



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMANA BAĞLI KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN HİPERBOLİK TANJANT VE VARYASYONEL HİBRİT YÖNTEMLERİ

Onur KARAOĞLU

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2013
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

ZAMANA BAĞLI KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN HİPERBOLİK TANJANT VE VARYASYONEL HİBRİT YÖNTEMLERİ

Onur KARAOĞLU

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Galip OTURANÇ

2013, 84 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Prof. Dr. İdris DAĞ
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Bu doktora tezinde, literatürde bulunan sayısal çözüm yöntemlerinden, varyasyonel iterasyon yöntemi ve hiperbolik tanjant yöntemi ele alınmıştır. Varyasyonel iterasyon yönteminde Lagrange çarpanı ve başlangıç fonksiyonunun seçiminin önemi üzerinde durularak sonsuz şartına sahip bir taşınım probleminin yaklaşık çözümü, bu şarta Padé tekniği ile işlerlik kazandırılarak bulunmuştur. Daha sonra hiperbolik tanjant yöntemi ile varyasyonel iterasyon yönteminin hibritlenmesi yaklaşımlarından bahsedilerek bu yaklaşımların KdV ve Boussinesq denklemleri üzerinde uygulamaları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Varyasyonel iterasyon yöntemi, hiperbolik tanjant yöntemi, Marangoni taşınımı, KdV denklemi, Boussinesq denklemi

ABSTRACT

Ph.D THESIS

HYPERBOLIC TANGENT AND VARIATIONAL HYBRID METHODS FOR THE SOLUTIONS OF TIME DEPENDENT PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Onur KARAOĞLU

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Galip OTURANÇ

2013, 84 Pages

Jury
Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Prof. Dr. İdris DAĞ
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Assist. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

In this doctorate thesis, variational iteration method among numerical solution methods in the literature and hyperbolic tangent method have been considered. Importance of Lagrange Multiplier and selecting initial function in this variational iteration method have been emphasized, and approximate solution of a convection problem subject to infinite condition has been found out through bringing into force this condition with Padè approximation. Then, hybridization approaches of variational iteration with hyperbolic tangent method was discussed and applications of these approaches was made on KdV and Boussinesq equations.

Keywords: Variational iteration method, hyperbolic tangent method, Marangoni convection, KdV equation, Boussinesq equation

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Prof. Dr. Galip OTURANÇ yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne doktora tezi olarak sunulmuştur.

Çalışma boyunca destek ve ilgilerini benden esirgemeyen, değerli görüş ve önerilerini benimle paylaşan tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Galip OTURANÇ' a ve tez izleme komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. Durmuş BOZKURT' a ve Sayın Prof. Dr. İdris DAĞ' a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmamın her aşamasında manevi desteği ile hep yanımda olan eşim Seçil ŞİRİN KARAOĞLU' na ve doğumuyla mutluluğumuza mutluluk katan kızım Öykü KARAOĞLU' na teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

Onur KARAOĞLU

KONYA-2013

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ ..... **iii**

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Solitonlar 2

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **8**

3. TEORİK ESASLAR **16**

3.1. Varyasyonel İterasyon Yönteminin Temelleri 16
3.1.1. Varyasyonlar analizi 16
3.2. Varyasyonel İterasyon Yöntemi 21
3.3. 4. Mertebe Runge-Kutta Yönteminin Atış Yöntemi ile Birlikte Kullanılması 30
3.4. Padé Yaklaşımı 36
3.4.1. Fonksiyonlar için Padé yaklaşımı 36
3.4.2. Sınır değer problemlerinde Padé yaklaşımı 40
3.5. Hiperbolik Tanjant Yöntemi 42
3.6. Hiperbolik Tanjant ve Varyasyonel Hibrit Yöntemleri 44
3.6.1. Varyasyonel iterasyon yöntemi ile hiperbolik tanjant yönteminin birleştirilmesi 45
3.6.2. Varyasyonel iterasyon yönteminde hiperbolik tanjant yaklaşımı 46

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA **47**

4.1. Varyasyonel İterasyon Yönteminin Bir Taşınım Problemine Uygulanması 47
4.1.1. Problemin formülasyonu 48
4.1.2. Farklı parametre değerleri için çözümler 51
4.2. Hiperbolik Tanjant ve Varyasyonel Hibrit Yöntemlerin Bazı Zamana Bağlı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlere Uygulanması 64
4.2.1. Varyasyonel iterasyon yöntemi ile birleştirilmiş hiperbolik tanjant yönteminin KdV denklemine uygulanması 64
4.2.2. KdV denklemi için varyasyonel iterasyon yönteminde hiperbolik tanjant yaklaşımı 68
4.2.3. Varyasyonel iterasyon yöntemi ile birleştirilmiş hiperbolik tanjant yönteminin Boussinesq denklemine uygulanması 69
4.2.4. Boussinesq denklemi için varyasyonel iterasyon yönteminde hiperbolik tanjant yaklaşımı 72

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **74**

5.1. Sonuçlar 74

5.2. Öneriler.....77

KAYNAKLAR 78

ÖZGEÇMİŞ.....85

1. GİRİŞ

Bu doktora tez çalışmasında öncelikle varyasyonel iterasyon yöntemi ele alınıp bir taşınım probleminin farklı durumlarına yönelik sayısal çözümleme işlemi yapılacaktır. Bulunan yaklaşık çözümlerin güvenilirliği literatürde bulunan bir yaklaşık çözüm yöntemi ile mukayese yolu ile test edilecektir. Daha sonra hiperbolik tanjant yönteminden bahsedilerek bu iki yöntem arasında hibritleme yapılarak bazı zamana bağlı kısmi diferensiyel denklemlere dönük tam ve yaklaşık çözümlerin bulunması hedeflenmektedir.

Fiziksel, kimyasal ve biyolojik süreçlerin yanı sıra sosyal doğa olaylarını bilimsel olarak inceleme yollarından biri, bu olaya dönük matematik modelin ortaya konmasıdır. Bir anlamda gerçeğin bilimsel bir taklidi olan matematik modeller farklı çeşitleri olmasına karşın genel olarak değişime uğrayan niceliğe etki eden parametrelerle birlikte diferensiyel denklemler ile ifade edilirler. Modelin çözümlenmesi ile incelenen olayın davranışı ortaya konulabilir. Çözümden kasıt, kesin çözüm veya analitik çözümdür. Bu ise bazen problemde yapılan basitleştirici kabullere rağmen mümkün olmamaktadır. Bazen de mümkün olsa dahi elde edilen analitik çözüm sayısal sonuç elde etmek için kullanışlı olmayacak kadar karışık olabilmektedir. Bu nedenle özellikle bu tür durumlarda bilinmeyen fonksiyonu yaklaşık olarak elde etmek veya fonksiyonu sayısal olarak elde etmek yolu tercih edilmeye başlanmıştır. Bu ise sayısal çözüm yöntemleri aracılığıyla yapılmaktadır. Bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler sayısal çözüm yöntemlerinin daha hızlı ve hatasız test edilmesine ve bunun yanı sıra geliştirilmesine de imkân vermiştir.

Diğer taraftan dünyaya baktığımızda hemen hemen her olayın doğrusal olmayan bir değişim içerisinde olduğunu görürüz. Bu nedenle bir olayı temsilen kurulan bir matematiksel modelin, diğer bir ifadeyle diferensiyel denklemin, doğrusal olmayan bir yapıda olması da sıklıkla karşılaşılan bir durumdur. Doğrusal olmayan bir model ve bununla beraber gerçekleşen olayı etkileyen birçok yan etkenin de varlığı ile böyle bir diferensiyel denklemin çözümünün daha zor olacağı açıktır. Bu nedenden ötürü sayısal çözüm yöntemleri ile yaklaşık veya tam çözümler elde etmek günümüzde daha da önem kazanmıştır. Son zamanlarda teknolojinin ve bilgisayar imkânlarının giderek güçlenmesi ile beraber yeni yaklaşık çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi ve bu yöntemlerin test edildiği çok sayıda çalışma ardı ardına yapılmaktadır.

Diferensiyel denklemlerin çözüm yöntemlerine baktığımızda bir kısım yöntemin problemi ortaya koyan diferensiyel denklemin tipine bakılmaksızın başlangıç verilerini kullanarak iteratif bir şekilde tam veya yaklaşık çözümler bulmaya çalıştığını, diğer bir kısım yöntemin ise başlangıç verileri kullanmaksızın kısmi diferensiyel denklemlerin yönteme uygun olabilecek şekilde olanları üzerinde tam çözümler aradığını gözlemlemekteyiz.

Bu tez çalışmasında, her iki kısımdaki yöntemlerden ilk kısımdan varyasyonel iterasyon yöntemi ve ikinci kısımdan hiperbolik tanjant yöntemi ele alınacaktır.

Bu kısımda sadece hiperbolik tanjant yönteminin çözüm aradığı ve ortaya koyduğu tam çözümlerle ilgili bazı kavramlardan bahsedilecektir.

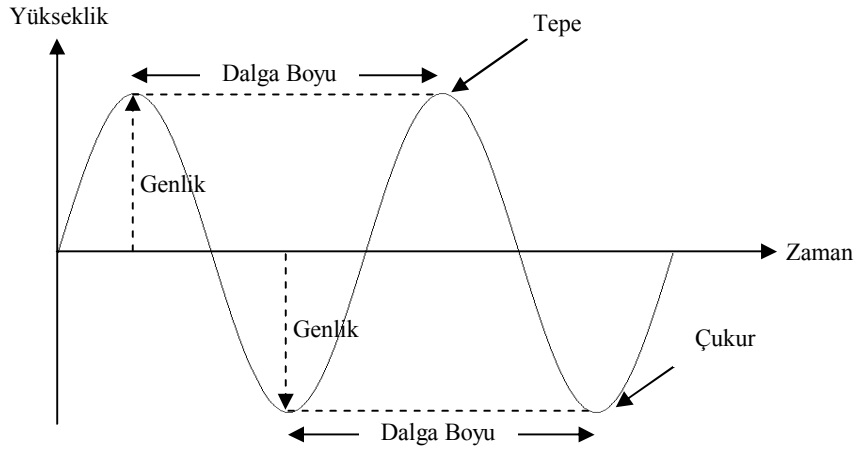
1.1. Solitonlar

Fizik terimi olarak dalga, boşlukta veya madde içerisinde yayılabilen ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan ritmik olaya verilen isimdir. En bilinen dalga örnekleri su ve ses dalgasıdır. Bunun yanı sıra radyo, radar, kızıl ötesi dalgaları gibi gözle görünemeyen ve elektromanyetik dalgalar olarak adlandırılan dalga çeşitleri de bulunmaktadır.

Bir dalganın en önemli karakteristikleri o dalganın dalga boyu, genliği ve frekansıdır. Her dalganın belirli bir dalga boyu vardır. Bu ise dalganın ardışık tepeleri ya da ardışık çukur kısımları arasındaki mesafeye denir. Genlik ise bir dalganın yüzey mesafesinden yükseldiği ve alçaldığı mesafe olarak tanımlanır (Şekil 1.1). Dolayısıyla dalganın büyüklüğü genliğe bağlıdır. Frekans birim zamanda belirli bir olayın tekrar etme sıklığı olarak tarif edilirse her bir dalganın da bir frekansa sahip olacağını düşünebiliriz. Bu durum için frekans, birim zamanda bir yerden geçen dalga sayısıdır. Bir saniyede geçen dalga sayısı ya da titreşim olarak frekansın birimi Hertz' dir. Frekans ile dalga boyu arasında da bir ilişki vardır. Dalga boyu arttığında frekans azalır. Dolayısıyla uzun dalgalar düşük frekansa, kısa dalgalar yüksek frekansa sahip olurlar. Bir dalganın hızı ise dalganın frekansı ve dalga boyunun çarpımı olarak tanımlanır.

Doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemler ile ilgili en ilginç kavramlardan biride solitonlar ve solitary dalgalardır. Bu fenomeni ilk raporlayan kişi sığ sudaki bir dalganın yayılımını tarif eden İskoç mühendis John Scott-Russell (1808-1882)' dır.

Özel bir tanımının olmamasıyla beraber bir soliton aşağıdaki iki özelliği sağlayan doğrusal olmayan kısmi bir diferensiyel denklemin bir çözümü olan doğrusal olmayan bir dalgadır (Wadati, 2001; Wazwaz, 2009).



Şekil 1.1. Bir dalganın karakteristik yapısı

1) Şekil ve hız gibi özelliklerini değiştirmeden yayılan yerel dalgalardır.
2) Karşılıklı çarpışmalara karşı kararlıdırlar ve çarpışma sonrasında özelliklerini korurlar.

Birincisi 19. yy' dan beri hidrodinamikte bilinen bir solitary dalga koşuludur. İkincisi ise dalganın bir parçacık özelliğine sahip olması anlamına gelir. Modern fizikte -on takısı, bir parçanın özelliği işaret edilmek istendiğinde kullanılır. Örneğin elastik bir dalgadaki kuantum enerjisine bir "phonon" denmesi veya elektromanyetik dalganın toplam enerjisini oluşturan enerji paketçiklerinden her biri için kullanılan "photon" gibi. Zabusky ve Kruskal (1965) solitary dalganın bir parçacık özelliğini 'soliton' adı ile isimlendirdi.

Solitonun keşfedilmesine yol açan hikâye ilginç ve etkileyicidir (Wadati, 2001; Drazin ve Johnson, 1996). Solitary dalganın ilk belgelenmiş gözlemi, 1834 yılı Ağustos ayının bir gününde İskoç bilim adamı John Scott-Russell tarafından Edinburg-Glasgow kanalında yapılmıştır. Russell, gözlemlerini 1844 yılında "Dalgalar üzerine Rapor" başlığı altında İngiliz Kültür Derneği Raporlarında şu sözleri ile yapmıştır (Russell, 1844):

Dar bir kanal boyunca bir çift at tarafından hızlı bir şekilde çekilen bir botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda kanal içindeki su kütlesi hareketini sürdürdü ve şiddetli bir sarsıntıyla botun baş tarafının kenarında toplandı. Sonra aniden orayı

arkasında bırakarak büyük bir hızla ileriye doğru yayıldı. Büyük bir solitary yüksekliği şeklinde düşündüğüm düzgün su kütlesi, hızında bir azalma ya da şeklinde bir değişme olmaksızın kanal boyunca yoluna devam etti. Onu at sırtında takip ettim ve yakaladığımda yüksekliği 1.5, bir ayağından bir ayağına 30 feet uzunluğunda orijinal şeklini koruyarak 8 ya da 9 millik bir hızla hareketine devam ediyordu. Yüksekliği yavaşça azaldı ve 1 ya da 2 millik bir takipten sonra kanalı dönerken onu kaybettim. Böylece 1834 yılının Ağustos ayında "ötelenme dalgası" olarak isimlendireceğim bu muhteşem olaya şans eseri tanık oldum.

"Solitary dalga" kelimesi ilk olarak Scott-Russell tarafından telaffuz edilmiştir (Wadati, 2001). Russell gözleminden sonra takip eden 10 yıl boyunca su tankları ve kanallarda solitary dalga çalışmalarına devam etti ve solitary dalgaların özellikleri hakkında şu tespitlerde bulundu:

i) Solitary dalgalar $h\sec h^2\left[k\left(x-vt\right)\right]$ şekline sahiptirler.

ii) Yeterince büyük bir başlangıç su kütlesi, iki ya da daha fazla sayıda bağımsız solitary dalgası üretir.

iii) Solitary dalgalar herhangi bir şekil değişikliği olmaksızın birbirleriyle çarpışırlar.

iv) h yüksekliğine (genliğine) sahip ve d kanal derinliğinde hareket eden bir solitary dalga g yerçekimi ivmesini belirtmek üzere (solitary dalgalar bu nedenle yerçekimi dalgaları olarak da isimlendirilir (Wazwaz, 2009))

$$v=\sqrt{g(d+h)} \tag{1.1}$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Bu ifade büyük genliğe sahip olan solitary dalganın, küçük genlikli solitary dalgadan daha hızlı yol alacağını ifade eder (Falkovich, 2007).

Russel' ın solitary dalganın varlığını öngördüğü dönemde bu tahminini doğrulayıcı herhangi bir matematiksel teori yoktu. Ayrıca fikirleri ilk başta o günün bilim dünyasına yön veren önemli ve etkili bilim insanları tarafından büyük bir şüphecilikle karşılandı. Özellikle başlarda Airy ve Stokes' un sert eleştirilerine maruz kaldı (Ablowitz ve Segur, 1981; Newell, 1985). 1870' ler de Russell' ın bilim dünyasındaki önemi ve saygınlığı arttı. Bu yıllarda bağımsız olarak Boussinesq (1871) uzun dalgaları modelleyen bir oluşum denklemi türetti. Kısa süre sonra Boussinesq (1872) ve Rayleigh (1876) solitary dalga çözümleri elde ederek Russell' in solitary dalga üzerine yaptığı öngörüleri doğruladılar (Debnath, 2007). Bu konu üzerinde uzun

yıllar süre gelen anlaşmazlık, yaklaşık elli yıl sonra Hollandalı iki Matematikçi Diederik Johannes Korteweg ve öğrencisi Gustav de Vries tarafından çözüldü. Korteweg ve de Vries (1895), Boussinesq ve Rayleigh' in çalışmalarından habersiz, Airy ve Stokes' un eleştirilerine cevap verme amacıyla, Russell' ın problemine indirgenen ve onun gözlemlediği olgunun temel özelliklerine sahip, yüzeysel su dalgalarına ait bir teori yayınladılar. Bu yayının sonuçlarından biri soliton teoride anahtar rol oynayan ve su yüzeyinde tek doğrultudaki dalgaların yayılımını modelleyen ve KdV denklemi olarak bilinen

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\gamma u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.2}$$

formundaki doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemi oldu. Bu denklemde

$u(x,t)$, dalga genliği,

$c=\sqrt{gd}$, küçük genlikli dalgaların hızı,

$\varepsilon\equiv c\left(\frac{d^2}{6}-\frac{T}{2\rho g}\right)$, bir dağılım parametresi,

$\gamma=\frac{3c}{2d}$, doğrusal olmayan bir parametre,

T yüzey gerilimi ve ρ suyun yoğunluğu anlamına gelmektedir. Korteweg ve de Vries, denklem (1.2)' nin v dalga hızı ve $\tilde{u}(\cdot)$, Russell' ın solitary dalga tanımına uygun

$$u(x,t)=\tilde{u}(x-vt) \tag{1.3}$$

formunda tam yönlendirilmiş dalga çözümlerinin bir ailesine sahip olduğunu gösterdiler. Denklem (1.2), $k=\sqrt{\gamma h/12\varepsilon}$ olmak üzere

$$u(x,t)=h\sec h^2\left[k\left(x-vt\right)\right] \tag{1.4}$$

tam yönlendirilmiş dalga çözümüne sahiptir. Bu çözüm yüksek genlikli dalgaların daha dar olduğuna işaret eder (Falkovich, 2007). 1955 yılında Fermi, Pasta ve Ulam (1955) tarafından ortaya atılan (FPU) problemi KdV denklemi ile ilişkili önemli gelişmelere

sebep oldu (Ablowitz ve ark., 1981). Bu problem ve üzerine yapılan çalışmalar Martin Kruskal ve Norman Zabusky' nin de dikkatini çekti. Zabusky ve Kruskal (1965) KdV denklemi için $\delta = (h/\ell)^2$ ve ℓ yatay uzunluk ölçeği olmak üzere

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} = 0 \tag{1.5}$$

formunda $u(x,0) = \cos \pi x$, $0 \le x \le 2$ şeklinde bir başlangıç değeri alarak yaptıkları sayısal çalışmalar sonunda (Debnath, 2007; Newell, 1985), KdV denkleminin beklenmedik bir özelliğini buldular. Düz bir başlangıç dalga formundan, keskin tepe noktaları olan dalgalar ortaya çıktı. Bunlar çarpışmalardan sonra birbirlerinin içinden geçen ve belirli hızlarla birbirlerinden bağımsız hareket eden titreşim dalgalarıdır. Detaylı bir analizle her bir titreşimin denklem (1.4)' deki gibi $\sec h^2$ tipinde bir solitary dalga olduğunu ve bu solitary dalgaların kararlı parçacıklar gibi davrandığı doğrulandı (Wadati, 2001). Ayrıca solitary dalgaların başlangıç koşullarından üretilebileceğini ve diğer solitary dalgalarla çarpışmaları durumunda şekil ve hızlarını koruyacaklarını göstererek bu solitary dalgaları foton, proton, elektron ve diğer temel partiküller gibi soliton adı ile isimlendirdiler (Grimshaw, 2004; Falkovich, 2007). Bu dikkate değer çalışmadan sonra Gardner ve ark. (1967), KdV denkleminin ters saçılma yöntemi olarak adlandırılan bir yöntem aracılığıyla integre edilebildiğini göstererek artık bugün bildiğimiz soliton teorinin doğuşuna ve diğer birçok keşfin başlamasına ön ayak oldular (Grimshaw, 2004).

Bugün birçok farklı bilimsel alanda soliton kavramı ile ilgili etkin araştırma çalışmaları ortaya çıkmıştır. Doğrusal olmama ve dağılımın sonucu olarak ortaya çıktığı bilinen solitonlar, akışkanlar mekaniği, astrofizik, plazma fiziği ve akustik gibi çeşitli bilimsel alanlarda oynadığı önemli rolden dolayı ilgi çekmektedir (Wazwaz, 2009).

Tezin ikinci bölümünde yaklaşık veya tam çözümler bulmayı hedefleyen yöntemlerden diferensiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrışım yöntemi, Taylor sıralama yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi ve belirli tipte kısmi türevli diferensiyel denklemlere ait tam çözümler elde etmeye çalışan hiperbolik tanjant yöntemi hakkında literatürde yapılmış önemli çalışmalara kısaca değinilmiştir.

Teorik esasların verildiği üçüncü bölüm, varyasyonel iterasyon yönteminin temel dayanak noktası olan varyasyonlar analizi ile başlamaktadır. Daha sonra yöntemden bahsedilerek, Lagrange çarpanının ve başlangıç yaklaşımının seçiminin

yöntemdeki önemi üzerinde durulmuştur. Yine bu bölümde bir sonraki bölümde kullanılacak olan Runge-Kutta yönteminin atış yöntemi ile kullanımı ve Padé yaklaşımına değinilecektir. Üçüncü bölüm, tezde kullanılan diğer bir yöntem olan hiperbolik tanjant yöntemi ile devam etmektedir. Bu yöntemin esaslarına madde madde değinildikten sonra varyasyonel iterasyon yönteminin bu yöntemle hibritlenmesi işlemi gösterilmiştir.

Dördüncü bölüm olan araştırma bulguları ve tartışma başlıklı bölümde ise varyasyonel iterasyon yöntemi, sıcaklık değişiminden dolayı serbest bir yüzey üzerinde oluşan Marangoni taşınımının indirgendiği, sonsuz şartına sahip, doğrusal olmayan adi diferensiyel denklem sistemine uygulanarak sistemin farklı parametre değerlerine karşılık gelen yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Bu yaklaşık çözümler bulunurken Padé yaklaşımı olarak bilinen bir teknik yardımıyla sonsuz şartının yaklaşık çözümlerdeki bilinmeyen parametrelerin tespitinde kullanımı sağlanmıştır. Elde edilen yaklaşık çözümler, standart Runge-Kutta yönteminin atış yöntemi olarak bilinen bir teknikle kullanımı sonucu elde edilen yaklaşık çözümü ile karşılaştırılmıştır. Dördüncü bölüm varyasyonel iterasyon yöntemi ve hiperbolik tanjant yöntemlerinin hibrit şekillerinin uygulamaları ile devam etmektedir. Bu kısımda KdV denklemi ve Boussinesq denklemleri ele alınmıştır.

Çalışmanın son bölümü olan sonuçlar ve öneriler kısmında ise Marangoni taşınımına ait sistemin çözümünden elde edilen yaklaşık çözümlerin, Zheng ve ark. (2008) tarafından Adomian ayrışım yöntemi ile yapılan çözümlerle karşılaştırılmasına yer verilmiş ve ileri çalışmalar için birkaç öneri ileri sürülmüştür.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bilimsel problemler ve doğa olayları genellikle kaotik yapıda diferensiyel denklem sistemleri ile modellenir. Dolayısıyla karmaşık bir düzen içerisinde ve başlangıç şartlarına hassasiyetle bağlı bu sistemlerin çoğunda analitik çözümün bulunması mümkün değildir. Bu nedenle yaklaşık ve sayısal çözüm yöntemlerinin kullanımı zorunlu olmaktadır. Bunun yanı sıra özellikle doğrusal olmayan problemleri hem teorik hem de sayısal olarak çözmek de oldukça zordur. Çözümü bulmak amacıyla problemin doğasına aykırı, gereksiz yere bazı ihmaller ve varsayımlar yapmakta önemli bilgi kayıpları yaşanmasına sebebiyet vermektedir.

Literatürde son yıllarda daha hızlı ve doğru bir şekilde çözüme yakınsama iddiasında olan, yaklaşık veya tam çözümler bulmayı hedefleyen yöntem göze çarpmaktadır. Bunlardan başlangıç verileri kullanarak yaklaşık veya tam çözümler bulmayı hedefleyen yöntemlerden diferensiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrışım yöntemi, Taylor sıralama yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi ile başlangıç verilerine ihtiyaç duymaksızın belirli tipte kısmi türevli diferensiyel denklemlere ait tam çözümler elde etmeye çalışan yöntemlerden hiperbolik tanjant yöntemi aracılığıyla, özellikle mühendislik problemleri üzerine çok sayıda çalışmalar yapılmıştır.

Şimdi bu adı geçen yöntemler ile yapılmış, özellikle son iki yönteme biraz daha ağırlık vererek, önemli olduğunu düşündüğümüz yayınlara değinelim.

Diferensiyel dönüşüm yöntemi ilk olarak Zhou (1986) tarafından doğrusal ve doğrusal olmayan elektrik devre problemlerinin çözümü için ortaya konuldu ve kullanıldı. Daha sonra yöntem Chen ve Ho (1999) tarafından kısmi diferensiyel denklemlere genişletilerek iki boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi ifade edildi. Ayaz (2004) ile Kurnaz ve Oturanç (2005) yöntemi diferensiyel denklem sistemlerine uyguladı. Yine Kurnaz ve Oturanç (2005) yöntemi n - boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemine genişlettiler. Yöntem daha sonra farklı başlangıç ve sınır şartları altında birçok farklı denklem tipine çözümü iyileştirici bazı teknikler yardımıyla başarıyla uygulandı. Peker ve ark. (2011) yöntemi, Padé yaklaşımını kullanarak, sonsuz sınır şartına sahip doğrusal olmayan bir diferensiyel denkleme uyguladı. Bunun yanı sıra Keskin ve Oturanç (2009), geleneksel diferensiyel dönüşüm yönteminin karmaşık hesaplamalardaki hatalarını azaltan ve daha hızlı çözüme yakınsayan, indirgenmiş diferensiyel dönüşüm yöntemini geliştirdiler.

