




**T.C.**

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# ÜSTEL GÜÇ DAĞILIMI KULLANILARAK YENİ SÜREKLİ DAĞILIMLARIN ELDE EDİLMESİ

**Noorsl AHMED Z. ZEENALABIDEN**

**DOKTORA TEZİ**

**İstatistik Anabilim Dalı**

**Ocak-2020**
**KONYA**
**Her Hakkı Saklıdır**

# ÖZET

## DOKTORA TEZİ

## ÜSTEL GÜÇ DAĞILIMI KULLANILARAK YENI SÜREKLİ DAĞILIMLARIN ELDE EDİLMESİ

**Noorsl AHMED Z.ZEENALABIDEN**

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**
**İstatistik Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof.Dr.BUĞRA SARAÇOĞLU**

**2020, 100 Sayfa**

**Jüri**
**Prof.Dr.Buğra SARAÇOĞLU**
**Prof.Dr.Aşır GENÇ**
**Prof.Dr.Coşkun KUŞ**
**Prof.Dr. Mehmet Fedai KAYA**
**Dr.Öğr.Üyesi Ahmet ÇALIK**

Bu çalışmada, (Alzaatreh ve ark., 2013) tarafından ortaya atılan yöntem vasıtasıyla "Üstel Güç (Power)-X dağılımlar ailesi" adı verilen yeni bir dağılımlar ailesi tanıtılmıştır. Bu yeni dağılımlar ailesinin Üstel Güç Chen (EP-Ch) ve üstel güç dağılımın özel bir hali olan Üstel Güç Weibull (EP-W) isimli alt dağılımları elde edilmiş ve bu dağılımlara ilişkin bozulma oranı fonksiyonları ve grafikleri, kuantil fonksiyonlar, momentler, moment çıkaran fonksiyonları, çarpıklık ve basıklık katsayıları, Renyi ve Shannon entropileri gibi bazı istatistiksel özellikler incelenmiştir. Ayrıca EP-W ve EP-Ch dağılımlarının bilinmeyen parametreleri için en çok olabilirlik (EÇO) ve aralık tahmin edicileri elde edilmiştir ve bu tahmin edicilerin performanslarını görmek için Monte Karlo simülasyon çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Son olarak, bu yeni dağılımların kullanılabilirliğini göstermek için gerçek veri uygulamalarına yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Üstel güç-X dağılımlar ailesi, Üstel güç Chen (EP-Ch) dağılımı, Üstel güç Weibull (EP-W) dağılımı, En çok olabilirlik (EÇO) Tahmini, Monte Karlo simülasyonu, Renyi Entropisi, Shannon entropisi.

# ABSTRACT

## Ph.D THESIS

## OBTAINING OF NEW CONTINUOUS DISTRIBUTIONS BY USING EXPONENTIAL POWER DISTRIBUTION

**Noorsl AHMED Z.ZEENALABIDEN**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY**
**THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY**
**IN STATISTICS**

**Advisor: Prof.Dr. Buğra SARAÇOĞLU**

**2020, 100 Pages**

**Jury**
**Prof.Dr.Buğra SARAÇOĞLU**
**Prof.Dr.Aşır GENÇ**
**Prof.Dr.Coşkun KUŞ**
**Prof.Dr. Mehmet Fedai KAYA**
**Asst.Prof.Dr. Ahmet ÇALIK**

In this study, it has been introduced a new family of distributions called “Exponential Power - X family of distributions” by using the method suggested by (Alzaatreh ve ark., 2013). Exponential Power Weibull (EP-W) which is a special case of Exponential Power distribution and Exponential Power Chen distributions as special sub-models of this new family are obtained and some statistical properties such as failure rate (hazard rate) functions and their graphics, quantile functions, moments, moment generating functions, skewness and kurtosis coefficients, entropies of Renyi and Shannon based on these distributions have been examined. Moreover, the maximum likelihood (ML) and interval estimators for unknown parameters of EP-W and EP-Ch distributions have been obtained and Monte Carlo simulation studies have been performed to see performances these estimators. Finally, real data applications are presented to demonstrate the availability of these new distributions.

**Keywords:** Exponential power-X family of distributions, Exponential power Weibull (EP-W) distribution, Exponential power Chen (EP-Ch) distribution, Maximum likelihood estimation (MLE), Monte Carlo Simulation, Renyi entropy, Shannon entropy.

# İÇİNDEKİLER

**ÖZET** ..... **iv**

**ABSTRACT** ..... **v**

**ÖNSÖZ** ..... **vi**

**İÇİNDEKİLER** ..... **vii**

**SİMGELER VE KISALTMALAR** ..... **ix**

**1. GİRİŞ** ..... **1**

**2. KAYNAK ARAŞTIRMASI** ..... **3**

**3. TEMEL KAVRAMLAR** ..... **5**

3.1. Bazı Sürekli Dağılımlar ..... 5
3.1.1. Weibull dağılımı: ..... 5
3.1.2. Chen dağılımı ..... 5
3.1.3. Üstel güç dağılımı ..... 6
3.1.4. Üstelleştirilmiş Üstel dağılım ..... 6
3.1.5. Dagum dağılımı ..... 7
3.1.6. Dönüştürülmüş Üstelleştirilmiş Üstel dağılımı ..... 7
3.1.7. Dönüştürülmüş Weibull dağılımı ..... 8
3.1.8. Gompertz Dağılımı ..... 8
3.1.9. Lindley Weibull Dağılımı ..... 9
3.2. En Çok Olabilirlik Tahmini ..... 9
3.3. Bootstrap Güven Aralıkları ..... 10
3.4. Bazı Uyum İyiliği Kriterleri ..... 11
3.5. Belirsizlik (Entropi) Ölçüleri ..... 12

**4. ÜSTEL GÜÇ-X DAĞILIMLAR AİLESİ** ..... **14**

4.1. **T-X** Dönüşümlü Dağılımlar Ailesi (Alzaatreh ve ark., 2013) ..... 14
4.2. Üstel Güç-**X** (EP-**X**) Dağılımlar Ailesi ..... 14
4.3. Özel Model: Üstel Güç-Weibull (EP-W) Dağılımı ..... 15
4.3.1. Ortalama Kalan Yaşam Fonksiyonu ..... 18
4.3.2.EP-W Dağılımı için Rasgele Sayı Üreteci ..... 20
4.3.3. EP-W Dağılımı için Momentler ..... 21
4.3.4. Moment Çıkaran Fonksiyon ..... 23
4.3.5. Renyi ve Shannon Entropileri ..... 23
4.3.6. Olabilirlik Tahmini ..... 26
4.3.7. Simülasyon Çalışması ..... 27
4.8. Gerçek Veri Analizi ..... 48

**5. ÜSTEL GÜÇ-CHEN DAĞILIMI VE ÖZELLİKLERİ** ..... **52**

5.1. Üstel Güç-Chen Dağılımı ..... 52
5.2. EP-Ch Dağılımı için Bazı İstatistiksel Özelliklerin incelenmesi ..... 56

5.2.1. EP-Ch Dağılımı için Rasgele Sayı Üreteci ..... 56
5.2.2. Ortalama Kalan Yaşam Fonksiyonu ..... 57
5.2.3. EP-Ch Dağılımı için Momentler ..... 60
5.2.4. Moment çıkaran fonksiyon ..... 63
5.3. Renyi ve Shannon Entropileri ..... 63
5.4. EP-Ch Dağılımı için En Çok Olabilirlik Tahmini ..... 65
5.5. Simülasyon Çalışması ..... 66
5.6. Gerçek Veri Analizi ..... 90

**6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER ..... 95**

**KAYNAKLAR ..... 96**

**ÖZGEÇMİŞ ..... 99**

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

| | |
|---|---|
| $F(x)$ | : Dağılım fonksiyonu |
| $f(x)$ | : Olasılık yoğunluk fonksiyonu |
| $h(x)$ | : Hazard fonksiyonu |
| $m(t)$ | : Ortalama kalan yaşam fonksiyonu |
| $L(\theta \mid \underline{x})$ | : Olabilirlik fonksiyonu |
| $\Theta$ | : Parametre uzayı |
| $\ell(\theta)$ | : log-olabilirlik fonksiyonu |
| $\Re$ | : Reel sayılar kümesi |
| $H_{Shannon}(X)$ | : Shannon entropisi |
| $H_{\text{Re}nyi-\gamma}(X)$ | : Renyi entropisi |

### Kısaltmalar

| | |
|---|---|
| EÇO | : En Çok Olabilirlik |
| $T$ - $X$ | : $T$ Dönüşümlü Dağılımlar Ailesi |
| W | : Weibull Dağılımı |
| EP | : Üstel Güç Dağılımı |
| EP-W | : Üstel Güç-Weibull Dağılımı |
| EP-CH | : Üstel Güç-Chen Dağılımı |
| EE | : Üstelleştirilmiş Üstel Dağılım |
| TEE | : Dönüştürülmüş Üstelleştirilmiş Üstel Dağılım |
| MSE | : Hata Kareler Ortalaması |
| TW | : Dönüştürülmüş Weibull Dağılımı |
| LW | : Lindley-Weibull Dağılımı |
| GOMP | : Gompertz Dağılımı |
| ÇK | : Çarpıklık Katsayısı |
| BK | : Basıklık Katsayısı |
| AIC | : Akaike Bilgi Kriteri |
| BIC | : Bayes Bilgi Kriteri |
| AICc | : Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri |
| KS | : Kolmogorov Smirnov istatistiği |
| HQIC | : Hannan-Quinn bilgi kriteri |

# 1. GİRİŞ

İstatistiksel dağılımlar, mühendislik, tıp bilimleri, aktüerya, güvenilirlik mühendisliği ve ekonomi gibi birçok alanda veri setlerini modellemek için yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Gerçek dünyada çok çeşitli veri setleri bulunmaktadır. Bu veri setlerinden bazıları literatürde bulunan mevcut dağılımlara uyumlu olmayabilir. Bu nedenle, bu tür verilerin alındığı kitlenin özellikleri hakkında istatistiksel sonuç çıkarım yapmak amacıyla bu veri setlerinin uyum sağlayabileceği ve mevcut dağılımlara göre daha esnek yani çeşitli veri gruplarına da uygulanabilecek yeni istatistiksel dağılımlara ihtiyaç duyulmaktadır.

Son yıllarda, literatürde, çeşitli veri setlerini modellemek için yeni istatistiksel dağılımların önerildiği birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda, önerilen dağılımlara ilişkin olasılık yoğunluk ve bozulma oranı (hazard) fonksiyonlarının çeşitli parametre değerlerine ilişkin davranışları incelenerek çeşitli veri gruplarına uygulanabileceği gösterilmiştir. Bu yeni dağılımların üretilmesi için bir çok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemler kullanılarak elde edilen yeni istatistiksel dağılımlar ile ilgili çalışmalar bu tez çalışmasının kaynak araştırması bölümünde özetlenmiştir. Bu tez çalışmasında özellikle (Alzaatreh ve ark., 2013) tarafından önerilen $T$ - $X$ dönüşümlü dağılımlar elde etme metodu kullanılacaktır. Bu yöntem, $F_T(t) = P(T \leq t)$ ile gösterilen bir $T$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonundaki $t$ yerine, yeni elde edilecek dağılıma ilişkin dağılım fonksiyonu olma özelliğini bozmayacak şekilde bir $X$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun herhangi bir fonksiyonu yazılarak yeni bir istatistiksel dağılıma ilişkin dağılım fonksiyonunun elde edilmesi yöntemidir.

Bu tez çalışmasında, (Alzaatreh ve ark., 2013) tarafından önerilen yeni dağılımlar ailesi üretme metodunda $T$ rasgele değişkeninin dağılımının (Smith ve Bain, 1975) tarafından tanıtılan Üstel Güç (Exponential Power) dağılımına sahip olduğu düşünülerek "Üstel Güç- $X$ dağılımlar ailesi" isminde yeni bir dağılımlar ailesi önerilmiştir. Bu tez çalışması aşağıdaki şekilde organize edilmiştir. İkinci bölümde geniş bir kaynak araştırmasına yer verildikten sonra üçüncü bölümde tezde kullanılan temel kavramlar hakkında bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde, (Alzaatreh ve ark., 2013) tarafından önerilen yeni dağılımlar ailesi elde etme metodu hakkında bilgi verildikten sonra bu metot kullanılarak Üstel Güç- $X$ dağılımlar ailesi tanıtılmış ve bu yeni dağılımlar grubunun bir alt modeli olarak Üstel Güç-Weibull (EP-W) dağılımı tanıtılarak bu dağılıma ilişkin bazı istatistiksel özellikler incelendikten sonra bu dağılım için nokta ve aralık tahmin edicilerine dayalı simülasyon çalışması gerçekleştirilmiş

ve bu bölümün sonunda EP-W dağılımı için gerçek veri analizleri yapılmıştır. Beşinci bölümde ise ikinci alt model olarak EP-Ch dağılımı tanıtılarak bu dağılıma ilişkin bazı dağılımsal özellikler incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde, EP-Ch dağılımının bilinmeyen parametreleri için en çok olabilirlik (EÇO) tahmin edicisi ile asimptotik ve bootstrap aralık tahmin edicilerinin performansları incelendikten sonra gerçek veri uygulamalarına yer verilmiştir. Altıncı bölümde ise tez çalışması ile ilgili sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Yeni istatistiksel dağılımların elde edilmesinde kullanılan yöntemler ve bu yöntemler kullanılarak üretilen yeni dağılımlara ilişkin literatürde yer alan önemli çalışmalardan biri (Eugene ve ark., 2002) tarafından yapılan çalışmadır. (Eugene ve ark., 2002), Beta dağılımına sahip bir $T$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu olarak gösterilen $F_T(t) = P(T \leq t)$ formülündeki $t$ yerine, bir $X$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu yazarak Beta dağılımı tarafından üretilen dağılımlar ailesini tanıtmışlar ve bu ailenin bir üyesi olarak Beta-Normal dağılımını elde ederek bu dağılıma ilişkin istatistiksel özellikleri incelemişlerdir. Bu dağılım elde etme yöntemini kullanarak, (Nadarajah ve Kotz, 2004), Beta-Gumbel, (Famoye ve ark., 2005), Beta-Weibul, (Nadarajah ve Kotz, 2006), Beta-Üstel, (Kong ve ark., 2007), Beta-Gamma, (Akinsete ve ark., 2008), dört parametreli Beta-Pareto, (Silva ve ark., 2010), (Lai ve ark., 2003) tarafından tanıtılan modifiye edilmiş Weibull dağılımını kullanarak beş parametreli Beta modifiye edilmiş Weibull, (Barreto-Souza ve ark., 2010), beta genelleştirilmiş üstel, (Cordeiro ve dos Santos Brito, 2012), Beta-power ve (Pararai ve ark., 2015), beta üstelleştirilmiş güç Lindley isimli yeni dağılımları tanıtarak bu dağılımlara ilişkin istatistiksel özellikleri incelemişler ve bu dağılımların bilinmeyen parametrelerinin tahmini için EÇO tahmin yöntemini kullanmışlardır. Ayrıca bu dağılımların kullanılabilirliğini göstermek için gerçek veri uygulamaları yapmışlardır. Beta dağılımı tarafından üretilen aileler, destek kümesi $(0,1)$ aralığında tanımlı Beta dağılımından üretilen bir ailedir.(Zografos ve Balakrishnan, 2009) destek kümesi $(0,\infty)$ aralığında tanımlı gamma rasgele değişkenleri tarafından üretilen dağılımlar ailesini tanıtıp bu aileye ilişkin bazı önemli karakterizasyonlar elde etmişlerdir. Bu aileye ait alt dağılımlar ile ilgili olarak, (Ristić ve Balakrishnan, 2012), Gamma-üstelleştirilmiş üstel ve (Pinho ve ark., 2012), Gamma-üstelleştirilmiş Weibull (GEW) dağılımlarını tanıtarak bu dağılımlara ilişkin bazı önemli karakterizasyonlar elde etmişler ve bu dağılımların uygulanabilirliğini gerçek veri analizleriyle desteklemişlerdir.

(Kumaraswamy, 1980) tarafından tanıtılan destek kümesi $(0,1)$ aralığında tanımlı Kumaraswamy (Kw) dağılımının Beta dağılımına göre avantaj ve dezavantajları (Jones, 2009) tarafından ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve (Cordeiro ve de Castro, 2011), (Eugene ve ark., 2002) tarafından önerilen metotta kullandıkları Beta dağılımı yerine dağılım fonksiyonu kapalı formda yazılabilen Kumaraswamy (Kw) dağılımını kullanarak Kumaraswamy dağılımı tarafından üretilen dağılımlar ailesini önererek bu aileye ait olan Kw-normal, Kw-Weibull, Kw-Gamma, Kw-Gumbel ve Kw-ters Gauss dağılımlarını tanıtmışlardır. Ayrıca (da Silva ve

ark., 2015), bu dağılım elde etme yöntemini kullanarak Kw-Gompertz isimli yeni bir dağılım tanıtarak bu dağılıma ilişkin bazı istatistiksel özellikleri inceledikten sonra bu dağılımın kullanılabilirliğini, gerçek veri seti üzerinden bazı uyum iyiliği ölçülerini kullanarak bu dağılım ile mevcut istatistiksel dağılımları karşılaştırarak göstermişlerdir. (Alzaatreh ve ark., 2013); (Eugene ve ark., 2002) ve (Cordeiro ve de Castro, 2011) tarafından önerilen yeni dağılım elde etme yöntemlerini genelleştirerek destek kümesi $(0,1)$ aralığından farklı destek kümelerine sahip dağılımlar kullanılarak ta yeni dağılımlar aileleri elde edilebileceğini göstererek bu yeni dağılımlar ailesini $T\text{-}X$ dönüşümlü dağılımlar ailesi olarak isimlendirmişler ve bu aileye ait olan gamma-$X$ , Beta-Üstel-$X$ ve Weibull-$X$ dağılımlar ailelerinin dağılımsal özelliklerini incelemişlerdir. Bu yeni yöntem, $F_T(t) = P(T \le t)$ ile gösterilen bir $T$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonundaki $t$ yerine, yeni elde edilecek dağılıma ilişkin dağılım fonksiyonu olma özelliğini bozmayacak şekilde $G(x) = P(X \le x)$ ile gösterilen bir $X$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun $W(G(x))$ ile gösterilen herhangi bir fonksiyonu yazılarak yeni dağılımlar ailesi elde etme yöntemidir. Bu yöntem kullanılarak (Alzaghal ve ark., 2013) tarafından Üstelleştirilmiş $T-X$ dağılımlar ailesi önerilmiş ve üstelleştirilmiş gamma-$X$ ve üstelleştirilmiş Weibull-$X$ dağılımlar ailesi tanıtılarak üstelleştirilmiş Weibull-$X$ dağılımlar ailesine ait olan Üstelleştirilmiş Weibull-üstel dağılımına ilişkin bazı istatistiksel özellikler incelenmiş ve gerçek veri seti kullanılarak bu dağılım diğer mevcut dağılımlar ile bazı uyum iyiliği kriterleri aracılığı ile karşılaştırılmıştır. (Alzaatreh ve ark., 2013) tarafından önerilen yöntem ile (Tahir ve ark., 2016a) Logistic-X dağılımlar ailesini tanıtarak bu aileye ait olan Logistic-Frechet, (Alzaatreh ve ark., 2014), Gamma-Normal, (Cakmakyapan ve Ozel, 2016), Lindley-G dağılımlar ailesini önererek bu aileye ait olan Lindley-Weibull ve Lindley- Lomax, (Tahir ve ark., 2016b) yeni bir Weibull-G dağılımlar ailesini tanıtarak bu aileye ait Weibull-Weibull ile Weibul-Log-lojistik ve (Tahir ve ark., 2016b), Poisson-$X$ dağılımlar ailesini ilk defa önererek bu aileye ait olan Poisson-power-Cauchy dağılımlarına ilişkin dağılımsal özellikleri incelemişler, bu dağılımların bilinmeyen parametrelerinin tahmini için EÇO tahmin yöntemini uygulamışlar ve ayrıca bu dağılımların gerçek dünyada uygulanabilirliğini göstermek adına gerçek veri analizleri gerçekleştirmişlerdir. Son olarak (Celik ve Guloksuz, 2017) ise (Alzaatreh ve ark., 2013)'in yöntemini kullanarak "Düzgün-Üstel Dağılım" adlı yeni bir yaşam zamanı dağılımı önererek bu dağılıma ilişkin bazı istatistiksel özellikleri incelemişler ve tip II sansürleme altında bu dağılımın bilinmeyen parametrelerini EÇO yöntemini kullanarak tahmin etmişlerdir. Ayrıca bu dağılıma ilişkin gerçek veri uygulaması yapmışlardır.

# 3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasında yararlanılan temel kavramlardan söz edilecektir.

## 3.1. Bazı Sürekli Dağılımlar

### 3.1.1. Weibull dağılımı:

İlk defa Waalobi Weibull (Weibull, 1951) tarafından ortaya atılan Weibull dağılımına sahip bir $X$ rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu (df), olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) ve hazard fonksiyonu (hf) sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(x)=1-\exp\left(-(\lambda x)^{\theta}\right) \tag{3.1}$$

$$f(x)=\theta\lambda^{\theta}x^{\theta-1}\exp\left(-(\lambda x)^{\theta}\right) \tag{3.2}$$

$$h(x)=\theta\lambda^{\theta}x^{\theta-1} \tag{3.3}$$

Burada $x>0,\ \lambda>0$ ve $\theta>0$ 'dır. Ayrıca, $\lambda$ ve $\theta$ sırasıyla ölçek ve şekil parametrelerini göstermektedir. Bu dağılım, $\theta>1$ için artan, $\theta<1$ için azalan ve $\theta=1$ için sabit hazard oranına sahip bir dağılımdır.

### 3.1.2. Chen dağılımı

(Chen, 2000) tarafından ortaya atılan Chen dağılımına sahip bir $X$ rasgele değişkeninin oyf, df, ve hf' nu aşağıdaki gibidir.

$$F(x;\lambda,\theta)=1-\exp\left(\lambda\left(1-e^{x^{\theta}}\right)\right) \tag{3.4}$$

$$f(x;\lambda,\theta)=\lambda\theta x^{\theta-1}e^{x^{\theta}}\exp\left(\lambda\left(1-e^{x^{\theta}}\right)\right) \tag{3.5}$$

$$h(x)=\lambda\theta x^{\theta-1}e^{x^{\theta}} \tag{3.6}$$

Burada $\lambda>0$, ölçek ve $\theta>0$ ise şekil parametresidir. Chen dağılımı $\theta<1$ için Küvet, $\theta\geq1$ için artan hazard fonksiyonuna sahiptir.

### 3.1.3. Üstel güç dağılımı

(Smith ve Bain, 1975) tarafından önerilen $\alpha$ ve $\beta$ parametreli Üstel Güç (EP) dağılımına sahip bir $T$ rasgele değişkeninin df, oyf ve hf sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$F_T(t) = 1 - \exp\left(1 - \exp\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right) \tag{3.7}$$

$$f_T(t) = t^{\beta-1}\alpha^{-\beta}\beta \exp\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\exp\left(1 - \exp\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right) \tag{3.8}$$

$$h_T(t) = t^{\beta-1}\alpha^{-\beta}\beta \exp\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right) \tag{3.9}$$

Burada $t > 0, \alpha > 0$ ve $\beta > 0$ sırasıyla ölçek ve şekil parametreleridir. EP dağılımı $\beta < 1$ için küvet, $\beta \geq 1$ için artan hazard fonksiyonuna sahiptir.

### 3.1.4. Üstelleştirilmiş Üstel dağılım

(Gompertz., 1825; Verhulst, 1838; Verhulst, 1845; Verhulst, 1847) tarafından tanıtılan Gompertz-verhulst dağılımının özellikleri ve genelleştirilmesi (Ahuja ve Nash, 1967) tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu dağılımın özel bir durumu olan üstelleştirilmiş üstel (EE) dağılıma ilişkin istatistiksel özellikler ve parametre tahmin konusu ise (Gupta ve Kundu, 1999) tarafından çalışılmıştır. $\alpha$ ve $\beta$ parametreli Üstelleştirilmiş Üstel dağılıma sahip bir $X$ rasgele değişkenin df , oyf ve hf 'nu sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(x) = \left(1 - \exp(-\beta x)\right)^{\alpha} \tag{3.10}$$

$$f(x) = \alpha\beta e^{-\beta x}\left(1 - \exp(-\beta x)\right)^{\alpha-1} \tag{3.11}$$

$$h(x) = \frac{\alpha\beta \exp(-\beta x)\left(1 - \exp(-\beta x)\right)^{\alpha-1}}{1 - \left(1 - \exp(-\beta x)\right)^{\alpha}} \tag{3.12}$$

Burada $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$, sırasıyla şekil ve ölçek parametreleridir. EE dağılım, $\alpha < 1$ için azalan, $\alpha > 1$ için artan ve $\alpha = 1$ için sabit hazard fonksiyonuna sahiptir. (Gupta ve ark., 1999)

### 3.1.5. Dagum dağılımı

(Dagum. , 1977) tarafından önerilen $\lambda, \delta$ ve $\beta$ parametreli Dagum dağılımına sahip bir $X$ rasgele değişkenin df, oyf ve hf 'nu sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(x) = \left(1+\lambda x^{-\delta}\right)^{-\beta} \tag{3.13}$$

$$f(x) = \beta\lambda\delta x^{-(1+\delta)}\left(1+\lambda x^{-\delta}\right)^{-(1+\beta)} \tag{3.14}$$

$$h(x) = \frac{\beta\lambda\delta x^{-(1+\delta)}\left(1+\lambda x^{-\delta}\right)^{-(1+\beta)}}{1-\left(1+\lambda x^{-\delta}\right)^{-\beta}} \tag{3.15}$$

Burada $\beta, \lambda, \delta > 0$ olur. $\lambda > 0$ parametresi ölçek parametresi olup $\beta > 0$ ve $\delta > 0$ şekil parametreleridir. Glaser 'in metodunu (Glaser, 1980) kullanarak (Domma, 2002), Dagum dağılımına ilişkin hazard fonksiyonunun davranışlarının aşağıdaki biçimde olduğunu göstermişlerdir. $\beta^* = \frac{2}{\delta} - 1$, $\bar{\beta} = \frac{1}{\delta}$ ve $\beta_2 = \frac{3-\delta}{\delta+1}$ olmak üzere

i. $\beta\delta > 1$, $\beta \neq \beta^*$ veya $\beta\delta = 1, \beta > \beta^*, \delta > 1$ durumları için hazard fonksiyonunun grafiği yukarı-aşağı küvet (upside-down bathtube) şeklindedir. Yani hazard fonksiyonu tek tepelidir.

ii. $\beta \neq \beta^*$, $\beta = \beta^*, \delta < 2, \beta\delta = 1, \beta < \beta^*, \delta < 1$ ve $\delta < 1, \beta \in \left(\beta_2, \bar{\beta}\right)$

durumları için hazard fonksiyonu azalandır.

### 3.1.6. Dönüştürülmüş Üstelleştirilmiş Üstel dağılımı

(Merovci, 2013) tarafından tanıtılan $\alpha, \beta$ ve $\lambda$ parametreli dönüştürülmüş üstelleştirilmiş üstel (TEE) dağılıma sahip bir $X$ rasgele değişkeninin df, oyf ve hf 'nu sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(x) = \left(1-\exp(-\beta x)\right)^{\alpha}\left(1+\lambda-\lambda\left(1-\exp(-\beta x)\right)^{\alpha}\right), \; x > 0 \tag{3.16}$$

$$f(x) = \alpha\beta\left(1-\exp(-\beta x)\right)^{\alpha-1}\exp(-\beta x)\left(1+\lambda-2\lambda\left(1-\exp(-\beta x)\right)^{\alpha}\right), \; x > 0 \tag{3.17}$$

$$h(x) = \frac{\alpha\beta\left(1-\exp(-\beta x)\right)^{\alpha-1}\exp(-\beta x)\left(1+\lambda-2\lambda\left(1-\exp(-\beta x)\right)^{\alpha}\right)}{1-\left(1-\exp(-\beta x)\right)^{\alpha}\left(1+\lambda-\lambda\left(1-\exp(-\beta x)\right)^{\alpha}\right)}, \; x > 0 \tag{3.18}$$

Burada $\beta > 0$, ölçek parametresini, $\alpha > 0$, şekil parametresini ve $\lambda \in [-1,1]$, dönüştürme parametresini temsil etmektedir. Bu dağılıma ilişkin hazard fonksiyonu $\alpha \leq 1$ için azalan, $\alpha > 1$ ve $\lambda > 0$ için tek tepeli, $\alpha > 1$ ve $\lambda \leq 0$ için artan ve $\alpha = 1$ ve $\lambda = 1$ için sabittir.

### 3.1.7. Dönüştürülmüş Weibull dağılımı

(Aryal ve Tsokos, 2011) tarafından tanıtılan $\eta, \sigma$ ve $\lambda$ parametreli dönüştürülmüş Weibull (TW) dağılımına sahip bir $X$ rasgele değişkeninin df, oyf ve hf 'nu sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(x) = \left(1 - \exp\left(-(\lambda x)^{\theta}\right)\right)\left(1 + \eta \exp\left(-(\lambda x)^{\theta}\right)\right), \; x > 0 \tag{3.19}$$

$$f(x) = \lambda^{\theta} x^{\theta-1} \theta \exp\left(-(\lambda x)^{\theta}\right)\left(2\eta \exp\left(-(\lambda x)^{\theta}\right) - \eta + 1\right), \; x > 0 \tag{3.20}$$

$$h(x) = \frac{\lambda^{\theta} x^{\theta-1} \theta \left(2\eta \exp\left(-(\lambda x)^{\theta}\right) - \eta + 1\right)}{\eta \exp\left(-(\lambda x)^{\theta}\right) - \eta + 1}, \; x > 0 \tag{3.21}$$

Burada $\lambda > 0$, ölçek parametresini, $\theta > 0$, şekil parametresini ve $\eta \in [-1,1]$, dönüştürme parametresini temsil etmektedir. Bu dağılıma ilişkin hazard fonksiyonu, $\theta = \eta = 1$ ve $\eta = 0, \theta = 1$ durumları için sabit, $\eta = 1, \theta > 1$ ve $\theta = 1, \eta < 0$ durumları için artan, $\eta = 1, \theta < 1$ ve $\theta = 1, 0 < \eta < 1$ durumları için azalandır.

### 3.1.8. Gompertz Dağılımı

(Gompertz., 1825) tarafından elde edilen $\lambda$ ve $c$ parametreli Gompertz dağılımı (GD) 'na sahip bir $X$ rasgele değişkeninin df, oyf ve hf 'nu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right) \tag{3.22}$$

$$f(x) = \lambda e^{cx} \exp\left(-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)\right) \tag{3.23}$$

$$h(x) = \lambda e^{cx} \tag{3.24}$$

Burada $x > 0, \lambda > 0$ ve $c > 0$ olup hazard fonksiyonu artandır.

### 3.1.9. Lindley Weibull Dağılımı

(Cordeiro ve ark., 2018) tarafından tanıtılan $(\alpha,\beta,\theta)$ parametreli Lindley Weibull (LW) dağılımına sahip bir $X$ rasgele değişkeninin df, oyf ve hf 'nu sırasıyla aşağıda tanımlanmıştır.

$$F(x) = 1-\exp\left(-\theta(\alpha x)^{\beta}\right)\left(1+\frac{\theta}{\theta+1}(\alpha x)^{\beta}\right) \tag{3.25}$$

$$\mathrm{f}(x) = \frac{\beta\theta^{2}}{\theta+1}\left(\alpha^{\beta}x^{\beta-1}+\alpha^{2\beta}x^{2\beta-1}\right)\exp\left(-\theta(\alpha x)^{\beta}\right) \tag{3.26}$$

$$\mathrm{h}(x) = \frac{\theta^{2}\beta\alpha x^{\beta-1}\left((\alpha x)^{\beta}+1\right)}{\left(\theta+1+\theta(\alpha\,\mathrm{x})^{\beta}\right)} \tag{3.27}$$

Burada $x>0, \alpha>0$ , $\beta>0$ ve $\theta>0$ 'dır. (Cordeiro ve ark., 2018), hazard fonksiyonunun sabit, azalan, artan, tek tepeli ve küvet şeklinde olduğunu göstermişlerdir.

## 3.2. En Çok Olabilirlik Tahmini

Kitlenin karakteristik özellikleri hakkında bilgi sahibi olmak amacıyla kitleden alınan birbirinden bağımsız ve aynı $f\left(x/\underline{\theta}\right), \underline{\theta}=\left(\theta_1,...,\theta_p\right)\in\Theta\subset\Re^{p}$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonu (o(y)f) 'na sahip rasgele değişkenler olarak tanımlanan $\underline{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ örnekleminin oyf 'nu

$$f\left(\underline{x}|\underline{\theta}\right) = f\left(x_1|\underline{\theta}\right)...f\left(x_n|\underline{\theta}\right) \tag{3.28}$$

biçiminde ifade edilir. $X_1=x_1, X_2=x_2,..., X_n=x_n$ gözlendiğinde $\underline{\theta}$ 'nın bir fonksiyonu olarak tanımlanan olabilirlik fonksiyonu

$$L\left(\underline{\theta}|\underline{x}\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i|\underline{\theta}\right) \tag{3.29}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun logaritmasına ise log-olabilirlik fonksiyonu adı verilir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\ell\left(\underline{\theta}\right) = \log L\left(\underline{\theta}|\underline{x}\right) = \sum_{i=1}^{n}\log f\left(x_i|\underline{\theta}\right) \tag{3.30}$$

Olabilirlik veya log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan $\underline{\theta}$ parametre vektörüne $\underline{\theta}$ 'nın en çok olabilirlik (EÇO) tahmin edicisi denir ve $\underline{\hat{\theta}}$ biçiminde gösterilir. Log-olabilirlik

fonksiyonunun parametrelere göre ikinci türevlerinden oluşan matrisin negatif beklenen değerine Fisher bilgi matrisi adı verilir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$I\left(\underline{\theta}\right) = -E\left[\frac{\partial^2 \ell(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}'}\right] \tag{3.31}$$

EÇO tahmin edicileri, bazı düzgünlük koşulları altında asimptotik normal dağılıma sahip olup bu ifadenin matematiksel gösterimi

$$\sqrt{n}\left(\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}\right) \xrightarrow{d} N\left(\underline{0}, I^{-1}\left(\underline{\theta}\right)\right) \tag{3.32}$$

şeklindedir. Burada $\xrightarrow{d}$, dağılımda yakınsamayı göstermektedir. (3.31) ifadesi kullanılarak $\theta_i$ , $i = 1,..., p$ için asimptotik güven aralığı

$$P\left(\hat{\theta}_i - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{I^{-1}{}_{ii}} < \theta_i < \hat{\theta}_i + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{I^{-1}{}_{ii}}\right) \cong 1-\alpha \tag{3.33}$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada $I^{-1}{}_{ii}$, Fisher bilgi matrisinin tersinin köşegen elemanlarını ifade etmektedir (Serfling, 1980).

