T., Baleanu D., 2017, On fractional derivatives with exponential kernel and their discrete versions, *Reports in Mathematical Physics*, 80(1), 11-27.

Abdeljawad T., Q. M. Al-Mdallal, 2018, Discrete Mittag-Leffler kernel type fractional difference initial value problems and Gronwall's inequality, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 339 :218-230.

Abdeljawad, T., Baleanu, D., Jarad, F., 2018, Existence and uniqueness theorem for a class of delay differential equations with left and right Caputo fractional derivatives, *J. Math. Phys*., 49(8), 083507.

Abdeljawad, T., Jarad, F., Baleanu, D., 2008, On the existence and the uniqueness theorem for fractional differential equations with bounded delay within Caputo derivatives, *Sci. China Ser. A*., 51(10), 1775–1786.

Adjabi, Y., Jarad, F., Abdeljawad, T., 2017, On generalized fractional operators and a Gronwall type inequality with applications, *Filomat*, 31(17), 5457–5473.

Adjabi, Y., Jarad, F., Baleanu, D., Abdeljawad, T., 2016, On Cauchy problems with Caputo–Hadamard fractional derivatives. *J. Comput. Anal. Appl*., 21(4), 661–681.

Almeida R., 2016, A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 44, 460-421.

Ameen, R., Jarad, F., Abdeljawad, T., 2018, Ulam Stability for Delay Fractional Differential Equations with a Generalized Caputo Derivative, *Filomat* 32:15 (2018), 5265–5274.

Ameen, R., Köse, H., Jarad, F., 2019, On The Discrete Laplace Transform, *Results in Nonlinear Analysis*, 2 (2019) No. 2, 61-70.

Atangana, A., Baleanu, D., 2016, New fractional derivative with non-local and non-singular kernel, *Therm. Sci.*, 20(2), 757–763.

Bayraktar, M., 2006, Fonksiyonel analiz , *Gazi Yayınları*, Ankara.

Baltacı, İ., 2009, Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Monoton Yöntemler, Yüksek Lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara.

Benchohra M., Lazreg J. E., 2015, On stability of nonlinear implicit fractional differential equations, *Matematiche(Catania)*, 70, 49-61.

Benchohra M., Lazreg J. E., 2017, Existence and Ulam stability for non-linear implicit fractional differential equations with Hadamard derivative, *Studia Universitatis Babe-Bolyai Mathematica*, 62 (1), 27-38.

Bohner, M., Guseınov G. S. 2010, The h-Laplace and q-Laplace Transforms, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 75-92, Vol. 365.

Bohner, M., Peterson, A. 2001, Dynamic Equations on Time Scales, Birkhäuser, Boston.

Bohner, M., Peterson, A. 2003, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhäuser, Boston.

Caputo, M., Fabrizio, M., 2015, A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Prog. Fract. Differ. Appl.*, 1(2), 73–85.

Daftardar-Gejji, V., Jaffari, H., 2007, Analysis of a system of nonautonomous fractional differential equations involving Caputo derivative, *J. Math. Anal. Appl.*, 328, 1026–1033.

Davıes, B. 2001, Integral Transforms and Their Applications, Springer, New York .

Debnath, L., Bhatta, D.2007, Integral Transforms and Their Applications, *Taylor & Francis Grope*, LLC .

Delbosco, D., Rodino, L., 1996, Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation. *J. Math. Anal. Appl*.204, 609–625.

Diethelm, K., 2010, The analysis of fractional differential equations, ISBN 978-3-642-14573-5. Lecture Notes In Mathematics, *Verlag Berlin Heidelberg*, 7-14, 21-42, 49-54, 93-101,109-120, 195-207.

Elıahu, I. J. 1964, Theory and Application of the Z-transform Method, *Krieger pub Co.*.

Gambo,Y., Ameen, R., Jarad, F., Abdeljawad, T., 2018, Existence and uniqueness of solutions to fractional differential equations in the frame of generalized Caputo fractional derivatives, *Advances in Difference Equations*, 2018:134.