Adomian ayrışım yöntemi de diferensiyel dönüşüm yöntemi gibi doğrusal ve doğrusal olmayan diferensiyel denklemlere ait yaklaşık veya tam çözümler bulmayı hedeflemektedir. Bu yöntem kendi içinde bir yöntem yardımıyla Adomian polinomları adıyla hesaplanan polinomları ve bilinmeyen fonksiyonun ayrıştırılması ilkesine dayanır. Yöntem ilk olarak Adomian (1984) tarafından bulundu. Bununla birlikte yöntem Rach (1984), Adomian (1988), Cherruault (1989), Seng ve ark. (1996), Abbaoui ve Cherruault (1999) gibi bilim insanlarının yaptıkları çalışmalarla gelişti.

Taylor sıralama yöntemi ise doğrusal diferensiyel denklemlerin verilen karışık koşullara göre yaklaşık çözümlerini Taylor polinomları cinsinden bulan bir yöntemdir. Diğer yöntemlerden farklı olarak problemin tanımlandığı aralıklarda oluşturulan Taylor sıralama noktaları yardımıyla doğrusal diferensiyel denklem sıralama noktalarına bağlı bir matris denklemine dönüştürülür. Sonuçta oluşan matris denklemi Taylor katsayılı bir cebirsel sisteme karşılık gelir. Bu sistem çözülerek katsayılar tam veya yaklaşık olarak bulunabilir. Yöntemin ana hatları ile ilgili Karamete (1996) tarafından bir çalışma yapılmıştır. Yöntem birçok farklı doğrusal denklem tipine uygulanmıştır. Bunlardan Karamete ve Sezer (2002) doğrusal integro-diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini, Gülsu ve Sezer (2006) yüksek mertebeden doğrusal Fredholm-Volterra integro-diferensiyel denklem sistemlerinin çözümlerini ve yine Gülsu ve ark. (2006)' da yüksek mertebeden doğrusal homojen olmayan fark denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmuşlardır. Daha sonra Keskin ve ark. (2011) yüksek mertebeden doğrusal kesirli diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri ile Taylor sıralama yönteminin bir genellemesini yapmışlardır.

Varyasyonel iterasyon yöntemi ilk olarak He (1997) tarafından, Inokuti ve ark. (1978) tarafından kuantum mekaniğindeki problemleri çözmek için tanıtılan genel Lagrange çarpanı yönteminin bir modifikasyonu olarak sunuldu. Yöntem doğrusallaştırma ya da pertürbasyon yapmaksızın doğrusal veya doğrusal olmayan diferensiyel denklemleri çözmek için sunulmuştur. Genel olarak varyasyonel iterasyon yöntemi, pertürbasyon yöntemlerinde olduğu gibi küçük parametrelere ihtiyaç duymayan, kesirli türevli diferensiyel denklemlerde dâhil olmak üzere doğrusal veya doğrusal olmayan mühendislik problemlerinin geniş bir sınıfına kolay bir şekilde uygulanabilen, hassas çözümlere hızlı bir şekilde yakınsayan esnek, etkili ve güvenilir bir yöntemdir.

Literatürde sunulan her yöntemin diğer yöntemlere karşı bazı avantaj ve dezavantajları vardır. Lagrange çarpanı tabanlı olan varyasyonel iterasyon yönteminin

bazı araştırmacılar tarafından Adomian ayrışım yöntemi, pertürbasyon yöntemi gibi yöntemlere karşı üstünlüklerinin olduğu belirtilmektedir (He, 1997; Wazwaz, 2007). Yöntem ile düzeltme fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonun iterasyonu kullanılarak birkaç ardışık iterasyon ile hızlı bir şekilde bir yaklaşım elde edilebilir. Dolayısıyla yapılan ardışık iterasyonların fazla olmaması ile hesaplama yükü önemli ölçüde azalır. Ayrıca Adomian ayrışım yöntemindeki gibi doğrusal olmayan terimlere karşılık gelen ve çoğu zaman uzun cebirsel işlemlere neden olan Adomian polinomları yerine daha az cebirsel işlemle bulunan Lagrange çarpanı kullanılır. Diğer yandan Adomian ayrışım yöntemi ile elde edilen yaklaşım her zaman problemin tüm sınır koşullarında sağlanmayabilir ve sınırların yakınlarında hataya yol açabilir (He, 1997).

Yöntem ilk olarak He (1997) tarafından tanıtılmıştır. Bu çalışmada He (1997) yöntemin ana hatlarını doğrusal olmayan iki adi diferensiyel denklem üzerinde göstererek yöntemi kısmi diferensiyel denklemlere genişletmiştir. Elde ettiği sonuçları Adomian ayrışım yöntemi ile karşılaştırarak yöntemin üstünlüğüne vurgu yapmıştır. Bu tarihten sonra yöntem birçok farklı denklem tipine başarı ile uygulanmıştır.

He (1997), yöntemi gecikmeli diferensiyel denklem ile ifade edilen bir populasyon büyüme modeline uygulamıştır.

Yine He (1998), yöntemi doğrusal bir adi diferensiyel denklem, doğrusal olmayan kısmi türevli diferensiyel denklem ve doğrusal olmayan bir adi diferensiyel denklem üzerinde uygularken Lagrange çarpanının nasıl bulunacağına dair bazı ayrıntılara yer vermiştir. Daha sonra önceden Adomian ayrışım yöntemi ile çalışılmış iki boyutlu bir akışı modelleyen denklem üzerinde kendi yöntemini uygulamış ve Ayrışım yöntemi ile elde edilen tam çözüme yakınsayan seri çözümü yerine direkt olarak tam çözüme ulaşmıştır. Ayrıca aynı çalışmada yöntemi kesirli türevli diferensiyel denklemlere uygulayarak kapsamını genişletmiştir.

He (1999), bu çalışmasında literatürde iyi bilinen beş adet doğrusal olmayan probleme yöntemi uygulamıştır. Yöntemde Lagrange çarpanının seçimindeki öneme değinerek bu çarpanın doğru seçiminin özellikle doğrusal problemler için daha hızlı bir şekilde tam çözüme yakınsayan ardışık yaklaşımlar ortaya koyacağını bir örnek üzerinde göstermiştir. Bu seçimin problemdeki doğrusal olmayan terimlerin kısıtlanmış varyasyonlar olarak dikkate alınması ile daha doğru yapılabileceğini vurgulayarak bu yolla doğrusal olmayan problemler içinde Lagrange çarpanının nasıl seçilmesi gerektiğini ortaya koymuştur. Adomian yöntemi ile teorik bir karşılaştırmanın yapıldığı

çalışmanın sonuç kısmında da maddeler halinde yöntemin bazı özelliklerine değinilmiştir.

He (2000), bu çalışmasında varyasyonel iterasyon yöntemini otonom diferensiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanmıştır. Çalışmada üç başlık altında yöntemin avantaj sağlayan yanları vurgulanmıştır.

1) İterasyonun yapıldığı düzeltme fonksiyonları, en iyi şekilde varyasyonel teori ile belirlenen Lagrange çarpanları aracılığıyla oluşturulabilir. Özellikle düzeltme fonksiyonunda kısıtlanmış varyasyonların uygulanması bu çarpanı belirlemeyi daha kolay hale getirir.

2) Başlangıç yaklaşımı, uygun bilinmeyen sabitler ile keyfi olarak seçilebilir.

3) Bu yöntem yolu ile elde edilen yaklaşımlar yalnızca küçük parametreler için değil büyük parametreler içinde geçerlidir. Hatta birinci dereceden bir yaklaşım dahi oldukça doğru bir yaklaşım ortaya koyar.

Yöntemin ana hatlarını ortaya koyan bu yayınlardan kısa bir süre sonra yöntem, birçok farklı mühendislik problemine ve matematiksel denklem tipine uygulandı. Şimdi bu çalışmalardan önemli olan bazılarına değinelim.

Momani ve ark. (2006) yaptıkları çalışmada bir sınıf doğrusal olmayan sınır değer problemin analitik ve yaklaşık çözümlerini bulmak amacıyla varyasyonel iterasyon yöntemini kullanmışlardır. Adomian ayrışım yöntemi ile karşılaştırmalar yapılmış ve bazı problemlerde ayrışım yönteminin bazı problemlerde ise varyasyonel iterasyon yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Momani ve Odibat (2006) akışkanlar mekaniğinde geçen bazı doğrusal kesirli kısmi türeve sahip diferensiyel denklemler için varyasyonel iterasyon yöntemi ve Adomian ayrışım yöntemlerini kullanarak tam ve yaklaşık çözümler bulmuşlardır.

Rafei ve ark. (2007) çalışmasında iki problem ele almışlardır. Bunlardan birincisi ölümcül olmayan bir hastalığın bir popülasyonda yayılması problemi, ikincisi ise bir av-avcı problemidir. Bu problemleri modelleyen doğrusal olmayan adi diferensiyel denklem sistemlerinin çözümlerini varyasyonel iterasyon yöntemi kullanarak hesaplamışlardır. Sonuçlar Adomian ayrışım yöntemi ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve varyasyonel iterasyon yönteminin daha az işlemle sonuca gittiği gösterilmiştir.

Yöntemin modifiye edilmesi ile ilgili ilk çalışma Abassy ve ark. (2007) tarafından yapılmıştır. Modifiye varyasyonel iterasyon yöntemi olarak adlandırdıkları bu yaklaşımı, klasik yöntemin elde ettiği seri çözümlerinde tekrar eden hesaplamalar ve

ihtiyaç olmayan terimlerin hesaplanması gibi dezavantajları ortadan kaldırmak amacıyla doğrusal olmayan diferensiyel denklemlerin özel bir çeşidi için geliştirmişlerdir.

Ganji ve ark. (2007) varyasyonel iterasyon yöntemini ekolojik parametreli doğrusal olmayan reaksiyon-difüzyon denkleminin çözümünde kullanmışlardır. Elde edilen sonuçlar Adomian ayrışım yöntemi ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Wazwaz (2007) bu çalışmasında yöntemi doğrusal ve doğrusal olmayan kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanmıştır. Çalışmasının iki amacı olduğunu ve bunların, yöntemin doğrusal olmayan terimleri dönüştürmede kullanılacak dönüşümlere gereksinim duymaksızın hesaplamaların boyutlarını düşürme özelliğini ve Lagrange çarpanının seçimiyle hızlı yakınsayan ardışık yaklaşımların elde edilebileceğini göstermek olduğunu belirtmiştir.

Yine Wazwaz (2007), varyasyonel iterasyon yöntemini sınırlı ve sınırsız bölgelerde doğrusal ve doğrusal olmayan dört dalga denkleminin analitik davranışını araştırmada kullanmıştır.

Xu (2007) çalışmasında yöntemi ikinci tür Volterra integral denklemlerin ve ikinci tür Fredholm integral denklemlerin çözümünde kullanmıştır. Çözümlerin tam çözümlerle aynı olduğunu göstermiştir.

Wang ve He (2007) bazı integro-diferensiyel denklemlere varyasyonel iterasyon yöntemini uygulamışlardır. Bazı örneklerde sadece bir iterasyonla tam çözüm elde edilmiştir.

Miansari ve ark. (2008) düz yüzeylerdeki doğrusal olmayan ısı transfer denklemlerinin çözümlerini bulmak için varyasyonel iterasyon yöntemini kullanmışlardır. İki model üzerinde uyguladıkları yöntemden elde ettikleri sonuçların homotopi pertürbasyon yönteminden elde edilen sonuçlarla uyumuna değinmişlerdir.

Yusufoğlu ve Erbaş (2008) doğrusal olmayan bir diferensiyel denklem sistemi ile ifade edilen değişken katsayılı av-avcı problemine varyasyonel iterasyon yöntemini uygulamışlardır. Farklı iterasyon sayıları ile elde edilen sonuçları modifiye edilmiş Adomian ayrışım yöntemi ve homotopi pertürbasyon yönteminden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

Odibat (2008) varyasyonel iterasyon yöntemi ile doğrusal olmayan yayılma denklemleri, solitary çözümler, elde etmiştir. Başlangıç çözümü ya da aşikâr çözümün seçiminin çözümün fiziksel yapısında önemli bir rol oynadığına değinmiştir. Elde ettiği solitary çözümlerin diğer yayınlarda geçen ve sine-cosine yöntemi ile elde edilen aynı solitonlar olduğunu belirtmiştir.

Odibat (2008) doğrusal olmayan problemlerde kullanmak için varyasyonel iterasyon yönteminin yeni bir yaklaşımını geliştirmiştir. İleri sürdüğü yaklaşım ile karmaşık integrallerle yapılan hesaplamalardaki güçlüğün üstesinden gelinebileceğini ve hesaplama boyutunun azalacağını ileri sürmüştür. Bu tekniği genel olarak, problemde verilen analitik fonksiyonu iki kısma ayırarak ya da onun seri açılımını kullanarak daha önce belirlediği Lagrange çarpanı ile yeni düzeltme fonksiyonunu oluşturup bununla iterasyon yapmak olarak açıklayabiliriz. Bu tekniğin etkinliğini göstermek için çeşitli sayısal örnekler vermiştir.

Goh ve ark. (2008) çalışmalarında, av-avcı probleminin çözümünde ileri sürdükleri çok adımlı varyasyonel iterasyon yöntemi ile daha geniş aralıklarda daha iyi çözümler elde etmişlerdir. Çözüm adımlarını alt aralıklara bölerek alt aralıkların dizisi içerisinde yaklaşık çözümler için bir algoritma vermişlerdir. Her bir alt aralıkta iterasyon formülünü kullanarak elde ettikleri sonuçları, dördüncü mertebe Runge-Kutta yönteminden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

Geng ve ark. (2009) yaptıkları çalışmada yine yöntemin bir modifikasyonu olan piecewise (terim terim) varyasyonel iterasyon yöntemini tanıtmışlardır. Bu yöntemi bir Riccati diferensiyel denkleminin çözümünde kullanmışlardır. Geleneksel yöntem ile başlangıç noktası civarında iyi sonuçlar alınırken yöntemin bu modifikasyonunun daha geniş aralıklarda da iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Çözüm aralığı N eşit parçaya bölündükten sonra her bir alt aralıkta iterasyon formülü kullanılarak elde edilen fonksiyondan bir sonraki alt aralıkta karşılık gelen ilk nokta için bir başlangıç yaklaşımı elde edilmesi şeklinde adım adım işlem devam ettirilmiştir. Bulunan sonuçlarla grafik üzerinde yöntemin geleneksel hali ve modifiye edilmiş hali karşılaştırılmıştır.

Goh ve ark. (2009) Hantavirus (kemirgenlerden bulaşan bir tür virüs) salgını modelinin bir popülasyondaki hareketliliğini incelemek için varyasyonel iterasyon yöntemini kullanmışlardır. Elde edilen sonuçlar klasik Runge-Kutta yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu analizden elde edilen sayısal değerler belirli koşullar altında salgının yayılım davranışı üzerine faydalı tespitler yapma imkânı sağlamıştır.

Ghorbani ve Saberi-Nadjafi (2009) varyasyonel iterasyon yönteminin bir modifikasyonunu tanıtmışlardır. İleri sürdükleri yeni yaklaşımın temel düşüncesi geleneksel yöntemde başlangıç yaklaşımının serbest seçimindeki kolaylığı kullanarak parametreleri bilmeksizin bir başlangıç-aşikâr fonksiyonu oluşturmaktır. Doğrusal ve doğrusal olmayan bazı örnekler üzerinde yöntemin etkinliği gösterilmiştir.

Shou (2009) çalışmasında, tekstil mühendisliğinde kullanılan ve doğrusal olmayan bir titreşim oluşturan modele, yöntemi uygulamıştır. Sirospun yün ipliği dokuması, tekstil endüstrisinde geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Çalışmada bu dokuma için kullanılan modelin varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözümünden Sirospun dokumasının periyotları ve rezonans koşulları elde edilmiştir.

Rashidi ve Shahmohamadi (2009) çalışmalarında sınırsız bir döner disk yakınlarındaki bir akış için üç boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin analitik çözümlerini bulmak amacıyla varyasyonel iterasyon yöntemini Padé yaklaşımı ile birlikte kullanmışlardır. Sistemin çözümünden elde edilen sonuçlar dördüncü mertebe Runge-Kutta yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Odibat (2010) yönteme alternatif bir yaklaşım getirerek bu sayede hata tahmini ve yakınsaklık ile ilgili yeterli koşulları tespit etmiştir. Farklı sınıflardaki diferensiyel denklemler üzerinde tam çözüme yakınsayan iterasyon formüllerini özetlemiştir. Yaklaşımı test ettiği bazı problemlerle yaklaşımın hesaplama boyutlarını da düşürdüğünü vurgulamıştır.

Soltani ve Shirzadi (2010) yöntemin yeni modifikasyonu ile çeşitli doğrusal olmayan denklemler için doğrusal operatörlerin seçiminde büyük kolaylık sağlandığını ve bu sayede Lagrange çarpanının daha etkili seçilebildiğini tespit etmişlerdir. Bazı örnekler üzerinde yaklaşımlarının daha az iterasyonla daha iyi sonuçlar verdiğini göstermişlerdir.

Geng (2010) yöntemde yaptığı modifikasyon ile bazı Riccati diferensiyel denklemlerin çözümlerinde, geleneksel yöntemin aksine, daha geniş aralıklarda iyi yaklaşımlar elde edildiğini göstermiştir. Lagrange çarpanının yanı sıra bir yardımcı operatör ile birlikte, düzeltme fonksiyonu ve iterasyon formülünü ifade etmişlerdir. Bazı örnekler üzerinde ileri sürülen yaklaşım test edilmiştir.

Yang ve Chen (2011) çalışmalarında varyasyonel iterasyon yönteminin başlangıç yaklaşımı seçiminde yeni bir yaklaşım ileri sürmüşlerdir. Yaklaşık çözümün farklı bir şekilde ifade edilmesinden yola çıkılarak kısmi türevli diferensiyel denklemler sınır şartlarını sağlayacak şekilde adi diferensiyel denklemlere indirgenmiştir. Bazı dalga denklemleri üzerinde ileri sürülen yaklaşımla tam çözümler elde edilmiştir.

Şimdi yukarıda adı geçen yöntemlerin sınıfına dahil olmayan ve belirli kısmi türevli diferensiyel denklemlerin tam çözümler ailesini bulmayı hedefleyen yöntemlerden hiperbolik tanjant yöntemine genel olarak değinelim.

Akışkanlar dinamiği, plazma fiziği, katı hal fiziği, fiber optikler, akustik, mekanik, biyoloji ve matematiksel finans gibi birçok uygulamalı bilim dalında, çeşitli doğrusal olmayan olayları tanımlamak için kısmi diferensiyel denklemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu gibi uygulamalı bilim dallarındaki doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerinin araştırılması ise uzun zamandır hem matematikçiler hem de fizikçiler için önemli bir ilgi alanı haline gelmiştir. Bu doğrultuda kısmi diferensiyel denklemleri adi diferensiyel denklemlere indirgemek suretiyle doğrusal olmayan dalga denklemlerinin tam çözümlerinin üretilmesi başarılı bir fikir olmuştur (Ma ve ark., 2009). Şimdiye kadar bazı özel doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin özel çözümlerini elde eden etkili yaklaşımlar bulunmasına rağmen (Ters saçılım yöntemi, Darboux yöntemi, Hirota bilineer yöntemi ve Homojen denge yöntemi gibi) doğrusal olmayan dalga denklemlerinin çok karmaşık doğrusal olmayan yapılara sahip olması nedeniyle doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini elde eden genel bir yöntem yoktu. Bu yüzden doğrusal olmayan dalga denklemlerini çözmek için daha etkili yöntemler bulmak gerekmekteydi (Desheng ve Ying, 2009).

Öte yandan doğrusal olmayan dalga denklemlerinin soliton çözümlerinin hemen hemen tamamı hiperbolik fonksiyonlar aracılığıyla bir polinom yardımıyla ifade edilebilir. Önce Lan ve Wang (1990) ve sonra Lou ve ark. (1991) ilk olarak buna dikkat çekti ve bazı karmaşık doğrusal olmayan dalga denklemlerinin tam çözümlerini elde etmek için hiperbolik tanjant fonksiyon terimlerini kullandı.

Daha sonra Malfliet (1992) hiperbolik tanjant yöntemini tanıttı. Daha sonra Parkes ve Duffy (1996) otomatik hiperbolik tanjant yöntemini tanıttılar. Bundan sonra sırasıyla Fan (2000) genişletilmiş hiperbolik tanjant yöntemini, Elwakil ve ark. (2002) modifiye edilmiş genişletilmiş hiperbolik tanjant yöntemini, Zheng ve ark. (2003) genelleştirilmiş genişletilmiş hiperbolik tanjant yöntemini, Yomba (2004) gelişmiş genişletilmiş hiperbolik tanjant yöntemini ve Chen ve Zhang (2004)' de hiperbolik tanjant fonksiyon yöntemini tanıttılar (İnan ve Uğurlu, 2010).

Daha sonra birçok araştırmacı yukarıda adı geçen yöntemler yardımıyla doğrusal olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin dalga çözümlerini aradılar.

3. TEORİK ESASLAR

Bu bölümde çalışmada kullanılan yöntemlere ve onlara özgü temel kavramlara yer verilecektir.

3.1. Varyasyonel İterasyon Yönteminin Temelleri

Burada Elsgolts (1977) ve Gelfand ve Fomin (2000) kaynaklarında ayrıntılarının yer aldığı varyasyonlar analizinin temelleri ile ilgili önemli bazı temel kavramlara değinilecektir.

3.1.1. Varyasyonlar analizi

Varyasyonel problemleri çözen yöntemler, yani fonksiyonellerin maksimal ve minimalliğini içeren problemleri çözen yöntemler, sadece fonksiyonların maksimal ve minimalliğini araştıran yöntemlere oldukça benzerdir. Fonksiyoneller ise mekanik, geometri ve analiz gibi pek çok alanda karşılaştığımız problemlerde önemli rol oynarlar. Tek değişkenli v niceliği, eğer $y(x)$ fonksiyonlarının belirli bir sınıfının her bir $y(x)$ fonksiyonuna bağlı ise yani her bir $y(x)$ fonksiyonuna bir v sayısı karşılık geliyorsa v bir fonksiyoneldir. $v=v\left[y(x)\right]$ şeklinde yazılır. Yani burada bağımsız değişkenin kendisi bir fonksiyondur.

Bir $v\left[y(x)\right]$ fonksiyonelinin $y(x)$ argümanının δy varyasyonu veya artımı

$$\delta y = y(x) - \bar{y}(x) \tag{3.1}$$

şeklinde iki fonksiyon arasındaki farktır. Bir $v=v\left[y(x)\right]$ fonksiyoneline, eğer $y(x)$'in küçük bir değişimine karşılık $v=v\left[y(x)\right]$'in küçük bir değişimi karşılık gelirse, süreklidir denir. Son tanım üzerinde düşünüldüğünde küçük değişimler doğrultusunda iki eğri arasındaki yakınlığın ne ölçüde olduğu sorusu akla gelebilir. İlk akla gelen eğer, bütün x değerleri için $y(x)-\bar{y}(x)$ ordinatları farkının mutlak değeri küçük ise eğrilerin birbirine yakın olduğu yaklaşımıdır.

Ancak genel olarak eğrilerin yakınlığının tanımı uygulamalarda sıklıkla, F üç değişkenli sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[x_0, x_1]$ aralığında,

$$J\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} F\left[x, y(x), y'(x)\right] dx \tag{3.2}$$

şeklinde bir fonksiyonel çeşidi olarak ortaya çıkar. O halde eğrilerin yakınlığı konusunda, $y(x_0) = y_0$ ve $y(x_1) = y_1$ sınır koşulları olmak üzere, (3.2) fonksiyonelinin maksimum ve minimumunu araştırırız. İntegrant içerisinde y' argümanının bulunması nedeniyle eğrilerin birbirlerine yakınlığı konusunda sadece $y(x) - \bar{y}(x)$ farkının küçük olması değil aynı zamanda $y'(x) - \bar{y}'(x)$ farkının da küçük olması göz önüne alınır. Burada öncelikle farz edelim ki (3.2) denklemi $y = y(x)$' de bir ekstremuma sahip olsun. $y = y(x)$ eğrisine yakın $y = \bar{y}(x)$ eğrisi ve bu eğrilerin bir parametreli eğriler ailesi

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\left(\bar{y}(x) - y(x)\right) \tag{3.3}$$

verilsin. $\alpha = 0$ için $y = y(x)$ eğrisine, $\alpha = 1$ için $y = \bar{y}(x)$ eğrisine sahip oluruz. Burada $\bar{y}(x) - y(x)$ farkının, δy olarak sembolize edilen, $y = y(x)$ fonksiyonunun varyasyonu olduğunu biliyoruz. Varyasyonel problemlerde δy varyasyonu, fonksiyonların ekstrem değerlerinin araştırılmasını içeren problemlerdeki Δx bağımsız değişkeninin artışına benzer bir rol oynar. $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$ varyasyonu da x' in bir fonksiyonudur ve diferensiyellenebilirdir. Buradan ayrıca,

$$\left.\begin{aligned} (\delta y)' &= \bar{y}'(x) - y'(x) = \delta y' \\ (\delta y)'' &= \bar{y}''(x) - y''(x) = \delta y'' \\ &\vdots \\ (\delta y)^{(k)} &= \bar{y}^{(k)}(x) - y^{(k)}(x) = \delta y^{(k)} \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

eşitliklerinden, varyasyonun türevinin, türevin varyasyonuna eşdeğer olduğunu söyleyebiliriz. Diğer yandan (3.3) ile verilen eğriler ailesini dikkate aldığımızda α ' nın farklı değerlerine karşılık ailenin farklı eğrileri elde edilmektedir. Bu nedenle $y(x,\alpha)$ ailesinin eğrileri üzerinde (3.2) fonksiyonelinin değerlerini düşündüğümüzde α ' nın bir fonksiyonu olan

$$J\left[y(x,\alpha)\right]=\varphi(\alpha) \tag{3.5}$$

fonksiyoneli elde edilir. Çünkü burada α parametresinin değeri $y=y(x,\alpha)$ ailesine ait eğriyi belirlerken diğer yandan $J\left[y(x,\alpha)\right]$ fonksiyonelinin değerini de belirlemektedir. $\alpha=0$ için $\varphi(\alpha)$ fonksiyonu bir ekstremuma sahiptir. Çünkü $\alpha=0$ için $y=y(x)$ eğrisi elde edilir ve yukarıda bu eğride bir ekstremum olduğunu varsaymıştık. Dolayısıyla

$$\varphi'(0)=0 \tag{3.6}$$

olur. Buradan,

$$\varphi(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1} F\left[x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)\right]dx \tag{3.7}$$

elde edilir ve

$$\varphi'(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x,\alpha)+F_{y'}\frac{\partial}{\partial\alpha}y'(x,\alpha)\right]dx \tag{3.8}$$

olur. (3.8) denkleminde

$$\left.\begin{aligned} F_y &= \frac{\partial}{\partial y} F\left[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\right] \\ F_{y'} &= \frac{\partial}{\partial y'} F\left[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\right] \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

ve ayrıca

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x,\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[y(x) + \alpha \delta y\right] = \delta y \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x,\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[y'(x) + \alpha \delta y'\right] = \delta y' \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

şeklindedir. Bu takdirde

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y\left(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\right)\delta y + F_{y'}\left(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\right)\delta y' \right] dx \tag{3.11}$$

ve buradan da

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y\left(x, y(x), y'(x)\right)\delta y + F_{y'}\left(x, y(x), y'(x)\right)\delta y' \right] dx \tag{3.12}$$

eşitliğini elde ederiz.