### 3.3. Bootstrap Güven Aralıkları

(Efron, 1979) tarafından önerilen Bootstrap metodu, kitle hakkındaki bir istatistiğin örneklem dağılımını tahmin etmek için kullanılan yeniden örnekleme metodudur. Asimptotik metotlara alternatif bir metot olarak geliştirilen bu metot, aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

$\underline{X} = \left(X_1, X_2,..., X_n\right)$, herhangi bir $F(.|\theta)$ olasılık dağılımına sahip kitleden alınan $n$ birimlik bir örneklem olsun. Bu örneklemin gözlenen değerleri $\underline{x} = \left(x_1, x_2,..., x_n\right)$ ve örneklem dağılımının tahmin edilmesi istenilen istatistik $\hat{\theta} = T(\underline{X})$ olsun. $F(.|\theta)$ bilinmiyor ise $\underline{x}$, $x_1, x_2,..., x_n$ gözlenen değerlerinden her birine $1/n$ olasılık veren kesikli bir olasılık dağılımı olarak bilinen ve ampirik dağılım fonksiyonu olarak tanımlanan $F_n(.)$ 'den üretilir. $\underline{x}$ 'den iadeli olarak rasgele çekilerek yeterince büyük $B$ kez oluşturulan $n$ boyutlu örneklemlere bootstrap örneklemleri adı verilir. Bu yönteme parametrik olmayan bootstrap metodu adı verilir. Şayet $F(.|\theta)$ biliniyor ise $\underline{x} = \left(x_1, x_2,..., x_n\right)$, $F(.|\theta)$ dağılımından üretilir, EÇO gibi tahmin yöntemleri kullanılarak bilinmeyen $\theta$ parametresinin tahmini bulunur ve bu tahmin dağılım fonksiyonunda yerine yazılarak bu dağılımdan $n$ boyutlu $B$ tane yeni örneklem üretilerek bootstrap örneklemleri elde edilir. Bu yöntem parametrik bootstrap yöntemi olarak

bilinir. Daha sonra, her bir bootstrap örneklemi için $\hat{\theta}_1^* = T_1^*(\underline{x}), \hat{\theta}_2^* = T_2^*(\underline{x}), ..., \hat{\theta}_B^* = T_B^*(\underline{x})$ bootstrap tahmin değerleri hesaplanır. Son olarak, $\hat{\theta}^*$ bootstrap tahmininin standart hata (sh) tahminini hesaplayarak $\hat{\theta} = T(\underline{X})$ 'nın standart hatasının ve yanının yaklaşık değerleri sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$sh(\hat{\theta}) \approx sh_B(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{\theta}_i^* - \overline{\hat{\theta}^*}\right)^2} \tag{3.34}$$

$$Yan(\hat{\theta}) \approx Yan_B(\hat{\theta}) = \overline{\hat{\theta}^*} - \hat{\theta} \tag{3.35}$$

Bilinmeyen $\theta$ parametresi için $1-\alpha$ seviyeli asimptotik güven aralıklarına alternatif olarak geliştirilen Bootstrap-Normal, Bootstrap-Basic ve Bootstrap-Percentile güven aralıkları sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\left(\hat{\theta} - Yan_B(\hat{\theta}) - z_{(1-\alpha/2)}\, sh_B(\hat{\theta}), \hat{\theta} - Yan_B(\hat{\theta}) + z_{(1-\alpha/2)}\, sh_B(\hat{\theta})\right) \tag{3.36}$$

$$\left(2\hat{\theta} - \hat{\theta}^*_{(B+1)(1-\alpha/2)}, 2\hat{\theta} - \hat{\theta}^*_{(B+1)(\alpha/2)}\right) \tag{3.37}$$

$$\left(\hat{\theta}^*_{(B+1)(\alpha/2)}, \hat{\theta}^*_{(B+1)(1-\alpha/2)}\right) \tag{3.38}$$

(Ugarte ve ark., 2015) ,(Efron ve Tibshirani, 1994)

### 3.4. Bazı Uyum İyiliği Kriterleri

Ekonomi, mühendislik, tıp gibi birçok alanda elde edilen verilerin istatistiksel analizleri için bu verilerin uyum sağladığı modellerden en iyisini seçebilmek amacı ile literatürde kullanılan birçok bilgi kriteri bulunmaktadır. Log-olabilirlik fonksiyonuna göre formülüze edilen bu kritelerden bazıları, (Akaike, 1974) tarafından önerilen Akaiki bilgi kriteri (AIC), (Hurvich ve Tsai, 1989) nin tanıttığı düzeltilmiş Akaiki bilgi kriteri (AICc), (Schwarz, 1978) tarafından tanıtılan Bayesci bilgi kriteri (BIC) ve (Hannan ve Quinn, 1979)'in önerdiği Hannan-Quinn bilgi kriteri (HQIC) 'dir. Bu kritelere ilişkin formüller aşağıda verilmiştir.

$$AIC = -2\ell\left(\hat{\theta}\right) + 2k \tag{3.39}$$

$$AICc = AIC + \left(\frac{2k(k+1)}{n-k-1}\right) \tag{3.40}$$

$$BIC = -2\ell\left(\hat{\theta}\right) + k\log\left(n\right) \tag{3.41}$$

$$HQIC = -2\ell\left(\hat{\theta}\right) + 2k\log\left(\log\left(n\right)\right) \tag{3.42}$$

Burada $k$, parametre sayısını, $n$, örneklem büyüklüğünü, $\ell$, log-olabilirlik fonksiyonunu ve $\hat{\theta}$ ise $\theta$ 'nın EÇO tahmin edicisini göstermektedir. Gerçek verilere en uygun modelin seçiminde kullanılan bir diğer istatistik ise aşağıdaki biçimde tanımlanan Kolmogorov – Smirnov (KS) istatistiğidir.

$$KS = \sup_{-\infty<x<\infty} \left|F_n(x) - F_X(x)\right| = \max_{1\le i\le n}\left(\left|\frac{i}{n} - F_X\left(X_{(i)}\right)\right|, \left|\frac{i-1}{n} - F_X\left(X_{(i)}\right)\right|\right) \tag{3.43}$$

Burada $X_{(i)}$, i. sıra istatistiğini, $F_n(x)$, ampirik dağılım fonksiyonunu ve $F_X(x)$ ise verinin uyum sağladığı düşünülen dağılıma ilişkin dağılım fonksiyonunu göstermektedir (Owen, 2001). Veriye uygun olduğu düşünülen her bir modele ilişkin hesaplanan AIC, BIC, AICc, HQIC ve KS değerlerinden en küçüğünü sağlayan modelin veriye en uygun model olduğu düşünülür.

### 3.5. Belirsizlik (Entropi) Ölçüleri

Entropi, bir olasılık deneyinin belirsizliğini veya bir veri kümesindeki belirsizliği sayısal olarak ifade eden bir ölçüdür. Veri kümesindeki belirsizliğin artması ile doğru orantılı olarak entropi değeri de artmaktadır. Entropi ayrıca kazanılan bilgi miktarının bir ölçüsü olarak ta ifade edilebilir. Örneğin, bir bozuk para deneyinde eşit olasılıklı iki sonuç, zar atma deneyinde ise eşit olasılıklı altı sonuç vardır. Bu iki deneye bakıldığında, para atma deneyinin zar atma deneyine göre daha düşük entropiye sahip olduğu söylenir (BULUT, 2017). Ayrıca, entropi, bir olayın ortaya çıkma olasılığı ile ters orantılıdır. Yani, bir olayın olasılığı ne kadar düşükse, gerçekleştiğinde o kadar fazla bilgi sağlar. (Hartley, 1928) 'in önerisi kullanılarak, oluşma olasılığı $p$ olan bir olay ile ilgili bilgi $I \equiv \log(1/p) = -\log(p)$ şeklinde tanımlanır (Johnson, 2004). Bir torbada sadece mavi toplar var ise bu torbadan çekilen topun mavi renkte olacağı belli olduğundan bu deneydeki belirsizliğin veya kazanılan bilgi miktarının sıfır olduğu söylenir (BULUT, 2017). Literatürde kesikli ve sürekli rasgele değişkenlerin belirsizlik miktarlarını ölçmek için en çok kullanılan entropiler, ortalama kazanılan bilgi miktarının formülüze edildiği Shannon (Shannon, 1948) ve Renyi (Rényi, 1961) entropileridir.

$\left(y_1, y_2, ....y_n\right)$ değerlerini alan kesikli bir $Y$ rasgele değişkeninin Shannon ve Renyi-$\gamma$ entropileri sırasıyla

$$H(Y) = E\left[-\log(Y)\right] = -\sum_{i=1}^{n} P(Y = y_i)\log P(Y = y_i) \tag{3.44}$$

$$H_\gamma(Y) = \frac{1}{1-\gamma}\log\left(\sum_{i=1}^{n}\left[P(Y = y_i)\right]^\gamma\right) \tag{3.45}$$

biçiminde olup bu entropiler her zaman pozitif değerler alır. Sürekli bir $X$ rasgele değişkeninin Shannon ve Renyi-$\eta$ entropileri ise sırasıyla

$$H(X) = E\left[-\log(X)\right] = -\int f_X(x)\log f_X(x)dx \tag{3.46}$$

$$H_\gamma(X) = \frac{1}{1-\gamma}\log\left(\int f_X^\gamma(x)dx\right) \tag{3.47}$$

şeklinde tanımlanırlar ve bu entropiler pozitif veya negatif değerler alabilirler. Kesikli ve sürekli rasgele değişkenler için Renyi entropileri $\gamma \to 1$ için limit alınırsa Shannon entropisi elde edilir. Yani Renyi entropisi, Shannon entropisinin genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir. Shannon entropisi bir konkav fonksiyon olup Renyi entropisi ise $\gamma \le 1$ için konkav ve $\gamma > 1$ için ne konkav ne de konvekstir (Principe, 2010) .

# 4. ÜSTEL GÜÇ-X DAĞILIMLAR AİLESİ

Bu bölümde, (Alzaatreh ve ark., 2013) tarafından ortaya atılan yöntem kullanılarak "Üstel Güç$-X$ (EP$-X$) dağılımlar ailesi" isimli yeni bir dağılımlar ailesi önerilmiştir. Ayrıca, bu yeni dağılımlar ailesinin uygulanabilirliğini göstermek için bu ailenin bir alt modeli olarak, üstel güç dağılımının üç parametreli durumu olarak ta düşünülen Üstel Güç-Weibull (EP-W) dağılımının özellikleri ve bu dağılımın bilinmeyen parametrelerinin tahmini konusu da bu bölümde incelenmiştir.

## 4.1. T-X Dönüşümlü Dağılımlar Ailesi (Alzaatreh ve ark., 2013)

(Alzaatreh ve ark., 2013) farklı dağılımları kullanarak yeni dağılımların elde edilebilmesi için aşağıdaki yöntemi geliştirmişlerdir. $R(t)$ ve $r(t)$, bir $T \in [a,b]$ , $-\infty < a < b < \infty$ sürekli rasgele değişkeninin sırasıyla dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstersin. Ayrıca herhangi bir $X$ rasgele değişkeninin $G(x)$ ile gösterilen dağılım fonksiyonunun herhangi bir fonksiyonu olarak tanımlanan bir $W(G(x))$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip olsun.

i. $W(G(x)) \in [a,b]$ 'dir.

ii. $W(G(x))$, türetilebilir ve monoton azalmayan bir fonksiyondur.

iii. $\lim_{x\to-\infty} W(G(x)) = a$ ve $\lim_{x\to\infty} W(G(x)) = b$ 'dir.

Bu durumda, (Alzaatreh ve ark., 2013) tarafından tanıtılan $T-X$ dönüşümlü yeni dağılımlar ailesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F_{T-X}(x) = \int_a^{W(G(x))} r(t)dt = R\left(W\left(G(x)\right)\right) \tag{4.1}$$

## 4.2. Üstel Güç-X (EP-X) Dağılımlar Ailesi

$\alpha$ ve $\beta$ parametreli Üstel Güç (EP) dağılımına sahip bir $T$ rasgele değişkeninin df ve oyf sırasıyla (3.7) ve (3.8) denklemlerinde tanımlanmaktadır. (4.1) denkleminde verilen $W(G(x))$ fonksiyonu yerine $W(G(x)) = -\log\left(1-G\left(x\right)\right)$ ve $r(t)$ yerine de (3.8) denkleminde belirtilen üstel güç (EP) dağılımına ilişkin oyf kullanılarak elde edilen üstel güç dönüşümlü-$X$ $\left(EP-X\right)$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu;

$$F_{EP-X}(x)=\int_{0}^{-\log(1-G(x))} t^{\beta-1}\alpha^{-\beta}\beta\exp\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\exp\left(1-\exp\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right)dt \tag{4.2}$$

biçiminde elde edilir. Burada $G(x)$, herhangi bir $X$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu ifade eder.

### 4.3. Özel Model: Üstel Güç-Weibull (EP-W) Dağılımı

Bu bölümde Üstel Güç-Weibull (EP-W) Dağılımı olarak isimlendirilen yeni dağılımlar ailesinin özel bir modeli önerilmiştir. Bu model, (4.2) denklemindeki $G(x)$ yerine (3.1) denkleminde verilen Weibull dağılımına ilişkin dağılım fonksiyonu kullanılarak elde edilir. Bu durumda EP-W dağılımına ilişkin df, oyf, hf ve ters hazard fonksiyonu (R.hf) sırasıyla,

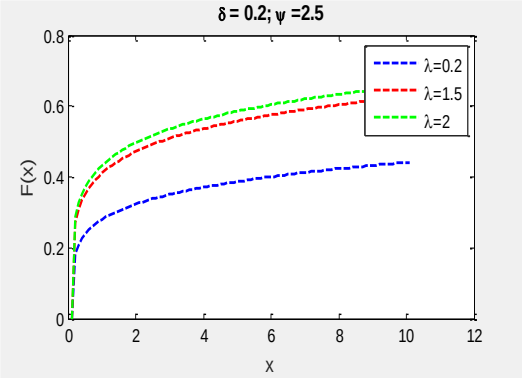
$$\begin{aligned} F(x;\lambda,\delta,\psi) &= \int_{0}^{-\log(1-G(x))} t^{\beta-1}\alpha^{-\beta}\beta\exp\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\exp\left(1-\exp\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right)dt \\ &= 1-\exp\left(1-\exp\left(\frac{(\lambda x)^{\delta}}{\psi}\right)\right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

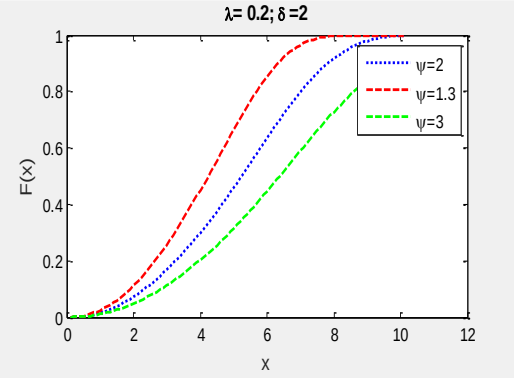
$$f(x;\lambda,\delta,\psi)=x^{\delta-1}\lambda^{\delta}\delta\psi^{-1}\exp\left(\frac{(\lambda x)^{\delta}}{\psi}\right)\exp\left(1-\exp\left(\frac{(\lambda x)^{\delta}}{\psi}\right)\right) \tag{4.4}$$

$$h(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}=x^{\delta-1}\lambda^{\delta}\delta\psi^{-1}\exp\left(\frac{(\lambda x)^{\delta}}{\psi}\right) \tag{4.5}$$

$$r(x)=\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x^{\delta-1}\lambda^{\delta}\delta\psi^{-1}\exp\left(\frac{(\lambda x)^{\delta}}{\psi}\right)\exp\left(1-\exp\left(\frac{(\lambda x)^{\delta}}{\psi}\right)\right)}{1-\exp\left(1-\exp\left(\frac{(\lambda x)^{\delta}}{\psi}\right)\right)} \tag{4.6}$$

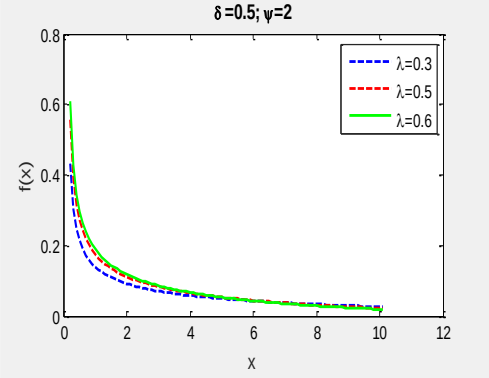
biçiminde elde edilir. Burada, $\psi=\alpha^{\beta}>0$ ve $\delta=\beta\theta>0$. Farklı parametre değerleri için EP-W$(\lambda,\delta,\psi)$ dağılımına ilişkin df, oyf ve hf 'larının grafikleri Şekil 4.1., Şekil 4.2. ve Şekil 4.3. 'de verilmiştir.

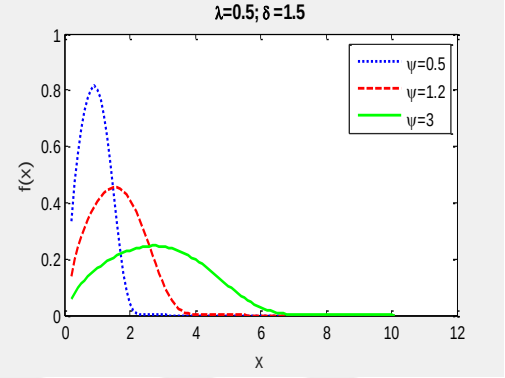


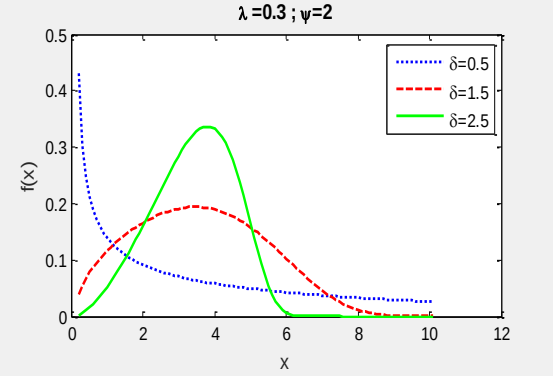

$\delta = 0.2, \psi = 2.5$ *ve* $\lambda = 0.2, 1.5, 2$ $\lambda = 0.2, \delta = 2$ ve $\psi = 2, 1.3, 3$

**Şekil 4.1** EP-W dağılımının çeşitli parametre değerlerine ilişkin df'nun grafiği



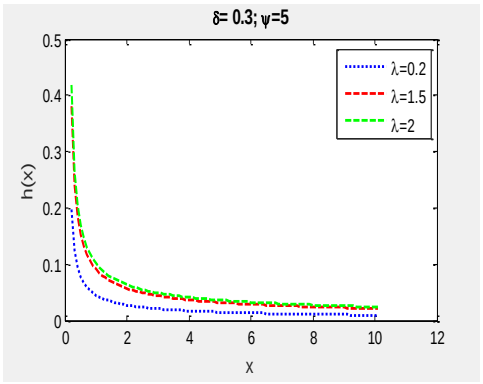




$\delta = 0.5, \psi = 2$ ve $\lambda = 0.3, 0.5, 0.6$ $\lambda = 0.5, \delta = 1.5$ ve $\psi = 0.5, 1.2, 3$

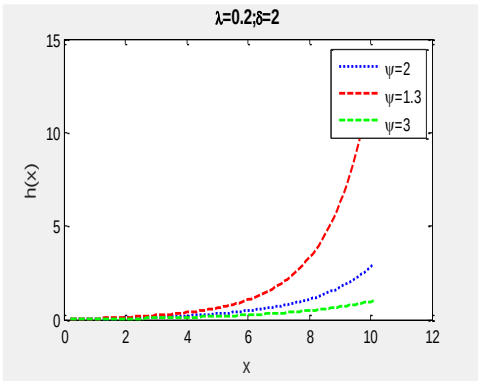



$\lambda = 0.3, \psi = 2$ ve $\delta = 0.5, 1.5, 2.5$

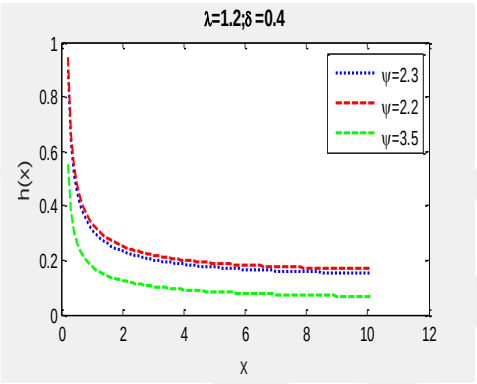
**Şekil 4.2** EP-W dağılımının çeşitli parametre değerlerine ilişkin oyf 'nunun grafiği



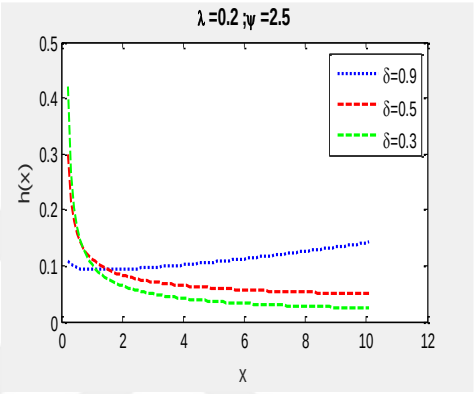

$\delta = 0.3, \psi = 5$ *ve* $\lambda = 0.2, 1.5, 2$



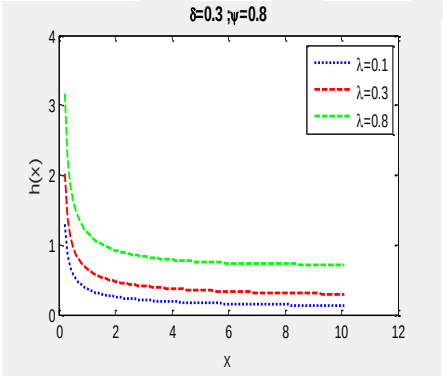

$\lambda = 0.2, \delta = 2$ *ve* $\psi = 2, 1.3, 3$



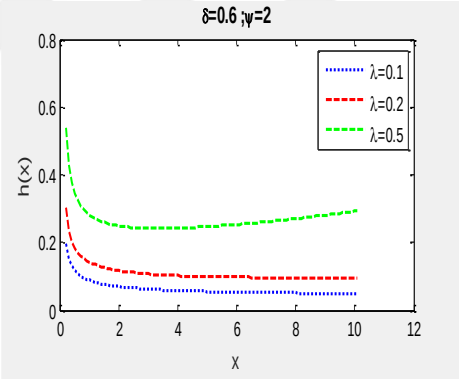

$\lambda = 1.2, \delta = 0.4$ *ve* $\psi = 2.3, 2.2, 3.5$




$\lambda = 0.2, \psi = 2.5$ *ve* $\delta = 0.9, 0.5, 0.3$




$\delta = 0.3, \psi = 0.8$ ve $\lambda = 0.1, 0.3, 0.8$




$\delta = 0.6, \psi = 2$ ve $\lambda = 0.1, 0.2, 0.5$

**Şekil 4.3.** EP-W dağılımının çeşitli parametre değerlerine ilişkin hf'nun grafiği

EP-W dağılımına ilişkin hazard fonksiyonunun davranışlarını incelemek için hazard fonksiyonunun türevine ihtiyaç vardır. $h'(x)$ ile gösterilen hazard fonksiyonunun $x$ 'e göre türevi aşağıda verilmiştir.

$$h'(x) = (\psi x)^{-2}\left((\lambda x)^{\delta}\,\delta + \psi(\delta - 1)\right)(\lambda x)^{\delta}\,\delta \exp\left(\frac{(\lambda x)^{\delta}}{\psi}\right) \tag{4.7}$$

$\delta \geq 1$ için $h'(x) > 0$ olduğundan hazard fonksiyonunun $\forall x > 0$ için artan olduğu söylenir. $\delta < 1$ alındığında $x < \lambda^{-1}\left(-\psi\delta^{-1}(\delta - 1)\right)$ için $h'(x) < 0$ ve $x > \lambda^{-1}\left(-\psi\delta^{-1}(\delta - 1)\right)$ için

$h'(x) > 0$ olduğundan EP-W dağılımına ilişkin hazard fonksiyonu küvet şeklindedir. Her iki durum da Şekil 4.3. teki grafiklerden görülmektedir.

### 4.3.1. Ortalama Kalan Yaşam Fonksiyonu

Bir bileşenin t zamanından sonra kalan yaşam zamanı rasgeledir. Bu rasgele kalan yaşam zamanının beklenen değeri, bileşenin t anında ortalama kalan yaşam zamanı olarak adlandırılır. Ortalama kalan yaşam zamanı her bir t anında tanımlandığı için ortalama yaşam fonksiyonundan bahsedilir. $S(t)$ yaşam fonksiyonuna sahip sürekli bir $T$ rasgele değişkeni için sabit bir t zamanından sonra arta kalan yaşam zamanının beklenen değeri olarak tanımlanan ortalama kalan yaşam fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$m(t) = E[T - t \mid T > t] = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} (x - t) f(x)\, dx = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} x f(x)\, dx - t. \tag{4.8}$$

(Guess ve Proschan, 1985). $m(t)$ nin diğer formülü ise Tonelli teoremi (Yeh, 2006) yardımıyla aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} m(t) &= E[T - t \mid T > t] = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} (x - t) f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{S(t)} \int_{x=t}^{\infty} \left( \int_{u=t}^{x} du \right) f(x) dx = \frac{1}{S(t)} \int_{u=t}^{\infty} \left( \int_{x=u}^{\infty} f(x) dx \right) du \\ &= \frac{1}{S(t)} \int_{u=t}^{\infty} S(u) du \end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.9) eşitliğinden EP-W $(\lambda, \delta, \psi)$ dağılımına ilişkin ortalama kalan yaşam fonksiyonu;

$$m(t) = \frac{1}{S(t)} \left( \int_t^{\infty} x^{\delta} \lambda^{\delta} \delta \psi^{-1} \exp\left( \frac{(\lambda x)^{\delta}}{\psi} \right) \exp\left( 1 - \exp\left( \frac{(\lambda x)^{\delta}}{\psi} \right) \right) dx \right) - t \tag{4.10}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte $u = (\lambda x)^{\delta} / \psi$ dönüşümünün uygulanması sonucunda $m(t)$, aşağıdaki gibi elde edilir.

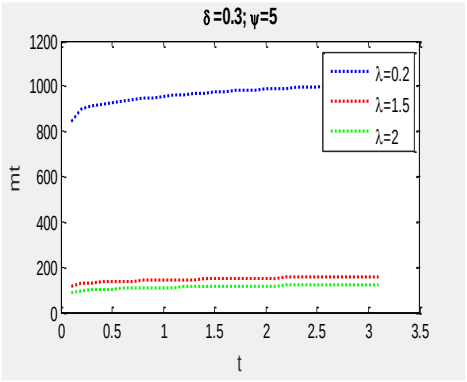
$$m(t) = \frac{1}{S(t)} \left( \int_{(\lambda t)^{\delta}/\psi}^{\infty} (\psi u)^{1/\delta} \lambda^{-1} e^{u} e^{1 - e^{u}} du \right) - t \tag{4.11}$$

Eğer bir $T$ rasgele değişkeninin dağılımına ilişkin hazard fonksiyonu azalan veya artansa, $T$ 'nin ortalama kalan yaşam fonksiyonu artan veya azalandır (Bryson ve Siddiqui, 1969) ve

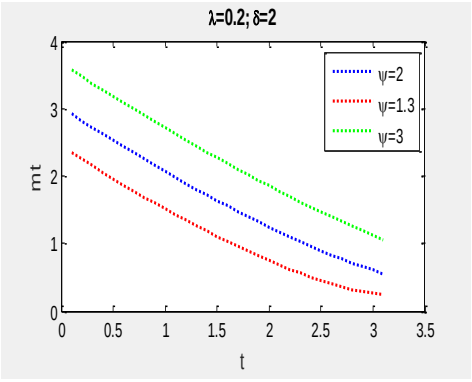
(Ghitany ve ark., 2011). EP-W dağılımının farklı parametre değerleri ve t=1,2,3 için $m(t)$ 'nin değerleri Çizelge 4.1. 'de ve $m(t)$ 'ye ilişkin grafikler Şekil 4.4.' de verilmiştir.

**Çizelge 4.1.** EP-W dağılımına ilişkin $m(t)$ 'nin değerleri

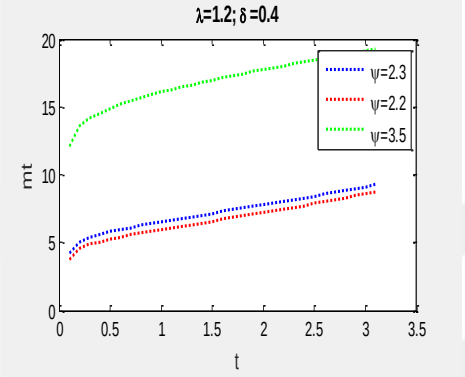
| $(\lambda,\delta,\psi)$ | $m(1)$ | $m(2)$ | $m(3)$ |
|---|---|---|---|
| (0.2,0.3,5) | 750.7502 | 774.7182 | 791.8135 |
| (1.5,0.3,5) | 112.1856 | 118.9489 | 123.8197 |
| (2,0.3,5) | 86.0834 | 91.7445 | 95.8230 |
| (0.2, 2,2) | 4.1506 | 3.3847 | 2.7289 |
| (0.2, 2,1.3) | 3.1887 | 2.4647 | 1.8651 |
| (0.2, 2,3) | 5.2731 | 4.4723 | 3.7694 |
| (1.2,0.4,2.3) | 5.3909 | 5.8385 | 6.1110 |
| (1.2,0.4,2.2) | 4.8852 | 5.2913 | 5.5340 |
| (1.2,0.4,3.5) | 13.7948 | 14.8029 | 15.4853 |
| (0.2,0.9,2.5) | 7.8191 | 7.5342 | 7.2409 |
| (0.2,0.5,2.5) | 19.1479 | 19.9474 | 20.4707 |
| (0.2,0.3,2.5) | 85.4616 | 91.0951 | 95.1538 |
| (0.1,0.3,0.8) | 5.7111 | 6.4927 | 7.0275 |
| (0.3,0.3,0.8) | 2.3425 | 2.6870 | 2.9045 |
| (0.8,0.3,0.8) | 1.0653 | 1.2049 | 1.2791 |
| (0.1,0.6,2) | 18.4503 | 18.8670 | 19.1039 |
| (0.2,0.6,2) | 9.4335 | 9.6242 | 9.6908 |
| (0.5,0.6,2) | 3.8670 | 3.8666 | 3.8006 |



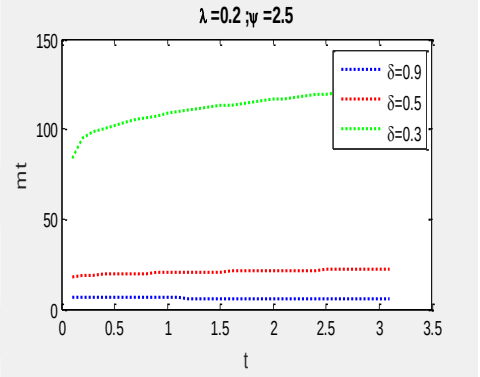

$\delta = 0.3, \psi = 5$ *ve* $\lambda = 0.2, 1.5, 2$



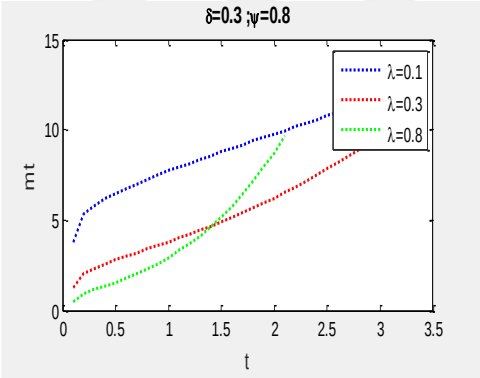

$\lambda = 0.2, \delta = 2$ ve $\psi = 2, 1.3, 3$



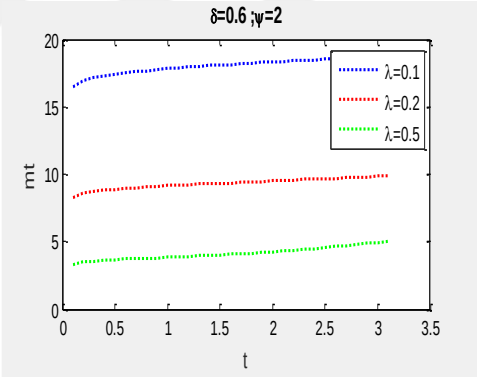

$\lambda = 1.2, \delta = 0.4$ ve $\psi = 2.3, 2.2, 3.5$




$\lambda = 0.2, \psi = 2.5$ ve $\delta = 0.9, 0.5, 0.3$




$\delta = 0.3, \psi = 0.8$ ve $\lambda = 0.1, 0.3, 0.8$




$\delta = 0.6, \psi = 2$ ve $\lambda = 0.1, 0.2, 0.5$

**Şekil 4.4.** EP-W dağılımı için ortalama kalan yaşam fonksiyonunun grafikleri

### 4.3.2.EP-W Dağılımı için Rasgele Sayı Üreteci

EP-W $(\lambda, \delta, \psi)$ dağılımından rasgele sayılar üretmek için, ters dönüşüm yöntemi kullanılır. Bu yönteme göre

$$F(x_u) = 1 - \exp\left(1 - \exp\left(\frac{(\lambda x)^{\delta}}{\psi}\right)\right) = u, 0 < u < 1 \qquad (4.12)$$

eşitliğinin çözümü

$$x_u = \lambda^{-1}\left(\log\left(1-\log\left(1-u\right)\right)\psi\right)^{1/\delta} \tag{4.13}$$

biçiminde elde edilir. (4.13) denkleminde $u = 0.5$ olarak alınırsa, EP-W$\left(\lambda,\delta,\psi\right)$ dağılımına ilişkin ortanca değeri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\text{ortanca} = \lambda^{-1}\left(\log\left(1-\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)\psi\right)^{1/\delta} \tag{4.14}$$

### 4.3.3. EP-W Dağılımı için Momentler

$\left(\lambda,\delta,\psi\right)$ parametreli EP-W dağılımı için $r$ 'ninci moment aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} m_r &= E\left(X^r\right) = \int_0^\infty x^r f\left(x\right)dx \\ &= \int_0^\infty x^{r+\delta-1}\lambda^\delta\delta\psi^{-1}\exp\left(\frac{\left(\lambda x\right)^\delta}{\psi}\right)\exp\left(1-\exp\left(\frac{\left(\lambda x\right)^\delta}{\psi}\right)\right)dx \\ &= \int_0^\infty\left(\frac{u\psi}{\lambda^\delta}\right)^{\frac{r}{\delta}}e^u e^{1-e^u}du = \psi^{\frac{r}{\delta}}\lambda^{-r}\int_0^\infty u^{\frac{r}{\delta}}e^u e^{1-e^u}du \\ &= \psi^{\frac{r}{\delta}}\lambda^{-r}\int_0^1\left[\log\left(1-\log\left(s\right)\right)\right]^{\frac{r}{\delta}}ds \end{aligned} \tag{4.15}$$

Bu dağılım için çarpıklık (Ç) ve basıklık (B) katsayıları aşağıdaki formül ile hesaplanır (Nichols ve Padgett, 2006).

