



T.C. SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL MATRİS FONKSİYONLARI VE KOMÜTATÖRLER

Osman KAN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

ARALIK-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

BAZI ÖZEL MATRİS FONKSİYONLARI VE KOMÜTATÖRLER

Osman KAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

2019, 117 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. E. Gökçen KOÇER
Doç. Dr. Aynur YALÇINER
Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ
Dr. Öğretim Üyesi Bünyamin ŞAHİN

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $[A,B] = AB - BA$ şeklinde tanımlanan matris komütatörleri matematik, matematiksel fizik, kuantum fiziği, kuantum kimyası gibi bilimin birçok farklı alanında önemli rol oynamaktadır. Özellikle kuantum fiziğinde gözlemlenebilir iki özelliğin aynı anda ölçülüp ölçülemeyeceğine karar vermek için bu özelliklere ait operatörlerin komütatörüne ihtiyaç duyulmaktadır. Matris komütatörleri alanında yapılan çalışmalar son on beş yıl içerisinde önem kazanmış olup daha çok matris komütatörlerinin normları üzerinde yoğunlaşmaktadır. Bu çalışmalar sonucunda matris komütatörlerinin normları için bazı üst sınırlar elde edilmiştir. Bu doktora tez çalışmasında, bileşenlerinden birisi veya her ikisi birden özel bir matris fonksiyonu olan $[f(A), B]$ ve $[f(A), f(B)]$ ile $[A,B]$ arasındaki ilişkiler ve bu matris komütatörlerinin Frobenius normlarının üst sınırları ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, Matris Komütatörleri Graf Teoriye uygulanarak yeni ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Çalışma boyunca elde edilen sonuçlar nümerik örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matris Fonksiyonları, Matris Komütatörleri, Norm, Üstel Matrisler.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

SOME SPECIAL MATRIX FUNCTIONS AND COMMUTATORS

Osman KAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

2019, 117 pages

Jury
Advisor Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. E. Gökçen KOÇER
Doç. Dr. Aynur YALÇINER
Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ
Dr. Öğretim Üyesi Bünyamin ŞAHİN

Matrix commutators, defined as $[A,B]=AB-BA$ where $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, plays an important role in mathematics, mathematical physics, quantum physics and quantum chemistry. Especially in quantum physics, whether two observables can be measured simultaneously or not depends on the commutator of their operators. In recent decades, studies on matrix commutators have focused on Frobenius norm inequalities and many good results have been obtained. In this PhD thesis, some results on the relations between $[f(A),B]$, $[f(A),f(B)]$ and $[A,B]$, upper bounds for Frobenius norms of $[f(A),B]$ and $[f(A),f(B)]$ are obtained. Moreover, some new and important results are obtained by an application of Matrix Commutators to Graf Theory. In addition, most of the derived results during this study are supported by numerical examples.

Keywords: Exponential Matrix, Matrix Commutators, Matrix Functions, Norm.

ÖNSÖZ

Bu doktora tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN yönetiminde hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne sunulmuştur.

Bu çalışmanın amacı, bileşenleri matris fonksiyonları olan matris komütatörleri için norm eşitsizlikleri elde etmektir. Tez, beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, matris komütatörlerinin kullanım alanları ve son yıllarda matris komütatörleri alanında yapılan çalışmalarla ilgili literatür araştırması özetlenmiştir. İkinci bölümde, matris teorisinde sıklıkla kullanılan kavramlarla ilgili bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde, matris komütatörlerinin cebirsel özellikleri, Frobenius norm eşitsizlikleri ve bilimin birçok alanında yaygın kullanılan bazı özel matris fonksiyonları hakkında bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, ilk üç bölümde verilen bilgiler ışığında bileşenleri üstel, trigonometrik, hiperbolik matris fonksiyonu ve matris kuvvetleri olan komütatörler ile ilgili elde edilen bulgulara ve matris komütatörlerinden hareketle Graf Teoride büyük öneme sahip Randic indeks için elde edilen yeni ve önemli sonuçlar yer almaktadır. Beşinci bölümde ise bu sonuçları destekleyen nümerik sonuçlara yer verilmiştir.

Bu çalışmayı hazırlamamda emeği geçen değerli tez danışmanlarım Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN ve Prof. Dr. Süleyman SOLAK'a, tez izleme komitesinde bulunan ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım ve desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışma süresince her zaman yanımda olan ve benden desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Osman KAN

KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET **1**

ABSTRACT **2**

ÖNSÖZ **3**

İÇİNDEKİLER **4**

SİMGELER VE KISALTMALAR **6**

1. GİRİŞ **7**

1.1. Amaç ve Kapsam 7
1.2. Kaynak Araştırması 8

2. ÖNBİLGİLER **13**

2.1. Matris Çeşitleri 13
2.2. Özdeğer, Özvektör ve Singüler Değer 14
2.3 İz, Determinant ve Matris Normları 15

3. MATRİS KOMÜTATÖRLERİ VE MATRİS FONKSİYONLARI **18**

3.1 Matris Komütatörleri 18
3.1.1 Matris Komütatörlerinin Özellikleri 18
3.1.2 Matris Komütatörlerinin Normları 19
3.2 Matris Fonksiyonları 22
3.2.1 Ters Matris 28
3.2.2 Matris Karekökü 28
3.2.3 Üstel Matris 29
3.2.4 Trigonometrik Ve Hiperbolik Matris Fonksiyonları 31

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA **35**

4.1. Bileşenleri Üstel Matrisler Olan Komütatörler 35
4.2. Bileşenleri Hiperbolik ve Trigonometrik Matrisler Olan Komütatörler 63
4.2.1 Bileşenleri Hiperbolik Matrisler Olan Komütatörler 63
4.2.2 Bileşenleri Trigonometrik Matrisler Olan Komütatörler 70
4.3. Bileşenleri Matris Kuvvetleri olan Komütatörler 82
4.4. Bir Graf Teori Uygulaması 88

5. NÜMERİK SONUÇLAR **93**

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **108**

6.1 Sonuçlar 109
6.2 Öneriler 109

KAYNAKLAR 110

ÖZGEÇMİŞ 113

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0$	: $[0,\infty)$ aralığındaki reel sayıların kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^n$	: n tane kompleks bileşenli vektörlerin kümesi
$M_n(\mathbb{R})$	: Reel bileşenli n- kare matrislerin kümesi
$M_n(\mathbb{C})$	: Kompleks bileşenli n- kare matrislerin kümesi
$A=(a_{ij})$	: a_{ij} elemanlarından oluşan matris
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^T	: A matrisinin transpozesi
$\overline{A}$	: A matrisinin eşleniği
A^*	: A matrisinin eşlenik transpozesi
$A^{1/2}$	: A matrisinin karekökü
A^s	: A matrisinin $s.$ kuvveti
$\lvert A\rvert$	: $(A^*A)^{1/2}$
$\det(A)$	: A matrisinin determinantı
$iz(A)$	: A matrisinin izi
$\lambda_i(A)$	: A matrisinin özdeğerleri
$\sigma_i(A)$	: A matrisinin singüler değerleri
$\lVert A\rVert_F$	: A matrisinin Frobenius normu
$\lVert A\rVert_{k,p}$	: A matrisinin Ky-Fan k,p normu
$[A,B]$	: A ve B matrislerinin komütatörü
$f(A)$	: A matrisinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
e^A	: A matrisinin üstel matris fonksiyonu

1. GİRİŞ

Matris teori matematik bilim dalının en temel araçlarından biridir. Bu alanda elde edilen eşitsizlikler ise matris analizi alanında yapılan bütün çalışmalara kolaylık sağlamaktadır. Çalışmamıza temel teşkil eden komütatör kavramı ise bilimin farklı alanlarında farklı anlamlar taşımaktadır. Örneğin, quantum fiziğinde farklı iki operatörün eş zamanlı ölçülebilirliğini test ederken, soyut cebirde değişmeli olmayan bir G grubuna ait a ve b elemanlarının değişim ölçüsü $\left(ab=[a,b]ba\right)$ olarak ele alınabilmektedir. Matris komütatörleri ise bir H halkası üzerinde $A,B\in M_n$ olmak üzere $[A,B]=AB-BA$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Matris komütatörleri alanında yapılan çalışmalar son on beş yıl içerisinde önem kazanmış olup daha çok matris komütatörlerinin normları ve singüler değerleri üzerinde yoğunlaşmaktadır. Matris komütatörlerinin normları ile ilgili çalışmalar 2005 yılında A. Böttcher ve D. Wenzel'in $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere $\|[A,B]\|_F^2$ ifadesinin değerinin ne kadar büyük olabileceği sorusunu sormaları ile önem kazanmıştır. Bu tarihten itibaren yapılan çalışmalar sonucunda ilgi çekici sonuçlar elde edilmiş hatta bu sonuçlar kompleks bileşenli matrisler alanına genellenmiştir.

Matris fonksiyonları, matris cebiri kadar geniş bir geçmişe sahiptir. Bu alandaki çalışmalar Cayley'in (Cayley, 1858) matris karekökünü hesaplaması ile başlamış ve geçen yüzyıl boyunca birçok matematikçi tarafından geliştirilmiştir. Günümüzde ise matris fonksiyonları fen ve mühendislik alanlarında artan bir ilgi ile kullanılmaya devam etmektedir (Higham & Al-Mohy, 2010). Bu alanda yapılan çalışmalar öncelikle bazı özel fonksiyonlar (karekök, polinom, üstel vb.) üzerinde yoğunlaşırken günümüzde yapılan çalışmalar daha çok herhangi bir fonksiyonun matris formunu elde edebilme üzerine yoğunlaşmaktadır.

1.1. Amaç ve Kapsam

$A,B\in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $[A,B]=AB-BA$ şeklinde tanımlanan komütatörler matematik, matematiksel fizik, quantum fiziği, quantum kimyası gibi bilimin birçok

farklı alanında kullanılmaktadır (Audenaert, 2010). Matris komütatörlerinin kuantum fiziği alanındaki rolü bir hayli dikkat çekicidir.

Ölçüm teorisi quantum mekaniğinin temel çalışma alanlarındandır. Kuantum mekaniğinde, gözlemlenebilen nicelikler "**observable**" olarak adlandırılır ve Hilbert uzayına ait Hermityen operatörlerle ifade edilir. Gözlemlenebilen iki niceliğin eş zamanlı ölçümü bu niceliklere ait operatörlerin komütatörleri ile ilişkilendirilir. Komütatörleri 0'a eşit olan, $\left([A,B]=0\right)$, nicelikler uyumlu nicelikler olarak adlandırılıp aynı anda ölçülebilirken komütatörü 0'a eşit olmayan, $\left([A,B]\neq 0\right)$, nicelikler uyumsuz nicelikler olarak adlandırılır ve aynı anda ölçülemezler. Heisenberg Belirsizlik İlkesi bu tipteki niceliklerin ölçümündeki belirsizliği yine bu niceliklerin komütatörlerine bağlı olarak açıklar (D'Alessandro, 2007).

Birçok fiziksel olgu matematiksel kurallara bağlı olarak gerçekleşir ve diferansiyel denklemlerle ifade edilir (Grant B Gustafson & Wilcox, 2012). Bununla birlikte matris fonksiyonları da lineer cebir, fizik ve mühendislik alanlarında kullanılmaktadır. Örneğin, üstel matris fonksiyonu, trigonometrik ve hiperbolik matris fonksiyonları diferansiyel denklem çözümlerinden ortaya çıkan matris fonksiyonlarıdır.

Matris komütatörleri ile ilgili çalışmalar; matris teori, cebir ve fizik (özellikle quantum fiziği) gibi farklı dallarda karşımıza çıkmakta olup son 15 yılda yapılan çalışmalar daha çok matris komütatörlerinin Frobenius normları için üst sınır elde etme şeklindedir. Dolayısıyla matris fonksiyonlarının komütatörleri ile ilgili elde edilecek bulguların bu alanlarda yapılacak çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu çalışmada bizim amacımız komütatör tanımında, matrislerden birini veya her ikisini birden özel, diferansiyel denklem çözümlerinden doğan ve matris teoride sıklıkla kullanılan, matris fonksiyonu seçerek çalışmalara yeni bir boyut kazandırmaktır.

1.2. Kaynak Araştırması

Çalışmamızın bu kısmında matris teorisine kısmen yön veren ve çalışmamızda kullandığımız bazı kitap ve makalelere yer verilmiştir.

Topics in Matrix Analysis (Horn & Johnson, 1991): Matris analizi alanındaki en temel kaynaklardan biri olan bu kitap matrislerin özdeğer ve özvektörleri, matrisler

arasındaki benzerlik bağıntıları, matrislerin kanonik formları, matris normları, özel matris yapıları ve bu yapıların analizi konularında detaylı bilgi içermektedir.

Matrix Analysis (Bhatia, 2013): Matris analizi alanındaki en temel kaynaklardan bir diğeri olan bu kitap matrislerin özdeğerleri ile ilgili temel eşitsizlikler, simetrik matris normları, operatör ve matris fonksiyonları ile ilgili detaylı bilgi içermektedir. Çalışmamıza bir bütün olarak katkı sağlayacağı düşünülen bu kitabın özellikle matris ve operatör fonksiyonları kısmından yararlanılacaktır.

Matrix Theory Basic Results and Techniques (Zhang, 2011): Bu kitapta temel lineer cebir kavramlarının tanımları, parçalı matrisler, rank, özdeğerler, üniter matrisler ve daraltma matrisleri, hermityen ve pozitif yarı tanımlı matrisler, matris normları ve matris eşitsizlikleri gibi matris teorinin başlıca tanım ve teoremleri ele alınmıştır.

How big can the commutator of two matrices be and how big is it typically? (Böttcher & Wenzel, 2005): Bu makalede matris komütatörlerinin normlarının ne kadar büyük olabileceği sorusuna yanıt aranmıştır. Daha sonra genel olarak geçerli olduğu ispat edilecek olan $\|AB-BA\|_F^2 \le 2\|A\|_F^2\|B\|_F^2$ eşitsizliğinin 2×2 mertebeli A ve B reel matrislerinden herhangi birinin normal olması durumunda geçerli olduğu gösterilmiştir. Bu çalışma matris komütatörleri alanında yapılan çalışmalar için öncü niteliktedir.

Functions of matrices (Higham, 2006): Bu çalışmada herhangi bir matris fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için gereken şartlar, matris fonksiyonlarının elde edilme biçimleri ve genel olarak matris fonksiyonlarının sahip olduğu bazı özelikler ele alınmıştır. Bununla birlikte üstel matris, matris karekökü, bir matrisin sinüsü ve kosinüsü, bir matrisin logaritması gibi özel matris fonksiyonlarına örnekler verilmiştir.

Proof of Böttcher and Wenzel's conjecture on commutator norms for 3-by-3 matrices (László, 2007): Bu makalede A.Böttcher ve D.Wenzel'e (2005) ait olan $\|AB-BA\|_F^2 \le 2\|A\|_F^2\|B\|_F^2$ eşitsizliğin 3×3 mertebeli matrisler içinde geçerli olduğu gösterilmiştir.

Inequalities for commutators of positive operators (Kittaneh, 2007): Bu makalede kompleks Hilbert Uzayına ait pozitif operatörlerin komütatörleri ele alınmış, bu komütatörlerin singüler değerleri, operatör ve Frobenius normları üzerine bazı bulgular elde edilmiş ve elde edilen bulgular özel durumlara taşınarak operatörlerin kuvvetlerini içeren komütatörlerle ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Positive Definite Matrices (Bhatia, 2009): Bu kitapta pozitif tanımlı matrislerin yapısal özellikleri, monotonluk ve konvekslikleri, matrislerin geometrik ve harmonik ortalamaları, pozitif lineer dönüşümler, pozitif tanımlı fonksiyonlar ve bu alanlarda elde edilen eşitsizlikler ile ilgili detaylı bilgi bulunmaktadır.

Norms of commutators of self-adjoint operators (Wang & Du, 2008): Bu makalede Hermityen $\left(A = A^*\right)$ operatörlere ait komütatörlerin normları ile ilgili eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen bazı bulgular (Kittaneh, 2007)' deki bulguları geliştirici niteliktedir.

Proof of Böttcher and Wenzel's conjecture (Vong & Jin, 2008): Bu makalede A.Böttcher ve D.Wenzel tarafından 2005 yılında 2×2 mertebeli reel matrisler için geçerli olduğu gösterilen ve daha sonra 3×3 mertebeli reel matrisler için de geçerli olduğu L. Laszlo tarafından ispat edilen $\|AB-BA\|_F^2 \le 2\|A\|_F^2\|B\|_F^2$ komütatör eşitsizliğinin $n\times n$ reel matrisler içinde geçerli olduğu gösterilmiştir.

The Frobenius norm and the commutator (Böttcher & Wenzel, 2008): Bu makalede, A. Böttcher ve D. Wenzel, 2005 yılında reel matrisler için elde ettikleri $\|AB-BA\|_F^2 \le 2\|A\|_F^2\|B\|_F^2$ komütatör eşitsizliğinin $n\times n$ reel matrisler için de geçerli olduğunu Wong ve Jin'in çalışmasından bağımsız bir şekilde göstermişlerdir. İlave olarak $\|AB-BA\|_F^2 \le 2\|A\|_F^2\|B\|_F^2$ eşitsizliğinin *n*x*n* kompleks matrisler için de geçerli olduğu gösterilmiştir.

Theory of Matrix Functions: Functions of Matrices (Higham, 2008): Bu kitapta matris fonksiyonlarının tanımları ve elde edilme biçimleri, bir kare matrisin üstel,

karekök, p . kök, logaritma, sinüs ve kosinüs fonksiyonları altındaki görüntüsü ve bu matris fonksiyonlarının uygulama alanları ile ilgili detaylı bilgi verilmektedir.

Variance bounds, with an application to norm bounds for commutators (Audenaert, 2010): Bu makalede daha önceki çalışmalardan farklı olarak matris komütatörlerinin üniter invaryant ve schatten *p*-normlarının sınırları ele alınmıştır. X ve Y genel kompleks matrisler olmak üzere; üniter invaryant normlar için $\left\|\left[X,Y\right]\right\| \le \left\| |X|^s \right\|^{1/s} \left\| |Y|^t \right\|^{1/t}$ eşitsizliğinin, schatten *p*-normları için ise $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ olmak üzere $\left\|\left[X,Y\right]\right\|_p \le 2\left\|X\right\|_q \left\|Y\right\|_r$ eşitsizliğinin geçerli olduğu gösterilmiştir.

Computing Matrix Functions (Higham & Al-Mohy, 2010): Bu makalede $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ olmak üzere, $f\left(A\right)$ matris fonksiyonunun Taylor seri açılımları ve Jordan kanonik formları, $\left(A = ZJ_AZ^{-1},\ J_A = \text{diag}\left(j_1\left(\lambda_1\right), j_2\left(\lambda_2\right), \ldots, j_p\left(\lambda_p\right)\right)\right)$ kullanılarak tanımlanabilmesi için A matrisinin taşıması gereken özellikler ve bazı özel $f\left(A\right)$ matris fonksiyonların bu tanımlamalar kullanılarak elde edilmesi üzerinde durulmuştur.

A Short Note on the Frobenius Norm of the Commutator (Wu & Liu, 2010): Bu makalede, A.Böttcher ve D.Wenzel'in 2005 yılında reel matrisler için elde ettikleri $\left\|AB-BA\right\|_F^2 \le 2\left\|A\right\|_F^2 \left\|B\right\|_F^2$ komütatör eşitsizliği geliştirilmiş ve daha hassas bir üst sınır içeren $\left\|AB-BA\right\|_F^2 \le 2\left\|A\right\|_F^2 \left\|B\right\|_F^2 - 2\left[iz\left(A^TB\right)\right]^2$ eşitsizliği elde edilmiştir. Bununla birlikte $A,B \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ olmak üzere $\left\|AB-BA\right\|_F^2 \le \frac{1}{2}\left\|A+B\right\|_F^2 \left\|A-B\right\|_F^2$ eşitsizliğinin de geçerli olduğu ispatlanmıştır.

On Schatten p-norms of commutators (Cheng & Lei, 2015): Bu makalede daha önce M. Audenaert tarafından ele alınan matris komütatörlerinin schatten *p* normları $\left(\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}, \left\|\left[X,Y\right]\right\|_p \le 2\left\|X\right\|_q \left\|Y\right\|_r \right)$ $d \ge 3$ olmak üzere, $d \times d$ mertebeli matrisler için tekrar ele alınmış ve buradaki *d, p, r* ve *q* tamsayılarının tek veya çift olması durumları ile ilgili bulgular elde edilmiştir.

Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix (Moler & Van Loan, 1978): Üstel matrisler alanındaki en önemli makalelerden biri olan bu çalışmada, literatürde yer alan 19 üstel matris hesaplama yönteminin her birinin hassas hesaplamalardaki dezavantajları sebepleriyle ele alınmış ve bu yöntemlerden hangisinin daha doğru sonuçlar vereceği sorusunun araştırmanın orijinal problemine göre değişebileceğinden bahsedilmiştir.

Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix- Twenty Five Years Later (Moler & Van Loan, 2003): Bu çalışmada yazarlar daha önce elde ettikleri sonuçları güncelleyerek Scaling and Squaring, $e^A = \left(e^{A/2^s} \right)^{2^s}$, yönteminin diğer yöntemlere kıyasla daha hassas hesaplamalar sağladığı görüşünü ortaya atmışlardır.

2. ÖNBİLGİLER

2.1. Matris Çeşitleri

Çalışmamızın bu kısmında matris teoride var olan ve çalışmamızda kullandığımız bazı temel tanım, kavram ve notasyonlardan bahsedilmiştir.

Tanım 2.1.1 : $A=(a_{ij})\in M_n$ olmak üzere A matrisi ;

- $j>i$ için a_{ij}=0 ise Alt üçgen matris,
- $j<i$ için a_{ij}=0 ise Üst üçgen matris,
- $j\neq i$ için a_{ij}=0 ise Köşegen matris,
- $j\neq i$ için a_{ij}=0 ve a_{ii}=1 ise Birim matris,
- $\forall i,j$ için $a_{ij}=a_{ji}$ ise Simetrik matris,
- $\forall i,j$ için $a_{ij}=-a_{ji}$ ise Ters simetrik matris,
- $\forall i,j$ için $a_{ij}=\left(\overline{a_{ji}}\right)$ ise Hermityen matris,
- $\forall i,j$ için $a_{ij}=-\left(\overline{a_{ji}}\right)$ ise Ters hermityen matris

olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2 : $Q\in M_n(\mathbb{R})$ ve I birim matris olmak üzere $QQ^T=I$ şartını sağlayan Q matrisine **ortogonal matris** denir.

Tanım 2.1.3 : $A\in M_n(\mathbb{R})$ ve I birim matris olmak üzere $AA^T=I$ ve $\det(A)=1$ şartını sağlayan matrislere **rotasyon matrisi** denir.

Tanım 2.1.4 : $U\in M_n(\mathbb{C})$ ve I birim matris olmak üzere $UU^*=I$ şartını sağlayan U matrisine **üniter matris** denir.

Tanım 2.1.5 (İnvolutif Matris): $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $A^2 = I$ şartını sağlayan matrislere **involutif matris** denir.

Tanım 2.1.6 (Pozitif Yarı Tanımlı Matris): $A \in M_n$ Hermityen matris ve $(.,.)$, $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir Öklidyen iç çarpım olmak üzere eğer $\forall x \in \mathbb{C}^n$ için $(Ax, x) = x^* Ax \geq 0$ ise $A \in M_n$ matrisine **pozitif yarı tanımlı matris** denir ve $A \geq 0$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde $\forall x \in \mathbb{C}^n$ için $(Ax, x) = x^* Ax > 0$ ise $A \in M_n$ matrisine **pozitif tanımlı matris** denir.

2.2. Özdeğer, Özvektör ve Singüler Değer

Tanım 2.2.1: $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere; $Ax = \lambda x$ eşitliğini sağlayacak şekilde $x \neq 0$ vektörü varsa λ' lara A matrisinin **özdeğerleri,** $\lambda(A)$, bu λ' lara karşılık gelen x' lere ise A matrisinin **özvektörleri** denir. Bununla birlikte $\det(A - \lambda I) = 0$ denklemine A matrisinin **karakteristik denklemi** denir ve bu denklemin kökleri A matrisinin özdeğerlerine eşittir. Bu denklem açık olarak;

$$|A - \lambda I| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 .$$

- Köşegen, alt üçgen ve üst üçgen matrislerin özdeğerleri köşegen elemanlarıdır.
- Keyfi bir kare matrisin özdeğerleri komplekstir.
- Hermityen matrislerin özdeğerleri reeldir.
- Ters hermityen matrislerin özdeğerleri pür imajinerdir.

Tanım 2.2.2: Herhangi bir A matrisinin özdeğerlerinden oluşan kümeye bu matrisin **spektrumu** denir ve

$$spec(A) = \{\lambda_1(A), \lambda_2(A), \cdots, \lambda_n(A)\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.3: Keyfi bir A matrisinin singüler değerleri; A^*, A matrisinin eşlenik transpozesi olmak üzere $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i\left(A^*A\right)}$ şeklinde tanımlanır. Bir matrisin singüler değerlerinin en büyüğüne bu matrisin **spektral normu** denir. Hermityen ve pozitif yarı tanımlı matrislerin singüler değerleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ olmak üzere; $A = A^* \Rightarrow \sigma_i\left(A\right) = \left|\lambda_i\left(A\right)\right|$,

$$\sigma_i\left(A\right) = \left(\lambda_i\left(A^*A\right)\right)^{1/2} = \left(\lambda_i\left(A^2\right)\right)^{1/2} = \left(\lambda_i^{\,2}\left(A\right)\right)^{1/2} = \left|\lambda_i\left(A\right)\right|.$$

- $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ olmak üzere; $A \geq 0 \Rightarrow \sigma_i\left(A\right) = \lambda_i\left(A\right)$,

$$\sigma_i\left(A\right) = \left(\lambda_i\left(A^*A\right)\right)^{1/2} = \left(\lambda_i\left(A^2\right)\right)^{1/2} = \left(\lambda_i^{\,2}\left(A\right)\right)^{1/2} = \left|\lambda_i\left(A\right)\right| = \lambda_i\left(A\right).$$

2.3 İz, Determinant ve Matris Normları

Tanım 2.3.1: Bir kare matrisin köşegen elemanlarının toplamına bu **matrisin izi** denir.

$$iz\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Bununla birlikte bir kare matrisin özdeğerlerinin toplamı da bu matrisin izini verir.

$$iz\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Tanım 2.3.2: $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ olsun. Bu durumda A matrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\det\left(A\right) = \sum_{\sigma \in S_n} s\left(\sigma\right) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Burada S_n, n elemanlı bir kümenin permütasyonlar kümesini, $s\left(\sigma\right)$ permütasyonların işaretini ve $\sigma\left(i\right)$ ise i'nin permütasyon altındaki görüntüsünü verir. Bununla birlikte bir kare matrisin determinantı özdeğerlerinin çarpımına eşittir.

$$\det\left(A\right) = \left|A\right| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Tanım 2.3.3: $\left\|.\right\| : M_n \to \mathbb{R}_0$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlaması halinde bir **matris normu** olarak adlandırılır.

1. $\|A\| \geq 0$, $\left(\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0\right)$

2. $\|cA\| = |c|\|A\|$, $\left(\forall c \in \mathbb{C}\right)$

3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\left(\text{Üçgen Eşitsizliği}\right)$

4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Tanım 2.3.4: $A \in M_{mxn}\left(\mathbb{C}\right)$ olmak üzere A matrisinin l_p **normu**;

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki p değerinin özel durumlarında bilinen bazı matris normları elde edilir:

- $p = 2$ için $\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ Frobenius Normu
- $p = 1$ için $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ Sütun Normu
- $p = \infty$ için $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ Satır Normu

Tanım 2.3.5: $A \in M_{mxn}\left(\mathbb{C}\right)$ olmak üzere A matrisinin **spektral normu**;

$$\|A\|_s = \max \sqrt{\lambda_i \left(A^* A\right)}$$

şeklinde tanımlanır. Bir matrisin spektral normu en büyük singüler değerine eşittir.

Tanım 2.3.6: $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ ve $\|.\|$ bir vektör normu olmak üzere;

$$\|\|A\|\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

şeklinde tanımlanan norma **operatör normu** denir. Bu norm vektör normlarına bağlı olarak elde edilir. l_p normundan farklı olarak birim matrisin operatör normu 1'e eşittir.

$$\|I\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} 1^p \right)^{\frac{1}{p}} = n^{1/p} \qquad l_p \text{ normu}$$

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = \|x\| = 1 \qquad \text{Operatör Normu}$$

Tanım 2.3.7: $A \in M_n(\mathbb{C})$ ve U,V üniter matrisler olmak üzere $\|UAV\| = \|A\|$ şartını sağlayan normlara **üniter invaryant norm** denir. Singüler değerlere bağlı olarak tanımlanan bütün normlar üniter invaryant normdur. Örneğin herhangi bir A kare matrisinin Frobenius normu üniter invaryant normdur. Çünkü

$$\begin{aligned}\|UAV\|_F &= \sqrt{iz\left[(UAV)^*(UAV)\right]} = \sqrt{iz\left(V^*A^*\underbrace{U^*U}_{I}AV\right)} \\ &= \sqrt{iz\left(V^*A^*AV\right)} \\ &= \sqrt{iz\left(\underbrace{VV^*}_{I}A^*A\right)} \\ &= \sqrt{iz\left(A^*A\right)} = \|A\|_F .\end{aligned}$$

Tanım 2.3.8: A singüler değerleri $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_n(A)$ olan keyfi bir matris ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere,

$$\|A\|_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan matris normuna **Ky-Fan k - normu** denir.

Tanım 2.3.9: A singüler değerleri $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_n(A)$ olan keyfi bir matris ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere,

$$\|A\|_{(k),p} = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i{}^p(A)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan matris normuna **Ky-Fan (k,p) normu** denir.

3. MATRİS KOMÜTATÖRLERİ VE MATRİS FONKSİYONLARI

Bu kısımda matris komütatörleri ve matris fonksiyonlarının tanımları ve bu alanlarda yapılan çalışmalara yer verilecektir.

3.1 Matris Komütatörleri

Komütatörler matematiğin, matematiksel fiziğin, kuantum fiziğinin ve kuantum kimyasının birçok alanında önemli rol oynarlar. Şimdi kömütatörlerin matematiğin farklı cebirsel yapılarındaki tanımlarını verelim.