$\varphi'(0)$, δv tarafından ifade edilmiştir ve fonksiyonelin varyasyonu olarak adlandırılır. v fonksiyonelinin ekstremumu olması için zorunlu bir koşul $\delta v = 0$ olmasıdır.

$$J\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \tag{3.13}$$

fonksiyoneli için bu koşul sonucu

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \delta y + F_{y'} \delta y' \right] dx = 0 \tag{3.14}$$

formu elde edilir. $\delta y' = (\delta y)'$ olduğunu göz önüne alarak ikinci terime kısmi integrasyon uygulayarak

$$\delta v = \left[F_{y'} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx \tag{3.15}$$

eşitliğini elde ederiz. Fakat elemanter problemlerdeki bütün uygun eğriler sabit sınır koşullarından geçerken $\delta y\big|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0$ ve $\delta y\big|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0$ olduğu göz önüne alındığında

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx \tag{3.16}$$

olur. Bu yüzden bir ekstremum için zorunlu koşul

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0 \tag{3.17}$$

şeklini alır. Bu elde edilen koşulu basitleştirmek için aşağıdaki yardımcı teoremi kullanalım.

Varyasyonlar Analizinin Temel Yardımcı Teoremi: $\Phi(x)$, $[x_0, x_1]$ aralığındaki sürekli bir fonksiyon olmak üzere her sürekli $\eta(x)$ fonksiyonu için

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0 \tag{3.18}$$

ise bu takdirde aynı aralık üzerinde

$$\Phi(x) \equiv 0 \tag{3.19}$$

olur.

Yardımcı teorem ile (3.17) denkleminden $y = y(x)$ eğrisi üzerinde $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0$ ' dır. Yani $y = y(x)$,

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \tag{3.20}$$

ikinci mertebe diferensiyel denkleminin veya bunun genişletilmiş hali olan

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0 \tag{3.21}$$

diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. Bu denklem *Euler denklemi* olarak adlandırılır. Daha yüksek mertebeden türevler üzerine fonksiyonel bağımlılık için Elsgolts (1977) ve Gelfand ve Fomin (2000)' den yararlanılabilir.

3.2. Varyasyonel İterasyon Yöntemi

L ve N sırasıyla doğrusal ve doğrusal olmayan operatörler ve $g(t)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$L\left[u(t)\right] + N\left[u(t)\right] = g(t) \tag{3.22}$$

diferensiyel denklemini ele alalım.

Denklem (3.22) için yöntemin temel karakteri olan düzeltme fonksiyoneli olarak isimlendirilen ifade

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\xi)\left\{Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)\right\}d\xi, \tag{3.23}$$

şeklinde yazılır (He, 2000). $u_0(t)$ bulunması mümkün olan bilinmeyenler ile birlikte bir başlangıç yaklaşımı ya da aşikar fonksiyon, λ genel Lagrange çarpanı (Inokuti ve ark.,

1978), n indisi n. dereceden yaklaşım, $\tilde{u}_n$ ise $\delta\tilde{u}_n = 0$ anlamına gelen sınırlanmış bir varyasyon belirtir (Finlayson, 1972).

Bu yöntemin ilk adımı λ Lagrange çarpanının en iyi şekilde belirlenmesidir. Hatta bu çarpanın tam olarak ifade edildiği doğrusal problemlerde bir adımda dahi tam çözüme gidilebilir. Bu çarpanın seçimi oldukça esnektir. Kimi durumlarda Lagrange çarpanı problemin doğasına uygun şekilde seçilebildiği gibi problemin kendisine göre de belirlenebilir.

Bu çarpanın belirlenmesi için öncelikle (3.23) denklemine varyasyon uygulanmış aşağıdaki denklem göz önüne alınır.

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta\int_0^t \lambda(\xi)\{Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)\}\,d\xi, \tag{3.24}$$

Doğrusal olmayan veya örneğin; bir denklem sistemi içerisinde integral almayı imkânsız hale getirici terimler içeren problemlerde, bu çarpanın bulunmasını sağlamak için bu gibi terimler ihmal edilebilir. Bu şekilde oluşan varyasyonel eşitlikteki integral ifadelerinde ise kısmi integrasyon kullanılır. Yani,

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^t \lambda(\xi)\delta u_n'(\xi)\,d\xi = \lambda(\xi)\delta u_n(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=t} - \int_0^t \lambda'(\xi)\delta u_n(\xi)\,d\xi,\\
&\int_0^t \lambda(\xi)\delta u_n''(\xi)\,d\xi = \lambda(\xi)\delta u_n'(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=t} - \lambda'(\xi)\delta u_n(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=t} + \int_0^t \lambda''(\xi)\delta u_n(\xi)\,d\xi,\\
&\int_0^t \lambda(\xi)\delta u_n'''(\xi)\,d\xi = \lambda(\xi)\delta u_n''(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=t} + \lambda''(\xi)\delta u_n(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=t} - \lambda'(\xi)\delta u_n'(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=t}\\
&\qquad\qquad - \int_0^t \lambda'''(\xi)\delta u_n(\xi)\,d\xi,\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

şeklinde, denklemde ihtiyaca göre devam eden kısmi integrasyonlar sonucu Lagrange çarpanı bulunabilir.

Lagrange çarpanı belirlendikten sonra bu çarpan (3.23) denkleminde yerine yazılır ve u çözümünün u_{n+1}, $n \geq 0$ ardışık yaklaşımları herhangi bir u_0 başlangıç fonksiyonu kullanılarak bulunabilir. Sonuçta, çözüm

$$u(t)=\lim_{n\to\infty}u_n(t) \tag{3.26}$$

olur. Diğer bir ifadeyle (3.23) düzeltme fonksiyoneli çeşitli yaklaşımlar verir ve bu yüzden, varsa, tam çözüm ardışık yaklaşımların limitinden elde edilebilir (Wazwaz, 2009).

Burada dikkat çeken bir noktada başlangıç yaklaşımı u_0'ın serbest seçimidir. Bu seçim her ne kadar serbest dense de başlangıç değerlerine uygun olarak belirlenmesi yaklaşık çözümün daha iyi olmasını sağlamaktadır. Sonuçta, yaklaşık çözüm yöntemleri genel olarak Taylor seri tabanlı yöntemler olduğundan uygun başlangıç verilerine sahip problemlerde bu seri açılımını göz önüne alarak başlangıç seçimini yapmamız daha yerinde olacaktır.

O halde öncelikle, Lagrange çarpanının yukarıda bahsedildiği gibi problemin doğasına uygun veya verilen probleme uygun seçilmesini ve bunun yanı sıra başlangıç yaklaşımının seçiminde bahsettiğimiz düşüncenin önemini vurgulaması açısından aşağıdaki,

$$\begin{cases} y'=-e^{t}+3y-e^{-t}y^{2}, \\ y(0)=2, \end{cases} \tag{3.27}$$

Riccati diferensiyel denklemini ele alalım (Sezer, 1990). Bilindiği üzere bilinen herhangi bir yöntemle bu denklemin genel çözümünü bulmak mümkün değildir. Ancak en az bir $y_{ö}$ özel çözümü bilinirse (3.27) denklemi, $y(t)=y_{ö}(t)+z(t)$ dönüşümü ile Bernoulli denklemine, $y(t)=y_{ö}(t)+\dfrac{1}{u(t)}$ dönüşümü ile doğrusal denkleme dönüşür. (3.27) denklemi için $y_{ö}(t)=e^{t}$ olduğuna göre genel çözüm $y(t)=e^{t}+\dfrac{e^{t}}{t+c}$ ve başlangıç şartına uygun tek çözüm

$$y(t)=e^{t}+\frac{e^{t}}{t+1} \tag{3.28}$$

olarak bulunur. Bu örnek problemi varyasyonel iterasyon yöntemi ile ele alarak, Lagrange çarpanı ve başlangıç yaklaşımı seçimindeki tercihlerin bizi tam çözüme ne kadar yaklaştırdığına bakacağız.

Öncelikle (3.27) problemi için (3.23) düzeltme fonksiyonelini yazalım.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\xi)\left(y_n'(\xi) + e^{\xi} - 3y_n(\xi) + e^{-\xi}\tilde{y}_n^2(\xi)\right)d\xi \tag{3.29}$$

Şimdi (3.29) denkleminin, (3.24) denklemindeki gibi, varyasyonel denklemini yazalım.

$$\left.\begin{aligned}
\delta y_{n+1}(t) &= \delta y_n(t) + \delta\int_0^t \lambda(\xi)\left(y_n'(\xi) + e^{\xi} - 3y_n(\xi) + e^{-\xi}\tilde{y}_n^2(\xi)\right)d\xi \\
\delta y_{n+1}(t) &= \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda(\xi)\delta\left(y_n'(\xi) + e^{\xi} - 3y_n(\xi) + e^{-\xi}\tilde{y}_n^2(\xi)\right)d\xi \\
\delta y_{n+1}(t) &= \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda(\xi)\left(\delta y_n'(\xi) + e^{\xi} - 3\delta y_n(\xi) + e^{-\xi}\delta\tilde{y}_n^2(\xi)\right)d\xi
\end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

Son eşitlikte doğrusal olmayan terim için $\tilde{y}_n$ kısıtlanmış varyasyondur ve $\delta\tilde{y}_n = 0$ alınır. Dolayısıyla

$$\left.\begin{aligned}
\delta y_{n+1}(t) &= \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda(\xi)\left(\delta y_n'(\xi) - 3\delta y_n(\xi)\right)d\xi = 0 \\
\delta y_{n+1}(t) &= \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda(\xi)\delta y_n'(\xi)\,d\xi - 3\int_0^t \lambda(\xi)\delta y_n(\xi)\,d\xi = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

eşitliği elde edilir. Sağ tarafta ilk integral için kısmi integrasyon kuralı uygulanırsa

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \lambda(\xi)\delta y_n(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=t} - \int_0^t \lambda'(\xi)\delta y_n(\xi)\,d\xi - 3\int_0^t \lambda(\xi)\delta y_n(\xi)\,d\xi = 0 \tag{3.32}$$

elde edilir. Bu durumda (3.32) eşitliğinden Euler-Lagrange denklemi ve sabit koşul

$$\left.\begin{aligned} &-\lambda'(\xi)-3\lambda(\xi)=0, \\ &1+\lambda(\xi)\big|_{\xi=t}=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

şeklinde belirlenir. (3.33) denklemlerinin çözümünden (3.27) problemi için Lagrange çarpanı,

$$\lambda(\xi)=-e^{3(t-\xi)} \tag{3.34}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak (3.27) problemi için varyasyonel iterasyon formülü, (3.34) ifadesinin (3.29) ifadesinde yerine yazılması ile

$$y_{n+1}(t)=y_n(t)-\int_0^t e^{3(t-\xi)}\left(y_n'(\xi)+e^{\xi}-3y_n(\xi)+e^{-\xi}y_n^2(\xi)\right)d\xi \tag{3.35}$$

şeklinde elde edilir.

Başlangıç yaklaşımının seçiminin yöntemdeki etkinliği ve bu doğrultuda yukarıdaki düşüncenin önemini vurgulamak açısından (3.35) iterasyonunda üç farklı başlangıç yaklaşımı ele alacağız. Genel olarak, ele aldığımız yaklaşımların başlangıç koşullarını sağlamasına dikkat etmeliyiz. Bunlardan ilki bu problemde seçebileceğimiz tek başlangıç yaklaşımı olan

$$y_0^{[1]}(0)=2 \tag{3.36}$$

başlangıç değerinin kendisi, diğer ikisi ise yine yukarıda bahsettiğimiz şekilde Taylor açılımını göz önüne alarak ancak bu problemde sahip olmadığımız $y_{\ddot{o}}'(0)=y_{\ddot{o}}''(0)=1$ ifadelerini kullanarak oluşturduğumuz

$$y_0^{[2]}(0)=y(0)+y'(0)t=2+t \tag{3.37}$$

$$y_0^{[3]}(0)=y(0)+y'(0)t+\frac{y''(0)}{2}t^2=2+t+\frac{t^2}{2} \tag{3.38}$$

başlangıç yaklaşımları olacaktır.

(3.36) yaklaşımı ile (3.35) iterasyonunun bir adım çalıştırılması sonucu yaklaşık çözüm

$$y^{[1]}(t)=\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{t}+e^{-t}, \tag{3.39}$$

(3.37) yaklaşımı ile (3.35) iterasyonunun bir adım çalıştırılması sonucu yaklaşık çözüm

$$y^{[2]}(t)=\frac{7}{32}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{41}{32}e^{-t}+\frac{9}{8}e^{-t}t+\frac{1}{4}e^{-t}t^{2}, \tag{3.40}$$

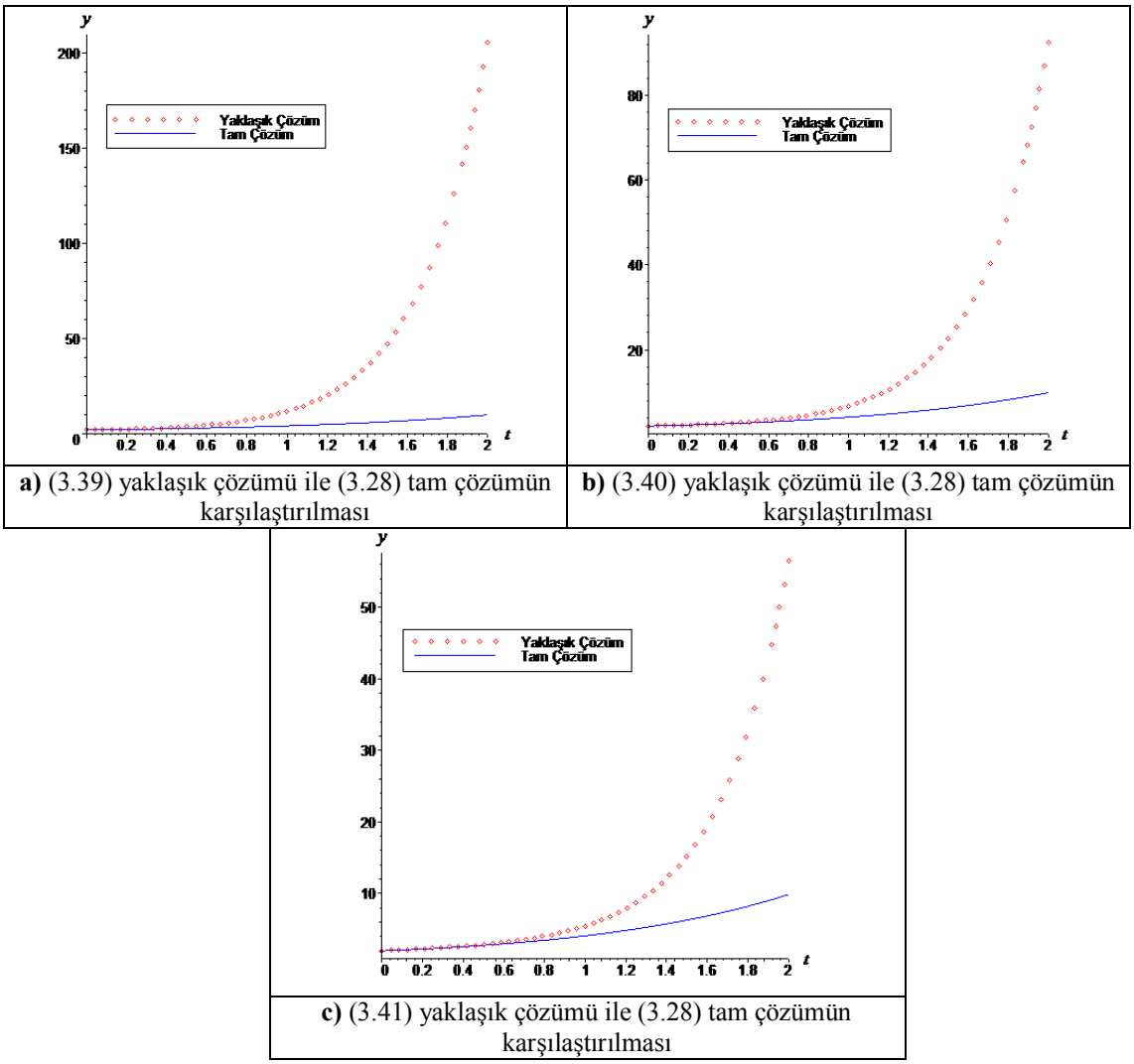
(3.38) yaklaşımı ile (3.35) iterasyonunun bir adım çalıştırılması sonucu yaklaşık çözüm

$$y^{[3]}(t)=\frac{65}{512}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{703}{512}e^{-t}+\frac{191}{128}e^{-t}t+\frac{63}{64}e^{-t}t^{2}+\frac{5}{16}e^{-t}t^{3}+\frac{1}{16}e^{-t}t^{4}, \tag{3.41}$$

olarak elde edilir. (3.34) Lagrange yaklaşımı ile (3.36) – (3.38) başlangıç yaklaşımlarına karşılık gelen (3.39) – (3.41) yaklaşık çözümlerinin (3.28) tam çözümüne olan yakınlığı, Çizelge 3.1. ve Şekil 3.1. ile gösterilmiştir.

Çizelge 3.1. (3.39) – (3.41) yaklaşık çözümlerinin (3.28) tam çözümü ile sayısal olarak karşılaştırılması

t	$y^{[1]}(t)$	$y^{[2]}(t)$	$y^{[3]}(t)$	y(t)
0	2	2	2	2
0.2	2.340491532	2.250690370	2.244886940	2.239238389
0.4	3.076290857	2.659492307	2.607944010	2.557413768
0.6	4.484694768	3.357425593	3.159958354	2.960943050
0.8	7.073687618	4.576081734	4.032006037	3.461952556
1.0	11.76978881	6.730031881	5.463209529	4.077422742
1.2	20.26036989	10.56686943	7.887820791	4.829260977
1.4	35.61736246	17.44040999	12.09382660	5.744866621
1.6	63.43362148	29.80822746	19.51178833	6.858044897
1.8	113.8933307	52.13788882	32.74091573	8.210235843
2.0	205.5442601	92.55781463	56.50734319	9.852074796



a) (3.39) yaklaşık çözümü ile (3.28) tam çözümün karşılaştırılması

b) (3.40) yaklaşık çözümü ile (3.28) tam çözümün karşılaştırılması

c) (3.41) yaklaşık çözümü ile (3.28) tam çözümün karşılaştırılması

Şekil 3.1. (3.39) – (3.41) yaklaşık çözümlerinin (3.28) tam çözümü ile şekil yönünden karşılaştırılması

Şimdi yukarıda yapıldığı gibi doğrudan probleme göre Lagrange çarpanı aramak yerine problemin doğasına uygun Lagrange çarpanı bularak, yine aynı (3.36) – (3.38) başlangıç yaklaşımları ile elde edilen yaklaşık çözümleri karşılaştıralım. Riccati diferensiyel denkleminin genel formunu,

$$\begin{cases} y'(t) = p(t) + q(t)y(t) + r(t)y^2(t), & 0 \le t \le T \\ y(0) = \alpha \end{cases} \tag{3.42}$$

şeklinde alalım. (3.42) denklemi için (3.23) ile belirtilen düzeltme fonksiyonelini

$$y_{n+1}(t)=y_n(t)+\int_0^t \lambda(\xi)\Big(y_n'(\xi)-p(\xi)-q(\xi)\tilde{y}(\xi)-r(\xi)\tilde{y}_n^2(\xi)\Big)d\xi \tag{3.43}$$

şeklinde yazarız. Yukarıda yapılanlara benzer olarak, (3.43) denkleminin varyasyonel denklemi

$$\delta y_{n+1}(t)=\delta y_n(t)+\int_0^t \lambda(\xi)\Big(\delta y_n'(\xi)-p(\xi)-q(\xi)\delta\tilde{y}_n(\xi)-r(\xi)\delta\tilde{y}_n^2(\xi)\Big)d\xi \tag{3.44}$$

olarak yazılır. $\tilde{y}_n$ kısıtlanmış varyasyon olduğundan $\delta\tilde{y}_n=0$ alınır. Dolayısıyla

$$\delta y_{n+1}(t)=\delta y_n(t)+\int_0^t \lambda(\xi)\delta y_n'(\xi)\,d\xi=0 \tag{3.45}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıda yapılanlara benzer şekilde, eşitliğin sağ yanındaki integrale kısmi integrasyon kuralı uygulanırsa,

$$\delta y_{n+1}(t)=\delta y_n(t)+\lambda(\xi)\delta y_n(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=t}-\int_0^t \lambda'(\xi)\delta y_n(\xi)\,d\xi=0 \tag{3.46}$$

eşitliği elde edilir. Buradan Euler-Lagrange denklemi ve sabit koşul

$$\left.\begin{aligned}&\lambda'(\xi)=0,\\&1+\lambda(\xi)\big|_{\xi=t}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.47}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla Lagrange çarpanı

$$\lambda(\xi)=-1 \tag{3.48}$$

olarak belirlenir. Bu durumda varyasyonel iterasyon formülü (3.43) denkleminden

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \int_0^t \left(y_n'(\xi) - p(\xi) - q(\xi) y(\xi) - r(\xi) y_n^2(\xi) \right) d\xi \tag{3.49}$$

elde edilir. Bu genel ifadeyi (3.27) problemine uyarlarsak

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \int_0^t \left(y_n'(\xi) + e^{\xi} - 3y_n(\xi) + e^{-\xi} y_n^2(\xi) \right) d\xi \tag{3.50}$$

iterasyon formülü elde edilir. (3.50) iterasyonunu (3.36) – (3.38) başlangıç yaklaşımları ile sadece bir kez çalıştırdığımızda sırasıyla

$$y^{[1]}(t) = -1 + 6t - e^t + 4e^{-t}, \tag{3.51}$$

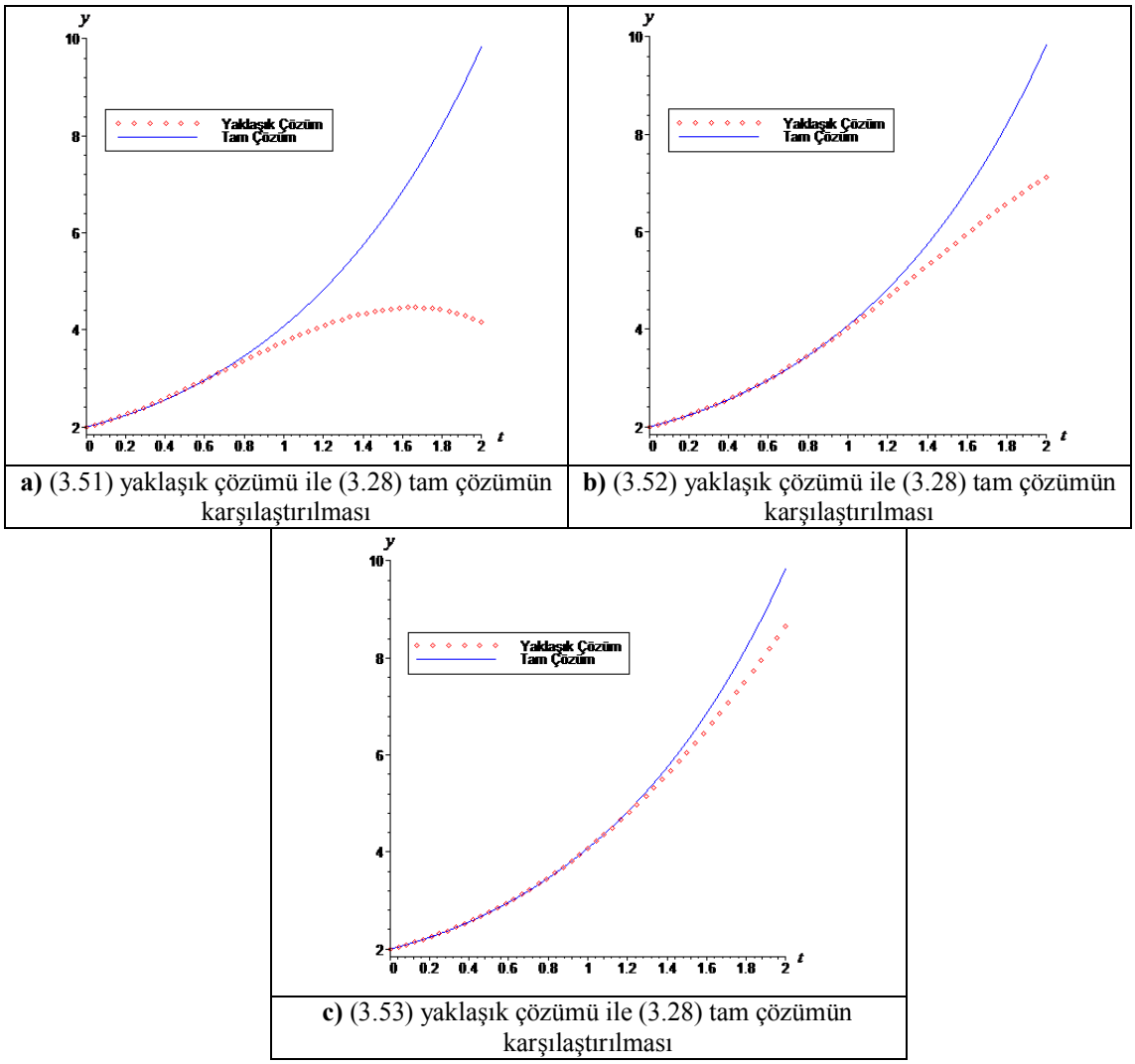
$$y^{[2]}(t) = -7 + 6t - e^t + \frac{3}{2}t^2 + 10e^{-t} + 6e^{-t}t + e^{-t}t^2, \tag{3.52}$$

$$y^{[3]}(t) = -23 + 6t + \frac{3}{2}t^2 - e^t + \frac{1}{2}t^3 + 26e^{-t} + 22e^{-t}t + 9e^{-t}t^2 + 2e^{-t}t^3 + \frac{1}{4}e^{-t}t^4 \tag{3.53}$$

yaklaşık çözümleri elde edilir. Benzer şekilde, (3.48) Lagrange çarpanı ile (3.36) – (3.38) başlangıç yaklaşımlarına karşılık gelen (3.51) – (3.53) yaklaşık çözümlerinin (3.28) tam çözümüne olan yakınlığı, Çizelge 3.2. ve Şekil 3.2. ile gösterilmiştir.