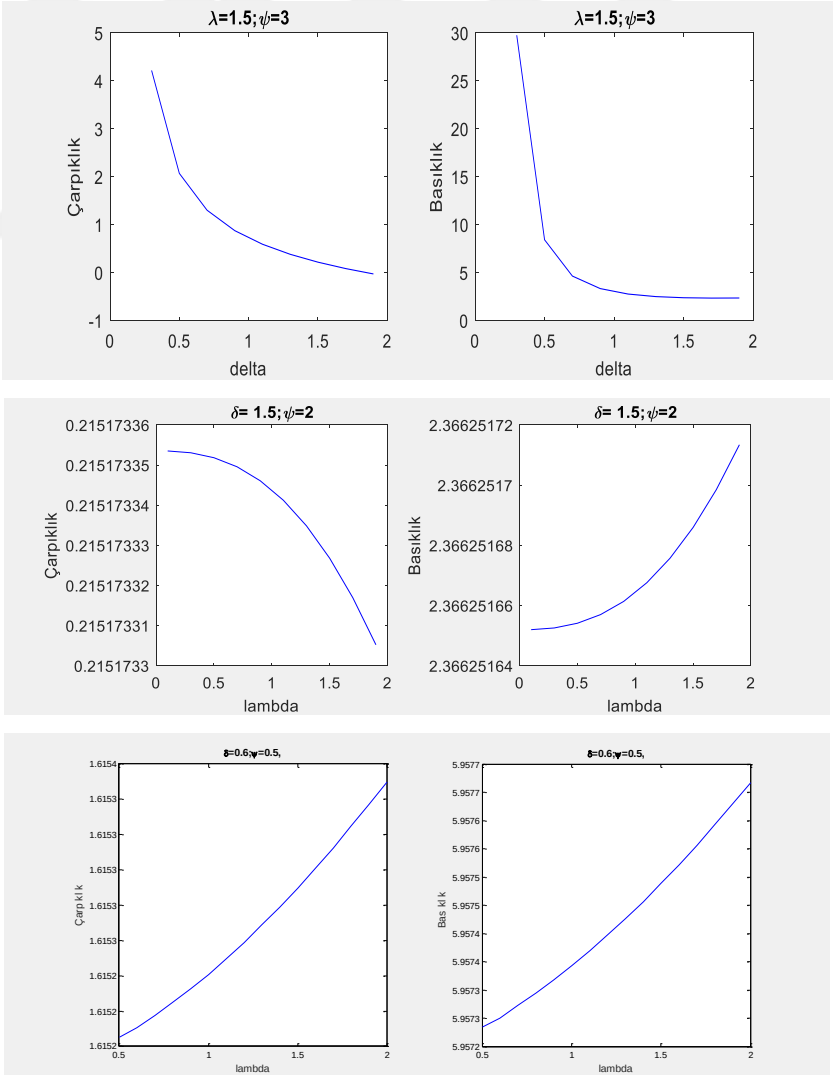
$$ÇK = \frac{E\left(X^3\right)-3E\left(X\right)E\left(X^2\right)+2\left(E\left(X\right)\right)^3}{\left(E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.16}$$

$$BK = \frac{E\left(X^4\right)-4E\left(X\right)E\left(X^3\right)+6\left(E\left(X\right)\right)^2E\left(X^2\right)-3\left(E\left(X\right)\right)^4}{\left[E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2\right]^2} \tag{4.17}$$

(4.15), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri kullanılarak EP-W dağılımının farklı parametre değerleri için $r$ 'ninci moment, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları Çizelge 4.2 'de verilmiştir**.** Çarpıklık ve basıklık katsayılarına ilişkin grafikler ise Şekil 4.5 de sunulmuştur.

**Çizelge 4.2.** EP-W dağılımı için $r$ 'ninci moment, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları

| $(\lambda,\psi,\delta)$ | $E(X)$ | $E(X^2)$ | $E(X^3)$ | $E(X^4)$ | $Var(X)$ | ÇK | BK |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1.5,3,0.8) | 1.4900 | 3.7800 | 12.3500 | 47.4000 | 1.5590 | 1.0610 | 3.8310 |
| (1.5,3,1.5) | 0.9220 | 1.0710 | 1.4180 | 2.0500 | 0.2210 | 0.2150 | 2.3660 |
| (1.5,3,2) | 0.8260 | 0.7950 | 0.8390 | 0.9460 | 0.1130 | -0.0790 | 2.3560 |
| (0.3,0.6,0.5) | 0.6383 | 1.0400 | 2.5117 | 7.7343 | 0.6351 | 2.0670 | 8.4110 |
| (0.3,0.6,1) | 1.1927 | 2.1277 | 4.6455 | 11.5560 | 0.7052 | 0.7185 | 2.9830 |
| (0.3,0.6,2) | 1.8479 | 3.9757 | 9.3853 | 23.6414 | 0.5609 | -0.0799 | 2.3560 |
| (1,2,1.5) | 1.0550 | 1.4040 | 2.1280 | 3.5210 | 0.2909 | 0.2152 | 2.3662 |
| (1.5,2,1.5) | 0.7036 | 0.6240 | 0.6304 | 0.6954 | 0.1289 | 0.2152 | 2.3663 |
| (2.6,2,1.5) | 0.4059 | 0.2077 | 0.1211 | 0.0770 | 0.0429 | 0.2152 | 2.3665 |
| (0.5,0.5,0.6) | 0.3385 | 0.2448 | 0.4469 | 0.3064 | 0.1302 | 1.6150 | 5.9573 |
| (1.5,0.5,0.6) | 0.1128 | 0.0272 | 0.0091 | 0.0038 | 0.0145 | 1.6152 | 5.9574 |
| (3,0.5,0.6) | 0.0564 | 0.0068 | 0.0011 | 0.0002 | 0.0036 | 1.6160 | 5.9580 |




**Şekil 4.5.** EP-W dağılımına ilişkin çarpıklık ve basıklık katsayılarının grafikleri

### 4.3.4. Moment Çıkaran Fonksiyon

EP-W$(\lambda,\delta,\psi)$ dağılımına sahip bir X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$ aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) = \int_0^\infty e^{tX} f(x)\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^\infty x^n f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E\left(X^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^\infty \left(\frac{u\psi}{\lambda^\delta}\right)^{\frac{n}{\delta}} e^u e^{1-e^u}\,du \end{aligned} \tag{4.18}$$

### 4.3.5. Renyi ve Shannon Entropileri

(3.46) ve (3.47) 'de verilen Shannon ve Renyi entropi formülleri kullanılarak $(\lambda,\delta,\psi)$ parametreli EP-W dağılımına sahip bir $X$ rasgele değişkenine ilişkin Shannon ve Renyi entropileri sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} H_{Shannon}(X) &= E\left(-\log\left(f_X\left(X|\lambda,\delta,\psi\right)\right)\right) \\ &= -\int_0^\infty f_X(x;\lambda,\delta,\psi)\log f_X\left(x|\lambda,\delta,\psi\right)dx \\ &= -\int_0^\infty x^{\delta-1}\lambda^\delta\delta\psi^{-1}\exp\left(\frac{(\lambda x)^\delta}{\psi}\right)\exp\left(1-\exp\left(\frac{(\lambda x)^\delta}{\psi}\right)\right) \\ &\qquad \times\log\left(x^{\delta-1}\lambda^\delta\delta\psi^{-1}\exp\left(\frac{(\lambda x)^\delta}{\psi}\right)\exp\left(1-\exp\left(\frac{(\lambda x)^\delta}{\psi}\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{4.19}$$

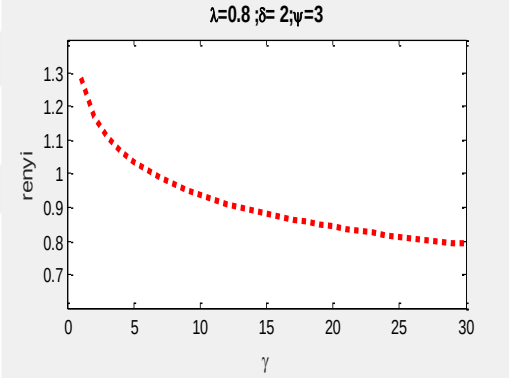
$$\begin{aligned} H_{\text{Renyi}-\gamma}(X) &= \frac{1}{1-\gamma}\log\left(\int_0^\infty f^{\alpha}{}_{EP-W}(x;\lambda,\delta,\psi)dx\right) \quad \gamma\neq 1,\ \gamma>0 \\ &= \frac{1}{1-\gamma}\log\left(\int_0^\infty\left(x^{\delta-1}\lambda^\delta\delta\psi^{-1}\exp\left(\frac{(\lambda x)^\delta}{\psi}\right)\exp\left(1-\exp\left(\frac{(\lambda x)^\delta}{\psi}\right)\right)\right)^\gamma dx\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

$\gamma\to 1$ için Renyi entropisi, Shannon entropisine yaklaşır (Principe, 2010). EP-W dağılımının çeşitli parametre değerleri için Renyi ve Shannon entropilerinin değerleri Çizelge 4.3.'te verilmiştir.

**Çizelge 4.3** EP-W dağılımı için Renyi ve Shannon entropisinin değerleri

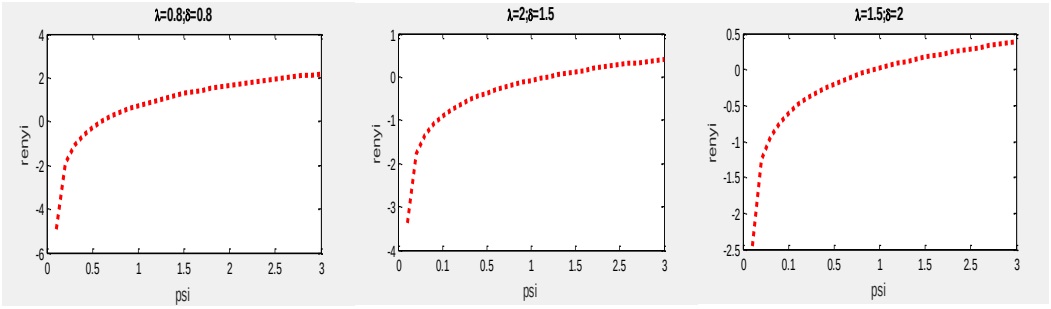
| Parametreler | Renyi entropisi | | Shannon entropisi |
|---|---|---|---|
| $(\lambda,\delta,\psi)$ | $\gamma=0.06$ | $\gamma=2$ | $\gamma\to1$ |
| $\lambda=0.8,\delta=2,\psi=3$ | 1.2880 | 0.8395 | 0.9316 |
| $\lambda=1.3,\delta=2,\psi=3$ | 0.8027 | 0.3540 | 0.4462 |
| $\lambda=1.9,\delta=2,\psi=3$ | 0.4233 | -0.0254 | 0.0666 |
| $\lambda=1.5,\delta=1.5,\psi=2$ | 0.7505 | 0.2758 | 0.3745 |
| $\lambda=1.5,\delta=2,\psi=2$ | 0.4569 | 0.0082 | 0.1004 |
| $\lambda=1.5,\delta=2.5,\psi=2$ | 0.2743 | -0.2110 | -0.1017 |
| $\lambda=1.5,\delta=2,\psi=0.5$ | -0.2362 | -0.6850 | -0.5929 |
| $\lambda=1.5,\delta=2,\psi=1.5$ | 0.3131 | -0.1357 | -0.0436 |
| $\lambda=1.5,\delta=2,\psi=2$ | 0.4569 | 0.0082 | 0.1004 |

EP-W dağılımı için $\gamma$ 'nın farklı değerleri için Renyi entropisinin değerlerine ilişkin grafik Şekil 4.6'da gösterilmiştir.

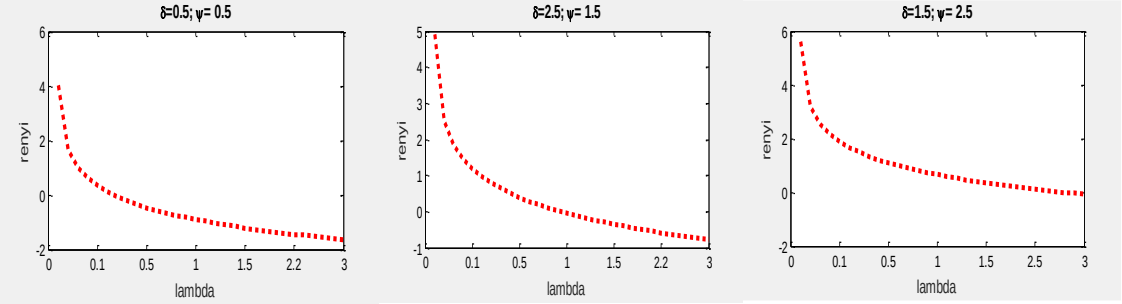



**Şekil 4.6.** Renyi Entropisinin değerleri

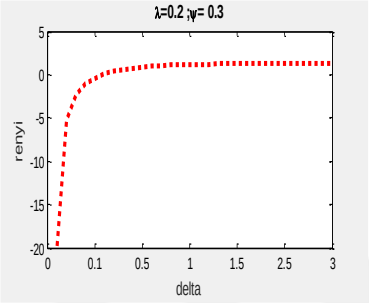
Şekil 4.6 dan görüldüğü üzere, bu dağılım için renyi entropisi konkav monoton azalan bir fonksiyondur. Eğer $\gamma$ sıfıra yakın değer ise entropinin büyük olduğu anlamına gelir. $\gamma=0.5$ için EP-W dağılımının çeşitli parametre değerleri için Renyi enropisinin değerlerine ilişkin grafikler Şekil 4.7. de verilmiştir.




$\lambda=0.8,\delta=0.8,\psi=0.01:0.1:3$ $\lambda=2,\delta=1.5,\psi=0.01:0.1:3$ $\lambda=1.5,\delta=2,\psi=0.01:0.1:3$



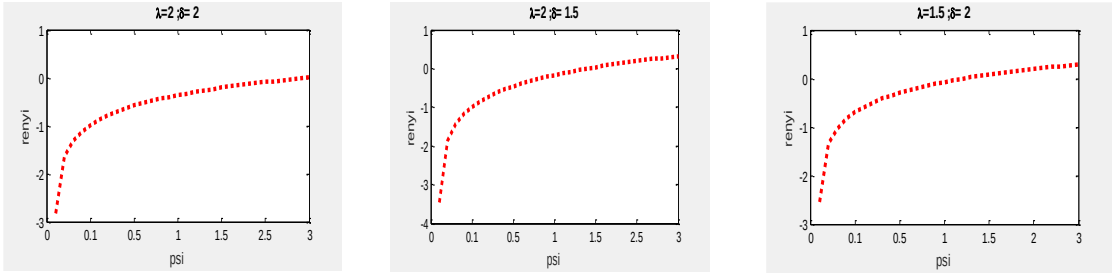

$\delta = 0.5, \psi = 0.5, \lambda = 0.01:0.1:3$ $\delta = 2.5, \psi = 1.5, \lambda = 0.01:0.1:3$ $\delta = 1.5, \psi = 2.5, \lambda = 0.01:0.1:3$



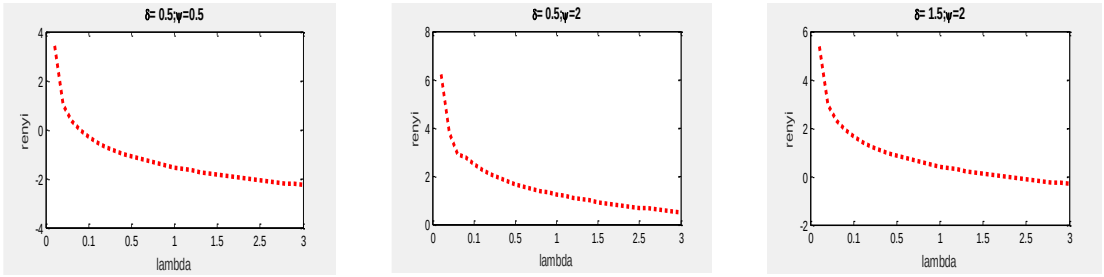

$\lambda = 0.2, \psi = 0.3, \delta = 0.01:0.1:3$

**Şekil 4.7** EP-W dağılımına ilişkin $\gamma = 0.5$ için Renyi entropisi değerleri

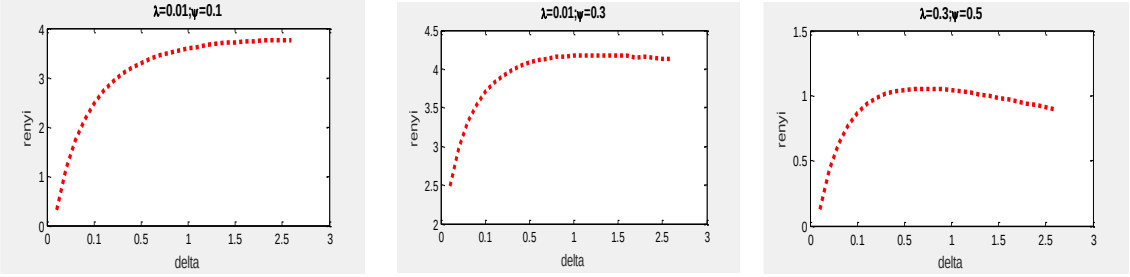
Şekil 4.7. 'den görüldüğü üzere $\psi$ ve $\delta$ değerlerinin sabit tutulmayıp arttırıldığı durumlarda Renyi entropisi değerleri artış gösterirken $\lambda$ değerinin sabit tutulmayıp arttırıldığı durumda Renyi entropisi değerlerinde azalış söz konusudur. EP-W dağılımının çeşitli parametre değerleri için Shannon entropi değerlerine ilişkin grafikler Şekil 4.8. 'de gösterilmiştir.




$\lambda = 2, \delta = 2, \psi = 0.01:0.1:3$ $\lambda = 2, \delta = 1.5, \psi = 0.01:0.1:3$ $\lambda = 1.5, \delta = 2, \psi = 0.01:0.1:3$




$\delta = 0.5\ \psi = 0.5, \lambda = 0.01:0.1:3$ $\delta = 0.5, \psi = 2, \lambda = 0.01:0.1:3$ $\delta = 1.5, \psi = 2, \lambda = 0.01:0.1:3$




$\lambda = 0.01, \psi = 0.1, \delta = 0.5:0.1:3$ $\lambda = 0.01, \psi = 0.3, \delta = 0.5:0.1:3$ $\lambda = 0.3, \psi = 0.5, \delta = 0.5:0.1:3$

**Şekil 4.8** EP-W dağılımına ilişkin Shannon entropisi değerleri

Şekil 4.7. 'de belirtilen yorumlar Şekil 4.8 için de geçerlidir. Benzer yorumlar çıkmasının nedeni, Renyi entropisinin, Shannon entropisinin genelleştirilmiş durumu olmasından ve $\gamma$ değerinin 1 değerine yaklaştıkça Renyi ve Shannon entropilerinin birbirine yakın değerler almasından kaynaklanmaktadır.

### 4.3.6. Olabilirlik Tahmini

$X_1, X_2, ..., X_n$, EP-W$\left(\underline{\mu}\right)$ dağılımından alınan n birimlik bir örneklem olsun. Burada $\underline{\mu} = \left(\lambda, \delta, \psi\right)$ parametre vektörü olsun. Bu dağılıma ilişkin Log - olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekildedir;

$$\log \mathrm{L}\left(\underline{\mu}\right) = \ell(\underline{\mu} \mid \underline{x}) = \mathrm{n}\,\delta \log\left(\lambda\right) + \left(\delta - 1\right)\sum_{i=1}^{n} \log\left(x_i\right) + \mathrm{n}\log\left(\delta\right) - \mathrm{n}\log\left(\psi\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\lambda x_i\right)^{\delta}}{\psi}\right) + n + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\exp\left(\frac{\left(\lambda x_i\right)^{\delta}}{\psi}\right)\right)\right) \tag{4.21}$$

$\underline{\mu} = \left(\lambda, \delta, \psi\right)$ parametrelerinin EÇO tahmin edicileri, log-olabilirlik fonksiyonunun bilinmeyen parametrelere göre türevlerinin alınıp 0 a eşitlenmesi sonucunda elde edilen aşağıdaki lineer olmayan denklemlerin nümerik yöntemler kullanılarak elde edilebilir. EÇO tahminleri -log-olabilirlik fonksiyonunu en küçük yapan parametre değerleri olduğundan bu tahminleri elde edebilmek için R-studio yazılımında bulunan BFGS ve CG algoritmaları da kullanılabilir.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = \lambda^{-1}\psi^{-1}\delta\left(n\psi + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda x_i\right)^{\delta}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda x_i\right)^{\delta}\exp\left(\frac{\left(\lambda x_i\right)^{\delta}}{\psi}\right)\right)\right) = 0 \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \delta} = n\ln(\lambda) + \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right) + \frac{n}{\delta} + \left(\sum_{i=1}^{n} \psi^{-1}(\lambda x_i)^{\delta} \ln(\lambda x_i)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \psi^{-1}(\lambda x_i)^{\delta} \ln(\lambda x_i) \exp\left(\frac{(\lambda x_i)^{\delta}}{\psi}\right)\right) = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \psi} = -\frac{n}{\psi} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{(\lambda x_i)^{\delta}}{\psi^2}\right)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \psi^{-2}(\lambda x_i)^{\delta} \exp\left(\frac{(\lambda x_i)^{\delta}}{\psi}\right)\right) = 0 \quad (4.24)$$

(3.36), (3.37) ve (3.38) eşitlikleri kullanılarak $\underline{\mu} = (\lambda, \delta, \psi)$ parametre vektörü için $1-\alpha$ seviyeli Bootstrap-Normal, Bootstrap-Basic ve Bootstrap-Percentile güven aralıkları

$$\left(\underline{\hat{\mu}} - Yan_B(\underline{\hat{\mu}}) - z_{(1-\alpha/2)} sh_B(\underline{\hat{\mu}}), \underline{\hat{\mu}} - Yan_B(\underline{\hat{\mu}}) + z_{(1-\alpha/2)} sh_B(\underline{\hat{\mu}})\right) \quad (4.25)$$

$$\left(2\underline{\hat{\mu}} - \underline{\hat{\mu}}^{*}_{(B+1)(1-\alpha/2)}, 2\underline{\hat{\mu}} - \underline{\hat{\mu}}^{*}_{(B+1)(\alpha/2)}\right) \quad (4.26)$$

$$\left(\underline{\hat{\mu}}^{*}_{(B+1)(\alpha/2)}, \underline{\hat{\mu}}^{*}_{(B+1)(1-\alpha/2)}\right) \quad (4.27)$$

biçiminde elde edilir. Burada $B$ bootstrap örneklem sayısını göstermektedir.(Ugarte ve ark., 2015),(Efron ve Tibshirani, 1994) .

### 4.3.7. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde $(\lambda, \delta, \psi)$ parametreli EP-W dağılımının bilinmeyen parametreleri için EÇO tahmin edicilerinin hata kareler ortalamaları (MSEs) ve yanları açısından performanslarına ve bu tahmin edicilere dayalı asimptotik güven aralıkları (Fisher aralıkları) ile Bootstrap-Normal, Bootstrap-Basic ve Bootstrap-Percentile güven aralıklarının oluşturulmasına dayalı bir simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu simülasyon çalışmasında, EÇO tahmin edicilerinin çözümü, R-studio yazılımında bulunan optim fonksiyonunda BFGS ve CG metotları kullanılarak elde edilmiştir. Bu tahmin edicilere dayalı olarak oluşturulan Bootstrap güven aralıkları ise R yazılımına "boot" paketi yüklenerek elde edilmiştir. 1000 tekrar ve 1000 bootstrap örneklemine dayalı olarak gerçekleştirilen simülasyon çalışmasında örneklem boyutları n=50, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000 ve parametre değerleri $(\lambda, \delta, \psi) = (1.8, 2.4, 1.4)$ ve $(2, 1.5, 2.5)$ olarak alınmıştır.

BFGS ve CG yöntemleri kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.4 ve 4.5 'de verilmiş olup ilgili grafikler Şekil 4.9-4.16 ’da gösterilmiştir.

**Çizelge 4.4.** EP-W dağılımı için BFGS ve CG yöntemleri kullanılarak elde edilen EÇO ve aralık tahmin edicilerinin performansları $\left((\lambda,\delta,\psi)=(1.8,2.4,1.4)\right)$

| | **EÇO tahmin edicilerinin Yanları** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\delta}$ | $\psi$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\delta}$ | $\psi$ |
| 50 | -0.00850 | 0.04648 | -0.03607 | 0.01273 | 0.00888 | -0.00704 |
| 100 | 0.00029 | 0.01769 | -0.00720 | 0.00171 | 0.02912 | -0.00106 |
| 200 | -0.00066 | 0.02097 | 0.00520 | -0.00037 | 0.02238 | 0.00017 |
| 300 | -0.02139 | 0.01456 | -0.03514 | 0.00220 | 0.00461 | -0.00126 |
| 400 | -0.01549 | 0.01531 | -0.02232 | 0.00013 | 0.00722 | -0.00011 |
| 500 | 0.00188 | 0.00862 | 0.00327 | -0.00032 | 0.00883 | 0.00014 |
| 600 | 0.00759 | 0.00076 | 0.01187 | -0.00023 | 0.01356 | 0.00012 |
| 700 | 0.01504 | 0.00849 | 0.02809 | -0.00015 | 0.00379 | 0.00007 |
| 800 | 0.01477 | 0.00176 | 0.02730 | 0.00068 | 0.00437 | -0.00039 |
| 900 | 0.01443 | 0.00325 | 0.03125 | -0.00004 | 0.00464 | 0.00003 |
| 1000 | 0.00265 | 0.00447 | 0.00749 | 0.00124 | -0.00064 | -0.00065 |

**Çizelge4.4. (Devam)**

| | **EÇO tahmin edicilerinin MSE’leri** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\delta}$ | $\psi$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\delta}$ | $\psi$ |
| 50 | 0.01559 | 0.08194 | 0.03421 | 0.00379 | 0.07563 | 0.00109 |
| 100 | 0.00299 | 0.03822 | 0.01237 | 0.00196 | 0.04041 | 0.00057 |
| 200 | 0.02201 | 0.02034 | 0.05616 | 0.00087 | 0.01992 | 0.00025 |
| 300 | 0.00962 | 0.01334 | 0.02795 | 0.00054 | 0.01230 | 0.00015 |
| 400 | 0.00583 | 0.00918 | 0.01612 | 0.00042 | 0.00951 | 0.00012 |
| 500 | 0.00157 | 0.00799 | 0.00576 | 0.00036 | 0.00898 | 0.00010 |
| 600 | 0.00306 | 0.00694 | 0.00849 | 0.00031 | 0.00704 | 0.00009 |
| 700 | 0.00485 | 0.00575 | 0.01528 | 0.00024 | 0.00554 | 0.00007 |
| 800 | 0.00619 | 0.00449 | 0.02027 | 0.00022 | 0.00448 | 0.00006 |
| 900 | 0.00665 | 0.00449 | 0.02359 | 0.00019 | 0.00433 | 0.00006 |
| 1000 | 0.00535 | 0.00412 | 0.01647 | 0.00017 | 0.00416 | 0.00005 |

**Çizelge4.4.Devam)**

| | **EÇO tahmin edicilerinin kapsanma olasılıkları (Fisher)** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(KO)}$ | $\hat{\delta}_{(KO)}$ | $\psi_{(KO)}$ | $\hat{\lambda}_{(KO)}$ | $\hat{\delta}_{(KO)}$ | $\psi_{(KO)}$ |
| 50 | 1 | 0.956 | 1 | 1 | 0.959 | 1 |
| 100 | 1 | 0.967 | 1 | 1 | 0.967 | 1 |
| 200 | 1 | 0.963 | 1 | 1 | 0.956 | 1 |
| 300 | 1 | 0.956 | 1 | 1 | 0.945 | 1 |
| 400 | 1 | 0.965 | 1 | 1 | 0.969 | 1 |
| 500 | 1 | 0.944 | 1 | 1 | 0.943 | 1 |
| 600 | 1 | 0.943 | 1 | 1 | 0.948 | 1 |
| 700 | 1 | 0.945 | 1 | 1 | 0.950 | 1 |
| 800 | 1 | 0.959 | 1 | 1 | 0.961 | 1 |
| 900 | 1 | 0.950 | 1 | 1 | 0.949 | 1 |
| 1000 | 1 | 0.952 | 1 | 1 | 0.940 | 1 |

**Çizelge4.4Devam)**

| | **Fisher Genişlikleri** $(Gen)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(Gen)}$ | $\hat{\delta}_{(Gen)}$ | $\psi_{(Gen)}$ | $\hat{\lambda}_{(Gen)}$ | $\hat{\delta}_{(Gen)}$ | $\psi_{(Gen)}$ |
| 50 | 208.59960 | 1.14748 | 395.05170 | 168.79630 | 1.12880 | 301.14670 |
| 100 | 155.68130 | 0.79724 | 296.24070 | 139.49070 | 0.80077 | 264.04410 |
| 200 | 96.85291 | 0.56274 | 183.96690 | 98.64430 | 0.56385 | 186.21910 |
| 300 | 85.25703 | 0.45765 | 158.37020 | 95.92234 | 0.45583 | 180.68630 |
| 400 | 76.09477 | 0.39656 | 141.71490 | 69.16890 | 0.39507 | 129.56090 |
| 500 | 71.10119 | 0.35357 | 134.27690 | 61.82180 | 0.35349 | 115.94110 |
| 600 | 66.48552 | 0.32154 | 125.12650 | 56.26410 | 0.32317 | 105.70110 |
| 700 | 62.17282 | 0.29867 | 117.51000 | 52.37790 | 0.29816 | 97.98550 |
| 800 | 53.24390 | 0.27856 | 101.36190 | 49.20180 | 0.27873 | 91.96520 |
| 900 | 47.27566 | 0.26272 | 90.13451 | 46.17640 | 0.26305 | 86.38630 |
| 1000 | 44.21341 | 0.24938 | 83.12031 | 43.78840 | 0.24882 | 81.64390 |

**Çizelge4.4.(Devam)**

| | $\hat{\lambda}$ **için Bootstrap Kapsama olasılıkları** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.902 | 0.758 | 1 | 0.961 | 0.949 | 0.941 |
| 100 | 0.969 | 0.944 | 1 | 0.975 | 0.952 | 0.936 |
| 200 | 0.828 | 0.795 | 0.995 | 0.967 | 0.96 | 0.957 |
| 300 | 0.896 | 0.804 | 1 | 0.985 | 0.965 | 0.962 |
| 400 | 0.911 | 0.847 | 0.994 | 0.973 | 0.962 | 0.958 |
| 500 | 0.964 | 0.956 | 1 | 0.970 | 0.958 | 0.949 |
| 600 | 0.904 | 0.886 | 1 | 0.977 | 0.948 | 0.946 |
| 700 | 0.858 | 0.848 | 1 | 0.984 | 0.96 | 0.967 |
| 800 | 0.820 | 0.789 | 0.998 | 0.990 | 0.962 | 0.961 |
| 900 | 0.787 | 0.757 | 1 | 0.970 | 0.959 | 0.959 |
| 1000 | 0.766 | 0.740 | 1 | 0.959 | 0.956 | 0.952 |

**Çizelge4.4.Devam)**

| | $\hat{\lambda}$ **için Bootstrap Genişlikleri** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.70223 | 0.60155 | 0.60155 | 0.59339 | 0.27272 | 0.27272 |
| 100 | 0.33941 | 0.23613 | 0.23613 | 0.46419 | 0.19444 | 0.19444 |
| 200 | 0.64253 | 0.62265 | 0.62265 | 0.30607 | 0.12751 | 0.12751 |
| 300 | 0.49267 | 0.44582 | 0.44582 | 0.45802 | 0.09723 | 0.09723 |
| 400 | 0.40529 | 0.37811 | 0.37811 | 0.28256 | 0.08360 | 0.08360 |
| 500 | 0.26637 | 0.22694 | 0.22693 | 0.30222 | 0.07464 | 0.07464 |
| 600 | 0.31849 | 0.28966 | 0.28966 | 0.32176 | 0.07123 | 0.07123 |
| 700 | 0.36121 | 0.33497 | 0.33497 | 0.39322 | 0.06368 | 0.06368 |
| 800 | 0.38690 | 0.36051 | 0.36051 | 0.85353 | 0.26692 | 0.26692 |
| 900 | 0.38794 | 0.35728 | 0.35728 | 0.16596 | 0.05554 | 0.05554 |
| 1000 | 0.34472 | 0.31621 | 0.31621 | 0.20551 | 0.05296 | 0.05296 |

**Çizelge4.4.Devam)**

| | $\hat{\delta}$ için Bootstrap Kapsama olasılıkları | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\delta}_{(Norm)}$ | $\hat{\delta}_{(Basic)}$ | $\hat{\delta}_{(Perc.)}$ | $\hat{\delta}_{(Norm)}$ | $\hat{\delta}_{(Basic)}$ | $\hat{\delta}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.982 | 0.947 | 0.923 | 0.990 | 0.947 | 0.949 |
| 100 | 0.985 | 0.946 | 0.956 | 0.990 | 0.963 | 0.956 |
| 200 | 0.979 | 0.961 | 0.943 | 0.981 | 0.959 | 0.947 |
| 300 | 0.968 | 0.965 | 0.950 | 0.981 | 0.949 | 0.941 |
| 400 | 0.974 | 0.963 | 0.952 | 0.981 | 0.972 | 0.958 |
| 500 | 0.962 | 0.950 | 0.937 | 0.972 | 0.945 | 0.926 |
| 600 | 0.957 | 0.935 | 0.939 | 0.970 | 0.949 | 0.940 |
| 700 | 0.959 | 0.957 | 0.944 | 0.972 | 0.955 | 0.953 |
| 800 | 0.970 | 0.961 | 0.955 | 0.987 | 0.971 | 0.957 |
| 900 | 0.955 | 0.943 | 0.947 | 0.967 | 0.946 | 0.947 |
| 1000 | 0.956 | 0.955 | 0.951 | 0.966 | 0.936 | 0.942 |

**Çizelge4.4.(Devam)**

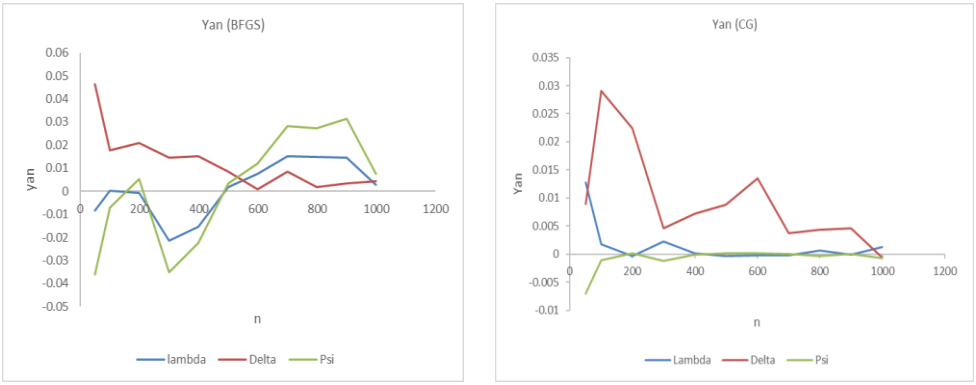
| | $\hat{\delta}$ için Bootstrap Genişlikleri | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\delta}_{(Norm)}$ | $\hat{\delta}_{(Basic)}$ | $\hat{\delta}_{(Perc.)}$ | $\hat{\delta}_{(Norm)}$ | $\hat{\delta}_{(Basic)}$ | $\hat{\delta}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 1.27362 | 1.21039 | 1.21039 | 1.40946 | 1.22056 | 1.22056 |
| 100 | 0.87389 | 0.81531 | 0.81531 | 1.05232 | 0.85609 | 0.85609 |
| 200 | 0.63018 | 0.57012 | 0.57012 | 0.70918 | 0.57964 | 0.57964 |
| 300 | 0.52238 | 0.46264 | 0.46264 | 0.76595 | 0.46329 | 0.46329 |
| 400 | 0.45004 | 0.39932 | 0.39932 | 0.55691 | 0.39819 | 0.39819 |
| 500 | 0.41316 | 0.35478 | 0.35478 | 0.55463 | 0.35705 | 0.35705 |
| 600 | 0.37943 | 0.32329 | 0.32329 | 0.54846 | 0.32953 | 0.32953 |
| 700 | 0.35283 | 0.30082 | 0.30082 | 0.60713 | 0.30088 | 0.30088 |
| 800 | 0.33149 | 0.27999 | 0.27999 | 1.12374 | 0.53842 | 0.53842 |
| 900 | 0.31127 | 0.26431 | 0.26431 | 0.36137 | 0.26368 | 0.26368 |
| 1000 | 0.29470 | 0.25077 | 0.25077 | 0.38549 | 0.25077 | 0.25077 |