Gambo Y. Y., Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D., 2014, On Caputo modification of the Hadamard fractional derivative, *Advances in Difference Equations* , 12 pages.

Hilfer, R., 2000, Applications of Fractional Calculus in Physics., *Word Scientific*, Singapore.

Holm, M., T., 2011, The theory of discrete fractional calculus: development and application *[Ph. D. thesis]*.

Holm, M., T., 2011, The Laplace transform in discrete fractional calculus, *Computers and Mathematics with Applications* 62 (2011) 1591–1601

Hyers D. H., 1941, On the stability of linear functional equations, *National Academy of Sciences* U.S.A., 27222-224.

Jarad, F., Abdeljawad, T., 2010, Generalized Fractional Derivatives And Laplace Transform, *Discrete And Continuous Dynamical Systems Series*, doi:10.3934/dcdss.2020039.

Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D., 2012, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivative, *Advances in Difference Equations*, 8 pages.

Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D., 2017, On the generalized fractional derivatives and their Caputo modification, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10(5), 2607-2619.

Jarad, F., Abdeljawad, T., Baleanu, D., 2012, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivative, *Adv. Differ. Equ.2012*, 142 . https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-10.

Jarad, F., Abdeljawad, T., Baleanu, D., 2017, On the generalized fractional derivatives and their Caputo modification, *J. Nonlinear Sci. Appl*., 10, 2607–2619.

Jarad, F., Ug urlu, E., Abdeljawad, T., Baleanu, D., 2017, On a new class of fractional operators, *Adv. Differ. Equ*. 2017, 247.

Jarad, Y.Y.G.F., Abdeljawad, T., Baleanu, D., 2014, On Caputo modification of the Hadamard fractional derivative, *Adv. Differ. Equ.*, 10. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-142.

Katugampola, U.N., 2011, New approach to generalized fractional integral, *Appl. Math. Comput.*, 218, 860–865.

Katugampola, U.N., 2014, A new approach to generalized fractional derivatives, *Bull. Math. Anal. Appl*. 6(4), 1–15.

Kelley, W. G., PETERSON, A. 2001, Difference Equations, *Academic Press*, San Diego.

Kilbas, A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J, 2006, Theory and Application of Fractional Differential Equations, *North Holland Mathematics Studies*, vol. 204. Elsevier, Amsterdam.

Kilbas, A.A., 2001, Hadamard type fractional calculus, *J. Korean Math*., Soc. 38, 1191–1204.

Lorenzo, C.F., Hartley, T.T., 2002, Variable order and distributed order fractional operators, *Nonlinear Dyn.* 29, 57–98.

Machado, J.A.T., Kiryakova, V., Mainardi, F., 2011, Recent history of fractional calculus,*Commun. Nonlinear Sci. Numer.* Simul.,16(3), 1140–1153.

Magin, R.L., 2006, Fractional Calculus in Bioengineering, *Begell House Publishers*, Redding.

Mathai, A. M., 2010, The H function : Theory and Applications, *LLC* .

Oaki T., 1950, On the stability of linear transformation in Banach spaces,*Journal of the Mathematical Society of Japan*, 2, 64-66.

Oblaza M., 1993, Hyers stability of linear differential equation*, Rocznik Nauk-dydakt. Prace Mat.*, 13 ,259-270.

Oldham, K. B, Spanier, J., 1974 , The Fractional Calculus, *Academic Pres*, New York.

Oliveira, D.S., Capelas de Oliveira C., E.: On A Caputo-type fractional derivatives. Advances in Pure and Applied Mathematics. Accepted for publication.

Podlubny, I., 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Dieg .

Rassias Th. M., 1978, On the stability of linear mapping in Banach Spaces,Proceedings of the American Mathematical Society 72.,297-300.

Rassias Th. M., 2003, On a modified Hyers-Ulam sequence, Journal of Mathematical Analysis and Applications 158, 106-113.