Çizelge 3.2. (3.51) – (3.53) yaklaşık çözümlerinin (3.28) tam çözümü ile sayısal olarak karşılaştırılması

t	$y^{[1]}(t)$	$y^{[2]}(t)$	$y^{[3]}(t)$	$y(t)$
0	2	2	2	2
0.2	2.253520254	2.241130907	2.24018239	2.239238389
0.4	2.589455486	2.567395080	2.56266478	2.557413768
0.6	2.973127744	2.979291640	2.97231516	2.960943050
0.8	3.371774928	3.472098278	3.47546088	3.461952556
1.0	3.753235937	4.035668672	4.07857506	4.077422742
1.2	4.084659925	4.654143187	4.78700305	4.829260977
1.4	4.331187889	5.305514218	5.60363388	5.744866621
1.6	4.454553648	5.960994415	6.52745379	6.858044897
1.8	4.411548089	6.584137808	7.55193182	8.210235843
2.0	4.152285034	7.129661264	8.663189581	9.852074796



a) (3.51) yaklaşık çözümü ile (3.28) tam çözümün karşılaştırılması

b) (3.52) yaklaşık çözümü ile (3.28) tam çözümün karşılaştırılması

c) (3.53) yaklaşık çözümü ile (3.28) tam çözümün karşılaştırılması

Şekil 3.2. (3.51) – (3.53) yaklaşık çözümlerinin (3.28) tam çözümü ile şekil yönünden karşılaştırılması

Sonuç olarak Çizelge 3.1. ve Çizelge 3.2. ile sayısal olarak ve Şekil 3.1. ve Şekil 3.2. ile şekil yönünden yapılan karşılaştırmada, Lagrange çarpanının seçiminin tam çözüme yaklaşımda oldukça etkili olduğunu görmekteyiz. Çizelge ve şekilleri kendi içerisinde değerlendirdiğimizde ise başlangıç yaklaşımının seçiminin de tam çözüme yaklaşımda etkisini gözlemlemekteyiz.

Şimdi bir sonraki bölümde kullanılacak olan iki kavrama daha değinelim.

3.3. 4. Mertebe Runge-Kutta Yönteminin Atış Yöntemi ile Birlikte Kullanılması

Genel olarak atış yöntemi sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan bir yaklaşımdır. Bu yaklaşımla çözüm yapılırken sınır değer problemi başlangıç değer problemlerine indirgenir ve literatürde var olan çeşitli sayısal yöntemler kullanılır.

İndirgeme işlemi sonucu elde edilen başlangıç değer sisteminde eksik kalan başlangıç değeri keyfi olarak seçilerek edilerek bu seçim ile hedeflenen sınır değeri tutturulmaya çalışılır. Yani bu yaklaşımda bir bakıma en uygun yerden yapılan atışla sayısal işlemler sonucu oluşan noktalardan geçerek hedefin vurulması mantığı vardır.

Burada konunun ayrıntısına girmeden dördüncü mertebe Runge-Kutta yöntemi kullanılarak bir sınır değer probleminin, atış yöntemi yaklaşımı ile çözümünün nasıl yapılabileceğini görelim. Bununla ilgili C dilinde yazdığımız bir programı da paylaşalım. Literatürde bulunan aşağıdaki

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\left(1-\frac{t}{5}\right)y=t \tag{3.54}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(1)=2, \\ y(3)=-1 \end{array}\right\} \tag{3.55}$$

sınır değer problemini ele alalım. (3.54) denklemini $y(t)=u_1(t)$ dönüşümü ile

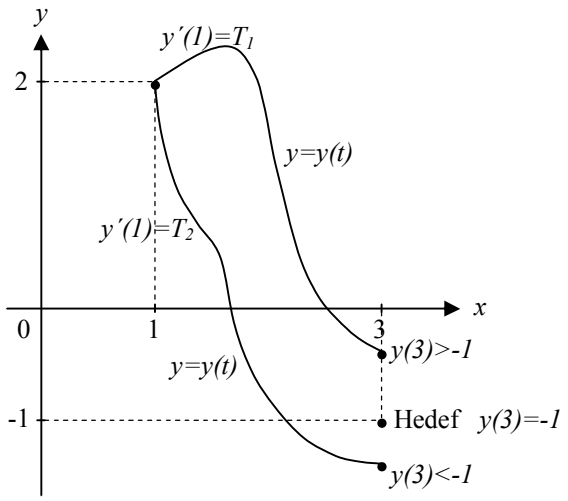
$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt}=u_2, \\ \dfrac{du_2}{dt}=\left(1-\dfrac{t}{5}\right)u_1+t \end{cases} \tag{3.56}$$

sistemine indirgediğimizde başlangıç koşulları için $y(1)=u_1(1)=2$ olurken $u_2(1)=u_1'(1)=y'(1)$ değeri bilinmemektedir. İşte burada $y'(1)$ değeri için keyfi bir değer alarak dördüncü mertebe Runge-Kutta yöntemi ile $y(3)=-1$ değerine ulaşmaya çalışırız. Eğer bu değere istenilen hata miktarı ile ulaşamazsak atadığımız keyfi değeri değiştirerek işlemleri tekrarlarız. Şekil 3.3. ile yapılmaya çalışılan işlem açıklanmaktadır.

Burada yaklaşık çözümü dördüncü mertebe Runge-Kutta yönteminin

$$\left.\begin{array}{l} y'(t)=f(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{array}\right\} \tag{3.57}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ k_1 &= hf\left(t_n, y_n\right) \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf\left(t_n + h, y_n + k_3\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.58}$$



Şekil 3.3. (3.54) sınır değer probleminin çözümü için dördüncü mertebe Runge-Kutta yönteminin atış yöntemi ile beraber kullanımı

formülleri aracılığıyla yapacağız. (3.54) denkleminden (3.56) şeklinde birinci mertebe bir sisteme sahip olduğumuz için (3.56) sistemine uygun dördüncü mertebe Runge-Kutta formüllerimiz başlangıç koşulları ile beraber

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= f\left(t, u_2\right) \\ u_2'(t) &= g\left(t, u_1\right) \\ u_0^{(1)}(1) &= 2, \\ u_0^{(2)}(1) &= T \\ u_{n+1}^{(1)} &= u_n^{(1)} + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ u_{n+1}^{(2)} &= u_n^{(2)} + \frac{1}{6}\left(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.59}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(t_n, u_n^{(1)}\right) \\
l_1 &= hg\left(t_n, u_n^{(2)}\right) \\
k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n^{(1)} + \frac{k_1}{2}\right) \\
l_2 &= hg\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n^{(2)} + \frac{l_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n^{(1)} + \frac{k_2}{2}\right) \\
l_3 &= hg\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n^{(2)} + \frac{l_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf\left(t_n + h, u_n^{(1)} + k_3\right) \\
l_4 &= hg\left(t_n + h, u_n^{(2)} + l_3\right)
\end{aligned}
\right\}
$$

şeklinde olacaktır.

Burada $h = 0.1$ adım genişliği ile $y(3) = u_1(3) = -1$ hedefini tutturmak amacıyla ilk olarak $T = 0$ değeri ile başlarsak aşağıdaki Runge-Kutta yöntemine göre yazdığımız C kodunu çalıştırdığımız zaman

```
#include"stdio.h"
#include"conio.h"
#include"math.h"
float RK4(float,float,float,float,int);
    float f(float a1,float b1,float c1){
    float d1;
    d1=c1;
    return d1;
    }
    float g(float a2,float b2,float c2){
    float d2;
    d2=(1-a2/5)*b2+a2;
    return d2;
    }
main(){
     float h=0,tilk=0,tson=0,y0=2,deger=0,u1=0;
     float sonuc1=0;
     int adimsayisi=0;
     printf("t baslangic noktasini giriniz... ---> tilk = ");
     scanf("%f",&tilk);
     printf("t son noktayi giriniz ---> tson = ");
     scanf("%f",&tson);
     printf("Adim genisligini giriniz. ---> h = ");
     scanf("%f",&h);
     adimsayisi=(int)((tson-tilk)/h);
```

```
    printf("\nAdim Sayisi = %d",adimsayisi);
    printf("\nBas. nok. turev degeri icin bir deger atayiniz.\nDeger = ");
    scanf("%f",&deger);
    sonuc1=RK4(tilk,y0,h,deger,adimsayisi);
getch();}
float RK4(float t0,float u1,float adim,float u2,int adsa){
    float k1=0,k2=0,k3=0,k4=0;
    float l1=0,l2=0,l3=0,l4=0;
    int i=0;
printf("\ny(%.3f) = %.9f",t0,u1);
printf("\ny1(%.3f) = %.9f\n",t0,u2);
for(i=0;i<=adsa;i++){
k1=adim*f(t0,u1,u2);
l1=adim*g(t0,u1,u2);
k2=adim*f(t0+adim*1/2,u1+k1/2,u2+l1/2);
l2=adim*g(t0+adim*1/2,u1+k1/2,u2+l1/2);
k3=adim*f(t0+adim*1/2,u1+k2/2,u2+l2/2);
l3=adim*g(t0+adim*1/2,u1+k2/2,u2+l2/2);
k4=adim*f(t0+adim,u1+k3,u2+l3);
l4=adim*g(t0+adim,u1+k3,u2+l3);
u1=u1+(1/6.0)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
u2=u2+(1/6.0)*(l1+2*l2+2*l3+l4);
printf("\ny(%.3f) = %.9f",t0+adim,u1);
printf("\ny1.turev(%.3f) = %.9f\n",t0+adim,u2);
t0=(float)(t0+adim);}
return u1;}
```

$y(3)=9.139274597$ noktasına geliriz ki bu değer hedefimiz olan $y(3)=-1$ noktasına oldukça uzaktır. Çok büyük bir değere ulaşılması nedeniyle seçtiğimiz değeri bir bakıma atış eğimimizi epeyce düşürmemiz gerekir. $T=-5$ seçelim. Yine yukarıdaki kodu çalıştırdığımız zaman $y(3)=-5.366184711$ değerine ulaşırız ki bu da $y(3)=-1$ noktasının çok altında kaldı. O halde $-5<T<0$ arasında seçimimizi yenilemeliyiz.

Bu şekilde sürekli yeni değer atama ve bu işlemleri yineleyerek sonuca ulaşmak çok ideal bir durum olmadığından şu yolu takip etmek ve buna dönük bir program yazmak daha uygun olacaktır. Öncelikle T_1 ve T_2 gibi iki seçim yaparız. Hesaplama sonucunda seçimimize karşılık gelen $y(3)$ değeri $y(3)=-1$ değerine yakınsa yarılama yönteminden elde edilen yeni değerle yakın gelen atadığımız değer arasında hesaplamayı yineleriz. Daha sonra aynı değerlendirmeler bir döngü yardımıyla tekrar edilerek, $y(3)=-1$ değerine istenilen hassasiyette yaklaşıldığında işlemi durdururuz. İstenilen hassasiyette hedefe yaklaştığımız değer, bizim için ideal sayı olur. Aşağıdaki C kodu bu düşünceye göre yazılmıştır.

```
#include"stdio.h"
#include"conio.h"
#include"math.h"
float RK4(float,float,float,float,int);
    float f(float a1,float b1,float c1){
    float d1;
    d1=c1;
    return d1;
    }
    float g(float a2,float b2,float c2){
    float d2;
    d2=(1-a2/5)*b2+a2;
    return d2;
    }
main(){
     float h=0,tilk=0,tson=0,y0=2,hedef=-1,deger1=0, deger2=0,yarilama=0,u1=0;
     float sonuc1=0,sonuc2=0,durum=0;
     int adimsayisi=0;
     printf("t baslangic noktasini giriniz... ---> tilk = ");
     scanf("%f",&tilk);
     printf("t son noktayi giriniz ---> tson = ");
     scanf("%f",&tson);
     printf("Adim genisligini giriniz. ---> h = ");
     scanf("%f",&h);
     adimsayisi=(int)((tson-tilk)/h);
     printf("\nAdim Sayisi = %d",adimsayisi);
     printf("\nBas. nok. turev degeri icin iki deger atayiniz.\nDeger 1 = ");
     scanf("%f",& deger1);
     printf("Deger 2 = ");
     scanf("%f",&deger2);
aa:
sonuc1=RK4(tilk,y0,h,deger1,adimsayisi);
  if ((float)fabs(sonuc1-hedef)<pow(10,-2)){
  printf("Ideal sayi = %.9f",deger1);goto bb;}
sonuc2=RK4(tilk,y0,h,deger2,adimsayisi);
  if ((float)fabs(sonuc2-hedef)<pow(10,-2)){
  printf("Ideal sayi = %.9f",deger2);goto bb;}
  else
  if((float)fabs(sonuc1-hedef)<fabs(sonuc2-hedef)){
  yarilama=(deger1+deger2)/2.0;
  deger2=yarilama;goto aa;}
  else{
  yarilama=(deger1+deger2)/2.0;
  deger1=yarilama;goto aa;}
bb:
getch();}
float RK4(float t0,float u1,float adim,float u2,int adsa){
     float k1=0,k2=0,k3=0,k4=0;
     float l1=0,l2=0,l3=0,l4=0;
     int i=0;
printf("\ny(%.3f) = %.9f",t0,u1);
printf("\ny1(%.3f) = %.9f\n",t0,u2);
for(i=0;i<=adsa;i++){
k1=adim*f(t0,u1,u2);
l1=adim*g(t0,u1,u2);
k2=adim*f(t0+adim*1/2,u1+k1/2,u2+l1/2);
l2=adim*g(t0+adim*1/2,u1+k1/2,u2+l1/2);
```

```
k3=adim*f(t0+adim*1/2,u1+k2/2,u2+l2/2);
l3=adim*g(t0+adim*1/2,u1+k2/2,u2+l2/2);
k4=adim*f(t0+adim,u1+k3,u2+l3);
l4=adim*g(t0+adim,u1+k3,u2+l3);
u1=u1+(1/6.0)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
u2=u2+(1/6.0)*(l1+2*l2+2*l3+l4);
printf("\ny(%.3f) = %.9f",t0+adim,u1);
printf("\ny1(%.3f) = %.9f\n",t0+adim,u2);
t0=(float)(t0+adim);}
return u1;}
```

$h=0.1$ adım genişliğinde, $y(3)=-1$ noktasına $\Delta=10^{-2}$' lik bir mutlak hata ile yaklaşmayı göz önüne alıp, oldukça geniş bir değer aralığı olarak $T_1=-1000000$ ve $T_2=1000000$ değerlerini girdiğimizde, $u_1(1)=y'(1)=-3.494322300$ olarak elde ederiz. Sonuç olarak bu ideal başlangıç değeri ile Runge-Kutta yöntemine göre her bir adımda elde edeceğimiz sayısal değerler problemin yaklaşık sayısal çözümü olacaktır.

3.4. Padé Yaklaşımı

Bu kısımda ilk olarak, fonksiyonlar için Padé yaklaşımlarının oluşturulmasını, daha sonra ise sınırsız bir bölgede tanımlanmış sınır değer problemlerinde Padé yaklaşımlarının uygulanmasına değineceğiz.

3.4.1. Fonksiyonlar için Padé yaklaşımı

Padé yaklaşımı bir fonksiyonu iki polinomun oranı ile temsil etmek için kullanılan bir yöntemdir (Wazwaz, 2002). Pay ve payda polinomlarının katsayıları, fonksiyonun Taylor açılımındaki katsayılar kullanılarak belirlenir. Padé rasyonel yaklaşımları polinomlara göre daha etkili olduğu için sayısal çözümleme ve akışkanlar mekaniğinde geniş bir şekilde kullanılmıştır.

Bir $f(x)$ fonksiyonu yerine yakınsaklık yarıçapı içerisindeki x değerleri için Taylor serileri sıklıkla kullanılmaktadır. Ancak elde edilen Taylor serisi sınırlı sayıda terimden oluşacağından x' in büyük değerleri için hatta uygulamalarda karşılaşıldığı gibi $x\to\infty$ için hatalı sonuçlar verecektir. Padé yaklaşımı bu durumlarda çalışılan probleme uygun, kuvvet serileri ile uyumlu bir ifade ortaya koymaktadır (Wazwaz, 2002). Bu tür bir yaklaşıma özellikle sınırsız bir bölgede tanımlanmış sınır değer problemlerinde ihtiyaç duyulmaktadır.

Çeşitli şekillerde ifade edilmekle beraber, $P_{[m/n]}$ sembolüyle göstereceğimiz Padé yaklaşımı

$$P_{[m/n]} = \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n} \tag{3.60}$$

şeklinde tanımlanır. $b_0 = 1$ kabul edilmektedir. Eğer $m = n$ şeklinde seçilirse $P_{[n/n]}$ yaklaşımı köşegenel yaklaşım olarak isimlendirilir. Pay kısmında $m+1$ ve payda kısmında n bilinmeyenden dolayı toplam $m+n+1$ bilinmeyen vardır. Buradan $f(x)$'e ait kuvvet serisinin $1, x, x^2, \ldots, x^{m+n}$ terimlerini içermesi gerektiği söylenebilir. Yani

$$f(x) \cong T(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k \tag{3.61}$$

şeklinde olmalıdır. Bu tez çalışmasında köşegenel yaklaşım dikkate alınmıştır. O halde $m = n$ için

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{2n} x^{2n} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = c_0 + (c_1 + b_1 c_0) x + (c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0) x^2 \\ + (c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0) x^3 + \ldots \end{aligned} \tag{3.63}$$

eşitliği yazılabilir. Katsayıların eşitliğinden

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ a_3 &= c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0 \\ &\vdots \\ a_n &= c_n + \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k} \end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

şeklinde bir denklem sistemi elde edilir (Wazwaz, 2002). Bu denklem sisteminin çözümü ile istenilen katsayılar bulunur. Bir örnek olması açısından $f(x)=\ln(x+1)$ fonksiyonuna ait $f_{[2/2]}(x)$ ve $f_{[3/3]}(x)$ yaklaşımlarını yapalım. $\ln(x+1)$ fonksiyonunun Taylor açılımını ve aranan Padé yaklaşımını yazarsak, (3.64) eşitliklerinden

$$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+O(x^7) \tag{3.65}$$

$$f_{[2/2]}(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x+b_2x^2}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned} a_0&=0\\ a_1&=1+b_1.0\\ a_2&=-\frac{1}{2}+b_1.1+b_2.0\\ 0&=\frac{1}{3}+b_1.\left(-\frac{1}{2}\right)+b_2.1\\ 0&=-\frac{1}{4}+b_1.\frac{1}{3}+b_2.\left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.67}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemin çözümünden $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ b_1=1$ $b_2=\frac{1}{6}$ katsayıları bulunur. Bu katsayılar ile

$$f_{[2/2]}(x)=\frac{x+\frac{x^2}{2}}{1+x+\frac{x^2}{6}} \tag{3.68}$$

yaklaşımını elde ederiz. Benzer şekilde

$$f_{[3/3]}(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6} \tag{3.69}$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= 1 + b_1.0 \\
a_2 &= -\frac{1}{2} + b_1.1 + b_2.0 \\
a_3 &= \frac{1}{3} + b_1.\left(-\frac{1}{2}\right) + b_2.1 + b_3.0 \\
0 &= -\frac{1}{4} + b_1.\frac{1}{3} + b_2.\left(-\frac{1}{2}\right) + b_3.1 \\
0 &= \frac{1}{5} + b_1.\left(-\frac{1}{4}\right) + b_2.\frac{1}{3} + b_3.\left(-\frac{1}{2}\right) \\
0 &= -\frac{1}{6} + b_1.\frac{1}{5} + b_2.\left(-\frac{1}{4}\right) + b_3.\frac{1}{3}
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

denklem sistemi ve bu denklem sisteminin çözümünden de $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,$

$a_3 = \frac{11}{60},\ b_1 = \frac{3}{2},\ b_2 = \frac{3}{5},\ b_3 = \frac{1}{20}$ katsayıları elde edilir. Bu katsayılardan da

$$
f_{[3/3]}(x) = \frac{x + x^2 + \frac{11}{60}x^3}{1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{20}x^3} \tag{3.71}
$$

yaklaşımı bulunur.

Çizelge 3.3.' de $f(x) = \ln(x+1)$ fonksiyonuna ait $f_{[2/2]}(x)$ ve $f_{[3/3]}(x)$ Padé yaklaşımları ile Taylor seri açılımının bazı x noktalarındaki değerleri gösterilmiştir. Padé yaklaşımlarının, özellikle serinin açıldığı noktadan uzaklaştıkça gerçek değere olan yakınlığı dikkat çekicidir.

Çizelge 3.3. $f(x) = \ln(x+1)$ fonksiyonuna ait Padé yaklaşımları ve Taylor serisinin sayısal sonuçları

x	$\ln(x+1)$	$f_{[2/2]}(x)$	$f_{[3/3]}(x)$	Taylor serisi
0	0	0	0	0
0.2	0.182321557	0.182320441	0.182321555	0.182320000
0.4	0.336472237	0.336448597	0.336472065	0.336298666
0.6	0.470003629	0.469879518	0.470001881	0.467376000
0.8	0.587786665	0.587412586	0.587778460	0.570112000
1.0	0.693147181	0.692307691	0.693121692	0.616666666

3.4.2. Sınır değer problemlerinde Padé yaklaşımı

Kuvvet serilerinin $x \to \infty$ gibi sınırsız olduğu durumlarda hatalı sonuçlar vereceğinden söz etmiştik. Bunun yanı sıra Boyd (1997)' un da belirttiği üzere kuvvet serilerinin sınır değer problemlerinde de çok kullanışlı olmadığı bilinmektedir (Wazwaz, 2002). Bu nedenle burada, bir sınır değer probleminde $x \to \infty$ iken $y(x) = 0$ gibi bir şart olması halinde herhangi bir çözüm yöntemi ile oluşturduğumuz seri çözüme (3.60) eşitliğini köşegenel yaklaşımı dikkate alarak uygularsak, yukarıdaki sınır şartına

$$\lim_{x \to \infty} y_{[n/n]}(x) = \frac{a_n}{b_n} \tag{3.72}$$

eşitliği ile işlerlik kazandırabiliriz. Buradan $x \to \infty$ iken $y(x) = 0$ olması nedeniyle $a_n(\alpha) = 0$ denkleminin köklerine bakılır. Kompleks kökler ve probleme özgü fiziksel özellikleri sağlamayan kökler göz ardı edilir (Wazwaz, 2002). Bahsedilen adımları Peker ve ark. (2011) çalışmamız ile örneklendirelim.

Akışkanlar mekaniğinin sınır tabaka denklemlerinden Blasius denkleminin

$$\begin{cases} f'''(\eta) + \dfrac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0 \\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ \lim\limits_{\eta \to -\infty} f'(\eta) = 0,\ \ -\infty < \eta < 0 \end{cases} \tag{3.73}$$

formunu dikkate alalım (Wazwaz, 2001). Çalışmamızda (3.73) problemi için diferensiyel dönüşüm yöntemine göre bir seri çözümü bulunmaya çalışılmış ve bu seri çözümünün oluşturulabilmesi için $f''(0)$ türev değerine ihtiyaç duyulmuştur. Bu türev değerini A pozitif bir sabit olmak üzere, $f''(0) = A$ olarak kabul ettikten sonra

$$\begin{aligned} f(\eta) = \eta + \frac{A\eta^2}{2} - \frac{A\eta^4}{48} - \frac{A^2\eta^5}{240} + \frac{A\eta^6}{960} + \frac{11A^2\eta^7}{20160} + \left(-\frac{1}{21504} A + \frac{11}{161280} A^3 \right) \eta^8 \\ - \frac{43A^2\eta^9}{967680} + \left(\frac{1}{552960} A - \frac{5}{387072} A^3 \right) \eta^{10} + \ldots \end{aligned} \tag{3.74}$$

seri çözümü elde edilmiştir. A değerinin bulunarak yaklaşık çözümün ifade edilebilmesi için sadece $\lim_{\eta\to-\infty} f'(\eta)=0$ şartı kullanılabilir. İşte burada köşegenel Padé yaklaşımlarını kullanırız. O halde aşağıdaki eşitliklerden Maple 13 programı ile

$$\lim_{\eta\to-\infty} f'_{[2/2]}(\eta)=\lim_{\eta\to-\infty}\frac{3\left(4+3A\eta+\left(-A^2+\frac{1}{3}\right)\eta^2\right)}{12-3A\eta+\eta^2}=-3A^2+1 \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\eta\to-\infty} f'_{[3/3]}(\eta)&=\lim_{\eta\to-\infty}\frac{300A^2-40+\left(300A^3-70A\right)\eta-3\eta^2+\left(\frac{45}{4}A^3-3A\right)\eta^3}{10\left(30A^2-4-3A\eta+\left(-\frac{3}{10}+3A^2\right)\eta^2+\left(\frac{5}{8}A^3-\frac{1}{3}A\right)\eta^3\right)}\\&=\frac{9\left(15A^2-4\right)}{5\left(15A^2-8\right)}\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\eta\to-\infty} f'_{[4/4]}(\eta)&=\lim_{\eta\to-\infty}\frac{225A^4+60A^2-26+\left(225A^5-\frac{225}{4}A^3+\frac{17}{2}A\right)\eta}{225A^4+60A^2-26+\left(-\frac{465}{4}A^3+\frac{69}{2}A\right)\eta}\\&\quad\frac{+\left(-\frac{690}{7}A^4+\frac{2619}{56}A^2-\frac{39}{7}\right)\eta^2+\left(\frac{135}{28}A^5-\frac{99}{56}A^3-\frac{69}{112}A\right)\eta^3}{+\left(\frac{495}{28}A^4+\frac{687}{56}A^2-\frac{39}{7}\right)\eta^2+\left(\frac{165}{28}A^5-\frac{253}{28}A^3+\frac{937}{336}A\right)\eta^3}\\&\quad\frac{+\left(\frac{135}{112}A^6-\frac{189}{64}A^4+\frac{51}{28}A^2-\frac{169}{560}\right)\eta^4}{+\left(-\frac{1055}{448}A^4+\frac{153}{112}A^2-\frac{169}{560}\right)\eta^4}\\&=-\frac{2700A^6-6615A^4+4080A^2-676}{5275A^4-3060A^2+676}\end{aligned} \tag{3.77}$$

eşitlikleri elde edilir. $\lim_{\eta\to-\infty} f'(\eta)=0$ şartından dolayı (3.75) – (3.77) eşitliklerinden

$$\left.\begin{aligned}&-3A^2+1=0,\\&135A^2-36=0,\\&2700A^6-6615A^4+4080A^2-676=0,\end{aligned}\right\} \tag{3.78}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin her birinden pozitif A kökleri sırasıyla

Padé yaklaşımları	Kökler
$f_{[2/2]}(\eta)$	0.5773502693
$f_{[3/3]}(\eta)$	0.5163977795
$f_{[4/4]}(\eta)$	0.5227030798

şeklinde bulunur. Buradan problemin çözüm serisinde geçen A değerini yaklaşık olarak $A = 0.5227030798$ alabiliriz. Bu durumda (3.74) yaklaşık çözümü ifade edilmiş olur.

