T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FM VE RECİPROCAL FM MATRİSLERİNİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Nuran YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Konya, 2007

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FM VE RECİPROCAL FM MATRİSLERİNİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Nuran YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez …./…./…….. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

…….. ……. …….

(Danışman) (Üye) (Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FM, RECIPROCAL-FM LMATRİSLERİNİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Nuran YILMAZ
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Danışman: Prof. Dr. Ali SİNAN
2007, 31 sayfa

Bu çalışmada $A=\left[\frac{1}{F(i).F(j)}\right]$ FM ve $B=[F(i).F(j)]$ reciprocal-FM matrisleri tanımladık. Daha sonra $A = G \circ H$ olmak üzere $\|A\|_2 \le r_1(G).c_1(H)$ eşitsizliğini kullanarak bu matrislerin Euclidean ve Spektral normları için bazı üst sınırlar elde ettik.

Elde edilen bu üst sınırlar 4. Bölümde değerlendirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Matris normu, Fibonacci sayısı, GCD, LCM ve Hilbert matrisi.

ABSTRACT

MS Thesis

ON THE BOUNDS OF THE NORMS OF FIBONACCI MULTIPLICATION(FM), RECIPROCAL FIBONACCI MULTIPLICATION MATRICES

Nuran YILMAZ

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ali SİNAN

2007, 31 Page

In this study, we have defined $A=\left[\frac{1}{F(i).F(j)}\right]$ FM and $B=\left[F(i).F(j)\right]$ reciprocal FM matrices . Later, we have obtained some upper bounds for noms of Euclidean and Spectral of the these matrices.

Obtain conclusion have offered in the shape of tables at 4th section.

KEY WORDS: Norm of matrix , Fibonacci number , GCD, LCM and Hilbert Matrix.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Ali SİNAN yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma, matris teoride önemli bir yeri olan matris normları ve bazı matris normlarının sınırları üzerine hazırlanmıştır. Birinci bölümde, matrisler üzerine yapılan çalışmalarla ilgili genel bilgiler verildi. İkinci bölümde matris normları ile ilgili genel tanım ve teoremlere yer verildi. Üçüncü bölümde bazı özel tipteki ,FM ve Reciprocal- FM matrislerinin normları için sınırlar elde edildi.

Çalışma konusunun bana veren, çalışma süresince destek olan ve yol gösteren danışman hocam sayın Prof. Dr. Ali SİNAN'a teşekkür ederim.

Nuran YILMAZ
KONYA, 2007

İÇİNDEKİLER

1. **GİRİŞ**……1
2. **ÖN BİLGİLER**……..4
2.1 Matris Normları……...……...…18
2.2 Matris Normları Arasındaki Bağıntılar…..…….20
2.3 GCD,LCM veHilbert Matrislerinin Normları İçin Sınırlar.....21
3. **FM VE RECIPROCAL-FM MATRİSLERİNİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR**……..25
4. **NÜMERİK SONUÇLAR**……...28
5. **KAYNAKLAR**……30

1. GİRİŞ

Smith (1876) : (i, j), i ve j pozitiftamsayılarının en büyük ortak bölenini göstermek üzere $S = [(i, j)]$ matrisinin determinantının $\phi(1)\phi(2)...\phi(n)$ olduğunu göstermiştir. Ayrıca, bu sonucun çarpan kapalı bir kümede de doğru olduğunu göstermiştir. Burada ϕ Euler'in toplam fonksiyonudur.

GCD matrisleri olarak adlandırılan bu matrislerin incelemesini Beslin ve Ligh başlatmıştır. Beslin ve Ligh, Smith determinantından hareketle GCD matrisini tanımlamışlar ve bu matrisin yapısını inceleyerek determinantını hesaplamışlardır. GCD kapalı küme üzerinde tanımlanan bir GCD matrisinin determinantını hesaplayarak bu sonucu genellemişlerdir. GCD matrislerinin kesin olarak pozitif tanımlı olduklarını ve belirli bir matris ve transpozunun çarpımı halinde yazılabildiklerini göstermişlerdir[3].

Ayrıca Smith, p asalının. p^r kuvveti için $\prod(p^r) = -p$ şeklinde tanımlanan $\prod$ çarpımsal fonksiyon olmak üzere LCM matrislerinin determinantının da

$$\phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)\prod(x_1)\prod(x_2)...\prod(x_n)$$

olduğunu göstermiştir.

Buna göre, *S* kümesi çarpan kapalı bir küme olmak üzere (S), GCD matrisi ve $[S]$, LCM matrislerinin tersleri alınabilir. $[S]$'nin terslerinin çarpımı bir integral matris (elemanları tamsayı olan bir matris) olduğu görülür. Ayrıca dete(S), det[S]'yi bölmektedir.

Eğer $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ birbirinden farklı pozitif tamsayılardan oluşan herhangi bir küme ise $\det(S) \le x_1 x_2 ... x_n$ dir [3]. Li, bu üst sınır için eşitliğin yalnız ve yalnız *S* kümesi çarpan kapalı bir küme ise,

$$\phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n) \le \det(S) \le x_1 x_2 ... x_n - \frac{n}{2}!$$

olduğunu göstermiştir [13]. Bu sonuç birbirinden farklı pozitif tamsayılardan oluşan herhangi bir *S* kümesi üzerinde tanımlanmış olan (S) GCD matrisinin tersinin tanımlanabilir olduğunu göstermektedir. (S), GCD matrisinin yapısal özelliği

$\phi(d)$'ye bağlıdır. Burada $d \in T$ ve T de , S'yi kapsayan ve çarpan kapalı bir kümedir.

Her bir pozitif m tamsayısı için, $g(m) = \frac{1}{m}\sum_{d/m} d\mu(d) = \frac{\pi(m)\phi(m)}{m^2}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon LCM matrisinin yapısal özelliğini, Euler toplam GCD matrisinin yapısal özelliğini belirlediği kadar belirler.

Bourque ve Ligh, S çarpan kapalı olması durumunda GCD ve LCM matrislerinin terslerinin elemanlarını Euler'in toplam fonksiyonu ve Möbius fonksiyonu cinsinden ifade etmişlerdir [6].

Apostol (1972), f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak Üzere, $f * g$ Dirichlet çarpımını,

$$S_{f*g}(m,k) = \sum_{d/(m,k)} f(d)g\left(\frac{k}{d}\right)$$

şeklinde genelleştirerek, Smith determinantının bir genellemesi olan $\left|S_{f*g}(i,j)\right|_{i,j=1}^{n}$ determinantının değerini f ve g aritmetik fonksiyonları cinsinden hesaplamıştır [1].

McCarthy (1986), r modülünde m tamsayısının çift fonksiyonu olan $f(m,r)$ aritmetik fonksiyonu için $[f(i,j)]_{mxn}$ matrisinin determinantını bazı özel aritmetik fonksiyonlar cinsinden hesaplamıştır [15].

Altınışık, GCD matrislerinden hareketle $n \times n$ tipinde $[S] = (s_{ij}) = \left(\frac{(i,j)}{ij}\right)$ hemen hemen Hilbert-Smith matrisini tanımlamıştır. Bu matrisin yapısını inceleyerek. determinantını ve tersinin elemanlarını bazı özel aritmetik fonksiyonlar cinsinden elde etmiştir [8]. Hemen hemen Hilbert-Smith matrisini, elemanları pozitif tamsayılar olan $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi üzerinde

$$[S] = (S_{ij}) = \left(\frac{(x_i, x_j)}{x_i\, x_j}\right)$$

biçiminde ele alarak bu matrisin yapısını incelemiştir. S kümesinin çarpan kapalı, en büyük ortak bölen kapalı küme ve herhangi bir pozitif tamsayı kümesi olması durumlarında, bu matrisin determinantını hesaplamış ve bu matrisin tersinin

elemanlarını, bazı özel aritmetik fonksiyonlar cinsinden ifade etmiştir. Ayrıca, hemen hemen Hilbert-Smith matrisinin $r \in Z^+$ olmak üzere

$$[S] = (s_{ij}) = \left(\frac{(x_i, x_j)^r}{x_i^r x_j^r} \right)$$

biçiminde bir genelleştirmesini yaparak, bu matrisin yapısını incelemiş; determinantını Euler'in toplam fonksiyonunun bir genelleştimesi olan Jordan'ın toplam fonksiyonu cinsinden ifade etmiş ve tersinin elemanlarını, Jordan'ın toplam fonksiyonu ve Möbius fonksiyonu cinsinden hesaplamıştır [8].