Rus I. A., 2010, Ulam stabililies of ordinay differential equations in a Banach space, *Carpathian Journal of Mathematics* 26, 103-107.

Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., 1993, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. *Gordon and Breach*, Yverdon.

Schıff, J. L. 1999, The Laplace Transform: Theory and Applications, *Springer,* New York .

Soykan, Y., 2008, Fonksiyonel analiz , *Nobel Yayın Dağıtım,* Ankara, 242-268.

Türkoğlu, D., Altun, İ., 2007 , A fixed point theorem for multi-valued mappings end its applications to integral inclusions , *Appl. Math. Lett.*, 20:563-570.

Ulam S. M., 1940, Problems in Modern Mathematics, Chapter 6, *John Wiley and Sons*, New York,.

Ulam S. M., 1960, A collection of Mathematical Problems, *Interscience*, New York,.

Vanterler da C. Sousa J., Capelas de Oliveira E., 2017, A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of -Hilfer operator, arXiv:1709.03634.

Vanterler da Sousa, J., , Capelas de Oliveira C. ,E., 2017, A new fractional derivative of variable order with non-singular order and fractional differential equations, arXiv:1712.06506v1.

Vanterler da Sousa, J., , Capelas de Oliveira C., E., 2017, A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ -Hilfer operatör,arXiv:1709.03634v1.

Vanterler da Sousa, J., Capelas de Oliveira C., E., 2018, On the ψ -Hilfer fractional derivative, *Commun. Nonlinear Sci.* Numer,Simul. 60, 72–91.

Wang J., Lv L., Zhou, Y. 2011, Ulam stability and data dependence for fractional differential equations with Caputo derivative, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 63,1-10.

Weilbeer, M., 2005, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background, US Army Medical Research and Material Command, *Carl-Friedrich-GauB Mathematik und Informatik*, Technischen Universtät Braunschweig,21-28, 45-59, 150-153.

Yang, X.J., Srivastava, H.M., Machado, J.A.T., 2016, A new fractional derivatives without singular kernel: application to the modelling of the steady heat flow, *Therm. Sci.* 20, 753–756.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Raad Ali Ameen
Uyruğu : Irak
Doğum Yeri ve Tarihi : Kerkük 05.01.1971
Telefon : 05373032538
Faks :
e-mail : raad.ameen85@gmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Merkezi Al-Ta'mim Erkek Lisesi, Kerkük, Irak	1988
Üniversite	:	Mosul Üniversitesi, Mosul, Irak	1992
Yüksek Lisans	:	Çankaya Üniversitesi, Ankara, Türkiye	2014
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Konya, Türkiye	2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
1992-1998	İbn Hazım Mesleki Lisesi	Matematik ve Bilgisayar öğretmeni
1998-2003	Merkezi Al-Ta'mim Lisesi	Bilgisayar öğretmeni
2003-2004	Kerkük Eğitim Müdürlüğü	Bilgisayar Bölüm Başkanı
2004- 2011	Kerkük Eğitim Müdürlüğü	Müfettiş

UZMANLIK ALANI

Matematik ve Bilgisayar

YABANCI DİLLER

(Arapça, İngilizce, Türkçe, Kürtçe)

YAYINLAR*

Gambo,Y., Ameen, R., Jarad, F., Abdeljawad, T., 2018, Existence and uniqueness of solutions to fractional differential equations in the frame of generalized Caputo fractional derivatives, *Advances in Difference Equations,* (2018) 2018:134. (Doktora tezinden yapılmıştır)

Ameen, R., Jarad, F., Abdeljawad, T., 2018, Ulam Stability for Delay Fractional Differential Equations with a Generalized Caputo Derivative, *Filomat* 32:15 (2018), 5265–5274. (Doktora tezinden yapılmıştır)

Ameen, R., Köse, H., Jarad, F., 2019, On The Discrete Laplace Transform, *Results in Nonlinear Analysis*, 2 (2019) No. 2, 61-70. (Doktora tezinden yapılmıştır)