3.5. Hiperbolik Tanjant Yöntemi

Hiperbolik tanjant yöntemi öncelikli olarak hiperbolik tanjant fonksiyonu cinsinden ifade edilebilen yönlendirilmiş dalga çözümlerini esas alan bir yöntemdir. Yöntemin ana adımlarını Wazwaz (2004)' de belirtilenleri açıklayarak özetleyelim.

1) Doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemin genel formunu

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, ...) = 0 \tag{3.79}$$

şeklinde ele alalım.

2) (3.79) probleminin yönlendirilmiş dalga çözümünü bulmak için

$$u(x,t) = U(\xi) \tag{3.80}$$

olacak şekilde $\xi = k(x - \omega t)$ dalga değişkenini tanıtırız. Burada $U(\xi)$, ω dalga hızı ve k dalga sayısı ile yönlenen yerel dalga çözümüdür. Buna dayanarak aşağıdaki değişimleri kullanabiliriz.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} = -k\omega \frac{d}{d\xi}, \\
&\frac{\partial}{\partial x} = k \frac{d}{d\xi}, \\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2} = k^2 \frac{d^2}{d\xi^2}, \\
&\frac{\partial^3}{\partial x^3} = k^3 \frac{d^3}{d\xi^3}, \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \tag{3.81}$$

(3.81) değişikliklerini (3.79) üzerinde kullanmak suretiyle

$$Q(U, -k\omega U', kU', k^2 U'', ...) = 0 \tag{3.82}$$

şeklinde adi türevli bir diferensiyel denklem elde edilir.

3) Eğer (3.82) adi türevli diferensiyel denkleminin tüm terimleri ξ' ye göre türevler içeriyorsa bu takdirde, bu denklemin integrasyonunu almak suretiyle, integrasyon sabitini sıfır kabul ederek (veya etmeyerek), daha basit bir adi türevli diferensiyel denklem elde etmiş oluruz.

4) Bu takdirde

$$Y = \tanh(\xi), \tag{3.83}$$

şeklinde yeni bir bağımsız değişken tanıtabiliriz. Bu ise

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{d\xi} = (1-Y^2)\frac{d}{dY}, \\
&\frac{d^2}{d\xi^2} = (1-Y^2)\left(-2Y\frac{d}{dY} + (1-Y^2)\frac{d^2}{dY^2}\right), \\
&\frac{d^3}{d\xi^3} = (1-Y^2)\left((6Y^2-2)\frac{d}{dY} - 6Y(1-Y^2)\frac{d^2}{dY^2} + (1-Y^2)^2\frac{d^3}{dY^3}\right), \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \tag{3.84}$$

diğer türevlerini de benzer şekilde elde edebileceğimiz ifadelere yol açar.

5) Çözümü aşağıdaki

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{i=0}^{M} a_i Y^i , \tag{3.85}$$

ifadesi şeklinde arayalım. Burada M , sonradan belirlenecek olan ve çoğu durumda pozitif bir tamsayıdır. Daha sonra (3.84) ve (3.85) ifadelerini (3.82) denkleminde yazarak Y ' nin kuvvetlerini içeren bir denklem elde ederiz.

6) M parametresini belirlemek için genellikle, (3.82)' den gelen denklemde, 3. maddeyi göz önüne alarak, en yüksek mertebeden doğrusal olmayan terimler ile en yüksek mertebeden doğrusal terimler dengelenir. M ise dengelenen ifadelere karşılık gelen (3.85) ifadesi ile oluşan Y ' nin kuvvetlerinin eşitliği ile belirlenir. Bulunan M sayısı ile (3.85) denkleminden çözüm formu belirlenir. Bu çözüm formu 5. madde de elde edilen Y ' nin kuvvetlerini içeren denklemde yazılarak Y ' nin her bir kuvvetinin katsayıları bulunmaya çalışılır. Sonuç olarak elimizde, bu katsayıların oluşturduğu $a_i, (i = 0...M), k$ ve ω parametrelerini içeren cebirsel denklemlerin bir sistemi olacaktır. Bu sistemin çözümü ile bir çözüm kümesi elde edilmiş olur. Bu çözüm kümesinin elemanlarının, (3.83) göz önüne alınarak (3.85) eşitliğinde yazılması sonucu (3.80) kapalı formda çözümlerini elde ederiz. Bu çözümlerin (3.79) kısmi diferensiyel denklemini sağlayıp sağlamadığını kontrol etmekte fayda vardır.

3.6. Hiperbolik Tanjant ve Varyasyonel Hibrit Yöntemleri

Varyasyonel iterasyon yönteminin en önemli avantajlarından biri başlangıç fonksiyonunun serbest seçimidir. Ancak bu seçim ne kadar gerçekçi olursa iterasyon sonucu o kadar iyi yaklaşımlar elde edilebilmektedir. Bu nedenle başlangıç yaklaşımının seçiminde, problemde verilen başlangıç şartlarını sağlayan, onlara yakın fonksiyonların seçimi daha mantıklıdır.

Diğer yandan literatürde, herhangi bir başlangıç verisi kullanmaksızın belirli formlardaki kısmi diferensiyel denklemlere çözüm arayan hiperbolik tanjant yöntemi gibi çeşitli ve yeni çözüm yöntemleri mevcuttur. Bu yeni yöntemler yardımıyla bu formlardaki denklemlere ait kapalı formda yeni çözümler de elde edilmektedir.

Burada şöyle bir düşünce akla gelebilir. Başlangıç verilerine sahip olmayan bu denklemlere kapalı formda yeni çözümler bulmak amacıyla varyasyonel iterasyon yöntemi kullanılabilir mi? Varyasyonel iterasyon yöntemini bu tür problemlerde kullanabilmek için bir başlangıç fonksiyonu gerekmektedir. Bu durumda iki yaklaşım akla gelebilir.

Birincisi, hiperbolik tanjant yöntemi ile herhangi bir çözüm yapmadan, hiperbolik tanjant yönteminin bilinmeyen bazı parametreler ile oluşturduğu çözüm formunu, varyasyonel iterasyon yöntemi için bir başlangıç fonksiyonu olarak ele almaktır. Bu düşünce daha önceden Zhu (2009) tarafından üstel fonksiyon yöntemi ile varyasyonel iterasyon yöntemi arasında yapılmıştır. Yine benzer düşünce Gómez ve Salas (2010) tarafından düzeltilmiş genelleştirilmiş hiperbolik tanjant-hiperbolik kotanjant yöntemi ile varyasyonel iterasyon yöntemi arasında gerçekleştirilmiştir. Burada benzer düşünce, hiperbolik tanjant yöntemi ile varyasyonel iterasyon yöntemi arasında gerçekleştirilecek ve farklı tipteki denklemler üzerine uygulaması yapılacaktır. Bu şekilde iki yöntemin birleştirilmesi ile hiperbolik tanjant yönteminden elde edilen çözümlerin yanı sıra yeni çözümler de elde edilebilir.

İkincisi ise hiperbolik tanjant yönteminden elde edilen çözümden, bir başlangıç fonksiyonu tanımlayarak bunu varyasyonel iterasyon yönteminde kullanmaktır. Bu düşünce ise daha önce Al-Khaled ve ark. (2008) tarafından yapılmıştır. Burada ise benzer düşünce, bundan farklı olarak, ilk kısımda birleştirdiğimiz iki yöntemden elde edilen tam çözümle varyasyonel iterasyon yöntemi arasında gerçekleştirilecek ve farklı tipteki denklemler üzerine uygulaması yapılacaktır. Bu sayede problemde bu başlangıç verisine karşılık gelen tam çözümü elde etme ihtimalinin yanı sıra iterasyonda istenilen adım sayısı ile yaklaşık çözüm elde etme imkânı da sağlanacaktır.

3.6.1. Varyasyonel iterasyon yöntemi ile hiperbolik tanjant yönteminin birleştirilmesi

3.2. kısmında belirtilenlere benzer olarak (3.23) eşitliği için probleme uygun Lagrange çarpanı bulunduktan sonra varyasyonel iterasyon yöntemi için gerekli başlangıç çözümünü, (3.83) ve (3.85)' den

$$u_0(x,t) = u_0(\xi) = \sum_{i=0}^{M} a_i \tanh^i \xi(x,t) \tag{3.86}$$

şeklinde hiperbolik tanjant yönteminin çözüm formu olarak parametreye bağlı şekilde seçeriz. M katsayısının hiperbolik tanjant yöntemine göre seçiminden sonra belirlenen (3.86) başlangıç fonksiyonu ile varyasyonel iterasyon yöntemine göre çözüm yaparız. Varyasyonel iterasyon yönteminde çözümün (3.26) eşitliği ile belirtildiği şekilde oluşması ve parametreye bağlı tam çözüm aranması nedeniyle

$$u_n(x,t) = u_{n+1}(x,t) \tag{3.87}$$

ve buradan

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u_n(x,t) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} u_{n+1}(x,t) \tag{3.88}$$

ilişkisini kullanarak gerekli parametrelerin birbirleriyle olan ilişkisini verecek cebirsel denklemlerin bir sistemini elde ederiz (Zhu, 2009). Bu sistemin çözümü ile elde edilen katsayıların (3.85) eşitliğinde değerlendirilmesi sonucu uygun olan çözümlerin $\xi = k(x - \omega t)$ dalga değişkeni ve (3.80) eşitliği göz önüne alınarak yazılması ile (3.79) denkleminin tam çözümleri elde edilmiş olur. Bu çözümlerin (3.79) denklemini sağlayıp sağlamadığı da ayrıca kontrol edilmelidir.

3.6.2. Varyasyonel iterasyon yönteminde hiperbolik tanjant yaklaşımı

Bu yaklaşımda öncelikle problem 3.6.1. kısmında anlatılan adımlar yardımıyla çözülür. Buradan elde edilen çözüm üzerinde zaman değişkeninde $t = 0$ alınarak oluşturulan başlangıç yaklaşımı varyasyonel iterasyon yönteminde kullanılarak istenen iterasyon sayısında yaklaşık çözüm veya eğer bu seri kapatılabiliyorsa tam çözüm elde edilir (Al-Khaled ve ark., 2008). Elde edilen yaklaşık çözümün 3.6.1. kısmından elde edilen çözümle uyumu belirli zaman dilimlerinde kontrol edilebilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölüm iki kısımdan oluşacaktır. Öncelikle, $k = 0$ için Karaoğlu ve Oturanç (2012) tarafından yapılmış olan, varyasyonel iterasyon yöntemi aracılığıyla maruz kalınan bir sıcaklık değişiminden (gradient) dolayı serbest bir yüzey üzerindeki akışın oluşturduğu Marangoni taşınımına yönelik sayısal analiz çalışmasına ve bu çalışmanın devamı olan $k = -0.5$ ve $k = 0.5$ durumlarına yer verilecektir. Daha sonra ise hiperbolik tanjant ve varyasyonel hibrit yöntemleri literatürde yer alan KdV ve Boussinesq denklemleri üzerinde test edilecektir.

4.1. Varyasyonel İterasyon Yönteminin Bir Taşınım Problemine Uygulanması

Marangoni taşınımı pek çok doğa ve mühendislik probleminde görülen, akışkan bir yüzey boyunca, yüzey gerilimindeki değişimler yoluyla ortaya çıkar. Yüzey gerilimi akışkanın bir özelliğidir. Sıvı içerisindeki bir moleküle, yine çevreden etkiyen moleküller nedeniyle, etkiyen kuvvet sıfırdır. Ancak sıvının yüzeyindeki moleküllere sadece bir taraftan kuvvet etki ettiğinden bu moleküller sıvının içine doğru çekilir. Bu nedenle sıvının yüzeyi minimum alana sahip olur. Hacimleri eşit olan geometrik şekiller arasında en az yüzey alanı küre olduğundan su damlaları yüzey geriliminden dolayı küre şeklini alır. Sıvıların çoğu genellikle doğrusal bir şekilde sıcaklığın monoton azaldığı bir fonksiyon ile ifade edilen yüzey gerilimine sahiptir. Bir sıcaklık değişiminin ölçüsü (sıcaklık gradienti) bir yüzey gerilim değişimi ölçüsüne (yüzey gerilimi gradienti) ilişkin sıvı-gaz yüzeyi boyunca etkilendiği zaman uyarılmış olur ve bu durum sadece yüzeyde değil aynı zamanda viskoziteden dolayı akışkan içinde de harekete sebep olur. Bu hareket yüzey gerilimi taşınımı (thermocapillary convection) veya Marangoni taşınımı olarak isimlendirilir (Slavtchev ve Miladinova, 1998). İşte Marangoni taşınımı, bir sıvı içindeki yüksek yüzey gerilimine sahip bölgeye doğru ısı ve kütle hareketinin bir eğilimidir. 19. yy' da bu kavramı ilk çalışan İtalyan Fizikçi Carlo Marangoni' den sonra isimlendirilmiştir.

Günümüzde bu kavramın sınırları, sadece bir akışkan davranışı olmaktan öteye, farklı alanlara genişletilmiştir. Meggs (2011)' in bildirdiğine göre, Japon Hava – Uzay İnceleme Birimi Marangoni Bilim Koordinatörü Satoshi Matsumoto "Marangoni yarı iletkenler, optik materyaller ya da bio-teknoloji materyallerindeki kristal oluşumunun

kalitesini olumsuz yönde etkilemektedir. Taşınım ayrıca kişisel bilgisayarlardaki ısı radyasyon aletlerinin radyasyon performansını düşürücü bir ısı kanalında da gerçekleşir. Bu yüzden Marangoni taşınımını anlamanın önemi, sadece akışkanların davranışları hakkındaki bilgimizi genişletmek değil, aynı zamanda uzayda ve yeryüzünde kullanmak için geliştirdiğimiz yarı iletken materyaller ve ekipmanların üretimi içinde büyük öneme sahiptir." demiştir. Bu nedenle Marangoni etkisi kaynak, kristal oluşumu ve metallerin erimesindeki elektron ışımaları gibi alanlardaki çalışmalarda önem arz eder.

Doğrudan deneysel çalışmaları bu sistemlerde uygulamak kolay değildir. Çünkü kullanılan materyaller sıklıkla sıcaklıkları oldukça yüksek metallerdir. Bu nedenle gerçek sistem yerine bir sıvı kullanılarak bir deney düzeneği oluşturulması ya da öncelikli olarak sadece teorik çalışma yapmak daha pratiktir. Literatürde bu konuda yapılmış bazı çalışmalar vardır. Slavtchev ve Miladinova (1998) minimum yüzey gerilimine sahip bir akışkanın ince katmanında Marangoni akışına ilişkin benzerlik çözümleri ortaya koymuşlardır. Arafune ve Hirata (1998) bir metal eriyik içerisinde meydana gelen yönlü bir katılaşma boyunca solutal (çözünen maddeye ilişkin) ve termal (sıcaklık ile ilgili) Marangoni taşınımının etkileşimi ile ilgili bir çalışma yapmışlardır. Okano ve ark. (1989) sonlu farklar yöntemiyle genlik değişiminin bir derecesini kullanarak iki boyutlu dikdörtgensel açık bir hazne içindeki eriyikte kendiliğinden oluşan doğal taşınımı ve Marangoni taşınımını incelemişlerdir. Arafune ve Hirata (1999) sıcaklık değişimleri ve yoğunluk değişimleri yolu ile sebep olunan yüzey, gerilim, hareket ve akışın hız özelliklerine açıklık getirmek için dikdörtgensel çift kröze bir sistem geliştirmişlerdir. Deneysel çalışmada In-Ga-Sb eriyiği test akışkanı olarak kullanılmıştır. Christopher ve Wang (2001) çeşitli sıcaklık kesitlerine maruz kalan bir yüzey boyunca sınır tabaka akışının büyümesi göz önünde tutularak, sıcaklık ve hız kesitinin her ikisi için zorlamalı Marangoni taşınımının bir benzerlik çözümünü sunmuşlardır. Son olarak Zheng ve ark. (2008) zorlanmış sıcaklık değişiminden dolayı bir akıcı buhar yüzeyi üzerinde meydana gelen Marangoni taşınımının sayısal incelemesini Adomian ayrışım yöntemi ile yapmışlardır.

4.1.1. Problemin formülasyonu

Kütle, momentum ve enerjinin korunumu için laminer sınır tabaka denklemleri

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0 \tag{4.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4.2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial y}=\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{4.3}$$

şeklinde ifade edilirler. Burada ν ve κ, sırasıyla momentum ve ısı yayınımlarıdır.

Terminoloji

u	x boyunca hız bileşeni
υ	y boyunca hız bileşeni
ψ	akış fonksiyonu
F	boyutsuz akış fonksiyonu
k	güç kanunu üsteli ile ilgili parametre

Serbest yüzeyde sınır koşulları ise

$$\mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=-\left.\frac{\partial \sigma}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{y=0} \tag{4.4}$$

$$\upsilon\left(x,0\right)=0 \tag{4.5}$$

$$T\left(x,0\right)=T\left(0,0\right)+mx^{k+1} \tag{4.6}$$

şeklindedir. Yüzeyden uzaklaşıldıkça hız ve ısı sınır koşulları ise

$$\lim_{y\to\infty} u\left(x,y\right)=0 \tag{4.7}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y\to\infty}=0 \tag{4.8}$$

olsun. Burada $k=0$ doğrusal yüzey sıcaklık profiline, $k=1$ ise kuadratik yüzey sıcaklık profiline işaret eder. $k=-1$ minimum değeri, kabarcık yüzey üzerinde sıcaklık

değişiminin olmadığını, dolayısıyla Marangoni akışının gözlenmediğini söyler. $\psi(x,y)$ akı fonksiyonu, η benzerlik değişkeni, $F(\eta)$ boyutsuz akı fonksiyonu ve $\theta(\eta)$ boyutsuz sıcaklık fonksiyonu olmak üzere

$$\eta = C_1 x^{\alpha} y \tag{4.9}$$

$$F(\eta) = C_2 x^{\beta} \psi(x,y) \tag{4.10}$$

$$\theta(\eta) = \left(T(x,y) - T(0,0)\right) x^{t} \tag{4.11}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Yukarıdaki benzerlik dönüşümleri ile (4.1)-(4.8) sınır tabaka denklemleri sınır koşulları ile birlikte aşağıdaki doğrusal olmayan adi diferensiyel denklem sistemine dönüşür (Christopher ve Wang, 2001; Zheng ve ark., 2008).

$$F''' = aF'^2 - bFF'' \tag{4.12}$$

$$\theta'' = \Pr\left(-bF\theta' - tF'\theta\right) \tag{4.13}$$

$$F(0) = 0, \quad F''(0) = -k - 1, \quad \lim_{\eta\to\infty} F'(\eta) = 0, \tag{4.14}$$

$$\theta(0) = m, \quad \lim_{\eta\to\infty} \theta'(\eta) = 0. \tag{4.15}$$

Burada geçen katsayılar ve parametreler ise

$$C_1 = \sqrt[3]{\frac{(d\sigma/dT)m\rho}{\mu^2}}, \qquad C_2 = \sqrt[3]{\frac{\rho^2}{(d\sigma/dT)m\mu}} \tag{4.16}$$

$$a = \frac{2k+1}{3}, \qquad b = \frac{k+2}{3}, \qquad t = -1 - k \tag{4.17}$$

olarak belirtilir. (4.12) ve (4.13) denklemleri doğrusal olmayan denklemlerdir ve böyle denklemlerin tam çözümlerini bulmak çoğunlukla zordur. Böyle durumlarda yaklaşık çözüm yöntemlerinin kullanılması hemen hemen bir zorunluluktur.

4.1.2. Farklı parametre değerleri için çözümler

Çalışmamızda sınır koşullarını, k ' nın $k=0$, $k=-0.5$ ve $k=0.5$ şeklindeki üç özel değeri için ayrı ayrı ele alacağız.

i) $k=0$ **Durumu**

İlk olarak momentum denkleminin çözümü ile başlayalım. Yönteme göre (4.12) denklemi için doğrulama fonksiyoneli

$$F_{n+1}(\eta)=F_n(\eta)+\int_0^{\eta}\lambda(\tau)\left\{\frac{d^3F_n(\tau)}{d\tau^3}-a\left(\frac{d\widetilde{F}_n(\tau)}{d\tau}\right)^2+b\widetilde{F}_n(\tau)\left(\frac{d^2\widetilde{F}_n(\tau)}{d\tau^2}\right)\right\}d\tau \qquad (4.18)$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki (4.18) eşitliği ve (3.25)' den aşağıdaki koşullar

$$\frac{d^3\lambda(\tau)}{d\tau^3}=0,\qquad 1+\frac{d^2\lambda(\tau)}{d\tau^2}\bigg|_{\tau=\eta}=0,\qquad \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=\eta}=0,\qquad \lambda(\tau)\big|_{\tau=\eta}=0 \qquad (4.19)$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak Lagrange çarpanı

$$\lambda(\tau)=-\frac{1}{2}(\tau-\eta)^2 \qquad (4.20)$$

olarak bulunur. (4.20) denklemini (4.18) denkleminde yerine yazarsak

$$F_{n+1}(\eta)=F_n(\eta)-\frac{1}{2}\int_0^{\eta}(\tau-\eta)^2\left\{\frac{d^3F_n(\tau)}{d\tau^3}-a\left(\frac{dF_n(\tau)}{d\tau}\right)^2+bF_n(\tau)\left(\frac{d^2F_n(\tau)}{d\tau^2}\right)\right\}d\tau \qquad (4.21)$$

iterasyon formülü elde edilir. A, B ve C katsayılarını daha sonra belirleyeceğimiz

$$F_0(\eta)=A+B\eta+Ce^{-\eta} \qquad (4.22)$$

şeklindeki bir başlangıç yaklaşımı ile iterasyona başlayalım. (4.22) denklemini (4.21) denkleminde yerine yazarak bir iterasyon sonucu

$$\begin{aligned} F_1(\eta) = {} & B\eta + A + C - \frac{C^2}{24} - C\eta + \frac{\eta^2 C}{2} + \frac{2}{3}\eta e^{-\eta} CB - \frac{1}{12}\eta^2 C^2 - \frac{2}{3}CA - \frac{8}{3}BC \\ & + \frac{1}{12}\eta C^2 + \frac{1}{18}B^2\eta^3 + \frac{1}{24}C^2 e^{-2\eta} + \frac{8}{3}BCe^{-\eta} + \frac{2}{3}CAe^{-\eta} + \frac{2}{3}CA\eta + 2CB\eta \\ & - \frac{2}{3}BC\eta^2 - \frac{1}{3}CA\eta^2 \end{aligned} \tag{4.23}$$

yaklaşımını elde ederiz. Sonuçta (4.23) denklemi kullanılarak boyutsuz hız dağılım fonksiyonu için

$$\begin{aligned} F'(\eta) = {} & B - C + C\eta - \frac{2}{3}CB\eta e^{-\eta} - 2BCe^{-\eta} - \frac{1}{6}C^2 + \frac{1}{12}C^2 + \frac{1}{6}B^2\eta^2 - \frac{1}{12}C^2 e^{-2\eta} \\ & - \frac{2}{3}CAe^{-\eta} + \frac{2}{3}CA + 2BC - \frac{4}{3}CB\eta - \frac{2}{3}CA\eta \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} F''(\eta) = {} & C + \frac{2}{3}CB\eta e^{-\eta} + \frac{4}{3}BCe^{-\eta} - \frac{1}{6}C^2 + \frac{1}{3}B^2\eta + \frac{1}{6}C^2 e^{-2\eta} + \frac{2}{3}CAe^{-\eta} \\ & - \frac{4}{3}BC - \frac{2}{3}CA \end{aligned} \tag{4.25}$$

denklemleri elde edilir. Bilinmeyen A, B ve C katsayılarını elde edersek problemin ilk denklemi için bir yaklaşım elde etmiş oluruz. Bunun için (4.14) denklemindeki sınır koşullarını kullanabiliriz. $k = 0$ değerine karşın $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $t = -1$ olur. Bu değerler ile beraber (4.14) sınır koşulları A, B ve C katsayılarını elde etmek amacıyla ihtiyacımız olan denklemlerden sadece ikisini vermektedir. Sahip olduğumuz üç bilinmeyen iki denkleme ilave bir denklemi ise $\lim_{\eta\to\infty} F'(\eta) = 0$ aracılığıyla (4.24) denklemine Padé yaklaşımını uygulayarak elde etmeye çalışacağız. Padé tekniğinde köşegenel tercihlerin daha doğru yaklaşımlar verdiği bilinmektedir (Zheng ve ark., 2008; Rashidi ve Shahmohamadi, 2009; Peker ve ark., 2011). Burada [2/2] Padé yaklaşımını, Peker ve ark. (2011) çalışmamızdaki gibi kullanacağız.

Öncelikle (4.14) sınır koşullarındaki ilk iki koşul, (4.23) ve (4.25) denklemlerinde kullanılarak $A + C = 0$ ve $C = -1$ elde edilir. Buradan da $A = 1$ bulunur. Geriye kalan

B değerini ise (4.24) eşitliğine [2/2] Padé yaklaşımını uygulayarak ve bu sayede (4.14) sınır koşullarındaki son koşulu kullanarak bulalım.

$$\lim_{\eta\to\infty} F'_{[2/2]}(\eta) = 0 \tag{4.26}$$

işlemini Maple 13 programı yardımıyla yaparsak

$$\begin{aligned} &-36C^4 - 18C^3A + 18C^3B + 46C^3A^2 + 71C^4A - 18C^5A - 36C^4A^2 - 27C^4B^2 \\ &-18C^5B - 24C^3A^3 + 27B^4C^2 + 12B^3C^3 + 59C^4B + 15B^3C^2 - 45B^2C^3 - 3B^4C \\ &-18B^5C - 36C^3B^2A - 72C^4BA + 36C^2A^2B^2 - 72C^3A^2B - 18B^4CA + 72B^3C^2A \\ &+49C^3AB - 27B^2C^2A + 2C^2A^2B + 3CAB^3 + 22C^5 - 3C^6 + 3B^6 = 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

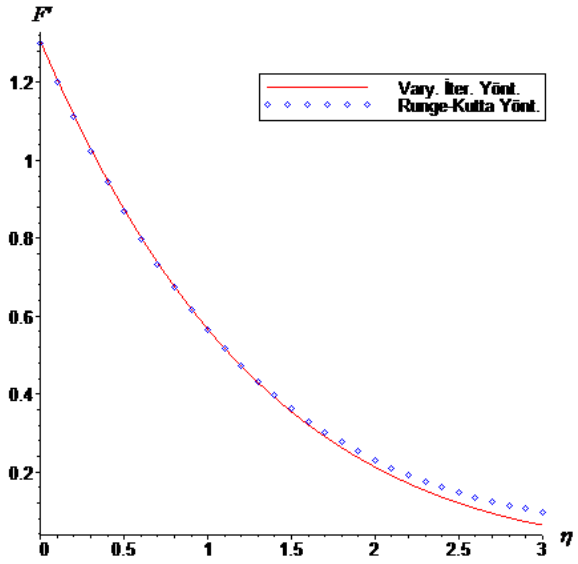
eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $A = 1$ ve $C = -1$ alındığında B değeri $B = 0.304625959$ olarak bulunur. Bu durumda $F'(0) = 1.304625959$ olur. Hız dağılım fonksiyonu ise bu değerler yardımıyla

$$\begin{aligned} F'(\eta) &= 0.1120407076 - 0.09383205466\eta + 0.2030839727\eta e^{-\eta} \\ &\quad + 1.275918584e^{-\eta} + 0.01546616248\eta^2 - \frac{1}{12}e^{-2\eta} \end{aligned} \tag{4.28}$$

şeklinde elde edilir. Bu elde edilen hız dağılım fonksiyonunun güvenilirliğini kontrol etmek amacıyla (4.12) denklemi, yine $k = 0$ özel değeri dikkate alınarak, dördüncü mertebe Runge-Kutta yönteminin atış yöntemi ile birlikte kullanımıyla çözülmüş ve (4.28) denklemi ile karşılaştırılması Şekil 4.1.' de gösterilmiştir.