Tanım 3.1.1 (Grup Teori): G bir gurp ve $a,b \in G$ olsun. Bu durumda $aba^{-1}b^{-1}$ elemanına a ve b elemanlarının komütatörü denir ve $[a,b]$ ile gösterilir. Burada $ab = [a,b]ba$ dır.

Tanım 3.1.2 (Halka Teori): H bir halka ve $a,b \in H$ olsun. Bu durumda $ab-ba$ elemanına a ve b elemanlarının komütatörü denir ve $[a,b]$ ile gösterilir. $(M_n(\mathbb{C}),+,.)$ halkasını ele alacak olursak; $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere bu iki matrisin komütatörü $[A,B] = AB - BA$ şeklinde tanımlanır. Genel olarak matrislerde çarpma işlemi değişmeli olmadığından $[A,B] = AB - BA$ ifadesi de bir $C \neq 0$ matrisine eşittir.

3.1.1 Matris Komütatörlerinin Özellikleri

$\forall A,B,C \in M_n(\mathbb{C})$ ve $b,c \in \mathbb{C}$ olmak üzere matris komütatörleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $[A,A] = 0$
2. A ve B değişmeli matrisler olmak üzere, $[A,B] = 0$.
3. A ve B keyfi matrisler olmak üzere, $[A,B] = -[B,A]$.
4. $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ ve $b,c \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $[A,bB+cC] = b[A,B] + c[A,C]$.

$$\begin{aligned}\left[A,bB+cC\right] &= A\left(bB+cC\right)-\left(bB+cC\right)A \\ &= bAB+cAC-bBA-cCA \\ &= bAB-bBA+cAC-cCA \\ &= b\left(AB-BA\right)+c\left(AC-CA\right) \\ &= b\left[A,B\right]+c\left[A,C\right]\end{aligned}$$

5. $A,B,C\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ olmak üzere, $\left[A,BC\right]=B\left[A,C\right]+\left[A,B\right]C$.

$$\begin{aligned}\left[A,BC\right] &= ABC-BCA \\ &= ABC-BCA+BAC-BAC \\ &= BAC-BCA+ABC-BAC \\ &= B\left[A,C\right]+\left[A,B\right]C\end{aligned}$$

6. $A,B,C\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ olmak üzere, $\left[A,\left[B,C\right]\right]+\left[B,\left[C,A\right]\right]+\left[C,\left[A,B\right]\right]=0$.

$$\begin{aligned}\left[A,\left[B,C\right]\right] &= ABC-ACB-BCA+CBA \\ \left[B,\left[C,A\right]\right] &= BCA-BAC-CAB+ACB \\ +\left[C,\left[A,B\right]\right] &= CAB-CBA-ABC+BAC \\ \hline \left[A,\left[B,C\right]\right]+\left[B,\left[C,A\right]\right]+\left[C,\left[A,B\right]\right] &= 0\end{aligned}$$

3.1.2 Matris Komütatörlerinin Normları

$A,B\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ değişmeli olmayan matrisler olmak üzere, bu matrislerin komütatörü, $\left[A,B\right]=AB-BA$, de bir $n\times n$ kompleks matristir. Bu durumda iki matrisin komütatörlerinin normu da hesaplanabilir. Böttcher ve Wenzel 2005 yılındaki bir çalışmalarında bir matris komütatörünün Frobenius normunun karesinin, $\left\|\left[A,B\right]\right\|_F^2$, ne kadar büyük olabileceği sorusunu sormuşlardır. Matris normlarının özellikleri kullanılarak bu soru ile ilgili basit bir sınıra ulaşılabilir.

$$\left\|\left[A,B\right]\right\|_F^2=\left\|AB-BA\right\|_F^2\le\left(\left\|AB\right\|_F+\left\|BA\right\|_F\right)^2\le\left(\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F+\left\|B\right\|_F\left\|A\right\|_F\right)^2$$

Burada A ve B matrislerini $\left\|A\right\|_F=1$ ve $\left\|B\right\|_F=1$ olacak şekilde seçersek;

$$\left\|[A,B]\right\|_F^2 \le \left(\left\|A\right\|_F \left\|B\right\|_F + \left\|B\right\|_F \left\|A\right\|_F\right)^2$$
$$\left\|[A,B]\right\|_F^2 \le (1+1)^2 = 4$$
$$\left\|[A,B]\right\|_F \le 2$$

elde edilir.

Konjektür (Böttcher & Wenzel, 2005): $A,B \in M_n(\mathbb{R})$ ve $\left\|A\right\|_F = 1,\ \left\|B\right\|_F = 1$ olsun. O zaman;

$$\left\|AB-BA\right\|_F^2 \le 2\left\|A\right\|_F^2 \left\|B\right\|_F^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem (Böttcher & Wenzel, 2005): $\left\|AB-BA\right\|_F^2 \le 2\left\|A\right\|_F^2 \left\|B\right\|_F^2$ eşitsizliği A,B matrislerinden en az birinin normal olması durumunda geçerlidir.

İspat: A matrisi özdeğerleri $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ olan normal bir matris olsun. Bu durumda $A = U^*DU$ olacak şekilde özdeğerleri $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ olan bir D köşegen matrisi vardır. $UBU^* = Z = \left(z_{j,k}\right)$ alınırsa;

$$\left\|AB-BA\right\|_F^2 = \left\|UDU^*B - BUDU^*\right\|_F^2 = \left\|DUBU^* - UBU^*D\right\|_F^2$$
$$= \left\|DZ-ZD\right\|_F^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \left|\lambda_j z_{j,k} - \lambda_k z_{j,k}\right|^2$$
$$= \sum_{j\ne k} \left|\lambda_j - \lambda_k\right|^2 \left|z_{j,k}\right|^2 \le \sum_{j\ne k} 2\left(\left|\lambda_j\right|^2 + \left|\lambda_k\right|^2\right)\left|z_{j,k}\right|^2$$
$$\le \sum_{j\ne k} 2\left\|D\right\|_2^2 \left|z_{j,k}\right|^2 \le 2\left\|D\right\|_F^2 \left\|Z\right\|_F^2 = 2\left\|A\right\|_F^2 \left\|B\right\|_F^2$$

olur ki ispat biter.

Daha sonra Böttcher ve Wenzel bu konjektürlerinin $A,B \in M_2(\mathbb{R})$ olması durumunda geçerli olduğunu gösterip aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem (Böttcher & Wenzel, 2005): $A,B \in M_2(\mathbb{R})$ ise $\left\|AB-BA\right\|_F^2 \le 2\left\|A\right\|_F^2 \left\|B\right\|_F^2$.

Bu çalışmadan sonra L. Laszlo 2007' de bu sonucun $n=3$ içinde geçerli olduğunu gösterdi. Daha sonra W. Vong ve Q. Jin bu teoremin $M_n(\mathbb{R})$ için geçerli

olduğunu 2008 yılında gösterdiler. Bunun üzerine Böttcher ve Wenzel çalışmalarını tekrar ele aldılar ve bu teoremin $M_n(\mathbb{C})$ için geçerliliğini W. Vong ve Q. Jin'in çalışmasından bağımsız bir şekilde gösterdiler.

Teorem (Böttcher & Wenzel, 2008): $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere,

$$\|AB - BA\|_F \leq \sqrt{2}\,\|A\|_F\,\|B\|_F \tag{3.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kompleks matrisler için en genel sonucun bulunmasından sonra D. Wu ve Q. Liu reel matrisler için farklı eşitsizliklerin elde edilebileceğini 2010 yılında yaptıkları çalışmada göstermişlerdir.

Teorem (Wu & Liu, 2010): $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere;

$$\|AB - BA\|_F^2 \leq \frac{1}{2}\|A + B\|_F^2\,\|A - B\|_F^2 .$$

İspat: $P = A - B$ ve $Q = A + B$ olacak şekilde alınırsa, $AB - BA = \frac{1}{2}(PQ - QP)$ elde edilir. Buradan,

$$\|AB - BA\|_F^2 = \frac{1}{4}\|PQ - QP\|_F^2 \leq \frac{2}{4}\|P\|_F^2\,\|Q\|_F^2 = \frac{1}{2}\|A - B\|_F^2\,\|A + B\|_F^2 .$$

Teorem (Wu & Liu, 2010): $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere;

$$\|AB - BA\|_F^2 \leq 2\|A\|_F^2\,\|B\|_F^2 - 2\left[iz\left(A^T B\right)\right]^2 .$$

Teorem (Audenaert, 2010): $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ve $\|A\|_{(2),2} = \sqrt{\sigma_1^{\,2}(A) + \sigma_2^{\,2}(A)}$ olmak üzere,

$$\|[A, B]\|_F \leq \sqrt{2}\,\|A\|_{(2),2}\,\|B\|_F \tag{3.2}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

3.2 Matris Fonksiyonları

Matris fonksiyonları Lineer Cebirin birçok alanında teorik olarak, fen ve mühendisliğin birçok alanında ise uygulamalı olarak kullanılmaktadır. En yaygın kullanılan matris fonksiyonları matris tersi, matris karekökü, matrislerin trigonometrik fonksiyonları, üstel matris ve matris logaritmalarıdır. Ters matris, matris karekökü, logaritmik ve trigonometrik matrisler kuvvet serileri kullanılarak veya lineer olmayan sistemlerin çözümü olarak tanımlanabilir (Smalls, 2007).

Genel matris fonksiyonları birkaç farklı şekilde elde edilebilir. Bu yöntemlerden bir tanesi matrislerde benzerlik bağıntıları ve bu bağıntılardan hareketle elde edilen matris ayrışımlarıdır.

Tanım 3.2.1: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $A = P^{-1}BP$ olacak şekilde bir P düzgün matrisi var ise A ve B matrislerine **benzer matrisler** denir.

Lemma 3.2.1: Benzer matrislerin karakteristik polinomları aynıdır.

İspat: $A = P^{-1}BP$ olsun. Bu durumda;

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - P^{-1}BP| = |P^{-1}(\lambda I - B)P| = |P^{-1}||(\lambda I - B)||P| = |\lambda I - B|.$$

Sonuç 3.2.1: Benzer matrislerin özdeğerleri aynıdır.

İspat: $A = P^{-1}BP$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda(P^{-1}BP) \\ &= \lambda(PP^{-1}B) \\ &= \lambda(IB) \\ &= \lambda(B). \end{aligned}$$

Tanım 3.2.2: $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere A matrisi bir köşegen matrise benzer ise A'ya köşegenleştirilebilir matris denir. Bir kare matrisin köşegenleştirilebilmesi için n tane lineer bağımsız özvektörü olmalıdır.

Tanım 3.2.3: $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $A = UBU^*$ olacak şekilde bir U üniter matrisi var ise A matrisi B matrisine üniter olarak denktir denir. Herhangi bir kare matrisin üniter denklikleri kullanılarak matris ayrışımları elde edilir.

Tanım 3.2.4 (Schur Ayrışımı): $A \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. Bu durumda U bir üniter matris ve T bir üst üçgen matris olmak üzere, $U^*AU = T$. Buradan

$$A = UTU^* = U \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix} U^* .$$

Tanım 3.2.5 (Spektral Ayrışım): Normal bir A matrisi üniter olarak köşegen elemanları A 'nın özdeğerleri olan bir köşegen matrise denktir.

- $AA^* = A^*A \Rightarrow A = UDU^* = Udiag\left(\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)\right)U^*$.

Keyfi bir kare matrisin Schur ayrışımı kullanılarak matris teorisinde yaygın kullanılan sonuçlar elde edilebilir:

i. Bir matrisin izi özdeğerlerinin toplamına eşittir;

- $iz(A) = iz\left(UTU^*\right) = iz\left(U^*UT\right) = iz(T) = \lambda_1(A) + \lambda_2(A) + \cdots + \lambda_n(A)$.

ii. Bir kare matrisin determinantı özdeğerlerinin çarpımına eşittir;

- $\det(A) = \det\left(UTU^*\right) = \det\left(U^*UT\right) = \det(T) = \lambda_1(A)\lambda_2(A)\cdots\lambda_n(A)$.

Normal bir A matrisinin spektral ayrışımı kullanılarak matris teoride yaygın kullanılan sonuçlar elde edilebilir:

iii. A normal bir matris ise,

- $\|A\|_F^2 = iz\left(A^*A\right) = iz\left(UD_A{}^*U^*UD_AU^*\right),$

$$= iz\left(UD_A{}^*D_AU^*\right),$$
$$= iz\left(U^*UD_A{}^*D_A\right),$$
$$= iz\left(D_A{}^*D_A\right),$$

$$= iz\left(\begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right),$$

$$= iz\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

Tanım 3.2.6 (Jordan Kanonik Formu): $A \in M_n(\mathbb{C})$, Z tersinir bir matris ve $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ olmak üzere, A matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Z^{-1}AZ = J = diag\left(J_1, J_2, \cdots, J_p\right), \tag{3.3}$$

$$J_k = J_k(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}. \tag{3.4}$$

Burada (3.3) eşitliğinde gösterilen $\left(J_1, J_2, \cdots, J_p\right)$ matrislerine Jordan blokları denir.

Şimdi yukarıda verilen benzerlik bağıntıları ve matris ayrışımlarından hareketle matris fonksiyonlarının nasıl elde edilebileceğinden bahsedelim.

Lemma 3.2.2 (Gallier, 2011): A matrisinin spektrumu, $spec(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ ve $q(t)$ herhangi bir polinom olmak üzere;

$$spec\left(q(A)\right) = \left\{q(\lambda_1), q(\lambda_2), \cdots, q(\lambda_n)\right\}.$$

İspat: Benzer matrislerin herhangi bir polinom altındaki görüntüleri de benzer olacağından, U üniter matris olmak üzere;

$$U^* q(A) U = q\left(U^* A U\right) = q(T).$$

Dolayısıyla,

$$\lambda_k\left(q(T)\right) = \lambda_k\left(U^* q(A) U\right) = \lambda_k\left(U U^* q(A)\right) = \lambda_k\left(q(A)\right) = q\left(\lambda_k(A)\right),$$

$$spec\left(q(A)\right) = \left\{q(\lambda_1), q(\lambda_2), \cdots, q(\lambda_n)\right\}.$$

Lemma 3.2.2' den hareketle keyfi bir kare matrisin herhangi bir polinom altındaki görüntüsünü hesaplayabilmek için herhangi bir şart olmadığı da anlaşılabilir. A keyfi bir kare matris olmak üzere herhangi bir q polinomu daima A matrisinin spektrumunda

tanımlıdır (Smalls, 2007). Fakat bu durum fonksiyonlar için geçerli değildir. Verilen bir f fonksiyonun A matrisinin spektrumu üzerinde tanımlı olması için bazı sınırlamalar gereklidir. Bu durumun en basit örneği ters fonksiyondur. Ters fonksiyonun herhangi bir özdeğeri 0 olan matrisler üzerinde tanımlı olamayacağı açıktır. Bu yüzden herhangi bir matrisin tersinin tanımı, herhangi bir özdeğeri 0 olmayan yani determinantı 0'dan farklı matrislerle sınırlandırılır. Şimdi verilen bir f fonksiyonun A matrisinin spektrumu üzerinde tanımlı olması için gerekli şartları belirten bir lemma verelim.

Lemma 3.2.3 (Higham & Al-Mohy, 2010): $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ A matrisinin farklı özdeğerleri ve n_i içerisinde λ_i özdeğerinin yer aldığı en geniş Jordan bloğunun sırası olmak üzere, f fonksiyonu aşağıda verilen türev ifadelerinin var olması durumunda A matrisinin spektrumu üzerinde tanımlıdır:

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0 : n_i - 1, \quad i = 1 : s . \tag{3.5}$$

Verilen bir f fonksiyonun herhangi bir $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin spektrumunda tanımlı olma şartını verdikten sonra genel matris fonksiyonlarının elde edilme yöntemlerinden bahsedebiliriz.

Tanım 3.2.7 (Higham & Al-Mohy, 2010): f fonksiyonu $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin spektrumu üzerinde tanımlı ve $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi (3.3)'de verilen Jordan formuna sahip olsun.

$$f(J_k) = \begin{pmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \cdots & \dfrac{f^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ & f(\lambda_k) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_k) \\ & & & f(\lambda_k) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

olmak üzere,

$$f(A) = Zf(J)Z^{-1} = Zdiag\left(f(J_k)\right)Z^{-1}. \tag{3.7}$$

Tanım 3.2.8 (Higham & Al-Mohy, 2010): f fonksiyonu $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin spektrumu üzerinde tanımlı ve ψ; A matrisinin minimal polinomu, p; derecesi ψ

polinomunun derecesinden küçük ve $p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0 : n_i - 1, \quad i = 1 : s$ şartını sağlayan bir polinom olmak üzere, $f(A) = p(A)$.

Tanım 3.2.9 (Dehghan & Hajarian, 2009): $A \in M_n(\mathbb{R})$ ve $spec(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu A matrisinin spektrumunda tanımlı ve $z = \lambda_i$ noktalarında analitik olmak üzere,

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} K[\lambda_1, \cdots, \lambda_i] \prod_{j=0}^{i-1} (A - \lambda_j I). \tag{3.8}$$

Burada

$$K[\lambda_i, \cdots, \lambda_{i+k}] = \frac{f^{(k)}(\lambda_i)}{k!}, \quad f(\lambda_i) = f(\lambda_{i+k}),$$

$$K[\lambda_i, \cdots, \lambda_{i+k}] = \frac{K[\lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_{i+k}] - K[\lambda_i, \cdots, \lambda_{i+k-1}]}{\lambda_{i+k} - \lambda_i}, \quad f(\lambda_i) \neq f(\lambda_{i+k}).$$

Matris fonksiyonu elde etme yöntemlerinden sonra genel matris fonksiyonlarının özelliklerinden bahsedelim.

$A \in M_n(\mathbb{C})$ ve f, A matrisinin spektrumunda tanımlı olmak üzere, $f(A)$ matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar (Higham, 2006):

1. Uygun şartlarda tanımlı $f(A)$ matrisi A matrisi ile değişmelidir.

- $f(A)A = Af(A)$.

2. X matrisi, A matrisi ile değişmeli ise o zaman X ile $f(A)$ matrisi de değişmelidir.

- $AX = XA \Rightarrow f(A)X = Xf(A)$.

3. A^T matrisinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü, $f(A)$ matrisinin transpozesine eşittir.

- $f(A^T) = f(A)^T$. (3.9)

4. $A, X \in M_n(\mathbb{C})$ ve $\det(X) \neq 0$ olmak üzere, $f\left(XAX^{-1}\right) = Xf(A)X^{-1}$.

Bu özellikten hareketle,

i. A keyfi bir kare matris ve T bir üst üçgen matris ve U bir üniter matris olmak üzere,

- $f(A) = Uf(T)U^*$. (3.10)

ii. A normal bir kare matris ve D köşegen elemanları A'nın özdeğerleri olan bir köşegen matris ve U bir üniter matris olmak üzere,

- $f(A) = Uf(D_A)U^*$. (3.11)

5. λ_i' ler A'nın özdeğerleri olmak üzere, $f(A)$'nın özdeğerleri $f(\lambda_i)$'lerdir.

- $spec(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \rightarrow spec(f(A)) = \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)\}$ (3.12)

Bu özellikten hareketle,

i. $A \in M_n(\mathbb{C})$ keyfi bir matris ve T bir üst üçgen ve U bir üniter matris olmak üzere;

- $$f(A) = Uf(T)U^* = U\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & * \\ 0 & f(\lambda_2) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix}U^* \text{ .} \quad (3.13)$$

ii. A matrisi köşegenleştirilebilir bir matris ve U bir üniter matris olmak üzere;

- $$f(A) = Uf(D_A)U^* = U\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix}U^* \text{ .} \quad (3.14)$$

6. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $n \times n$ matrisler olmak üzere;

- $f\left(diag(A_1, A_2, \ldots, A_n)\right) = diag\left(f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_n)\right)$. (3.15)

7. f ve g; A matrisinin spektrumu üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar olmak üzere;

$$\begin{aligned} &\bullet\ h(t)=f(t)+g(t) \text{ ise } h(A)=f(A)+g(A), \\ &\bullet\ h(t)=f(t)g(t) \quad \text{ise } h(A)=f(A)g(A). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Bu kısımda matris teoride sıklıkla kullanılan ve tez çalışmamızda kullanacağımız bazı matris fonksiyonlarının yapısı hakkında bilgi verilecektir.

3.2.1 Ters Matris

Keyfi bir $A\in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin uygun bir f fonksiyonu altındaki görüntüsü (3.13)'den aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(A)=U\begin{pmatrix} f(\lambda_1(A)) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n(A)) \end{pmatrix}U^* .$$

Burada $f(x)$ fonksiyonu özel olarak $f(x)=x^{-1}$ olarak seçilirse A^{-1} matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A^{-1}=U\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1(A)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{1}{\lambda_n(A)} \end{pmatrix}U^* .$$

Buradan, $A\in M_n(\mathbb{C})$ için $f(A)=A^{-1}$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için, yani bir kare matrisin tersinin olabilmesi için hiçbir özdeğerinin 0 olmaması $(0\notin spec(A))$ gerektiği açıktır.

3.2.2 Matris Karekökü

Keyfi bir $A\in M_n(\mathbb{C})$ kare matrisinin uygun bir f fonksiyonu altındaki görüntüsü $T\in M_n(\mathbb{C})$ bir üst üçgen matris olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
f(A) &= Uf(T)U^*, \\
&= Uf\begin{pmatrix} \lambda_1(A) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(A) \end{pmatrix}U^*, \\
&= U\begin{pmatrix} f(\lambda_1(A)) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n(A)) \end{pmatrix}U^*.
\end{aligned}
$$

$f(x)=\sqrt{x}$ olacak şekilde seçilirse, $\sqrt{A}=A^{1/2}$ matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
A^{1/2} = U\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1(A)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n(A)} \end{pmatrix}U^* \ .
$$

Buradan, A $n\times n$ bir kare matris olmak üzere $f(A)=A^{1/2}$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için yani bir kare matrisin karekökünün var olabilmesi için bütün özdeğerlerinin negatif olmayan reel sayılar olması gerektiği görülür.

3.2.3 Üstel Matris

Mühendislik, fizik, biyoloji ve ekonomi ile ilgili problemlerin birçoğunda çözümler; sabit katsayılı birinci dereceden lineer diferansiyel denklemler kullanılarak elde edilir (Fung, 2004). Üstel matris en sık çalışılan matris fonksiyonudur. Üstel matris üzerindeki bu ilginin sebebi yukarıda bahsedilen diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde aldığı roldür. Üstel matrisler birçok farklı yöntem kullanılarak elde edilebilir. C. Moler ve V. Loan bu yöntemleri hesaplamadaki avantaj ve dezavantajları açısından irdelemişlerdir (Moler & Van Loan, 2003). Şimdi bu yöntemlerden birkaç tanesini aşağıda gösterelim.

Keyfi bir $A\in M_n(\mathbb{C})$ kare matrisinin uygun bir f fonksiyonu altındaki görüntüsü $T\in M_n(\mathbb{C})$ bir üst üçgen matris olmak üzere,

$$
f(A) = U\begin{pmatrix} f(\lambda_1(A)) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n(A)) \end{pmatrix}U^*
$$

olduğu (3.13)' de gösterilmişti. Burada $f(x)=e^x$ olacak şekilde seçilirse, e^A matrisi elde edilmiş olur.

$$e^A = U\begin{pmatrix} e^{\lambda_1(A)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n(A)} \end{pmatrix}U^* \tag{3.17}$$

Diğer yandan keyfi bir $A\in M_n(\mathbb{C})$ kare matrisinin $f(x)=e^x$ fonksiyonu altındaki görüntüsü e^x'in Taylor seri açılımı,

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^s}{s!},$$

kullanılarak ta elde edilebilir. Burada x yerine $A\in M_n(\mathbb{C})$ kare matrisi yazılırsa;

$$e^A = \mathrm{I}+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}. \tag{3.18}$$

(3.18)'de verilen bu seri açılımı daima yakınsaktır. Dolayısıyla e^A matrisi her $A\in M_n(\mathbb{C})$ kare matrisi için iyi tanımlıdır. (3.18)' de $A\in M_n(\mathbb{C})$ kare matrisinin yerine Schur ayrışımı yazılırsa;

$$\begin{aligned} e^A &= UU^*+UTU^*+\frac{UT^2U^*}{2!}+\frac{UT^3U^*}{3!}+\cdots+\frac{UT^nU^*}{n!}+\cdots, \\ &= U\left(\mathrm{I}+T+\frac{T^2}{2!}+\frac{T^3}{3!}+\cdots+\frac{T^5}{5!}+\cdots\right)U^*, \\ &= U\begin{pmatrix} 1+\lambda_1+\frac{{\lambda_1}^2}{2!}+\cdots & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+\lambda_n+\frac{{\lambda_n}^2}{2!}+\cdots \end{pmatrix}U^*, \\ &= U\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}U^* \end{aligned}$$

benzerlik dönüşümü kullanılarak elde edilen sonuca, (3.17), ulaşılabilir. Şimdi üstel matrisin sağladığı özelliklerden bahsedelim.

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ve t, s keyfi kompleks sayılar olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- $0 \in M_n$ olmak üzere, $e^0 = I$,
- $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ değişmeli matrisler ve $t \in \mathbb{R}$ ise; $e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$,
- $A \in M_n(\mathbb{C})$ ve $(n \in \mathbb{Z})$ olmak üzere, $\left(e^A\right)^n = e^{(nA)}$,
- $A \in M_n(\mathbb{C})$ tersinir matris olmak üzere, $e^{A^{-1}BA} = A^{-1} e^B A$,
- $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $\left(e^A\right)^T = e^{\left(A^T\right)}$,
- $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $\frac{d}{dt} e^{(At)} = A e^{At}$,
- $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $\det\left(e^A\right) = e^{iz(A)}$,
- $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $e^{At} e^{As} = e^{A(t+s)}$,
- $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $e^A e^{-A} = I$.

3.2.4 Trigonometrik Ve Hiperbolik Matris Fonksiyonları

Trigonometrik matris fonksiyonları, ikinci derece diferansiyel denklemlerin çözümünde ortaya çıkar. Örneğin,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + Ay = 0, \quad y(0) = y_0, \; y'(0) = y_0'$$

denkleminin çözümü;

$$y(t) = \cos\left(\sqrt{A}t\right) y_0 + \left(\sqrt{A}\right)^{-1} \sin\left(\sqrt{A}t\right) y_0'$$

şeklindedir (Higham, 2008). Şimdi trigonometrik matrislerin elde edilme yöntemlerinden bahsedelim. $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $\sin(A)$ ve $\cos(A)$ matrisleri sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının Taylor seri açılımlarından hareketle aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\sin(A) = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \frac{A^7}{7!} + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s A^{2s+1}}{(2s+1)!}, \tag{3.19}$$

$$\cos(A) = I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \frac{A^6}{6!} + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s A^{2s}}{(2s)!}. \tag{3.20}$$

Bununla birlikte, $\sin(A)$ ve $\cos(A)$ matrisleri keyfi bir $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin Schur ayrışımından hareketle aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\sin(A) = U \begin{pmatrix} \sin(\lambda_1(A)) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin(\lambda_n(A)) \end{pmatrix} U^* \ , \tag{3.21}$$

$$\cos(A) = U \begin{pmatrix} \cos(\lambda_1(A)) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos(\lambda_n(A)) \end{pmatrix} U^* \ . \tag{3.22}$$

Bu iki yoldan farklı olarak $\sin(A)$ ve $\cos(A)$ matrisleri Euler Formülü'nden hareketle, $\left(e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$, aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\cos(A) = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2} \ , \tag{3.23}$$

$$\sin(A) = \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i} \ . \tag{3.24}$$

Diğer taraftan trigonometrik matris fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar (Higham, 2008):

1. $A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere,

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = I \ . \tag{3.25}$$

İspat:

$$\left(\frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}\right)^2 = \frac{\left(e^{iA}\right)^2 - 2I + \left(e^{-iA}\right)^2}{4i^2} + \frac{\left(e^{iA}\right)^2 + 2I + \left(e^{-iA}\right)^2}{4}$$

$$= \frac{-\left(e^{iA}\right)^2 + 2I - \left(e^{-iA}\right)^2 + \left(e^{iA}\right)^2 + 2I + \left(e^{-iA}\right)^2}{4}$$

$$= \frac{4I}{4} = I$$

2. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ değişmeli matrisler olmak üzere, aşağıdaki toplam formülleri geçerlidir:

$$\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B), \tag{3.26}$$

$$\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B). \tag{3.27}$$

İspat: Euler formülünün matris formundan hareketle aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$e^{i(A+B)}=\underbrace{\cos(A+B)}_{\text{Re}}+i\underbrace{\sin(A+B)}_{\text{Im}}. \tag{3.28}$$

Bununla birlikte, (3.23)'den hareketle, $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri değişmeli olduğundan

$$\begin{aligned} e^{i(A+B)}&=e^{iA}e^{iB}=\big(\cos(A)+i.\sin(A)\big)\big(\cos(B)+i.\sin(B)\big),\\ e^{i(A+B)}&=\underbrace{\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)}_{\text{Re}}+i\underbrace{\big(\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)\big)}_{\text{Im}}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

(3.28) ve (3.29) eşitliklerinin reel kısımlarının eşitliğinden

$$\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B),$$

imajiner kısımlarının eşitliğinden

$$\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B).$$

3. $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ değişmeli matrisler olmak üzere, trigonometrik yarım açı formüllerinin matris versiyonları aşağıdaki gibidir:

- $\sin(2A)=2\sin(A)\cos(A)$,
- $\cos(2A)=\cos^2(A)-\sin^2(A)$,
- $\cos(2A)=2\cos^2(A)-I$,
- $\cos(2A)=I-2\sin^2(A)$.

İspat: Yukarıdaki eşitliklerin ispatı (3.26) ve (3.27)'ten açıktır.