Türkmen, $R = \frac{1}{F_{(i,j)}} (i, j = 1,2,\ldots,n)$ Fibonacci En Büyük Ortak Bölen matrisini tanımlayarak bu matrisin spektral ve l_p normları için sınırlar bulmuştur [19].

Özer , $A = \left[\frac{1}{F(lcm(i, j))} \right]$ FLCM, $B = \left[\frac{1}{lcm(F(i), F(j))} \right]$ LCMF ve $C = [lcm(F(i), F(j))]$ reciprocal LCMF matrislerini tanımlayarak bu matrislerin normları için bazı sınırlar bulmuştur.[21]

Biz bu çalışmada , $A = \left[\frac{1}{F(i).F(j)} \right]$ Fibonacci çarpım matrisi (FM) ve $B = [F(i).F(j)]$ reciprocal Fibonacci çarpım matrisini tanımladık ve bu matrislerin normları için bazı sınırlar elde ettik.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmamızda yararlanılacak temel kavramlarla ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 Doğal sayılar kümesinden, reel sayılar kümesi (veya kompleks sayılar kümesi) içine tanımlanan her fonksiyona aritmetik fonksiyon denir.

Tanım 2.2 $n \geq 1$ ise n doğal sayısını geçmeyen ve n ile aralarında asal olan doğal sayıların sayısını veren fonksiyona Euler'in toplam fonksiyonu denir ve $\phi(n)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.3 π bir aritmetik fonksiyon olsun. $\forall a,b \in N$ için $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ ise, π'ye çarpımsal fonksiyon denir.

Tanım 2.4 $p_1, p_2,...,p_r$ birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere n doğal sayısı $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ....p_r^{\alpha_r}$ biçiminde asal çarpanlarına ayrılsın. Bu taktirde

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, a_i > 1 \\ (-1)^r, n = p_1 p_2 \dots p_r \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan aritmetik fonksiyona Möbius fonksiyon fonksiyonu denir. μ çarpımsal bir aritmetik fonksiyondur.

Tanım 2.5 $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ elemanları birbirinden farklı olan pozitif tamsayılar kümesi olsun *ij* - inci elemanları x_i ve x_j nin ortak bölenlerinin en büyüğü olan (x_i, x_j) lerden oluşan (*S*) matrisine en büyük ortak bölen (Greatest Comman Divisor GCD-OBEB) matrisi denir [3].

Tanım 2.6 $S = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ elemanları birbirinden farklı olan pozitif tamsayılar kümesi olsun. *ij* -inci elemanları x_i ve $x_j$nin ortak katlarının en küçüğü olan [x_i, x_j]lerden oluşan [*S*] matrisine en küçük ortak kat (Least Common Multiple, LCM-OKEK) matrisi denir [3].

Tanım 2.7 Eğer *S* kümesi her bir elemanının tüm bölenlerini içeriyorsa *S* kümesine çarpan kapalıdır (Factor Closed, FC) denir. Yani, *S* çarpan kapalı bir küme ise, *S*' nin her elemanının tüm pozitif bölenleri yine *S*' nin elemanıdır [3].

Tanım 2.8 Bir *S* kümesi için $(x_i , x_j) \in S \quad (1 \le i, j \le n)$ ise S' *e* GCD kapalıdır denir.

O halde çarpan kapalı bir küme GCD kapalıdır. Ancak tersi doğru değildir.

Tanım 2.9 Elemanları pozitif tamsayılar olan bir kümenin herhangi iki elemanının ortak bölenlerinin en büyüğü, yine bu kümenin bir elemanı ise, bu kümeye en büyük ortak bölen kapalı (Greatest Common Divisor Closed, GCDC) küme denir.

ϕ, Euler'in toplam fonksiyonu olmak üzere, $x_1<x_2<...<x_n$ olacak şekilde elemanları pozitif tamsayılar olan bir *S*={x1,x2,...,xn}kümesi üzerinde her

i=1,2,...,*n*

$$B(x_i) = \sum_{\substack{d/x_i \\ d/x_j \\ j<i}} \phi(d)$$

aritmetik fonksiyonu tanımlansın. *S* kümesi üzerinde $B(x_i) = \phi(x_i)$ olması için gerek ve yeter şart *S* kümesinin çarpan kapalı olmasıdır. Ayrıca *S* kümesi en büyük ortak bölen kapalı ise her i ,j =1,2,...,n için $(x_i,x_j)= \sum_{x_k/(x_i,x_j)} B(x_k)$ dır [5].

Teorem 2.1 ϕ çarpımsal bir aritmetik fonksiyondur [11].

Tanım 2.10 Elemanları 0 ya da 1 olan *m x n* matrise (0-1) matrisi ya da incidence matris denir.

Tanım 2.11 *f* ve *g* iki aritmetik fonksiyon olsun. $\forall n \in N$ için *f* ve *g* aritmetik fonksiyonları için $(f * g)(n)= \sum_{d/n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$ şeklinde tanımlanan çarpıma Dirichlet çarpımı denir [8]. f * g fonksiyonu da aritmetik bir fonksiyondur.

Teorem 2.2 (Möbius Birinci Ters Çevirme Formülü): f herhangi bir aritmetik fonksiyon ve $F(n)=\sum_{d/n} f(d)$ ise $f(n)=\sum_{d/n} F\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d)=\sum_{d/n} F(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$ dir[8].

Teorem 2.3 Her n pozitif tamsayısı için

$$\sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$$

dir[8].

Teorem 2.12 $m \in Z^+$ verilsin. Her n pozitif tamsayısı için

$$J_m(n)= \sum_{d/n} d^m \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

biçiminde tanımlanan aritmetik fonksiyona Jordan'ın toplam fonksiyonu denir.

Jordan'ın toplam fonksiyonu, Euler'in toplam fonksiyonunun genelleştirilmiş bir biçimidir ve m=1 için bu fonksiyon Euler'in toplam fonksiyonudur[2].

Teorem 2.4 Her n pozitif tamsayısı için ve $n=\sum_{d/n}\phi(d)$ dir[11].

Tanım 2.13 Bir $A \in M_n(F)$ simetrik matrisi verilsin. Eğer her $x \in F^n$ vektörü için $x^T Ax > 0 (\geq 0)$ ise A matrisi pozitif tanımlıdır (pozitif yarı-tanımlıdır PYT) denir. Eğer her $x \in F^n$ vektörü için $x^T Ax < 0 (\leq 0)$ ise A matrisi negatif tanımlıdır (negatif yarı-tanımlıdır NYT) denir.

A matrisinin PYT olması için gerek ve yeter şart bütün özdeğerlerinin sıfır veya pozitif olmasıdır. A pozitif tanımlı ise;

i) A'nın esas köşegen elemanlarının hepsi pozitiftir.

ii) $i \neq j$ için $a_{ii} > |a_{ij}|^2$ dir.

iii) A'nın mutlak değerce en büyük elemanı esas köşegeni üzerindedir.

iv) $det(A) > 0$ dır.

Teorem 2.5 Bir $A=(a_{ij}) \in M_n(F)$ matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart her $i = 1,2,...,n$ için

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix} > 0$$

olmasıdır[14].