Burada Runge-Kutta yönteminin atış yöntemi ile çözümünde, gerekli olan $F'(0)$ türev değeri için keyfi bir değer atanmış ve bu değer ile $h = 0.1$ adım genişliğinde 1000 adım gidilerek $\lim_{\eta\to\infty} F'(\eta) = 0$ değeri kontrol edilmiştir. Bu değere bizi en çok yaklaştıran $F'(0)$ için atadığımız değer, ideal başlangıç noktası olarak dikkate alınmıştır. Aynı düşünce, sistemin diğer denklemi içinde kullanılmıştır.

Ayrıca 5.1. Sonuçlar kısmında, varyasyonel iterasyon yöntemi ile elde ettiğimiz yaklaşık çözümlerin, Zheng ve ark., (2008) çalışmasındaki Adomian ayrışım yöntemi ile elde ettikleri yaklaşık çözümler ile karşılaştırması yapılmıştır.



Şekil 4.1. $k=0$ için hız dağılım fonksiyonu

Benzer şekilde, $k=0$ için sistemin diğer kısmı yani (4.13) enerji denkleminin çözümünü yapalım. Burada öncelikle yapılacak olan $\theta(\eta)=mg(\eta)$ dönüşümü ile sınır koşulları daha kullanışlı hale gelir (Christopher ve Wang, 2001; Zheng ve ark., 2008). Sonuç olarak,

$$g''=\Pr\left(-bFg'-tF'g\right) \tag{4.29}$$

$$g(0)=1,\quad \lim_{\eta\to\infty} g'(\eta)=0 \tag{4.30}$$

denklemi ve sınır koşulları elde edilir. Varyasyonel iterasyon yöntemine göre bir doğrulama fonksiyoneli

$$g_{n+1}(\eta)=g_n(\eta)+\int_0^{\eta}\lambda(\tau)\left\{\frac{d^2g_n(\tau)}{d\tau^2}+\Pr bF(\tau)\frac{d\tilde{g}_n(\tau)}{d\tau}+\Pr t\left(\frac{dF_n(\tau)}{d\tau}\right)\tilde{g}_n(\tau)\right\}d\tau \tag{4.31}$$

olarak yazılır. (4.31) eşitliği ve (3.25)' den aşağıdaki koşullar

$$\frac{d^2\lambda(\tau)}{d\tau^2}=0,\qquad 1-\left.\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=\eta}=0,\qquad \lambda(\tau)\big|_{\tau=\eta}=0 \tag{4.32}$$

şeklinde yazılır. Buradan Lagrange çarpanı ise

$$\lambda(\tau) = \tau - \eta \tag{4.33}$$

olarak elde edilir. (4.33) ifadesini (4.31)' de yerine yazarsak

$$g_{n+1}(\eta) = g_n(\eta) + \int_0^{\eta} (\tau - \eta) \left\{ \frac{d^2 g_n(\tau)}{d\tau^2} + \Pr bF(\tau) \frac{dg_n(\tau)}{d\tau} + \Pr t \left(\frac{dF_n(\tau)}{d\tau} \right) g_n(\tau) \right\} \tag{4.34}$$

iterasyon formülü elde edilir. Başlangıç yaklaşımı için benzer düşünceyle sınır koşullarını da dikkate alarak

$$g_0(\eta) = Be^{-\eta} + C\eta e^{-\eta} \tag{4.35}$$

yaklaşımını ele alalım. İki koşul olduğu için sadece B ve C gibi iki bilinmeyene sahip bir başlangıç yaklaşımı seçtik. $\Pr = 5$ için bu başlangıç yaklaşımı ile (4.31) formülünde iki iterasyon sonucu elde ettiğimiz ve uzun bir denklem olduğu için belirtmediğimiz çözüme, önce $g(0) = 1$ sınır koşulunu uygulayarak B ve C bilinmeyenli

$$1.000000049B + 0.2297668039 \times 10^{-7} C = 1 \tag{4.36}$$

denklemini ve yine aynı çözüme [6/6] Padé yaklaşımını $\lim_{\eta \to \infty} g'(\eta) = 0$ sınır koşulunu düşünerek

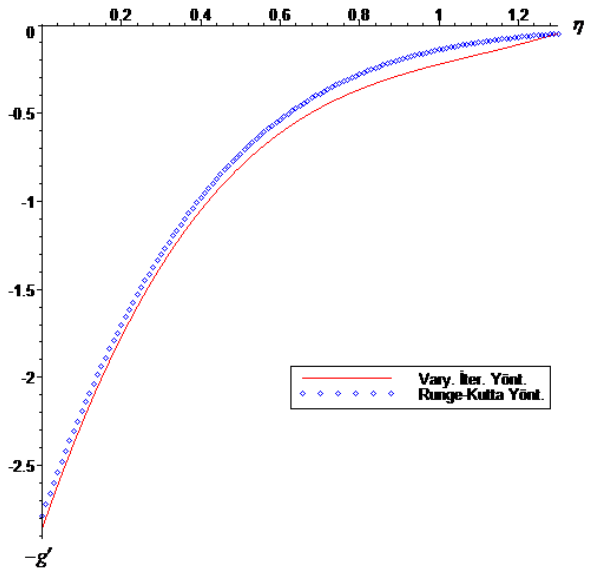
$$\lim_{\eta \to \infty} g'_{[6/6]}(\eta) = 0 \tag{4.37}$$

şeklinde uyguladığımızda ise B ve C bilinmeyenli

$$
\begin{aligned}
&-0.9999406459\times10^{11}B^7+0.7677073201\times10^{13}C^7\\
&+0.2911369941\times10^{13}B^6C+0.6785836963\times10^{13}B^5C^2\\
&+0.8391026025\times10^{13}B^4C^3+0.2584266989\times10^{14}C^4B^3\\
&+0.4616167195\times10^{14}C^5B^2+0.3249932317\times10^{14}C^6B=0
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

denklemini elde ederiz.

Bu denklemlerin çözümü sonucu $B=0.9999999938$ ve $C=-1.861313331$ çıkar. Sonuçta bunlar yardımıyla g' boyutsuz sıcaklık değişimi ve g sıcaklık profilleri elde edilmiş olur. İlk denklemde yapılana benzer şekilde ikinci denklem için, Şekil 4.2.' de, varyasyonel iterasyon yönteminden elde edilen g' sıcaklık değişimi, atış yöntemi ile birlikte kullanıldığımız dördüncü mertebe Runge-Kutta yönteminden elde edilen çözümle karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.2. $k=0$, $\Pr=5$ için sıcaklık değişimi

ii) $k=-0.5$ **Durumu**

$k=-0.5$ özel değeri için $a=0, b=\frac{1}{2}, t=-\frac{1}{2}$ olur. Lagrange çarpanı ve (4.21) iterasyon formülünde bir değişiklik olmaz. Ancak başlangıç yaklaşımının sınır koşullarına uyumlu seçilmesi daha uygun olacağından momentum denkleminin çözümünde k' nın bu değeri için başlangıç yaklaşımını

$$F_0(\eta) = A\eta e^{-\eta} + B\eta^2 e^{-\eta} \tag{4.39}$$

olarak seçelim. (4.21) denklemi ve (4.39) başlangıç yaklaşımı ile beraber bir adımda

$$\begin{aligned} F_1(\eta) = {} & \frac{3B^2}{32} + \frac{1}{8}ABe^{-2\eta}\eta^3 + \frac{3}{16}ABe^{-2\eta}\eta^2 + \frac{1}{8}ABe^{-2\eta}\eta - \eta^2 A - \frac{\eta AB}{8} + \frac{\eta^2 AB}{16} \\ & + \frac{1}{16}\eta A^2 e^{-2\eta} + \frac{1}{16}\eta^2 A^2 e^{-2\eta} + \frac{1}{8}\eta^3 B^2 e^{-2\eta} + \frac{1}{8}\eta^2 B^2 e^{-2\eta} + \frac{1}{16}\eta^4 B^2 e^{-2\eta} \\ & + \eta A - \frac{\eta A^2}{16} - \frac{3\eta B^2}{16} + \frac{\eta^2 A^2}{16} - \frac{3}{32}B^2 e^{-2\eta} + \frac{\eta^2 B^2}{16} + \eta^2 B \end{aligned} \tag{4.40}$$

yaklaşımını elde ederiz. Sonuçta (4.40) denklemi kullanılarak boyutsuz hız dağılım fonksiyonu için

$$\begin{aligned} F'(\eta) = {} & -\frac{A^2}{16} - \frac{3B^2}{16} + A - \frac{1}{4}ABe^{-2\eta}\eta^3 + \frac{1}{8}ABe^{-2\eta}\eta + \frac{1}{8}ABe^{-2\eta} + \frac{1}{4}\eta B^2 e^{-2\eta} \\ & + \frac{\eta AB}{8} - \frac{1}{8}\eta^2 A^2 e^{-2\eta} + \frac{1}{8}\eta^2 B^2 e^{-2\eta} - \frac{1}{8}\eta^4 B^2 e^{-2\eta} + \frac{1}{16}A^2 e^{-2\eta} - \frac{AB}{8} \\ & - 2\eta A + \frac{\eta A^2}{8} + \frac{\eta B^2}{8} + \frac{3}{16}B^2 e^{-2\eta} + 2\eta B \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} F''(\eta) = {} & \frac{1}{2}ABe^{-2\eta}\eta^3 - \frac{3}{4}ABe^{-2\eta}\eta^2 - \frac{1}{4}ABe^{-2\eta}\eta - \frac{1}{8}ABe^{-2\eta} - \frac{1}{8}B^2 e^{-2\eta} \\ & - \frac{1}{4}\eta B^2 e^{-2\eta} + \frac{AB}{8} - \frac{1}{4}\eta A^2 e^{-2\eta} + \frac{1}{4}\eta^2 A^2 e^{-2\eta} - \frac{1}{4}\eta^2 B^2 e^{-2\eta} \\ & - \frac{1}{2}\eta^3 B^2 e^{-2\eta} + \frac{1}{4}\eta^4 B^2 e^{-2\eta} - \frac{1}{8}A^2 e^{-2\eta} - 2A + \frac{A^2}{8} + \frac{B^2}{8} + 2B \end{aligned} \tag{4.42}$$

denklemleri elde edilir. Bilinmeyen A ve B katsayılarını bulmak için $k = -0.5$ değeri ile değişen (4.14) sınır koşullarını kullanacağız. İlk şart olan $F(0) = 0$ şartından A ve B katsayılarına bağlı bir denklem elde edilememektedir. İkinci şart olan $F''(0) = -0.5$ şartından

$$-2A + 2B = -0.5 \tag{4.43}$$

denklemi elde edilir. Diğer denklemi ise (4.41) eşitliğine Padé yaklaşımı uyguladıktan sonra $\lim_{\eta\to\infty} F'(\eta)=0$ şartından elde edeceğiz. [3/3] yaklaşımını

$$\lim_{\eta\to\infty} F'_{[3/3]}(\eta)=0 \tag{4.44}$$

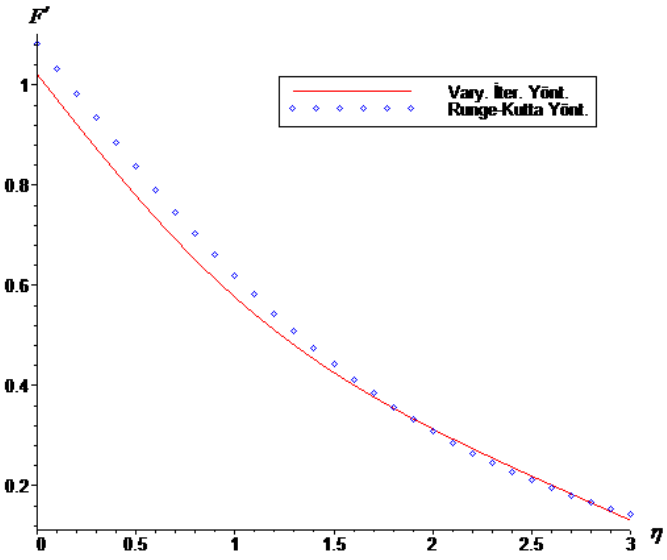
şeklinde hesapladığımızda

$$\begin{aligned}
&0.3858024694\times10^{10}A^8+0.5000000000\times10^{-27}B^8-0.5741222995\times10^{11}A^7\\
&+13.88888880B^7+0.8333333330\times10^{-8}A^2B^6-9.259259265A^3B^5\\
&+0.3858024713\times10^{10}A^4B^4-0.3333333332\times10^{-17}AB^7\\
&-0.1543209878\times10^{11}A^5B^3+0.2314814815\times10^{11}A^6B^2-0.1543209877\times10^{11}A^7B\\
&-0.2025462960\times10^{11}AB^6-0.5575810180\times10^{12}A^3B^4+0.1510416662\times10^{12}A^2B^5\\
&+0.9544753080\times10^{12}A^4B^3-0.8245081020\times10^{12}A^5B^2+0.3444733796\times10^{12}A^6B\\
&-0.2153703708\times10^{13}B^5A+0.4615740748\times10^{13}B^4A^2-0.5281481485\times10^{13}B^3A^3\\
&+0.3262037035\times10^{13}B^2A^4-0.1007407405\times10^{13}A^5B+0.4388888902\times10^{12}B^6\\
&+0.1259259254\times10^{12}A^6=0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

denklemini elde ederiz. (4.43) ve (4.45) denklemlerinin ortak çözümünden $A=1.022125880$, $B=0.7721258800$ olarak elde edilir. Bu durumda $F'(0)=1.022125880$ ve hız dağılım fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}
F'(\eta)=&-0.1973024612e^{-2\eta}\eta^3-0.0560703676e^{-2\eta}\eta^2+0.2476958242e^{-2\eta}\eta\\
&+0.2757310080e^{-2\eta}-0.1962338082\eta+0.7463948720\\
&-0.07452229682\eta^4e^{-2\eta}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen (4.46) hız dağılım fonksiyonunun, atış yöntemi ile birlikte kullandığımız dördüncü mertebe Runge-Kutta yönteminden elde edilen yaklaşık çözümü ile karşılaştırılması, Şekil 4.3.' de gösterilmiştir.



Şekil 4.3. $k=-0.5$ için hız dağılım fonksiyonu

$k=-0.5$ için (4.13) enerji denkleminin çözümünü yapalım. (4.29) denklemi ve (4.30) sınır koşulları ile (4.34) iterasyon formülünde bir değişiklik olmaz. Buradaki fark, sistemin ilk denkleminden gelen çözüm ve seçilecek başlangıç fonksiyonunun seçimidir. Başlangıç yaklaşımı için sınır koşullarını dikkate alarak yine

$$g_0(\eta)=Be^{-\eta}+C\eta e^{-\eta} \tag{4.47}$$

yaklaşımını ele alalım. $\Pr=5$ için (4.34) iterasyonunu (4.47) başlangıç yaklaşımı ile bir adım çalıştırıp elde ettiğimiz çözüme, $g(0)=1$ sınır koşulunu uygulayarak B ve C bilinmeyenli

$$1.000000001B-0.3280438957\times10^{-8}C=1 \tag{4.48}$$

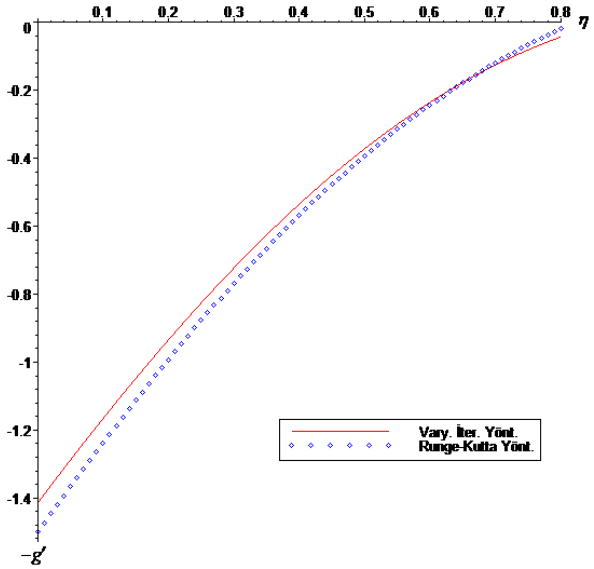
denklemini elde ederiz. Yine aynı çözüme [5/5] Padé yaklaşımını $\lim_{\eta\to\infty} g'(\eta)=0$ sınır koşulunu düşünerek

$$\lim_{\eta\to\infty} g'_{[5/5]}(\eta)=0 \tag{4.49}$$

şeklinde uyguladığımızda ise B ve C bilinmeyenli

$$0.4466197989\times10^{12}B^5C+0.3220458341\times10^{13}B^4C^2-0.1867673622\times10^{13}B^3C^3$$
$$-0.8837824027\times10^{13}B^2C^4+0.4483386272\times10^{11}BC^5-0.2909876565\times10^{12}B^6 \quad (4.50)$$
$$+0.1010343811\times10^{14}C^6=0$$

denklemi elde edilir. Bu iki denklemin ortak çözümünden $B=0.9999999976$ ve $C=-0.4144901042$ olarak bulunur. Bu değerler, iterasyonu bir adım çalıştırıp elde edilen denklemde yazıldığında g' boyutsuz sıcaklık değişimi ve g sıcaklık profilleri elde edilmiş olur. Şekil 4.4. ile yukarıdakilere benzer karşılaştırma yapılmıştır.



Şekil 4.4. $k=-0.5$, $\Pr=5$ için sıcaklık değişimi

iii) $k=0.5$ **Durumu**

$k=0.5$ özel değeri için $a=\frac{2}{3}, b=\frac{5}{6}, t=-\frac{3}{2}$ olur. Yine Lagrange çarpanı ve (4.21) iterasyon formülünde bir değişiklik olmaz. Başlangıç yaklaşımını, sınır koşullarını göz önünde bulundurarak yine

$$F_0(\eta)=A\eta e^{-\eta}+B\eta^2e^{-\eta} \quad (4.51)$$

olarak seçelim. (4.21) denklemi ve (4.51) başlangıç yaklaşımı ile beraber bir adımda

$$
\begin{aligned}
F_1(\eta) = {} & \frac{A^2}{12} + \frac{17B^2}{32} + \eta A + \eta^2 B - \eta^2 A + \frac{13020833}{312499991}\eta^3 B^2 e^{-2\eta} \\
& + \frac{9300595}{446428559}\eta^4 B^2 e^{-2\eta} - \frac{1}{4} ABe^{-2\eta} - \frac{3\eta AB}{8} - \frac{1}{8}\eta^2 B^2 e^{-2\eta} \\
& + \frac{9300595}{446428559}\eta A^2 e^{-2\eta} + \frac{3\eta^2 AB}{16} - \frac{1}{2}\eta B^2 e^{-2\eta} + \frac{9300595}{446428559}\eta^2 A^2 e^{-2\eta} \\
& - \frac{17}{32} B^2 e^{-2\eta} - \frac{1}{12} A^2 e^{-2\eta} + \frac{3\eta^2 A^2}{16} + \frac{3\eta^2 B^2}{16} - \frac{3\eta A^2}{16} + \frac{13020833}{312499991} ABe^{-2\eta}\eta^3 \\
& + \frac{1}{16} ABe^{-2\eta}\eta^2 - \frac{1}{8} ABe^{-2\eta}\eta + \frac{AB}{4} - \frac{9\eta B^2}{16}
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

denklemi ve (4.52) denkleminin türevleri olan

$$
\begin{aligned}
F'(\eta) = {} & A - \frac{3A^2}{16} - \frac{9B^2}{16} - 2\eta A - \frac{1}{12500000000}\eta^3 B^2 e^{-2\eta} - \frac{18601190}{446428559}\eta^4 B^2 e^{-2\eta} \\
& + \frac{3}{8} ABe^{-2\eta} + \frac{3\eta AB}{8} + \frac{3}{8}\eta^2 B^2 e^{-2\eta} + \frac{3}{4}\eta B^2 e^{-2\eta} - \frac{18601190}{446428559}\eta^2 A^2 e^{-2\eta} \\
& + 2\eta B + \frac{9}{16} B^2 e^{-2\eta} + \frac{3}{16} A^2 e^{-2\eta} + \frac{3\eta A^2}{8} - \frac{26041666}{312499991} ABe^{-2\eta}\eta^3 \\
& + \frac{1}{12500000000} ABe^{-2\eta}\eta^2 + \frac{3}{8} ABe^{-2\eta}\eta - \frac{3AB}{8} + \frac{3\eta B^2}{8}
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

$$
\begin{aligned}
F''(\eta) = {} & -2A - \frac{3}{4}\eta^2 B^2 e^{-2\eta} - \frac{1}{6}\eta^3 B^2 e^{-2\eta} + \frac{37202381}{446428571}\eta^4 B^2 e^{-2\eta} \\
& - \frac{117187499}{312499997} ABe^{-2\eta} + \frac{3AB}{8} - \frac{3}{4}\eta B^2 e^{-2\eta} - \frac{3}{8} B^2 e^{-2\eta} - \frac{37202381}{446428571}\eta A^2 e^{-2\eta} \\
& + \frac{37202381}{446428571}\eta^2 A^2 e^{-2\eta} + 2B - \frac{3}{8} A^2 e^{-2\eta} + \frac{3A^2}{8} + \frac{52083333}{312499997} ABe^{-2\eta}\eta^3 \\
& - \frac{39062500}{156249999} ABe^{-2\eta}\eta^2 - \frac{156249998}{208333331} ABe^{-2\eta}\eta + \frac{3B^2}{8}
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerdeki A ve B katsayılarını elde etmeliyiz. Bunun için yine (4.14) sınır koşullarını kullanacağız. İlk koşul olan $F(0) = 0$ şartından A ve B bilinmeyenlerine bağlı bir denklem gelmemektedir. İkinci koşul olan $F''(0) = -1.5$ koşulundan

$$
-2A - 0.4\times10^{-9} AB + 0.2\times10^{-9} B^2 + 2B = -1.5 \tag{4.55}
$$

denklemini elde ederiz. Diğer koşulu ise (4.53) denklemine [3/3] Padé yaklaşımını

$$\lim_{\eta\to\infty} F'_{[3/3]}(\eta) = 0 \tag{4.56}$$

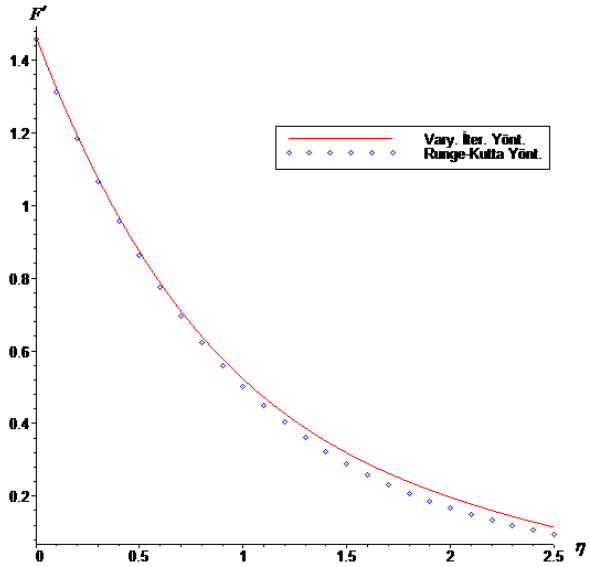
şeklinde uygulayarak bu yaklaşımın pay kısmı olan

$$\begin{aligned}
&0.9781700259\times10^{11}A^7 + 0.3950617306\times10^{13}A^5B + 0.9999999997\times10^{13}A^3B^3\\
&-0.9891975355\times10^{13}A^4B^2 - 0.6712962877\times10^{13}A^2B^4 + 0.6203703635\times10^{13}AB^5\\
&-0.4832175944\times10^{12}A^3B^4 - 0.3110532157\times10^{12}A^5B^2\\
&+0.1689814822\times10^{13}A^4B^3 - 0.5869020226\times10^{12}A^6B + 0.9548610998\times10^{12}A^2B^5\\
&-0.1012731484\times10^{13}AB^6 + 0.1736111107\times10^{12}A^6B^2 + 0.1929012326\times10^{12}A^4B^4\\
&+0.3858024416\times10^{11}A^5B^3 + 21.12264309A^3B^5 + 0.1286008470\times10^{11}A^7B\\
&+326.9675802A^2B^6 - 101.2731502AB^7 - 0.3055555542\times10^{13}B^6\\
&-0.4938271619\times10^{12}A^6 + 361.1111274B^7 - 0.3215020787\times10^{11}A^8\\
&-0.2777776304\times10^{-8}B^8 = 0
\end{aligned} \tag{4.57}$$

denklemi elde edilir. Son iki denklemin ortak çözümünden $A = 1.464737324$ ve $B = 0.7147373248$ olarak bulunur. Bu durumda $F'(0) = 1.464737324$ ve hız dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned}
F'(\eta) = {} & 0.3825232057 - 0.111297256\eta - 0.08724186996\eta^3e^{-2\eta}\\
& - 0.02128539352\eta^4e^{-2\eta} + 1.082214118e^{-2\eta} + 0.7757254961\eta e^{-2\eta}\\
& + 0.1021745655\eta^2e^{-2\eta}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

şeklinde elde edilir. (4.58) hız dağılım fonksiyonunun, dördüncü mertebe Runge-Kutta yönteminin atış yöntemi ile birlikte kullanılması sonucu elde edilen yaklaşık çözümü ile karşılaştırılması, Şekil 4.5.' de gösterilmiştir.