$A\in M_n(\mathbb{C})$ ve $i^2=-1$ olmak üzere, $\sin(A)$ ve $\cos(A)$ matrislerinde A matrisi yerine iA matrisi yazılarak hiperbolik matris fonksiyonları elde edilir. Birleştirilmiş kısmi diferansiyel denklemler fen bilimleri ve teknoloji alanındaki birçok problemde yer almaktadır. Bu problemlerin çözümleri ise aşağıdaki şekilde tanımlanan hiperbolik matris fonksiyonlarına bağlı olarak verilir (Jódar, Navarro, & Martin, 2000; Jódar, Navarro, Posso, & Casabán, 2003; King & Chou, 1976; Sezgin, 1987):

$$-i\sin(iA)=\sinh(A)=\frac{e^{A}-e^{-A}}{2}, \tag{3.30}$$

$$\cos(iA) = \cosh(A) = \frac{e^{A} + e^{-A}}{2} \ . \tag{3.31}$$

Bununla birlikte hiperbolik matris fonksiyonları seri açılımlarından hareketle, aşağıdaki gibi de tanımlanabilir:

$$\sinh(A) = A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^{2s-1}}{(2s-1)!}, \tag{3.32}$$

$$\cosh(A) = I + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^{2s}}{(2s)!}. \tag{3.33}$$

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu kısımda bileşenleri bazı özel matris fonksiyonları olan komütatörler ile ilgili elde edilen bulgulara yer verilecektir.

4.1. Bileşenleri Üstel Matrisler Olan Komütatörler

Bu kısımda $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $\left[e^A,B\right]$ ve $\left[e^A,e^B\right]$ komütatörlerinin özellikleri ve (3.1) norm eşitsizliğinin üstel matrisler alanına taşınması ile ilgili bulgulara yer verilecektir. Bu bölümdeki sonuçların büyük kısmını içeren "Commutators Involving Matrix Functions (KAN & SOLAK, 2018)" isimli çalışma "Electronic Journal of Linear Algebra (ELA)" isimli sınıflı dergide yayınlanmıştır.

Lemma 4.1.1: $A\in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $\left[e^A,B\right]=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\left[A^s,B\right]}{s!}$.

İspat: $\left[e^A,B\right]=e^AB-Be^A$ olduğu komütatör tanımından açıktır. Bu eşitliğin sağ kısmındaki e^A matrisleri yerine e^A matrisinin seri açılımı yazılarak istenen sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}\left[e^A,B\right]&=\left(I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^s}{s!}+\cdots\right)B-B\left(I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^s}{s!}+\cdots\right),\\&=\left(B+AB+\frac{A^2}{2!}B+\cdots+\frac{A^s}{s!}B+\cdots\right)-\left(B+BA+B\frac{A^2}{2!}+\cdots+B\frac{A^s}{s!}+\cdots\right),\\&=AB-BA+\frac{A^2}{2!}B-B\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^s}{s!}B-B\frac{A^s}{s!}+\cdots,\\&=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\left[A^s,B\right]}{s!}.\end{aligned}$$

■

Sonuç 4.1.1: $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri $\left[A,\left[A,B\right]\right]=0$ şartını sağlamak üzere;

$$\left[e^A,B\right]=e^A\left[A,B\right].$$

İspat: Lemma 4.1.1'de $\left[e^A,B\right]=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\left[A^s,B\right]}{s!}$ olduğu gösterilmişti. Şimdi, $\left[A,\left[A,B\right]\right]=0$ halinde $\left[A^s,B\right]=sA^{s-1}\left[A,B\right]$ olduğunu $\left[AB,C\right]=A\left[B,C\right]+\left[A,C\right]B$ özelliğinden hareketle gösterelim.

$$\begin{aligned}\left[A^s,B\right]&=A^{s-1}\left[A,B\right]+\left[A^{s-1},B\right]A,\\&=A^{s-1}\left[A,B\right]+A^{s-2}\left[A,B\right]A+\left[A^{s-2},B\right]A^2,\\&=\qquad\qquad\vdots\\&=\sum_{r=0}^{s-1}A^{s-r-1}\left[A,B\right]A^r.\end{aligned}$$

Burada, $\left[A,\left[A,B\right]\right]=0$ olduğundan A^r ile $\left[A,B\right]$ değişmelidir. Dolayısıyla,

$$\left[A^s,B\right]=\sum_{r=0}^{s-1}A^{s-r-1}\left[A,B\right]A^r,$$

$$\left[A^s,B\right]=\sum_{r=0}^{s-1}A^{s-1}\left[A,B\right],$$

$$\left[A^s,B\right]=sA^{s-1}\left[A,B\right].$$

Bu sonuç $\left[e^A,B\right]$ komütatöründe yerine yazılırsa,

$$\left[e^A,B\right]=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{sA^{s-1}\left[A,B\right]}{s!},$$

$$\left[e^A,B\right]=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A^{s-1}\left[A,B\right]}{(s-1)!},$$

$$\left[e^A,B\right]=e^A\left[A,B\right]$$

elde edilir ki ispat biter.

■

Teorem 4.1.1: $A,B\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ olmak üzere;

$$\left[e^A,e^B\right]=\sum_{s,t=1}^{\infty}\frac{\left[A^s,B^t\right]}{s!t!}. \tag{4.1}$$

İspat: $\left[e^A,e^B\right]=e^Ae^B-e^Be^A$ olduğu komütatör tanımından açıktır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki e^A ve e^B matrisleri Taylor seri açılımları ile değiştirilerek;

$$e^Ae^B-e^Be^A=\left(I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots\right)\left(I+B+\frac{B^2}{2!}+\cdots\right)-\left(I+B+\frac{B^2}{2!}+\cdots\right)\left(I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots\right),$$

$$= AB - BA + \frac{A^2B - BA^2}{2!} + \frac{AB^2 - B^2A}{2!} + \frac{A^2B^2 - B^2A^2}{2!2!} + \cdots,$$

$$= \left[A, B\right] + \frac{\left[A^2, B\right]}{2!} + \frac{\left[A, B^2\right]}{2!} + \frac{\left[A^2, B^2\right]}{2!2!} + \cdots,$$

$$= \sum_{s,t=1}^{\infty} \frac{\left[A^s, B^t\right]}{s!t!},$$

elde edilir ki ispat biter. ■

Burada A ve B matrisleri özel matrisler olarak seçilirse güzel sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 4.1.2: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri $A^2 = 0$ ve $B^2 = 0$ şartlarını sağlamak üzere;

$$\left[e^A, e^B\right] = \left[A, B\right].$$

İspat: $A^2 = 0$ ve $B^2 = 0$ olduğundan $n \geq 2$ için $A^n = 0$ ve $B^n = 0$ olur. Dolayısıyla e^A ve e^B matrislerinin Taylor seri açılımları sırasıyla $(I + A)$ ve $(I + B)$ olur. Bu ifadeler $\left[e^A, e^B\right] = e^A e^B - e^B e^A$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left[e^A, e^B\right] = e^A e^B - e^B e^A,$$
$$= (I + A)(I + B) - (I + B)(I + A),$$
$$= AB - BA = \left[A, B\right]$$

elde edilir ki ispat biter.

■

Sonuç 4.1.3: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri involutif matrisler olmak üzere;

$$\left[e^A, e^B\right] = \sum_{s,t=1}^{\infty} \frac{\left[A, B\right]}{(2s-1)!(2t-1)!}.$$

İspat: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri involutif matrisler olduğundan bu matrislerin tek kuvvetleri için $A^n = A$ ve $B^n = B$, çift kuvvetleri için $A^n = I$ ve $B^n = I$ olduğu açıktır. Dolayısıyla burada e^A ve e^B matrislerinin Taylor seri açılımları aşağıdaki olur:

$$e^A = I + A + \frac{I}{2!} + \frac{A}{3!} + \cdots + \frac{I}{(2s-2)!} + \frac{A}{(2s-1)!} + \cdots,$$

$$e^B = I + B + \frac{I}{2!} + \frac{B}{3!} + \cdots + \frac{I}{(2t-2)!} + \frac{B}{(2t-1)!} + \cdots.$$

Bu açılımlar $\left[e^A, e^B\right]$' nde yerine yazılırsa;

$$\left[e^A, e^B\right] = \sum_{s,t=1}^{\infty} \frac{[A,B]}{(2s-1)!(2t-1)!}$$

elde edilir ki ispat biter. ■

Sıradaki iki teorem komütatörleri ile değişmeli olan matrisler ile ilgili olacağından öncelikle bu tipteki matrislerle ilgili bir lemma verelim.

Lemma 4.1.2 (Higham, 2008): $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri komütatörleri ile değişmeli olan matrisler olmak üzere;

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}.$$

Teorem 4.1.2: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri komütatörleri ile değişmeli olan matrisler olmak üzere;

$$\left[e^A, e^B\right] = 2e^{A+B} \sinh\left(\frac{[A,B]}{2}\right).$$

İspat: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri komütatörleri ile değişmeli olduğundan $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$ olduğu Lemma 4.1.2'den açıktır. Diğer taraftan, $[B,A] = -[A,B]$ olduğundan $e^B e^A = e^{A+B-\frac{1}{2}[A,B]}$ olur. Bununla birlikte A ve B matrisleri komütatörleri ile değişmeli olduğundan $A+B$ matrisinin $\pm\frac{1}{2}[A,B]$ ile değişmeli olduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla, e^A ve e^B matrislerinin komütatörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}\left[e^A, e^B\right] &= e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} - e^{A+B-\frac{1}{2}[A,B]}, \\ &= e^{A+B}\left(e^{\frac{1}{2}[A,B]} - e^{-\frac{1}{2}[A,B]}\right).\end{aligned}$$

$e^{\frac{1}{2}[A,B]} - e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$ matrisi $2\sinh\left(\frac{[A,B]}{2}\right)$ şeklinde ifade edilebileceğinden,

$\left[e^A, e^B\right] = 2e^{A+B} \sinh\left(\frac{[A,B]}{2}\right)$ olur ki ispat biter. ■

Teorem 4.1.3: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri komütatörleri ile değişmeli olmak üzere;

$$\left[e^A, e^B\right] = \sum_{s,t=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{s-1} \frac{A^{s-r-1} B^{t-1} A^r}{s!(t-1)!} [A, B].$$

İspat: Teorem 4.1.1'de $\left[e^A, e^B\right] = \sum_{s,t=1}^{\infty} \frac{\left[A^s, B^t\right]}{s!t!}$ olduğunu göstermiştik. Buradaki ispatımızı $\left[A^s, B^t\right]$ komütatörünün $[A, B]$ komütatörü ile olan ilişkisi üzerinden yapacağız.

$$\begin{aligned}
\left[A^s, B^t\right] &= A^{s-1}\left[A, B^t\right] + \left[A^{s-1}, B^t\right] A \\
&= A^{s-1}\left[A, B^t\right] + \left(A^{s-2}\left[A, B^t\right] + \left[A^{s-2}, B^t\right] A\right) A \\
&= A^{s-1}\left[A, B^t\right] A^0 + A^{s-2}\left[A, B^t\right] A + \left[A^{s-2}, B^t\right] A^2.
\end{aligned}$$

$\left[A^s, B^t\right]$ komütatöründe A matrisinin kuvvetini yukarıdaki şekilde indirgemeye devam edilirse,

$$\left[A^s, B^t\right] = \sum_{s,t=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{s-1} A^{s-r-1} \left[A, B^t\right] A^r \tag{4.2}$$

eşitliği elde edilir. Bununla birlikte, $\left[B, [A, B]\right] = 0$ olduğundan $\left[A, B^t\right] = t[A, B] B^{t-1}$ olacağı açıktır. Dolayısıyla,

$$\left[A^s, B^t\right] = \sum_{s,t=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{s-1} t A^{s-r-1} B^{t-1} A^r [A, B]. \tag{4.3}$$

Bu eşitlik (4.1)' de yerine yazılırsa,

$$\left[e^A, e^B\right] = \sum_{s,t=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{s-1} \frac{A^{s-r-1} B^{t-1} A^r}{s!(t-1)!} [A, B].$$

■

Bu kısımdan itibaren (3.1) komütatör eşitsizliğinde bileşenlerden birisi veya her ikisi birden matris fonksiyonu olarak seçilirse nasıl bir eşitsizlik elde edilir sorusundan hareketle aşağıda verilen eşitsizlikler ile ilgili bulgulara yer verilecektir.

$$\left\| [f(A), B] \right\|_F \leq c \|A\|_F \|B\|_F, \tag{4.4}$$

$$\left\| [f(A), f(B)] \right\|_F \leq k \|A\|_F \|B\|_F \ . \tag{4.5}$$

Lemma 4.1.3 (Grant B. Gustafson, 2018) (Putzer's Spectral Formula For 2×2 Matrices**):**

- A matrisi özdeğerleri birbirinden farklı reel sayılar $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ olan 2×2 bir matris olmak üzere; $e^{At} = e^{\lambda_1 t} I + \dfrac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_1 I)$,
- A matrisi özdeğerleri aynı reel sayılar $(\lambda_1 = \lambda_2)$ olan 2×2 bir matris olmak üzere; $e^{At} = e^{\lambda_1 t} I + te^{\lambda_1 t}(A - \lambda_1 I)$,
- A matrisi özdeğerleri kompleks sayılar $(\lambda_1 = a + bi,\ \lambda_2 = a - bi)$ olan 2×2 bir matris olmak üzere; $e^{At} = e^{at}\cos(bt) I + \dfrac{e^{at}\sin(bt)}{b}(A - aI)$

eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 4.1.4: A matrisi özdeğerleri birbirinden farklı reel sayılar $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ olan 2×2 bir matris olmak üzere;

$$\left\| \left[e^{A}, B \right] \right\|_F \leq \sqrt{2} \left| \frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right| \|A\|_F \|B\|_F \tag{4.6}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: A matrisi özdeğerleri birbirinden farklı reel sayılar $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ olan 2×2 bir matris olsun. Bu durumda,

$$\left[e^{At}, B \right] = \left(e^{\lambda_1 t} I + \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_1 I) \right) B - B \left(e^{\lambda_1 t} I + \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_1 I) \right)$$

$$= e^{\lambda_1 t} B + \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_1 I) B - \left(e^{\lambda_1 t} B + \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} B(A - \lambda_1 I) \right)$$

$$= \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \left((A - \lambda_1 I) B - B(A - \lambda_1 I) \right)$$

$$= \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} [A, B].$$

Buradaki eşitliğin iki tarafınında Frobenius normu alınırsa,

$$\left\| \left[e^{At}, B \right] \right\|_F = \left| \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right| \left\| [A, B] \right\|_F .$$

Bu eşitlik ve (3.1) göz önüne alınarak,

$$\left\|\left[e^{At},B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\left|\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|\|A\|_F\|B\|_F$$

elde edilir. Burada $t=1$ seçilerek ispat tamamlanır.

■

Teorem 4.1.5: A matrisi özdeğerleri katlı reel sayılar $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda)$ olan 2×2 bir matris olmak üzere;

$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{\lambda}\|A\|_F\|B\|_F \tag{4.7}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: A matrisi özdeğerleri katlı reel sayılar $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda)$ olan 2×2 bir matris olsun. Bu durumda, $\left[e^{At},B\right]$ komütatörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}\left[e^{At},B\right] &= \left(e^{\lambda t}I+te^{\lambda t}\left(A-\lambda I\right)\right)B-B\left(e^{\lambda t}I+te^{\lambda t}\left(A-\lambda I\right)\right),\\ &= \left(e^{\lambda t}B+te^{\lambda t}\left(A-\lambda I\right)B\right)-\left(e^{\lambda t}B+te^{\lambda t}\left(A-\lambda I\right)\right),\\ &= te^{\lambda t}\left(\left(A-\lambda I\right)B-B\left(A-\lambda I\right)\right),\\ &= te^{\lambda t}\left[A,B\right].\end{aligned}$$

Buradaki eşitliğin iki tarafınında Frobenius normu alınırsa,

$$\left\|\left[e^{At},B\right]\right\|_F = e^{\lambda t}|t|\left\|\left[A,B\right]\right\|_F.$$

Bu eşitlik, (3.1) ile birlikte

$$\left\|\left[e^{At},B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{\lambda t}|t|\|A\|_F\|B\|_F.$$

şeklini alır. Burada $t=1$ seçilerek ispat tamamlanır.

■

Teorem 4.1.6: A matrisi özdeğerleri kompleks sayılar $(\lambda_1=a+bi,\ \lambda_2=a-bi)$ olan 2×2 bir matris olmak üzere;

$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{a}\left|\frac{\sin(b)}{b}\right|\|A\|_F\|B\|_F \tag{4.8}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1=\overline{\lambda_2}=a+ib$, şeklinde olsun. Bu durumdan hareketle aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\left[e^{At},B\right]=\left(e^{at}\cos(bt)I+\frac{e^{at}\sin(bt)}{b}\left(A-aI\right)\right)B-B\left(e^{at}\cos(bt)I+\frac{e^{at}\sin(bt)}{b}\left(A-aI\right)\right),$$

$$\left[e^{At},B\right]=e^{at}\cos(bt)B+\frac{e^{at}\sin(bt)}{b}\left(A-aI\right)B-Be^{at}\cos(bt)-\frac{e^{at}\sin(bt)}{b}B\left(A-aI\right),$$

$$\left[e^{At},B\right]=\frac{e^{at}\sin(bt)}{b}\left[\left(A-aI\right),B\right]=\frac{e^{at}\sin(bt)}{b}\left[A,B\right],$$

$$\left\|\left[e^{At},B\right]\right\|_F=e^{at}\left|\frac{\sin(bt)}{b}\right|\left\|\left[A,B\right]\right\|_F.$$

Bu eşitlik (3.1) ile birleştirilirse,

$$\left\|\left[e^{At},B\right]\right\|_F\le\sqrt{2}e^{at}\left|\frac{\sin(bt)}{b}\right|\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F.$$

Burada $t=1$ seçilerek ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.1.7: A ve B matrisleri özdeğerleri birbirinden farklı reel sayılar olan 2×2 matrisler, $\left(\lambda_1\neq\lambda_2\right)$ ve $\left(\mu_1\neq\mu_2\right)$ reel sayıları sırasıyla A ve B matrislerinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\|\left[e^{A},e^{B}\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\left(\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{e^{\mu_1}-e^{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right)\right|\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F \tag{4.9}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $e^{At}e^{Bs}$ ve $e^{Bs}e^{At}$ matrisleri, $\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}=x$ ve $\frac{e^{\mu_1 s}-e^{\mu_2 s}}{\mu_1-\mu_2}=y$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$e^{At}e^{Bs}=e^{\lambda_1 t+\mu_1 s}+e^{\lambda_1 t}y\left(B-\mu_1 I\right)+e^{\mu_1 s}x\left(A-\lambda_1 I\right)+xy\left(A-\lambda_1 I\right)\left(B-\mu_1 I\right),$$
$$e^{Bs}e^{At}=e^{\lambda_1 t+\mu_1 s}+e^{\mu_1 s}x\left(A-\lambda_1 I\right)+e^{\lambda_1 t}y\left(B-\mu_1 I\right)+xy\left(B-\mu_1 I\right)\left(A-\lambda_1 I\right).$$

Buradan hareketle,

$$\left[e^{At},e^{Bs}\right]=xy\left(\left(A-\lambda_1 I\right)\left(B-\mu_1 I\right)-\left(B-\mu_1 I\right)\left(A-\lambda_1 I\right)\right),$$
$$\left[e^{At},e^{Bs}\right]=xy\left[\left(A-\lambda_1 I\right),\left(B-\mu_1 I\right)\right]=xy\left[A,B\right],$$
$$\left\|\left[e^{At},e^{Bs}\right]\right\|_F=\left|xy\right|\left\|\left[A,B\right]\right\|_F$$

elde edilir ve bu eşitlik (3.1) ile birleştirilirse,

$$\left\|\left[e^{At},e^{Bs}\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|xy\right|\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F,$$
$$\left\|\left[e^{At},e^{Bs}\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\left(\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{e^{\mu_1 s}-e^{\mu_2 s}}{\mu_1-\mu_2}\right)\right|\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F$$

olur. Burada $s,t=1$ seçilerek ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.1.8: A ve B matrisleri özdeğerleri birbirine eşit reel sayılar olan 2×2 matrisler, $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda)$ ve $(\mu_1=\mu_2=\mu)$ reel sayıları sırasıyla A ve B matrislerinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\|\left[e^{A},e^{B}\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{\lambda+\mu}\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F \tag{4.10}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1.3'ten hareketle, $e^{At}e^{Bs}$ ve $e^{Bs}e^{At}$ matrisleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$e^{At}e^{Bs}=e^{\lambda t+\mu s}I+se^{\lambda t+\mu s}\left(B-\mu I\right)+te^{\lambda t+\mu s}\left(A-\lambda I\right)+ste^{\lambda t+\mu s}\left(A-\lambda I\right)\left(B-\mu I\right),$$
$$e^{Bs}e^{At}=e^{\mu s+\lambda t}I+te^{\mu s+\lambda t}\left(A-\lambda I\right)+se^{\mu s+\lambda t+}\left(B-\mu I\right)+ste^{\mu s+\lambda t}\left(B-\mu I\right)\left(A-\lambda I\right).$$

Buradan hareketle,

$$\left[e^{At},e^{Bs}\right]=e^{At}e^{Bs}-e^{Bs}e^{At}=ste^{\lambda t+\mu s}\left(\left(A-\lambda I\right)\left(B-\mu I\right)-\left(B-\mu I\right)\left(A-\lambda I\right)\right),$$
$$\left[e^{At},e^{Bs}\right]=ste^{\lambda t+\mu s}\left[\left(A-\lambda I\right),\left(B-\mu I\right)\right],$$
$$\left[e^{At},e^{Bs}\right]=ste^{\lambda t+\mu s}\left[A,B\right],$$
$$\left\|\left[e^{At},e^{Bs}\right]\right\|_F=\left|st\right|e^{\lambda t+\mu s}\left\|\left[A,B\right]\right\|_F.$$

elde edilir ve bu eşitlik (3.1) ile birleştirilirse,

$$\left\|\left[e^{At},e^{Bs}\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{\lambda t+\mu s}\left|st\right|\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F.$$

olur. Burada $s,t=1$ seçilerek ispat tamamlanır.

■

Teorem 4.1.9: A ve B özdeğerleri sırasıyla $\lambda_1=\overline{\lambda_2}=a+ib$ ve $\mu_1=\overline{\mu_2}=c+id$ kompleks sayıları olan 2×2 matrisler olmak üzere;

$$\left\|\left[e^{A},e^{B}\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\,\frac{e^{a+c}\left|\sin\left(b\right)\sin\left(d\right)\right|}{\left|bd\right|}\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F \tag{4.11}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Bu teoremin ispatı, e^{At} ve e^{Bs} matrisleri Lemma 4.1.3'te belirtilen şekilde ifade edilip bu ifadeler daha önceki teoremlerde olduğu gibi $e^{At}e^{Bs}-e^{Bs}e^{At}$ komütatöründe yerine yazılarak tamamlanabilir.

Bu kısımdan itibaren (4.4) ve (4.5) eşitsizlikleri için $n\ge 2$ olacak şekilde ters simetrik ve simetrik $n\times n$ matrislerin üstel matrisleri alanında elde edilen bulgulara yer verileceğinden öncelikle bu eşitsizlikleri $n\times n$ matrisler alanına taşımada kullanılan yöntemlerin bazılarından bahsedelim.

Tanım 4.1.1 Lagrange Enterpolasyonu (Moler & Van Loan, 2003): $A \in M_n(\mathbb{C})$ farklı özdeğerlere sahip bir matris olmak üzere, e^A matrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$e^A = \sum_{j=0}^{n-1} e^{\lambda_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{A - \lambda_k I}{\lambda_j - \lambda_k} \,. \tag{4.12}$$

Tanım 4.1.2 Newton Enterpolasyonu (Moler & Van Loan, 2003): $A \in M_n(\mathbb{C})$ keyfi bir matris olmak üzere, e^{At} matrisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} I + \sum_{j=2}^{n} \left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_j\right] \prod_{k=1}^{j-1} \left(A - \lambda_k I\right). \tag{4.13}$$

(4.13)' te λ_i'ler $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere, $\left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_j\right]$ bölünmüş farkları aşağıda verilen bağıntı kullanılarak hesaplanır:

$$\begin{aligned} \left[\lambda_1, \lambda_2\right] &= \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k+1}\right] &= \frac{\left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\right] - \left[\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_{k+1}\right]}{\lambda_1 - \lambda_{k+1}}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

(4.12) ve (4.13)'te verilen yöntemlerin her ikisi de e^{At} matrisini A matrisinin özdeğerlerine bağlı olarak elde edebilmek için elverişli yöntemlerdir. Bununla birlikte Lagrange Enterpolasyonu tanımı gereği sadece özdeğerleri birbirinden farklı olan matrisler için kullanılabilir. Her ne kadar Newton Enterpolasyonu da $\left[\lambda_1, \lambda_2\right] = \frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ bölünmüş farklarını içerse de bu bölünmüş farklar $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin tekrarlı özdeğerlere sahip olması durumunda aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\underbrace{\left[\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_1\right]}_{n} = \frac{f^{(n-1)}(\lambda_1)}{(n-1)!} \,. \tag{4.15}$$

Bu duruma ek olarak bölünmüş farkların değerleri λ_i'lerin sırasından bağımsızdır. Bu durum $\left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right]$ bölünmüş farkında her bir özdeğerin birbiri ile yer değiştirebileceği anlamına gelir ve birbirine eşit olan özdeğerleri bir araya getirerek daha kısa bir hesaplama yapma avantajı sağlar. Dolayısıyla keyfi matrislerin üstel matrislerini hesaplama adına Newton Enterpolasyonu, Lagrange Enterpolasyonundan daha faydalı bir yöntemdir. Literatürde Newton Enterpolasyonu ile Lagrange Enterpolasyonunu sadece matris alanında değil polinom enterpolasyonu alanında da

karşılaştıran bazı çalışmalar vardır. Bu konuda detaylı bilgi (Srivastava & Srivastava, 2012)'de bulunabilir.

Bu kısımdan itibaren $A \in M_n(\mathbb{R})$ ters simetrik ve $B \in M_n(\mathbb{R})$ keyfi bir matris olmak üzere, $\left[e^A, B\right]$ ve $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ters simetrik matrisler olmak üzere, $\left[e^A, e^B\right]$ komütatörleri ile ilgili bulgular 2×2 ters simetrik matrislerden $n\times n$ ters simetrik matrislere doğru verilecektir.

Teorem 4.1.10: $A \in M_2(\mathbb{R})$ ters simetrik matris olmak üzere;

$$\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \leq 2\|B\|_F$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda A matrisinin karakteristik denklemi;

$$|A - \lambda \mathrm{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -b \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + b^2 = 0 .$$

Buradan $\lambda_{1,2} = \pm bi$ olduğu açıktır. λ_1 ve λ_2 özdeğerleri Teorem 4.1.4' te yerine yazılırsa,

$$\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \leq \sqrt{2}\left(\frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2ib}\right)\|A\|_F \|B\|_F$$

$$\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \leq \sqrt{2}\left|\frac{\sin(b)}{b}\right|\|A\|_F \|B\|_F$$

$$\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \leq \frac{\sqrt{2}}{|b|}\|A\|_F \|B\|_F$$

elde edilir. Bununla birlikte $\|A\|_F = \sqrt{b^2 + (-b)^2} = \sqrt{2b^2} = \sqrt{2}\,|b|$ olduğundan,

$$\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \leq \frac{\sqrt{2}}{|b|}\sqrt{2}\,|b|\|B\|_F = 2\|B\|_F$$

elde edilir ki ispat biter. ■

Teorem 4.1.11: $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ ters simetrik matrisler olmak üzere,

$$\left[e^A, e^B\right] = 0 . \tag{4.16}$$

İspat: $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ matrisleri özdeğerleri sırasıyla $\pm\alpha i$ ve $\pm\beta i$ olan ters simetrik matrisler olsun. Bu durumda (3.8)' den hareketle

$$\begin{aligned} e^A &= e^{\alpha i} I + \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2bi}\left(A - \alpha i I\right) \\ &= \left(e^{\alpha i} - \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2}\right) I + \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2\alpha i} A \\ &= \cos(\alpha) I + \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} A \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu sonuç A matrisinin ters simetrik olması durumunda e^A matrisinin bir rotasyon matrisi olduğunu gösterir. α, dönme açısı olmak üzere $e^A = R(\alpha)$ olsun. Bu durumda $e^B = R(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$ olacağı (3.8)'den açıktır. Rotasyon matrisleri çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup genel olarak $SO(n)$ şeklinde ifade edilir (Gallier, 2011). Şimdi $SO(n)$ grubunun $n = 2$ için değişmeli grup olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} e^A e^B = R(\alpha) R(\beta) &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = R(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} e^B e^A = R(\beta) R(\alpha) &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta+\alpha) & \sin(\beta+\alpha) \\ -\sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{bmatrix} = R(\beta+\alpha) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \left[e^A, e^B\right] = \left[R(\alpha), R(\beta)\right] &= R(\alpha) R(\beta) - R(\beta) R(\alpha) \\ &= R(\alpha+\beta) - R(\beta+\alpha) = 0. \end{aligned}$$

■

Ters simetrik matrislerin üstel matrislerini (3.8)' den hareketle tanımlayarak bu tipteki matrislerin literatürde yer alan birçok özelliği gösterilebilir. Bu özelliklerden bir tanesini bir lemma olarak verelim.

Lemma 4.1.4 (Gallier & Xu, 2003) (Rodriguez Formula): $A=\left(a_{ij}\right)\in M_3\left(R\right)$ ters simetrik bir matris ve $\mu=\sqrt{a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2}$ olmak üzere;

$$e^A=I+\frac{\sin\left(\mu\right)}{\mu}A+\frac{1-\cos\left(\mu\right)}{\mu^2}A^2\ . \tag{4.17}$$

İspat : $A=\begin{pmatrix}0 & -a & -b\\ a & 0 & -c\\ b & c & 0\end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda A matrisinin karakteristik denklemi

$$\left|A-\lambda\mathrm{I}\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & a & b\\ -a & -\lambda & c\\ -b & -c & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+\lambda\left(\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\mu^2}\right)=0.$$

Buradan A matrisinin özdeğerlerinin $\lambda_1=\mu i$, $\lambda_2=-\mu i$ ve $\lambda_3=0$ şeklinde olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu özdeğerler (4.14)' te yerine yazılırsa,

$$\left[\lambda_1,\lambda_2\right]=\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{e^{\mu i}-e^{-\mu i}}{2\mu i}=\frac{\sin\left(\mu\right)}{\mu}\ ,\ \left[\lambda_2,\lambda_3\right]=\frac{e^{\lambda_2}-e^{\lambda_3}}{\lambda_2-\lambda_3}=\frac{e^{-\mu i}-1}{-\mu i}$$

bölünmüş farkları elde edilir. Buradan hareketle $\left[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right]$ bölünmüş farkı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}\left[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right]&=\frac{\left[\lambda_1,\lambda_2\right]-\left[\lambda_2,\lambda_3\right]}{\lambda_1-\lambda_3},\\ &=\frac{\dfrac{e^{\mu i}-e^{-\mu i}}{2\mu i}-\dfrac{e^{-\mu i}-1}{-\mu i}}{\mu i},\\ &=\frac{1-\cos\left(\mu\right)}{\mu^2}.\end{aligned}$$

Elde edilen bölünmüş farklar, (4.13)'te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}e^A&=e^{\mu i}I+\frac{\sin\left(\mu\right)}{\mu}\left(A-\mu iI\right)+\frac{1-\cos\left(\mu\right)}{\mu^2}\left(A^2+\mu^2I\right)\\ &=I+\frac{\sin\left(\mu\right)}{\mu}A+\frac{1-\cos\left(\mu\right)}{\mu^2}A^2\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ifade literatürde **Rodriguez formülü** olarak yer almaktadır. ■

$n\times n$ ters simetrik matrislerin üstel matrisleri ile ilgili bulgularımıza geçmeden önce bu matrislerle rotasyon matrisleri arasındaki ilişkiyi gösteren bir lemma verelim.