Teorem 2.6 (Cauchy-Binet Formülü): Bir $A=(a_{ij}) \in M_n(F)$ matrisi için $B=(b_{ij}) \in M_{n,m}(F)$ *ve* $C=(c_{ij}) \in M_{m,n}(F)$ olmak üzere $A=BC$ olsun.

i) Eğer $n \leq m$ ise $\det A = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leq m} \det B_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} \det C^T{}_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ dir. Burada $B_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ ve $C^T{}_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ matrisleri, sırasıyla B ve C^T matrislerinin $k_1, k_2, \ldots, k_n$-inci sütunlarından oluşan alt matrislerdir.

ii) Eğer $n>m$ ise $\det(A)=0$ dır[9].

Tanım 2.14 $F_1=1$, $F_2=1$ ve $n \geq 3$ için $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ şeklinde tanımlanan sayılara Fibonacci sayıları denir(Leonardo Fibonacci, 1170-1250).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	...

Fibonacci sayılarının bazı özellikleri

1) $n \in Z^+$ için $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$,

2) $n \in Z^+$ için $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$,

3) $m,n \in Z^+$ için $F_nF_m+F_{n+1}F_{m+1}=F_{m+n+1}$,

4) $m,n,r \in Z^+$ için $F_{m+n-2}F_{m+r-1}-F_{m+n-1}F_{m+r-2}=(-1)^{m+r-2}F_{n-r+1}$,

5) $n \in Z^+$ için $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \beta, = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ olmak üzere $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ dır.

Teorem 2.7 $S=\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n\}$, elemanları pozitif tamsayılar olan bir küme olsun. Bu taktirde S kümesi üzerinde tanımlanan GCD matrisi, bir n x m A matrisi

ile bu matrisin transpozu olan A^T matrisinin çarpımı şeklinde yazılabilir (A matrisinin sıfırdan farklı olan bütün elemanları $\sqrt{\phi(d)}$ formundadır ve d, S kümesini kapsayan bir çarpan kapalı kümenin elemanıdır.)[3].

İspat: $D=\{d_1,d_2,...,d_m\}$, S kümesini kapsayan çarpan kapalı bir küme olsun. $A=(\alpha_{ij})$ matrisi,

$$\lambda_1=\phi(d_j) \text{ ve } e_{ij}=\begin{cases}1, & d_j/x_i\\ 0, & aksi\,halde\end{cases} \tag{2.1}$$

olmak üzere

$$a_{ij}=e_{ij}\lambda_j^{1/2} \tag{2.2}$$

ile tanımlansın. Bu durumda A ve A^T sırasıyla $n\times m$ ve $m\times n$ tipinde matrisler olacaklardır. Buradan AA^T matrisinin ij-inci elemanı:

$$\left(AA^T\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}a_{jk}=\sum_{\substack{d_k/x_i\\ d_k/x_j}}\sqrt{\phi(d_k)}\sqrt{\phi(d_k)}=\sum_{d_k/(x_i,x_j)}\phi(d_k)=(x_i;x_j)=s_{ij}$$

olup, $(S)=AA^T$ olduğu görülür.

Bu teorem GCD matrisinin yapısını tanımlar.

Sonuç 2.1 e_{ij} ve λ_j (2.1) deki gibi tanımlanmak üzere $E=(e_{ij})$ ve $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ sırasıyla, $n\times m$ (0-1) tipinde matris ve $m\times m$ tipinde köşegen matris olmak üzere GCD matrisi $(S)=AA^T=\left(E\Delta^{1/2}\right)\left(E\Delta^{1/2}\right)^T=E\Delta E^T$ olarak yazılabilir[3].

İspat: D ve S kümeleri Teorem 2.7 deki gibi olmak üzere $E\Delta E^T$ matrisinin ij-inci elemanı;

$$\left(E\Lambda E^T\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\phi(x_k)e_{ik}e_{jk}=\sum_{\substack{d_k/x_i\\ d_k/x_j}}\phi(x_k)=\sum_{d_k/(x_1,x_j)}\phi(x_k)=(x_i,x_j)=s_{ij}$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.2 $S=\{x_1,x_2,\ldots x_n\}$ çarpan kapalı bir küme ve (S), S kümesi üzerinde GCD matrisi olsun. Bu taktirde $\det(S)=\phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)$ dir[10].

İspat: $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ çarpan kapalı olduğundan ve Teorem 2.7 den, verilen D kümesi yerine S kümesi alınabilir. $(S)=AA^T$, A ve A^T sırasıyla alt ve üst üçgen matrislerdir. Ayrıca her $1\le i\le n$ için $a_n=\sqrt{\phi(x_i)}=\left(A^T\right)_{ii}$ dir. O halde

$$\det(S)=\det(AA^T)=\det(A)\det(A^T)=\phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)$$

bulunur.

Z. Li (1990), Belsin ve Ligh'in sonucunun (Sonuç 2.2 nin) tersinin doğru olup olmadığı üzerine ortaya koydukları bu önermeyi ispatlamış ve elemanları pozitif tamsayılar olan herhangi bir S kümesi üzerinde tanımlanan GCD matrisinin determinantını Euler'in toplam fonksiyonu cinsinden hesaplamıştır.

Teorem 2.8 $x_1<x_2<...<x_n$ ve $x_{n+1}<x_{n+2}<...<x_{n+s}$ olmak üzere $\overline{S}=\{x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+s}\}$ kümesi $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ kümesini kapsayan en küçük çarpan kapalı küme olsun. Bu taktirde

$$\det(S)=\sum_{1\le k_1<k_2<...<k_n\le n+s}(\det E_{(k_1,k_2,...,k_n)})^2\phi(x_{k_1})\phi(x_{k_2})...\phi(x_{k_n}) \qquad (2.3)$$

dir. Burada, $E_{(k_1,k_2,...,k_n)}, E$ matrisinin sırasıyla $k_1,k_2,...,k_n$-inci sütunlarından oluşan alt matrisidir[13].

İspat: Teorem 2.7 gereği $(S)=AA^T$ dir. O halde Cauchy-Binet formülünden

$$\det(S)=\det(AA^T)=\sum_{1\le k_1<k_2<...<k_n\le n+s}(\det A_{(k_1,k_2,...,k_n)})^2$$

olur. Burada

$$\det A_{(k_1,k_2,...,k_n)}=\det E_{(k_1,k_2,...,k_n)}\left(\phi(x_{k_1})\phi(x_{k_2})...\phi(x_{k_n})\right)^{1/2}$$

olduğundan

$$\det(S)=\sum_{1\le k_1<k_2<...<k_n\le n+s}\left(\det E_{(k_1,k_2,...,k_n)}\right)^2\phi(x_{k_1})\phi(x_{k_2})...\phi(x_{k_n})$$

elde edilir.

Teorem 2.9 $x_1<x_2<...<x_n$ olmak üzere $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, elemanları pozitif tamsayılar olan bir küme ve $(S), S$ kümesi üzerinde tanımlanan GCD matrisi olsun. Bu taktirde $\det(S)\ge\phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)$ dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart S kümesinin çarpan kapalı olmasıdır[13].

İspat: (2.3) ile verilen toplamda terimler negatif olamaz ve $(k_1, k_2, ..., k_n) = (1,2,...,n)$ için

$$\det E_{(1,2,...,n)} \phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n) = \phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)$$

dir. Çünkü burada $E_{(1,2,...,n)}$, köşegeni üzerindeki elemanları 1 olan bir alt üçgen matristir. O halde

$$\det(S) \geq \phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)$$

olacağı açıktır. S kümesi çarpan kapalı ise $\det(S) = \phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)$ olduğu Sonuç 2.2'de ispatlanmıştı. O halde Sonuç 2.2.'nin tersini göstermek ispatı tamamlayacaktır.