**Çizelge4.4..(Devam)**

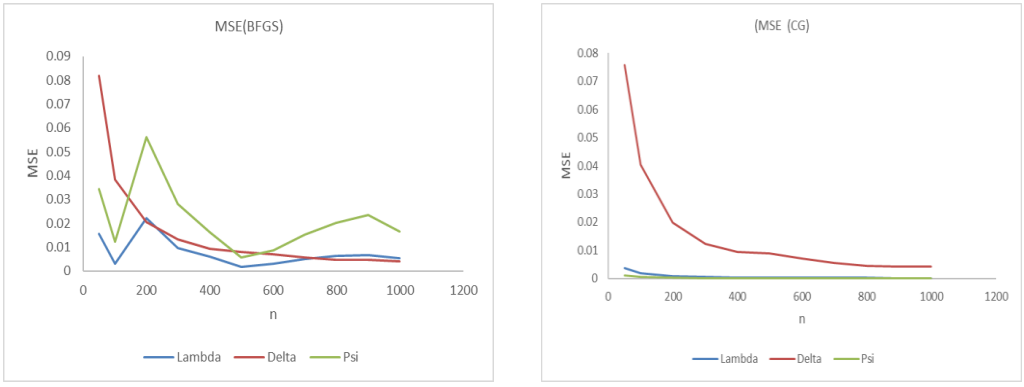
| $\psi$ için Bootstrap Kapsama olasılıkları | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\psi_{(Norm)}$ | $\psi_{(Basic)}$ | $\psi_{(Perc.)}$ | $\psi_{(Norm)}$ | $\psi_{(Basic)}$ | $\psi_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.868 | 0.750 | 1 | 0.961 | 0.943 | 0.942 |
| 100 | 0.950 | 0.924 | 0.994 | 0.975 | 0.949 | 0.936 |
| 200 | 0.779 | 0.733 | 1 | 0.965 | 0.954 | 0.957 |
| 300 | 0.869 | 0.777 | 1 | 0.984 | 0.966 | 0.961 |
| 400 | 0.903 | 0.832 | 1 | 0.971 | 0.957 | 0.958 |
| 500 | 0.944 | 0.943 | 0.998 | 0.968 | 0.957 | 0.948 |
| 600 | 0.903 | 0.886 | 0.999 | 0.973 | 0.944 | 0.946 |
| 700 | 0.840 | 0.851 | 1 | 0.984 | 0.960 | 0.967 |
| 800 | 0.795 | 0.781 | 1 | 0.990 | 0.966 | 0.961 |
| 900 | 0.779 | 0.771 | 1 | 0.967 | 0.955 | 0.959 |
| 1000 | 0.734 | 0.734 | 1 | 0.958 | 0.946 | 0.952 |

**Çizelge4.4.Devam)**

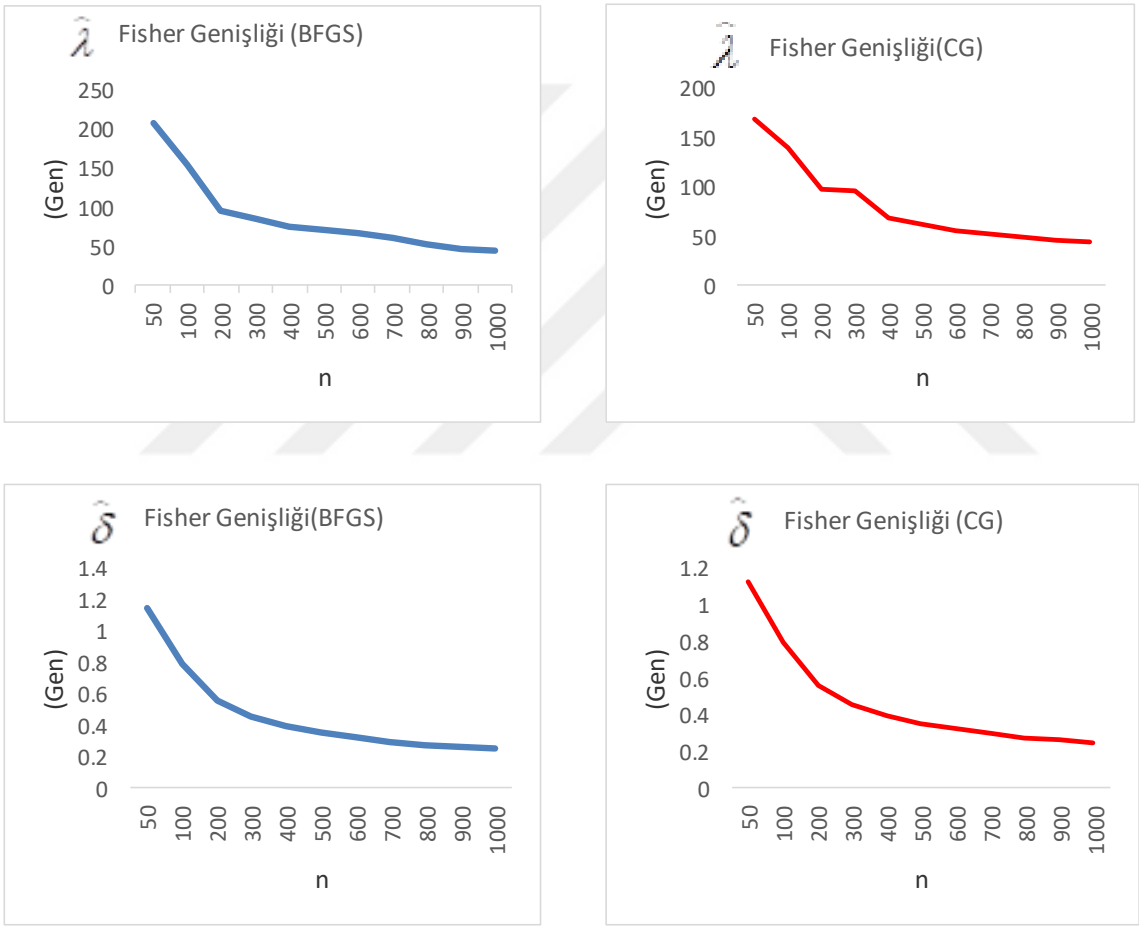
| | $\psi$ için Bootstrap Genişlikleri | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| n | (BFGS) | | | (CG) | | |
| | $\psi_{(Norm)}$ | $\psi_{(Basic)}$ | $\psi_{(Perc.)}$ | $\psi_{(Norm)}$ | $\psi_{(Basic)}$ | $\psi_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.93898 | 0.85977 | 0.85977 | 0.29633 | 0.14336 | 0.14336 |
| 100 | 0.55120 | 0.54186 | 0.54185 | 0.25883 | 0.10698 | 0.10698 |
| 200 | 0.98537 | 1.00823 | 1.00823 | 0.15943 | 0.06753 | 0.06753 |
| 300 | 0.78869 | 0.76148 | 0.76148 | 0.24374 | 0.05218 | 0.05218 |
| 400 | 0.65073 | 0.65260 | 0.65260 | 0.14814 | 0.04474 | 0.04474 |
| 500 | 0.41392 | 0.43915 | 0.43915 | 0.16252 | 0.04008 | 0.04008 |
| 600 | 0.49942 | 0.51134 | 0.51134 | 0.17170 | 0.03810 | 0.03819 |
| 700 | 0.59093 | 0.60529 | 0.60520 | 0.21053 | 0.03390 | 0.03390 |
| 800 | 0.64790 | 0.65180 | 0.65180 | 0.46768 | 0.14731 | 0.14731 |
| 900 | 0.67207 | 0.66615 | 0.66615 | 0.09043 | 0.02981 | 0.02981 |
| 1000 | 0.55464 | 0.56499 | 0.56499 | 0.10833 | 0.02819 | 0.02819 |

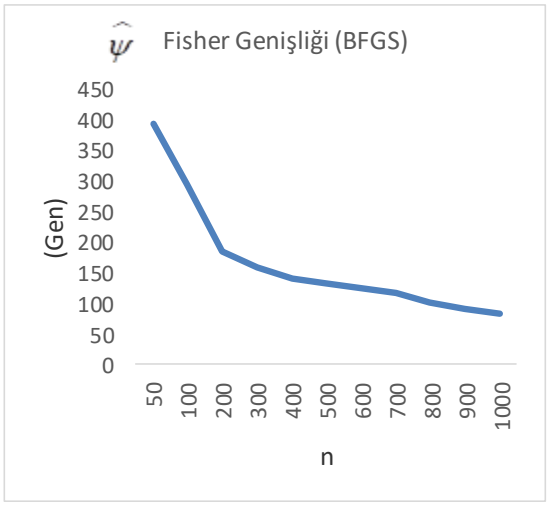


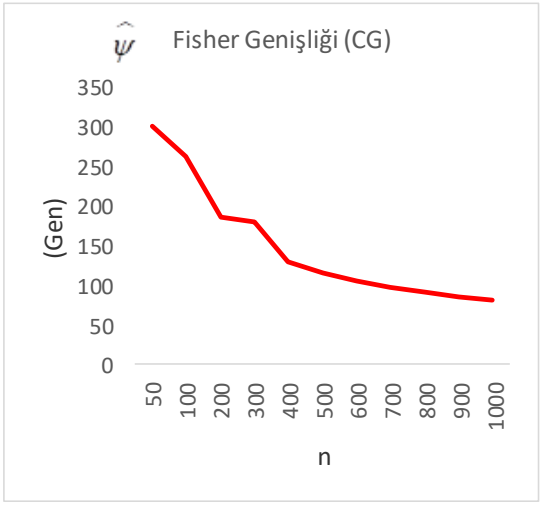

**Şekil 4.9**. EP-W dağılımının parametreleri için yanlar



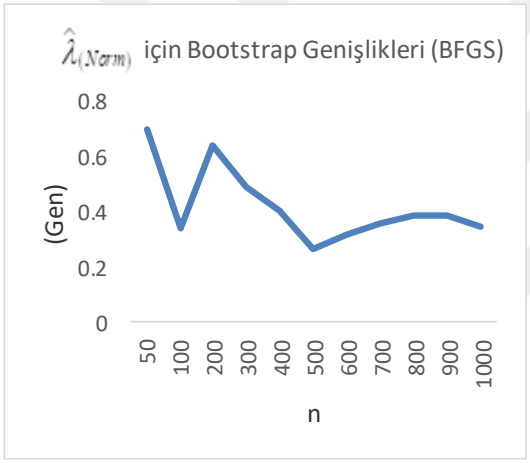

**Şekil 4.10**.EP-W dağılım parametreleri için MSE'ler.

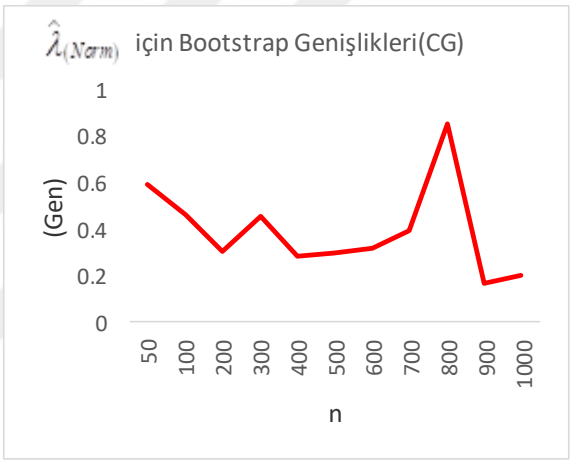


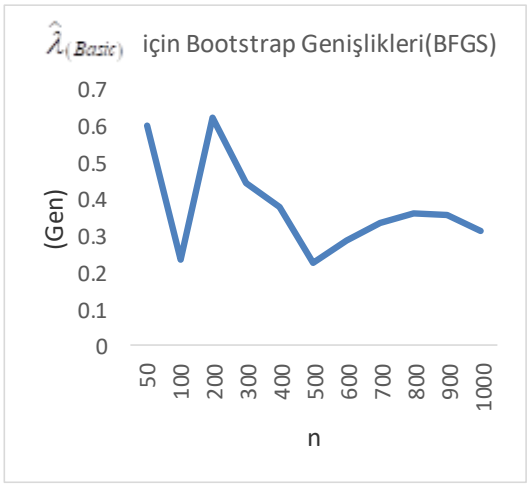


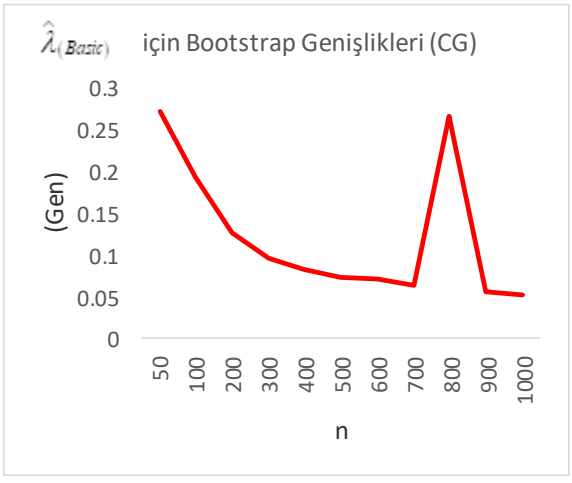



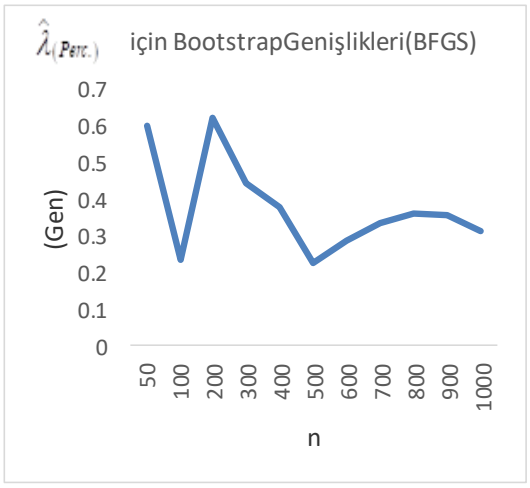

**Şekil 4.11**. EP-W dağılımının çeşitli parametre değerlerine ilişkin Fisher Genişlikleri.

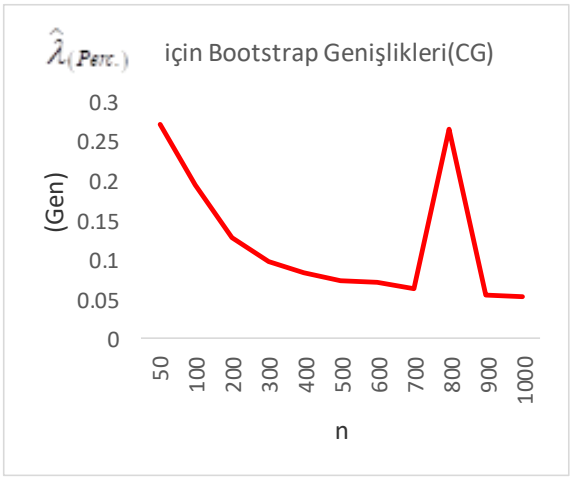


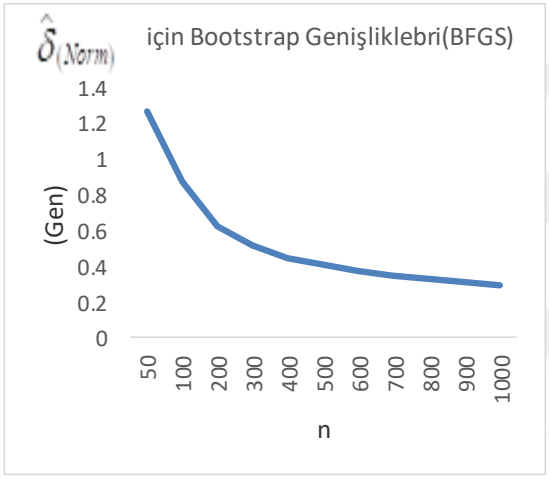



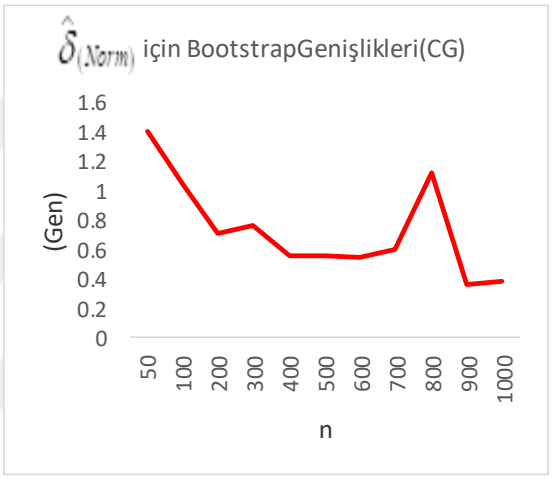



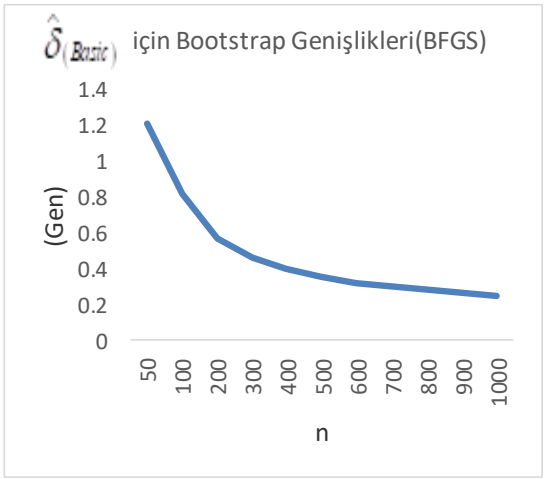



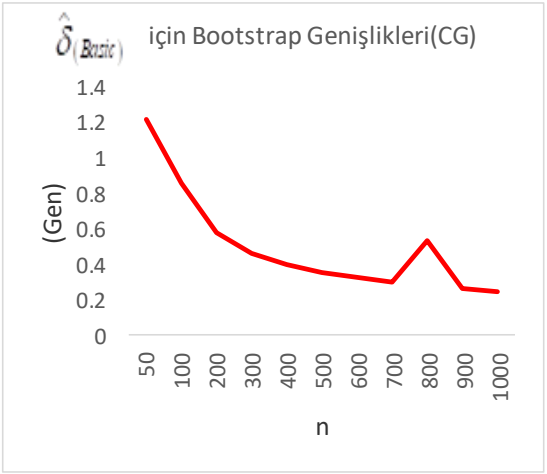

$\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ için BootstrapGenişlikleri(BFGS)
(Gen)
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

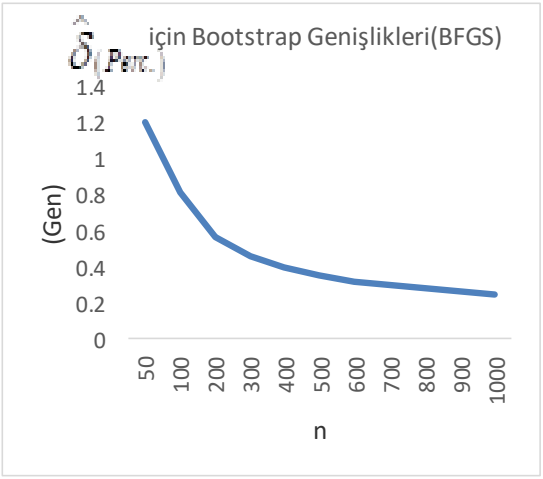

$\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

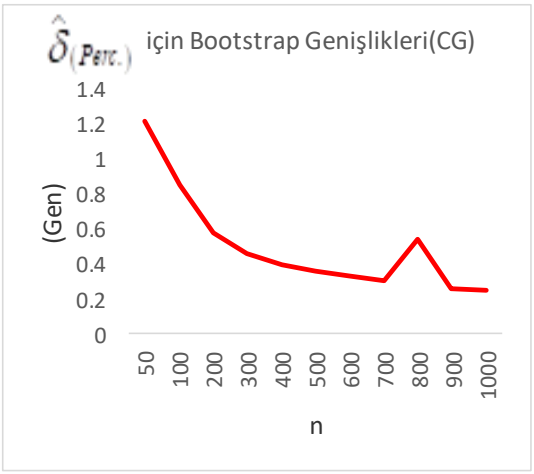

$\hat{\delta}_{(Norm)}$ için Bootstrap Genişliklebri(BFGS)
(Gen)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

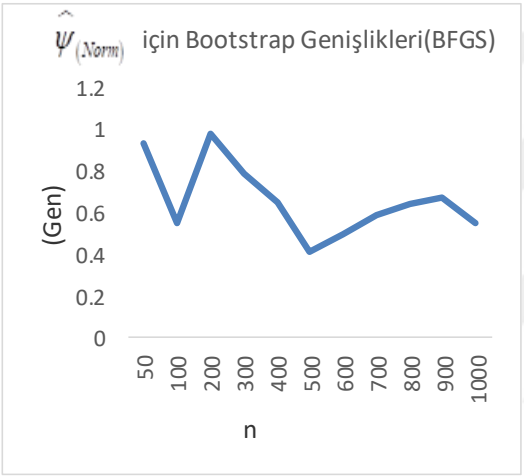

$\hat{\delta}_{(Norm)}$ için BootstrapGenişlikleri(CG)
(Gen)
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

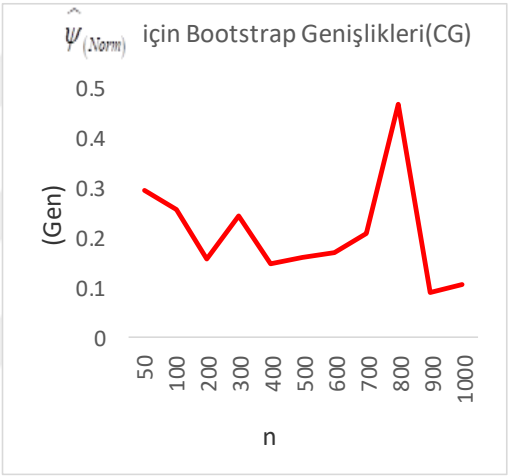

$\hat{\delta}_{(Bazic)}$ için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

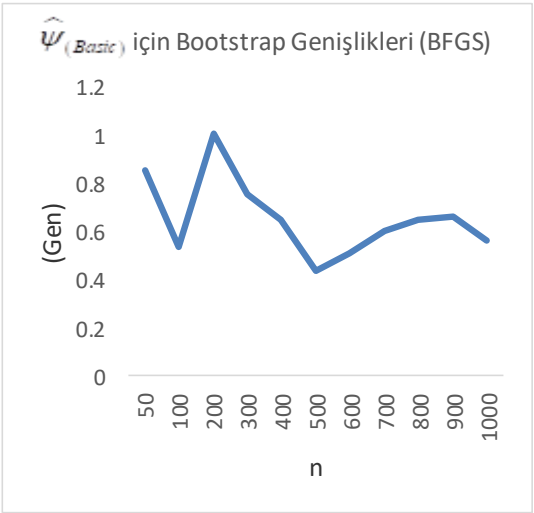

$\hat{\delta}_{(Bazic)}$ için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

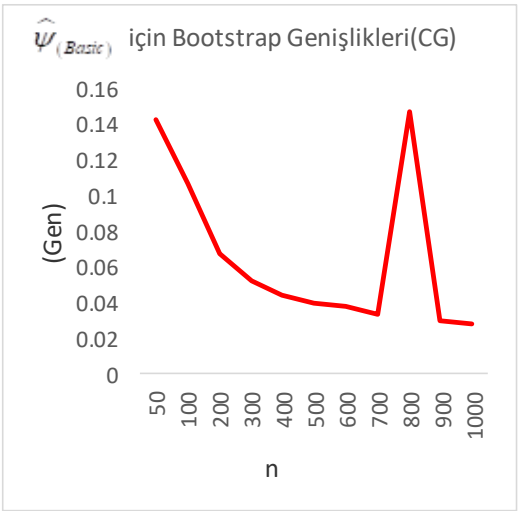

için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

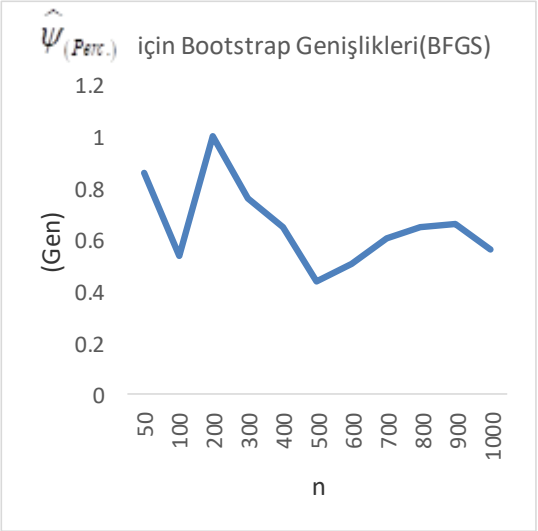

için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

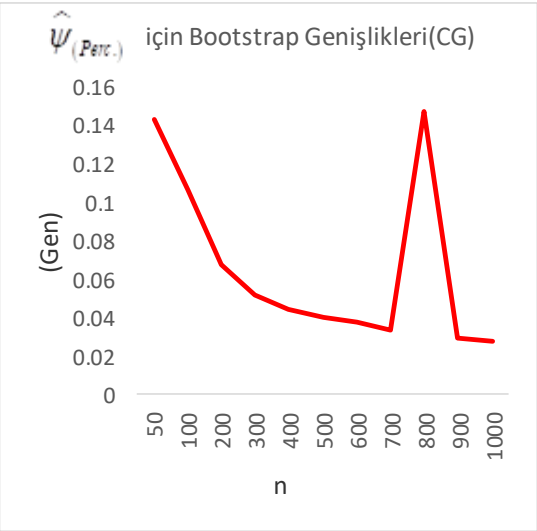

için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n


için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n


için Bootstrap Genişlikleri (BFGS)
(Gen)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n


için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n




**Şekil 4.12**. EP-W dağılımının çeşitli parametre değerlerine ilişkin Bootstrap

**Çizelge 4.5.** EP-W dağılımı için BFGS ve CG yöntemleri kullanılarak elde edilen EÇO ve aralık tahmin edicilerinin performansları $\left((\lambda,\delta,\psi)=(2,1.5,2.5)\right)$

| **EÇO tahmin edicilerinin Yanları** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\delta}$ | $\psi$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\delta}$ | $\psi$ |
| 50 | 0.00780 | 0.01837 | -0.02594 | 0.01442 | 0.02847 | -0.01162 |
| 100 | 0.01773 | 0.01479 | 0.03542 | -0.00076 | 0.02104 | -0.00173 |
| 200 | -0.00847 | 0.01200 | -0.01118 | 0.00148 | 0.01135 | -0.00173 |
| 300 | 0.01478 | 0.00515 | 0.02279 | -0.00404 | 0.01167 | 0.00143 |
| 400 | 0.01302 | 0.00581 | 0.02701 | -0.00002 | 0.00514 | -0.00047 |
| 500 | 0.00634 | 0.00566 | 0.02069 | -0.00163 | 0.00644 | 0.00033 |
| 600 | 0.00198 | 0.00588 | 0.01322 | -0.00108 | 0.00462 | 0.00016 |
| 700 | -0.00898 | 0.00267 | -0.01468 | -0.00100 | 0.00368 | 0.00023 |
| 800 | -0.01503 | 0.00204 | -0.02847 | 0.00128 | 0.00149 | -0.00096 |
| 900 | -0.01239 | 0.00381 | -0.01899 | 0.00028 | 0.00232 | -0.00037 |
| 1000 | -0.00922 | 0.00106 | -0.01801 | -0.00070 | 0.00353 | 0.00018 |

**Çizelge4.5.(Devam)**

| EÇO tahmin edicilerinin MSE'leri | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\delta}$ | $\psi$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\delta}$ | $\psi$ |
| 50 | 0.01727 | 0.02875 | 0.04489 | 0.02169 | 0.02747 | 0.00671 |
| 100 | 0.01802 | 0.01378 | 0.03696 | 0.01153 | 0.01532 | 0.00334 |
| 200 | 0.00462 | 0.00733 | 0.01694 | 0.00613 | 0.00801 | 0.00176 |
| 300 | 0.01551 | 0.00514 | 0.03979 | 0.00426 | 0.00559 | 0.00122 |
| 400 | 0.01429 | 0.00357 | 0.03139 | 0.00323 | 0.00386 | 0.00092 |
| 500 | 0.01135 | 0.00258 | 0.03128 | 0.00278 | 0.00345 | 0.00079 |
| 600 | 0.01017 | 0.00223 | 0.02832 | 0.00208 | 0.00281 | 0.00059 |
| 700 | 0.00489 | 0.00196 | 0.01568 | 0.00168 | 0.00215 | 0.00048 |
| 800 | 0.00341 | 0.00186 | 0.00992 | 0.00151 | 0.00203 | 0.00043 |
| 900 | 0.00383 | 0.00168 | 0.00938 | 0.00136 | 0.00179 | 0.00039 |
| 1000 | 0.00336 | 0.00149 | 0.01013 | 0.00121 | 0.00159 | 0.00034 |

**Çizelge4.5.(Devam)**

| EÇO tahmin edicilerinin kapsanma olasılıkları (Fisher) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(KO)}$ | $\hat{\delta}_{(KO)}$ | $\psi_{(KO)}$ | $\hat{\lambda}_{(KO)}$ | $\hat{\delta}_{(KO)}$ | $\psi_{(KO)}$ |
| 50 | 1 | 0.969 | 1 | 1 | 0.968 | 1 |
| 100 | 1 | 0.972 | 1 | 1 | 0.961 | 1 |
| 200 | 1 | 0.955 | 1 | 1 | 0.959 | 1 |
| 300 | 1 | 0.953 | 1 | 1 | 0.949 | 1 |
| 400 | 1 | 0.958 | 1 | 1 | 0.952 | 1 |
| 500 | 1 | 0.959 | 1 | 1 | 0.939 | 1 |
| 600 | 1 | 0.964 | 1 | 1 | 0.952 | 1 |
| 700 | 1 | 0.961 | 1 | 1 | 0.961 | 1 |
| 800 | 1 | 0.957 | 1 | 1 | 0.944 | 1 |
| 900 | 1 | 0.951 | 1 | 1 | 0.947 | 1 |
| 1000 | 1 | 0.957 | 1 | 1 | 0.940 | 1 |

**Çizelge4.5.(Devam)**

| **Fisher Genişlikleri** $(Gen)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(Gen)}$ | $\hat{\delta}_{(Gen)}$ | $\psi_{(Gen)}$ | $\hat{\lambda}_{(Gen)}$ | $\hat{\delta}_{(Gen)}$ | $\psi_{(Gen)}$ |
| 50 | 683.11820 | 0.71081 | 1359.25600 | 720.85730 | 0.71599 | 1461.82100 |
| 100 | 462.80040 | 0.50007 | 903.30280 | 454.89580 | 0.50169 | 887.23320 |
| 200 | 314.45490 | 0.35141 | 599.21590 | 306.44630 | 0.35098 | 583.58580 |
| 300 | 250.22270 | 0.28560 | 475.56650 | 247.91090 | 0.28666 | 472.41100 |
| 400 | 214.09190 | 0.24722 | 405.55780 | 215.32760 | 0.24702 | 406.50570 |
| 500 | 196.76960 | 0.22099 | 373.00270 | 192.80890 | 0.22101 | 364.58020 |
| 600 | 178.44730 | 0.20163 | 337.79710 | 175.08780 | 0.20139 | 330.21610 |
| 700 | 167.87360 | 0.18629 | 315.49730 | 160.49960 | 0.18646 | 302.26700 |
| 800 | 155.92820 | 0.17426 | 291.77710 | 150.17580 | 0.17416 | 281.96340 |
| 900 | 149.33820 | 0.16439 | 279.87680 | 141.84880 | 0.16426 | 266.61440 |
| 1000 | 136.87590 | 0.15566 | 255.72220 | 134.43320 | 0.15586 | 253.12770 |

**Çizelge4.5.(Devam**

| $\hat{\lambda}$ **için Bootstrap Kapsama olasılıkları** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.944 | 0.918 | 0.985 | 0.971 | 0.957 | 0.966 |
| 100 | 0.938 | 0.859 | 1 | 0.960 | 0.942 | 0.951 |
| 200 | 0.950 | 0.945 | 1 | 0.965 | 0.947 | 0.949 |
| 300 | 0.897 | 0.810 | 1 | 0.954 | 0.936 | 0.937 |
| 400 | 0.885 | 0.785 | 1 | 0.959 | 0.949 | 0.947 |
| 500 | 0.936 | 0.888 | 1 | 0.948 | 0.932 | 0.936 |
| 600 | 0.936 | 0.893 | 0.999 | 0.962 | 0.954 | 0.951 |
| 700 | 0.946 | 0.869 | 1 | 0.958 | 0.949 | 0.953 |
| 800 | 0.966 | 0.910 | 1 | 0.953 | 0.946 | 0.950 |
| 900 | 0.946 | 0.948 | 1 | 0.963 | 0.949 | 0.946 |
| 1000 | 0.954 | 0.939 | 1 | 0.953 | 0.946 | 0.948 |

**Çizelge4.5.(Devam)**

| $\hat{\lambda}$ için Bootstrap Genişlikleri | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.79629 | 0.61806 | 0.61806 | 0.73874 | 0.60734 | 0.60734 |
| 100 | 0.76713 | 0.62631 | 0.62631 | 0.50438 | 0.43398 | 0.43398 |
| 200 | 0.46490 | 0.35979 | 0.35979 | 0.49901 | 0.30812 | 0.30812 |
| 300 | 0.62663 | 0.52634 | 0.52634 | 0.33693 | 0.25136 | 0.25136 |
| 400 | 0.61990 | 0.52692 | 0.52692 | 0.45097 | 0.21914 | 0.21914 |
| 500 | 0.60115 | 0.53819 | 0.53819 | 0.27795 | 0.19537 | 0.19537 |
| 600 | 0.59095 | 0.55409 | 0.55409 | 0.25772 | 0.17847 | 0.17847 |
| 700 | 0.44697 | 0.37469 | 0.37469 | 0.23771 | 0.16559 | 0.16559 |
| 800 | 0.37319 | 0.29774 | 0.29774 | 0.28905 | 0.15504 | 0.15504 |
| 900 | 0.34830 | 0.28194 | 0.28194 | 0.29639 | 0.14613 | 0.14613 |
| 1000 | 0.38214 | 0.31977 | 0.31977 | 0.25027 | 0.13866 | 0.13866 |