Şekil 4.5. $k = 0.5$ için hız dağılım fonksiyonu

Enerji denkleminin çözümüne geçtiğimizde yine (4.29) denklemi ve (4.30) sınır koşulları ile (4.34) iterasyon formülünde bir değişiklik olmayacaktır. Buradaki fark, sistemin ilk denkleminden gelen çözümü ve seçilecek başlangıç fonksiyonunun seçimidir. Başlangıç yaklaşımı için sınır koşullarını dikkate alarak yine

$$g_0(\eta) = Be^{-\eta} + C\eta e^{-\eta} \tag{4.59}$$

yaklaşımını ele alalım. $\Pr = 5$ için (4.34) iterasyonunu (4.59) başlangıç yaklaşımı ile iki adım çalıştırıp elde ettiğimiz (ve uzun bir denklem olduğu için burada belirtmediğimiz) çözüme, $g(0) = 1$ sınır koşulunu uygulayarak B ve C bilinmeyenli

$$1.000000007B + 0.2340740740 \times 10^{-7} C = 1 \tag{4.60}$$

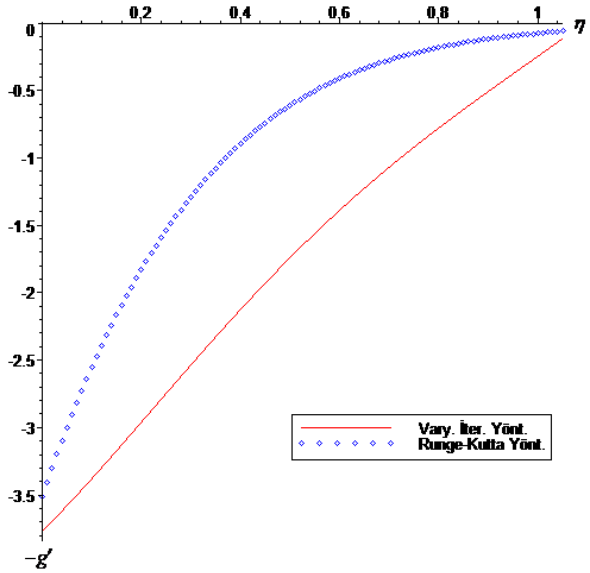
denklemini elde ederiz. Yine aynı çözüme [4/4] Padé yaklaşımını $\lim_{\eta\to\infty} g'(\eta) = 0$ sınır koşulunu düşünerek

$$\lim_{\eta\to\infty} g'_{[4/4]}(\eta) = 0 \tag{4.61}$$

şeklinde uyguladığımızda ise B ve C bilinmeyenli

$$0.5931828148\times10^{13}B^4C-0.1057991196\times10^{14}B^3C^2+0.6772288672\times10^{12}B^2C^3 \\ +0.2241705472\times10^{13}BC^4+0.1171742065\times10^{12}C^5-0.8050906528\times10^{12}B^5=0 \quad (4.62)$$

denklemi elde edilir. (4.60) ve (4.62) denklemlerinin ortak çözümünden $B=1.000000058$ ve $C=-2.769216499$ olarak bulunur. Bu değerler iterasyonu iki adım çalıştırıp elde ettiğimiz denklemde yazıldığında g' boyutsuz sıcaklık değişimi ve g sıcaklık profilleri elde edilmiş olur. Şekil 4.6.' da benzer karşılaştırma yapılmıştır.



Şekil 4.6. $k=0.5$, $\Pr=5$ için sıcaklık değişimi

4.2. Hiperbolik Tanjant ve Varyasyonel Hibrit Yöntemlerin Bazı Zamana Bağlı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlere Uygulanması

4.2.1. Varyasyonel iterasyon yöntemi ile birleştirilmiş hiperbolik tanjant yönteminin KdV denklemine uygulanması

Doğrusal olmayan yayılım denklemi, Korteweg ve de Vries (1895) tarafından

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0,\ x\in R \quad (4.63)$$

şeklinde belirtilmiştir.

Öncelikle (4.63) denklemi için varyasyonel iterasyon yöntemine özgü kuralları uygularsak, öncelikle

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+\int_0^t \lambda(\tau)\left\{\left(u_n(x,\tau)\right)_\tau+6u_n(x,\tau)\left(\tilde{u}_n(x,\tau)\right)_x+\left(\tilde{u}_n(x,\tau)\right)_{xxx}\right\}d\tau \quad (4.64)$$

fonksiyonelini dikkate alalım. $\tilde{u}_n$ sınırlanmış bir varyasyon olarak dikkate alındığında varyasyon uygulanmış

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1}(x,t)&=\delta u_n(x,t)\\&+\delta\int_0^t \lambda(\tau)\left\{\left(u_n(x,\tau)\right)_\tau+6u_n(x,\tau)\left(\tilde{u}_n(x,\tau)\right)_x+\left(\tilde{u}_n(x,\tau)\right)_{xxx}\right\}d\tau,\end{aligned} \quad (4.65)$$

denkleminden $\delta\tilde{u}_n=0$ dikkate alınarak aşağıdaki işlemler sonucu

$$\left.\begin{aligned}\delta u_{n+1}(x,t)&=\delta u_n(x,t)+\int_0^t \lambda(\tau)\left(\delta u_n(x,\tau)\right)_\tau d\tau\\ \delta u_{n+1}(x,t)&=\delta u_n(x,t)+\lambda(\tau)\delta u_n(x,\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\int_0^t \lambda'(\tau)\delta u_n(x,\tau)d\tau\end{aligned}\right\} \quad (4.66)$$

ifadesinden

$$\lambda'(\tau)=0, \quad (4.67)$$

$$1+\lambda(\tau)\big|_{\tau=t}=0 \quad (4.68)$$

(4.67) Euler-Lagrange denklemi ve (4.68) doğal sınır koşulunu elde ederiz. Lagrange çarpanı buradan $\lambda(\tau)=-1$ olarak bulunur. Bu durumda (4.64) eşitliği ile verilen varyasyonel iterasyon formülü

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)-\int_0^t \left\{\left(u_n(x,\tau)\right)_\tau+6u_n(x,\tau)\left(u_n(x,\tau)\right)_x+\left(u_n(x,\tau)\right)_{xxx}\right\}d\tau \quad (4.69)$$

şeklini alır.

Bu eşitlik için gerekli başlangıç yaklaşımını, 3.5. kısmında anlatılan hiperbolik tanjant yöntemi aracılığıyla bulalım.

(4.63) denklemi ile verilen KdV denklemini

$$\xi = k\left(x - \omega t\right) \tag{4.70}$$

dalga değişkeni ile

$$-k\omega U'\left(\xi\right) + 6kU\left(\xi\right)U'\left(\xi\right) + k^3 U'''\left(\xi\right) = 0 \tag{4.71}$$

adi diferensiyel denklemine indirgeyelim. Bu denklemde k sadeleştirilip bir kez de integral alınırsa, integrasyon sabiti sıfır kabul edilerek

$$-\omega U\left(\xi\right) + 3U^2\left(\xi\right) + k^2 U''\left(\xi\right) = 0 \tag{4.72}$$

denklemi elde edilir.

(3.84) ve (3.85) eşitliklerini (4.72) denkleminde yerine yazdığımızda

$$-\omega S\left(Y\right) + 3S^2\left(Y\right) + k^2\left(1 - Y^2\right)\left(-2Y\frac{dS\left(Y\right)}{dY} + \left(1 - Y^2\right)\frac{d^2 S\left(Y\right)}{dY^2}\right) = 0 \tag{4.73}$$

eşitliğini elde ederiz. 3.5. bölümünün 6. maddesinde belirtildiği şekilde U'' ve U^2 terimlerinin dengelenmesi sonucu, $2 + \left(2 + \left(M - 2\right)\right) = 2M$ eşitliğinden $M = 2$ bulunur. Bu durumda çözüm formu

$$S\left(Y\right) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \tag{4.74}$$

şeklinde veya (3.80) ve (3.83) eşitliklerinden

$$u\left(x,t\right) = U\left(\xi\right) = a_0 + a_1 \tanh\xi\left(x,t\right) + a_2 \tanh^2\xi\left(x,t\right) \tag{4.75}$$

olur. $\xi = k\left(x - \omega t\right)$ olmak üzere (4.69) eşitliği için aradığımız başlangıç yaklaşımını

$$u_0\left(x,t\right) = a_0 + a_1 \tanh \xi\left(x,t\right) + a_2 \tanh^2 \xi\left(x,t\right) \tag{4.76}$$

şeklinde alalım.

(4.63) denkleminin tam çözümü için (4.76) eşitliğini (4.69) eşitliğinde yazıp (3.88) ilişkisini kullanarak Maple 13 programı yardımıyla a_0, a_1, a_2, k ve ω katsayılarına bağlı bilinmeyenleri ile cebirsel denklemlerin bir sistemi elde edilir. Bu denklemlerin çözümü sonucunda aşağıdaki çözüm kümesini elde ederiz.

$$k = 0, \omega = \omega, a_0 = a_0, a_1 = a_1, a_2 = a_2 \tag{4.77}$$

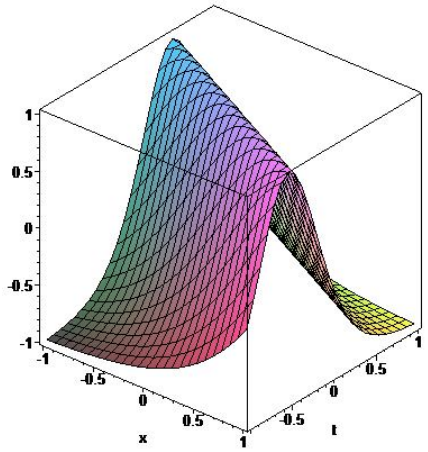
$$k = k, \omega = \omega, a_0 = a_0, a_1 = 0, a_2 = 0 \tag{4.78}$$

$$k = k, \omega = -8k^2 + 6a_0, a_0 = a_0, a_1 = 0, a_2 = -2k^2 \tag{4.79}$$

Bu çözümlerden bilimsel öneme sahip olanları yazacak olursak, sadece (4.79) denkleminden

$$u\left(x,t\right) = a_0 - 2k^2 \tanh^2\left(k\left(x - \left(6a_0 - 8k^2\right)t\right)\right) \tag{4.80}$$

çözümü elde edilir. Varyasyonel iterasyon yöntemi ile birleştirilmiş hiperbolik tanjant yöntemi yardımıyla elde edilen bu çözümün grafiğini, Maple 13 programı yardımıyla çizersek Şekil 4.7. elde edilir.



Şekil 4.7. Varyasyonel iterasyon yöntemi ile birleştirilmiş hiperbolik tanjant yöntemi ile KdV denkleminin çözümünün $k=1,\ a_0=1$ için grafiği

4.2.2. KdV denklemi için varyasyonel iterasyon yönteminde hiperbolik tanjant yaklaşımı

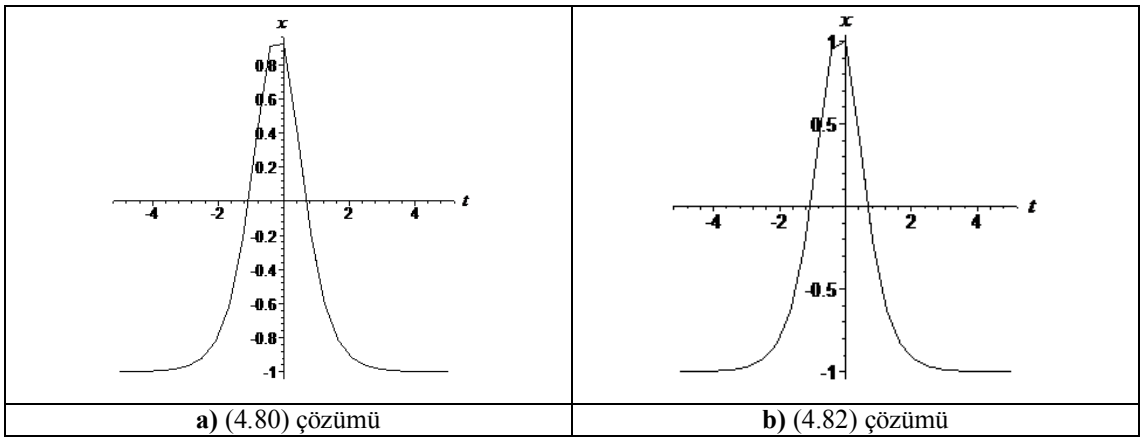
Bu kısımda 3. Bölüm 3.6.2 kısmında bahsedilen düşünceden hareketle, (4.63) denkleminin (4.80) çözümünde $t=0$ alarak $a_0=1$ özel değerleri için, varyasyonel iterasyon yönteminde kullanacağımız bir başlangıç yaklaşımını

$$u_0(x,0)=1-2k^2\tanh^2(kx) \tag{4.81}$$

şeklinde elde edelim. Bu kez (4.69) denklemini (4.81) başlangıç fonksiyonu ile bir kez çalıştırdığımız zaman elde edilen çözüm

$$\begin{aligned} u(x,t)=1-2k^2\tanh^2(kx)+24\left(1-2k^2\tanh^2(kx)\right)k^3\tanh(kx)\left(1-\tanh^2(kx)\right)t \\ -32k^5\left(1-\tanh^2(kx)\right)^2\tanh(kx)t+16k^5\tanh^3(kx)\left(1-\tanh^2(kx)\right)t \end{aligned} \tag{4.82}$$

şeklindedir. (4.80) çözümünün grafiği ile (4.82) çözümünün grafiği Şekil 4.8.' de belirtilmiştir.



a) (4.80) çözümü | **b)** (4.82) çözümü

Şekil 4.8. (4.80) ve (4.82) çözümlerinin $-5 \le x \le 5,\ t = 0.1$ anında şekil yönünden karşılaştırılması

4.2.3. Varyasyonel iterasyon yöntemi ile birleştirilmiş hiperbolik tanjant yönteminin Boussinesq denklemine uygulanması

Doğrusal olmayan bir biçimde yayılan dalga denklemlerinin iyi bilinen bir modeli Boussinesq tarafından

$$u_{tt} = u_{xx} + 3\left(u^2\right)_{xx} + u_{xxxx} \tag{4.83}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (4.83) denkleminde 3.6.1. kısmında belirtilen adımları takip edelim. Bunun için öncelikle varyasyonel iterasyon yöntemini uygulayalım. Bu amaçla

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x,t) &= u_n(x,t) \\ &+ \int_0^t \lambda(\tau)\left\{\left(u_n(x,\tau)\right)_{\tau\tau} - \left(\tilde{u}_n(x,\tau)\right)_{xx} - 3\left(\tilde{u}_n{}^2(x,\tau)\right)_{xx} - \left(\tilde{u}_n(x,\tau)\right)_{xxxx}\right\} d\tau \end{aligned} \tag{4.84}$$

fonksiyonelini dikkate alalım. $\tilde{u}_n$ sınırlanmış bir varyasyon olarak dikkate alındığında varyasyon uygulanmış denklemde $\delta\tilde{u}_n = 0$ dikkate alınarak elde edilen

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\tau)\left(\delta u_n(x,\tau)\right)_{\tau\tau}\, d\tau \tag{4.85}$$

denklemindeki integralde kısmi integrasyon işlemi sonucu

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \lambda(\tau)\left(\delta u_n(x,\tau)\right)_\tau\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \lambda'(\tau)\delta u_n(x,\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \lambda''(\tau)\delta u_n(x,\tau)\,d\tau \tag{4.86}$$

denklemi ve

$$\lambda''(\tau) = 0 \tag{4.87}$$

$$1 - \lambda'(\tau)\Big|_{\tau=t} = 0 \tag{4.88}$$

$$\lambda(\tau)\Big|_{\tau=t} = 0 \tag{4.89}$$

eşitlikleri elde edilir. Lagrange çarpanı buradan $\lambda(\tau) = \tau - t$ olarak bulunur. Bu durumda (4.84) eşitliği ile verilen varyasyonel iterasyon formülü

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t (\tau - t)\left\{\left(u_n(x,\tau)\right)_{\tau\tau} - \left(u_n(x,\tau)\right)_{xx} - 3\left(u_n{}^2(x,\tau)\right)_{xx} - \left(u_n(x,\tau)\right)_{xxxx}\right\}d\tau \tag{4.90}$$

şeklini alır.

Bu eşitlik için gerekli başlangıç yaklaşımını 3.5. kısmında belirtildiği şekilde elde etmeye çalışalım.

$\xi = k(x - \omega t)$ dalga değişkeni olmak üzere (4.83) denklemini

$$k^2\omega^2 U''(\xi) - k^2 U''(\xi) - 6k^2U^2(\xi) - 6k^2U(\xi)U''(\xi) - k^4U^{(4)}(\xi) = 0 \tag{4.91}$$

adi diferensiyel denklemine indirgeyelim. k^2'nin sadeleşmesi ve integrasyon sabiti sıfır alınarak iki kez integral alınması sonucu

$$\omega^2 U(\xi) - U(\xi) - 3U^2(\xi) - k^2U''(\xi) = 0 \tag{4.92}$$

denklemini elde ederiz.

(3.84) ve (3.85) eşitliklerini (4.92) denkleminde yerine yazdığımızda

$$\omega^2 S(Y) - S(Y) - 3S^2(Y) - k^2\left(1-Y^2\right)\left(-2Y\frac{dS(Y)}{dY} + \left(1-Y^2\right)\left(\frac{d^2S(Y)}{dY^2}\right)\right) = 0 \qquad (4.93)$$

eşitliğini elde ederiz. 3.5. bölümünün 6. maddesinde belirtildiği şekilde U'' ve U^2 terimlerinin dengelenmesi sonucu $2+\left(2+\left(M-2\right)\right)=2M$ eşitliğinden $M=2$ bulunur. Bu durumda çözüm formu

$$S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \qquad (4.94)$$

şeklinde veya (3.80) ve (3.83) eşitliklerinden

$$u(x,t) = U(\xi) = a_0 + a_1 \tanh\xi(x,t) + a_2 \tanh^2\xi(x,t) \qquad (4.95)$$

olur. $\xi = k\left(x-\omega t\right)$ olmak üzere (4.90) eşitliği için aradığımız başlangıç yaklaşımını

$$u_0(x,t) = a_0 + a_1 \tanh\xi(x,t) + a_2 \tanh^2\xi(x,t) \qquad (4.96)$$

şeklinde alalım.

(4.83) denkleminin tam çözümü için (4.96) eşitliğini (4.90) eşitliğinde yazıp (3.88) ilişkisini kullanarak Maple 13 programı yardımıyla a_0, a_1, a_2, k ve ω katsayılarına bağlı bilinmeyenleri ile cebirsel denklemlerin bir sistemi elde edilir. Bu denklemlerin çözümü sonucunda aşağıdaki çözüm kümesini elde ederiz.

$$k = 0, \omega = \omega, a_0 = a_0, a_1 = a_1, a_2 = a_2 \qquad (4.97)$$

$$k = k, \omega = \omega, a_0 = a_0, a_1 = 0, a_2 = 0 \qquad (4.98)$$

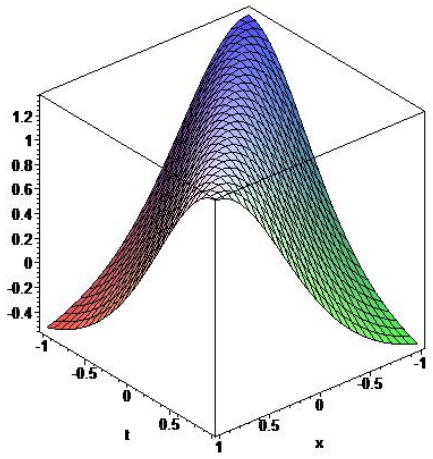
$$k = k, \omega = \omega, a_0 = -\frac{1}{6} + \frac{\omega^2}{6} + \frac{4k^2}{3}, a_1 = 0, a_2 = -2k^2 \qquad (4.99)$$

Bu çözümlerden bilimsel öneme sahip olanları yazacak olursak, sadece (4.99) denkleminden

$$u(x,t) = -\frac{1}{6} + \frac{\omega^2}{6} + \frac{4k^2}{3} - 2k^2 \tanh^2\left(k\left(x-\omega t\right)\right) \tag{4.100}$$

çözümü elde edilir.

Bu çözümün grafiğini Maple 13 programı yardımıyla çizersek Şekil 4.9. elde edilir.



Şekil 4.9. Varyasyonel iterasyon yöntemi ile birleştirilmiş hiperbolik tanjant yöntemi ile Boussinesq denkleminin çözümünün $k=1,\ \omega=1$ için grafiği

4.2.4. Boussinesq denklemi için varyasyonel iterasyon yönteminde hiperbolik tanjant yaklaşımı

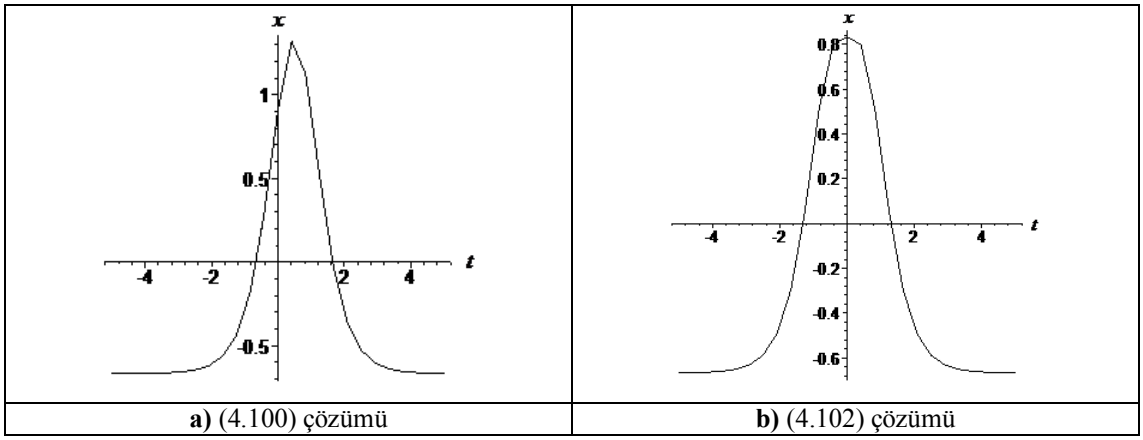
3. Bölüm 3.6.2 kısmında bahsedilen düşünce ile (4.83) denkleminin (4.100) çözümünde $t=0$ alarak varyasyonel iterasyon yönteminde kullanacağımız bir başlangıç yaklaşımını

$$u_0(x,0) = -\frac{1}{6} + \frac{\omega^2}{6} + \frac{4k^2}{3} - 2k^2 \tanh^2\left(kx\right) \tag{4.101}$$

şeklinde seçelim. (4.90) denklemini (4.101) başlangıç fonksiyonu ile bir kez çalıştırdığımız zaman elde edilen çözüm

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = &-\frac{1}{6}+\frac{\omega^2}{6}+\frac{4k^2}{3}-2k^2\tanh^2(kx)-\frac{1}{2}\Big\{4k^4\left(1-\tanh^2(kx)\right)^2 \\
&-8k^4\tanh^2(kx)\left(1-\tanh^2(kx)\right)^2+80k^6\tanh^2(kx)\left(1-\tanh^2(kx)\right)^2 \\
&+24\left(-\frac{1}{6}+\frac{\omega^2}{6}+\frac{4k^2}{3}-2k^2\tanh^2(kx)\right)k^4\left(1-\tanh^2(kx)\right)^2 \\
&-48\left(-\frac{1}{6}+\frac{\omega^2}{6}+\frac{4k^2}{3}-2k^2\tanh^2(kx)\right)k^4\tanh^2(kx)\left(1-\tanh^2(kx)\right) \\
&-32k^6\left(1-\tanh^2(kx)\right)^3-32k^6\tanh^4(kx)\left(1-\tanh^2(kx)\right)\Big\}t^2
\end{aligned}
\tag{4.102}
$$

şeklindedir. (4.100) çözümünün grafiği ile (4.102) çözümünün grafiği Şekil 4.10.' da belirtilmiştir.



a) (4.100) çözümü	**b)** (4.102) çözümü

Şekil 4.10. (4.100) ve (4.102) çözümlerinin $-5 \le x \le 5,\ t = 0.5$ anında şekil yönünden karşılaştırılması

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

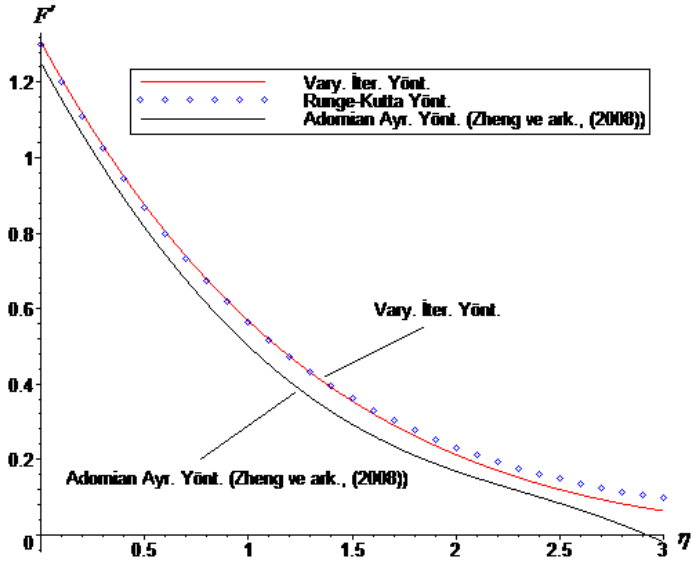
5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında literatürde son zamanlarda sıklıkla karşılaşılan iki çözüm yöntemi ele alınmıştır.

İlk yöntem olan varyasyonel iterasyon yöntemi ile pek çok doğa ve mühendislik probleminde görülen bir madde taşınımına ait diferensiyel denklem sisteminin yaklaşık çözümü araştırılmıştır. Bu çözüm yapılırken sınır koşullarındaki sonsuz sınır şartlarına, yaklaşık çözüme literatürde Padé yaklaşımı olarak bilinen tekniğin uygulanmasıyla işlev kazandırılmıştır. Elde edilen çözümler ise problemde geçen sonsuz sınır şartından dolayı atış yöntemi olarak bilinen yaklaşımın dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile birlikte kullanılması sonucu elde edilen yaklaşık çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Elde ettiğimiz sonuçları bu sistem üzerine Zheng ve ark. (2008) tarafından yapılan çalışmadaki sonuçlarla karşılaştıralım.

i) $k = 0$ **için**

Zheng ve ark. (2008) tarafından Adomian ayrışım yöntemi ile elde ettikleri hız dağılım fonksiyonuna ait çözüm ile varyasyonel iterasyon yönteminden elde ettiğimiz (4.24) çözümünü karşılaştırdığımızda, Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümü de göz önüne alarak, daha yakın bir çözüme ulaşıldığı Şekil 5.1. aracılığıyla gösterilmiştir.