$\det(S) = \phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)$ olsun. Bu kabul S kümesinin çarpan kapalı olduğunu iddia eder. S kümesinin çarpan kapalı olmadığını varsayalım. Bu durumda $S \neq \overline{S}$ tir ve $x_{n+1} \in (\overline{S} - S), S$ kümesinin bir elemanının bölenidir. x_{n+1} / x_r olacak şekilde en küçük r$\in$ {1,2,…,n} tamsayısı alınsın. E matrisinin r-inci sütunu yerine $(n+1)$-inci sütunu alınarak elde edilen $E_{(1,2,...,r-1,n+1,r+1,...,n,n+1)}$ alt matrisi ele alınsın. r tamsayısının seçiminden bu matris ve öyleyse determinantı 1 dir. Bu durumda $\det E_{(1,2,...,r-1,n+1,r+1,...,n,n+1)} = \mp 1$ olur. O halde (2.3) ten

$$\det(S) \geq \phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n) + \phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_{r-1})\phi(x_{r+1})...\phi(x_n)\phi(x_{n+1})$$

olur ki, bu ise $\det(S) \geq \phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)$ olması ile gelişir. Bu yüzden $S = \overline{S}$ olmalıdır. Yani, S çarpan kapalıdır.

Sonuç 2.3 GCD matrisi pozitif tanımlıdır ve tersinirdir[8].

İspat: $(S) = (s_{ij})_{n \times n}, S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi üzerinde tanımlanan GCD matrisi ve $\overline{S} = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+s}\}$ kümesi, S kümesini kapsayan en küçük çarpan kapalı küme olsun. Teorem 2.8 gereği her i=1,2,…,n için

$$\det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1i} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{i1} & s_{i2} & \cdots & s_{ii} \end{bmatrix} = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_n \leq n+s} \left(\det E_{(k_1, k_2, ..., k_i)}\right)^2 \phi(x_{k_1})\phi(x_{k_2})...\phi(x_{k_{i1}})$$

olur. Her $x \in Z^+$ için $\phi(x) > 0$ olduğundan yukarıdaki toplamda her terim pozitiftir. O halde her *i*=1,2,…,*n* için

$$\det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1i} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{i1} & s_{i2} & \cdots & s_{ii} \end{bmatrix} > 0$$

dir. Teorem 2.5 gereği, $(S) = (s_{ij})_{n \times n}$ GCD matrisi pozitif tanımlıdır.

Buna göre $\det(S) > 0$ dır. O halde GCD matrisi tersinirdir.

Belsin ve Ligh, daha önce bu sonucu $(S) = E \Lambda E^T$ eşitliğinden hareketle aşağıdaki şekilde göstermişlerdir[3]:

Teorem 2.10 GCD matrisi pozitif tanımlıdır[3].

İspat: $(S) = (s_{ij})_{n \times n}, S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesinde tanımlanan GCD matrisi olsun. $x_1 < x_2 < ... < x_n$ için Teorem 2.7 ve Sonuç 2.1 den; $(S) = AA^T = E \Lambda E^T$ ve *D* kümesi $d_1 = x_1, d_2 = x_2, ..., d_n = x_n$ olacak biçimde seçilebilir. Böylece $E = [E_1, E_2]$ şeklinde bir blok matris olsun. $(E)_{n \times n}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt üçgen matristir. Dolayısıyla *E, A* ve AA^T matrislerinin mertebeleri *n* dir.

Buradan GCD matrisinin determinantı pozitiftir. O halde GCD matrisi pozitif tanımlıdır.

Teorem 2.11 $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ elemanları pozitif tamsayılar olan bir küme olsun. Eğer *S* çarpan kanalı ise *S* üzerindeki GCD matrisinin tersi, ϕ ve μ sırasıyla Euler'in toplam fonksiyonu ve Möbius fonksiyonu olmak üzere *ij*-inci elemanı;

$$b_{ij} = \sum_{\substack{x_i / x_k \\ x_j / x_k}} \frac{1}{\phi(x_k)} \mu\left(\frac{x_k}{x_i}\right) \mu\left(\frac{x_k}{x_j}\right)$$

olan $B = (b_{ij})$ matrisidir[6].

İspat: $E=(e_{ij})$ ve $U=(u_{ij})$ matrisleri sırasıyla

$$e_{ij}=\begin{cases}1, & x_j / x_i \\ 0, & aksi\,halde\end{cases} \quad \text{ve} \quad u_{ij}=\begin{cases}\mu\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right), & x_j / x_i \\ 0, & aksi\,halde\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan *n*x*n* tipinde matrisler olsun. Bu taktirde *EU* çarpım matrisinin *ij*-inci elemanı;

$$(EU)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} e_{ik}u_{kj}\sum_{\substack{x_i/x_k \\ x_j/x_k}}\mu\left(\frac{x_k}{x_j}\right)\sum_{x_k/\frac{x_i}{x_j}}\mu(x_k)=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

dir. O halde $U=E^{-1}$ dir. Eğer $\Lambda=diag(\phi(x_1),\phi(x_2),...,\phi(x_n))$ ise Sonuç 2.1 den GCD matrisi $(S)=E\Lambda E^T$ olarak yazılabilir. Buradan GCD matrisinin tersi

$$(S)^{-1}=(E\Delta E^T)^{-1}=U^T\Lambda^{-1}U=(b_{ij})$$

olur. Burada

$$b_{ij}=\left(U^T\Lambda^{-1}U\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\phi(x_k)}\mu\left(\frac{x_k}{x_i}\right)\mu\left(\frac{x_k}{x_j}\right)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.1 *m* ve *r* pozitif tamsayılar ve $t=\dfrac{r}{(m,r)}$ olsun. Eğer $m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ birbirinden farklı p_i asallarının çarpımı ise;

$$\psi(m,r)=\sum_{\frac{d}{m}}[d,r]\mu(m/d)=\begin{cases}0, & p_i^{a_i}/r, \quad 1\le i\le k \\ \phi(m)/(m,r), & aksi\,halde\end{cases}$$

elde edilir[6].

Teorem 2.12 $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ birbirinden farklı olan pozitif tamsayılar kümesi olsun. *S* çarpan kapalı ise [*S*] LCM matrisi, bir integral matris ile (*S*) GCD matrisinin çarpımıdır[6].

İspat: $(b_{ij})=\sum_{x_j/x_k}\dfrac{1}{\phi(x_k)}\mu(x_k/x_j)\sum[d/x]\mu(x_k/d)$ olmak üzere $B=(b_{ij})$ *n*x*n* matrisi olsun. Lemma 2.1 den her bir b_{ij} tamsayıdır. $[S]=B(S)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Teorem 2.11 den

$$\left([S](S)^{-1}\right)_{ij} = \sum_{m=1}^{n}[x_i,x_m]\sum_{\substack{x_m/x_k\\ x_j/x_k}}\frac{1}{\phi(x_k)}\mu(x_k,x_m)\mu(x_k,x_j) = \sum_{x_j/x_k}\frac{1}{\phi(x_k)}\mu(x_k,x_j)\sum_{d/x_k}[d,x_i]\mu(x_k,d)$$

elde edilir. Dolayısıyla $[S] = B(S)$ dir. Ayrıca GCD ve LCM matrisleri simetrik olduğundan $(S) = [S]B^T$ dir.

S çarpan kapalı değilse [*S*] LCM matrisi, (*S*) OBEB matrisi ile bir integral matrisin çarpımı olmayabilir.

Belsin ve Ligh (1992), GCD kapalı $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi üzerinde GCD matrisinin determinantını genişletmişlerdir.

Teorem 2.13 $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ birbirinden farklı olan pozitif tamsayılar kümesi olsun.

$$a_{ij} = \sum_{\substack{x_i/x_k\\ x_j/x_k}}\frac{c_{ik}c_{jk}}{b_k}, \quad b_i = \sum_{\substack{d/x_{ji}\\ d/x_i\\ x_i<<_i}}\phi(d) \quad \text{ve} \quad c_{ij} = \sum_{\substack{dx_i/dx_j\\ dx_i\le x_j\\ x_i<x_j}}\mu(d)$$

olmak üzere *S*, GCD kapalı bir küme ise S'de tanımlı GCD matrisinin tersi $A = (a_{ij})$ matrisidir[6].