**Çizelge4.5.(Devam)**

| $\hat{\delta}$ için Bootstrap Kapsama olasılıkları | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\delta}_{(Norm)}$ | $\hat{\delta}_{(Basic)}$ | $\hat{\delta}_{(Perc.)}$ | $\hat{\delta}_{(Norm)}$ | $\hat{\delta}_{(Basic)}$ | $\hat{\delta}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.989 | 0.943 | 0.956 | 0.975 | 0.940 | 0.960 |
| 100 | 0.990 | 0.957 | 0.958 | 0.973 | 0.958 | 0.940 |
| 200 | 0.967 | 0.958 | 0.949 | 0.979 | 0.951 | 0.940 |
| 300 | 0.967 | 0.947 | 0.946 | 0.967 | 0.945 | 0.945 |
| 400 | 0.968 | 0.960 | 0.952 | 0.973 | 0.954 | 0.954 |
| 500 | 0.967 | 0.959 | 0.959 | 0.951 | 0.942 | 0.936 |
| 600 | 0.975 | 0.963 | 0.958 | 0.960 | 0.946 | 0.950 |
| 700 | 0.970 | 0.957 | 0.962 | 0.962 | 0.957 | 0.957 |
| 800 | 0.964 | 0.955 | 0.951 | 0.958 | 0.939 | 0.945 |
| 900 | 0.958 | 0.952 | 0.947 | 0.963 | 0.948 | 0.947 |
| 1000 | 0.971 | 0.956 | 0.949 | 0.954 | 0.946 | 0.945 |

**Çizelge4.5.(Devam)**

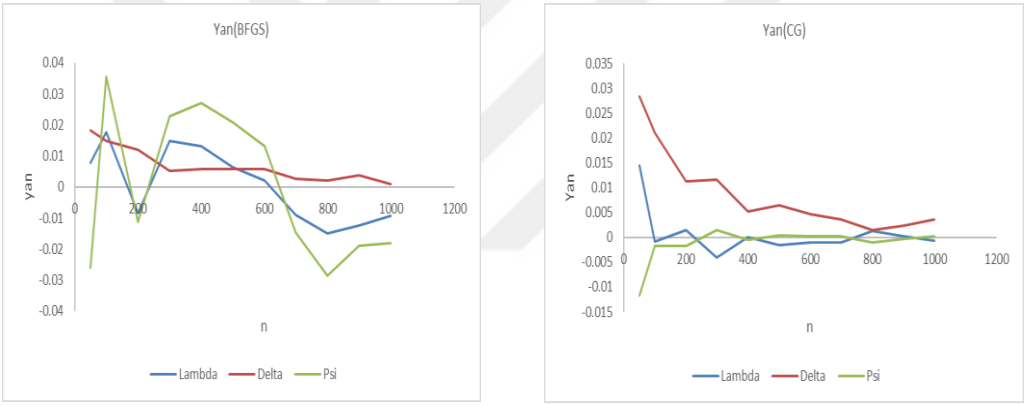
| $\hat{\delta}$ için Bootstrap Genişlikleri | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\delta}_{(Norm)}$ | $\hat{\delta}_{(Basic)}$ | $\hat{\delta}_{(Perc.)}$ | $\hat{\delta}_{(Norm)}$ | $\hat{\delta}_{(Basic)}$ | $\hat{\delta}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.82095 | 0.75588 | 0.75588 | 0.78735 | 0.75238 | 0.75238 |
| 100 | 0.55956 | 0.50896 | 0.50896 | 0.53226 | 0.51255 | 0.51255 |
| 200 | 0.39412 | 0.35581 | 0.35581 | 0.41569 | 0.35549 | 0.35549 |
| 300 | 0.32695 | 0.28735 | 0.28735 | 0.31463 | 0.28882 | 0.28882 |
| 400 | 0.27484 | 0.24907 | 0.24907 | 0.33067 | 0.24888 | 0.24888 |
| 500 | 0.24812 | 0.22262 | 0.22262 | 0.24860 | 0.22233 | 0.22233 |
| 600 | 0.23217 | 0.20246 | 0.20246 | 0.22851 | 0.20261 | 0.20261 |
| 700 | 0.21643 | 0.18719 | 0.18719 | 0.21076 | 0.18734 | 0.18734 |
| 800 | 0.19736 | 0.17516 | 0.17516 | 0.22170 | 0.17469 | 0.17469 |
| 900 | 0.18805 | 0.16531 | 0.16531 | 0.22014 | 0.16493 | 0.16493 |
| 1000 | 0.18521 | 0.15615 | 0.15615 | 0.19614 | 0.15695 | 0.15695 |

**Çizelge4.5.(Devam)**

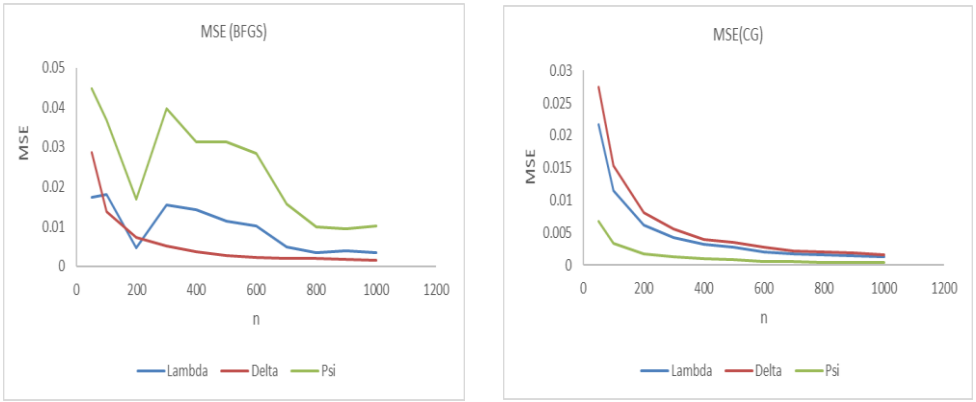
| $\psi$ için Bootstrap Kapsama olasılıkları | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\psi_{(Norm)}$ | $\psi_{(Basic)}$ | $\psi_{(Perc.)}$ | $\psi_{(Norm)}$ | $\psi_{(Basic)}$ | $\psi_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.968 | 0.948 | 1 | 0.969 | 0.951 | 0.967 |
| 100 | 0.925 | 0.877 | 1 | 0.956 | 0.949 | 0.951 |
| 200 | 0.967 | 0.942 | 0.997 | 0.964 | 0.944 | 0.949 |
| 300 | 0.894 | 0.805 | 1 | 0.952 | 0.938 | 0.939 |
| 400 | 0.890 | 0.801 | 1 | 0.954 | 0.939 | 0.948 |
| 500 | 0.919 | 0.888 | 1 | 0.942 | 0.926 | 0.937 |
| 600 | 0.941 | 0.900 | 1 | 0.956 | 0.95 | 0.951 |
| 700 | 0.932 | 0.883 | 1 | 0.956 | 0.952 | 0.952 |
| 800 | 0.968 | 0.921 | 1 | 0.953 | 0.948 | 0.951 |
| 900 | 0.949 | 0.928 | 0.999 | 0.962 | 0.951 | 0.946 |
| 1000 | 0.961 | 0.934 | 0.998 | 0.951 | 0.942 | 0.948 |

**Çizelge4.5(Devam)**

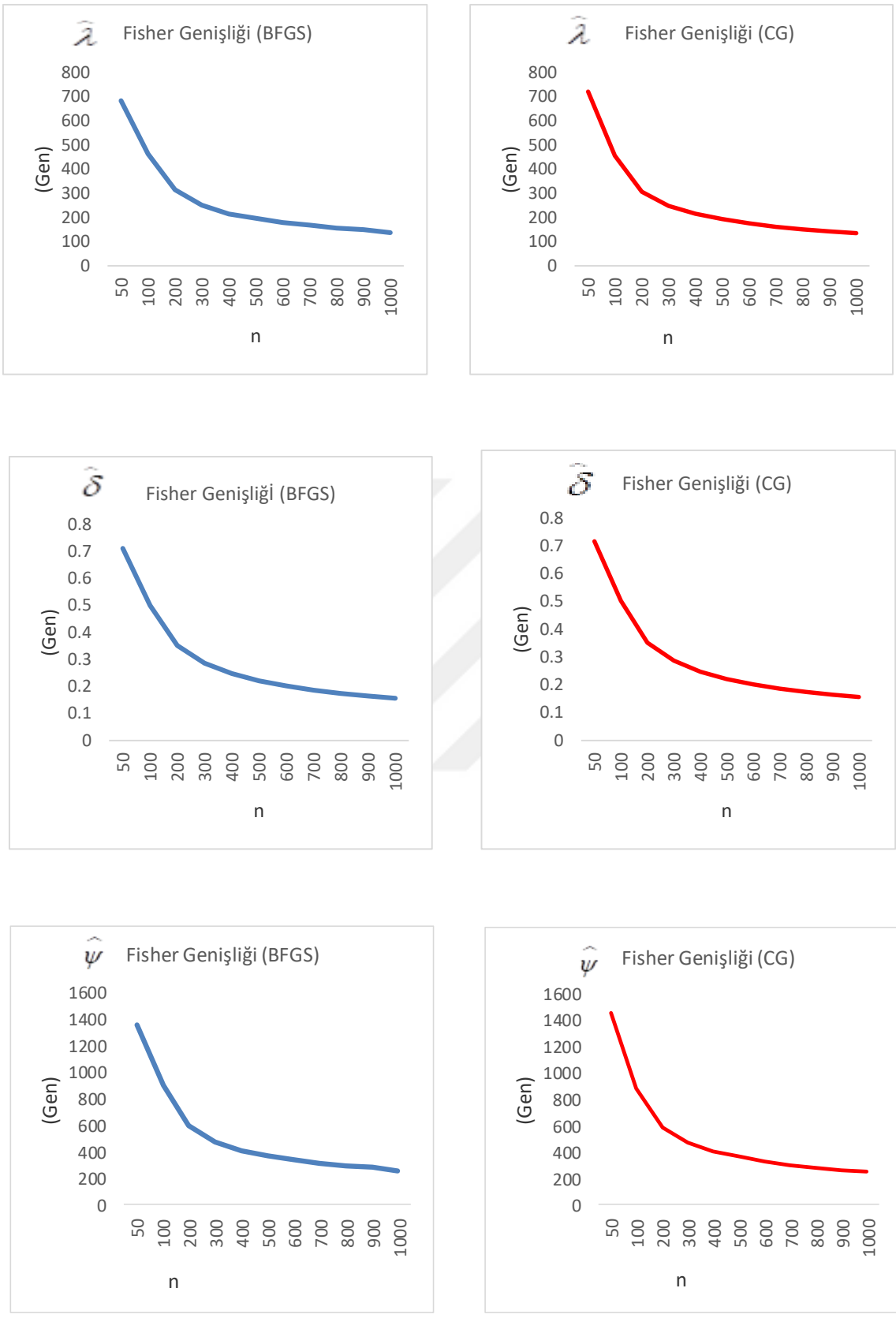
| $\psi$ için Bootstrap Genişlikleri | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\psi_{(Norm)}$ | $\psi_{(Basic)}$ | $\psi_{(Perc.)}$ | $\psi_{(Norm)}$ | $\psi_{(Basic)}$ | $\psi_{(Perc.)}$ |
| 50 | 1.18472 | 1.17159 | 1.17159 | 0.39735 | 0.33189 | 0.33189 |
| 100 | 1.04802 | 1.04630 | 1.04630 | 0.27007 | 0.23269 | 0.23269 |
| 200 | 0.75610 | 0.78307 | 0.78307 | 0.26569 | 0.16397 | 0.16397 |
| 300 | 0.97543 | 0.95385 | 0.95385 | 0.17897 | 0.13485 | 0.13485 |
| 400 | 0.91544 | 0.88808 | 0.88808 | 0.24436 | 0.11662 | 0.11662 |
| 500 | 0.98794 | 0.98037 | 0.98037 | 0.14743 | 0.10439 | 0.10439 |
| 600 | 0.97752 | 1.00995 | 1.00995 | 0.13685 | 0.09529 | 0.09529 |
| 700 | 0.70691 | 0.69748 | 0.69748 | 0.12559 | 0.08840 | 0.08840 |
| 800 | 0.56901 | 0.57282 | 0.57282 | 0.15464 | 0.08274 | 0.08274 |
| 900 | 0.55173 | 0.55574 | 0.55574 | 0.16006 | 0.07793 | 0.07793 |
| 1000 | 0.60442 | 0.61945 | 0.61945 | 0.13316 | 0.07397 | 0.07397 |



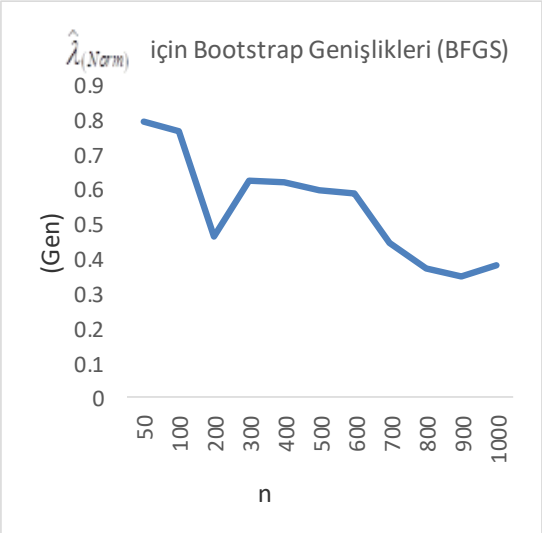

**Şekil 4.13**.EP-W dağılım parametreleri için yan

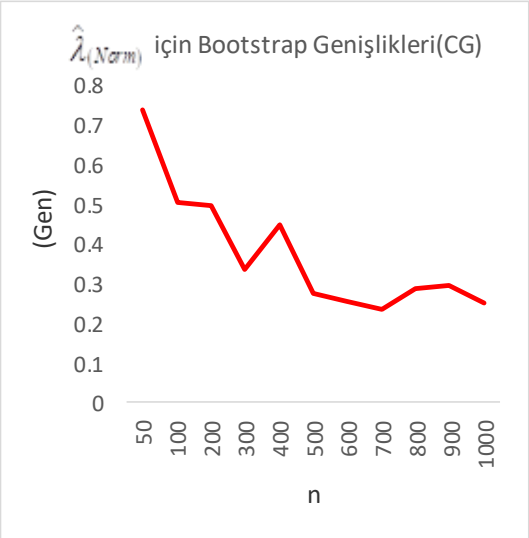


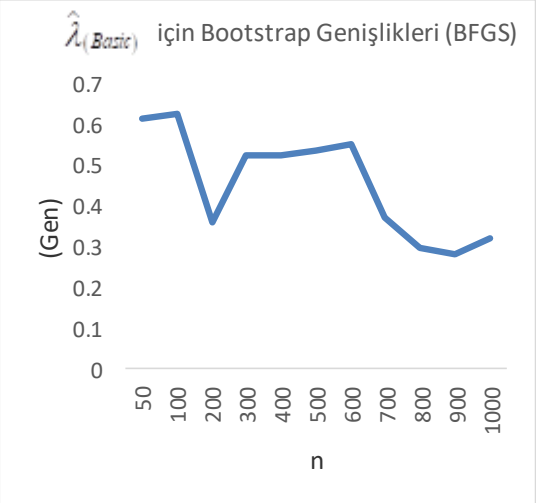

**Şekil 4.14**.EP-W dağılım parametreleri için MSE'ler

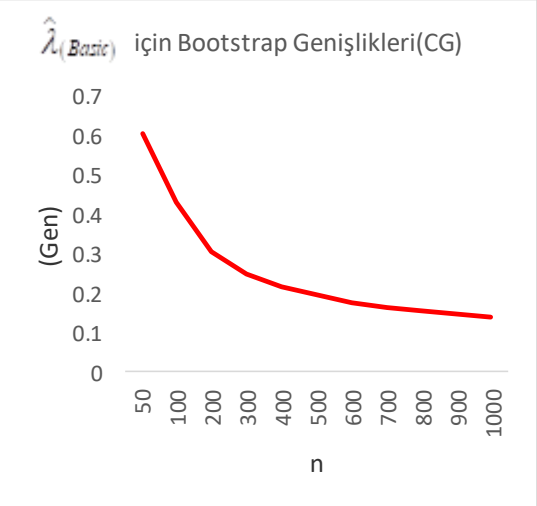


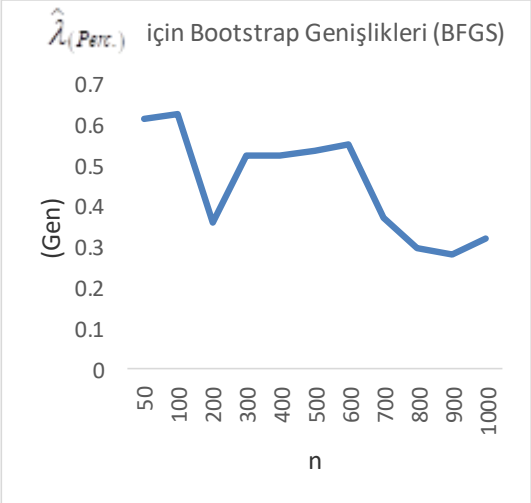

**Şekil 4.15**. EP-W dağılımının çeşitli parametre değerlerine ilişkin Fisher Genişlikleri

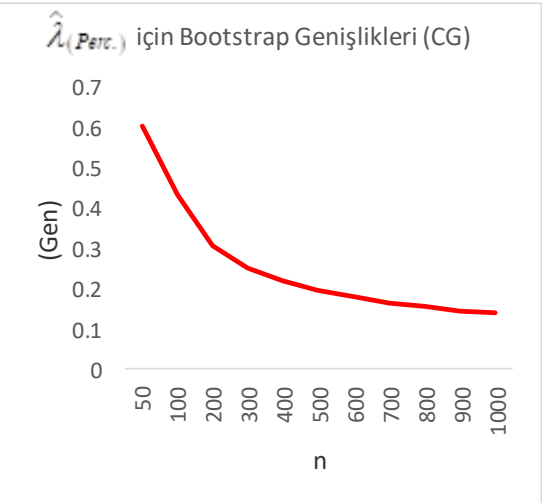

$\hat{\lambda}_{(Norm)}$ için Bootstrap Genişlikleri (BFGS)
(Gen)
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

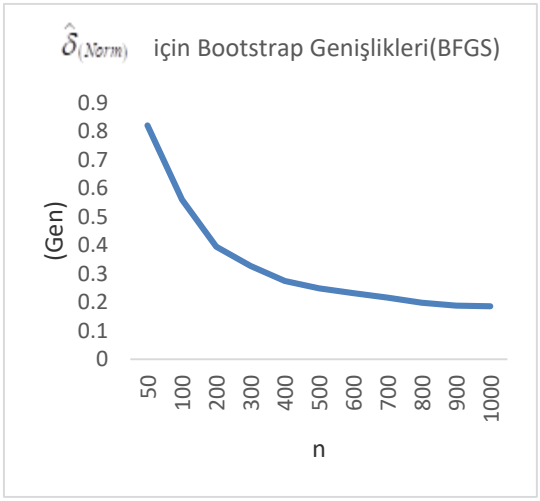

$\hat{\lambda}_{(Norm)}$ için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

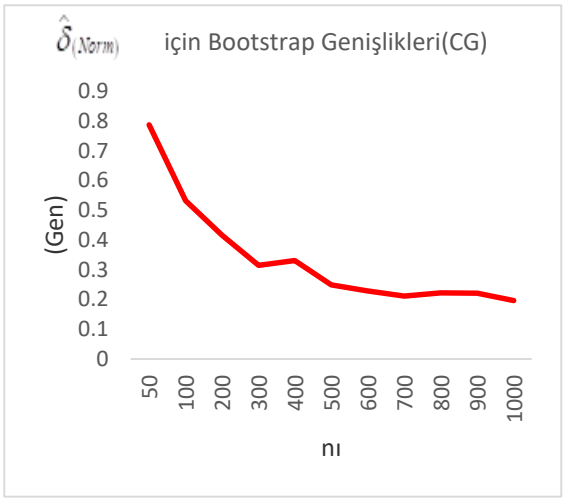

$\hat{\lambda}_{(Bazic)}$ için Bootstrap Genişlikleri (BFGS)
(Gen)
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

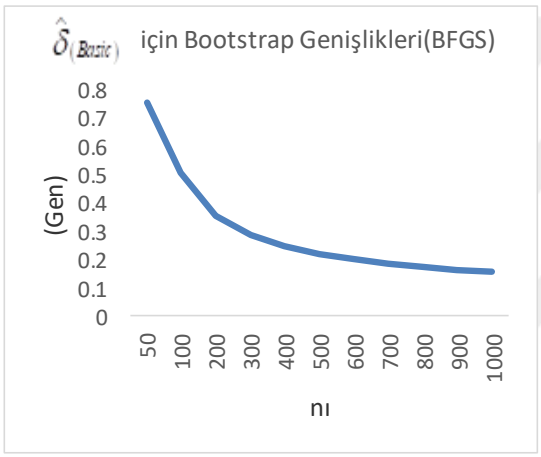

$\hat{\lambda}_{(Bazic)}$ için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

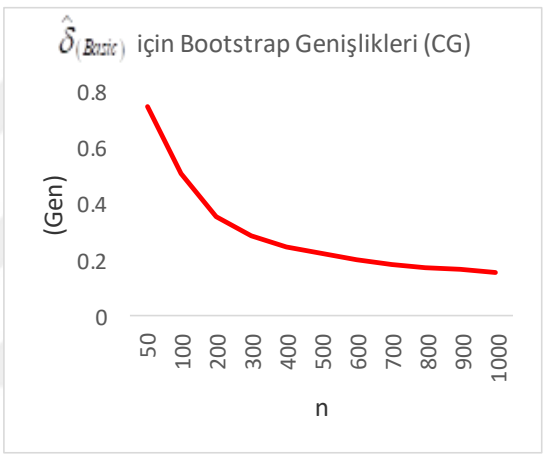

$\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ için Bootstrap Genişlikleri (BFGS)
(Gen)
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

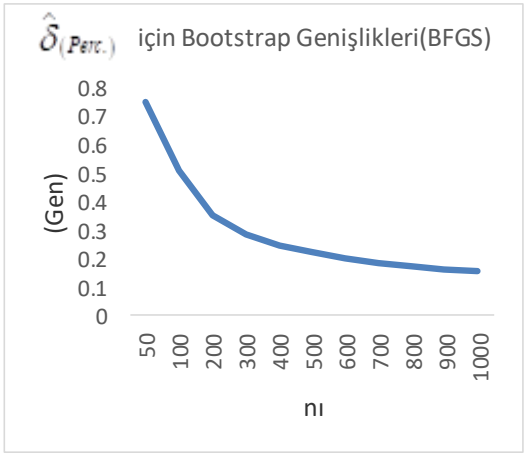

$\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ için Bootstrap Genişlikleri (CG)
(Gen)
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

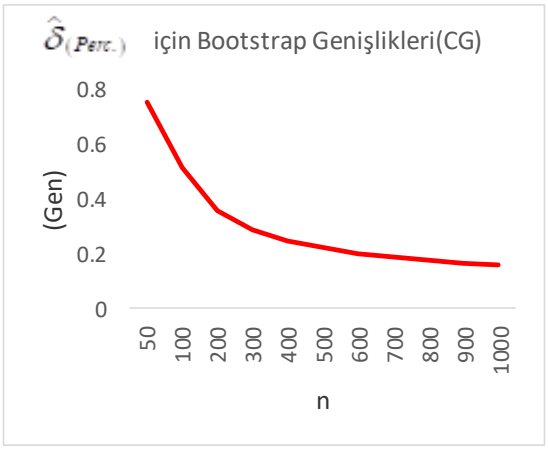

$\hat{\delta}_{(Norm)}$ için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

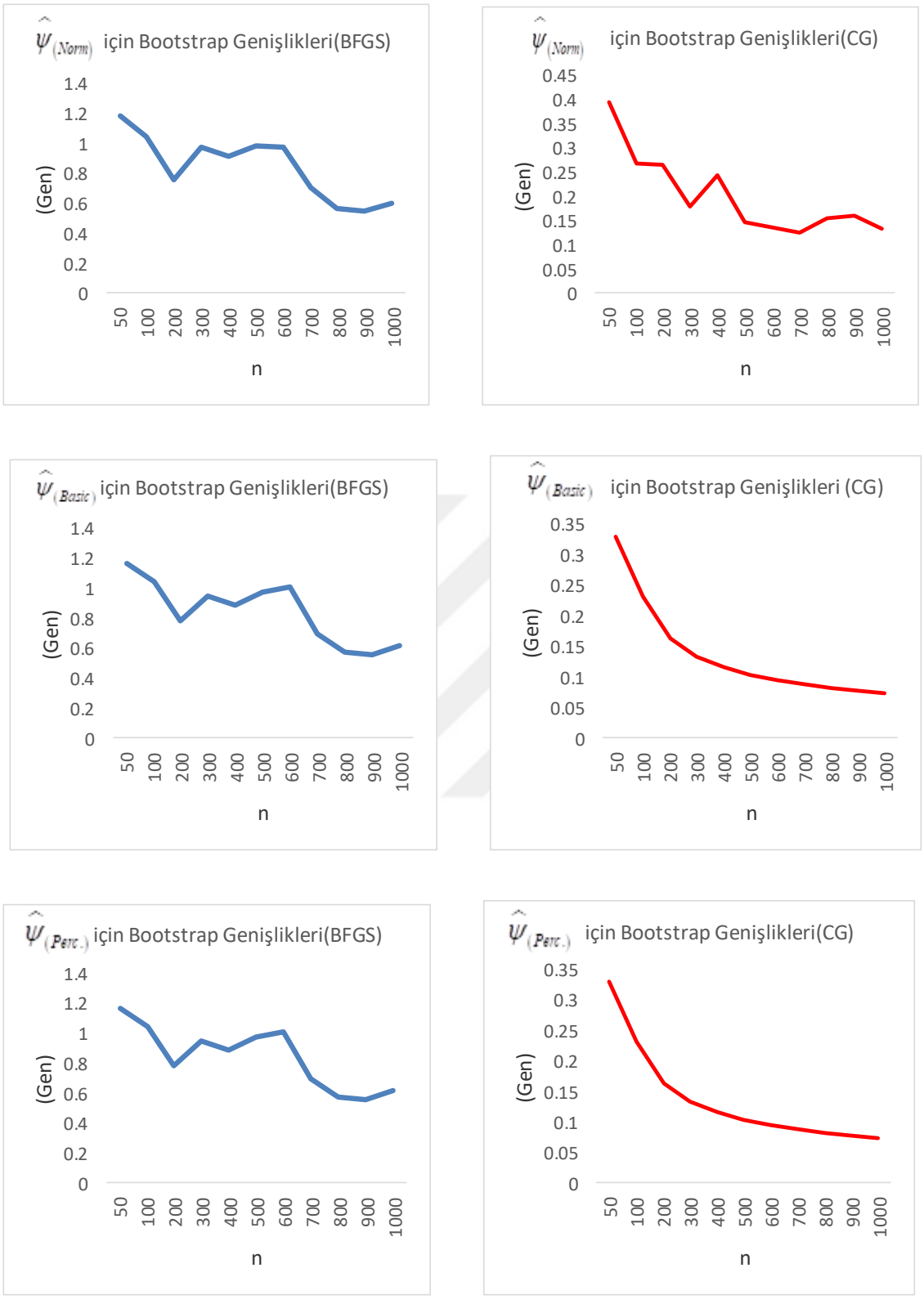

$\hat{\delta}_{(Norm)}$ için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
nı


$\hat{\delta}_{(Bazic)}$ için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
nı


$\hat{\delta}_{(Bazic)}$ için Bootstrap Genişlikleri (CG)
(Gen)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n


$\hat{\delta}_{(Perc.)}$ için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
nı


$\hat{\delta}_{(Perc.)}$ için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n




**Şekil 4.16**. EP-W dağılımının çeşitli parametre değerlerine ilişkin Bootstrap Güven Aralıkları

Yukarıdaki tablolar ve grafikler incelendiğinde her iki farklı parametre değerleri için aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

BFGS ve CG yöntemleri kullanılarak elde edilen EÇO tahmin edicilerinin yan ve MSE değerlerinin örneklem hacmi arttıkça genelde azaldığı ve 0 değerine yaklaştığı görülmüştür. Ayrıca başlangıç noktası olarak gerçek parametre değerleri verildiğinde CG yöntemi ile elde edilen EÇO tahmin edicilerinin yan ve MSE değerlerinin BFGS yöntemine göre daha küçük ve örneklem hacmi arttıkça MSE değerlerinde daha düzenli bir azalmanın olduğu gözlenmiştir.

Parametrelerin BFGS ve CG yöntemli EÇO tahmin edicilerine dayalı asimptotik güven aralıklarının genişliklerinin (Fisher genişliği) $\lambda$ ve $\psi$ parametreleri için çok yüksek olduğu gözlenirken $\delta$ için ise düşük olduğu ve ayrıca $\lambda, \psi$ ve $\delta$ parametreleri için oluşturulan %95 'lik güven aralıklarının kapsama olasılıklarının $\lambda$ ve $\psi$ için hemen hemen her örneklem boyutu için 1 değerini alırken $\delta$ için kapsama olasılıklarının örneklem boyutu arttıkça 0.95 değerine ulaştığı gözlenmiştir. Dolayısıyla fisher aralıklarının sadece $\delta$ için aralık tahmin edicisi olarak kullanılmasının uygun olacağı ancak diğer parametreler için ise bu güven aralıkların kullanılmaması gerektiği söylenebilir. Bu problemden dolayı normal, basic ve percentile isimli üç çeşit Bootstrap güven aralıklarının elde edilmesine ihtiyaç duyulmuştur. BFGS ve CG yöntemlerinin kullanılmasıyla elde edilen EÇO tahmin edicilerine dayalı olarak oluşturulan bootstrap güven aralıklarının genişlikleri incelendiğinde $\lambda, \psi$ ve $\delta$ için CG yöntemli aralık genişliklerinin örneklem boyutunun artmasıyla azaldığı ve sıfır değerine yaklaştığı gözlenmekle beraber bu genişliklerin BFGS yöntemli genişliklere göre genelde daha küçük olduğu gözlenmiştir. Ayrıca $\delta$ için her iki yöntem ile oluşturulan fisher aralıkları ile normal, basic ve percentile bootstrap güven aralıklarının genişliklerinin ve kapsama olasılıklarının örneklem boyutunun artmasıyla birbirine yaklaştığı gözlenirken diğer parametreler için ise normal, basic ve percentile bootstrap güven aralıklarının genişliklerinin birbirlerine yaklaştıkları gözlenmiştir. Son olarak $\lambda, \psi$ ve $\delta$ için CG yöntemli üç çeşit %95 'lik bootstrap güven aralıklarının kapsama olasılıklarının örneklem boyutunun artmasıyla her üç parametre için de 0,95 değerine ulaştığı gözlenmiştir.

Basic ve percentile bootstrap güven aralıklarının konumları ve kapsama olasılıkları farklı olup genişlikleri aynıdır. Ayrıca örneklem boyutu arttıkça CG yöntemli basic ve percentile bootstrap güven aralıklarının genişliklerinde normal bootstrap güven aralıklarına göre daha düzenli bir azalma söz konusu olup daha küçük değerlidir.

## 4.8. Gerçek Veri Analizi

Bu bölümde, EP-W modelinin gerçek yaşama uyumunu incelemek ve diğer dağılımlarla karşılaştırmak için gerçek veri uygulamaları gerçekleştirilmektedir. Dağılımların uygunluklarını karşılaştırmak için (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) ve (3.43) eşitliklerinde formülleri verilen Akaike Bilgi kriteri (AIC), düzeltilmiş Akaike Bilgi kriteri (AICc), Bayescil Bilgi Kriteri (BIC), Hannan-Quinn bilgi kriteri (HQIC) ve Kolmogorov Smirnov istatistiği (KS) ile -2log-olabilirlik değeri uyum iyiliği ölçüleri olarak kullanılmıştır. Veri analizi için iki adet veri seti kullanılmıştır. Birinci veri seti olarak (Dasgupta, 2011) tarafından elde edilen ve 50 gözlemden oluşan gerçek veri seti, Çizelge 4.6'da verilmiştir.

**Çizelge 4.6.** Gerçek veri seti1

| |
|---|
| 0.04 0.02 0.06 0.12 0.14 0.08 0.22 0.12 0.08 0.26 0.24 0.04 0.14 0.16 0.08 0.26 0.32 0.28 0.14 0.16 0.24 0.22 0.12 0.18 0.24 0.32 0.16 0.14 0.08 0.16 0.24 0.16 0.32 0.18 0.24 0.22 0.16 0.12 0.24 0.06 0.02 0.18 0.22 0.14 0.06 0.04 0.14 0.26 0.18 0.16 |

**İkinci veri seti ise** (Andrews ve Herzberg, 2012) gibi bir çok yazar tarafından kullanılan % 90 stres seviyesinde sabit basınca maruz kalan 373 adet çelik yeleğin kırılma ömrü hakkındaki veri setinde 39 gözlem Çizelge 4.7 de verilmiştir.

**Çizelge 4.7.** Gerçek veri seti 2

| |
|---|
| 0.0251, 0.0886, 0.0891, 0.2501, 0.3113, 0.3451, 0.4763, 0.5650, 0.5671, 0.6566, 0.6748, 0.6751, 0.6753, 0.7696, 0.8375, 0.8391, 0.8425, 0.8645, 0.8851, 0.9113, 0.9120, 0.9836, 1.0483, 1.0596, 1.0773, 1.1733, 1.2570, 1.2766, 1.2985, 1.3211, 1.3503, 1.3551, 1.4595, 1.4880, 1.5728, 1.5733, 1.7083, 1.7263, 1.7460. |

Her iki veri seti kullanılarak, EP-W dağılımı ile literatürde mevcut diğer dağılımların bazı uyum iyiliği kriterleri açısından karşılaştırılmalarını ve bu dağılımların bilinmeyen parametrelerine ilişkin EÇO tahminlerini ve bu tahminlere ilişkin BFGS ve CG yöntemli bootstrap güven aralıklarını ve bu aralıkların genişliklerini gösteren değerler Çizelge 4.8-4.13 tablolarında verilmiştir.