Lemma 4.1.5 (Gallier, 2011): $SO(n)$, $n\times n$ rotasyon matrislerin grubu ve $so(n)$, $n\times n$ ters simetrik matrislerin oluşturduğu vektör uzayı olmak üzere,

$$\exp : so(n) \to SO(n)$$

dönüşümü iyi tanımlı ve örtendir.

Şimdi $n>2$ için $n\times n$ ters simetrik matrislerle ilgili bulgularımıza geçelim.

Teorem 4.1.12: $A \in M_n(\mathbb{R})$ ters simetrik ve B keyfi bir $n\times n$ matris olmak üzere,

$$\left\| \left[e^A, B \right] \right\|_F \le 2\|B\|_F \le \sqrt{2n}\,\|B\|_F \tag{4.18}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Öncelikle $A \in M_n(\mathbb{R})$ ters simetrik olmak üzere $\left\| \left[e^A, B \right] \right\|_F \le \sqrt{2n}\,\|B\|_F$ olduğunu gösterelim. $\left\{ a_1 i, -a_1 i, a_2 i, -a_2 i, \ldots, a_k i, -a_k i, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-2k} \right\}$ kümesi A matrisinin spektrumu olsun. Ters simetrik matrisler köşegenleştirilebilir olduğundan P ortogonal bir matris olmak üzere,

$$A = P \begin{bmatrix} a_1 i & & & 0 \\ & -a_1 i & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0_{n-2k} \end{bmatrix} P^T .$$

Buradan hareketle, e^A matrisi de $e^A = P e^{D(A)} P^T$ şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$e^A = P \begin{bmatrix} e^{a_1 i} & & & 0 \\ & e^{-a_1 i} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1_{n-2k} \end{bmatrix} P^T .$$

(3.1) norm eşitsizliğinden hareketle

$$\left\| \left[e^A, B \right] \right\|_F \le \sqrt{2} \left\| P \begin{bmatrix} e^{a_1 i} & & & 0 \\ & e^{-a_1 i} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1_{n-2k} \end{bmatrix} P^T \right\|_F \|B\|_F ,$$

$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}\leq\sqrt{2}\left\|\begin{bmatrix}e^{a_1 i} & & & 0\\ & e^{-a_1 i} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1_{n-2k}\end{bmatrix}\right\|_{F}\|B\|_{F},$$

$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}\leq\sqrt{2}\sqrt{\left|e^{a_1 i}\right|^{2}+\cdots+\left|e^{-a_k i}\right|^{2}+\underbrace{1+\cdots+1}_{n-2k}}\|B\|_{F},$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $\left|e^{a_k i}\right|=\left|\cos(a_k)+i\sin(a_k)\right|=\cos^{2}(a_k)+\sin^{2}(a_k)=1$ olduğundan

$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}\leq\sqrt{2}\sqrt{\underbrace{\left|e^{a_1 i}\right|^{2}+\cdots+\left|e^{-a_k i}\right|^{2}}_{2k}+\underbrace{1+\cdots+1}_{n-2k}}\|B\|_{F}=\sqrt{2n}\|B\|_{F} \tag{4.19}$$

elde edilir. Diğer taraftan, Lemma 4.1.5'ten $A\in M_n(\mathbb{R})$ ters simetrik olmak üzere e^{A} matrisinin rotasyon matrisi olduğunu biliyoruz. Bu durumda, R bir rotasyon matris olmak üzere $e^{A}=R$ olup,

$$\begin{aligned}\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}&=\|RB-BR\|_{F},\\ &\leq\|RB\|_{F}+\|BR\|_{F},\end{aligned}$$

yazılabilir. Frobenius norm üniter invaryant olduğundan $\|RB\|_{F}=\|B\|_{F}$. Dolayısıyla, $\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}\leq\|B\|_{F}+\|B\|_{F}=2\|B\|_{F}$ eşitsizliği elde edilir. $n\geq 2$ olmak üzere, $2\leq\sqrt{2n}$ olduğundan $\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}\leq 2\|B\|_{F}\leq\sqrt{2n}\|B\|_{F}$ eşitsizliği elde edilir ki ispat biter.

■

Teorem 4.1.13: $n>2$ ve $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ ters simetrik matrisler olmak üzere;

$$\left\|\left[e^{A},e^{B}\right]\right\|_{F}\leq 2\sqrt{n} \tag{4.20}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1.5'ten ters simetrik matrislerin üstel matrislerinin rostayon matrisi olduğunu biliyoruz. Bununla birlikte Lemma 4.1.5'te verilen dönüşüm örten olduğundan $\forall R\in SO(n)$ için $\exists C\in so(n)$ dir. Yani $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ ters simetrik matrisler olmak üzere $e^{A}e^{B}=e^{C}$ olacak şekilde bir C ters simetrik matrisi vardır. $n=2$ için $SO(n)$ değişmeli grup olup $C=A+B$ iken, $n>2$ için $SO(n)$ değişmeli grup olmadığından $C\neq A+B$. Dolayısıyla,

$$\left\|\left[e^{A},e^{B}\right]\right\|_{F}=\left\|e^{A}e^{B}-e^{B}e^{A}\right\|_{F}=\left\|e^{C}-e^{D}\right\|_{F}$$
$$\leq\left\|e^{C}\right\|_{F}+\left\|e^{D}\right\|_{F}$$
$$=\sqrt{n}+\sqrt{n}=2\sqrt{n}$$

olur ki ispat biter. ■

Üstel matrisler yaygın bir kullanım alanına sahiptir. Bunun yanı sıra üstel matrislerin türevleri de pertürbasyon analizi, kontrol ve lineer dinamik sistemlerin parametre tahmini gibi alanlarda kullanılmaktadır (Chen & Zadrozny, 2001; Najfeld & Havel, 1995). Ters simetrik matrislerin üstel matrislerinin rotasyon matrisi olması e^{A} matrisinin türevini içeren matris komütatörleri için de ilgi çekici sonuçlar verir.

Teorem 4.1.14: $A\in M_{n}(\mathbb{R})$ ters simetrik bir matris, s bir değişken ve $B\in M_{n}(\mathbb{R})$ keyfi bir matris olmak üzere;

$$\left\|\left[\frac{d}{ds}e^{As},B\right]\right\|_{F}\leq\sqrt{2}\left\|A\right\|_{F}\left\|B\right\|_{F} \tag{4.21}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $\frac{d}{ds}e^{As}=Ae^{As}$ olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle $\left[\frac{d}{ds}e^{As},B\right]=\left[Ae^{As},B\right]$ yazılabilir. Bu eşitlik (3.1) norm eşitsizliği ile birleştirilirse,

$$\left\|\left[\frac{d}{ds}e^{As},B\right]\right\|_{F}=\left\|\left[Ae^{As},B\right]\right\|_{F}\leq\sqrt{2}\left\|Ae^{As}\right\|_{F}\left\|B\right\|_{F} \tag{4.22}$$

elde edilir. $A\in M_{n}(\mathbb{R})$ ters simetrik olduğundan As matrisi de ters simetrik bir matris olup e^{As} matrisi bir rotasyon matrisidir. Frobenius norm üniter invaryant olduğundan $\left\|Ae^{As}\right\|_{F}=\left\|A\right\|_{F}$. Bu eşitlik (4.22)' de yerine yazılırsa,

$$\left\|\left[\frac{d}{ds}e^{As},B\right]\right\|_{F}\leq\sqrt{2}\left\|A\right\|_{F}\left\|B\right\|_{F}$$

elde edilir ki ispat biter. ■

Teorem 4.1.15: $A,B\in M_{n}(\mathbb{R})$ ters simetrik matrisler ve s, t değişkenler olmak üzere;

$$\left\|\left[\frac{d}{ds}e^{As},\frac{d}{dt}e^{Bt}\right]\right\|_{F}\leq\sqrt{2}\left\|A\right\|_{F}\left\|B\right\|_{F} \tag{4.23}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $\frac{d}{ds}e^{As} = Ae^{As}$ ve $\frac{d}{dt}e^{Bt} = Be^{Bt}$ olduğunu özellik 3.2.3.6 'dan biliyoruz. Buradan hareketle $\left[\frac{d}{ds}e^{As}, \frac{d}{dt}e^{Bt}\right] = \left[Ae^{As}, Be^{Bt}\right]$ yazılabilir. İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.1.14 'ün ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Bu kısımdan itibaren, $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrik ve $B \in M_n(\mathbb{R})$ keyfi bir matris olmak üzere $\left[e^A, B\right]$ ve $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simetrik matrisler olmak üzere $\left[e^A, e^B\right]$ komütatörleri ile ilgili bulgular, 2×2 simetrik matrislerden $n\times n$ simetrik matrislere doğru verilecektir.

Teorem 4.1.16: $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ simetrik matrisler olmak üzere aşağıdaki norm eşitsizlikleri geçerlidir:

- $\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\left|\frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right| \|A\|_F \|B\|_F, \qquad \lambda_1(A) \ne \lambda_2(A)$
- $\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{\lambda} \|A\|_F \|B\|_F, \qquad \lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda$
- $\left\|\left[e^A, e^B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\left|\frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right|\left|\frac{e^{\mu_1} - e^{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2}\right| \|A\|_F \|B\|_F, \ \lambda_1(A) \ne \lambda_2(A), \ \mu_1(B) \ne \mu_2(B)$
- $\left\|\left[e^A, e^B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{\lambda+\mu} \|A\|_F \|B\|_F, \qquad \lambda_{1,2}(A) = \lambda, \ \mu_{1,2}(B) = \mu$

İspat: Simetrik matrislerin özdeğerleri reel sayılar olduğundan Teorem 4.1.4, Teorem 4.1.5, Teorem 4.1.7 ve Teorem 4.1.8' de elde edilen sonuçlar Teorem 4.1.16 için de geçerlidir.

Lemma 4.1.6: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere aşağıdaki norm eşitsizlikleri geçerlidir:

- $\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \le \left\|e^A\right\|_F \|B\|_F,$ A simetrik,
- $\left\|\left[e^A, e^B\right]\right\|_F \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|e^A\right\|_F \left\|e^B\right\|_F,$ A ve B simetrik.

İspat: İspatımıza öncelikle A matrisinin reel simetrik matris olması durumunda e^A matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olduğunu göstererek başlayalım. $A = A^T$ olması

durumunda $\lambda(A) \in \mathbb{R}$ olduğu açıktır. f, A matrisinin spektrumunda tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\lambda(f(A)) = f(\lambda(A))$ olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle, $\lambda(e^A) = e^{\lambda(A)} \in \mathbb{R}^+$ olur. Diğer taraftan, $\left(e^A\right)^T = e^{A^T} = e^A$ olup e^A matrisi de simetrik bir matristir. Dolayısıyla, A matrisinin reel simetrik olması durumunda e^A matrisi, özdeğerleri pozitif reel sayılar olan bir simetrik matris olduğundan, pozitif yarı tanımlı matris olur.

Diğer taraftan $\|[A,B]\|_F \le \sqrt{2}\|A\|_F \|B\|_F$ ifadesinde $\sqrt{2}$ katsayısı A ve B matrislerinden birinin pozitif yarı tanımlı olması durumunda 1'e ve her ikisinin birden pozitif yarı tanımlı olması durumunda $\frac{1}{\sqrt{2}}$'ye indirgenir (Böttcher & Wenzel, 2008). Buradan hareketle A ve B matrislerinden birinin veya ikisinin birden simetrik olması durumunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \le \left\|e^A\right\|_F \|B\|_F ,$$

$$\left\|\left[e^A, e^B\right]\right\|_F \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|e^A\right\|_F \|B\|_F .$$

■

$\sqrt{2}$ katsayısının 1 veya $\frac{1}{\sqrt{2}}$'ye indirgenmesi sadece (3.1) norm eşitsizliği için geçerlidir. (3.2) norm eşitsizliği için geçerli olup olmadığı ile ilgili literatürde herhangi bir sonuç bulunmamaktadır.

Teorem 4.1.17: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. A matrisi özdeğerleri $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \in \mathbb{R}$ olan köşegenleştirilebilir bir matris olmak üzere;

$$\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \le \left(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_n}\right)\|B\|_F \tag{4.24}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: A matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan $A = Q^T D(A) Q$ olacak şekilde bir Q ortogonal matrisi ve bileşenleri A'nın özdeğerleri olan bir $D(A)$ köşegen matrisi vardır. Dolayısıyla $e^A = Q^T e^{D(A)} Q$. Buradan,

$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}=\left\|Q^{T}e^{D(A)}QB-BQ^{T}e^{D(A)}Q\right\|_{F},$$
$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}=\left\|Q\left(Q^{T}e^{D(A)}QB-BQ^{T}e^{D(A)}Q\right)Q^{T}\right\|_{F},$$
$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}=\left\|e^{D(A)}QBQ^{T}-QBQ^{T}e^{D(A)}\right\|_{F}.$$

$QBQ^{T}=K$ olsun. Bu durumda, $\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}=\left\|\left[e^{D(A)},K\right]\right\|_{F}$ olduğu açıktır. $\left[e^{D(A)},K\right]$ komütatörü açık olarak

$$\left[e^{D(A)},K\right]=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&e^{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ k_{n1}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ k_{n1}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&e^{\lambda_n}\end{pmatrix},$$

$$\left[e^{D(A)},K\right]=\begin{pmatrix}0&\left(e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}\right)k_{12}&\cdots&\left(e^{\lambda_1}-e^{\lambda_n}\right)k_{1n}\\ \left(e^{\lambda_2}-e^{\lambda_1}\right)k_{21}&\ddots&\cdots&\left(e^{\lambda_2}-e^{\lambda_n}\right)k_{2n}\\ \vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \left(e^{\lambda_n}-e^{\lambda_1}\right)k_{n1}&\left(e^{\lambda_n}-e^{\lambda_2}\right)k_{n2}&\cdots&0\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla,

$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}^{2}=\left(e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}\right)^{2}\left(k_{12}^{2}+k_{21}^{2}\right)+\left(e^{\lambda_1}-e^{\lambda_3}\right)^{2}\left(k_{13}^{2}+k_{31}^{2}\right)+\cdots+\left(e^{\lambda_n}-e^{\lambda_{n-1}}\right)^{2}\left(k_{n(n-1)}^{2}+k_{(n-1)n}^{2}\right),$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left(e^{\lambda_i}-e^{\lambda_j}\right)^{2}k_{ij}^{2}\le\sum_{i,j=1}^{n}\left(e^{\lambda_1}-e^{\lambda_n}\right)^{2}k_{ij}^{2},$$
$$=\left(e^{\lambda_1}-e^{\lambda_n}\right)^{2}\sum_{i,j=1}^{n}k_{ij}^{2},$$
$$=\left(e^{\lambda_1}-e^{\lambda_n}\right)^{2}\left\|K\right\|_{F}^{2}.$$

Frobenius norm üniter invaryant olduğundan, $\left\|K\right\|_{F}=\left\|Q^{T}BQ\right\|_{F}=\left\|B\right\|_{F}$ olur ki ispat biter.

■

Sonuç 4.1.4: $A\in M_n(\mathbb{R})$ matrisi özdeğerleri $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$ olan simetrik bir matris olmak üzere;

$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}\le\left(e^{\lambda_1}-e^{\lambda_n}\right)\left\|B\right\|_{F}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

Sonuç 4.1.5: $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ simetrik matrisler olsun. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$ olmak üzere;

$$\left\|\left[e^{A},e^{B}\right]\right\|_{F}\leq\left(e^{\lambda_{1}}-e^{\lambda_{n}}\right)\left(e^{\|B\|_{F}}+\sqrt{n}-1\right) \tag{4.25}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Teorem 4.1.17'de B matrisi yerine e^{B} matrisi yazılırsa

$$\left\|\left[e^{A},e^{B}\right]\right\|_{F}\leq\left(e^{\lambda_{1}}-e^{\lambda_{n}}\right)\left\|e^{B}\right\|_{F}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left\|e^{B}\right\|_{F}=\left\|I+\sum_{k=1}^{n}\frac{B^{k}}{k!}\right\|_{F}\leq\left\|I\right\|_{F}+\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{B^{k}}{k!}\right\|_{F}$$

$$\left\|e^{B}\right\|_{F}\leq\left\|I\right\|_{F}+\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{B^{k}}{k!}\right\|_{F}$$

$$\left\|e^{B}\right\|_{F}\leq\sqrt{n}+e^{\|B\|}-1$$

olduğundan

$$\left\|\left[e^{A},e^{B}\right]\right\|_{F}\leq\left(e^{\lambda_{1}}-e^{\lambda_{n}}\right)\left(e^{\|B\|_{F}}+\sqrt{n}-1\right)$$

elde edilir ki ispat biter. ■

Teorem 4.1.17'den hareketle daha önce $n\times n$ ters simetrik matrislerin üstel matrislerini içeren komütatörler için elde edilen sonuçlar geliştirilebilir.

Teorem 4.1.18: $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ olsun. A matrisi spektrumu

$$\left\{\vartheta_{1}i,-\vartheta_{1}i,\ldots,\vartheta_{j}i,-\vartheta_{j}i,\ldots,\vartheta_{k}i,-\vartheta_{k}i,\underbrace{0\ldots0}_{n-2k}\right\}$$

olan bir ters simetrik matris ve $1\leq l,m\leq n$ olacak şekilde $\max\left|e^{\vartheta_{m}i}-e^{\vartheta_{l}i}\right|=\left|e^{\vartheta_{k}i}-e^{\vartheta_{j}i}\right|$ olmak üzere;

$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}\leq\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\left(\vartheta_{k}-\vartheta_{j}\right)}\left\|B\right\|_{F}. \tag{4.26}$$

İspat : $A=P^{T}D\left(A\right)P$ olmak üzere, $e^{A}=P^{T}e^{D(A)}P$ olduğunu biliyoruz. Ters simetrik matrisler köşegenleştirilebilir olduğundan, Teorem 4.1.17'den

$$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}\leq\underbrace{\left|e^{\lambda_{1}(A)}-e^{\lambda_{n}(A)}\right|}_{\max}\left\|B\right\|_{F}.$$

$\max\left|e^{\lambda_{1}(A)}-e^{\lambda_{n}(A)}\right|=\left|e^{\vartheta_{k}i}-e^{\vartheta_{j}i}\right|$ olsun. Burada, $e^{i\vartheta}=\cos\left(\vartheta\right)+i\sin\left(\vartheta\right)$ eşitliğinden hareketle

$$\begin{aligned}\left|e^{\vartheta_k i}-e^{\vartheta_j i}\right| &= \left|\left(\cos\left(\vartheta_k\right)-\cos\left(\vartheta_j\right)\right)+i\left(\sin\left(\vartheta_k\right)-\sin\left(\vartheta_j\right)\right)\right|,\\ &= \sqrt{\left(\cos\left(\vartheta_k\right)-\cos\left(\vartheta_j\right)\right)^2+\left(\sin\left(\vartheta_k\right)-\sin\left(\vartheta_j\right)\right)^2},\\ &= \sqrt{2-2\left(\cos\left(\vartheta_k\right)\cos\left(\vartheta_j\right)+\sin\left(\vartheta_k\right)\sin\left(\vartheta_j\right)\right)},\\ &= \sqrt{2-2\left(\cos\left(\vartheta_k-\vartheta_j\right)\right)},\end{aligned}$$

olduğundan $\left\|\left[e^A,B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\left(\vartheta_k-\vartheta_j\right)}\left\|B\right\|_F$ elde edilir ki ispat biter. ■

Teorem 4.1.18'de elde edilen sonucun $\sqrt{1-\cos\left(\vartheta_k-\vartheta_j\right)}<\sqrt{2}$ olması durumunda Teorem 4.1.12'de elde edilen $\left\|\left[e^A,B\right]\right\|_F \le 2\left\|B\right\|_F$ sonucundan daha küçük bir üst sınır oluşturacağı açıktır.

Sonuç 4.1.7: $A,B\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ ters simetrik matrisler olsun. A matrisinin spektrumu

$$\left\{\vartheta_1 i,-\vartheta_1 i,\ldots,\vartheta_j i,-\vartheta_j i,\ldots,\vartheta_k i,-\vartheta_k i,\underbrace{0\ldots 0}_{n-2k}\right\}$$

ve $1\le l,m\le n$ olacak şekilde $\max\left|e^{\vartheta_m i}-e^{\vartheta_l i}\right|=\left|e^{\vartheta_k i}-e^{\vartheta_j i}\right|$ olmak üzere;

$$\left\|\left[e^A,e^B\right]\right\|_F \le \sqrt{2n}\sqrt{1-\cos\left(\theta_k-\theta_j\right)}\,. \tag{4.27}$$

İspat: B ters simetrik matris olmak üzere e^B nin rotasyon matrisi olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\left\|e^B\right\|_F=\sqrt{n}$ dir. Dolayısıyla Teorem 4.1.18'den ispat açıktır.

■

Sonuç 4.1.7'de elde edilen sonucun $\sqrt{1-\cos\left(\vartheta_k-\vartheta_j\right)}<\sqrt{2}$ olması durumunda Teorem 4.1.13'te elde edilen $\left\|\left[e^A,e^B\right]\right\|_F \le 2\sqrt{n}$ sonucundan daha küçük bir üst sınır oluşturacağı açıktır.

Sonuç 4.1.8: $A,B\in M_2\left(\mathbb{R}\right)$ olsun. A özdeğerleri $\pm ai$ olan bir ters simetrik matris olmak üzere,

$$\left\|\left[e^A,B\right]\right\|_F \le 2\left|\sin\left(a\right)\right|\left\|B\right\|_F\,. \tag{4.28}$$

İspat: A matrisinin özdeğerleri $\pm ai$ Teorem 4.1.18'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F} &\le \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\left(\vartheta_{k}-\vartheta_{j}\right)}\left\|B\right\|_{F},\\ &= \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\left(2a\right)}\left\|B\right\|_{F},\\ &= \sqrt{2}\sqrt{2\sin^{2}\left(a\right)}\left\|B\right\|_{F},\\ &= 2\left|\sin\left(a\right)\right|\left\|B\right\|_{F}.\end{aligned}$$

■

Sonuç 4.1.8'de elde edilen sonucun $\sin\left(a\right)\neq 1$ olması durumunda Teorem 4.1.10'da elde edilen $\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}\le 2\left\|B\right\|_{F}$ sonucundan daha küçük bir üst sınır oluşturacağı açıktır.

Bu kısımdan itibaren $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ matrisleri keyfi kompleks matrisler olmak üzere (3.8)'den hareketle $\left[e^{A},B\right]$ ve $\left[e^{A},e^{B}\right]$ komütatörleri ile $\left[A,B\right]$komütatörü arasındaki ilişkilere ait bulgulara yer verilecektir.

Teorem 4.1.19: $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ ve λ_{i}'ler A matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left[e^{A},B\right]=\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\left[\lambda_{1},\lambda_{2},\cdots,\lambda_{j}\right]c_{k}\left(-1\right)^{k}\left[A^{j-k-1},B\right]. \tag{4.29}$$

Burada $c_{0}=1$ ve $c_{k}=\sum\underbrace{\lambda.\cdots.\lambda}_{k}$ $\left(j-1\right)$ tane özdeğerin k-lı çarpımlarının toplamını temsil etmektedir.

İspat: Verilen bir $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ matrisinin karakteristik polinomu; λ, A matrisinin özdeğeri olmak üzere,

$$p(\lambda)=det(A-\lambda I)=(-1)^{n}\left[\lambda^{n}+c_{1}\lambda^{n-1}+c_{2}\lambda^{n-2}+\cdots+c_{n}\right].$$

Bununla birlikte, A matrisinin karakteristik polinomu $c_{0}=1$ ve $c_{k}=\sum\underbrace{\lambda\cdots\lambda}_{k}$ olmak üzere;

$$p(\lambda)=det(A-\lambda I)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}c_{k}\lambda^{n-k}.$$

Cayley- Hamilton teoremine göre her matris kendi karakteristik polinomunu sağlar. Dolayısıyla, $p(\lambda)$, I ve 0 sırasıyla A matrisinin karakteristik polinomu, birim matris

ve 0 matrisi olmak üzere, $p(A)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k A^{n-k}=0$. Diğer taraftan, $q(\lambda)$ özdeğerleri $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$ olan matrisin karakteristik polinomu olmak üzere, $\prod_{k=1}^{j-1}\left(A-\lambda_k I\right)=q(A)$.

Dolayısıyla,

$$q(A)=\prod_{k=1}^{j-1}\left(A-\lambda_k I\right)=\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k c_k A^{j-k-1}. \tag{4.30}$$

(4.30)'den hareketle tanım (4.13) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$e^A=e^{\lambda_1}I+\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_j\right](-1)^k c_k A^{j-k-1}. \tag{4.31}$$

Şimdi (4.31)'un A keyfi bir matris olmak üzere, e^A matrisini hesaplayabildiğini bir örnek üzerinde test edelim. Bu amaç doğrultusunda köşegenleştirilemeyen bir 3x3 mertebeli matrisin üstel matrisini (4.31)'den hareketle gösterelim.

Örnek 4.1.1 : $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & -3 & -3\end{bmatrix}$ olmak üzere e^A=?

İlk olarak (4.31)'de *n*x*n* matrisler için verilen Newton Enterpolasyonu yöntemini 3x3 matrisler için düzenleyelim.

- $\left[\lambda_1,\lambda_2\right]=\dfrac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}$, $\left[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right]=\dfrac{\left[\lambda_1,\lambda_2\right]-\left[\lambda_2,\lambda_3\right]}{\lambda_1-\lambda_3}$,
- $\sum_{k=0}^{1}(-1)^k c_k A^{1-k}=A-\lambda_1 I$,
- $\sum_{k=0}^{2}(-1)^k c_k A^{2-k}=A^2-\left(\lambda_1+\lambda_2\right)A+\left(\lambda_1\lambda_2\right)I$,

olmak üzere 3×3 matrislerin üstel matrisleri,

$$e^A=e^{\lambda_1}I+\left[\lambda_1,\lambda_2\right]\sum_{k=0}^{1}(-1)^k c_k A^{1-k}+\left[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right]\sum_{k=0}^{2}(-1)^k c_k A^{2-k} \tag{4.32}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Şimdi yukarıda maddeler halinde verilen bölünmüş farkları ve toplam ifadelerini A matrisi için hesaplayarak (4.32)'da yerine yazalım.

A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-2$. Dolayısıyla,

- $\left[\lambda_1,\lambda_2\right]=e^{-1}-e^{-2}$, $\left[\lambda_2,\lambda_3\right]=e^{-2}$, $\left[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right]=e^{-1}-2e^{-2}$,
- $\sum_{k=0}^{1}(-1)^k c_k A^{1-k}=A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&0\\-1&-3&-2\end{bmatrix}$,
- $\sum_{k=0}^{2}(-1)^k c_k A^{2-k}=A^2-\left(\lambda_1+\lambda_2\right)A+\left(\lambda_1\lambda_2\right)I=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$,

olup

$$e^A=\begin{bmatrix}e^{-1}&0&0\\0&e^{-1}&0\\0&0&e^{-1}\end{bmatrix}+\left(e^{-1}-e^{-2}\right)\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&0\\-1&-3&-2\end{bmatrix}+\left(e^{-1}-2e^{-2}\right)\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$e^A=\begin{bmatrix}2e^{-2}&e^{-1}&e^{-2}\\0&e^{-1}&0\\-e^{-2}&e^{-2}-2e^{-1}&0\end{bmatrix}.$$

Bu sonuç (4.31)'de verilen yöntemin tekrarlı özdeğerlere sahip ve köşegenleştirilemeyen matrislerin üstel matrislerini bile hesaplayabildiğini gösterir. Şimdi, (4.31) de verilen ifadeyi matris komütatörleri ile birleştirerek ispatı tamamlayabiliriz.

$$\begin{aligned}\left[e^A,B\right]&=\left[e^{\lambda_1}I+\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_j\right](-1)^k c_k A^{j-k-1},B\right],\\&=\left[e^{\lambda_1}I,B\right]+\left[\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_j\right](-1)^k c_k A^{j-k-1},B\right],\\&=e^{\lambda_1}\underbrace{\left[I,B\right]}_{0}+\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_j\right](-1)^k c_k\left[A^{j-k-1},B\right],\\&=\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_j\right](-1)^k c_k\left[A^{j-k-1},B\right].\end{aligned}\tag{4.33}$$

■

Şimdi $n\times n$ matrisler için elde ettiğimiz (4.33) sonucunun özel durumlarında daha önce elde edilen (4.6) ve (4.7) sonuçlarını desteklediğini gösteren iki sonuç verelim.