Teorem 2.14 $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ birbirinden farklı pozitif tamsayılar kümesi olsun. *S*, GCD kapalı bir küme ise

$$\det(S) = \prod_{i=1}^{n} x_i^2 a_i \ , \ a_i = \sum_{\substack{d/x_i\\ d/x_j\\ x_i x_j}} g(d)$$

dır[6].

İspat: *S* üzerinde tanımlı LCM matrisinin determinantı *S*'nin elemanlarından bağımsız olduğundan $x_1 < x_2 < ... < x_n$ olduğunu varsayalım. $D = diag(x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $\Delta = (\delta_{ij})_{n\times n}$ matrisi

$$\delta_{ij} = \begin{cases} a_{ij,} & x_i/x_j \\ 0, & aksi\,halde \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer *E* matrisi Teorem 2.11 deki gibi ise

$$(DE\Delta D)_{ij} = x_i x_j \sum_{k=1}^{n} e_{ik}\delta_{kj} = x_i x_j \sum_{x_k/(x_i,x_j)} a_k$$

dir.

Beslin ve Ligh'e göre $\sum_{x_k/(x_i,x_j)} a_k = \sum_{d/(x_i,x_j)} g(d)$ dir. Möbius yerdeğiştirme formülünden $\sum_{d/m} g(d) = \frac{1}{m}$ dir. Dolayısıyla $[S] = DEAD$ dir. Buradan $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} x_i^2 a_i$ elde edilir.

Teorem 2.15 $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ birbirinden farklı pozitif tamsayılar kümesi olsun. S çarpan kapalı ise, S üzerinde tanımlanan [S], LCM matrisinin tersi

$$b_{ij} = \frac{1}{x_i x_j} \sum_{\substack{x_i/x_k \\ x_j/x_k}} \frac{1}{g(x_k)} \mu(x_k/x_i)\mu(x_k/x_j)$$

olmak üzere $B = (b_{ij})$ matrisidir[6].

İspat: $D = diag(x_1, x_2, ..., x_n)$ olsun. [4, Teorem 2] den $[S] = DAA^T D$ dir. Burada $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisi;

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{g(x_j)}, & x_j/x_i \\ 0, & aksi\ halde \end{cases}$$

şeklindeki a_{ij} lerden oluşur.

Eğer E Teorem 2.11 deki matris ve $diag(g(x_1), g(x_2), ..., g(x_n))$ ise $AA^T = (E\Delta^{1/2})(E\Delta^{1/2})^T = E\Delta E^T$ dir. Dolayısıyla eğer U, Teorem 2.11 deki matris ise

$$b_{ij} = \frac{1}{x_i x_j} \sum_{\substack{x_i/x_k \\ x_j/x_k}} \frac{1}{g(x_k)} \mu(x_k/x_i)\mu(x_k/x_j)$$ olmak üzere

$[S]^{-1} = D^{-1}U^T\Delta^{-1}UD^{-1} = (b_{ij})$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Ancak S kümesinin çarpan kapalı olmadığı durumlarda; $(S)^{-1}$ matrisinin elemanlarının, bazı aritmetik fonksiyonlar cinsinden yazılması halen bir problemdir.

Belsin ve Ligh (1992), çalışmalarında bir kümenin en büyük ortak bölen kapalı olması özelliğini vererek, GCD matrisinin determinantını farklı bir yoldan hesaplamışlardır.

Teorem 2.16 $x_1 < x_2 < ... < x_m$ *ve* $y_1 < y_2 < ... < y_n$ olmak üzere $\overline{S} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ elemanları pozitif tamsayılar olan bir $S = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ kümesini kapsayan en büyük ortak bölen kapalı, en dar küme olsun. O taktirde (*S*) , GCD matrisi *n* x *m* tipinde bir *A* matrisi ile *A* matrisinin transpozuna karşılık gelen (0-1) *C* matrisinin çarpımı şeklinde kyazılabilir[5].

İspat: $A = (a_{ij})$ matrisi ve *A* matrisinin transpozuna karşılık gelen $C = (c_{ij})(0-1)$ matrisi sırasıyla

$$a_{ij} = \begin{cases} B(x_{ij}), & x_j / y_i \\ 0, & aksi\, halde \end{cases}$$

ve

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i / y_j \\ 0, & aksi\, halde \end{cases}$$

ile verilsin. O halde *AC* çarpım matrisinin *ij*-inci elemanı;

$$(AC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} = \sum_{\substack{x_k / y_i \\ x_k / y_j}} B(x_k) = (y_i, y_j)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.4 Elemanları pozitif tamsayılar olan $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi en büyük ortak bölen kapalı ise $\det(S) = B(x_1)B(x_2)...B(x_n)$ dir[5].

İspat: *S* kümesi en büyük ortak bölen kapalı olduğundan Teorem 2.16 da verilen *A* ve *C* matrisleri sırasıyla, köşegeni $(B(x_1)B(x_2)...B(x_n))$ olan bir *n* x *n* alt üçgen matris ve köşegeni (1,1,…,1) olan *n* x *n* üst üçgen (0-1) matrisi olacaktır. Sonuç olarak;

$$\det(S) = \det(AC) = \det A \det C = B(x_1)B(x_2)...B(x_n)$$

dır. $\overline{S} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, elemanları pozitif tam sayılar olan bir $S = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ kümesini kapsayan en büyük ortak bölen kapalı, en dar küme olmak üzere Teorem 2.10 da verilen $A = (a_{ij})$ matrisinin *ij*-inci elemanı,

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & x_j / y_i \\ 0, & aksi\, halde \end{cases}$$

olmak üzere $a_{ij} = e_{ij}B(x_{ij})$ olarak yazılabilir. E, ij- inci elemanı e_{ij} olan n x m bir matris olsun. Öyleyse $C = E^T$ dir. Ayrıca Λ, köşegeni $(B(x_1)B(x_2)...B(x_n))$ olan m x m olan bir köşegen matris ise (S) GCD matrisi, $(S) = AC = E\Lambda E^T$ olarak yazılabilir. Şimdi $k_1, k_2, ..., k_n$; $1 \le k_1 < k_2 < ... < k_n \le m$ olacak şekilde farklı pozitif tamsayılar ve $E_{(k_1,k_2,...,k_n)}$, E matrisinin $k_1, k_2, ..., k_n$-inci sütunlarından oluşan alt matrisini göstersin. Aynı şekilde $A_{(k_1,k_2,...,k_n)}$ matrisi de tanımlansın. Buradan

$$\Lambda = diag\left(B(x_{k_1}), B(x_{k_2}), ..., B(x_{k_n})\right)$$

ise

$$A_{(k_1,k_2,...,k_n)} = \quad E_{(k_1,k_2,...,k_n)}\Lambda$$

olduğundan

$$\det A_{k_1,k_2,...,k_n} = B(x_{k_1}), B(x_{k_2}), ..., B(x_{k_n}) \det E_{k_1,k_2,...,k_n}$$

yazılabileceği açıktır.

Teorem 2.17 *S ve $\overline{S}$* kümeleri Teorem 2.16 daki gibi olsun. (S) matrisi, S kümesi üzerinde bir GCD matrisi ise; $E_{(k_1,k_2,...,k_n)}$, E matrisinin $k_1, k_2, ..., k_n$-inci sütunlarından oluşan alt matrisi olmak üzere

$$\det(S) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < ... < k_n \le m} \left(\det E_{(k_1,k_2,...,k_n)}\right)^2 \; B(x_{k_1}), B(x_{k_2}), ..., B(x_{k_n})$$ dir[5].

İspat: Teorem 2.16 dan (S)=AC dir. Bu eşitliğe Cauchy- Binet formülü uygulanarak,

$$\det(S) = \det(AC) = \det(S) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < ... < k_n \le m} \det A_{(k_1,k_2,...,k_n)} \det E_{(k_1,k_2,...,k_n)}$$

elde edilir. Burada (2.4) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\det(S) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < ... < k_n \le m} \left(\det E_{(k_1,k_2,...,k_n)}\right)^2 \; B(x_{k_1}), B(x_{k_2}), ..., B(x_{k_n})$$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.5 $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ çarpan kapalı bir küme olsun. $[S]$, S üzerinde tanımlı LCM matrisi olsun. $\det[S] = \prod_{i=1}^{n} \pi(x_i)\phi(x_i)$ dir[10].