**Çizelge 4.8.** Veri seti 1 için seçim kriterleri istatistikleri

| | EP-W | W | Dagum | EE | TEE | TW | LW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LogL | **57.4695** | 55.8918 | 54.2999 | 52.2863 | 53.2803 | 56.0590 | 56.2771 |
| -2LogL | **-114.9390** | -111.7840 | -108.6000 | -104.5725 | -106.5607 | -112.1179 | -112.5540 |
| AIC | **-108.9390** | -107.7840 | -102.6000 | -100.5725 | -100.5607 | -106.1179 | -106.5540 |
| BIC | -103.2029 | **-103.9600** | -96.8637 | -96.7485 | -94.8246 | -100.3819 | -100.8180 |
| AICC | **-108.4172** | -107.5280 | -102.0780 | -100.3172 | -100.0389 | -105.5962 | -106.0320 |
| HQIC | **-106.7546** | -106.3270 | -100.4150 | -99.1163 | -98.3763 | -103.9336 | -104.3700 |
| KS_istat. | **0.0887** | 0.1099 | 0.1058 | 0.1653 | 0.1462 | 0.1070 | 0.1057 |
| p-değeri | **0.8258** | 0.5816 | 0.6308 | 0.1302 | 0.2357 | 0.6162 | 0.6318 |

**Çizelge 4.9.** Veri seti 1 için Parametre tahminleri (standart hatalar)

| Dağılımlar | EÇO tahminleri (Standart hatalar) |
|---|---|
| EP-W | $\hat{\lambda}$=0.9677 (2.0398), $\hat{\delta}$=1.6117 (0.1943), $\psi$=0.0985 (0.324131) |
| W | $\hat{\lambda}$=5.4424 (0.3804), $\hat{\theta}$=2.1195 (0.2463) |
| Dagum | $\hat{\lambda}$=0.0020 (0.0002), $\hat{\delta}$=4.2982 (0.3854), $\beta$=0.3638 (0.0954) |
| EE | $\beta$=11.3601 (1.5683), $\hat{\lambda}$=3.1718 (0.7067) |
| TEE | $\hat{\lambda}$=−0.5471 (0.3189), $\beta$=12.4953 (1.6662), $\alpha$=2.6940 (0.8399) |
| TW | $\hat{\eta}$=−0.2722 (0.4308), $\hat{\lambda}$=5.8549 (0.8098), $\hat{\theta}$=1.9917 (0.3310) |
| LW | $\alpha$=6.4320 (5.4847), $\beta$=1.9363 (0.3315), $\hat{\theta}$=1.1015 (1.4854) |

**Çizelge 4.10.** Veri seti 1 için EP-W dağılımına ilişkin Bootstrap Güven Aralıkları (BFGS)(B=1000)

| parametre | Normal | Basic | Percentile |
|---|---|---|---|
| $\lambda$ | ( 0.7073, 0.9343 ) | ( 0.7076, 0.9524 ) | ( 0.7981, 1.0429 ) |
| $\delta$ | ( 1.584, 2.305 ) | ( 1.549, 2.283 ) | ( 1.675, 2.408 ) |
| $\psi$ | ( 0.1751, 0.4036 ) | ( 0.1607, 0.4061 ) | ( 0.2461, 0.4915 ) |

**Çizelge 4.11.** Veri seti 1 için EP-W dağılımına ilişkin Bootstrap Güven Aralıkları(CG)(B=1000)

| parametre | Normal | Basic | Percentile |
|---|---|---|---|
| $\lambda$ | (0.7899, 0.9538) | ( 0.8401, 0.9039) | ( 0.8466, 0.9104) |
| $\delta$ | (1.5680, 2.3520) | ( 1.6050, 2.3040) | ( 1.6540, 2.3530) |
| $\psi$ | (0.2121, 0.4463) | ( 0.2848, 0.3721) | ( 0.2800, 0.3674) |

**Çizelge 4.12.** Veri seti 2 için seçim kriterleri istatistikleri

| | EP-W | W | EE | TEE | TW | LW |
|---|---|---|---|---|---|---|
| LogL | **-24.5278** | -27.4753 | -31.5380 | -29.7721 | -26.8483 | -26.5088 |
| -2LogL | **49.0556** | 54.9506 | 63.0761 | 59.5441 | 53.6966 | 53.0177 |
| AIC | **55.0556** | 58.9506 | 67.0761 | 65.5441 | 59.6966 | 59.0177 |
| BIC | **60.0462** | 62.2777 | 70.4032 | 70.5348 | 64.6873 | 64.0084 |
| AICc | **55.7413** | 59.2839 | 67.4094 | 66.2298 | 60.3823 | 59.7034 |
| HQIC | **56.8462** | 60.1443 | 68.2698 | 67.3347 | 61.4872 | 60.8083 |
| KS_istat. | **0.0882** | 0.1174 | 0.1705 | 0.1449 | 0.1010 | 0.0983 |
| p-değeri | **0.8957** | 0.6133 | 0.1845 | 0.3521 | 0.7842 | 0.8102 |

**Çizelge 4.13.**Veri seti 2 için Parametre tahminleri (standart hatalar)

| Dağılımlar | EÇO tahminleri (Standart hatalar) |
|---|---|
| EP-W | $\hat{\lambda}$=0.7230 (26.2577), $\hat{\delta}$=1.5428 (0.2166), $\psi$=0.9908 (55.5131) |
| W | $\hat{\lambda}$=0.9551 (0.0815), $\hat{\theta}$=1.9495 (0.2649) |
| EE | $\beta$=1.6428 (0.2700), $\hat{\lambda}$=2.1974 (0.5054) |
| TEE | $\hat{\lambda}$=−0.6665 (0.2398), $\beta$=1.8684 (0.2917), $\alpha$=1.8064 (0.5264) |
| TW | $\hat{\eta}$=−0.4743(0.3331), $\hat{\lambda}$=1.0935 (0.1442), $\hat{\theta}$=1.7468 (0.2957) |
| LW | $\alpha$=1.7644 (1.3833), $\beta$=1.7022 (0.2922), $\hat{\theta}$=0.5949(0.6240) |

**Çizelge 4.14.** Veri seti 2 için EP-W dağılımına ilişkin Bootstrap Güven Aralıkları (BFGS)(B=1000)

| parametre | Normal | Basic | Percentile |
|---|---|---|---|
| $\lambda$ | (0, 0.9546) | (0.2501, 0.4890) | (0.3791, 0.6179) |
| $\delta$ | ( 0.4020, 1.6570) | (0.2600, 1.4630) | (0.7430, 1.9460) |
| $\psi$ | ( 0.9250, 1.5180) | (0.9260, 1.5110) | (0.9170, 1.5020) |

**Çizelge 4.15.** Veri seti 2 için EP-W dağılımına ilişkin Bootstrap Güven Aralıkları (CG)(B=1000)

| parametre | Normal | Basic | Percentile |
|---|---|---|---|
| $\lambda$ | (0, 1.9486) | (0, 0.4882) | (0.3798, 4.7031) |
| $\delta$ | (0.2150, 1.9660) | (0.2990, 2.7730) | (0, 1.9070) |
| $\psi$ | (0.6520, 1.9020) | (1.1940, 2.8680) | (0, 1.2340) |

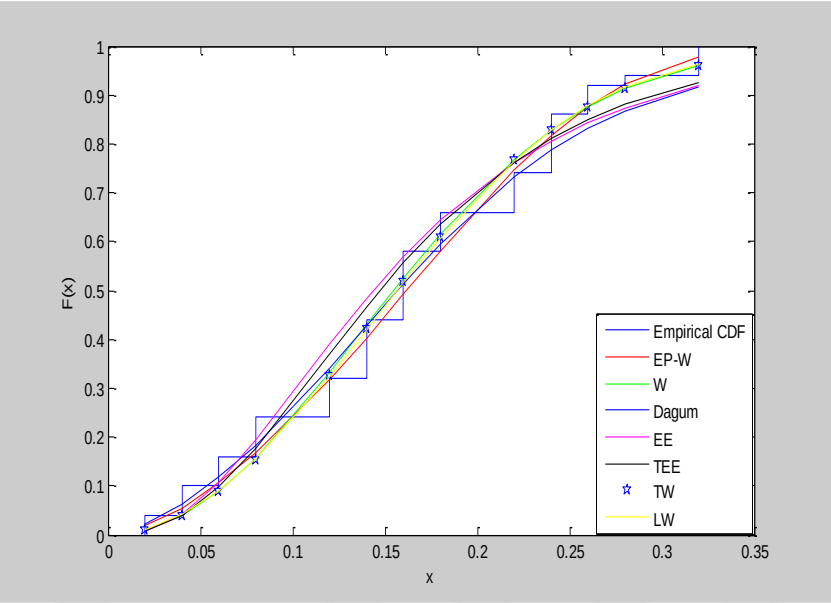
Bu iki veri seti için yukarıdaki tablolar incelendiğinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

Çizelge 4.10. ve 4.11 ‘den görüldüğü üzere genelde CG ile elde edilen Bootstrap güven aralıklarının BFGS yöntemine göre genelde daha dar olduğundan bu veri seti için CG ile elde edilen güven aralıklarının kullanılması önerilir.

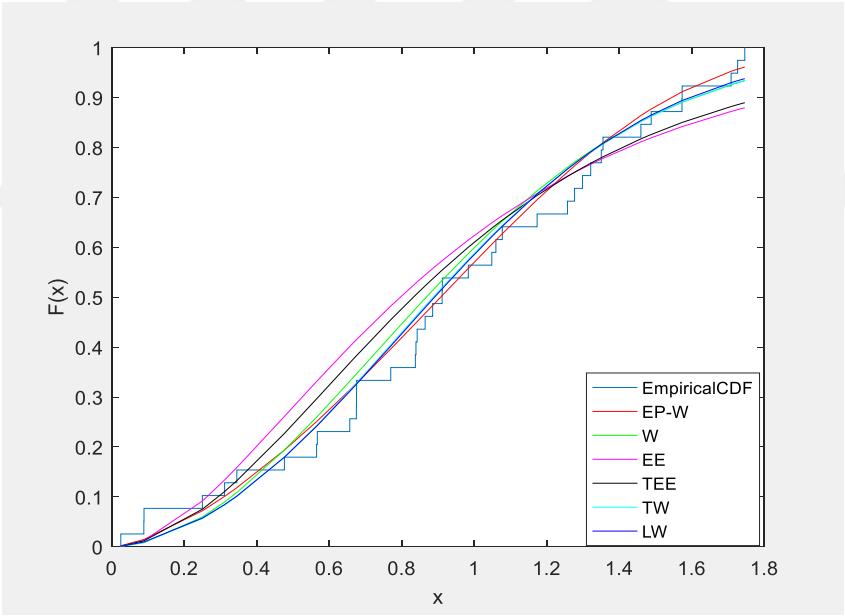
Çizelge 4.14. ve 4.15 ’den görüldüğü üzere genelde BFGS ile elde edilen Bootstrap güven aralıklarının CG yöntemine göre daha dar olduğundan bu veri seti için BFGS ile elde edilen güven aralıklarının kullanılması önerilir.

Çizelge 4.10. ve 4.11 ile Çizelge 4.14. ve 4.15 ’deki güven aralıklarından en dar olan aralık basic veya percentile güven aralıkları olduğundan her iki veri seti için de basic veya percentile Bootstrap güven aralıklarının kullanılması önerilir.

İlk veri seti için EP-W dağılımının BIC dışındaki uyum iyiliği kriterleri açısından Weibull, Dagum, EE, TEE, TW ve LW dağılımlarına göre daha iyi uyum sağladığı görülürken ikinci veri seti için EP-W dağılımının tüm uyum iyiliği kriterleri açısından Weibull, EE, TEE, TW ve LW dağılımlarına uyum sağladığı görülmüştür. Karşılaştırılan dağılımların teorik dağılım fonksiyonları ile veri setlerine dayalı ampirik dağılım fonksiyonlarının grafik gösterimleri ise Şekil 4.17 ve Şekil 4.18 ’de verilmiştir.




**Şekil 4.17**. 1. Veri seti için dağılımlara ilişkin uyum iyiliği grafikleri




**Şekil 4.18**. 2. Veri seti için dağılımlara ilişkin uyum iyiliği grafikleri

# 5. ÜSTEL GÜÇ-CHEN DAĞILIMI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Üstel Güç (Power)-X dağılımlar ailesinin ikinci alt modeli olarak azalan ve küvet bozulma oranına sahip verilerin modellenmesi için kullanılabilecek Üstel Güç-Chen (EP-Ch) isimli yeni bir dağılım elde edilmiştir. Bu dağılım için bazı istatistiksel özellikler incelenmiş ve bu dağılımın bilinmeyen parametreleri için nokta ve aralık tahmin edicileri elde edilerek bu tahmin edicilerin performanslarını görmek için bir Monte-Carlo simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu dağılımın uygulanabilirliğini göstermek için gerçek veri setlerinin, EP-Ch modeli ve diğer modellerle olan uyumu karşılaştırılmıştır.

## 5.1. Üstel Güç-Chen Dağılımı

Üstel Güç - Chen (EP-Ch) dağılımı, (4.2) denklemindeki $G(x)$ yerine (3.4) eşitliğinde tanımlanan Chen$(\lambda,\theta)$ dağılımına sahip bir $X$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu yazılarak elde edilir. Bu durumda, $(\alpha,\beta,\lambda,\theta)$ parametreli EP-Ch dağılımı için df, oyf, hf, thf ve güvenilirlik fonksiyonu (gf) sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} F(x;\alpha,\beta,\lambda,\theta) &= \int_0^{\lambda\left(e^{x^\theta}-1\right)} t^{\beta-1}\alpha^{-\beta}\beta\exp\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)\exp\left(1-\exp\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)dt \\ &= 1-\exp\left(1-\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\beta\left(e^{x^\theta}-1\right)^\beta\right)\right), \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} f(x;\alpha,\beta,\lambda,\theta) &= \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\beta\left(e^{x^\theta}-1\right)^{\beta-1}x^{\theta-1}\theta\beta\exp(x^\theta)\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\beta\left(e^{x^\theta}-1\right)^\beta\right)\times \\ &\quad\times\exp\left(1-\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\beta\left(e^{x^\theta}-1\right)^\beta\right)\right), \end{aligned} \tag{5.2}$$

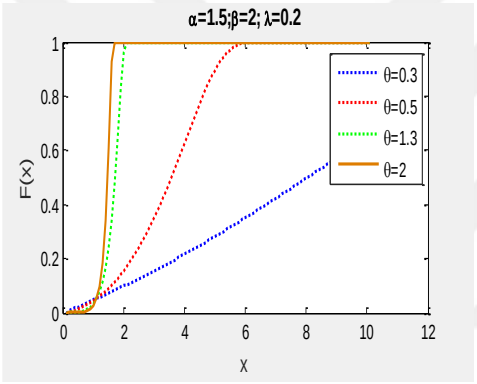
$$\begin{aligned} h(x;\alpha,\beta,\lambda,\theta) &= \frac{f(x)}{1-F(x)} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\beta\left(e^{x^\theta}-1\right)^{\beta-1}x^{\theta-1}\theta\beta e^{x^\theta}\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\beta\left(e^{x^\theta}-1\right)^\beta\right), \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$r(x)=\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta-1}x^{\theta-1}\theta\beta e^{x^{\theta}}}{1-\exp\left(1-\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)\right)\right)}\times \tag{5.4}$$

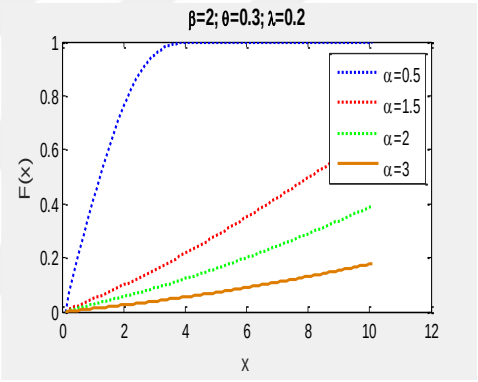
$$\times\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta}\right)\exp\left(1-\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta}\right)\right),$$

$$S(x;\alpha,\beta,\lambda,\theta)=\exp\left(1-\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta}\right)\right). \tag{5.5}$$

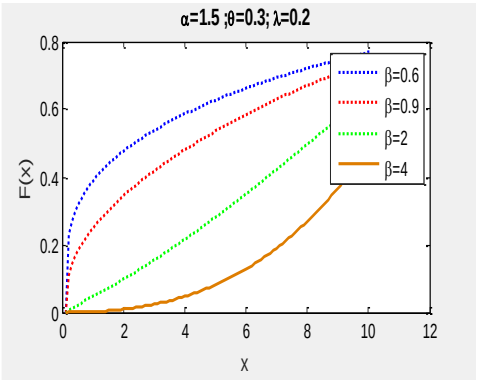
EP-Ch$(\alpha,\beta,\lambda,\theta)$ dağılımının çeşitli parametre değerleri için df, oyf, hf ve thf 'nunun grafikleri Şekil 5.1. - 5.4'de verilmiştir.



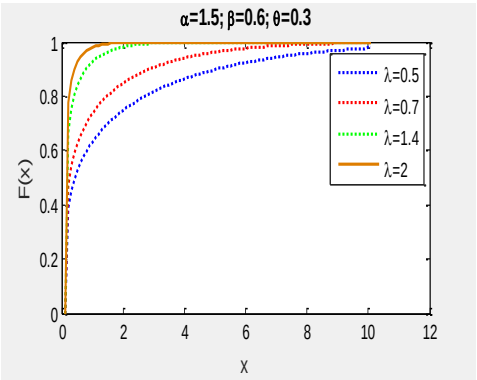

$\alpha=1.5,\beta=2,\lambda=0.2$ ve $\theta=0.3,0.5,1.3,2$




$\beta=2,\theta=0.3,\lambda=0.2$ ve $\alpha=0.5,1.5,2,3$

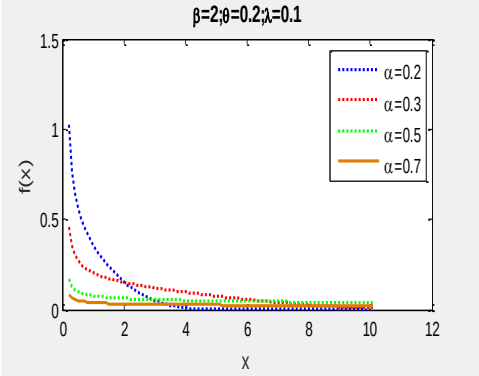


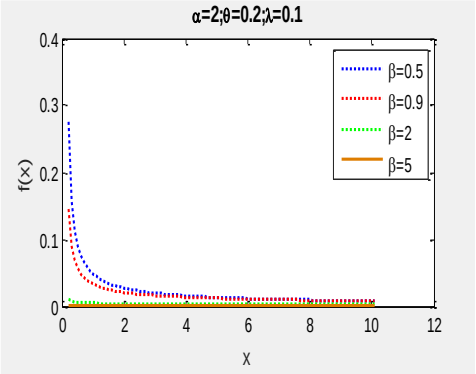

$\alpha=1.5,\theta=0.3,\lambda=0.2$ ve $\beta=0.6,0.9,2,4$




$\alpha=1.5,\beta=0.6,\theta=0.3$ ve $\lambda=0.5,0.7,1.4,2$

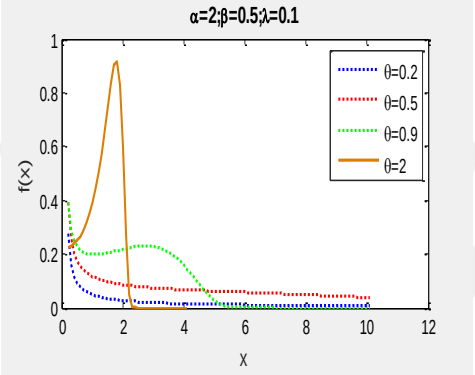
**Şekil 5.1.** EP-Ch dağılımına ilişkin df' nunun grafikleri

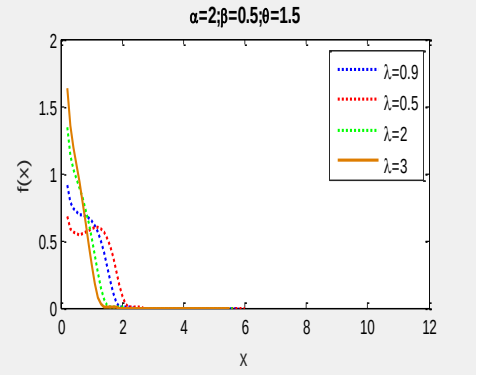



$\beta = 2, \theta = 0.2, \lambda = 0.1$ ve $\alpha = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7$

$\alpha = 2, \theta = 0.2, \lambda = 0.1$ ve $\beta = 0.5, 0.9, 2, 5$

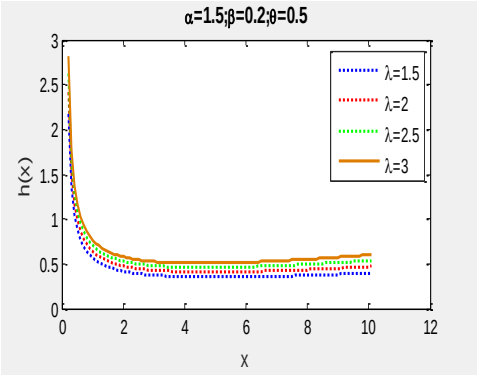


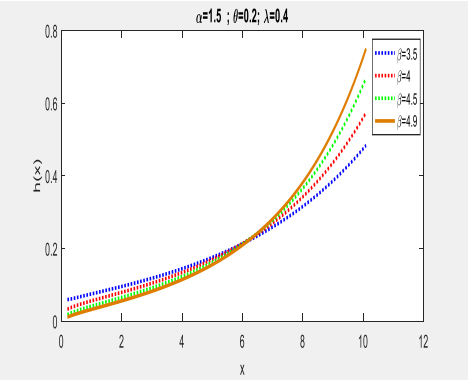




$\alpha = 2, \beta = 0.5, \lambda = 0.1$ ve $\theta = 0.2, 0.5, 0.9, 2$

$\alpha = 2, \beta = 0.5, \theta = 1.5$ and $\lambda = 0.9, 0.5, 2, 3$

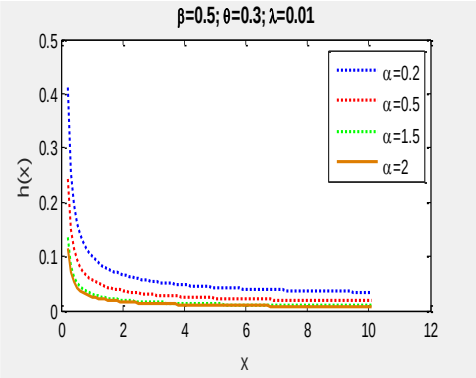
**Şekil 5.2.** EP-Ch dağılımına ilişkin oyf' nunun grafikleri



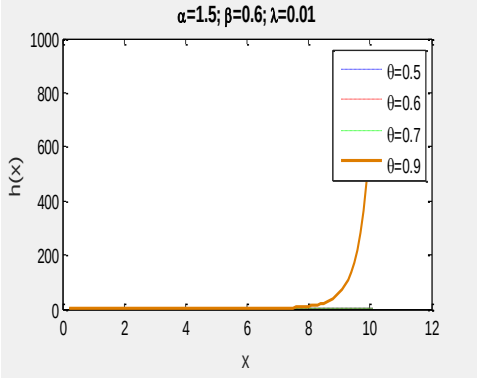




$\alpha = 1.5, \beta = 0.2, \theta = 0.5$ ve $\lambda = 1.5, 2, 2.5, 3$

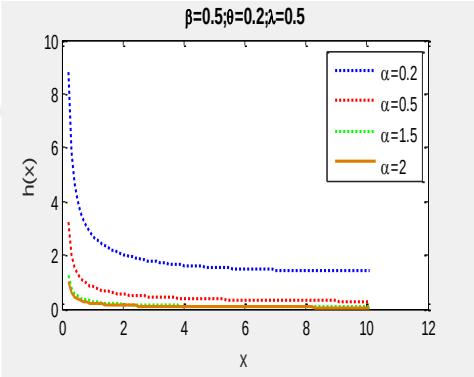
$\alpha = 1.5, \theta = 0.2, \lambda = 0.4$ ve $\beta = 3.5, 4, 4.5, 4.9$



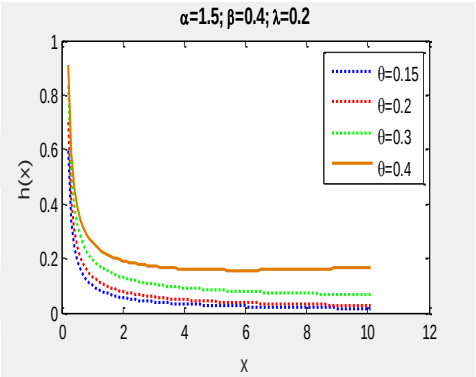

$\beta = 0.5, \theta = 0.3, \lambda = 0.01$ ve $\alpha = 0.2, 0.5, 1.5, 2$



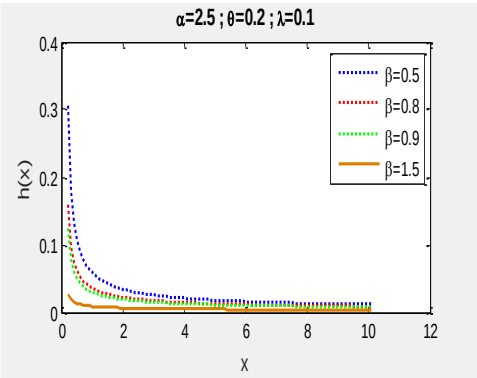

$\alpha = 1.5, \beta = 0.6, \lambda = 0.01$ *ve* $\theta = 0.5, 0.6, 0.7, 0.9$




$\beta = 0.5, \theta = 0.2, \lambda = 0.5$ ve $\alpha = 0.2, 0.5, 1.5, 2$

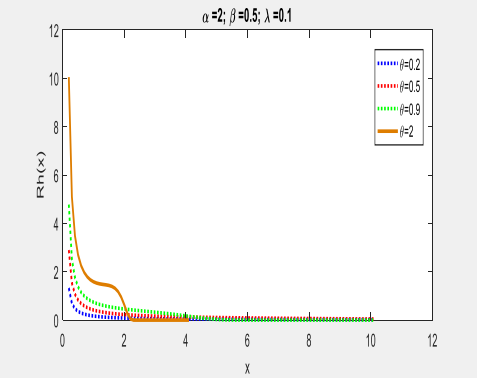



$\alpha = 1.5, \beta = 0.4, \lambda = 0.2$ ve $\theta = 0.15, 0.2, 0.3, 0.4$

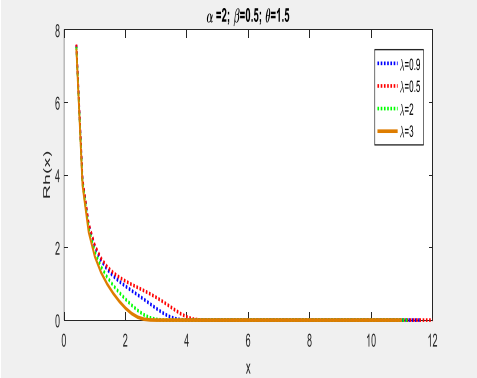



$\alpha = 2.5, \theta = 0.2, \lambda = 0.1$ *ve* $\beta = 0.5, 0.8, 0.9, 1.5$

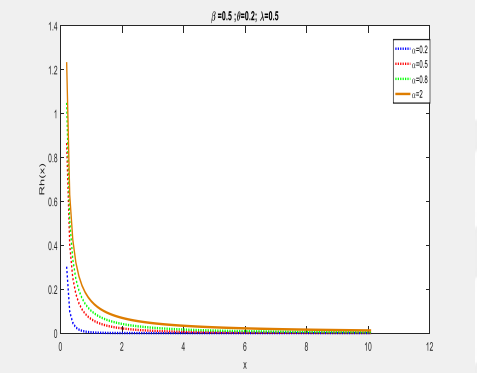
**Şekil 5.3** EP-Ch dağılımına ilişkin hf' nunun grafikleri



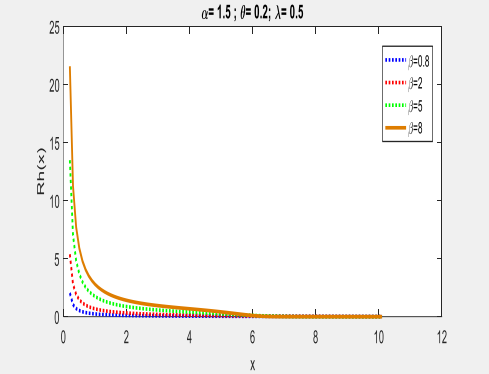

$\alpha = 2, \beta = 0.5, \lambda = 0.1$ ve $\theta = 0.2, 0.5, 0.9, 2$




$\alpha = 2, \beta = 0.5, \theta = 1.5$ ve $\lambda = 0.9, 0.5, 2, 3$




$\beta = 0.5, \theta = 0.2, \lambda = 0.5$ ve $\alpha = 0.2, 0.5, 0.8, 2$




$\alpha = 1.5, \theta = 0.2, \lambda = 0.5$ *ve* $\beta = 0.8, 2, 5, 8$

**Şekil 5.4** EP-Ch dağılımına ilişkin thf' nunun grafikleri

## 5.2. EP-Ch Dağılımı için Bazı İstatistiksel Özelliklerin incelenmesi

### 5.2.1. EP-Ch Dağılımı için Rasgele Sayı Üreteci

EP-Ch $(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ dağılımından rasgele sayılar üretmek için ters dönüşüm yöntemi kullanıldığında rasgele sayı üreteci

$$F(x) = u \Rightarrow x = \theta^{-1} \log\left( \exp\left( \beta^{-1} \left( \log\left(\log\left(1 - \log\left(1-u\right)\right)\right) - \beta \log\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)\right) + 1\right)\right) \tag{5.6}$$

şeklinde elde edilir. Burada $u$, Düzgün (0.1) dağılımdan üretilen sayıdır. (5.6) eşitliğinde $u = 0.5$ olarak alınırsa EP-Ch $(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ dağılımına ilişkin ortanca değeri;

$$\text{ortanca} = \theta^{-1} \log\left( \exp\left( \beta^{-1} \left( \log\left(\log\left(1 - \log\left(0.5\right)\right)\right) - \beta \log\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)\right) + 1\right)\right) \tag{5.7}$$

biçiminde elde edilir.

### 5.2.2. Ortalama Kalan Yaşam Fonksiyonu

EP-CH $(\alpha,\beta,\lambda,\theta)$ dağılımının $S(t)$ yaşam fonksiyonuna sahip sürekli bir $T$ rasgele değişkeni için sabit bir t zamanından sonra arta kalan yaşam zamanının beklenen değeri olarak tanımlanan ortalama kalan yaşam fonksiyonu (4.8) eşitliğinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m(t)=E[T-t\,|\,T>t]=\frac{1}{S(t)}\int_t^{\infty} x f(x)\,dx-t$$
$$=\frac{1}{S(t)}\left(\int_t^{\infty} x\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta-1}\beta x^{\theta-1}\theta k(x,\alpha,\beta,\lambda,\theta)dx\right)-t \tag{5.8}$$

Burada $k(x,\alpha,\beta,\lambda,\theta)=\exp\left(x^{\theta}+\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta}+1-\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta}\right)\right)$ biçimindedir.

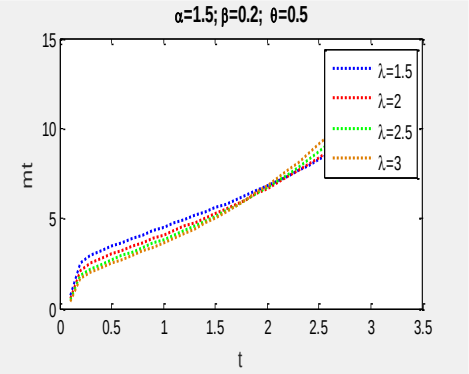
(5.8) eşitliğinde $u=\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{(x^{\theta})}-1\right)^{\beta}\right)$ dönüşümünün uygulanması sonucunda $m(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$m(t)=\frac{1}{S(t)}\left(\int_s^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{\alpha}{\lambda}u^{\frac{1}{\beta}}\right)\right)^{\frac{1}{\theta}}e^{u}e^{1-e^{u}}du\right)-t \tag{5.9}$$

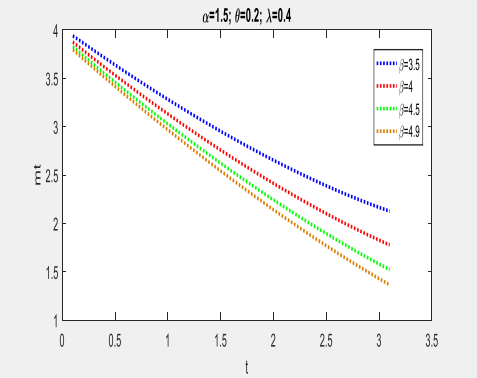
Burada $s=\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{t^{\theta}}-1\right)^{\beta}$ şeklindedir. EP-Ch dağılımının farklı parametre ve t=1,2,3 değerleri için $m(t)$ 'nin değerleri Çizelge 5.1. 'de ve $m(t)$ 'ye ilişkin grafikler ise Şekil 5.5 de verilmiştir.