Sonuç 4.1.9: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ ve A matrisinin özdeğerleri birbirinden farklı reel sayılar olmak üzere;

$$\left\|\left[e^A,B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|\|A\|_F\,\|B\|_F$$

norm eşitsizliği geçerlidir**.**

İspat: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ olduğundan bu durumda (4.31)'den hareketle e^A matrisi

$$e^A = e^{\lambda_1}I+\left[\lambda_1,\lambda_2\right]\sum_{k=0}^{1}(-1)^k c_k A^{1-k}$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla,

$$\left[e^A,B\right]=\left[e^{\lambda_1}I+\left[\lambda_1,\lambda_2\right]\sum_{k=0}^{1}(-1)^k c_k A^{1-k},B\right]=\left(\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left[A,B\right].$$

Burada eşitliğin her iki tarafının Frobenius normu alınırsa,

$$\left\|\left[e^A,B\right]\right\|_F=\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|\left\|\left[A,B\right]\right\|_F$$

elde edilir. Bu norm eşitliği (3.1) ile birleştirilirse,

$$\left\|\left[e^A,B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|\|A\|_F\,\|B\|_F .$$

■

Sonuç 4.1.10: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ ve A matrisinin özdeğerleri katlı $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda)$ reel sayılar olmak üzere;

$$\left\|\left[e^A,B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{\lambda}\|A\|_F\,\|B\|_F$$

norm eşitsizliği geçerlidir**.**

İspat: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ olduğundan bu durumda (4.31)' den

$$e^A = e^{\lambda}I+e^{\lambda}\sum_{k=0}^{1}(-1)^k c_k A^{1-k}.$$

Dolayısıyla,

$$\left[e^A,B\right]=\left[e^{\lambda}I+e^{\lambda}\sum_{k=0}^{1}(-1)^k c_k A^{1-k},B\right]=e^{\lambda}\left[A,B\right].$$

Burada eşitliğin her iki tarafının Frobenius normu alınırsa,

$$\left\|\left[e^A,B\right]\right\|_F=e^{\lambda}\left\|\left[A,B\right]\right\|_F$$

elde edilir. Bu norm eşitliği (3.1) ile birleştirilirse,

$$\left\| \left[e^A, B \right] \right\|_F \leq \sqrt{2} e^{\lambda} \left\| A \right\|_F \left\| B \right\|_F .$$

■

Sonuç 4.1.11: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri $\left[A, \left[A, B \right] \right] = 0$ şartını sağlamak üzere**;**

$$\left\| \left[e^A, B \right] \right\|_F \leq \sqrt{2} \left\| \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} \left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_j \right] c_k (-1)^k \left(j-k-1 \right) A^{j-k-2} \right\|_F \left\| A \right\|_F \left\| B \right\|_F \quad (4.34)$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $\left[e^A, B \right]$ komütatörü ile $\left[A^{j-k-1}, B \right]$ komütatörü arasındaki ilişki (4.33)' de gösterilmişti. Bununla birlikte $\left[A^{j-k-1}, B \right]$ komütatörü $\left[A, B \right]$ komütatörü ile $\left[A, \left[A, B \right] \right] = 0$ olması durumunda aşağıdaki gibi ilişkilendirilebilir:

$$\left[A^{j-k-1}, B \right] = \left(j-k-1 \right) A^{j-k-2} \left[A, B \right]. \quad (4.35)$$

(4.35) ifadesi (4.33)'de yerine yazılırsa,

$$\left[e^A, B \right] = \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} \left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_j \right] c_k (-1)^k \left(j-k-1 \right) A^{j-k-2} \left[A, B \right] \quad (4.36)$$

elde edilir. (4.36) ifadesi (3.1) norm eşitsizliği ile birleştirilirse,

$$\left\| \left[e^A, B \right] \right\|_F \leq \sqrt{2} \left\| \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} \left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_j \right] c_k (-1)^k \left(j-k-1 \right) A^{j-k-2} \right\|_F \left\| A \right\|_F \left\| B \right\|_F$$

elde edilir ki istenendir.

■

Teorem 4.1.20: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri özdeğerleri sırasıyla λ_j ve μ_t olan matrisler olmak üzere;

$$\left[e^A, e^B \right] = \sum_{j,t=2}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{s=0}^{t-1} \left[\lambda_1, \cdots, \lambda_j \right] \left[\mu_1, \cdots, \mu_t \right] c_k r_s (-1)^{k+s} \left[A^{j-k-1}, B^{t-s-1} \right]. \quad (4.37)$$

İspat: Bu teoremin ispatı $\left[e^A, e^B \right]$'nün bileşenleri olan e^A ve e^B matrislerini (4.31) dan hareketle aşağıdaki gibi tanımlayarak tamamlanabilir:

$$e^A = e^{\lambda_1} I + \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} \left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_j \right] (-1)^k c_k A^{j-k-1},$$

$$e^B = e^{\mu_1} I + \sum_{t=2}^{n} \sum_{s=0}^{t-1} \left[\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_t \right] (-1)^s r_s B^{t-s-1}.$$

e^A ve e^B matrisleri $\left[e^A, e^B \right]$'nde yerine yazılırsa,

$$\left[e^A,e^B\right]=\left[\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_j\right](-1)^k c_k A^{j-k-1},\sum_{t=2}^{n}\sum_{s=0}^{t-1}\left[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_t\right](-1)^s r_s B^{t-s-1}\right],$$

$$\left[e^A,e^B\right]=\sum_{j,t=2}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{s=0}^{t-1}\left[\lambda_1,\cdots,\lambda_j\right]\left[\mu_1,\cdots,\mu_t\right]c_k r_s(-1)^{k+s}\left[A^{j-k-1},B^{t-s-1}\right],$$

eşitliği elde edilir ki ispat biter. ■

Şimdi *nxn* matrisler için elde ettiğimiz (4.37) sonucunun özel durumlarında daha önce elde edilen (4.9) ve (4.10) sonuçlarını desteklediğini gösteren iki sonuç verelim.

Sonuç 4.1.12: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ matrislerinin özdeğerleri (λ_i,μ_j) birbirinden farklı reel sayılar olmak üzere;

$$\left\|\left[e^A,e^B\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|\left|\frac{e^{\mu_1}-e^{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right|\|A\|_F\|B\|_F \tag{4.38}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ olduğundan e^A ve e^B matrisleri (4.31)'den hareketle aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$e^A=e^{\lambda_1}I+\left[\lambda_1,\lambda_2\right](A-\lambda_1 I)\ ,\ e^B=e^{\mu_1}I+\left[\mu_1,\mu_2\right](B-\mu_1 I)$$

Buradan hareketle,

$$\left[e^A,e^B\right]=\left[e^{\lambda_1}I+\left[\lambda_1,\lambda_2\right](A-\lambda_1 I),e^{\mu_1}I+\left[\mu_1,\mu_2\right](B-\mu_1 I)\right],$$
$$\left[e^A,e^B\right]=\left[e^{\lambda_1}I,e^{\mu_1}I\right]+\left[\left[\lambda_1,\lambda_2\right](A-\lambda_1 I),\left[\mu_1,\mu_2\right](B-\mu_1 I)\right],$$
$$\left[e^A,e^B\right]=e^{\lambda_1+\mu_1}\underbrace{\left[I,I\right]}_{0}+\left[\lambda_1,\lambda_2\right]\left[\mu_1,\mu_2\right]\left[(A-\lambda_1 I),(B-\mu_1 I)\right],$$
$$\left[e^A,e^B\right]=\left(\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{e^{\mu_1}-e^{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right)[A,B].$$

Son eşitliğin iki tarafının Frobenius normu alınırsa,

$$\left\|\left[e^A,e^B\right]\right\|_F=\left|\left(\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{e^{\mu_1}-e^{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right)\right|\left\|[A,B]\right\|_F$$

elde edilir. Son olarak bu norm eşitliği (3.1) norm eşitsizliği ile birleştirilirse,

$$\left\|\left[e^A,e^B\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\left(\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{e^{\mu_1}-e^{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right)\right|\|A\|_F\|B\|_F$$

elde edilir ki ispat biter.

■

Sonuç 4.1.13: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ matrislerinin özdeğerleri (λ,μ) çift katlı olan reel sayılar olmak üzere;

$$\left\|\left[e^A,e^B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{\lambda+\mu}\|A\|_F\|B\|_F \tag{4.39}$$

norm eşitsizliği geçerlidir**.**

İspat: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ olduğundan e^A ve e^B matrisleri (4.31) ifadesinden hareketle aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$e^A=e^{\lambda}I+e^{\lambda}(A-\lambda I)\ ,\ e^B=e^{\mu}I+e^{\mu}(B-\mu I).$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
\left[e^A,e^B\right]&=\left[e^{\lambda}I+e^{\lambda}(A-\lambda I),e^{\mu}I+e^{\mu}(B-\mu I)\right],\\
\left[e^A,e^B\right]&=\left[e^{\lambda}I,e^{\mu}I\right]+\left[e^{\lambda}(A-\lambda_1 I),e^{\mu}(B-\mu_1 I)\right],\\
\left[e^A,e^B\right]&=e^{\lambda+\mu}\underbrace{\left[I,I\right]}_{0}+e^{\lambda+\mu}\left[(A-\lambda_1 I),(B-\mu_1 I)\right],\\
\left[e^A,e^B\right]&=e^{\lambda+\mu}\left[A,B\right].
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin iki tarafının Frobenius normu alınırsa,

$$\left\|\left[e^A,e^B\right]\right\|_F=e^{\lambda+\mu}\left\|\left[A,B\right]\right\|_F$$

elde edilir. Son olarak bu norm eşitliği (3.1) norm eşitsizliği ile birleştirilirse,

$$\left\|\left[e^A,e^B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{\lambda+\mu}\|A\|_F\|B\|_F$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur. ■

4.2. Bileşenleri Hiperbolik ve Trigonometrik Matrisler Olan Komütatörler

4.2.1 Bileşenleri Hiperbolik Matrisler Olan Komütatörler

Bu kısımda, bileşenleri hiperbolik matris fonksiyonları $\sinh(A)$ ve $\cosh(A)$, olan komütatörlerin $[A,B]$ ile bağlantıları ve bu komütatörlere ait norm eşitsizlikleri ile ilgili sonuçlara yer verilecektir. Bu bölümdeki sonuçların büyük kısmını içeren "Norm Inequalities Related to Matrix Commutators Involving Hyperbolic Matrix Functions" isimli çalışma "Asian-European Journal of Mathematics-World Scientific (Kan & Solak, 2019)" isimli sınıflı dergide yayınlanmıştır.

Teorem 4.2.1.1: $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere;

$$[\sinh(A),B]=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\left(1-(-1)^s\right)}{2s!}A^{s-r-1}[A,B]A^r. \tag{4.40}$$

İspat: $[\sinh(A),B]=\left[\frac{1}{2}\left(e^A-e^{-A}\right),B\right]=\frac{1}{2}\left([e^A,B]-[e^{-A},B]\right)$. Burada, $[e^{-A},B]$ komütatörü $\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}[A^s,B]$ şeklinde ifade edilebilir**.** Dolayısıyla,

$$[\sinh(A),B]=\frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{[A^s,B]}{s!}-\frac{(-1)^s[A^s,B]}{s!}\right),$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^s\right)}{s!}[A^s,B].$$

Diğer taraftan $[A^s,B]$ komütatörü, matris komütatörlerinin çarpımsal özelliğinden, $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$, hareketle $\sum_{r=0}^{s-1}A^{s-r-1}[A,B]A^r$ şeklinde ifade edilebilir. $\sum_{r=0}^{s-1}A^{s-r-1}[A,B]A^r$ ifadesi $[\sinh(A),B]$'nde yerine yazılırsa,

$$[\sinh(A),B]=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\left(1-(-1)^s\right)}{2s!}A^{s-r-1}[A,B]A^r$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.2.1: $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi $\left[A,\left[A,B\right]\right]=0$ şartını sağlamak üzere**;**

$$\left[\sinh(A),B\right]=\cosh(A)\left[A,B\right]. \tag{4.41}$$

İspat: $\left[A,B\right]$ komütatörü A matrisi ile değişmeli ise A^r matrisi ile de değişmelidir. Dolayısıyla, $\sum_{r=0}^{s-1}A^{s-r-1}\left[A,B\right]A^r=sA^{s-1}\left[A,B\right]$ eşitliği $\left[A,\left[A,B\right]\right]=0$ durumunda geçerlidir. Bu eşitlik (4.40)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left[\sinh(A),B\right]&=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^s\right)}{2s!}sA^{s-1}\left[A,B\right],\\&=\underbrace{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\left(1-(-1)^s\right)}{2}\right)\left(\frac{A^{s-1}}{(s-1)!}\right)}_{\cosh(A)}\left[A,B\right],\\&=\cosh(A)\left[A,B\right].\end{aligned}$$

■

Teorem 4.2.1.2: $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere;

$$\left[\cosh(A),B\right]=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\left(1+(-1)^s\right)}{2s!}A^{s-r-1}\left[A,B\right]A^r. \tag{4.42}$$

İspat: Bu teoremin ispatı, Teorem 4.2.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

■

Sonuç 4.2.2: $A,B \in M_n(\mathbb{C})$, $\left[A,\left[A,B\right]\right]=0$ şartını sağlamak üzere**;**

$$\left[\cosh(A),B\right]=\sinh(A)\left[A,B\right]. \tag{4.43}$$

■

Teorem 4.2.1.3: $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere;

$$\left[\sinh(A),\sinh(B)\right]=\sum_{s,t=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\sum_{k=0}^{t-1}\frac{\left(1-(-1)^s-(-1)^t+(-1)^{s+t}\right)}{4s!t!}A^{s-r-1}B^k\left[A,B\right]B^{t-k-1}A^r. \tag{4.44}$$

İspat: Bileşenleri $\sinh(A)$ ve $\sinh(B)$ olan matris komütatörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\left[\sinh(A),\sinh(B)\right]=\left[\frac{\left(e^{A}-e^{-A}\right)}{2},\frac{\left(e^{B}-e^{-B}\right)}{2}\right],$$
$$=\frac{1}{4}\left(\left[e^{A},e^{B}\right]-\left[e^{A},e^{-B}\right]-\left[e^{-A},e^{B}\right]+\left[e^{-A},e^{-B}\right]\right).$$

Bu eşitlikteki $\left[e^{A},e^{B}\right]$, $\left[e^{A},e^{-B}\right]$, $\left[e^{-A},e^{B}\right]$ ve $\left[e^{-A},e^{-B}\right]$ komütatörleri üstel matrislerin seri açılımlarından hareketle

$$\left[e^{A},e^{B}\right]=\sum_{s,t=1}^{\infty}\frac{1}{s!t!}\left[A^{s},B^{t}\right],\quad \left[e^{A},e^{-B}\right]=\sum_{s,t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t}}{s!t!}\left[A^{s},B^{t}\right],$$

$$\left[e^{-A},e^{B}\right]=\sum_{s,t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s}}{s!t!}\left[A^{s},B^{t}\right],\quad \left[e^{-A},e^{-B}\right]=\sum_{s,t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+t}}{s!t!}\left[A^{s},B^{t}\right],$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadeler $\left[\sinh(A),\sinh(B)\right]$ komütatöründe yerlerine yazılırsa**,**

$$\left[\sinh(A),\sinh(B)\right]=\sum_{s,t=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^{s}-(-1)^{t}+(-1)^{s+t}\right)}{4s!t!}\left[A^{s},B^{t}\right].$$

Burada $\left[A^{s},B^{t}\right]$ komütatörüne matris komütatörlerinin çarpımsal özelliği uygulanırsa,

$$\left[\sinh(A),\sinh(B)\right]=\sum_{s,t=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\left(1-(-1)^{s}-(-1)^{t}+(-1)^{s+t}\right)}{4s!t!}A^{s-r-1}\left[A,B^{t}\right]A^{r},$$
$$=\sum_{s,t=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\sum_{k=0}^{t-1}\frac{\left(1-(-1)^{s}-(-1)^{t}+(-1)^{s+t}\right)}{4s!t!}A^{s-r-1}B^{k}\left[A,B\right]B^{t-k-1}A^{r}.$$

■

Sonuç 4.2.3: $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ matrisleri $\left[A,\left[A,B\right]\right]=0$ ve $\left[B,\left[A,B\right]\right]=0$ şartlarını sağlayan matrisler ve $C=\sum_{s,t=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\left(1-(-1)^{t}-(-1)^{s}+(-1)^{s+t}\right)}{4s!(t-1)!}A^{s-r-1}B^{t-1}A^{r}$ olmak üzere;

$$\left[\sinh(A),\sinh(B)\right]=C\left[A,B\right]. \tag{4.45}$$

İspat: $\left[A,B\right]$ komütatörü B matrisi ile değişmeli ise B^{k} matrisi ile de değişmelidir. Dolayısıyla, $\sum_{k=0}^{t-1}B^{k}\left[A,B\right]B^{t-k-1}=tB^{t-1}\left[A,B\right]$, eşitliği $\left[B,\left[A,B\right]\right]=0$ durumunda geçerlidir. Bu eşitlik (4.44)'te yerine yazılırsa,

$$\left[\sinh(A),\sinh(B)\right]=\sum_{s,t=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\left(1-(-1)^{s}-(-1)^{t}+(-1)^{s+t}\right)}{4s!t!}A^{s-r-1}tB^{t-1}\left[A,B\right]A^{r}$$

eşitliği elde edilir. Bununla birlikte, $\left[A,\left[A,B\right]\right]=0$ olduğundan yukarıdaki eşitlikte

$[A,B]$ ile A^r matrisi yer değiştirilebilir ve ispat tamamlanır.

$$[\sinh(A),\sinh(B)]=\underbrace{\sum_{s,t=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\left(1-(-1)^s-(-1)^t+(-1)^{s+t}\right)}{4s!(t-1)!}A^{s-r-1}B^{t-1}A^r}_{C}[A,B] \qquad \blacksquare$$

Teorem 4.2.1.4: $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ keyfi kare matrisler olmak üzere;

$$[\cosh(A),\cosh(B)]=\sum_{s,t=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\sum_{k=0}^{t-1}\frac{\left(1+(-1)^s+(-1)^t+(-1)^{s+t}\right)}{4s!t!}A^{s-r-1}B^k[A,B]B^{t-k-1}A^r. \quad (4.46)$$

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.1.3'ün ispatına benzer şekilde yapılır. $\blacksquare$

Sonuç 4.2.4: $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri $[A,[A,B]]=0$ ve $[B,[A,B]]=0$ şartlarını sağlayan matrisler ve $C=\sum_{s,t=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\left(1+(-1)^t+(-1)^s+(-1)^{s+t}\right)}{4s!(t-1)!}A^{s-r-1}B^{t-1}A^r$ olmak üzere;

$$[\cosh(A),\cosh(B)]=C[A,B]. \quad (4.47)$$

Teorem 4.2.1.5: $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ keyfi kare matrisler olmak üzere;

$$[\sinh(A),\cosh(B)]=\sum_{s,t=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\sum_{k=0}^{t-1}\frac{\left(1+(-1)^t-(-1)^s-(-1)^{s+t}\right)}{4s!t!}A^{s-r-1}B^k[A,B]B^{t-k-1}A^r. \quad (4.48)$$

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.1.3'ün ispatına benzer şekilde yapılır. $\blacksquare$

Sonuç 4.2.5: $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri $[A,[A,B]]=0$ ve $[B,[A,B]]=0$ şartlarını sağlayan matrisler ve $C=\sum_{s,t=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\left(1+(-1)^t-(-1)^s-(-1)^{s+t}\right)}{4s!(t-1)!}A^{s-r-1}B^{t-1}A^r$ olmak üzere;

$$[\sinh(A),\cosh(B)]=C[A,B]. \quad (4.49)$$

Teorem 4.2.1.6: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ ve $\lambda_1(A)\neq\lambda_2(A)$ olmak üzere;

$$\|[\sinh(A),B]\|_F\leq\sqrt{2}\left|\frac{\sinh(\lambda_1)-\sinh(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\right|\|A\|_F\|B\|_F \quad (4.50)$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $\left[\sinh(A),B\right]$ komütatörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\left[\sinh(A),B\right]=\left[\frac{e^{A}-e^{-A}}{2},B\right]=\frac{1}{2}\left[e^{A}-e^{-A},B\right]=\frac{1}{2}\left(\left[e^{A},B\right]-\left[e^{-A},B\right]\right).$$

$\left[\sinh(A),B\right]$ komütatörünü oluşturabilmek için $\left[e^{A},B\right]$ve $\left[e^{-A},B\right]$ komütatörlerini Lagrange Enterpolasyonuna, (4.12), uygun şekilde tanımlayalım.

- $$\left[e^{A},B\right]=\left[e^{\lambda_1}\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_1-\lambda_2}+e^{\lambda_2}\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_2-\lambda_1},B\right]=e^{\lambda_1}\frac{\left[A,B\right]}{\lambda_1-\lambda_2}+e^{\lambda_2}\frac{\left[A,B\right]}{\lambda_2-\lambda_1},$$
$$=\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\left[A,B\right].$$
- $$\left[e^{-A},B\right]=\left[e^{-\lambda_1}\frac{-A+\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}+e^{-\lambda_2}\frac{-A+\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2},B\right]=e^{-\lambda_1}\frac{\left[A,B\right]}{\lambda_1-\lambda_2}-e^{-\lambda_2}\frac{\left[A,B\right]}{\lambda_1-\lambda_2},$$
$$=\frac{e^{-\lambda_1}-e^{-\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\left[A,B\right].$$

$\left[e^{A},B\right]$ve $\left[e^{-A},B\right]$ komütatörleri $\left[\sinh(A),B\right]$ komütatöründe yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left[\sinh(A),B\right]&=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{e^{-\lambda_1}-e^{-\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left[A,B\right],\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\lambda_1}-e^{-\lambda_1}}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{e^{\lambda_2}-e^{-\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left[A,B\right],\\&=\left(\frac{\sinh(\lambda_1)-\sinh(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left[A,B\right].\end{aligned}$$

Bu eşitlik (3.1) norm eşitsizliği ile birleştirilirse

$$\left\|\left[\sinh(A),B\right]\right\|_F=\left|\frac{\sinh(\lambda_1)-\sinh(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\right|\left\|\left[A,B\right]\right\|_F,$$

$$\left\|\left[\sinh(A),B\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\frac{\sinh(\lambda_1)-\sinh(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\right|\|A\|_F\|B\|_F.$$

■

Teorem 4.2.1.7: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ olsun**.** $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$; A matrisinin özdeğerleri olmak üzere,

$$\left\|\left[\sinh(A),B\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\cosh(\lambda)\right|\|A\|_F\|B\|_F \tag{4.51}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ olsun. Bu durumda, (4.13) ten hareketle

$$e^A = e^\lambda I + e^\lambda \left(A - \lambda I\right), e^{-A} = e^{-\lambda} I - e^{-\lambda}\left(A - \lambda I\right), \sinh(A) = \sinh(\lambda) I + \cosh(\lambda)\left(A - \lambda I\right).$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\left[\sinh(A), B\right] &= \left[\sinh(\lambda) I + \cosh(\lambda)\left(A - \lambda I\right), B\right], \\ &= \left[\sinh(\lambda) I, B\right] + \left[\cosh(\lambda)\left(A - \lambda I\right), B\right], \\ &= \cosh(\lambda)\left[A, B\right].\end{aligned}$$

Bu eşitlik (3.1) norm eşitsizliği ile birleştirilirse,

$$\begin{aligned}\left\|\left[\sinh(A), B\right]\right\|_F &= \left\|\cosh(\lambda)\left[A, B\right]\right\|_F, \\ \left\|\left[\sinh(A), B\right]\right\|_F &= \left|\cosh(\lambda)\right| \left\|\left[A, B\right]\right\|_F, \\ \left\|\left[\sinh(A), B\right]\right\|_F &\le \sqrt{2}\left|\cosh(\lambda)\right| \left\|A\right\|_F \left\|B\right\|_F\end{aligned}$$

elde edilir ki ispat biter. ■

Teorem 4.2.1.8: $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ olsun. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sayıları A matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\|\left[\cosh(A), B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\left|\frac{\cosh(\lambda_1) - \cosh(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right| \left\|A\right\|_F \left\|B\right\|_F \tag{4.52}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.1.6'nın ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.2.1.9: $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ olsun**.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ sayıları A matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\|\left[\cosh(A), B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\left|\sinh(\lambda)\right| \left\|A\right\|_F \left\|B\right\|_F \tag{4.53}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.1.7'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.2.1.10: $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ olsun**.** $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve $\mu_1 \neq \mu_2$ sayıları sırasıyla A ve B matrislerinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\|\left[\sinh(A), \sinh(B)\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\left|\left(\frac{\sinh(\lambda_1) - \sinh(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)\left(\frac{\sinh(\mu_1) - \sinh(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}\right)\right| \left\|A\right\|_F \left\|B\right\|_F \tag{4.54}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: e^{A}, e^{-A} ,e^{B} ve e^{-B} matrisleri Lagrange enterpolasyonundan hareketle aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

- $e^{A}=e^{\lambda_1}\left(\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}\right)+e^{\lambda_2}\left(\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}\right),\quad e^{B}=e^{\mu_1}\left(\frac{B-\mu_2 I}{\mu_1-\mu_2}\right)+e^{\mu_2}\left(\frac{B-\mu_1 I}{\mu_1-\mu_2}\right),$
- $e^{-A}=e^{-\lambda_1}\left(\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}\right)+e^{-\lambda_2}\left(\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}\right),\quad e^{-B}=e^{-\mu_1}\left(\frac{B-\mu_2 I}{\mu_1-\mu_2}\right)+e^{-\mu_2}\left(\frac{B-\mu_1 I}{\mu_2-\mu_1}\right).$

Buradan hareketle,

$$\left[\sinh(A),\sinh(B)\right]=\left[\frac{e^{A}-e^{-A}}{2},\frac{e^{B}-e^{-B}}{2}\right]=\frac{1}{4}\left[e^{A}-e^{-A},e^{B}-e^{-B}\right],$$
$$=\frac{1}{4}\left(\left[e^{A},e^{B}\right]-\left[e^{A},e^{-B}\right]-\left[e^{-A},e^{B}\right]+\left[e^{-A},e^{-B}\right]\right).$$

Bu eşitlikte yer alan komütatörler $[A,B]$ türünden aşağıdaki ifade edilip $\left[\sinh(A),\sinh(B)\right]$ komütatöründe yerine yazılırsa

- $\left[e^{A},e^{B}\right]=\left(\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{e^{\mu_1}-e^{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right)[A,B]$
- $\left[e^{A},e^{-B}\right]=\left(\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{e^{-\mu_1}-e^{-\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right)[A,B]$
- $\left[e^{-A},e^{B}\right]=\left(\frac{e^{-\lambda_1}-e^{-\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{e^{\mu_1}-e^{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right)[A,B]$
- $\left[e^{-A},e^{-B}\right]=\left(\frac{e^{-\lambda_1}-e^{-\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{e^{-\mu_1}-e^{-\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right)[A,B]$

$\left[\sinh(A),\sinh(B)\right]=\left(\frac{\sinh(\lambda_1)-\sinh(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{\sinh(\mu_1)-\sinh(\mu_2)}{\mu_1-\mu_2}\right)[A,B]$, eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.1) norm eşitsizliği ile birleştirilirse,

$$\left\|\left[\sinh(A),\sinh(B)\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\left(\frac{\sinh(\lambda_1)-\sinh(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{\sinh(\mu_1)-\sinh(\mu_2)}{\mu_1-\mu_2}\right)\right|\|A\|_F\|B\|_F.\ \blacksquare$$

Teorem 4.2.1.11: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ olsun**.** $\lambda_1\neq\lambda_2$ ve $\mu_1\neq\mu_2$ sayıları sırasıyla A ve B matrislerinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\|\left[\cosh(A),\cosh(B)\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\frac{\left(\cosh(\lambda_1)-\cosh(\lambda_2)\right)\left(\cosh(\mu_1)-\cosh(\mu_2)\right)}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left(\mu_1-\mu_2\right)}\right|\|A\|_F\|B\|_F. \qquad (4.55)$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.1.10'un ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.2.1.12: $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ olsun**.** $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve $\mu_1 \neq \mu_2$ sayıları sırasıyla A ve B matrislerinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\| [\sinh(A), \cosh(B)] \right\|_F \leq \sqrt{2} \left| \frac{\left(\sinh(\lambda_1) - \sinh(\lambda_2)\right)\left(\cosh(\mu_1) - \cosh(\mu_2)\right)}{\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\left(\mu_1 - \mu_2\right)} \right| \|A\|_F \|B\|_F . \quad (4.56)$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.1.10'un ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.2.1.13: $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ olsun**.** $\lambda_1 = \lambda_2$ ve $\mu_1 = \mu_2$ sayıları sırasıyla A ve B matrislerinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\| [\sinh(A), \sinh(B)] \right\|_F \leq \sqrt{2} \left| \cosh(\lambda) \cosh(\mu) \right| \|A\|_F \|B\|_F ,$$

$$\left\| [\cosh(A), \sinh(B)] \right\|_F \leq \sqrt{2} \left| \sinh(\lambda) \cosh(\mu) \right| \|A\|_F \|B\|_F ,$$

$$\left\| [\cosh(A), \cosh(B)] \right\|_F \leq \sqrt{2} \left| \sinh(\lambda) \sinh(\mu) \right| \|A\|_F \|B\|_F ,$$

norm eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.1.7'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

4.2.2 Bileşenleri Trigonometrik Matrisler Olan Komütatörler

Bu bölümde 2×2 matrislere ait trigonometrik matris fonksiyonları ile ilgili bulgulara yer verilecektir. Bu bölümdeki sonuçların büyük kısmını içeren "Some Results Related to Matrix Commutators Involving Trigonometric Matrix Functions (Kan, Maden, & Solak, 2020)" isimli çalışma "4th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2019)-Springer" isimli kitapta yayınlanmaya hak kazanmıştır.

Teorem 4.2.2.1: A, B 2×2 matrisler ve $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ A matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\|\left[\sin(A), B\right]\right\|_F \leq \frac{2\sqrt{2}}{|\lambda_1 - \lambda_2|}\|A\|_F \|B\|_F \tag{4.57}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: (3.8)'den hareketle A, 2×2 matris olmak üzere;

$$\sin(A) = \sin(\lambda_1) I + \frac{\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_1 I). \tag{4.58}$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\left[\sin(A), B\right] &= \left[\sin(\lambda_1) I + \frac{\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_1 I), B\right], \\ &= \left[\sin(\lambda_1) I, B\right] + \left[\frac{\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_1 I), B\right], \\ &= \left(\frac{\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)\left[A - \lambda_1 I, B\right] = \left(\frac{\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)\left[A, B\right].\end{aligned}$$

Bu komütatör eşitliğinde iki tarafın Frobenius normu alınırsa,

$$\left\|\left[\sin(A), B\right]\right\|_F = \left|\frac{\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right| \left\|\left[A, B\right]\right\|_F$$

norm eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.1) norm eşitsizliği ile birleştirilirse,

$$\left\|\left[\sin(A), B\right]\right\|_F \leq \sqrt{2}\left|\frac{\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right| \|A\|_F \|B\|_F.$$

Burada $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan $\left|\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)\right| \leq 2$ olur ki ispat biter.