Tanım 2.15 $a_1, a_2, ..., a_{2n-1} \in C$ ve $H_n = (a_{ij})_{n\times n}$ kare matris olsun. H' ın (i,j)-inci elemanı $a_{ij} = a_{i+j-1}$ ise

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & & a_n \\ a_2 & a_3 & & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & & a_{2n-1} \end{bmatrix}$$

H_n matrisine Hankel matrisi denir.

Tanım 2.16 $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$ olmak üzere $A = (a_{ij})$ matrisine Hilbert matrisi denir.

Tanım 2.17 ij-inci elemanı $s_{ij} = \dfrac{(i,j)}{ij}$ olan $[S] = (s_{ij})_{n\times n}$ $(i, j \in Z^+)$ matrisine hemen hemen Hilbert- Smith matrisi denir[8].

Teorem 2.18 $S = (s_{ij})_{n\times n}$ Hilbert-Smith matrisi olsun. $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisi

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\phi(j)}}{i}, & j \,/\, i \\ 0, & aksi\, halde \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise $[S] = AA^T$ dir[8].

İspat: AA^T çarpım matrisinin ij-inci elemanı olmak üzere,

$$(AA_T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \sum_{\substack{k/i \\ k/j}} \frac{\sqrt{\phi(k)}}{i}\frac{\sqrt{\phi(k)}}{j} = \frac{1}{ij}\sum_{k/(i,j)} \phi(k) = \frac{(i,j)}{ij} = s_{ij}$$ olup böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.6 S, n x n hemen hemen Hilbert-Smith matrisi ise,

$$\det S = \det A \det A^T = \frac{1}{(n!)^2}\phi(1)\phi(2)...\phi(n)$$ dir[8].

Sonuç 2.7 Hilbert-Smith matrisi pozitif tanımlıdır[8].

İspat: S, nxn hemen hemen Hilbert- Smith matrisi olmak üzere Sonuç 2.6 dan $A=(a_{ij})_{n\times n}$ matrisi köşegeni ; $\left(\frac{\sqrt{\phi(1)}}{1},\frac{\sqrt{\phi(2)}}{2},...,\frac{\sqrt{\phi(n)}}{n}\right)$ olan alt üçgen matristir.O halde

$$\det A=\frac{1}{n!}[\phi(1)\phi(2)...\phi(n)]^{1/2}$$

ve $1\le i\le n$ için $\phi(i)>0$ olur. Teorem 2.5 den $\det(A)>0$ olduğundan S, AA^T ve A matrislerinin mertebeleri n dir. Buradan S pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla tersinirdir.

Teorem 2.19 S=$(s_{ij})_{n\times n}$ Hilbert-Smith matrisi olsun. S matrisinin tersi;

$$B=(b_{ij})=ij\sum_{\substack{i/k\\ j/k}}\frac{1}{\phi(k)}\mu\left(\frac{k}{i}\right)\mu\left(\frac{k}{j}\right)$$

matrisidir.[8].

Teorem 2.20 $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ elemanları pozitif tamsayılar olan bir küme olsun. Eğer S çarpan kapalı ise;

$$\det[S]=\frac{\phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)}{x_1^2x_2^2...x_n^2}$$

dir [8].

2.1 Matris Normları

Tanım 2.1.1 C kompleks ve R reel sayılar kümesi olmak üzere $\|.\|:C^n\to R$ fonksiyonu :

i) Her $x\in C^n$ için $\|x\|\ge 0$ dır. $\left(\|x\|=0\Leftrightarrow x=0\right)$

ii) Her $x,y\in C^n$ için $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ dir.(Üçgen eşitsizliği)

iii) Her $\alpha\in C$ ve $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ dir.

şartlarını sağlıyorsa negatif olmayan $\|x\|$ *reel* sayısına x vektörünün vektör normu denir.

Tanım 2.1.2 $\forall A, B \in M_{m,n}$ için $\|.\| : M_{m,n} \to R$ şeklinde tanımlanan fonksiyon

1) $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ dır.

2) c herhangi bir kompleks sayı olmak üzere $\|cA\| = |c|\|A\|$

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

4) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona matris normu denir. (1),(2) ve (3) şartlarını sağlayan bir fonksiyona genelleştirilmiş matris normu denir.

5) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ ise matris normu ile $\|x\|$ vektör normu uygundur denir.

Buradan sup, sıfırdan farklı her x vektörü için en küçük üst sınırı göstermek üzere;

$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ normunu tanımlayalım. $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ alınırsa $\|y\| = 1$ elde edilir.

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$$

ifadesine denk olur.Buna bir vektör normuyla uygun doğal norm denir.

Şimdi matris norm çeşitlerini verelim.

A, $m \times n$ mertebeli matris olmak üzere ;

a) $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ ifadesine A matrisinin sütun normu,

b) $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$ ifadesine A matrisinin satır normu,

c) $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ ifadesine A matrisinin Frobenius (veya Euclide-Schur) normu,

d) $\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i (A^H A)|}$ ifadesine A matrisinin spektral normu $\left(A^H = (\overline{A})^T\right)$,

e) $\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$ $(1 < p < \infty)$ ifadesine A matrisinin l_p normu denir.

(e)'de p=1 ise sütun, p=2 ise Frobenius, $p=\infty$ ise satır normu olur. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ matrisinin bütün satırlarının ve sütunlarının Euclides (Frobenius) uzunlukları $r_i(A)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ $(i=1,2,...,m)$ ve $c_j(A)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2}$ $(j=1,2,...,n)$ şeklinde gösterilir.

2.2 Matris Normları Arasındaki Bağıntılar

A, $m\times n$ ü mertebeli matris olmak üzere, A matrisinin nrmları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

1) $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2$

2) $\|A\|_\Delta \le \|A\|_2 \le \sqrt{mn}\|A\|_\Delta$, $\left(\|A\|_\Delta = \max|a_{ij}|\right)$

3) $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$

4) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty$

5) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1$

Tanım 2.2.1 $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ olmak üzere $\Psi(x)=\frac{d}{dx}\{\ln[\Gamma(x)]\}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona psi (veya digamma) fonksiyonu denir.

Bir psi fonksiyonunun n. Türevine polygamma fonksiyonu denir.Yani;

$$\Psi(n,x)=\frac{d^n}{dx^n}\ Psi(x)=\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{d}{dx}\ln[\Gamma(x)]\right\}$$

dir. Eğer n=0 ise $\Psi(x)=Psi(x)=\frac{d}{dx}\{\ln[\Gamma(x)]\}$ dir.Diğer taraftan eğer a>0, b herhangi bir sayı ve n pozitif tamsayı ise;

$$\lim_{n\to\infty}\Psi(a,n+b)=0$$

olur.[17]

Tanım2.2.2 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ve $B=(b_{ij})_{n\times n}$ matrisleri için $A\circ B=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$ şeklinde tanımlanan çarpma A ve B matrislerinin Hadamard Çarpımı denir.

Hadamard Çarpımda iki matrisin aynı mertebede olması gerekir.Çarpım, matris toplamı gibi karşılıklı elemanların çarpımıdır.Schur (1991), Hadamard Çarpım Teoremi ile ilgili $\|A \circ B\|_2 \le \|A\|_2 \|B\|_2$ eşitsizliğini ispatlamıştır[12].

Teorem 2.2.1 *A, B ve C,* $m \times n$ matrisler olsun.Eğer $A = B \circ C$ ise $\|A\|_2 \le r_1(B) c_1(C)$ dir [16].

2.3 GCD,LCM ve Hilbert Matrislerinin Normları

Teorem 2.3.1 H hilbert matrisi olsun. $3 \le p \le \infty$ için

$$\|H\|_p \le (\varsigma(p-1))^{1/p}$$

dir[20].