**Çizelge 5.1.** EP-Ch dağılımına ilişkin $m(t)$ değerleri

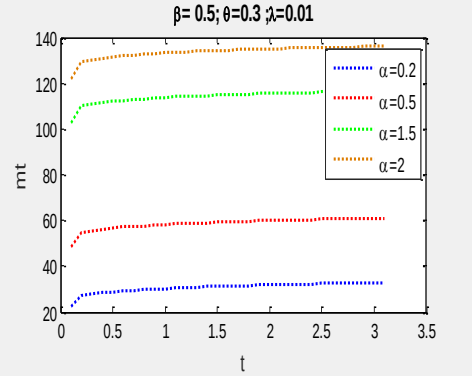
| $(\alpha,\beta,\theta,\lambda)$ | $m(1)$ | $m(2)$ | $m(3)$ |
|---|---|---|---|
| (1.5,0.2,0.5,1.5) | 2.4835 | 3.5196 | 3.8974 |
| (1.5,0.2,0.5,2) | 2.1469 | 3.0917 | 3.7419 |
| (1.5,0.2,0.5,2.5) | 1.9123 | 3.1971 | 3.6839 |
| (1.5,0.2,0.5,3) | 1.7366 | 3.1419 | 3.6825 |
| (1.5,3.5,0.2,0.4) | 5.2385 | 4.8069 | 4.4357 |
| (1.5,4,0.2,0.5) | 5.3489 | 4.8089 | 4.3596 |
| (1.5, 4.5,0.2,0.5) | 5.4704 | 4.8413 | 4.3219 |
| (1.5, 4.9,0.2,0.5) | 5.5695 | 4.8807 | 4.3106 |
| (0.2,0.5,0.3,0.01) | 26.8366 | 28.0333 | 28.7047 |
| (0.5,0.5,0.3,0.01) | 56.9885 | 58.4539 | 59.342 |
| (1.5,0.5,0.3,0.01) | 123.8780 | 125.7015 | 126.8180 |
| (2,0.5,0.3,0.01) | 148.8599 | 150.7784 | 151.9081 |
| (1.5,0.6,0.5,0.01) | 15.5495 | 15.2069 | 14.6775 |
| (1.5,0.6,0.6,0.01) | 9.1948 | 8.6193 | 8.0192 |
| (1.5,0.6,0.7,0.01) | 5.9921 | 5.5846 | 4.9763 |
| (1.5,0.6,0.9,0.01) | 3.1885 | 2.9301 | 2.4320 |
| (0.2,0.5,0.2,0.5) | 0.4386 | 0.5408 | 0.5999 |
| (0.5,0.5,0.2,0.5) | 2.0837 | 3.7894 | 4.3722 |
| (1.5,0.5,0.2,0.5) | 12.5983 | 14.3185 | 15.8991 |
| (2,0.5,0.2,0.5) | 19.8341 | 22.1319 | 23.7242 |
| (1.5,0.4,0.15,0.2) | 433.4017 | 463.4297 | 483.7846 |
| (1.5,0.4,0.2,0.2) | 72.1829 | 78.2397 | 82.4504 |
| (1.5,0.4,0.3,0.2) | 13.0904 | 14.1164 | 15.0439 |
| (1.5,0.4,0.4,0.2) | 5.61672 | 5.8228 | 6.33779 |
| (2.5,0.5,0.2,0.1) | 256.8916 | 266.7358 | 273.5476 |
| (2.5,0.8,0.2,0.1) | 207.7318 | 212.4193 | 215.5393 |
| (2.5,0.9,0.2,0.1) | 204.6623 | 208.2875 | 210.7467 |
| (2.5,1.5,0.2,0.1) | 214.6724 | 215.3445 | 215.6490 |



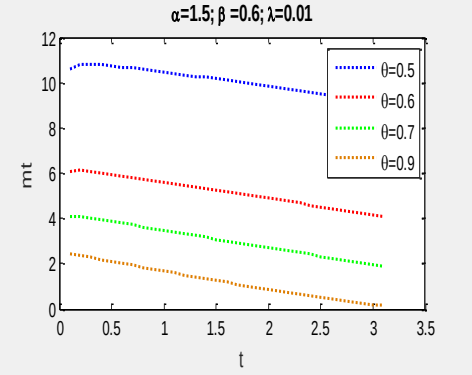

$\alpha = 1.5, \beta = 0.2, \theta = 0.5$ ve $\lambda = 1.5, 2, 2.5, 3$



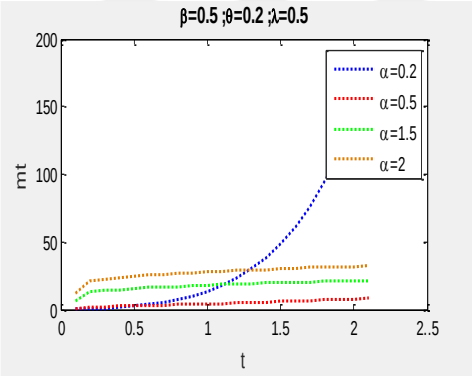

$\alpha = 1.5, \theta = 0.2, \lambda = 0.4$ ve $\beta = 3.5, 4, 4.5, 4.9$



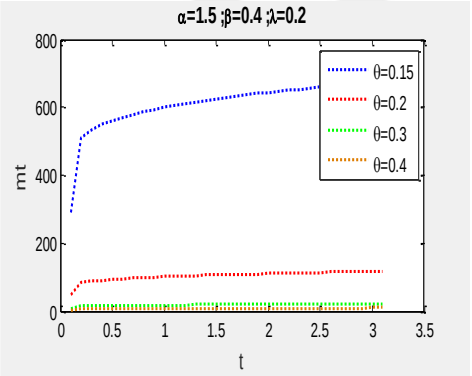

$\beta = 0.5, \theta = 0.3, \lambda = 0.01$ ve $\alpha = 0.2, 0.5, 1.5, 2$



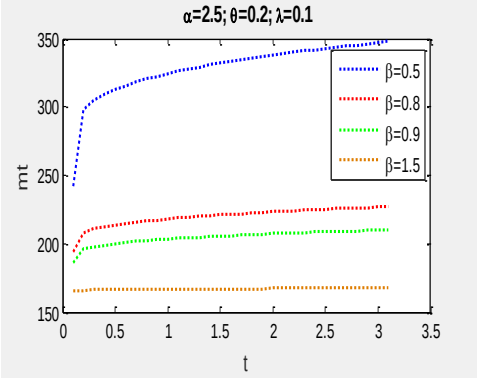

$\alpha = 1.5, \beta = 0.6, \lambda = 0.01$ *ve* $\theta = 0.5, 0.6, 0.7, 0.9$




$\beta = 0.5, \theta = 0.2, \lambda = 0.5$ ve $\alpha = 0.2, 0.5, 1.5, 2$




$\alpha = 1.5, \beta = 0.4, \lambda = 0.2$ ve $\theta = 0.15, 0.2, 0.3, 0.4$




$\alpha = 2.5, \theta = 0.2, \lambda = 0.1$ ve $\beta = 0.5, 0.8, 0.9, 1.5$

**Şekil 5.5.** EP-Ch dağılımı için ortalama kalan yaşam fonksiyonunun grafikleri

### 5.2.3. EP-Ch Dağılımı için Momentler

$(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ parametreli EP-Ch dağılımına sahip bir $X$ rasgele değişkeninin $r$ 'ninci momenti aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$E\left(X^r\right) = \int_0^\infty x^r f(x) dx$$
$$= \int_0^\infty x^r \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\beta \left(e^{x^\theta} - 1\right)^{\beta-1} \beta x^{\theta-1} \theta k(x, \alpha, \beta, \lambda, \theta) dx \quad (5.10)$$

Burada

$$k(x, \alpha, \beta, \lambda, \theta) = \exp\left(x^\theta + \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\beta \left(e^{x^\theta} - 1\right)^\beta + 1 - \exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\beta \left(e^{x^\theta} - 1\right)^\beta\right)\right)$$

biçimindedir. (5.10) denkleminde $u = \left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\beta \left(e^{\left(x^\theta\right)} - 1\right)^\beta\right)$ dönüşümünün uygulanması sonucunda $r$ ' ninci moment aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E\left(X^r\right) = \int_0^\infty \left(\log\left(1 + \frac{\alpha}{\lambda} u^{\frac{1}{\beta}}\right)\right)^{\frac{r}{\theta}} e^u e^{1-e^u} du \quad (5.11)$$

(5.11) denkleminden çarpıklık katsayısı (ÇK) ve basıklık katsayısı (BK) sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır (Nichols ve Padgett, 2006).

$$ÇK = \frac{E\left(X^3\right) - 3E\left(X\right)E\left(X^2\right) + 2\left(E\left(X\right)\right)^3}{\left(E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.12}$$

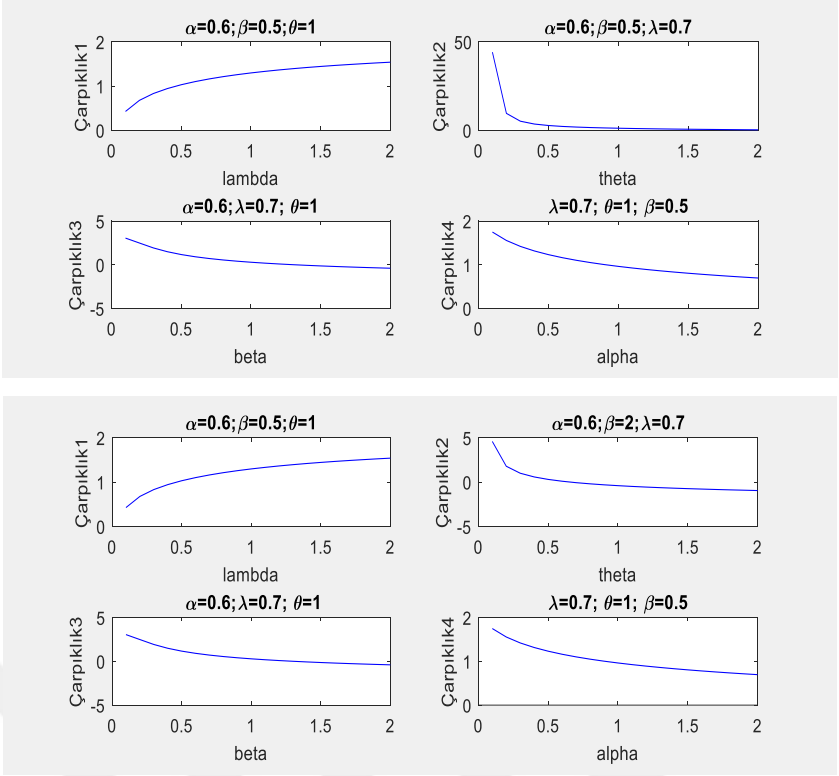
$$BK = \frac{E\left(X^4\right) - 4E\left(X\right)E\left(X^3\right) + 6\left(E\left(X\right)\right)^2 E\left(X^2\right) - 3\left(E\left(X\right)\right)^4}{\left[E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2\right]^2} \tag{5.13}$$

EP-Ch dağılımının farklı parametre değerleri için $r$ ' ninci moment, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları Çizelge 5.2. 'de verilmiştir.

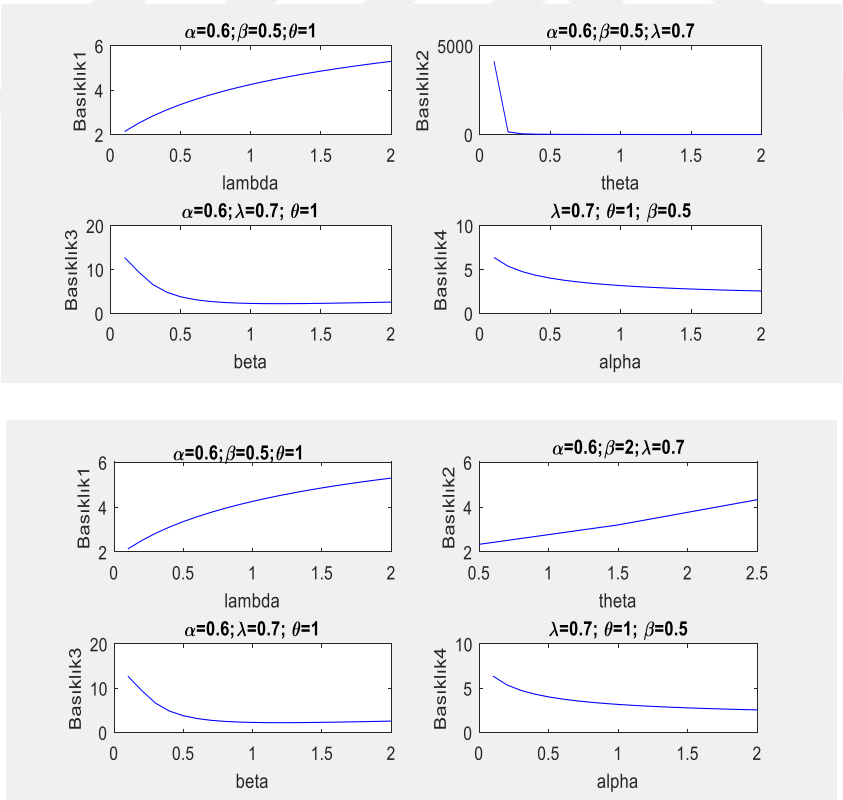
**Çizelge 5.2.** EP-Ch dağılımı için $r$ ' ninci moment, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları

| $(\alpha,\beta,\theta,\lambda)$ | $E(X)$ | $E(X^2)$ | $E(X^3)$ | $E(X^4)$ | $Var(X)$ | Çarpıklık | Basıklık |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(0.6,0.5,1,0.5)$ | 0.4065 | 0.3187 | 0.3163 | 0.3591 | 0.1535 | 1.0300 | 3.3540 |
| $(0.6,0.5,1,1)$ | 0.2414 | 0.1221 | 0.0812 | 0.0632 | 0.0638 | 1.2960 | 4.2560 |
| $(0.6,0.5,1,2)$ | 0.1357 | 0.0413 | 0.0177 | 0.0086 | 0.0229 | 1.5390 | 5.2950 |
| $(0.6,2,0.5,0.7)$ | 0.2424 | 0.0786 | 0.0295 | 0.0122 | 0.0198 | 0.3006 | 2.3390 |
| $(0.6,2,1,0.7)$ | 0.4661 | 0.2424 | 0.1349 | 0.0786 | 0.0251 | -0.4042 | 2.5590 |
| $(0.6,2,2,0.7)$ | 0.6704 | 0.4661 | 0.3327 | 0.2424 | 0.0167 | -0.9544 | 3.8510 |
| $(0.6,0.5,0.5,0.7)$ | 0.2033 | 0.1597 | 0.1906 | 0.2886 | 0.1184 | 2.7020 | 11.990 |
| $(0.6,0.5,1,0.7)$ | 0.3180 | 0.2033 | 0.1675 | 0.1597 | 0.1022 | 1.1610 | 3.7670 |
| $(0.6,0.5,2,0.7)$ | 0.4805 | 0.3180 | 0.2434 | 0.2033 | 0.0871 | 0.2642 | 2.1290 |
| $(0.6,0.5,1,0.7)$ | 0.3180 | 0.2033 | 0.1675 | 0.1596 | 0.1022 | 1.1610 | 3.7670 |
| $(0.6,1,1,0.7)$ | 0.3859 | 0.2019 | 0.1223 | 0.0813 | 0.0529 | 0.2814 | 2.5590 |
| $(0.6,2,1,0.7)$ | 0.4661 | 0.2424 | 0.1349 | 0.0786 | 0.0251 | -0.4042 | 2.2520 |
| $(0.5,0.5,1,0.7)$ | 0.2768 | 0.1573 | 0.1164 | 0.1003 | 0.0807 | 1.2310 | 4.0110 |
| $(1,0.5,1,0.7)$ | 0.4591 | 0.3976 | 0.4318 | 0.5337 | 0.1868 | 0.9616 | 3.1610 |
| $(2,0.5,1,0.7)$ | 0.7158 | 0.8854 | 1.3263 | 2.2171 | 0.3730 | 0.6951 | 2.5440 |

Çarpıklık ve basıklık katsayılarına ilişkin grafikler ise Şekil 5.6 ve Şekil 5.7 'de verilmiştir.




**Şekil 5.6.** EP-Ch dağılımına ilişkin çarpıklık katsayısının grafikleri




**Şekil 5.7.** EP-Ch dağılımına ilişkin basıklık katsayısının grafikleri

### 5.2.4. Moment çıkaran fonksiyon

$(\alpha,\beta,\lambda,\theta)$ parametreli EP-Ch dağılımına sahip bir $X$ rasgele değişkeninin $M_X(t)$ ile gösterilen moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\int_0^{\infty}e^{tX}\,f(x)\,dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_0^{\infty}x^n f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}E\left(X^n\right) \tag{5.14}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_0^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{\alpha}{\lambda}u^{\frac{1}{\beta}}\right)\right)^{\frac{n}{\theta}}e^{u}e^{1-e^{u}}\,du$$

### 5.3. Renyi ve Shannon Entropileri

(3.46) ve (3.47) 'de verilen Shannon ve Renyi entropi formülleri kullanılarak $(\alpha,\beta,\lambda,\theta)$ parametreli EP-Ch dağılımına sahip bir $X$ rasgele değişkenine ilişkin Shannon ve Renyi entropileri sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

$$H_{Shannon}(X)=E\left(-\log\left(f_X\left(X|\alpha,\beta,\theta,\lambda\right)\right)\right)$$

$$=-\int_0^{\infty}f_X(x;\alpha,\beta,\theta,\lambda)\log f_X\left(x|\alpha,\beta,\theta,\lambda\right)dx=$$

$$=-\int_0^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta-1}x^{\theta-1}\theta\beta\exp(x^{\theta})\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta}\right)$$

$$\times\exp\left(1-\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta}\right)\right)$$

$$\times\log\left(\begin{array}{l}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta-1}x^{\theta-1}\theta\beta\exp(x^{\theta})\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta}\right)\\ \times\exp\left(1-\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta}\right)\right)\end{array}\right)dx \tag{5.15}$$

$$H_{Renyi-\gamma}(X)=\frac{1}{1-\gamma}\log\left(\int_0^{\infty}f^{\alpha}{}_{EP-W}(x;\alpha,\beta,\theta,\lambda)dx\right)\qquad\gamma\neq1,\ \gamma>0$$

$$=\frac{1}{1-\gamma}\log\left(\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta-1}x^{\theta-1}\theta\beta\exp(x^{\theta})\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta}\right)\right)^{\gamma}\right) \tag{5.16}$$

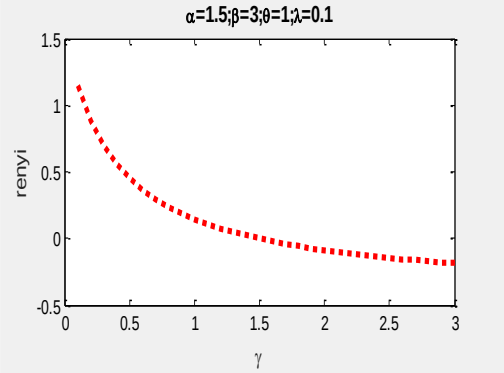
$$\times\left(\exp\left(1-\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{x^{\theta}}-1\right)^{\beta}\right)\right)\right)^{\gamma}dx$$

$\gamma \to 1$ için Renyi entropisi, Shannon entropisine yaklaşır (Principe, 2010). EP-Ch dağılımının çeşitli parametre değerleri için Renyi ve Shannon entropilerinin değerleri çizelge 5.3.'te verilmiştir.

**Çizelge 5.3** EP-Ch dağılımı için Renyi entropisinin değerleri

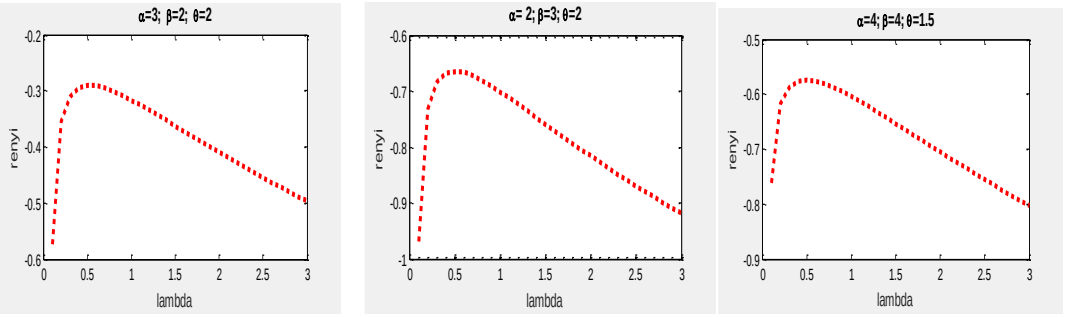
| Parametreler | Renyi entropisi | | Shannon entropisi |
|---|---|---|---|
| $(\alpha,\beta,\theta,\lambda)$ | $\gamma = 0.05$ | $\gamma = 2$ | $\gamma \to 1$ |
| $\alpha = 0.5, \beta = 3, \theta = 2, \lambda = 0.1$ | 0.1726 | -1.179 | -1.021 |
| $\alpha = 1.5, \beta = 3, \theta = 2, \lambda = 0.1$ | 0.3104 | -1.271 | -0.6806 |
| $\alpha = 2, \beta = 3, \theta = 2, \lambda = 0.1$ | 0.3356 | -1.301 | -1.069 |
| $\alpha = 1.5, \beta = 0.5, \theta = 2, \lambda = 0.1$ | 0.7903 | 0.5136 | 0.6042 |
| $\alpha = 1.5, \beta = 1.5, \theta = 2, \lambda = 0.1$ | 0.5325 | -0.5624 | -0.3378 |
| $\alpha = 1.5, \beta = 2, \theta = 2, \lambda = 0.1$ | 0.451 | -0.8571 | -0.6247 |
| $\alpha = 1.5, \beta = 3, \theta = 0.5, \lambda = 0.1$ | 2.236 | 1.547 | 1.71 |
| $\alpha = 1.5, \beta = 3, \theta = 1.5, \lambda = 0.1$ | 0.5671 | -0.8232 | -0.5974 |
| $\alpha = 1.5, \beta = 3, \theta = 2, \lambda = 0.1$ | 0.3104 | -1.271 | -0.6808 |
| $\alpha = 1.5, \beta = 3, \theta = 2, \lambda = 0.5$ | 0.8002 | -1.666 | -0.95 |
| $\alpha = 1.5, \beta = 3, \theta = 2, \lambda = 1.5$ | -0.1984 | -1.255 | -0.9898 |
| $\alpha = 1.5, \beta = 3, \theta = 2, \lambda = 2$ | -0.2906 | -1.311 | -1.121 |

EP-W dağılımı için $\gamma$'nın farklı değerleri için Renyi entropisinin değerlerine ilişkin grafik Şekil 5.8 'de gösterilmiştir




**Şekil 5.8.** Renyi entropisinin değerleri

Şekil 5.8. 'den görüldüğü üzere, bu dağılım için renyi entropisi konkav monoton azalan bir fonksiyondur. Eğer $\gamma$ sıfıra yakın değer alıyor ise entropinin büyük olduğundan söz edilir. $\gamma = 0.5$ için EP-Ch dağılımının çeşitli parametre değerleri için Renyi enropisinin değerlerine ilişkin grafikler Şekil 5.9. da verilmiştir.




$\alpha=2,\beta=3,\theta=2$ ve $\lambda=0.01:0.1:3$ $\alpha=3,\beta=2,\theta=2$ ve $\lambda=0.01:0.1:3$ $\alpha=4,\beta=4,\theta=1.5$ ve $\lambda=0.01:0.1:3$

**Şekil 5.9 .** EP-Ch dağılımının farklı lambda değerleri için Renyi entropisinin değerleri

Şekil 5.9. 'dan görüldüğü üzere $\lambda$ değerinin sabit tutulmayıp arttırıldığı durumda Renyi entropisi değerlerinde önce artış sonra azalış geçekleşmektedir.

## 5.4. EP-Ch Dağılımı için En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_1, X_2, ..., X_n$ EP-Ch$(\alpha,\beta,\theta,\lambda)$ dağılımından alınan $n$ boyutlu bir örneklem olsun. Bu dağılıma ilişkin log - olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir;

$$\ell(\underline{\mu}\,|\,\underline{x}) = \mathrm{n}\,\beta\log\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)+(\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(e^{\left(x^{\theta}{}_i\right)}-1\right)+\mathrm{n}\log\beta+n\log(\theta)$$
$$+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)+n \qquad (5.17)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{\left(x^{\theta}{}_i\right)}-1\right)^{\beta}\right)+\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{\left(x^{\theta}{}_i\right)}-1\right)^{\beta}+x^{\theta}{}_i\right)\right)$$

Burada $\underline{\mu}=(\alpha,\beta,\theta,\lambda)$ ve log- olabilirlik fonksiyonunun $(\alpha,\beta,\lambda,\theta)$ parametrelerine göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenirse aşağıdaki lineer olmayan denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}=-\beta\alpha^{-1}\left(n+\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta}\right)\right)$$
$$-\alpha^{-1}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta}\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta}\right)\right) \qquad (5.18)$$
$$=0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L}{\partial \beta} &= n\log(\lambda) - n\log(\alpha) + \left(\sum_{i=1}^{n}\log\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)\right) + \frac{n}{\beta} \\ &+ \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\log\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta}\right) + \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta}\log\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)\right) \\ &- \sum_{i=1}^{n}\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta}\right) \\ &\times\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\log\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta} + \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta}\log\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L}{\partial \theta} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\theta}\log(x_i)e^{\left(x_i^{\theta}\right)}}{e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1}\right)\theta\beta - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\theta}\log(x_i)e^{\left(x_i^{\theta}\right)}}{e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1}\right)\theta + n \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)\right)\theta + \left(x_i^{\theta}\log(x_i)\right)\theta \\ &+ \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta-1}x_i^{\theta}\log(x_i)e^{\left(x_i^{\theta}\right)}\right)\theta \\ &- \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta-1}x_i^{\theta}\log(x_i)\exp\left(x_i^{\theta}+\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta}\right)\theta\right)/\theta \\ &= 0\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} &= n\frac{\beta}{\lambda} + \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\frac{\beta}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta} \\ &- \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\frac{\beta}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta}\exp\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta}\left(e^{\left(x_i^{\theta}\right)}-1\right)^{\beta}\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{5.21}$$

(5.18)-(5.21) denklemlerinin eş zamanlı çözümleri ile $(\alpha,\beta,\lambda,\theta)$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilir. Bu tahmin ediciler -log-olabilirlik fonksiyonunu minimum yapan kısıtsız optimizasyon problemlerin çözümünde kullanılan BFGS, CG gibi iterative yöntemler kullanılarak elde edilebilir.

### 5.5. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde $(\alpha,\beta,\theta,\lambda)$ parametreli EP-Ch dağılımının bilinmeyen parametreleri için EÇO tahmin edicilerinin performanslarına ve bu tahmin edicilere dayalı asimptotik güven aralıkları (Fisher) ile Bootstrap-Normal, Bootstrap-Basic ve Bootstrap-Percentile güven aralıklarının oluşturulmasına dayalı bir simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Ayrıca EÇO

tahmin edicileri, R-studio yazılımında bulunan optim fonksiyonunda BFGS ve CG metotları kullanılarak elde edilmiştir. Bu tahmin edicilere dayalı olarak oluşturulan Bootstrap güven aralıkları ise R yazılımına "boot" paketi yüklenerek elde edilmiştir. 1000 tekrar ve 1000 bootstrap örneklemine dayalı olarak gerçekleştirilen simülasyon çalışmasında örneklem boyutları n=50, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000 ve parametre değerleri $(\alpha,\beta,\theta,\lambda)=(2,0.5,0.9,0.3)$ ve $(1.5,0.9,0.7,0.5)$ olarak alınmıştır. BFGS ve CG yöntemleri kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak Çizelge 5.4 ve 5.5 'de verilmiş olup ilgili grafikler Şekil 5.10-5.17 'de gösterilmiştir.

**Çizelge 5.4.** EP-Ch dağılımı için BFGS ve CG yöntemleri kullanılarak elde edilen EÇO ve aralık tahmin edicilerinin performansları $\left((\alpha,\beta,\theta,\lambda)=(2,0.5,0.9,0.3)\right)$

| | **EÇO tahmin edicilerinin Yanları** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | | **(CG)** | | | |
| *n* | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\lambda}$ |
| 50 | 0.06953 | 0.04169 | 0.03521 | 0.01048 | 0.00135 | -0.02453 | 0.12389 | -0.03445 |
| 100 | 0.08350 | 0.01483 | 0.04736 | -0.00743 | -0.00094 | 0.00291 | 0.05777 | -0.01099 |
| 200 | 0.05109 | 0.00996 | 0.02152 | -0.00363 | -0.00154 | 0.01020 | 0.02187 | -0.00222 |
| 300 | 0.03933 | 0.01032 | 0.01277 | -0.00177 | -0.00047 | 0.00395 | 0.02036 | -0.00433 |
| 400 | 0.03042 | 0.01345 | 0.00156 | 0.00470 | -0.00108 | 0.00727 | 0.00720 | 0.00146 |
| 500 | -0.00335 | 0.00846 | 0.00352 | -0.00103 | -0.00058 | 0.00501 | 0.00733 | -0.00022 |
| 600 | 0.03126 | 0.00339 | 0.00776 | 0.00206 | -0.00083 | 0.00605 | 0.00358 | 0.00159 |
| 700 | 0.01478 | 0.00374 | 0.00594 | -0.00019 | -0.00066 | 0.00388 | 0.00409 | 0.00162 |
| 800 | 0.01681 | 0.00296 | 0.00512 | 0.00010 | -0.00022 | 0.00138 | 0.00720 | -0.00103 |
| 900 | 0.01011 | 0.00319 | 0.00328 | 0.00022 | 0.00008 | 0.00012 | 0.00807 | -0.00228 |
| 1000 | 0.01148 | 0.00222 | 0.00349 | -0.00001 | -0.00019 | 0.00069 | 0.00636 | -0.00120 |

**Çizelge 5.4. (Devam)**

| **EÇO tahmin edicilerinin MSE'leri** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS) MSE** | | | | **(CG) MSE** | | | |
| *n* | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\lambda}$ |
| 50 | 0.13309 | 0.04836 | 0.06878 | 0.02204 | 0.00059 | 0.03062 | 0.08938 | 0.02299 |
| 100 | 0.11997 | 0.03216 | 0.05208 | 0.01294 | 0.00044 | 0.02572 | 0.05343 | 0.01653 |
| 200 | 0.08804 | 0.01696 | 0.02755 | 0.00716 | 0.00027 | 0.01521 | 0.02829 | 0.01022 |
| 300 | 0.06194 | 0.01260 | 0.02006 | 0.00402 | 0.00017 | 0.00961 | 0.01839 | 0.00673 |
| 400 | 0.05215 | 0.00883 | 0.01423 | 0.00415 | 0.00014 | 0.00748 | 0.01359 | 0.00540 |
| 500 | 0.04612 | 0.00593 | 0.01029 | 0.00342 | 0.00010 | 0.00617 | 0.01094 | 0.00420 |
| 600 | 0.05611 | 0.00451 | 0.00865 | 0.00339 | 0.00009 | 0.00542 | 0.00981 | 0.00388 |
| 700 | 0.04299 | 0.00406 | 0.00755 | 0.00236 | 0.00007 | 0.00411 | 0.00776 | 0.00303 |
| 800 | 0.03719 | 0.00352 | 0.00677 | 0.00192 | 0.00006 | 0.00369 | 0.00686 | 0.00270 |
| 900 | 0.02866 | 0.00348 | 0.00633 | 0.00167 | 0.00005 | 0.00303 | 0.00603 | 0.00230 |
| 1000 | 0.02446 | 0.00291 | 0.00547 | 0.00144 | 0.00005 | 0.00293 | 0.00555 | 0.00218 |

**Çizelge5.4 (Devam)**

| | **EÇO tahmin edicilerinin kapsanma olasılıkları (Fisher)** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | | **(CG)** | | | |
| $n$ | $\hat{\alpha}_{(KO)}$ | $\hat{\beta}_{(KO)}$ | $\hat{\theta}_{(KO)}$ | $\hat{\lambda}_{(KO)}$ | $\hat{\alpha}_{(KO)}$ | $\hat{\beta}_{(KO)}$ | $\hat{\theta}_{(KO)}$ | $\hat{\lambda}_{(KO)}$ |
| 50 | 1 | 0.937 | 0.992 | 1 | 1 | 0.886 | 0.966 | 0.998 |
| 100 | 1 | 0.908 | 0.953 | 1 | 1 | 0.895 | 0.947 | 0.999 |
| 200 | 1 | 0.922 | 0.946 | 1 | 1 | 0.915 | 0.940 | 1 |
| 300 | 1 | 0.933 | 0.943 | 1 | 1 | 0.931 | 0.954 | 1 |
| 400 | 1 | 0.949 | 0.947 | 1 | 1 | 0.942 | 0.948 | 1 |
| 500 | 1 | 0.956 | 0.965 | 1 | 1 | 0.944 | 0.954 | 1 |
| 600 | 1 | 0.947 | 0.955 | 1 | 1 | 0.937 | 0.943 | 1 |
| 700 | 1 | 0.947 | 0.956 | 1 | 1 | 0.948 | 0.950 | 1 |
| 800 | 1 | 0.954 | 0.958 | 1 | 1 | 0.948 | 0.952 | 1 |
| 900 | 1 | 0.946 | 0.956 | 1 | 1 | 0.947 | 0.961 | 1 |
| 1000 | 1 | 0.943 | 0.943 | 1 | 1 | 0.935 | 0.945 | 1 |

**Çizelge5.4.(Devam)**

| **Fisher Genişlikleri** $(Gen)$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | | **(CG)** | | | |
| $n$ | $\hat{\alpha}_{(Gen)}$ | $\hat{\beta}_{(Gen)}$ | $\hat{\theta}_{(Gen)}$ | $\hat{\lambda}_{(Gen)}$ | $\hat{\alpha}_{(Gen)}$ | $\hat{\beta}_{(Gen)}$ | $\hat{\theta}_{(Gen)}$ | $\hat{\lambda}_{(Gen)}$ |
| 50 | 345.46830 | 1.26236 | 1.41060 | 61.24650 | 331.79860 | 1.13696 | 1.47069 | 57.74530 |
| 100 | 233.17790 | 0.76341 | 0.94852 | 36.73530 | 229.56670 | 0.77702 | 0.98109 | 38.85490 |
| 200 | 164.08380 | 0.50659 | 0.65996 | 24.98210 | 163.15190 | 0.52924 | 0.67997 | 26.63560 |
| 300 | 132.74730 | 0.40719 | 0.53696 | 19.98430 | 130.23850 | 0.40174 | 0.54133 | 20.33580 |
| 400 | 116.61640 | 0.35208 | 0.46485 | 17.94260 | 113.47730 | 0.34577 | 0.46408 | 17.80700 |
| 500 | 101.34760 | 0.30733 | 0.41501 | 15.47830 | 101.29910 | 0.30505 | 0.41502 | 15.65590 |
| 600 | 95.89700 | 0.27496 | 0.37836 | 14.50680 | 92.57730 | 0.27749 | 0.37669 | 14.34790 |
| 700 | 86.94380 | 0.25348 | 0.34839 | 13.09420 | 85.87960 | 0.25428 | 0.34929 | 13.22590 |
| 800 | 81.40420 | 0.23603 | 0.32540 | 12.23280 | 79.97570 | 0.23577 | 0.32638 | 12.18410 |
| 900 | 76.38010 | 0.22265 | 0.30668 | 11.51050 | 75.53740 | 0.22181 | 0.30824 | 11.44490 |
| 1000 | 72.45440 | 0.21052 | 0.29111 | 10.89070 | 71.73700 | 0.20967 | 0.29136 | 10.88480 |

**Çizelge5.4(Devam)**

| $\hat{\alpha}$ için Bootstrap Kapsama olasılıkları | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\alpha}_{(Norm)}$ | $\hat{\alpha}_{(basic)}$ | $\hat{\alpha}_{(perc.)}$ | $\hat{\alpha}_{(Norm)}$ | $\hat{\alpha}_{(basic)}$ | $\hat{\alpha}_{(perc.)}$ |
| 50 | 0.978 | 0.981 | 0.999 | 0.889 | 0.641 | 0.968 |
| 100 | 0.950 | 0.955 | 0.989 | 0.876 | 0.707 | 0.947 |
| 200 | 0.948 | 0.947 | 0.983 | 0.879 | 0.788 | 0.942 |
| 300 | 0.924 | 0.904 | 0.980 | 0.903 | 0.826 | 0.938 |
| 400 | 0.874 | 0.843 | 0.998 | 0.912 | 0.868 | 0.931 |
| 500 | 0.867 | 0.796 | 1 | 0.923 | 0.869 | 0.946 |
| 600 | 0.872 | 0.797 | 1 | 0.910 | 0.873 | 0.935 |
| 700 | 0.883 | 0.784 | 0.999 | 0.934 | 0.899 | 0.952 |
| 800 | 0.882 | 0.830 | 0.996 | 0.914 | 0.880 | 0.947 |
| 900 | 0.905 | 0.860 | 0.997 | 0.928 | 0.894 | 0.948 |
| 1000 | 0.911 | 0.887 | 0.995 | 0.912 | 0.886 | 0.940 |

**Çizelge5.4.Devam)**

| $\hat{\alpha}$ için Bootstrap Genişlikleri | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\alpha}_{(Norm)}$ | $\hat{\alpha}_{(basic)}$ | $\hat{\alpha}_{(perc.)}$ | $\hat{\alpha}_{(Norm)}$ | $\hat{\alpha}_{(basic)}$ | $\hat{\alpha}_{(perc.)}$ |
| 50 | 2.50551 | 2.65583 | 2.65583 | 0.12221 | 0.11445 | 0.11445 |
| 100 | 1.66606 | 1.73664 | 1.73664 | 0.09121 | 0.08752 | 0.08752 |
| 200 | 1.31757 | 1.32905 | 1.32905 | 0.06474 | 0.06342 | 0.06342 |
| 300 | 1.06879 | 1.07316 | 1.07316 | 0.05188 | 0.05131 | 0.05131 |
| 400 | 1.02315 | 1.01497 | 1.01497 | 0.04609 | 0.04574 | 0.04574 |
| 500 | 0.98479 | 0.95984 | 0.95984 | 0.04043 | 0.04015 | 0.04015 |
| 600 | 0.95541 | 0.90526 | 0.90526 | 0.03706 | 0.03692 | 0.03692 |
| 700 | 0.92466 | 0.86678 | 0.86678 | 0.03423 | 0.03413 | 0.03413 |
| 800 | 0.86147 | 0.81556 | 0.81556 | 0.03146 | 0.03145 | 0.03145 |
| 900 | 0.81074 | 0.78839 | 0.78839 | 0.02915 | 0.02909 | 0.02909 |
| 1000 | 0.76609 | 0.75504 | 0.75504 | 0.02767 | 0.02764 | 0.02764 |