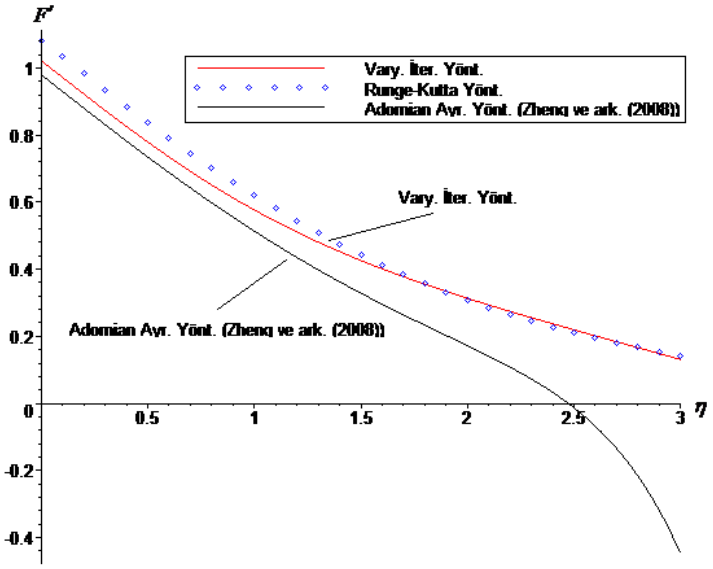


Şekil 5.1. $k = 0$ için hız dağılım fonksiyonlarının karşılaştırması

Sistemin diğer denkleminden elde ettiğimiz sıcaklık dağılım fonksiyonuna ait sonucun, Runge-Kutta yönteminden elde edilen yaklaşık çözüm ile karşılaştırılması Şekil 4.2.' de gösterilmişti. Sıcaklık dağılımının $k = 0$ değeri için Zheng ve ark. (2008), herhangi bir çözüm fonksiyonu vermemişlerdir.

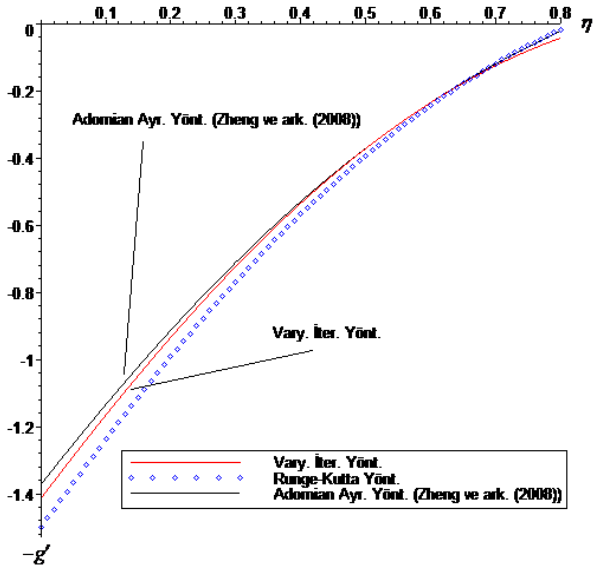
ii) $k = -0.5$ **için**

Benzer şekilde çözümler karşılaştırıldığında varyasyonel iterasyon yönteminden elde edilen çözümün Adomian ayrışım yönteminden elde edilen çözüme göre daha geniş bir aralıkta temsil kabiliyeti Şekil 5.2.' de gözükmektedir.



Şekil 5.2. $k = -0.5$ için hız dağılım fonksiyonlarının karşılaştırması

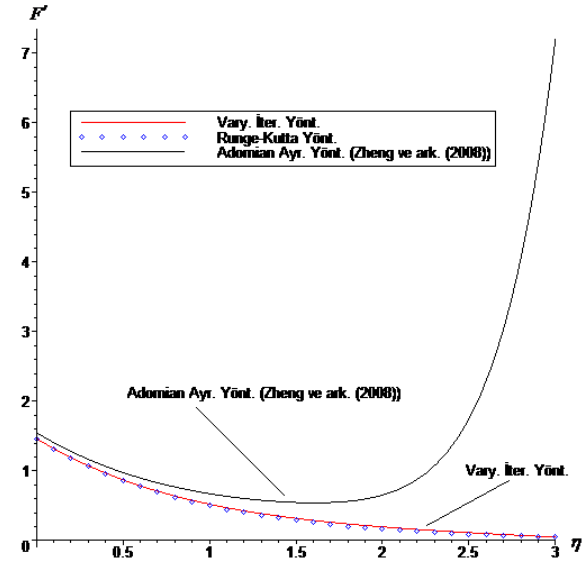
Sistemin diğer denklemi için elde ettiğimiz sıcaklık dağılım fonksiyonuna ait çözümün grafiği ile Zheng ve ark. (2008) tarafından elde edilen çözümün grafiği oldukça uyumludur. Şekil 5.3.' de ilgili grafikler gösterilmektedir.



Şekil 5.3. $k = -0.5$ için sıcaklık dağılım fonksiyonlarının karşılaştırması

iii) $k = 0.5$ **için**

k' nın bu değerine karşılık bulunan hız dağılım fonksiyonuna ait grafiklerde önemli farklılıklar göze çarpmaktadır. Şekil 5.4.' de ilgili grafikler gösterilmiştir.



Şekil 5.4. $k = 0.5$ için hız dağılım fonksiyonlarının karşılaştırması

Sistemin diğer denklemi Zheng ve ark. (2008) herhangi bir çözüm vermediklerinden $k = 0$ durumuna benzer şekilde sadece kendi çözümümüzü Runge-Kutta yönteminden

elde ettiğimiz çözümle karşılaştırdık. Bu karşılaştırmanın grafiği Şekil 4.6.' da gösterilmişti.

Tez çalışmasında ele alınan ikinci yöntem ise yine literatürde karşılaşılan hiperbolik tanjant yöntemidir. Çalışmada, varyasyonel iterasyon yöntemi ile hiperbolik tanjant yönteminin iki farklı yaklaşımla hibritlenmesi gerçekleştirilerek bazı kısmi türevli diferensiyel denklemlere yönelik tam ve yaklaşık çözümler aranmıştır.

5.2. Öneriler

Literatürde daha önceden mühendislik problemlerinin çözümünde de kullanılan varyasyonel iterasyon yöntemi, sonsuz sınır şartına sahip denklemlerde bu tür şartlara işlerlik kazandıracak şekilde, Padé yaklaşımı gibi tekniklerle birlikte kullanılabilir. İleri çalışmalarda, aslında yaklaşık çözümü iyileştiren Padé yaklaşımının, gerçek çözümden uzaklaşmadan yaklaşık çözüm aralığını genişletmek amacıyla tekrar değerlendirilmesi düşünülebilir.

Diğer taraftan bahsi geçen hibritleme yaklaşımı, hiperbolik tanjant yönteminin kullanımına uygun denklemlerde yeni tam çözümlerin elde edilmesine imkân verebilir. Bu doğrultuda ileri çalışmalarda bu tip denklemler üzerinde yeni tam çözümler aranabilir.

KAYNAKLAR

Abassy, T.A., El-Tawil, M.A., Zoheiry, H.E., 2007, Toward a modified variational iteration method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207, 137-147.

Abbaoui, K., Cherruault, Y., 1999, Convergence of Adomians method applied to differential equations, *Comput. Math. Appl.*, 102, 77-86.

Ablowitz, M.J., Segur, H., 1981, Solitons and The Inverse Scattering Transform, *SIAM Publications*, Philadelphia, 1-4.

Adomian, G., 1984, A new approach to nonlinear partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 102, 420-434.

Adomian, G., 1988, A review of the decomposition method in applied mathematics, *J. Math. Anal. Appl.*, 135, 501-544.

Al-Khaled, K., Al-Refai, M., Alawneh, A., 2008, Traveling wave solutions using the variational method and the tanh method for nonlinear coupled equations, *Applied Mathematics and Computation*, 202, 233-242.

Arafune, K., Hirata, A., 1998, Interactive solutal and thermal Marangoni convection in a rectangular open boat, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 34, 421-429.

Arafune, K., Hirata, A., 1999, Thermal and solutal Marangoni convection in In-Ga-Sb system, *Journal of Crystal Growth*, 197 (4), 811-817.

Ayaz, F., 2004, Solutions of the system of differential equations by differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 147 (2), 547-567.

Boussinesq, J., 1871, Théorie de I'intumescence liquid appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, *Comptes Rendus de I'Acedemie de Sciences*, 72, 755-759.

Boussinesq, M.J., 1872, Théorie des ondes et des rumous qui se propagent le long d'un canal rectagulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees series*, 17 (2), 55-108.

Boyd, J., 1997, Padé approximant algorithm for solving nonlinear ordinary differential equation boundary value problems on an unbounded domain, *Computers in physics*, 11 (3), 299-303.

Chen, C.K., Ho, S.H., 1999, Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method, *Appl. Math. Comput.*, 106, 171-179.

Chen, H., Zhang, H., 2004, New multiple soliton solutions to the general Burgers-Fisher equation and the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Chaos Solitons&Fractals*, 19, 71-76.

Cherruault, Y., 1989, Convergence of Adomian's method, *Kybernetes*, 18 (2), 31-38.

Christopher, D.M., Wang, B.-X., 2001, Similarity simulation for Marangoni convection around a vapor bubble during nucleation and growth, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44 (4), 799-810.

Debnath, L., 2007, A Brief Historical Introduction to Solitons and the Inverse Scattering Transform--A Vision of Scott Russell, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38 (8), 1003-1028.

Desheng, L., Ying, H., 2009, A new general algebraic method with symbolic computation and its application to two nonlinear differential equations, *Proceedings of the 2009 International Workshop on Information Security and Application (IWISA 2009)*, Qingdao, China, 512-515.

Drazin, P.G., Johnson, R.S., 1996, Solitons an introduction, *Cambridge University Press*, New York, 7-16.

Elsgolts, L., 1977, Differential Equations and the Calculus of Variations, *Mir Publishers*, Moscow, 297-323.

Elwakil, S. A., El-labany, S. K., Zahran, M. A., Sabry, R., 2002, Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations, *Phys. Lett. A.*, 299, 179-188.

Falkovich, G., 2007, Soliton:A brief history of [online], http://www.weizmann.ac.il/home/fnfal/soliton.pdf [Ziyaret Tarihi: 10.07.2010]

Fan, E., 2000, Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Phys. Lett. A.*, 277, 212-218.

Fermi, E., Pasta, J.R., Ulam, S.M., (Los Alamos Sci. Lab.), 1955, Studies of nonlinear problems, *LA-1940*, pp 20. (Also in Collected works of E. Fermi, 1965, Vol.II., The Univ. of Chicago Press, Chicago, 978-988).

Finlayson B.A. 1972. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, NewYork.

Ganji, D.D., Afrouzi, G.A., Talarposhti, R.A., 2007, Application of He's variational iteration method for solving the reaction-diffusion equation with ecological parameters, *Computers and Mathematics with Applications*, 54, 1010-1017.

Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M., 1967, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.*, 19, 1095-1098.

Gelfand, I.M., Fomin, S.V., 2000, Calculus of Variations, *Dover Publications*, America, 1-22.

Geng, F., Lin, Y., Cui, M., 2009, A piecewise variational iteration method for Riccati differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 58, 2518-2522.

Geng, F., 2010, A modified variational iteration method for solving Riccati differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 60, 1868-1872.

Ghorbani, A., Saberi-Nadjafi, J., 2009, An effective modification of He's variational iteration method, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10, 2828-2833.

Goh, S.M., Noorani, M.S.M., Hashim, I., 2008, Prescribing a multistage analytical method to a prey-predator dynamical system, *Physics Letter A*, 373, 107-110.

Goh, S.M., Ismail, A.I.M., Noorani, M.S.M., Hashim, I., 2009, Dynamics of the Hantavirus infection through variational iteration method, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10, 2171-2176.

Gómez, C.A., Salas, A.H., 2010, The variational iteration method combined with improved generalized tanh-coth method applied to Sawada-Kotera equation, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (4), 1408-1414.

Grimshaw, R., 2004, Korteweg-de Vries equation, *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Ed. A.C.Scott, *Taylor and Francis*, New York, 504-511.

Gülsu, M, Sezer, M., 2006, Taylor collocation method for solution of systems of high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 83 (4), 429-448.

Gülsu, M., Sezer, M., Güney, Z., 2006, Approximate solution of general high-order linear nonhomogeneous difference equations by means of Taylor collocation method, *Applied Mathematics and Computation*, 173 (2), 683-693.

He, J.H., 1997, A new approach to nonlinear partial differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2 (4), 230-235.

He, J.-H., 1997, Variational Iteration Method for Delay Differential Equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2 (4), 235-236.

He, J.-H., 1998, Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167, 57-68.

He, J.-H., 1999, Variational Iteration Method - a kind of non-linear analytical technique: some examples, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34, 699-708.

He, J.-H., 2000, Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, *Applied Mathematics and Computation*, 114, 115-123.

Inokuti, M., Sekine, H, Mura, T., 1978, General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics, *Variational Method in the Mechanics of Solids*, Ed. Nemat-Nasser, S., Pergamon Press, Oxford, 156-162.

İnan, İ. E., Uğurlu, Y., 2010, Exp-function method for the exact solutions of fifth order KdV equation and modified Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (4), 1294-1299.

Karamete, A. 1996, "Lineer Diferensiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi", Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.

Karamete, A., Sezer, M., 2002, A Taylor Collocation Method for the Solution of Linear Integro-Differential Equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 79 (9), 987-1000.

Karaoğlu, O., Oturanç, G., 2012, A study on Marangoni convection by the variational iteration method, *10th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Greece, Kos, AIP Conf. Proc. 1479, pp. 402-406.

Keskin, Y., Oturanç, G., 2009, Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10 (6), 741-749.

Keskin, Y., Karaoğlu, O., Servi, S., Oturanç, G., 2011, The Approximate Solution of High-Order Linear Fractional Differential Equations with Variable Coefficients in Terms of Generalized Taylor Polynomials, *Mathematical and Computational Applications*, 16 (3), 617-629.

Korteweg, D.J., de Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine*, 39, 422-443.

Kurnaz, A., Oturanç, G., 2005, n-Dimensional differential transformation method for solving PDEs, *International Journal of Computer Mathematics*, 82 (3), 369-380.

Kurnaz, A., Oturanç, G., 2005, The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 82 (6), 709-719.

Lan, H., Wang, K., 1990, Exact solutions for two nonlinear equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 23, 3923-3928.

Lou S., Huang G., Ruan H. J., 1991, Exact solitary waves in a convecting fluid, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24, L587-L590.

Malfliet, W., 1992, Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *Am. J. Phys.*, 60, 650-654.

Meggs, L., 2011, The Marangoni Effect: A Fluid Phenom [online], International Space Station Program Science Office, http://www.nasa.gov/mission_pages/station/research/news/marangoni.html [Ziyaret Tarihi: 12.06.2012]

Miansari, M., Ganji, D.D., Miansari M., 2008, Application of He's variational iteration method to nonlinear heat transfer equations, *Physics Letter A*, 372, 779-785.

Momani, S., Abuasad, S., Odibat, Z., 2006, Variational iteration method for solving nonlinear boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 183, 1351-1358.

Momani, S., Odibat, Z., 2006, Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics, *Physics Letter A*, 355, 271-279.

Newell, A.C., 1985, Solitons in Mathematics and Physics, 48, *SIAM Publications*, Philadelphia, 1-3.

Odibat, Z.M., 2008, Construction of solitary solutions for nonlinear dispersive equations by variational iteration method, *Physics Letter A*, 372, 4045-4052.

Odibat, Z.M., 2008, Reliable approaches of variational iteration method for nonlinear operators, *Mathematical and Computer Modelling*, 48, 222-231.

Odibat, Z.M., 2010, A study on the convergence of variational iteration method, *Mathematical and Computer Modelling*, 51, 1181-1192.

Okano, Y., Itoh, M., Hirata, A., 1989, Natural and Marangoni convections in a two-dimensional rectangular open boat, *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 22 (3), 275-281.

Parkes, E.J., Duffy, B.R., 1996, An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations, *Comput. Phys. Commun.*, 98, 288-300.

Peker, H.A., Karaoğlu, O., Oturanç, G., 2011, The Differential Transformation Method and Pade Approximant for a Form of Blasius Equation, *Mathematical and Computational Applications*, 16 (2), 507-513.

Rach, R., 1984, A convenient computational form for the Adomian polynomials, *J. Math. Anal. Appl.*, 102, 415-419.

Rafei, M., Daniali, H., Ganji, D.D., 2007, Variational iteration method for solving the epidemic model and the prey and predator problem, *Applied Mathematics and Computation*, 186 (2), 1701-1709.

Rashidi, M. M., Shahmohamadi, H., 2009, Analytical solution of three-dimensional Navier-Stokes equations for the flow near an infinite rotating disk, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 14, 2999-3006.

Rayleigh, L., 1876, On waves, *Philosophical Magazine*, 5 (1), 257-279.

Russell, J.S., 1844, Report on waves. Rept. Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, *John Murray*, London, 311-390.

Seng, V., Abbaoui, K., Cherruault, Y., 1996, Adomians polynomials for nonlinear operators, *Mathl. Comput. Modelling*, 24, 59-65.

Sezer, M., 1990, Diferansiyel Denklemler - I ve Çözümlü Problemler, Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, İzmir, 78.

Shou, D.-H., 2009, He's variational iteration method for two-strand yarn spinning, *Nonlinear Analysis*, 71, e830-e833.

Slavtchev, S. G., Miladinova, S. P., 1998, Thermocapillary flow in a liquid layer at minimum in surface tension, *Acta Mechanica*, 127, 209-224.

Soltani, L.A., Shirzadi, A., 2010, A new modification of the variational iteration method, *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 2528-2535.

Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, *Indian Academy of Sciences*, 57 (5-6): 841-847.

Wang, S.-Q., He, J.-H., 2007, Variational iteration method for solving integro-differential equations, *Physics Letters A*, 367, 188-191.

Wazwaz, A.-M., 2001, A reliable algorithm for solving boundary value problem for higher-order integro-differential equations, *Applied Mathematics and Computation,* 118 (2-3), 327-342.

Wazwaz, A. - M., 2002, Partial Differential Equations Methods and Applications, *A.A. Balkema Publishers*, Tokyo, 369-381.

Wazwaz, A.-M., 2004, The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation,* 154 (3), 713-723.

Wazwaz, A. - M., 2007, A comparison between the variational iteration method and Adomian decomposition method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1, 129-136.

Wazwaz, A.-M., 2007, The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of PDEs, *Computers and Mathematics with Applications*, 54, 895-902.

Wazwaz, A.-M., 2007, The variational iteration method: A reliable analytic tool for solving linear and nonlinear wave equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 54, 926-932.

Wazwaz, A.-M., 2009, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, 1-2, *Higher Education Press*, Beijing and Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.

Xu, L., 2007, Variational iteration method for solving integral equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 54 (7-8), 1071-1078.

Yang, G., Chen, R., 2011, Choice of an optimal initial solution for a wave equation in the variational iteration method, *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 2053-2057.

Yomba, E., 2004, Construction of new soliton-like solutions of the (2+1) dimensional dispersive long wave equation, *Chaos Solitons & Fractals*, 20, 1135-1139.

Yusufoğlu, E., Erbaş, B., 2008, He's variational iteration method applied to the solution of the prey and predator problem with variable coefficients, *Physics Letter A*, 372, 3829-3835.

Zabusky, N.J., Kruskal M.D., 1965, Interactions of solitons in a collision less plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters*, 15, 240-243.

Zheng, X., Chen, Y., Zhang, H., 2003, Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1) -dimensional dispersive long wave equation, *Phys. Lett. A.*, 311, 145-157.

Zheng, L., Zhang, X., Gao, Y., 2008, Analytical solution for Marangoni convection over a liquid vapor surface due to an imposed temperature gradient, *Mathematical and Computer Modelling*, 48, 1787-1795.

Zhou, J.K., 1986, Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits, *Huazhong University Press*, Wuhan, China (in Chinese).

Zhu, J.-M., 2009, New explicit exact solutions of the mKdV equation using the variational iteration method combined with Exp-function method, *Chaos, Solitons and Fractals*, 40, 952-957.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Onur KARAOĞLU
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Tokat, 1979
Telefon : 0 332 223 39 58
Faks : –
e-mail : okaraoglu@yahoo.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Turhal Cumhuriyet Lisesi, Turhal, Tokat	1996
Üniversite	:	Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca, İzmir	2001
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2005
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2013

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2001-2001	Bayındır İmam-Hatip Lisesi	Matematik Öğr.
2001-2013	Selçuk Üniversitesi	Arş. Gör.

UZMANLIK ALANI

Uygulamalı Matematik

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Selçuk Üniversitesi Öğretim Üyeliği Kadrolarına Başvuru ile ilgili "Atanma ve Yükseltme Ölçütleri ve Uygulama Esasları" na göre hazırlanmış faaliyetlerin listesi aşağıdadır.

A - Uluslararası Çalışmalar

A-2) Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler :

A2-1. H.Alpaslan Peker, **Onur Karaoğlu**, Galip Oturanç, "The Differential Transformation Method and Pade Approximant for a Form of Blasius Equation", Mathematical and Computational Applications, 16 (2), 2011, 507-513.

A2-2. Yıldıray Keskin, **Onur Karaoğlu**, Sema Servi, Galip Oturanç, "The Approximate Solution of High-Order Linear Fractional Differential Equations with Variable

Coefficients in Terms of Generalized Taylor Polynomials", Mathematical and Computational Applications, 16 (3), 2011, 617-629.

A-3) Diğer Uluslararası Hakemli Dergilerdeki Yayınlar :

A3-1. H.Alpaslan Peker, **Onur Karaoğlu**, "Solution of a Kind of Evolution Equation by the Differential Transformation and Adomian Decomposition Methods", Selçuk Journal of Applied Mathematics, 2 nd National Workshop of Konya Ereğli Kemal Akman College, 13-14 May 2010, Special Issue, 19-25.

B- Uluslararası Bildiriler

B-1) Yabancı Dilde Sözlü Sunulan ve Tam Metni Yayınlananlar :

B-1-1. Onur Karaoğlu, Galip Oturanç, A study on Marangoni convection by the variational iteration method, 10th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, AIP Conf. Proc. 1479, pp. 402-406. **(Doktora Tezinden yapılmıştır.)*

B-1.1) Yabancı Dilde Sözlü Sunulan ve Özeti Yayınlananlar :

B-1.1-1. Onur Karaoğlu, Sema Servi, Galip Oturanç, "The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations", Fourth International Conference of Applied Mathematics and Computation, Volume 2, pp. 254, August 12-18, 2007, Plovdiv, Bulgaria.

B-1.1-2. Ayşe Betül Koç, Haldun Alpaslan Peker, **Onur Karaoğlu**, Yıldıray Keskin, Yücel Çenesiz, Galip Oturanç, Sema Servi, "Application of Padé approximation of differential transform method to the solution of prey and predator problem", 29 September-2 October, 2009, 14th International Congress on Computational and Applied Mathematics (ICCAM 2009), pp. 63, Antalya.

B-2) Yabancı Dilde Poster Olarak Sunulan ve Özeti Yayınlananlar :

B-2-1. Yıldıray Keskin, Galip Oturanç, **Onur Karaoğlu**, Sema Servi, "Reduced Differential Transform Method for exact solutions of Laplace equation", XVI. International Congress on Mathematical Physics, August 3-8, 2009, Prague, Czech Republic.

D- Ulusal Çalışmalar

D-1.1) Ulusal Hakemli Dergilerde Yayınlananlar :

D-1.1-1. Onur Karaoğlu, "Asimptotik Kararlı Otonom Adi Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Kararlılığı Üzerine", Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Fen Dergisi, 36. 2010, 113-116. **(Yüksek Lisans Tezinden yapılmıştır.)*

E. Ulusal Bildiriler

E-1) Tam Metinli Bildiriler :

E-1-1. H. Alpaslan Peker, Sema Servi, **Onur Karaoğlu**, Yıldıray Keskin, Galip Oturanç, "Newtonien Akışkanlarda Sıkıştırılmış Akı Probleminin Çözümüne Yeni Bir Yöntemin Uygulanması", IV. Ege Enerji Sempozyumu, 21-23 Mayıs 2008, 535-544, İzmir.

E-1-2. Sema Servi, Yıldıray Keskin, **Onur Karaoğlu**, H.Alpaslan Peker, "Diferensiyel Denklemlerin Çözümünde Yeni Yaklaşımlar", I. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, 21-22 Mayıs 2009, Sayı 1, No:1, 136-142, Ereğli.

E-1-3. Mehmet Eyüp Kiriş, Yıldıray Keskin, **Onur Karaoğlu**, "Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi Kullanılarak Fonksiyonel Diferensiyel Denklemlerin Çözümü", I. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, 21-22 Mayıs 2009, Sayı 1, No:1, 290-300, Ereğli.

E-1-4. Yıldıray Keskin, **Onur Karaoğlu**, Sema Servi, "Genelleştirilmiş Taylor Polinomları Cinsinden Değişken Katsayılı Yüksek Mertebeden Lineer Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü", 2. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, 13-14 Mayıs 2010, Sayı 2, No:1, 357-367, Ereğli.

E-1-5. Onur Karaoğlu, "Üstel Fonksiyon Yöntemi ile (1+1) Boyutlu Genelleştirilmiş Ito Denkleminin Tam Çözümü", 2. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, 13-14 Mayıs 2010, Sayı 2, No:1, 368-373, Ereğli.

E-1.1. Sözlü Sunulan ve Özeti Yayınlananlar :

E-1.1-1. Yıldıray Keskin, Ozan Özkan, **Onur Karaoğlu**, Murat Akkuş, "Kesirli Diferansiyel Denklemlerin (FDEs) Nümerik Metodlar ile Çözümlerinin Karşılaştırılması", XX. Ulusal Matematik Sempozyumu, 03-06 Eylül 2007, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

E-2. Poster Olarak Sunulan ve Tam Metin Yayınlananlar :

E-2-1. Karaoğlu, O., Servi, S., Keskin, Y., Kurnaz, A., Oturanç, G., "Isı İletim Probleminin Çözümü için Yeni Yöntemler", 16. Ulusal Isı Bilimi ve Tekniği Kongresi, 30 Mayıs-2 Haziran 2007, Kayseri.

O. Bilimsel / Sanatsal Faaliyetlere Katkı

Uluslararası

O-1) Hakemlikler :

O-1-1) M.M. Alipour, D.D. Ganji, A. G. Davodi, "An Application of Exp-Function Method to the Generalized Burger's-Huxley Equation", Selçuk Journal of Applied Mathematics, 10 (1), 121-133.

O-1-2) A. G. Davodi, D. D. Ganji, M.M. Alipour, "Numerous Exact Solutions for the Dodd-Bullough-Mikhailov Equation by Some Different Methods", Selçuk Journal of Applied Mathematics, 10 (2), 81-94.

O-1-3) M. Abdollahzadeh, D. D. Ganji, A. G. Davodi, M. Barzegar, "Exact Travelling Solutions for the Generalized (1+1) Dimensional and the Generalized (2+1) Dimensional Ito Equations by G′/G -Expansion Method", Selçuk Journal of Applied Mathematics, 11 (2), 41-53.