■

Sonuç 4.2.2.1: A, B 2×2 matrisler ve $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ A matrisinin özdeğerleri olsun. Bu durumda $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda_1 - \lambda_2 = 2k\pi$ veya $\lambda_1 + \lambda_2 = (2k+1)\pi$ olmak üzere;

$$\left\|\left[\sin(A), B\right]\right\|_F = 0.$$

İspat: $\lambda_1 - \lambda_2 = 2k\pi$ veya $\lambda_1 + \lambda_2 = (2k+1)\pi$ olmak üzere, $\sin(\lambda_1) = \sin(\lambda_2)$.

$\sin(\lambda_1)$ ve $\sin(\lambda_2)$ reel sayıları

$$\left\|\left[\sin(A), B\right]\right\|_F = \left|\frac{\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right| \left\|\left[A, B\right]\right\|_F$$

eşitliğinde yerine yazılırsa, $\left\|\left[\sin(A), B\right]\right\|_F = 0$ elde edilir.

■

Sonuç 4.2.2.2: A, B 2×2 matrisler ve $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ A matrisinin özdeğerleri olsun. Bu durumda $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda_1 - \lambda_2 = 2k\pi$ veya $\lambda_1 + \lambda_2 = 2k\pi$ olmak üzere;

$$\left\|\left[\cos(A), B\right]\right\|_F = 0 .$$

İspat: $\lambda_1 - \lambda_2 = 2k\pi$ veya $\lambda_1 + \lambda_2 = 2k\pi$ olmak üzere, $\cos(\lambda_1) = \cos(\lambda_2)$.

$\cos(\lambda_1)$ ve $\cos(\lambda_2)$ reel sayıları

$$\left\|\left[\cos(A), B\right]\right\|_F = \left|\frac{\cos(\lambda_1) - \cos(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right| \left\|\left[A, B\right]\right\|_F$$

eşitliğinde yerine yazılırsa, $\left\|\left[\cos(A), B\right]\right\|_F = 0$ elde edilir.

■

Teorem 4.2.2.2: A ve B 2×2 matrisler olsun. A matrisi çift katlı bir reel özdeğere, (λ) , sahip olmak üzere;

$$\left\|\left[\sin(A), B\right]\right\|_F \leq \sqrt{2}\,\|A\|_F\,\|B\|_F \tag{4.59}$$

İspat: $\left\|\left[\sin(A), B\right]\right\|_F = \left|\frac{\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right| \left\|\left[A, B\right]\right\|_F$ olduğunu Teorem 4.2.2.1'den biliyoruz**.** Reel özdeğerli bir A matrisi için $\lambda_1 > \lambda_2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\lambda_1 = \lambda_2 + a$ olacak şekilde bir a reel sayısı vardır ve $a \to 0$ durumunda $\lambda_1 \to \lambda_2$ olacağı açıktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0} \frac{\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} &= \lim_{a\to 0} \frac{\sin(\lambda_2 + a) - \sin(\lambda_2)}{a} \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{\sin(\lambda_2)\cos(a) + \cos(\lambda_2)\sin(a) - \sin(\lambda_2)}{a} \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{\cos(\lambda_2)\sin(a)}{a} = \cos\lambda_2
\end{aligned}$$

elde edildiğinden $\lambda_1 = \lambda_2$ olması durumunda $\left[\sin(A), B\right] = \cos(\lambda_1)\left[A, B\right]$ olduğu görülür. Bu eşitlik (3.1) norm eşitsizliği ile birleştirilirse,

$$\begin{aligned}\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F &= \left|\cos(\lambda_1)\right|\left\|\left[A,B\right]\right\|_F \\ &\le \sqrt{2}\underbrace{\left|\cos(\lambda_1)\right|}_{\le 1}\|A\|_F\|B\|_F \\ &\le \sqrt{2}\|A\|_F\|B\|_F\end{aligned}$$

elde edilir ki ispat biter. ■

Teorem 4.2.2.3: A ve B 2×2 matrisler olsun. A matrisinin özdeğerleri kompleks sayılar, $\left(\lambda_1=\overline{\lambda_2}=a+bi\right)$, olmak üzere,

$$\begin{aligned}\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F &\le \sqrt{2}\left|\frac{\sinh(b)}{b}\right|\|A\|_F\|B\|_F, \\ \left\|\left[\cos(A),B\right]\right\|_F &\le \sqrt{2}\left|\frac{\sinh(b)}{b}\right|\|A\|_F\|B\|_F.\end{aligned} \tag{4.60}$$

İspat: $\lambda_1=\overline{\lambda_2}=a+bi$ A matrisinin özdeğerleri olmak üzere, (4.58)'den

$$\left[\sin(A),B\right]=\left(\frac{\sin(a+bi)-\sin(a-bi)}{2bi}\right)\left[A,B\right].$$

Burada $\sin(a+bi)-\sin(a-bi)$ ifadesi yerine, trigonometrik toplam-fark eşitliklerinden, hareketle $\sin(a+bi)-\sin(a-bi)=2\cos(a)\sinh(b)$ yazılarak eşitliğinin iki tarafının Frobenius normu alınırsa,

$$\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F=\left|\frac{\cos(a)\sinh(b)}{bi}\right|\left\|\left[A,B\right]\right\|_F$$

elde edilir. Bu eşitlik (3.1) norm eşitsizliği ile birleştirilirse,

$$\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\frac{\cos(a)\sinh(b)}{bi}\right|\|A\|_F\|B\|_F.$$

Burada $a,b\in\mathbb{R}$ olduğundan $\left|\cos(a)\right|\le 1$ ve $\left|bi\right|=\left|b\right|$ olduğu açıktır. Dolayısıyla bu ifadeler yukarıdaki norm eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\frac{\sinh(b)}{b}\right|\|A\|_F\|B\|_F.$$

$\left\|\left[\cos(A),B\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\frac{\sinh(b)}{b}\right|\|A\|_F\|B\|_F$ olduğu da benzer şekilde gösterilerek ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.2.2.3: $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ olsun. A reel ters simetrik bir matris olmak üzere;

$$\begin{aligned} \left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F &\le 2 \left| \sinh(b) \right| \left\| B \right\|_F , \\ \left\| \left[\cos(A), B \right] \right\|_F &= 0. \end{aligned} \tag{4.61}$$

İspat: $A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda A matrisinin karakteristik denklemi

$$\left| A - \lambda \mathrm{I} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & -b \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + b^2 = 0 .$$

$\left\| \left[\sin\left(A\right), B \right] \right\|_F = \left| \dfrac{\cos\left(a\right)\sinh\left(b\right)}{bi} \right| \left\| \left[A, B \right] \right\|_F$ eşitliğinde a reel sayısı yerine 0 yazılırsa,

$$\begin{aligned} \left\| \left[\sin\left(A\right), B \right] \right\|_F &= \frac{\left| \sinh\left(b\right) \right|}{\left| b \right|} \left\| \left[A, B \right] \right\|_F , \\ &\le \sqrt{2} \frac{\left| \sinh\left(b\right) \right|}{\left| b \right|} \left\| A \right\|_F \left\| B \right\|_F . \end{aligned}$$

Bununla birlikte, $\left\| A \right\|_F = \sqrt{2} \left| b \right|$ olup bu ifade yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa $\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F \le 2 \left| \sinh(b) \right| \left\| B \right\|_F$ olduğu gösterilmiş olur.

Diğer taraftan, $\left[\cos\left(A\right), B \right]$ komütatörü için (3.8)'den hareketle

$$\left\| \left[\cos\left(A\right), B \right] \right\|_F = \left| \frac{\cos\left(bi\right) - \cos\left(-bi\right)}{2bi} \right| \left\| \left[A, B \right] \right\|_F$$

norm eşitliği yazılabilir. Kosinüs fonksiyonu çift bir fonksiyon olduğundan $\cos\left(bi\right) = \cos\left(-bi\right)$ olup

$$\begin{aligned} \left\| \left[\cos\left(A\right), B \right] \right\|_F &= \left| \frac{\cos\left(bi\right) - \cos\left(bi\right)}{2bi} \right| \left\| \left[A, B \right] \right\|_F , \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Sonuç 4.2.2.4: $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ matrisleri özdeğerleri sırasıyla $\pm ai$ ve $\pm bi$ olan ters simetrik matrisler olmak üzere;

$$\left\| \left[\sin\left(A\right), \sin\left(B\right) \right] \right\|_F \le \sqrt{2} \left| \cosh\left(a+b\right) - \cosh\left(a-b\right) \right| \tag{4.62}$$

norm eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $\left[\sin\left(A\right), \sin\left(B\right) \right]$ komütaörü (3.8)'den hareketle aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\left[\sin(A),\sin(B)\right]=\left|\frac{\sin(\lambda_1)-\sin(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\right|\left|\frac{\sin(\mu_1)-\sin(\mu_2)}{\mu_1-\mu_2}\right|[A,B]$$

Burada A ve B ters simetrik olduğundan,

$$\left[\sin(A),\sin(B)\right]=\left|\frac{\sin(ai)}{ai}\right|\left|\frac{\sin(bi)}{bi}\right|[A,B],$$

$$\left\|\left[\sin(A),\sin(B)\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\,\frac{\left|\sin(ai)\sin(bi)\right|}{|ab|}\|A\|_F\|B\|_F.$$

$\|A\|_F=\sqrt{2}\,|a|$ ve $\|B\|_F=\sqrt{2}\,|b|$ ifadeleri yukarıdaki eşitsizlikte yerlerine yazılırsa,

$$\left\|\left[\sin(A),\sin(B)\right]\right\|_F\le 2\sqrt{2}\left|\sin(ai)\sin(bi)\right|,$$
$$=\sqrt{2}\left|\cosh(a+b)-\cosh(a-b)\right|$$

elde edilir ki ispat biter. ■

Teorem 4.2.2.4: A ve B 2×2 matrisler olsun. Bu durumda aşağıda verilen norm eşitsizlikleri geçerlidir:

- A matrisinin özdeğerleri reel ve birbirinden farklı olmak üzere;

$$\left\|\left[\cos(A),B\right]\right\|_F\le\frac{2\sqrt{2}}{|\lambda_1-\lambda_2|}\|A\|_F\|B\|_F.$$

- A matrisi çift katlı bir reel özdeğere $,(\lambda)$, sahip olmak üzere;

$$\left\|\left[\cos(A),B\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\,\|A\|_F\|B\|_F.$$

- A matrisinin özdeğerleri kompleks sayılar $\left(\lambda_1=\overline{\lambda_2}=a+bi\right)$ olmak üzere;

$$\left\|\left[\cos(A),B\right]\right\|_F\le\sqrt{2}\left|\frac{\sinh(b)}{b}\right|\|A\|_F\|B\|_F.$$

İspat: Yukarıda verilen ifadelerin ispatı sırasıyla Teorem 4.2.2.1, Teorem 4.2.2.2 ve Teorem 4.2.2.3'e benzer şekilde yapılır.

■

Bu kısımda, $n>2$ olacak şekilde $n\times n$ simetrik ve ters simetrik matrisler için elde edilen bulgulara yer verilecektir.

Teorem 4.2.2.5: $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ olsun. A reel ters simetrik matris olmak üzere;

$$\begin{aligned} \left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F &\le 2 \left| \sinh\left(\frac{\sqrt{2}\left\|A\right\|_F}{2} \right) \right| \left\|B\right\|_F , \\ \left\| \left[\cos(A), B \right] \right\|_F &\le 2\sqrt{2} \left| 1 - \cos\left(\frac{\sqrt{2}\left\|A\right\|_F}{2} i \right) \right| \left\|B\right\|_F \end{aligned} \tag{4.63}$$

norm eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ olsun. $\left|A - \lambda \mathrm{I}\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & a & b \\ -a & -\lambda & c \\ -b & -c & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda \left(\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{\mu^2} \right) = 0$

olduğundan $a^2 + b^2 + c^2 = \mu^2$ olmak üzere A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1(A) = \mu i$, $\lambda_2(A) = -\mu i$ ve $\lambda_3 = 0$ şeklindedir. Bununla birlikte, $\sin(A)$ matrisine ait bölünmüş farklar $\left[\lambda_1, \lambda_2\right] = \left[\lambda_2, \lambda_3\right] = \dfrac{\sin(\mu i)}{\mu i}$ ve $\left[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right] = 0$ şeklinde olup (3.8)' den

$$\left[\sin(A), B \right] = \left[\sin(\mu i)\mathrm{I} + \frac{\sin(\mu i)}{\mu i}(A - \mu i \mathrm{I}) + 0\left(A^2 + \mu^2 \mathrm{I}\right), B \right] = \frac{\sin(\mu i)}{\mu i}\left[A, B\right],$$

$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F \le \sqrt{2} \left| \frac{\sinh(\mu)}{\mu} \right| \left\|A\right\|_F \left\|B\right\|_F .$$

Burada $\left\|A\right\|_F^{\,2} = 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ olduğundan, $\left|\mu\right| = \dfrac{\sqrt{2}\left\|A\right\|_F}{2}$. Dolayısıyla $\left\|A\right\|_F$ ve $\left|\mu\right|$ ifadeleri yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F \le \sqrt{2} \left| \frac{\sinh(\mu)}{\mu} \right| \sqrt{2}\left|\mu\right| \left\|B\right\|_F = 2 \left| \sinh\left(\frac{\sqrt{2}\left\|A\right\|_F}{2} \right) \right| \left\|B\right\|_F .$$

Diğer taraftan, $\cos(A)$ matrisine ait bölünmüş farklar, $\left[\lambda_1, \lambda_2\right]$, $\left[\lambda_2, \lambda_3\right]$ ve $\left[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right]$ sırasıyla 0 , $\dfrac{1 - \cos(\mu i)}{\mu i}$ ve $\dfrac{1 - \cos(\mu i)}{\mu^2}$ olup (3.8)' den

$$\left[\cos(A), B \right] = \left[\cos(\mu i)\mathrm{I} + 0(A - \mu i \mathrm{I}) + \frac{1 - \cos(\mu i)}{\mu^2}\left(A^2 + \mu^2 \mathrm{I}\right), B \right] = \frac{1 - \cos(\mu i)}{\mu^2}\left[A^2, B\right],$$

$$= 2\left(1 - \cos(\mu i)\right)\left[\left(\frac{A}{\left\|A\right\|_F} \right)^2, B \right].$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.1) norm eşitsizliği ile birleştirilirse,

$$\begin{aligned}\left\|\left[\cos(A),B\right]\right\|_F &\le 2\sqrt{2}\left|\left(1-\cos(\mu i)\right)\right|\left\|\frac{A}{\|A\|_F}\right\|_F^2\|B\|_F,\\ &\le 2\sqrt{2}\left|\left(1-\cos(\mu i)\right)\right|\|B\|_F,\\ &\le 2\sqrt{2}\left|\left(1-\cos\left(\frac{\sqrt{2}\|A\|_F}{2}i\right)\right)\right|\|B\|_F.\end{aligned}$$

■

*n*x*n* ters simetrik matrisler için en genel sonucu vermeden önce bu tipteki matrislerin köşegenleştirilmesi ile ilgili bir lemma verelim.

Lemma 4.2.2.1(Gallier & Xu, 2003): $n \ge 2, \theta_k > 0$ olsun. Bu durumda keyfi bir ters simetrik B matrisi, P bir ortogonal matris ve E aşağıda belirtilen forma sahip bir blok köşegen matris olmak üzere $B = PEP^T$ şeklinde ifade edilebilir.

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & \cdots & & \\ \vdots & \ddots & & \\ & \cdots & E_m & \\ & & & 0_{n-2m} \end{pmatrix}, \quad E_k = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_k \\ \theta_k & 0 \end{pmatrix}$$

Teorem 4.2.2.6: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. A, özdeğerleri $\left\{\theta_1 i, -\theta_1 i, \cdots, \theta_k i, -\theta_k i, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-2m}\right\}$ olan ters simetrik bir matris olmak üzere;

$$\begin{aligned}\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F &\le 2\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sinh^2(\theta_k)}\,\|B\|_F,\\ \left\|\left[\cos(A),B\right]\right\|_F &\le 2\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\cosh^2(\theta_k)}\,\|B\|_F\end{aligned} \tag{4.64}$$

norm eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: $E = diag(E_1, \cdots, E_m, 0_{n-2m})$ ve P ortogonal bir matris olmak üzere $A = PEP^T$ olsun. Bu durumda (3.15)'ten,

$$\sin(E) = P\,diag\left(\sin(E_1), \ldots, \sin(E_m), 0_{n-2m}\right)P^T.$$

Buradaki $\sin(E_k)$ matrisleri (3.8)'den hareketle aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sin(E_k) = \sin(\theta_k i) I + \frac{\sin(\theta_k i) - \sin(-\theta_k i)}{2\theta_k i}(E_k - \theta_k i I),$$

$$= \sin(\theta_k i) I + \frac{\sin(\theta_k i)}{\theta_k i}(E_k - \theta_k i I),$$

$$= \frac{\sin(\theta_k i)}{\theta_k i} E_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sinh(\theta_k) \\ \sinh(\theta_k) & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisler $\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F = \left\| \left[P \sin(E) P^T, B \right] \right\|_F \le \sqrt{2} \left\| P \sin(E) P^T \right\|_F \|B\|_F,$$

$$\le \sqrt{2} \left\| \sin(E) P^T P \right\|_F \|B\|_F = \sqrt{2} \left\| \sin(E) \right\|_F \|B\|_F,$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} 2\sinh^2(\theta_k)} \|B\|_F = 2 \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sinh^2(\theta_k)} \|B\|_F.$$

Diğer taraftan, $\cos(E_k)$ matrisleri (3.8)'den hareketle aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\cos(E_k) = \cos(\theta_k i) I + \frac{\cos(\theta_k i) - \cos(-\theta_k i)}{2\theta_k i}(E_k - \theta_k i I),$$

$$\cos(E_k) = \cos(\theta_k i) I + \frac{0}{\theta_k i}(E_k - \theta_k i I),$$

$$\cos(E_k) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k i) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_k i) \end{pmatrix}.$$

Bu matrisler $\left\| \left[\cos(A), B \right] \right\|_F$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\left\| \left[\cos(A), B \right] \right\|_F = \left\| \left[P \cos(E) P^T, B \right] \right\|_F \le \sqrt{2} \left\| P \cos(E) P^T \right\|_F \|B\|_F,$$

$$\le \sqrt{2} \left\| \cos(E) P^T P \right\|_F \|B\|_F = \sqrt{2} \left\| \cos(E) \right\|_F \|B\|_F,$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} 2\cosh^2(\theta_k)} \|B\|_F = 2 \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \cosh^2(\theta_k)} \|B\|_F.$$

■

Teorem 4.2.2.7: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ve A özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ pür imajiner sayıları olan bir ters simetrik matris olsun. A matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğeri $\lambda_1 = \theta i$ ve mutlak değerce en küçük özdeğeri $\lambda_n = \alpha i$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F &\le 2 \left| \sinh(\theta) \right| \|B\|_F, \\ \left\| \left[\cos(A), B \right] \right\|_F &\le \left(\cosh(\theta) - \cosh(\alpha) \right) \|B\|_F \end{aligned} \tag{4.65}$$

norm eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: A matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan $A = Q^T D(A) Q$ olacak şekilde bir Q ortogonal matrisi ve bileşenleri A'nın özdeğerleri olan bir $D(A)$ köşegen matrisi vardır. Dolayısıyla $\sin(A) = Q^T \sin(D(A)) Q$. Buradan,

$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F = \left\| Q^T \sin(D(A)) QB - BQ^T \sin(D(A)) Q \right\|_F,$$
$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F = \left\| Q\left(Q^T \sin(D(A)) QB - BQ^T \sin(D(A)) Q \right) Q^T \right\|_F,$$
$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F = \left\| \sin(D(A)) QBQ^T - QBQ^T \sin(D(A)) \right\|_F.$$

$QBQ^T = K$ olsun. Bu durumda, $\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F = \left\| \left[\sin(D(A)), K \right] \right\|_F$ olduğu açıktır.

$\left[e^{D(A)}, K \right]$ komütatörü açık olarak

$$\left[\sin(D(A)), K \right] = \begin{pmatrix} \sin(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sin(\lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sin(\lambda_n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \left(\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)\right) k_{12} & \cdots & \left(\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_n)\right) k_{1n} \\ \left(\sin(\lambda_2) - \sin(\lambda_1)\right) k_{21} & \ddots & \cdots & \left(\sin(\lambda_2) - \sin(\lambda_n)\right) k_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \left(\sin(\lambda_n) - \sin(\lambda_1)\right) k_{n1} & \left(\sin(\lambda_n) - \sin(\lambda_2)\right) k_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla,

$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F^2 = \left| \sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2) \right|^2 \left(k_{12}^2 + k_{21}^2 \right) + \cdots + \left| \sin(\lambda_{n-1}) - \sin(\lambda_n) \right|^2 \left(k_{n(n-1)}^2 + k_{(n-1)n}^2 \right),$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sin(\lambda_i) - \sin(\lambda_j) \right|^2 k_{ij}^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2) \right|^2 k_{ij}^2,$$

A matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğeri $\lambda_1 = \theta i$ olduğundan, $\lambda_2 = -\theta i$ olmak üzere;

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left| \sin(\lambda_i) - \sin(\lambda_j) \right|^2 k_{ij}^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2) \right|^2 k_{ij}^2.$$

Buradan,

$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F^2 \le \left| \sin(\theta i) - \sin(-\theta i) \right|^2 \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}^2 = \left| 2 \sin(\theta i) \right|^2 \|K\|_F^2,$$
$$= 2 \left| \sinh(\theta) \right| \|B\|_F.$$

Diğer taraftan, $\cos(x)$ çift fonksiyon olduğundan

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left|\cos(\lambda_i)-\cos(\lambda_j)\right|^2 k_{ij}^2 \le \sum_{i,j=1}^{n}\left|\cos(\lambda_1)-\cos(\lambda_n)\right|^2 k_{ij}^2 .$$

Buradan,

$$\left\|\left[\cos(A),B\right]\right\|_F^2 \le \left|\cos(\theta i)-\cos(\alpha i)\right|^2 \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}^2 = \left|\cos(\theta i)-\cos(\alpha i)\right|^2 \|K\|_F^2 ,$$
$$= \left|\cosh(\theta)-\cosh(\alpha)\right|\|B\|_F$$

olur ki ispat biter.

■

Teorem 4.2.2.8: $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ olsun. A, özdeğerleri $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\lambda_3\ge\cdots\ge\lambda_n$ şeklinde sıralanan bir simetrik matris olmak üzere;

$$\begin{aligned}\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F &\le 2\|B\|_F ,\\ \left\|\left[\cos(A),B\right]\right\|_F &\le 2\|B\|_F\end{aligned} \tag{4.66}$$

norm eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: A matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan $A=Q^T D(A)Q$ olacak şekilde bir Q ortogonal matrisi ve bileşenleri A'nın özdeğerleri olan bir $D(A)$ köşegen matrisi vardır. Dolayısıyla $\sin(A)=Q^T\sin(D(A))Q$. Buradan,

$$\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F = \left\|Q^T\sin(D(A))QB-BQ^T\sin(D(A))Q\right\|_F ,$$
$$\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F = \left\|Q\left(Q^T\sin(D(A))QB-BQ^T\sin(D(A))Q\right)Q^T\right\|_F ,$$
$$\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F = \left\|\sin(D(A))QBQ^T-QBQ^T\sin(D(A))\right\|_F .$$

$QBQ^T=K$ olsun. Bu durumda, $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F=\left\|\left[\sin(D(A)),K\right]\right\|_F$ olduğu açıktır.

$\left[e^{D(A)},K\right]$ komütatörü açık olarak

$$\left[\sin(D(A)),K\right]=\begin{pmatrix}\sin(\lambda_1)&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&\sin(\lambda_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ k_{n1}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ k_{n1}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin(\lambda_1)&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&\sin(\lambda_n)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&(\sin(\lambda_1)-\sin(\lambda_2))k_{12}&\cdots&(\sin(\lambda_1)-\sin(\lambda_n))k_{1n}\\ (\sin(\lambda_2)-\sin(\lambda_1))k_{21}&\ddots&\cdots&(\sin(\lambda_2)-\sin(\lambda_n))k_{2n}\\ \vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ (\sin(\lambda_n)-\sin(\lambda_1))k_{n1}&(\sin(\lambda_n)-\sin(\lambda_2))k_{n2}&\cdots&0\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Sinüs fonksiyonu periyodik olduğundan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n$ olmak üzere $\sin(\lambda_1) \geq \sin(\lambda_2) \geq \sin(\lambda_3) \geq \cdots \geq \sin(\lambda_n)$ sıralaması her zaman geçerli değildir. $1 \leq k, l \leq n$ olmak üzere $\sin(\lambda_k) \geq \cdots \geq \sin(\lambda_l)$ olsun. Dolayısıyla,

$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F^2 = \left(\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2) \right)^2 \left(k_{12}^2 + k_{21}^2 \right) + \cdots + \left(\sin(\lambda_{n-1}) - \sin(\lambda_n) \right)^2 \left(k_{n(n-1)}^2 + k_{(n-1)n}^2 \right),$$

$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sin(\lambda_i) - \sin(\lambda_j) \right)^2 k_{ij}^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sin(\lambda_k) - \sin(\lambda_l) \right)^2 k_{ij}^2,$$

$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F^2 = \left(\sin(\lambda_k) - \sin(\lambda_l) \right)^2 \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}^2 = \left(\sin(\lambda_k) - \sin(\lambda_l) \right)^2 \|K\|_F^2,$$

$$\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F \leq \left(\sin(\lambda_k) - \sin(\lambda_l) \right) \|K\|_F .$$

$\sin(\lambda_k) - \sin(\lambda_l) \leq 2$ ve $\|K\|_F = \|Q^T B Q\|_F = \|B\|_F$ olduğundan, $\left\| \left[\sin(A), B \right] \right\|_F \leq 2 \|B\|_F$ olur ki ispat biter. ■

4.3. Bileşenleri Matris Kuvvetleri olan Komütatörler

Bu kısımda $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ ve n,s rasyonel sayılar olmak üzere, $\left[A^n,B\right]=c\left[A,B\right]$ ve $\left[A^n,B^s\right]=k\left[A,B\right]$ eşitliklerindeki c ve k katsayılarının A ve B matrislerinin izleri ve determinantları türünden ifadeleri ile ilgili bulgulara yer verilecektir.