İspat: l_p normunun tanımından

$$\|H\|_p^p = \sum_{s=1}^{n} \frac{s}{|s|^p} + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n-s}{|n+s|^p} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s^{p-1}} = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n-s}{|n+s|^p}$$

olur.

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s^{p-1}} = \frac{(-1)^p}{(p-2)!} \Psi(p-2, n+1) + \varsigma(p-1) \tag{2.7}$$

ve

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n} \frac{n-s}{(n+s)^p} &= \frac{(-1)^{p-1}}{(p-2)!} \frac{2n}{(p-1)} \left[\Psi(p-1,2n) - \Psi(p-1,n+1)\right] \\ &+ \frac{(-1)^{p-1}}{(p-2)!} \left[\Psi(p-2,2n) - \Psi(p-2,n+1)\right] \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

olur.Eğer $n \to \infty$ için (2.7) ve (2.8) in limitlerini alırsak (2.6) dan

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s^{p-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^p}{(p-2)!} \Psi(p-2, n+1) + \varsigma(p-1) = \varsigma(p-1)$$

ve

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n-s}{(n+s)^p} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-2)!} \frac{2n}{(p-1)} \left[\Psi(p-1,2n) - \Psi(p-1,n+1)\right] \\ &+ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-2)!} \left[\Psi(p-2,2n) - \Psi(p-2,n+1)\right] \end{aligned}\right\} = 0$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\|H\|_p^p \le \varsigma(p-1)$ ve buradan $\|H\|_p \le (\varsigma(p-1))^{1/p}$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.2 $H^{\circ 1/2} = \left(1/(i+j-1)^{1/2}\right)_{i,j=1}^{n}$, H Hilbert matrisinin Hadamard karekökü olsun.Bu takdirde $\left(1/\sqrt{n}\right)\|H^{\circ 1/2}\|_F^2 \le (2\ln 2)^{1/2}$ eşitsiliği geçerlidir[20].

İspat: Frobenius normunun tanımından

$$\|H^{\circ 1/2}\|_F^2 = \sum_{s=1}^{n} \frac{s}{\left|\sqrt{s}\right|^2} + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n-s}{\left|\sqrt{n+s}\right|^2} = \sum_{s=1}^{n} 1 + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n-s}{n+s}$$

eşitliği,

$$\sum_{s=1}^{n} 1 = n \text{ ve } \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)/(n+s) = -n + 2n\psi(2n) - 2n\psi(n+1) + 1$$

olup

$$\|H^{\circ 1/2}\|_F^2 = [2(\psi(2n) - \psi(n+1)) + 1] \tag{2.9}$$

olur. Her iki tarafı n'e bölersek,

$$\frac{1}{n}\|H^{\circ 1/2}\|_F^2 = \left[2(\psi(2n) - \psi(n+1)) + \frac{1}{n}\right]$$

elde ederiz. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \left[2(\psi(2n) - \psi(n+1)) + \frac{1}{n}\right] \right\} = 2\ln 2$$

olup

$$\frac{1}{n}\|H^{\circ 1/2}\|_F^2 \le 2\ln 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\|H^{\circ 1/2}\|_F \le \sqrt{2\ln 2}$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.3 $G = (\gcd(i,j))_{n\times n}$ GCD matrisi olsun. Bu taktirde

$$\sqrt[n]{\phi(1)\phi(2)\phi(3)...\phi(n)} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|G\|_F$$

eşitsizliği geçerlidir[20].

İspat: Teorem [7] den

$$\det(A^H A) \le \frac{\|A\|_F^{2n}}{n^n} \tag{2.10}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Eğer $G=(\gcd(i,j))_{n\times n}$ matrisi

$$A=\begin{cases}\sqrt{\phi(j)}, & j/i\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$$

olmak üzere, $G=AA^T$ olup (2.8)'den $\det(G)=\det(AA^T)\le \|A\|_F^{2n}/n^n$ dir. Dolayısıyla

$$\|A\|_F^{2n}/n^n \ge \det(G)=\phi(1)\phi(2)\phi(3)...\phi(n)$$

dır[8]. Eğer AA^T yerine G yazılırsa

$$\det(GG)=\det[(AA^T)(AA^T)]\le \frac{\|AA^T\|_F^{2n}}{n^n}=\frac{\|G\|_F^{2n}}{n^n}$$

olup

$$(\det G)^2 \le \frac{\|G\|_F^{2n}}{n^n}$$

olacaktır. Sonuç olarak;

$$\sqrt[n]{\det G}\le \frac{\|G\|_F}{n^{1/2}} \Rightarrow \sqrt[n]{\phi(1)\phi(2)\phi(3)...\phi(n)}\le \frac{1}{\sqrt{n}}\|G\|_F$$

elde ederiz ki, ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.4 $L=(lcm(i,j))_{n\times n}$ bir LCM matrisi ise

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(n!)^2}\phi(1)\phi(2)\phi(3)...\phi(n)}\le \frac{1}{\sqrt{n}}\|L\|_F$$

eşitsizliği geçerlidir[20].

İspat: $ij=lcm(i,j)\gcd(i,j)$ olduğundan

$$L=\left(\frac{1}{lcm(i,j)}\right)_{n\times n}=\left(\frac{\gcd(i,j)}{ij}\right)_{n\times n}$$

dir. Diğer taraftan

$$H=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\phi(j)}}{i}, & j/i\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$$

olmak üzere

$$\left(\frac{\gcd(i,j)}{ij}\right)_{n\times n}=HH^T$$

dir.

$\det(HH^T) = (1/(n!)^2)\phi(1)\phi(2)...\phi(n)$ dir [8].(2.12) den,

$$\det(LL) = \det[(HH^T)(HH^T)] \le \frac{\|HH^T\|_F^{2n}}{n^n} = \frac{\|L\|_F^{2n}}{n^n}$$

$$\le \frac{\|L\|_F^{2n}}{n^n}$$

elde ederiz. Sonuç olarak ;

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(n!)^2}\phi(1)\phi(2)\phi(3)...\phi(n)} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|L\|_F$$

olup ispat tamamlanır.

3.FM,RECIPROCAL –FM MATRİSLERİNİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Tanım 3.1 i,j =1,2,…,n pozitif tamsayılar ve $F(k)$ k, fibonacci sayısı olmak üzere,

$$A = \left[\frac{1}{F(i).F(j)} \right]$$

şeklinde tanımlanan A, n-kare matrisine Fibonacci Multiplication (FM) matrisi denir.

i,j=1,2,…,n pozitif tamsayılar ve $F(k)$ k, fibonacci sayısı olmak üzere, $B = \left[F(i).F(j)\right]$ şeklinde tanımlanan B, n-kare matrisi de Reciprocal-Fibonacci Multiplication matrisidir.

Teorem 3.1 A matrisi FM matrisi ise,

$$\|A\|_2 \leq 2{,}426320751 + 3.10^{-4} \text{ dir.}$$

İspat:

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} & \cdots & 1/\sqrt{F(n)} \\ 1 & 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} & \cdots & 1/\sqrt{F(n)} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{10} & \cdots & 1/\sqrt{F(3)F(n)} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{9} & \vdots & \cdots & 1/\sqrt{F(4)F(n))} \\ 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{10} & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/\sqrt{F(n)} & 1/\sqrt{F(n)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1/\sqrt{F(n)F(n)} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ve

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} & \cdots & 1/\sqrt{F(n)} \\ 1 & 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} & \cdots & 1/\sqrt{F(n)} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{10} & \cdots & 1/\sqrt{F(3)F(n)} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{9} & \vdots & \cdots & 1/\sqrt{F(4)F(n)} \\ 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{10} & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/\sqrt{F(n)} & 1/\sqrt{F(n)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1/\sqrt{F(n)F(n)} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

olarak seçersek $A = G \circ H$ olarak yazılabilir. Teorem 2.2.1'den $\|A\|_2 \le r_1(G)c_1(H)$ olur. O halde;

$$r_1(G) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{F(k+2)-F(k+1)}\right)^2}$$

ve

$$c_1(H) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{F(k+2)-F(k+1)}\right)^2}$$

eşitlikleri yerine yazılarak,

$$\|A\|_2 \le r_1(G)c_1(H)$$

$$\le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{F(k+2)-F(k+1)}\right)^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{F(k+2)-F(k+1)}\right)^2}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{F(k+2)-F(k+1)}\right)^2$$

$$\leq 1^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\ldots$$

olur.

$$\leq \sum_{k=1}^{25}\left(\frac{1}{F(k+2)-F(k+1)}\right)^2+\varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon = 3.10^{-4}$ alınırsa,

$$\|A\|_2 \leq 2{,}426320751+3.10^{-4}$$

elde edilir. (bk. Tablo 4.1)

Teorem 3.2 *B* matrisi Reciprocal- FM matrisi ise,

$$\|B\|_F \to \infty$$

dir.