Teorem 4.3.1: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ olsun. λ_1 ve λ_2, A matrisinin özdeğerleri ve $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$\left[A^n,B\right]=\sum_{r=0}^{n-1}\lambda_1^{\,n-r-1}\lambda_2^{\,r}\left[A,B\right]. \tag{4.67}$$

İspat: $f\left(x\right)=x^n$ olsun. Bu durumda A^n matrisi (3.8)' den

$$A^n=\lambda_1^{\,n}I+\frac{\lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right).$$

Buradan,

$$\begin{aligned}\left[A^n,B\right]&=\left[\lambda_1^{\,n}I+\frac{\lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right),B\right],\\&=\lambda_1^{\,n}\left[I,B\right]+\left[\frac{\lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right),B\right],\\&=\frac{\lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n}}{\lambda_1-\lambda_2}\left[A,B\right]\end{aligned}$$

eşitiliği elde edilir. Burada $\lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n}=\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\sum_{r=0}^{n-1}\lambda_1^{\,n-r-1}\lambda_2^{\,r}$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$\left[A^n,B\right]=\sum_{r=0}^{n-1}\lambda_1^{\,n-r-1}\lambda_2^{\,r}\left[A,B\right].$$

■

Sonuç 4.3.1: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\left[A^2,B\right]=iz(A)\left[A,B\right], \tag{4.68}$$

$$\left[A^3,B\right]=\left(iz\left(A^2\right)+\det\left(A\right)\right)\left[A,B\right]. \tag{4.69}$$

İspat: (4.67)'de $n=2$ olarak seçilirse**,**

$$\begin{aligned}\left[A^2,B\right]&=\sum_{r=0}^{1}\lambda_1^{1-r}\lambda_2^{r}\left[A,B\right],\\&=\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\left[A,B\right],\\&=iz\left(A\right)\left[A,B\right].\end{aligned}$$

Diğer taraftan $n=3$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}\left[A^3,B\right]&=\sum_{r=0}^{2}\lambda_1^{2-r}\lambda_2^{r}\left[A,B\right],\\&=\left(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1\lambda_2\right)\left[A,B\right],\\&=\left(iz\left(A^2\right)+\det\left(A\right)\right)\left[A,B\right].\end{aligned}$$

■

Teorem 4.3.2: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ olsun. λ_1, λ_2 ve μ_1, μ_2 sırasıyla A ve B matrislerinin özdeğerleri ve $n,s\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$\left[A^n,B^s\right]=\sum_{r=0}^{n-1}\lambda_1^{n-r-1}\lambda_2^{r}\sum_{t=0}^{s-1}\mu_1^{s-t-1}\mu_2^{t}\left[A,B\right]. \tag{4.70}$$

İspat: $f\left(x\right)=x^n$ olsun. Bu durumda A^n ve B^s matrisleri (3.8)'den hareketle

$$A^n=\lambda_1^{n}I+\frac{\lambda_1^{n}-\lambda_2^{n}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right),$$

$$B^s=\mu_1^{s}I+\frac{\mu_1^{s}-\mu_2^{s}}{\mu_1-\mu_2}\left(B-\mu_1 I\right)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}\left[A^n,B^s\right]&=\left[\lambda_1^{n}I+\frac{\lambda_1^{n}-\lambda_2^{n}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right),\mu_1^{s}I+\frac{\mu_1^{s}-\mu_2^{s}}{\mu_1-\mu_2}\left(B-\mu_1 I\right)\right],\\&=\left[\frac{\lambda_1^{n}-\lambda_2^{n}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right),\frac{\mu_1^{s}-\mu_2^{s}}{\mu_1-\mu_2}\left(B-\mu_1 I\right)\right],\\&=\left(\frac{\lambda_1^{n}-\lambda_2^{n}}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{\mu_1^{s}-\mu_2^{s}}{\mu_1-\mu_2}\right)\left[A,B\right].\end{aligned}$$

Bu eşitlikte $\lambda_1^{n}-\lambda_2^{n}=\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\sum_{r=0}^{n-1}\lambda_1^{n-r-1}\lambda_2^{r}$ ve $\mu_1^{s}-\mu_2^{s}=\left(\mu_1-\mu_2\right)\sum_{t=0}^{s-1}\mu_1^{s-t-1}\mu_2^{s}$ ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$\left[A^n,B^s\right]=\sum_{r=0}^{n-1}\lambda_1^{n-r-1}\lambda_2^{r}\sum_{t=0}^{s-1}\mu_1^{s-t-1}\mu_2^{t}\left[A,B\right].$$

■

Sonuç 4.3.2: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ olmak üzere;

$$\left[A^2,B^2\right]=iz\left(A\right)iz\left(B\right)\left[A,B\right]. \tag{4.71}$$

İspat: (4.70)'te $n=s=2$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}\left[A^2,B^2\right]&=\sum_{r=0}^{1}\lambda_1^{1-r}\lambda_2{}^{r}\sum_{t=0}^{1}\mu_1^{1-t}\mu_2{}^{t}\left[A,B\right],\\&=\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\left(\mu_1+\mu_2\right)\left[A,B\right],\\&=iz\left(A\right)iz\left(B\right)\left[A,B\right].\end{aligned}$$

■

Teorem 4.3.3: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ ve A tersinir bir matris olsun. $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$\left[A^{-n},B\right]=-\frac{1}{\det^n\left(A\right)}\left[A^n,B\right]. \tag{4.72}$$

İspat: $f\left(x\right)=x^{-n}$ olsun. Bu durumda A^{-n} matrisi (3.8)' den hareketle

$$A^{-n}=\lambda_1{}^{-n}I+\frac{\frac{1}{\lambda_1{}^n}-\frac{1}{\lambda_2{}^n}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right)=\lambda_1{}^{-n}I-\frac{\lambda_1{}^n-\lambda_2{}^n}{\left(\lambda_1\lambda_2\right)^n\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}\left(A-\lambda_1 I\right)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}\left[A^{-n},B\right]&=\left[\lambda_1{}^{-n}I-\frac{\lambda_1{}^n-\lambda_2{}^n}{\left(\lambda_1\lambda_2\right)^n\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}\left(A-\lambda_1 I\right),B\right],\\&=\lambda_1{}^{-n}\left[I,B\right]+\left[-\frac{\lambda_1{}^n-\lambda_2{}^n}{\left(\lambda_1\lambda_2\right)^n\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}\left(A-\lambda_1 I\right),B\right],\\&=-\underbrace{\frac{1}{\left(\lambda_1\lambda_2\right)^n}}_{\det^n\left(A\right)}\underbrace{\frac{\lambda_1{}^n-\lambda_2{}^n}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}\left[A,B\right]}_{\left[A^n,B\right]},\\&=-\frac{1}{\det^n\left(A\right)}\left[A^n,B\right].\end{aligned}$$

■

Sonuç 4.3.3: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ olsun. A, tersinir bir matris olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\left[A^{-1},B\right]=-\det\left(A^{-1}\right)\left[A,B\right], \tag{4.73}$$

$$\left[A^{-2},B\right]=-iz\left(A\right)\det\left(A^{-2}\right)\left[A,B\right]. \tag{4.74}$$

İspat: (4.72)'da $n=1$ olarak seçilirse, $\left[A^{-1},B\right]=-\det\left(A^{-1}\right)\left[A,B\right]$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $n=2$ için,

$$\left[A^{-2},B\right]=-\frac{1}{\det^2\left(A\right)}\left[A^2,B\right]$$

elde edilir. Sonuç 4.3.1'den $\left[A^2,B\right]=iz\left(A\right)\left[A,B\right]$ olup

$$\left[A^{-2},B\right]=-iz\left(A\right)\det\left(A^{-2}\right)\left[A,B\right].$$

■

Teorem 4.3.4: $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ tersinir matrisler ve $n,s\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$\left[A^{-n},B^{-s}\right]=\frac{1}{\det^n\left(A\right)\det^s\left(B\right)}\left[A^n,B^s\right]. \tag{4.75}$$

İspat: $f\left(x\right)=x^{-n}$ olsun. λ_1, λ_2 ve μ_1, μ_2 sırasıyla A ve B matrislerinin özdeğerleri olmak üzere, A^{-n} ve B^{-s} matrisleri (3.8)' den hareketle

$$A^{-n}=\lambda_1^{-n}I+\frac{\frac{1}{\lambda_1^{\,n}}-\frac{1}{\lambda_2^{\,n}}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right)=\lambda_1^{-n}I-\frac{\lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n}}{\left(\lambda_1\lambda_2\right)^n\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}\left(A-\lambda_1 I\right),$$

$$B^{-s}=\mu_1^{-s}I+\frac{\frac{1}{\mu_1^{\,s}}-\frac{1}{\mu_2^{\,s}}}{\mu_1-\mu_2}\left(B-\mu_1 I\right)=\mu_1^{-s}I-\frac{\mu_1^{\,s}-\mu_2^{\,s}}{\left(\mu_1\mu_2\right)^s\left(\mu_1-\mu_2\right)}\left(B-\mu_1 I\right).$$

şeklinde tanımlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}\left[A^{-n},B^{-s}\right]&=\left[\lambda_1^{-n}I-\frac{\lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n}}{\left(\lambda_1\lambda_2\right)^n\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}\left(A-\lambda_1 I\right),\mu_1^{-s}I-\frac{\mu_1^{\,s}-\mu_2^{\,s}}{\left(\mu_1\mu_2\right)^s\left(\mu_1-\mu_2\right)}\left(B-\mu_1 I\right)\right],\\&=\left[-\frac{\lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n}}{\left(\lambda_1\lambda_2\right)^n\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}\left(A-\lambda_1 I\right),-\frac{\mu_1^{\,s}-\mu_2^{\,s}}{\left(\mu_1\mu_2\right)^s\left(\mu_1-\mu_2\right)}\left(B-\mu_1 I\right)\right],\\&=\underbrace{\frac{1}{\left(\lambda_1\lambda_2\right)^n}}_{\det^n(A)}\underbrace{\left(\mu_1\mu_2\right)^s}_{\det^s(B)}\underbrace{\frac{\left(\lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n}\right)\left(\mu_1^{\,s}-\mu_2^{\,s}\right)}{\left(\mu_1-\mu_2\right)\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}\left[A,B\right]}_{\left[A^n,B^s\right]},\\&=\frac{1}{\det^n\left(A\right)\det^s\left(B\right)}\left[A^n,B^s\right].\end{aligned}$$

■

Sonuç 4.3.4: $A,B \in M_2(\mathbb{C})$ tersinir matrisler olmak üzere;

$$\left[A^{-1},B^{-1}\right]=\frac{1}{\det(AB)}\left[A,B\right]. \tag{4.76}$$

İspat: (4.75)'da $n=s=1$ için,

$$\left[A^{-1},B^{-1}\right]=\frac{1}{\det(A)\det(B)}\left[A,B\right],$$

$$\left[A^{-1},B^{-1}\right]=\frac{1}{\det(AB)}\left[A,B\right].$$

■

Teorem 4.3.5: $A,B \in M_2(\mathbb{C})$ olsun. $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ A matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left[\sqrt{A},B\right]=\frac{1}{iz\left(\sqrt{A}\right)}\left[A,B\right]. \tag{4.77}$$

İspat: $f(x)=\sqrt{x}$ olsun. $\sqrt{A}$ matrisi (3.8)' den hareketle

$$\sqrt{A}=\sqrt{\lambda_1}I+\frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}\left[\sqrt{A},B\right]&=\left[\sqrt{\lambda_1}I+\frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right),B\right],\\&=\sqrt{\lambda_1}\left[I,B\right]+\left[\frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right),B\right],\\&=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}\left[A,B\right],\\&=\frac{1}{iz\left(\sqrt{A}\right)}\left[A,B\right].\end{aligned}$$

■

Teorem 4.3.6: $A,B \in M_2(\mathbb{C})$ olsun. $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ ve $\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{R}^+$ sırasıyla A ve B matrislerinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left[\sqrt{A},\sqrt{B}\right]=\frac{1}{iz\left(\sqrt{A}\right)iz\left(\sqrt{B}\right)}\left[A,B\right]. \tag{4.78}$$

İspat : $f(x)=\sqrt{x}$ olsun. $\sqrt{A}$ ve $\sqrt{B}$ matrisleri (3.8)' den hareketle

$$\sqrt{A}=\sqrt{\lambda_1}I+\frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right)$$

$$\sqrt{B}=\sqrt{\mu_1}I+\frac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\left(B-\mu_1 I\right)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}\left[\sqrt{A},\sqrt{B}\right]&=\left[\sqrt{\lambda_1}I+\frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right),\sqrt{\mu_1}I+\frac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\left(B-\mu_1 I\right)\right],\\&=\left[\frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(A-\lambda_1 I\right),\frac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\left(B-\mu_1 I\right)\right],\\&=\frac{1}{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\right)\left(\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}\right)}\left[A,B\right],\\&=\frac{1}{iz\left(\sqrt{A}\right)iz\left(\sqrt{B}\right)}\left[A,B\right].\end{aligned}$$

■

4.4. Bir Graf Teori Uygulaması

Bu bölümde matris komütatörlerinin Frobenius norm eşitsizliklerinden hareketle Graf Teoride sıklıkla kullanılan Randic indeks için yeni sınırlar belirlenecektir. Bu bölümdeki esas bulgumuza geçmeden önce Graf Teoride sıklıkla kullanılan bazı kavramların tanımını verelim.

Tanım 4.4.1: $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ elemanları noktalar olan boştan farklı bir küme, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ de V'nin elemanlarını birbirine bağlayan kenarların kümesi olmak üzere $G=(V,E)$ ikilisinden oluşan yapıya graf denir.

Bir graf çoklu kenar ve ilmek(bir noktayı kendine bağlayan kenar) içermiyorsa basit graf, aksi durumda ise çoklu graf olarak adlandırılır. Graf yapısındaki her bir noktadan diğer noktalara bir yol varsa o graf bağlantılıdır denir. Nokta kümesi ve kenar kümesi sonlu olan bir graf sonlu graf olarak adlandırılır. Sonlu bir grafta $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ köşe kümesi olmak üzere $|V(G)|=n$ sayısına grafın mertebesi, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ kenar kümesi olmak üzere $|E(G)|=m$ sayısına grafın boyutu denir.

Tanım 4.4.2: $G=(V,E)$ olmak üzere $k,i,j\in\mathbb{N}$ için $e_k=(v_i,v_j)$ ise v_i, v_j noktalarına komşu noktalar denir ve $v_i\sim v_j$ ile gösterilir.

Tanım 4.4.3: $G=(V,E)$ olmak üzere $v_i\in V$ noktasına bağlı kenarların sayısına $v_i\in V$ kenarının derecesi denir ve d_i ile gösterilir.

Eğer nokta sıfır dereceli ise bu köşeye izole (isolated) nokta, 1 dereceli ise bu köşeye uç nokta (pendant) adı verilir. Bir $G=(V,E)$ grafının maksimum ve minimum nokta dereceleri sırasıyla Δ ve δ sembolleriyle ifade edilir.

Lemma 4.4.1 (Gross & Yellen, 2004): $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ nokta kümesi ve $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ kenar kümesi üzerinde tanımlanan bir $G=(V,E)$ grafında aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m \tag{4.79}$$

Tanım 4.4.4: $G=(V,E)$ n noktalı bir graf olmak üzere her noktanın derecesi aynı ise bu grafa düzenli (regular) graf denir.

Tanım 4.4.5: $G=(V,E)$ n noktalı grafının tüm dereceleri $(n-1)$ ise bu grafa tam graf denir ve K_n ile gösterilir.

Tanım 4.4.6: $G=(V,E)$ grafının nokta kümesi $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ olsun. Bu durumda,

$$A(G)=a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \sim v_j \\ 0, & i=j \\ 0, & (v_i,v_j)\notin E\end{cases} \tag{4.80}$$

şeklinde tanımlanan simetrik matrise $G=(V,E)$ grafının komşuluk matrisi denir.

Tanım 4.4.7: $D=(V,E)$ nokta kümesi $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ olan bir yönlendirilmiş graf (digraf) olsun. Bu durumda,

$$S(D)=s_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ den } v_j\text{' ye yol varsa} \\ -1, & v_j \text{ den } v_i\text{' ye yol varsa} \\ 0, & (v_i,v_j)\notin E\end{cases} \tag{4.81}$$

şeklinde tanımlanan ters simetrik matrise $D=(V,E)$ grafının ters komşuluk matris denir.

Tanım 4.4.6: $G=(V,E)$ grafının nokta kümesi $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ olsun. Bu durumda,

$$R(G)=r_{ij}=\begin{cases}\left(d_i d_j\right)^{-1/2}, & v_i \sim v_j \\ 0, & i=j \\ 0, & \left(v_i,v_j\right)\notin E\end{cases} \tag{4.82}$$

şeklinde tanımlanan simetrik matrise $G=(V,E)$ grafının Randic matrisi denir.

Tanım 4.4.7 (Bollobás & Erdős, 1998): G nokta kümesi $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ olan bir graf ve $\alpha\neq 0$ sabit bir reel sayı olmak üzere G grafının genel Randic indeksi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$R_\alpha = R_\alpha(G)=\sum_{v_i\sim v_j}\left(d_i d_j\right)^\alpha . \tag{4.83}$$

Burada $\alpha=-1$ için genel Randic indeks, $R_{-1}=\sum_{v_i\sim v_j}\frac{1}{d_i d_j}$.

Lemma 4.4.2 (Bozkurt, Güngör, Gutman, & Cevik, 2010): G, n noktalı bir graf ve R, G grafının Randic matrisi olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} iz(R)&=0, \\ iz\left(R^2\right)&=2R_{-1}. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Lemma 4.4.3 (Cavers, Fallat, & Kirkland, 2010): G, n noktalı maksimum ve minimum nokta dereceleri sırasıyla Δ ve δ olan bağlantılı bir graf olsun. O zaman;

$$\frac{n}{2\Delta}\le R_{-1}\le\frac{n}{2\delta}.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart *G* nin regüler olmasıdır.

Teorem 4.4.1: n noktalı m kenarlı bağlantılı bir *G* grafı için; k en büyük dereceli nokta ya da noktaları, j en küçük dereceli nokta ya da noktaları göstermek üzere

$$\frac{m}{d_k\max\limits_{i\sim k}d_i}\le R_{-1}\le\frac{m}{d_j\min\limits_{i\sim j}d_i}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart *G* nin regüler olmasıdır.

İspat: İspatımıza $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere, $[A,B]$'nün simetrik olması durumu ile ilgili bir lemma ile başlayalım.

Lemma: $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrik ve $B \in M_n(\mathbb{R})$ ters simetrik olsun. Bu durumda, $[A,B]$ simetriktir.

İspat: $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrik ve $B \in M_n(\mathbb{R})$ ters simetrik olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}[A,B]^T &= (AB-BA)^T, \\ &= (AB)^T - (BA)^T, \\ &= B^T A^T - A^T B^T, \\ &= -BA + AB, \\ &= [A,B].\end{aligned}$$

G grafının randik matrisi olan $R(G)$,

$$R(G) = \begin{cases} (d_i d_j)^{-1/2}, & i \sim j \\ 0, & i = j \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir simetrik matristir. $R(G)$ matrisinin izi tanımı gereği 0 olduğundan bu matris $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrik ve $B \in M_n(\mathbb{R})$ ters simetrik olmak üzere, $R(G) = [A,B]$ şeklinde ifade edilebilir. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrislerini aşağıdaki gibi seçelim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ -b_{12} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n} \\ -b_{1n} & \dots & -b_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu durumda,

$$R(G) = \begin{pmatrix} 0 & (a_{11}-a_{22})b_{12} & \dots & (a_{11}-a_{nn})b_{1n} \\ (a_{22}-a_{11})b_{12} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (a_{(n-1)(n-1)}-a_{nn})b_{(n-1)n} \\ (a_{nn}-a_{11})b_{1n} & & (a_{nn}-a_{(n-1)(n-1)})b_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan, $R(G)$ matrisinin elemanları $r_{ij} = (a_{ii}-a_{jj})b_{ij}$ şeklinde ifade edilir. Burada B matrisinin elemanları;

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & i<j\\ -1, & i>j\\ 0, & \left(v_i,v_j\right)\notin E\end{cases}$$

şeklinde seçilirse,

$$r_{ij}=\begin{cases}\left(a_{ii}-a_{jj}\right), & i<j\\ \left(a_{jj}-a_{ii}\right), & i>j\end{cases}$$

olacağı açıktır. Diğer taraftan,

$$\left\|R(G)\right\|_F^{\,2}=\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ii}-a_{jj}\right)^2 b_{ij}^{\,2},$$

$$\left(\min\left(a_{ii}-a_{jj}\right)\right)^2\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}^{\,2}\le\left\|R(G)\right\|_F^{\,2}\le\left(\max\left(a_{ii}-a_{jj}\right)\right)^2\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}^{\,2},$$

$$\left(\min\left(a_{ii}-a_{jj}\right)\right)^2\left\|B\right\|_F^{\,2}\le\left\|R(G)\right\|_F^{\,2}\le\left(\max\left(a_{ii}-a_{jj}\right)\right)^2\left\|B\right\|_F^{\,2}. \qquad (4.85)$$

Burada $a_{ii}\neq a_{jj}$ olmak üzere, $\min\left(a_{ii}-a_{jj}\right)=\dfrac{1}{\max\sqrt{d_i d_j}}$ ve

$\max\left(a_{ii}-a_{jj}\right)=\dfrac{1}{\min\sqrt{d_i d_j}}$. Bununla birlikte,

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & i<j\\ -1, & i>j\\ 0, & i\nsim j\end{cases}$$

olduğundan B matrisi bir ters komşuluk matrisi olup $\left\|B\right\|_F=\sqrt{2m}$. Bu ifadeler (4.85) ’de yerine yazılırsa,

$$\frac{2m}{\max d_i d_j}\le 2R_{-1}\le\frac{2m}{\min d_i d_j},$$

$$\frac{m}{d_k\max\limits_{i\sim k}d_i}\le R_{-1}\le\frac{m}{d_j\min\limits_{i\sim j}d_i}.$$

■

5. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde tez çalışmamız boyunca elde edilen bazı teorik sonuçlara ilişkin nümerik örneklere yer verilecektir. Bu örneklerde yer alan hesaplamalar Maple 13 paket programı yardımıyla yapılmıştır.

Örnek 5.1 (Teorem 4.1.4):

$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ olmak üzere

$$e^{A}=\begin{bmatrix}2.718281828459041 & 14.01232281141482\\ 0 & 7.389056098930666\end{bmatrix},$$

$$\left[e^{A},B\right]=\begin{bmatrix}42.0369684342444714 & 18.6830970818864479\\ 14.0123228114148759 & -42.0369684342444714\end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F$	$\sqrt{2}\left\|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right\|\|A\|_F\|B\|_F$	$\left\|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right\|\|A\|_F\|B\|_F$
63.8718775160541483	95.72240890	67.888233262

Örnek 5. 2. (Teorem 4.1.4):

$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$e^{A}=\begin{bmatrix}9.732603725180332 & 7.950337974938998\\ 5.300225316625998 & 4.432378408554330\end{bmatrix},$$

$$\left[e^{A},B\right]=\begin{bmatrix}29.1512392414429939 & 2.65011265831299614\\ -21.2009012665040046 & -29.1512392414429975\end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F$	$\sqrt{2}\left\|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right\|\|A\|_F\|B\|_F$	$\left\|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right\|\|A\|_F\|B\|_F$
46.4337249231363458	56.21724173	39.75159283

Örnek 5.1 ve Örnek 5.2, Teorem 4.1.4' te verilen eşitsizliğin sağlandığını gösterir. Bununla birlikte bazı durumlarda norm eşitsizliğinde yer alan $\sqrt{2}$ katsayısı 1' e indirgenebilse de genel olarak bu katsayının 1'e indirgenemeyeceğini gösterir.

Örnek 5.3 (Teorem 4.1.5):

$A=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ olmak üzere; $e^{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ve $\left[e^{A},B\right]=\begin{bmatrix}9 & 3\\ 0 & -9\end{bmatrix}$.

$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F$	$\sqrt{2}e^{\lambda_1}\|A\|_F\|B\|_F$	$e^{\lambda_1}\|A\|_F\|B\|_F$
13.0766968306220210	16.43174738	11.61900000

Örnek 5.3, Teorem 4.1.5' te verilen $\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{\lambda_1}\|A\|_F\|B\|_F$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermektedir.

Örnek 5.4 (Teorem 4.1.6):

$A=\begin{bmatrix}3 & -13\\ 3 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$e^{A}=\begin{bmatrix}2.20733890064056126 & 2.14385698492821186\\ -0.494736227291125874 & 2.86698720369539650\end{bmatrix},$$

$$\left[e^{A},B\right]=\begin{bmatrix}5.93683472749351004 & 2.80350528798304710\\ 2.47368113645563170 & -5.93683472749351004\end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F$	$\sqrt{2}\dfrac{e^{a}}{\|b\|}\|\sin(b)\|\|A\|_F\|B\|_F$	$\dfrac{e^{a}}{b}\|\sin(b)\|\|A\|_F\|B\|_F$
9.1907972139	9.506776293	6.722305986

Örnek 5.3, Teorem 4.1.6'da verilen eşitsizliğin $\left\|\left[e^{A},e^{B}\right]\right\|_F$'nun gerçek değerine çok yakın sonuçlar verebildiğini ve $\sqrt{2}\dfrac{e^{a}}{b}\|\sin(b)\|\|A\|_F\|B\|_F$ üst sınırındaki $\sqrt{2}$ katsayısının 1'e indirgenemeyeceğini göstermektedir.

Örnek 5.4 (Teorem 4.1.7):

$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$e^{A}=\begin{bmatrix}1.94876548716012143 & 1.81343020392350995\\ 5.44029061177053030 & 5.57562589500714800\end{bmatrix},$$

$$e^B = \begin{bmatrix} 3.89348302210285313 & 3.52560358093140769 \\ -1.17520119364380249 & -0.807321752472359599 \end{bmatrix},$$

$$\left[e^A, e^B\right] = \begin{bmatrix} -21.3114534024063360 & -21.3114534024063609 \\ 21.3114534024063431 & 21.3114534024063360 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^A, e^B\right]\right\|_F$	$\sqrt{2}\left\|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right\|\left\|\frac{e^{\mu_1}-e^{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right\|\|A\|_F\|B\|_F$	$\left\|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right\|\left\|\frac{e^{\mu_1}-e^{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right\|\|A\|_F\|B\|_F$
42.6229068048126862	44.295024101273865726	31.321311913931549189

Örnek 5.4, Terorem 4.17'de verilen eşitsizliğin $\left\|\left[e^A, e^B\right]\right\|_F$ 'nun gerçek değerine çok yakın sonuçlar verebildiğini ve $\sqrt{2}\left\|\frac{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\right\|\left\|\frac{e^{\mu_1}-e^{\mu_2}}{\mu_1-\mu_2}\right\|\|A\|_F\|B\|_F$ üst sınırındaki $\sqrt{2}$ katsayısının 1'e indirgenemeyeceğini göstermektedir.

Örnek 5.5 (Teorem 4.1.8):

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ \frac{1}{5} & -4 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$e^A = \begin{bmatrix} 0.270670566473225294 & 0.135335283236612675 \\ -0.135335283236612675 & 4.1633363423443370310^{-17} \end{bmatrix},$$

$$e^B = \begin{bmatrix} 0.0995741367357278057 & -0.248935341839319674 \\ 0.00995741367357278438 & 3.4694469519536141910^{-18} \end{bmatrix},$$

$$\left[e^A, e^B\right] = \begin{bmatrix} -0.0323421455956102305 & -0.0808553639890255416 \\ -0.0161710727978051048 & 0.0323421455956102305 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^A, e^B\right]\right\|_F$	$\sqrt{2}e^{\lambda+\mu}\|A\|_F\|B\|_F$	$e^{\lambda+\mu}\|A\|_F\|B\|_F$
0.0942927475720429	0.2215299259	0.1566453129

Örnek 5.5, Teorem 4.1.8' de verilen $\left\|\left[e^A, e^B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}e^{\lambda+\mu}\|A\|_F\|B\|_F$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermektedir.

Örnek 5.6 (Teorem 4.1.9):

$A=\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$e^{A}=\begin{bmatrix} 0.504267552469657820 & -4.36188654428547107 \\ 1.63570745410705154 & 0.504267552469657820 \end{bmatrix},$$

$$e^{B}=\begin{bmatrix} -0.398807986215406585 & 0.224965648713745692 \\ -0.0173050499010573566 & -0.329587786611177269 \end{bmatrix},$$

$$\left[e^{A},e^{B}\right]=\begin{bmatrix} -0.292495324207491525 & -0.301930657246442413 \\ -0.113223996467415877 & 0.292495324207491525 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^{A},e^{B}\right]\right\|_{F}$	$\sqrt{2}e^{a+c}\left\|\frac{\sin(b)\sin(d)}{bd}\right\|\|A\|_{F}\|B\|_{F}$
0.524489108111706459	1.48239358

Örnek 5.6, Teorem 4.1.9' da verile $\left\|\left[e^{A},e^{B}\right]\right\|_{F}\le\sqrt{2}e^{a+c}\left|\frac{\sin(b)\sin(d)}{bd}\right|\|A\|_{F}\|B\|_{F}$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermektedir.

Örnek 5.7 (Teorem 4.1.10):

$A=\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$e^{A}=\begin{bmatrix} -0.145500033808613149 & -0.989358246623382120 \\ 0.989358246623382120 & -0.145500033808613149 \end{bmatrix},$$

$$\left[e^{A},B\right]=\begin{bmatrix} 4.94679123311690994 & -2.96807473987014614 \\ -2.96807473987014703 & -4.94679123311690994 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}$	$2\|B\|_{F}$	$\sqrt{2}\|B\|_{F}$
8.15845710480818376	10.95445115	7.745966690

Örnek 5.7, Teorem 4.1.10' da verilen $\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_{F}\le 2\|B\|_{F}$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermektedir.

Örnek 5.8 (Teorem 4.1.12):

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & -4 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ olmak üzere;

$$e^{A}=\begin{bmatrix} 0.8137637168121 & 0.1373712078034 & -0.4883643083504 & 0.2835807941240 \\ -0.4721502194591 & 0.6266813279457 & -0.2933162681875 & 0.5461778559090 \\ 0.2126639458104 & -0.08084850954531 & 0.7152993016193 & 0.6607453925374 \\ -0.2638879110854 & -0.7627995693333 & -0.4047379130360 & 0.4297524975600 \end{bmatrix},$$

$$\left[e^{A},B\right]=\begin{bmatrix} -1.471989661959075 & 0.8271010876199997 & 2.088076303179517 & 0.2082623083736874 \\ -1.263198264049868 & 1.236547792716881 & -0.9010772285834003 & 1.375851286229559 \\ -0.1200638361974424 & -1.214888899743038 & 1.557522595239518 & 1.340225721180388 \\ 0.6687718952208316 & 2.517054807790285 & -0.6180269034124695 & -1.322080725997325 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F$	$2\|B\|_F$	$\sqrt{2}\|B\|_F$
5.26393771593446402	8.246211252	5.830951894

Örnek 5.8, Teorem 4.1.12' de verilen $\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F \le 2\|B\|_F$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermektedir.

Örnek 5.9 (Teorem 4.1.13):

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & -4 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0. & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ olmak üzere;

$$e^{A}=\begin{bmatrix} 0.8137637168121 & 0.1373712078034 & -0.4883643083504 & 0.2835807941240 \\ -0.4721502194591 & 0.6266813279457 & -0.2933162681875 & 0.5461778559090 \\ 0.2126639458104 & -0.08084850954531 & 0.7152993016193 & 0.6607453925374 \\ -0.2638879110854 & -0.7627995693333 & -0.4047379130360 & 0.4297524975600 \end{bmatrix},$$

$$e^{B}=\begin{bmatrix} 0.0098795224687 & -0.9526570236090 & 0.2929125754594 & -0.08092721138027 \\ 0.4835156829993 & 0.2444501927735 & 0.6227847995342 & -0.5644428943796 \\ 0.1762287651502 & -0.1536434589245 & -0.6938324884458 & -0.6811267046889 \\ -0.8573554698391 & 0.09530155376994 & 0.2119853640792 & -0.4592618181409 \end{bmatrix},$$

$$\left[e^A, e^B\right] = \begin{bmatrix} -0.7962171302242 & -0.08199212043776 & 0.2059928592658 & 0.4177628747784 \\ -0.7810575407611 & 0.1002882397706 & 0.2051869854475 & -0.8061296007038 \\ -0.7255671842552 & -0.7728719827129 & -0.08267101410243 & 0.02286356438455 \\ -0.2348036209054 & -0.1070641803804 & -0.9086964791364 & 0.7785999045560 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^A, e^B\right]\right\|_F$	$2\sqrt{n}$	$\sqrt{2}\sqrt{n}$
2.19074809377814761	4	2.828427124

Örnek 5.9, Teorem 4.1.13' te verilen $\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \le 2\sqrt{n}$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermektedir.

Örnek 5.10 (Teorem 4.1.17):

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$e^A = \begin{bmatrix} 4.818283065197739 & -1.715314934920151 & -3.387842862636274 & -5.202464831891258 \\ -1.715314934920151 & 3.195805641504960 & 5.088630803917796 & 5.166941321506543 \\ -3.387842862636274 & 5.088630803917796 & 8.248912935038045 & 8.661354715296967 \\ -5.202464831891258 & 5.166941321506543 & 8.661354715296967 & 9.885917352369464 \end{bmatrix},$$

$$\left[e^A, B\right] = \begin{bmatrix} 13.7499855192147642 & -8.49020668648084431 & -13.9211335480308875 & -5.17420481832587420 \\ -8.49020668648084431 & -6.74663173799529048 & 1.78636195568958112 & -10.2628356222436565 \\ -13.9211335480308875 & 1.78636195568958112 & 20.7242853131569795 & -1.78636195568957135 \\ -5.17420481832587420 & -10.2628356222436565 & -1.78636195568957135 & -27.7276390943764532 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F$	$\left(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_n}\right)\|B\|_F$
47.3457599783520138	72.61563935

Örnek 5.10, Teorem 4.1.17' de verilen $\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \le \left(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_n}\right)\|B\|_F$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermektedir.

Örnek 5.11 (Teorem 4.1.17 & Teorem 4.1.16):

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$e^A = \begin{bmatrix} 10.3247023472591977 & 5.47549688301169191 \\ 5.47549688301169191 & 4.84920546424751375 \end{bmatrix},$$

$$\left[e^A, B\right] = \begin{bmatrix} -21.9019875320467676 & -5.47549688301171500 \\ 27.3774844150584507 & 21.9019875320467676 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F$	$\left(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}\right)\|B\|_F$	$\sqrt{2}\left\|\frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right\|\|A\|_F \|B\|_F$
41.7001419028820948	51.94512443	86.9208182770

Örnek 5.11, Teorem 4.1.17' de verilen $\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \le \left(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_n}\right)\|B\|_F$ eşitsizliğinin, Teorem 4.1.16'da verilen $\sqrt{2}\left|\frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right|\|A\|_F \|B\|_F$ eşitsizliğinden daha küçük üst sınırlar oluşturabildiğini göstermektedir.

Örnek 5.12 (Sonuç 4.1.5 & Teorem 4.1.16):

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$e^A = \begin{bmatrix} 10.3247023472591977 & -5.47549688301169191 \\ -5.47549688301169191 & 4.84920546424751375 \end{bmatrix},$$

$$e^B = \begin{bmatrix} 24.1063113817276999 & 5.62214468347560015 \\ 5.62214468347560015 & 1.61773264782530446 \end{bmatrix},$$

$$\left[e^A, B\right] = \begin{bmatrix} 0. & 153.920178451056927 \\ -153.920178451056927 & 0. \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F$	$\left(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}\right)\left(e^{\|B\|_F} + \sqrt{n} - 1\right)$	$\sqrt{2}\left\|\frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right\|\left\|\frac{e^{\mu_1} - e^{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2}\right\|\|A\|_F \|B\|_F$
217.676003888371724	396.2263396	399.006705644

Örnek 5.12, Sonuç 4.1.5'te verilen $\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \le \left(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}\right)\left(e^{\|B\|_F} + \sqrt{n} - 1\right)$ eşitsizliğinin Teorem 4.1.16'da verilen $\sqrt{2}\left|\frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right|\left|\frac{e^{\mu_1} - e^{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2}\right|\|A\|_F \|B\|_F$ eşitsizliğinden daha küçük bir üst sınır oluşturabileceğini göstermektedir.

Örnek 5.13 (Teorem 4.1.12-Teorem 4.1.18):

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & -4 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere;}$$

$$e^{A}=\begin{bmatrix} 0.8137637168121 & 0.1373712078034 & -0.4883643083504 & 0.2835807941240 \\ -0.4721502194591 & 0.6266813279457 & -0.2933162681875 & 0.5461778559090 \\ 0.2126639458104 & -0.08084850954531 & 0.7152993016193 & 0.6607453925374 \\ -0.2638879110854 & -0.7627995693333 & -0.4047379130360 & 0.4297524975600 \end{bmatrix},$$

$$\left[e^{A},B\right]=\begin{bmatrix} -1.471989661959075 & 0.8271010876199997 & 2.088076303179517 & 0.2082623083736874 \\ -1.263198264049868 & 1.236547792716881 & -0.9010772285834003 & 1.375851286229559 \\ -0.1200638361974424 & -1.214888899743038 & 1.557522595239518 & 1.340225721180388 \\ 0.6687718952208316 & 2.517054807790285 & -0.6180269034124695 & -1.322080725997325 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F$	$2\|B\|_F$	$\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\left(\theta_k-\theta_j\right)}\,\|B\|_F$
5.26393771593446402	8.246211252	7.661075656

Örnek 5.13, Teorem 4.1.18'de verilen $\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\left(\theta_k-\theta_j\right)}\,\|B\|_F$ eşitsizliğinin Teorem 4.1.12' de verilen $\left\|\left[e^{A},B\right]\right\|_F \le 2\|B\|_F$ eşitsizliğinden daha hassas üst sınırlar oluşturabildiğini göstermektedir.

Örnek 5.14 (Teorem 4.1.13-Teorem 4.1.19):

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & -4 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere;}$$

$$e^{A}=\begin{bmatrix} 0.8137637168121 & 0.1373712078034 & -0.4883643083504 & 0.2835807941240 \\ -0.4721502194591 & 0.6266813279457 & -0.2933162681875 & 0.5461778559090 \\ 0.2126639458104 & -0.08084850954531 & 0.7152993016193 & 0.6607453925374 \\ -0.2638879110854 & -0.7627995693333 & -0.4047379130360 & 0.4297524975600 \end{bmatrix},$$

$$e^B = \begin{bmatrix} 0.009879522468702 & -0.9526570236090 & 0.2929125754594 & -0.08092721138027 \\ 0.4835156829993 & 0.2444501927735 & 0.6227847995342 & -0.5644428943796 \\ 0.1762287651502 & -0.1536434589245 & -0.6938324884458 & -0.6811267046889 \\ -0.8573554698391 & 0.09530155376994 & 0.2119853640792 & -0.4592618181409 \end{bmatrix},$$

$$\left[e^A, e^B\right] = \begin{bmatrix} -0.796217130224 & -0.0819921204377 & 0.205992859265 & 0.417762874778 \\ -0.781057540761 & 0.100288239770 & 0.205186985447 & -0.806129600703 \\ -0.725567184255 & -0.772871982712 & -0.0826710141024 & 0.0228635643845 \\ -0.234803620905 & -0.107064180380 & -0.908696479136 & 0.778599904556 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F$	$2\sqrt{n}$	$\sqrt{2n}\sqrt{1-\cos\left(\theta_k - \theta_j\right)}$
2.19074809377814761	4	3.716167545

Örnek 5.14, Sonuç 4.1.7'de verilen $\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \le \sqrt{2n}\sqrt{1-\cos\left(\theta_k - \theta_j\right)}$ eşitsizliğinin Teorem 4.1.13' te verilen $\left\|\left[e^A, B\right]\right\|_F \le 2\sqrt{n}$ eşitsizliğinden daha hassas üst sınırlar oluşturabildiğini göstermektedir.

Örnek 5.15 (Teorem 4.2.2.1):

$A = \begin{bmatrix} 2. & -1.1 \\ 1.1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$\sin(A) = \begin{bmatrix} 1.191442520 & -0.6552933862 \\ 0.6552933862 & -1.191442520 \end{bmatrix},$$

$$\left[\sin(A), B\right] = \begin{bmatrix} -1.31058677240000021 & -3.03817842620000000 \\ -7.80394850620000113 & 1.31058677240000065 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[\sin(A), B\right]\right\|_F$	$\left\|\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right\| \|A\|_F \|B\|_F$	$\sqrt{2}\left\|\frac{\sin(\lambda_1) - \sin(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right\| \|A\|_F \|B\|_F$
8.57714496862610254	10.58503711	10.53264838

Örnek 5.15, Teorem 4.2.2.1'de verilen $\left\|\left[\sin(A), B\right]\right\|_F \le \left\|\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right\| \|A\|_F \|B\|_F$ eşitsizliğinin $\left\|\left[\sin(A), B\right]\right\|_F$'nun gerçek değerine yakın üst sınır oluşturabileceğini göstermektedir.

Örnek 5.16 (Teorem 4.2.2.2):

$A=\begin{bmatrix}1. & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$\sin(A)=\begin{bmatrix}0.8414709848 & 1.080604612\\ 0. & 0.8414709848\end{bmatrix},$$

$$\left[\sin(A),B\right]=\begin{bmatrix}3.24181383599999950 & 1.08060461199999991\\ 0. & -3.24181383599999950\end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F$	$\sqrt{2}\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F$	$\sqrt{2}\left\|\cos(\lambda)\right\|\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F$
4.71024630163197866	13.41640786	7.248916105

Örnek 5.16, Teorem 4.2.2.2'de verilen $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F$ eşitsizliğinin $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F$ için bir üst sınır oluşturabileceğini göstermektedir.

Örnek 5.17 (Teorem 4.2.2.3):

$A=\begin{bmatrix}5 & 9\\ -2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$\sin\left(A\right)=\begin{bmatrix}4.9858 & -12.507\\ 2.7793 & 13.324\end{bmatrix},$$

$$\left[\sin\left(A\right),B\right]=\begin{bmatrix}-34.742 & -4.1690\\ 22.235 & 34.742\end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F$	$\sqrt{2}\left\|\frac{\sinh\left(b\right)}{b}\right\|\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F$
54.08878983	192.6976717

Örnek 5.17, Teorem 4.2.2.3'te verilen $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\left\|\frac{\sinh\left(b\right)}{b}\right\|\left\|A\right\|_F\left\|B\right\|_F$ eşitsizliğinin $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F$ için bir üst sınır oluşturabileceğini göstermektedir.

Örnek 5.18 (Sonuç 4.2.2.1):

$A=\begin{bmatrix}0 & 5\\ -5 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$\sin(A)=\begin{bmatrix} 2.00000000010^{-8}I & 74.20321060 \\ -74.20321060 & 2.00000000010^{-8}I \end{bmatrix},$$

$$\left[\sin(A),B\right]=\begin{bmatrix} -74.2032106000000056 & -148.406421200000011 \\ -148.406421200000011 & 74.2032106000000056 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F$	$\sqrt{2}\left\|\sinh(b)\right\|\|B\|_F$
234.651155193149521	257.0474617

Örnek 5.18, Sonuç 4.2.2.1'de verilen $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F \le \sqrt{2}\left\|\sinh(b)\right\|\|B\|_F$ eşitsizliğinin $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F$ için bir üst sınır oluşturabileceğini göstermektedir.

Örnek 5.19 (Teorem 4.2.2.6):

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -27 & 68 & 58 & -9 \\ 96 & 39 & 26 & 68 \\ 57 & -28 & 59 & 61 \\ -67 & 89 & 8 & 51 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere;}$$

$$\sin(A)=\begin{bmatrix} 0. & -3.2157 & 2.4737 & -0.24737 \\ 3.2157 & 0. & -2.9684 & 5.6896 \\ -2.4737 & 2.9684 & 0. & -3.2157 \\ 0.24737 & -5.6896 & 3.2157 & 0. \end{bmatrix},$$

$$\left[\sin(A),B\right]=\begin{bmatrix} -224.08 & -526.87 & 357.92 & -287.42 \\ -715.14 & 1426.6 & -283.48 & -34.379 \\ 788.08 & 16.60 & -512.30 & 423.23 \\ -648.59 & -244.14 & 322.06 & -690.18 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F$	$2\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sinh^2(\theta_k)}\,\|B\|_F$
2299.987262	30775.61809

Örnek 5.19, Teorem 4.2.2.6'da verilen $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F \le 2\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sinh^2(\theta_k)}\,\|B\|_F$ eşitsizliğinin $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F$ için bir üst sınır oluşturabileceğini fakat oluşan üst sınırın gerçek değere yakın olmadığını göstermektedir.

Örnek 5.20 (Teorem 4.2.2.7):

$$A=\begin{bmatrix} 3.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 67 & -31 & 92 & 44 \\ -31 & 29 & 99 & 69 \\ 92 & 99 & 8 & 27 \\ 44 & 69 & 27 & -4 \end{bmatrix}$$ olmak üzere;

$$\sin(A)=\begin{bmatrix} -0.058374 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.90930 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84147 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[\sin(A),B\right]=\begin{bmatrix} 0 & 29.998 & -82.785 & -2.5685 \\ -29.998 & 0 & 6.715 & 62.742 \\ 82.785 & -6.715 & 0 & 22.720 \\ 2.5685 & -62.742 & -22.720 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F$	$2\|B\|_F$	$\left(\sin(3,2)-\sin(0)\right)\|B\|$	$\left(\sin(2)-\sin(0)\right)\|B\|$	$\left(\sin(1)-\sin(0)\right)\|B\|$
156.573826	484.6	14.144	220.33	203.90

Örnek 5.20, Teorem 4.2.2.8'de verilen $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F \le 2\|B\|_F$ eşitsizliğinin $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F$ için bir üst sınır oluşturabileceğini bununla birlikte $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F \le \left|\sin(\lambda_i)-\sin(\lambda_j)\right|\|B\|_F$ eşitsizliğinin daha küçük üst sınırlar oluşturabildiğini göstermektedir.

Örnek 5.21 (Teorem 4.2.2.6-Teorem 4.2.2.7):

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ve $$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ olmak üzere;

$$\cos(A)=\begin{bmatrix} 2.8142 & -0.93442 & -0.93442 & 2.8033 \\ -0.93442 & 6.5520 & -2.8033 & -0.93442 \\ -0.93442 & -2.8033 & 3.7487 & -1.8689 \\ 2.8033 & -0.93442 & -1.8689 & 5.6175 \end{bmatrix},$$

$$\left[\cos(A),B\right]=\begin{bmatrix}1.8689 & -15.886 & 11.213 & -3.7376\\ -18.689 & -8.4099 & 0. & 5.6066\\ 7.4753 & -3.7377 & 8.4099 & -8.4098\\ 0.93442 & 6.5410 & -3.7380 & -1.8689\end{bmatrix}.$$

$\left\|\left[\cos(A),B\right]\right\|_F$	$2\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sinh^2(\theta_k)}\,\|B\|_F$	$\left\|\cosh(\theta)-\cosh(\alpha)\right\|\|B\|_F$
33.45777678	107.1755654	46.33868619

Örnek 5.21, Teorem 4.2.2.7'de verilen $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F \le \left|\cosh(\theta)-\cosh(\alpha)\right|\|B\|_F\|B\|_F$ eşitsizliğinin Teorem 4.2.2.6'da verilen $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F \le 2\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sinh^2(\theta_k)}\,\|B\|_F$ eşitsizliğine göre $\left\|\left[\sin(A),B\right]\right\|_F$ için daha küçük bir üst sınır oluşturabileceğini göstermektedir.

Örnek 5.22 (Sonuç 4.3.1):

$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ olsun. Burada $\lambda_{1,2}(A)=\pm i$.

$$\left[A,B\right]=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 27\\ -5 & -13\end{bmatrix},$$

$$\left[A^2,B\right]=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\left[A^2,B\right]=\underbrace{\left(i+(-i)\right)}_{iz(A)}\left[A,B\right]$$

Bununla birlikte, $iz\left(A^2\right)=-2$ ve $\det(A)=1$ olup

$$\left[A^3,B\right]=\begin{bmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13 & -27\\ 5 & 13\end{bmatrix},$$

$$\left[A^3,B\right]=\underbrace{-1}_{iz\left(A^2\right)+\det(A)}\left[A,B\right].$$

Örnek 5.23 (Sonuç 4.3.2):

$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ olsun. Burada $iz(A)=4$ ve $iz(B)=8$.

$$[A,B]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -4 & -2\end{bmatrix},$$

$$\left[A^2,B^2\right]=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 16 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -8\\ 16 & 23\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & -8\\ 16 & 23\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 16 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64 & 0\\ -128 & -64\end{bmatrix},$$

$$\left[A^2,B^2\right]=\underbrace{32}_{iz(A)iz(B)}[A,B]$$

Örnek 5.24 (Sonuç 4.3.3):

$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ olsun. Burada $A^{-1}=\begin{bmatrix}-5/2 & 3/2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ ve $\det\left(A^{-1}\right)=-1/2$.

$$[A,B]=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -12\\ 10 & 6\end{bmatrix},$$

$$\left[A^{-1},B\right]=\begin{bmatrix}-5/2 & 3/2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5/2 & 3/2\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -6\\ 5 & 3\end{bmatrix},$$

$$\left[A^{-1},B\right]=\underbrace{1/2}_{-\det\left(A^{-1}\right)}[A,B].$$

Bununla birlikte, $\det\left(A^{-2}\right)=1/4$ olup

$$\left[A^{-2},B\right]=\begin{bmatrix}37/4 & -21/4\\ -7 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}37/4 & -21/4\\ -7 & 4\end{bmatrix},$$

$$=\begin{bmatrix}21/2 & 21\\ -35/2 & -21/2\end{bmatrix}=\underbrace{-7/4}_{iz(A)\det\left(A^{-2}\right)}\underbrace{\begin{bmatrix}-6 & -12\\ 10 & 6\end{bmatrix}}_{[A,B]}.$$

Örnek 5.25 (Sonuç 4.3.4):

$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ olsun. Burada $A^{-1}=\begin{bmatrix}-5/2 & 3/2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 3/4\\ 1/2 & 1/4\end{bmatrix}$ ve

$\det(AB)=8$.

$$\left[A^{-1},B\right]=\begin{bmatrix}-5/2 & 3/2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 3/4\\ 1/2 & 1/4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/2 & 3/4\\ 1/2 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5/2 & 3/2\\ 2 & -1\end{bmatrix},$$

$$=\begin{bmatrix}-3/4 & -3/2\\ 5/4 & 3/4\end{bmatrix}=\underbrace{1/8}_{\det^{-1}(AB)}\underbrace{\begin{bmatrix}-6 & -12\\ 10 & 6\end{bmatrix}}_{[A,B]}.$$

Örnek 5.26 (Teorem 4.3.5):

$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ olsun. Burada, $\lambda_1=4$, $\lambda_2=1$ ve $\sqrt{A}=\begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

$$\left[\sqrt{A},B\right]=\begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

$$=\begin{bmatrix} 10/3 & 13/3 \\ -4 & -10/3 \end{bmatrix}=\underbrace{1/3}_{iz\left(\sqrt{A}\right)^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 13 \\ -12 & -10 \end{bmatrix}}_{[A,B]}.$$

Örnek 5.27 (Teorem 4.3.6):

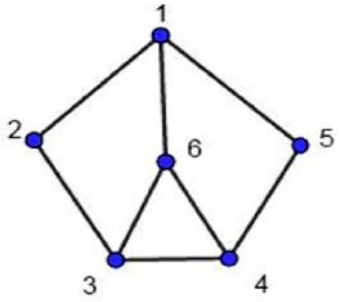
$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. Burada, $\lambda_1=4$, $\lambda_2=1$, $\sqrt{A}=\begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ ve

$\mu_1=1+i$, $\mu_2=1-i$ ve $\sqrt{B}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}+\sqrt{-2+2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{2}} \\ \frac{5}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}-\sqrt{-2+2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

$[A,B]=\begin{bmatrix} 8 & -13 \\ -33 & -8 \end{bmatrix}$ ve $\left[\sqrt{A},\sqrt{B}\right]=\begin{bmatrix} \frac{4}{3}\sqrt{-2+2\sqrt{2}} & \frac{-13}{6}\sqrt{-2+2\sqrt{2}} \\ \frac{-11}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{2}} & \frac{-4}{3}\sqrt{-2+2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Burada, $\dfrac{1}{iz\left(\sqrt{A}\right)iz\left(\sqrt{B}\right)}=\dfrac{1}{3\sqrt{2+2\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{6}$ olup $\left[\sqrt{A},\sqrt{B}\right]=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{6}[A,B]$.

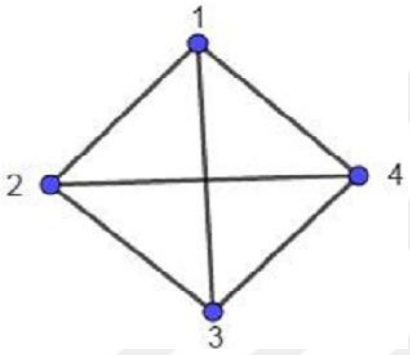
Örnek 5.28 (Teorem 4.4.1):



$\frac{n}{2\Delta} \le R_{-1} \le \frac{n}{2\delta}$	$\frac{m}{d_k \max\limits_{i\sim k} d_i} \le R_{-1} \le \frac{m}{d_j \min\limits_{i\sim j} d_i}$	R_{-1}
$1 \le R_{-1} \le 1,5$	$0,89 \le R_{-1} \le \frac{m}{d_j \min\limits_{i\sim j} d_i} \le 1,33$	1,11

Örnek 5.28, Teorem 4.1.1'de verilen $\frac{m}{d_k \max\limits_{i\sim k} d_i} \le R_{-1} \le \frac{m}{d_j \min\limits_{i\sim j} d_i}$ eşitsizliğinin literatürde yer alan $\frac{n}{2\Delta} \le R_{-1} \le \frac{n}{2\delta}$ eşitsizliğinden daha iyi bir üst sınır verebildiğini göstermektedir.

Örnek 5.29:



$\frac{n}{2\Delta} \le R_{-1} \le \frac{n}{2\delta}$	$\frac{m}{d_k \max\limits_{i\sim k} d_i} \le R_{-1} \le \frac{m}{d_j \min\limits_{i\sim j} d_i}$	R_{-1}
$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{9}$

Örnek 5.29, Teorem 4.1.1'de verilen $\frac{m}{d_k \max\limits_{i\sim k} d_i} \le R_{-1} \le \frac{m}{d_j \min\limits_{i\sim j} d_i}$ eşitsizliğinin literatürde yer alan $\frac{n}{2\Delta} \le R_{-1} \le \frac{n}{2\delta}$ eşitsizliği gibi eşitlik şartını sağladığını göstermektedir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, Taylor Seri açılımları, matris ayrışımları ve enterpolasyon yöntemleri kullanılarak matris teoride yaygın olarak çalışılan matris komütatörleri alanında, bileşenleri matris kuvvet fonksiyonu, matris karekökü ve ters matris olan komütatörler için bazı eşitlikler ve bileşenleri üstel matris, trigonometrik ve hiperbolik matrisler olan komütatörlerin Frobenius normları için üst sınırlar elde edilmiştir. Matris komütatörleri alanında yapılan çalışmalar göz önüne alındığında, elde edilen bu sonuçların bu alanda yeni bir alt çalışma alanı oluşturacağı ve matematiksel fizik ve kuantum fiziği hesaplamalarında kullanılabileceği düşünülebilir. Bu duruma ek olarak Graf Teoride sıklıkla kullanılan Randic indeks için matris komütatörlerinin norm eşitsizliklerinden hareketle bazı sınırlar belirlenmiştir. Bu sınırlar belirlenirken kullanılan bu yeni yöntemin Graf Teori alanındaki sınır belirleme çalışmalarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

6.2 Öneriler

Literatürde matris fonksiyonu tanımlama ve hesaplamada kullanılan birçok yöntem bulunmaktadır. Fakat bu yöntemlerin büyük çoğunluğu hassas hesaplama konusunda dezavantajlara sahiptir (Moler & Van Loan, 2003). Bu çalışmada bileşenleri üstel, trigonometrik ve hiperbolik matris fonksiyonu olan matris komütatörlerinin Frobenius normları için elde edilen üst sınırlar farklı yöntemler kullanılarak gerçeğe daha yakın hale getirilebilir. Bununla birlikte bileşenleri matris kuvvet fonksiyonu, ters matris ve matris karekökü olan komütatörler alanında Newton enterpolasyonu yönteminden hareketle $2x2$ matrisler için elde edilen eşitlikler farklı yöntemler kullanılarak nxn matrislere genişletilebilir.

KAYNAKLAR

Audenaert, K. M. (2010). Variance bounds, with an application to norm bounds for commutators. *Linear Algebra and It's Applications, 432*(5), 1126-1143.

Bhatia, R. (2009). *Positive definite matrices* (Vol. 24): Princeton university press.

Bhatia, R. (2013). *Matrix analysis* (Vol. 169): Springer Science & Business Media.

Bollobás, B., & Erdős, P. J. A. C. (1998). Graphs of extremal weights. *50*, 225-233.

Bozkurt, S. B., Güngör, A. D., Gutman, I., & Cevik, A. S. J. M. C. M. C. C. (2010). Randic matrix and Randic energy. *64*, 239-250.

Böttcher, A., & Wenzel, D. (2005). How big can the commutator of two matrices be and how big is it typically? *Linear Algebra and It's Applications, 403*, 216-228.

Böttcher, A., & Wenzel, D. (2008). The Frobenius norm and the commutator. *Linear Algebra and It's Applications, 429*(8-9), 1864-1885.

Cavers, M., Fallat, S., & Kirkland, S. (2010). On the normalized Laplacian energy and general Randić index R-1 of graphs. *Linear Algebra its Applications, 433*(1), 172-190.

Cayley, A. (1858). II. A memoir on the theory of matrices. *Philosophical transactions of the Royal society of London*(148), 17-37.

Chen, B., & Zadrozny, P. A. (2001). Analytic derivatives of the matrix exponential for estimation of linear continuous-time models. *Journal of Economic Dynamics and Control, 25*(12), 1867-1879.

Cheng, C.-M., & Lei, C. (2015). On Schatten p-norms of commutators. *Linear Algebra and It's Applications, 484*, 409-434.

D'Alessandro, D. (2007). *Introduction to quantum control and dynamics*: Chapman and Hall/CRC.

Dehghan, M., & Hajarian, M. (2009). Determination of a matrix function using the divided difference method of Newton and the interpolation technique of Hermite. *Journal of computational and applied mathematics, 231*(1), 67-81.

Fung, T. (2004). Computation of the matrix exponential and its derivatives by scaling and squaring. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 59*(10), 1273-1286.

Gallier, J. (2011). *Geometric methods and applications: for computer science and engineering* (Vol. 38): Springer Science & Business Media.

Gallier, J., & Xu, D. (2003). Computing exponentials of skew-symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices. *International Journal of Robotics and Automation, 18*(1), 10-20.

Gross, J. L., & Yellen, J. (2004). *Handbook of graph theory*: CRC press.

Gustafson, G. B. (2018). Applied Differential Equations and Linear Algebra @ 1999-2019. *Lecture Notes retrieved 29 November 2018 from, http://www.math.utah.edu/ gustafso/s2019/2280/chapter11-systems/*.

Gustafson, G. B., & Wilcox, C. H. (2012). *Analytical and computational methods of advanced engineering mathematics* (Vol. 28): Springer Science & Business Media.

Higham, N. J. (2006). Functions of matrices. *MIMS E-print*.

Higham, N. J. (2008). *Functions of matrices: theory and computation* (Vol. 104): Siam.

Higham, N. J., & Al-Mohy, A. H. (2010). Computing matrix functions. *Acta Numerica, 19*, 159-208.

Horn, R. A., & Johnson, C. R. (1991). Topics in matrix analysis Cambridge University Press. *Cambridge, UK*.

Jódar, L., Navarro, E., & Martin, J. (2000). Exact and analytic-numerical solutions of strongly coupled mixed diffusion problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 43*(2), 269-293.

Jódar, L., Navarro, E., Posso, A., & Casabán, M. (2003). Constructive solution of strongly coupled continuous hyperbolic mixed problems. *Applied numerical mathematics, 47*(3-4), 477-492.

Kan, O., Maden, A. D., & Solak, S. (2020). *4th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2019)*: Springer International Publishing.

KAN, O., & SOLAK, S. (2018). Commutators Involving Matrix Functions. *Electronic Journal of Linear Algebra, 33*(1), 113-121.

Kan, O., & Solak, S. (2019). Norm Inequalities Related to Matrix Commutators Involving Matrix Functions. *Asian-European Journal of Mathematics*.

King, A. I., & Chou, C. C. (1976). Mathematical modelling, simulation and experimental testing of biomechanical system crash response. *Journal of biomechanics, 9*(5), 301-317.

Kittaneh, F. (2007). Inequalities for commutators of positive operators. *Journal of Functional Analysis, 250*(1), 132-143.

László, L. (2007). Proof of Böttcher and Wenzel's conjecture on commutator norms for 3-by-3 matrices. *Linear Algebra and It's Applications, 422*(2-3), 659-663.

Moler, C., & Van Loan, C. (1978). Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *SIAM review, 20*(4), 801-836.

Moler, C., & Van Loan, C. (2003). Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM review, 45*(1), 3-49.

Najfeld, I., & Havel, T. F. (1995). Derivatives of the matrix exponential and their computation. *Advances in applied mathematics, 16*(3), 321-375.

Sezgin, M. (1987). Magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct. *International journal for numerical methods in fluids, 7*(7), 697-718.

Smalls, N. N. (2007). The Exponential Function of Matrices.

Srivastava, R., & Srivastava, P. K. (2012). Comparison of Lagrange's and Newton's interpolating polynomials. *Journal of Experimental Sciences*.

Vong, S.-W., & Jin, X.-Q. (2008). Proof of Böttcher and Wenzel's conjecture. *Oper. and Matrices, 2*(3), 435-442.

Wang, Y.-Q., & Du, H.-K. (2008). Norms of commutators of self-adjoint operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 342*(1), 747-751.

Wu, Y.-D., & Liu, X.-Q. (2010). A short note on the Frobenius norm of the commutator. *Mathematical Notes, 87*(5-6), 903-907.

Zhang, F. (2011). *Matrix theory: basic results and techniques*: Springer Science & Business Media.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Osman KAN
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Konya-01/11/1987
Telefon	**:**	0(542) 4022968
e-mail	**:**	matrixinequality@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Muhittin Güzel Kılınç Lisesi, Meram, Konya	2005
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Meram, Konya	2011
Yüksek Lisans	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi Meram, Konya	2014
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2011-2013	Afyonkarahisar Çalca İ.Ö.O	Matematik Öğretmeni
2013-2018	Kavak Mustafa Bağrıaçık O.O	Matematik Öğretmeni
2018-	Karatay Belediyesi İ.H.O.O	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI

Matris Teori ve Uygulamaları

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

1. KAN O., SOLAK S., Geogebra Destekli Öğretimin Lineer Denklem Sistemleri Konusunda Akademik Başarı Üzerine Etkisi, Journal of Research in Education and Teaching, ISSN: 2146-9199, 255-263,(2016). (Yüksek Lisans Tezinden Üretilmiştir.)

2. TÜRKMEN R., KAN O., GÖKBAŞ H., Some norm inequalities for special Gram matrices, Special Matrices, Volume 4, 262-269, doi 10.1515/spma-2016-0026, (2016).

3. KAN O., SOLAK S., Commutators Involving Matrix Functions, Electronic Journal of Linear Algebra, Volume 33, 113-121. https://doi.org/10.13001/1081-3810, 1537-9582.3684, (2018).(Doktora Tezinden Üretilmiştir.)

4. SOLAK S., BAHŞİ M., KAN O., On The Circulant Matrices with Ducci Sequences and Fibonacci Numbers, Filomat 32:15, 5501–5508, https://doi.org/10.2298/FIL1815501S, (2018).

5. KAN O, SOLAK S., Norm Inequalities Related to Matrix Commutators Involving Hyperbolic Matrix Functions, Asian-European Journal of Mathematics Vol. 12, No. 6, (2019), 2040006 © World Scientific Publishing Company DOI: 10.1142/S1793557120400069 (Doktora Tezinden Üretilmiştir).

6. KAN O., MADEN A. DİLEK, SOLAK S., Some Results Related To Matrix Commutators Involving Trigonometrıc Matrix Functions, 4th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2019), Advances in Intelligent Systems and Computing Series, Volume 1111, Springer International Publishing (Doktora Tezinden Üretilmiştir).