İspat: *B* matrisi Reciprocal FM matrisi

$$B=[F(i).F(j)]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & F(n) \\ 1 & 1 & \cdots & F(n) \\ 2 & 2 & \cdots & F(3).F(n) \\ 3 & 3 & \cdots & F(4).F(n) \\ 5 & 5 & \cdots & F(5).F(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(n) & \cdots & \cdots & F(n).F(n) \end{bmatrix}$$

yazalım. Burada *B* matrisinin hangi satır ya da sütununu alırsak alalım sonuçlara göre; $\sum_{k=1}^{n}\left(F(k+2)-F(k+1)\right)^2$ toplamının sonsuza yakınsadığı görülür (Tablo 4.2). O halde $\|B\|_F \to \infty$ bulunur.

4. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu kısımda 3. bölümde elde edilen sonuçlar ile olması gereken gerçek sonuçlar tablolar halinde karşılaştırılmıştır.

Sonuç 4.1 A FM matrisi olsun. $\|A\|_2$ için sınırları Tablo 4.1 ile verelim.

Tablo 4.1

n	$\|A\|_2$	$\sum_{k=1}^{n} 1/\left(F(k+2)-F(k+1)\right)^2$
1	1	1
2	2	2
3	2.25	2.25
4	2.361111111	2.3611111111
5	2.4011111111	2.4011111111
6	2.4167361111	2.4167361111
7	2.4226532708	2.4226532708
8	2.4249208445	2.4249208445
9	2.4257858964	2.4257858964
10	2.4261164749	2.4261164749
11	2.4262427216	2.4262427216
12	2.4262909469	2.4262909469
13	2.4263093669	2.4263093669
14	2.4263164027	2.4263164027
15	2.4263190902	2.4263190902
16	2.4263201167	2.4263201167
17	2.4263205088	2.4263205088
18	2.4263206586	2.4263206586
19	2.4263207158	2.426320716
20	2.4263207376	2.4263207376
21	2.4263207460	2.4263207460
22	2.4263207491	2.4263207491
23	2.4263207504	2.4263207504
24	2.4263207508	2.4263207508
25	2.4263207510	2.4263207510
⋮	⋮	⋮
150	…	…
⋮	⋮	⋮

Sonuç 4.2 *B* matrisi Reciprocal -FM matrisi olsun. $\|B\|_F$ için sınırları da Tablo 4.2 ile verelim

Tablo 4.2

n	$\|B\|_F$	$\sum_{k=1}^{n}\left(F(k+2)-F(k+1)\right)^2$
1	1	1
2	2	2
3	6	6
4	15	15
5	40	40
6	104	104
7	273	273
8	714	714
9	1870	1870
10	4895	4895
⋮	⋮	⋮
20	74049690	74049690
⋮	⋮	⋮
30	11201449658760	11201449658760
⋮	⋮	⋮

Görüldüğü gibi hangi satır veya sütun incelenirse incelensin $\sum_{k=1}^{n}\left(F(k+2)-F(k+1)\right)^2$ toplamı ve $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(F(k+2)-F(k+1)\right)^2}$ değeri de artarak sonsuza yaklaşır. Buradan $\|B\|_F \to \infty$ elde edilir.

Sonuç 4.3 [21] referansı incelendiğinde, [21] de tanımlanan matris ile burada tanımlanan $A=\left[\frac{1}{F(i).F(j)}\right]$ matrisleri birbirinden farklıdır. Ancak Teorem 2.2.1 e uygulaması olarak her iki matrisinde $r_1(G)$ Euclides (Frobenius) satır normu ve $c_1(H)$ Euclides (Frobenius) sütun normu aynı olduğu için A matrisinin spektral normu için üst sınır her iki örnek için de aynı sonucu vermektedir.

5. KAYNAKLAR

[1]Apostal Tom M.,Aritmetical Properties of Generalized Ramanujan Sums,*Pasific Journal of Mathematics*, 41:281-293 (1972)

[2]Apostol T.M., An Introductıon to Analytic Number Theory. 1st Ed.New York:,*Springer-Verlag*,(1976)

[3] Beslin Scott and Ligh Steve, Greatest Common Divisor Matrices*, Linear Algebra and its Applications,* 118:69-76(1989).

[4] Beslin Scott, Reciprocal GCD Matrices and LCM Matrices, *Fibonacci Quarterly,* 25:271-274(1991)

[5] Beslin Scott and Ligh Steve, GCD-Closed Sets and the Determinants of GCD Matrices,

,*Fibonacci Quarterly*, 30:157-160(1992).

[6] Bourque Keith and Ligh Steve, On GCD and LCM matrices,*Linear Algebra and Its Applications,* 174:65-74(1992)

[7] D. Taşçı, Relations between norms and determinants, *Science of Journal 12,* Konya,Turkey,(1994).

[8] E. Altınışık, Hemen hemen Hilbert-Smith matrislerinin karakterizasyonu, *Fen Bilimleri Ens. Doktora Tezi*, Konya, 47 (2001).

[9] Gantmacher , F.R., The Theory of Matrices, Vol. 1, New York*: Chelsea Publişhing Company,* (1960).

[10] H. J. Smith,On the value of a certain arithmetical determinant, Proc. Londan Math.Soc. 7:208-212(1875-1876).

[11] H. Şenay, Sayılar Teorisine Giriş, Selçuk Universitesi Yay. Konya 66 (1989).

[12] J. Schur, Bemerkungen zur Theorie der beschrankten Bilinearformen mit unendlich vielen Veranderlichen. *J. Reine Angew. Math.,* 140: 1-28 (1911).

[13] Li Zhongshan, The Determinants of GCD Matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 134: 137-143 (1990).

[14] Lütkepohl Helmut, Handbook of Matrices*, New York John Wiley and Sons, 1996*

[15] McHarty P. J.,A Generalization of Smith Determinant, *Canad. Math. Bulletin* 29: 109-113(1986)

[16] R. Mathias, The Spectral Norm of a Nonnegative Matrix*, Linear Algebra and Its Applications* , 141 (1990) 269-284.

[17] R.Moenck, On computing closed forms for summations, in*: MACSYMA Users'Conference, NASA CP-2012*, (paper no.23 of this compilation)(1977).

[18] R.Reams, Hadamard inverses, square roots and product of almost semidefinite matrices*,Linear Algebra and Its Applications* 288, 35-43 (1999)

[19] R.Türkmen, Matrislerin Hadamard Çarpımlarının Normları ve Singüler Değerleri*, S.Ü. Fen Bilimleri Enst. Doktora tezi*, Konya,52 (2003).

[20] S. Solak, R. Türkmen and D. Bozkurt, On GCD,LCM and Hilbert matrices and their applications*, Applied Mathematics and Cmputation*, 146:595-600 (2003).

[**21]** Ş. Özer, GCD,LCM ve HİLBERT Matrislerinin normları için sınırlar, *S.Ü.Fen Bilimleri Enst. Yüksek Lisans Tezi,* Konya 2004.