**Çizelge5.4.(Devam)**

| $\hat{\beta}$ **için Bootstrap Kapsama olasılıkları** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\beta}_{(Norm)}$ | $\hat{\beta}_{(Basic)}$ | $\hat{\beta}_{(Perc.)}$ | $\hat{\beta}_{(Norm)}$ | $\hat{\beta}_{(Basic)}$ | $\hat{\beta}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.989 | 0.860 | 0.993 | 0.915 | 0.759 | 0.973 |
| 100 | 0.935 | 0.833 | 0.961 | 0.908 | 0.800 | 0.954 |
| 200 | 0.921 | 0.866 | 0.949 | 0.905 | 0.868 | 0.940 |
| 300 | 0.936 | 0.892 | 0.933 | 0.928 | 0.881 | 0.941 |
| 400 | 0.948 | 0.914 | 0.942 | 0.939 | 0.910 | 0.949 |
| 500 | 0.951 | 0.926 | 0.958 | 0.939 | 0.914 | 0.943 |
| 600 | 0.949 | 0.921 | 0.954 | 0.924 | 0.899 | 0.940 |
| 700 | 0.947 | 0.920 | 0.959 | 0.946 | 0.919 | 0.942 |
| 800 | 0.952 | 0.933 | 0.962 | 0.928 | 0.906 | 0.945 |
| 900 | 0.946 | 0.926 | 0.945 | 0.944 | 0.927 | 0.954 |
| 1000 | 0.943 | 0.921 | 0.952 | 0.928 | 0.919 | 0.935 |

**Çizelge5.4.(Devam)**

| $\hat{\beta}$ **için Bootstrap Genişlikleri** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\beta}_{(Norm)}$ | $\hat{\beta}_{(Basic)}$ | $\hat{\beta}_{(Perc.)}$ | $\hat{\beta}_{(Norm)}$ | $\hat{\beta}_{(Basic)}$ | $\hat{\beta}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 4.40960 | 3.95382 | 3.95382 | 1.00821 | 0.96646 | 0.96646 |
| 100 | 1.69379 | 1.50574 | 1.50574 | 0.74354 | 0.72789 | 0.72789 |
| 200 | 0.71243 | 0.65159 | 0.65159 | 0.51035 | 0.50632 | 0.50632 |
| 300 | 0.48069 | 0.46541 | 0.46541 | 0.40543 | 0.40510 | 0.40510 |
| 400 | 0.38339 | 0.37892 | 0.37892 | 0.35496 | 0.35484 | 0.35484 |
| 500 | 0.32357 | 0.32317 | 0.32317 | 0.31112 | 0.31104 | 0.31104 |
| 600 | 0.28548 | 0.28597 | 0.28597 | 0.28379 | 0.28427 | 0.28427 |
| 700 | 0.26269 | 0.26279 | 0.26279 | 0.25901 | 0.25967 | 0.25967 |
| 800 | 0.24332 | 0.24364 | 0.24364 | 0.23833 | 0.23896 | 0.23896 |
| 900 | 0.22806 | 0.22858 | 0.22858 | 0.22117 | 0.22164 | 0.22164 |
| 1000 | 0.21495 | 0.21551 | 0.21551 | 0.20934 | 0.21005 | 0.21005 |

**Çizelge5.4.(Devam)**

| $\hat{\theta}$ **için Bootstrap Kapsama olasılıkları** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\theta}_{(Norm)}$ | $\hat{\theta}_{(Basic)}$ | $\hat{\theta}_{(Perc.)}$ | $\hat{\theta}_{(Norm)}$ | $\hat{\theta}_{(Basic)}$ | $\hat{\theta}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.985 | 0.941 | 0.989 | 0.920 | 0.846 | 0.954 |
| 100 | 0.952 | 0.947 | 0.955 | 0.912 | 0.873 | 0.939 |
| 200 | 0.943 | 0.943 | 0.943 | 0.901 | 0.882 | 0.929 |
| 300 | 0.941 | 0.939 | 0.935 | 0.933 | 0.923 | 0.931 |
| 400 | 0.942 | 0.948 | 0.937 | 0.932 | 0.926 | 0.939 |
| 500 | 0.960 | 0.962 | 0.953 | 0.932 | 0.929 | 0.940 |
| 600 | 0.949 | 0.951 | 0.954 | 0.932 | 0.923 | 0.932 |
| 700 | 0.956 | 0.958 | 0.955 | 0.940 | 0.941 | 0.944 |
| 800 | 0.951 | 0.950 | 0.955 | 0.947 | 0.942 | 0.945 |
| 900 | 0.949 | 0.950 | 0.948 | 0.950 | 0.942 | 0.949 |
| 1000 | 0.946 | 0.944 | 0.943 | 0.942 | 0.940 | 0.939 |

**Çizelge5.4.(Devam)**

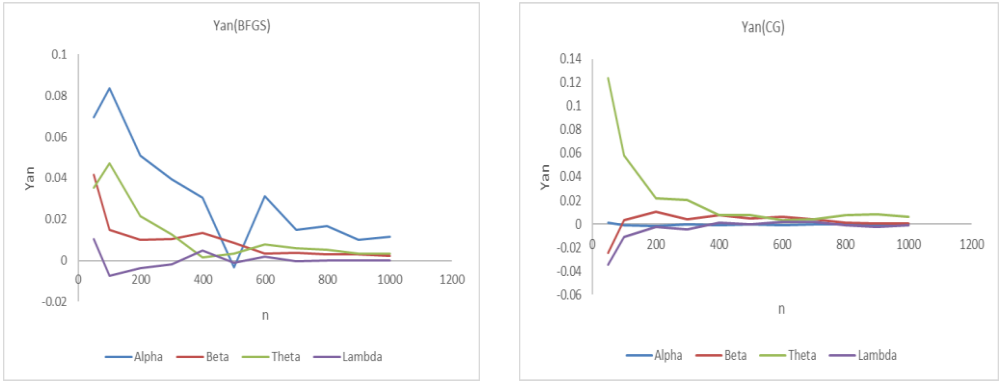
| $\hat{\theta}$ **için Bootstrap Genişlikleri** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\theta}_{(Norm)}$ | $\hat{\theta}_{(Basic)}$ | $\hat{\theta}_{(Perc.)}$ | $\hat{\theta}_{(Norm)}$ | $\hat{\theta}_{(Basic)}$ | $\hat{\theta}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 1.45433 | 1.43542 | 1.43542 | 1.23876 | 1.20232 | 1.20232 |
| 100 | 0.96997 | 0.98001 | 0.98001 | 0.88867 | 0.88007 | 0.88007 |
| 200 | 0.66199 | 0.66799 | 0.66799 | 0.62734 | 0.62763 | 0.627633 |
| 300 | 0.53626 | 0.53985 | 0.53985 | 0.51835 | 0.52051 | 0.52051 |
| 400 | 0.45953 | 0.46244 | 0.46244 | 0.45516 | 0.45729 | 0.45729 |
| 500 | 0.40967 | 0.41288 | 0.41288 | 0.40548 | 0.40707 | 0.40707 |
| 600 | 0.37348 | 0.37599 | 0.37599 | 0.37059 | 0.37214 | 0.37214 |
| 700 | 0.34738 | 0.34904 | 0.34904 | 0.34352 | 0.34500 | 0.34500 |
| 800 | 0.32485 | 0.32631 | 0.32631 | 0.32044 | 0.32191 | 0.32191 |
| 900 | 0.30480 | 0.30613 | 0.30613 | 0.30071 | 0.30209 | 0.30209 |
| 1000 | 0.28945 | 0.29084 | 0.29084 | 0.28468 | 0.28596 | 0.28596 |

**Çizelge5.4.(Devam)**

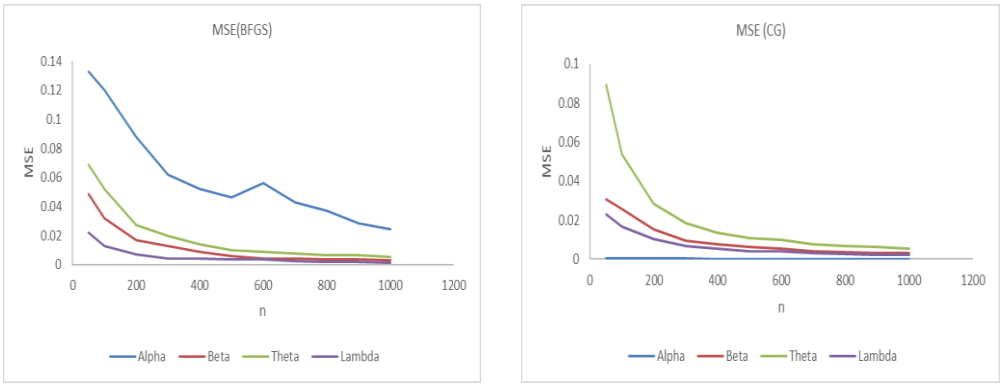
| $\hat{\lambda}$ için Bootstrap Kapsama olasılıkları | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.914 | 0.821 | 0.995 | 0.853 | 0.682 | 0.972 |
| 100 | 0.858 | 0.743 | 0.973 | 0.874 | 0.758 | 0.949 |
| 200 | 0.915 | 0.882 | 0.960 | 0.873 | 0.830 | 0.942 |
| 300 | 0.889 | 0.853 | 0.965 | 0.910 | 0.873 | 0.940 |
| 400 | 0.871 | 0.762 | 0.956 | 0.913 | 0.883 | 0.934 |
| 500 | 0.877 | 0.775 | 0.976 | 0.924 | 0.903 | 0.948 |
| 600 | 0.891 | 0.808 | 0.981 | 0.920 | 0.899 | 0.934 |
| 700 | 0.901 | 0.833 | 0.981 | 0.927 | 0.920 | 0.954 |
| 800 | 0.928 | 0.881 | 0.978 | 0.923 | 0.913 | 0.948 |
| 900 | 0.910 | 0.885 | 0.983 | 0.934 | 0.923 | 0.950 |
| 1000 | 0.919 | 0.904 | 0.976 | 0.919 | 0.908 | 0.942 |

**Çizelge5.4(Devam)**

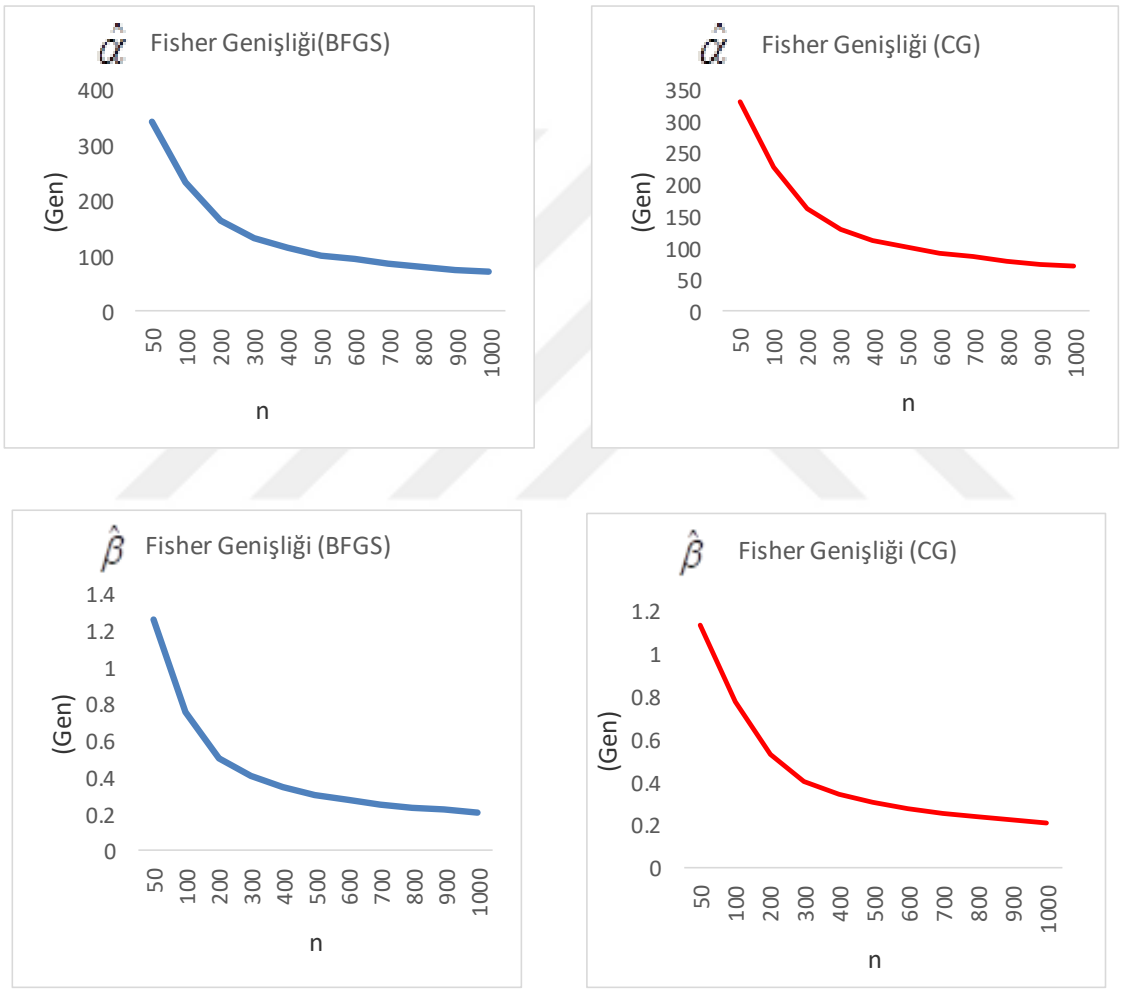
| $\hat{\lambda}$ için Bootstrap Genişlikleri | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.66333 | 0.63875 | 0.63875 | 0.65398 | 0.60614 | 0.60614 |
| 100 | 0.43263 | 0.41574 | 0.41574 | 0.51052 | 0.49222 | 0.49222 |
| 200 | 0.34597 | 0.34388 | 0.34388 | 0.37957 | 0.37440 | 0.37440 |
| 300 | 0.23984 | 0.23799 | 0.23799 | 0.31610 | 0.31428 | 0.31428 |
| 400 | 0.24549 | 0.23725 | 0.23725 | 0.28242 | 0.28134 | 0.28134 |
| 500 | 0.23863 | 0.23219 | 0.23219 | 0.25323 | 0.25271 | 0.25271 |
| 600 | 0.21723 | 0.20896 | 0.20896 | 0.23248 | 0.23225 | 0.23225 |
| 700 | 0.20099 | 0.19416 | 0.19416 | 0.21589 | 0.21591 | 0.21591 |
| 800 | 0.18277 | 0.17893 | 0.17893 | 0.20078 | 0.20121 | 0.20121 |
| 900 | 0.17171 | 0.17037 | 0.17037 | 0.18818 | 0.18839 | 0.18839 |
| 1000 | 0.16205 | 0.16261 | 0.16261 | 0.17821 | 0.17852 | 0.17852 |

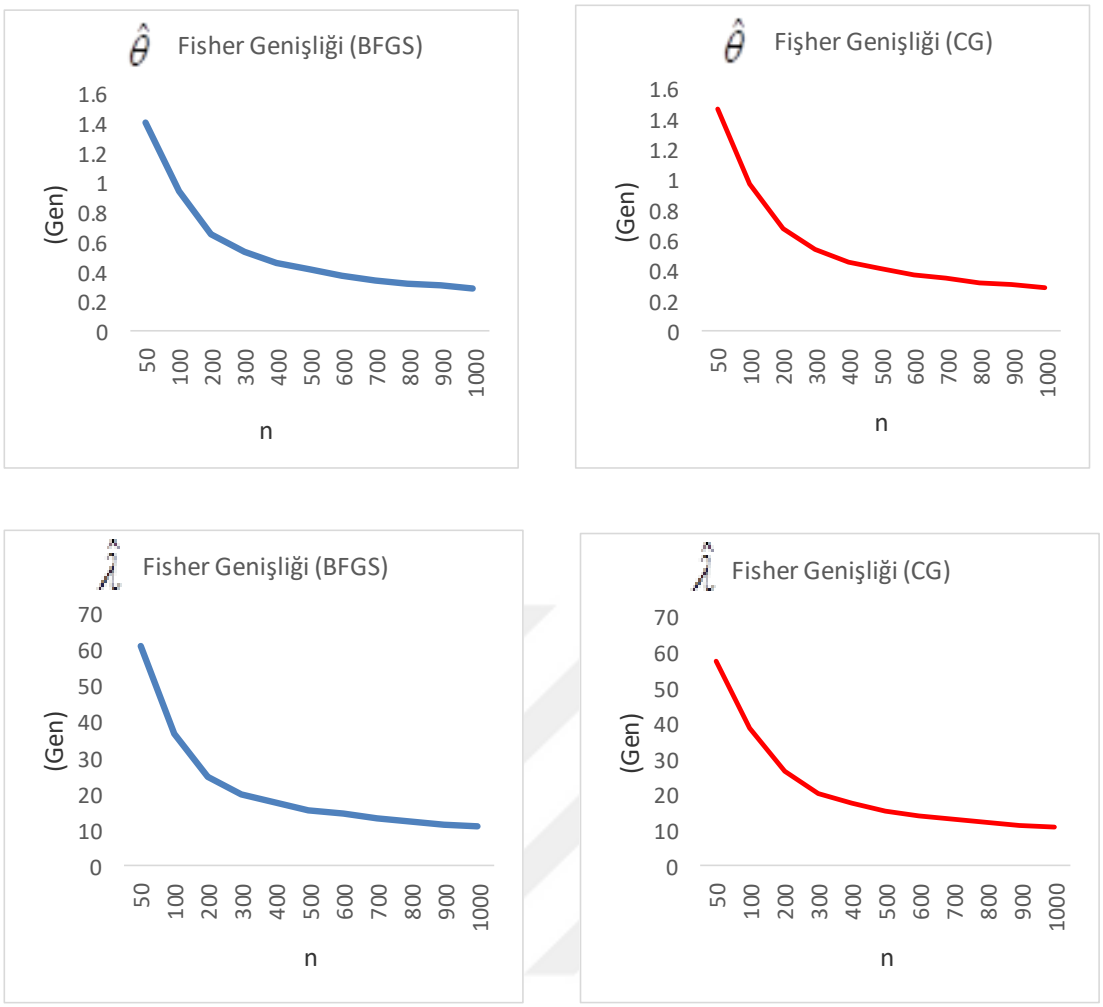



**Şekil 5.10**.EP-Ch dağılım parametreleri için yan

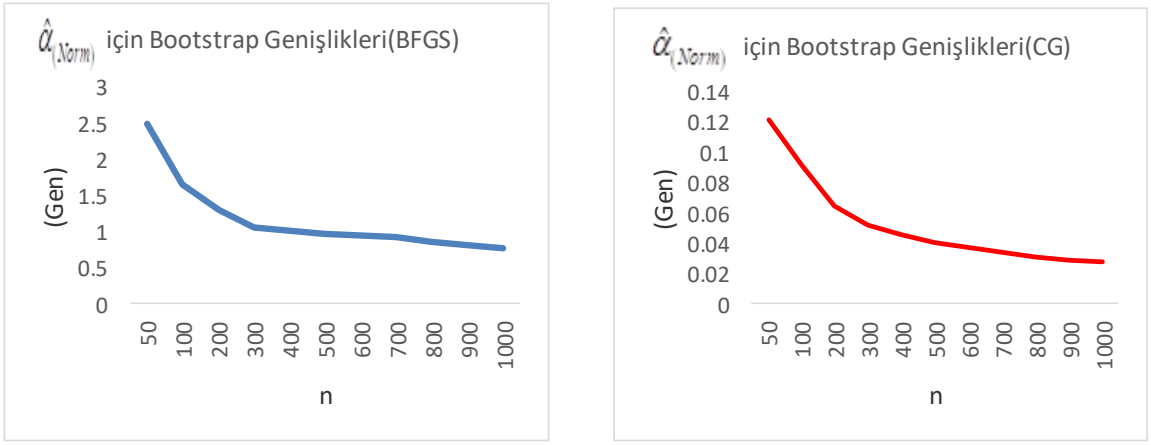


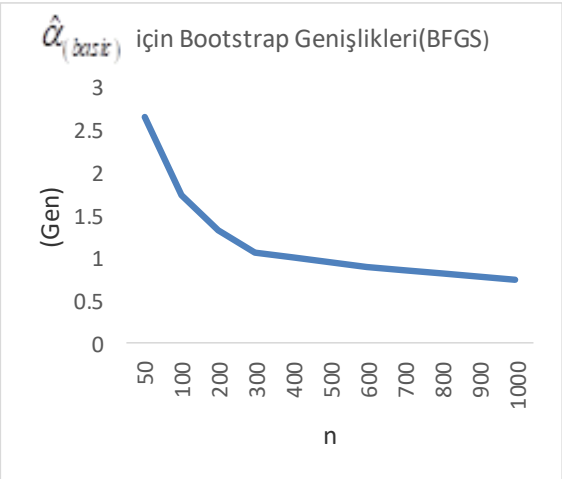

**Şekil 5.11**.EP-Ch dağılım parametreleri için MSE'ler.

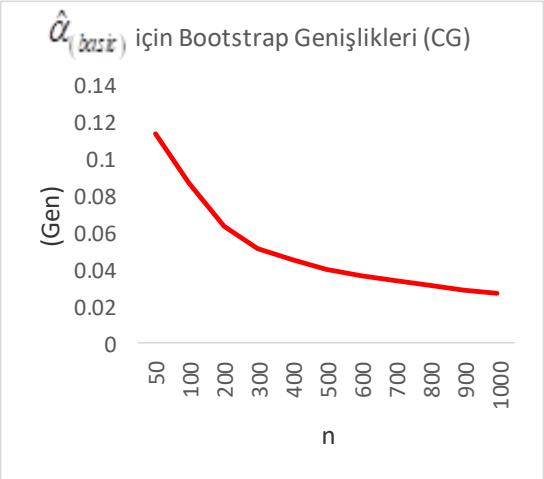


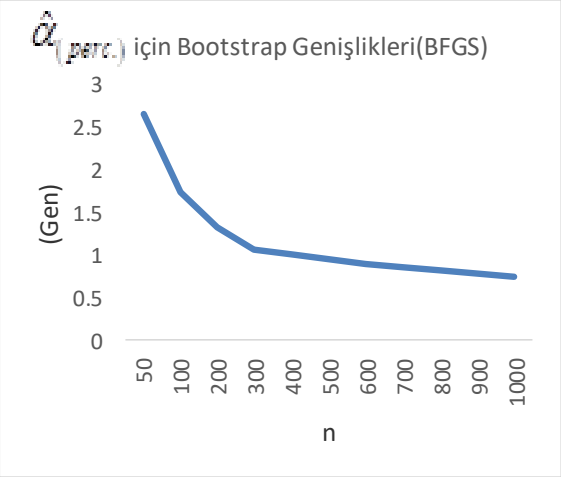


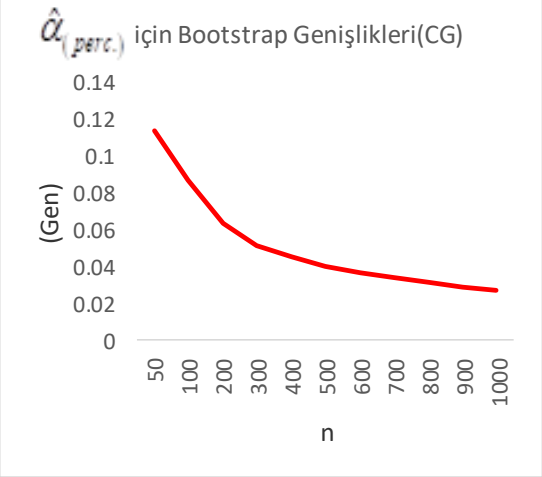

**Şekil 5.12**. EP-Ch dağılımının çeşitli parametre değerlerine ilişkin Fisher Genişlikleri.

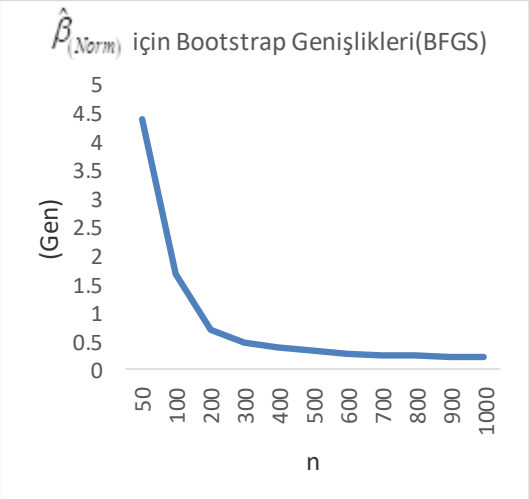


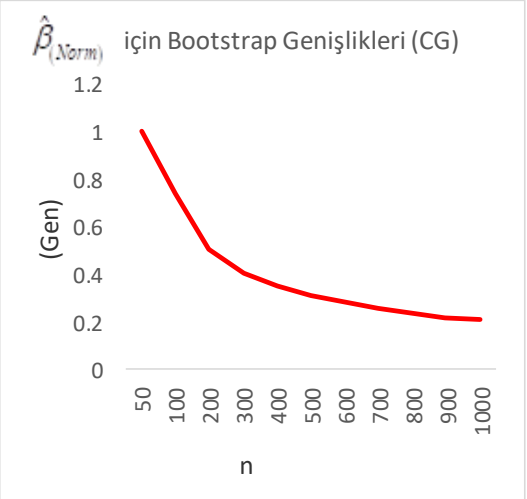

$\hat{\alpha}_{(basit)}$ için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

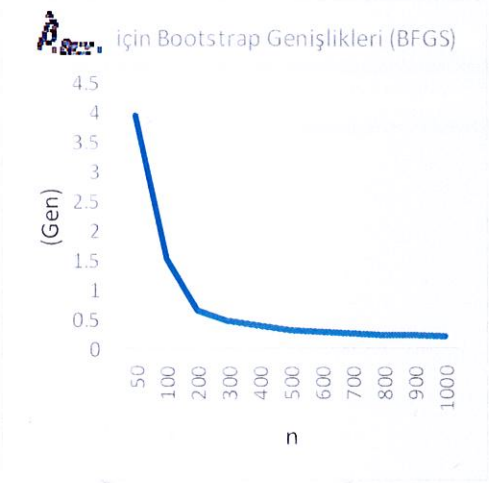

$\hat{\alpha}_{(basit)}$ için Bootstrap Genişlikleri (CG)
(Gen)
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

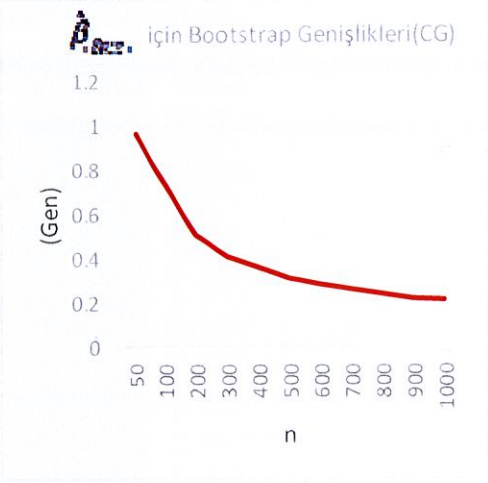

$\hat{\alpha}_{(perc.)}$ için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

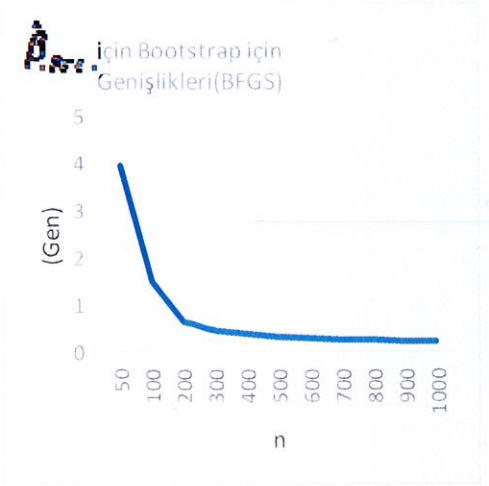

$\hat{\alpha}_{(perc.)}$ için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

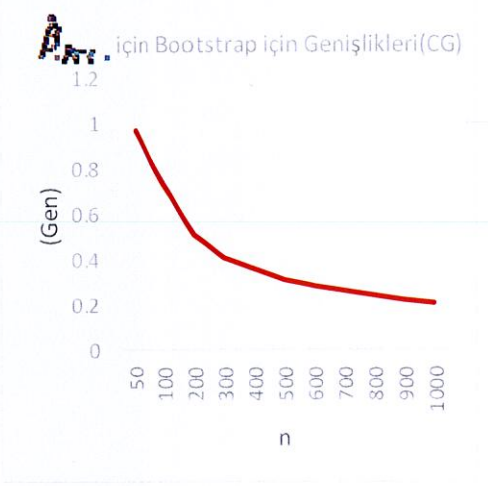

$\hat{\beta}_{(Norm)}$ için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

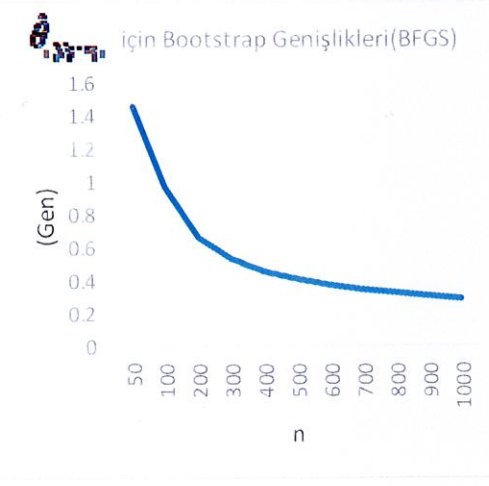

$\hat{\beta}_{(Norm)}$ için Bootstrap Genişlikleri (CG)
(Gen)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

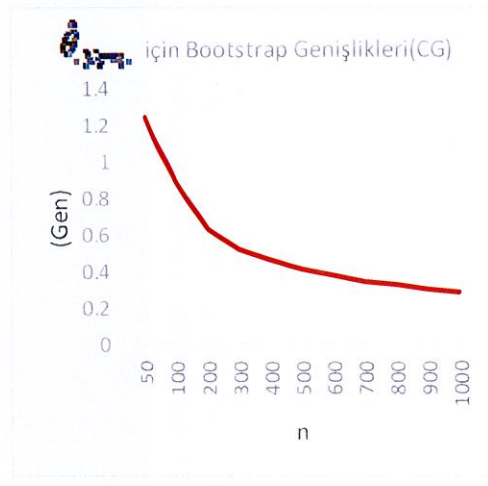

için Bootstrap Genişlikleri (BFGS)
(Gen)
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

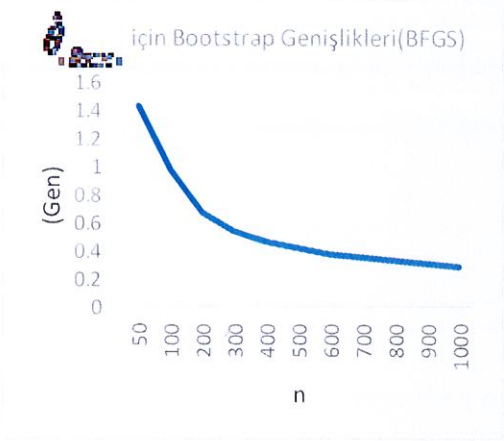

için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

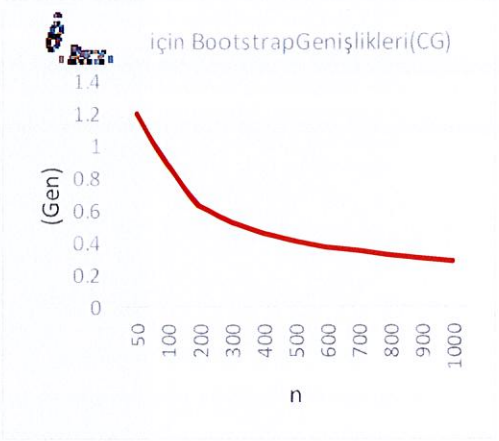

için Bootstrap için Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
5
4
3
2
1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

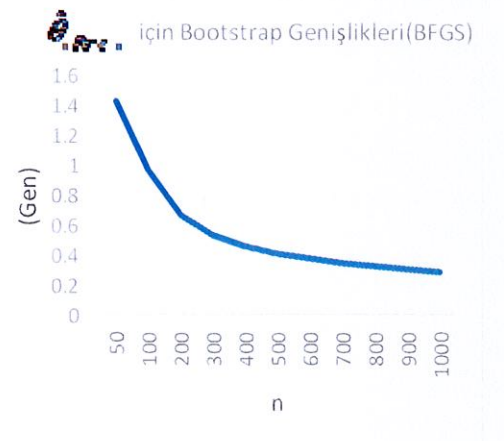

için Bootstrap için Genişlikleri(CG)
(Gen)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

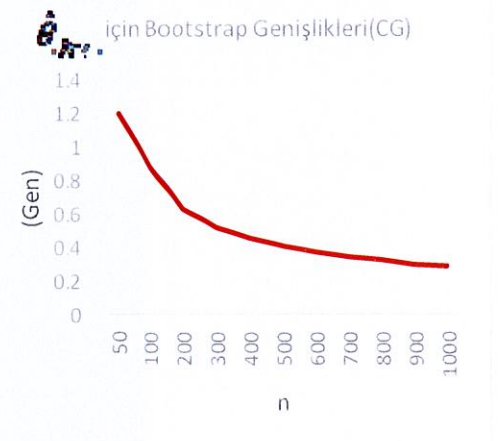

için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

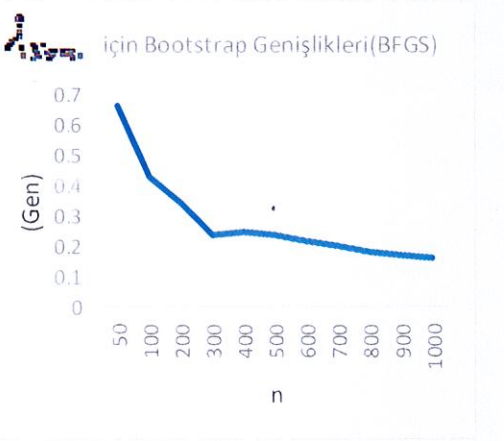

için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
n

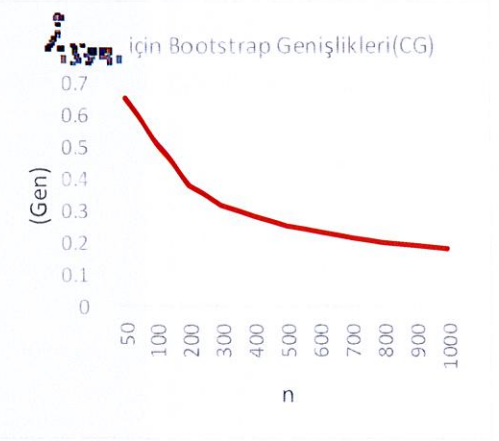

için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
n

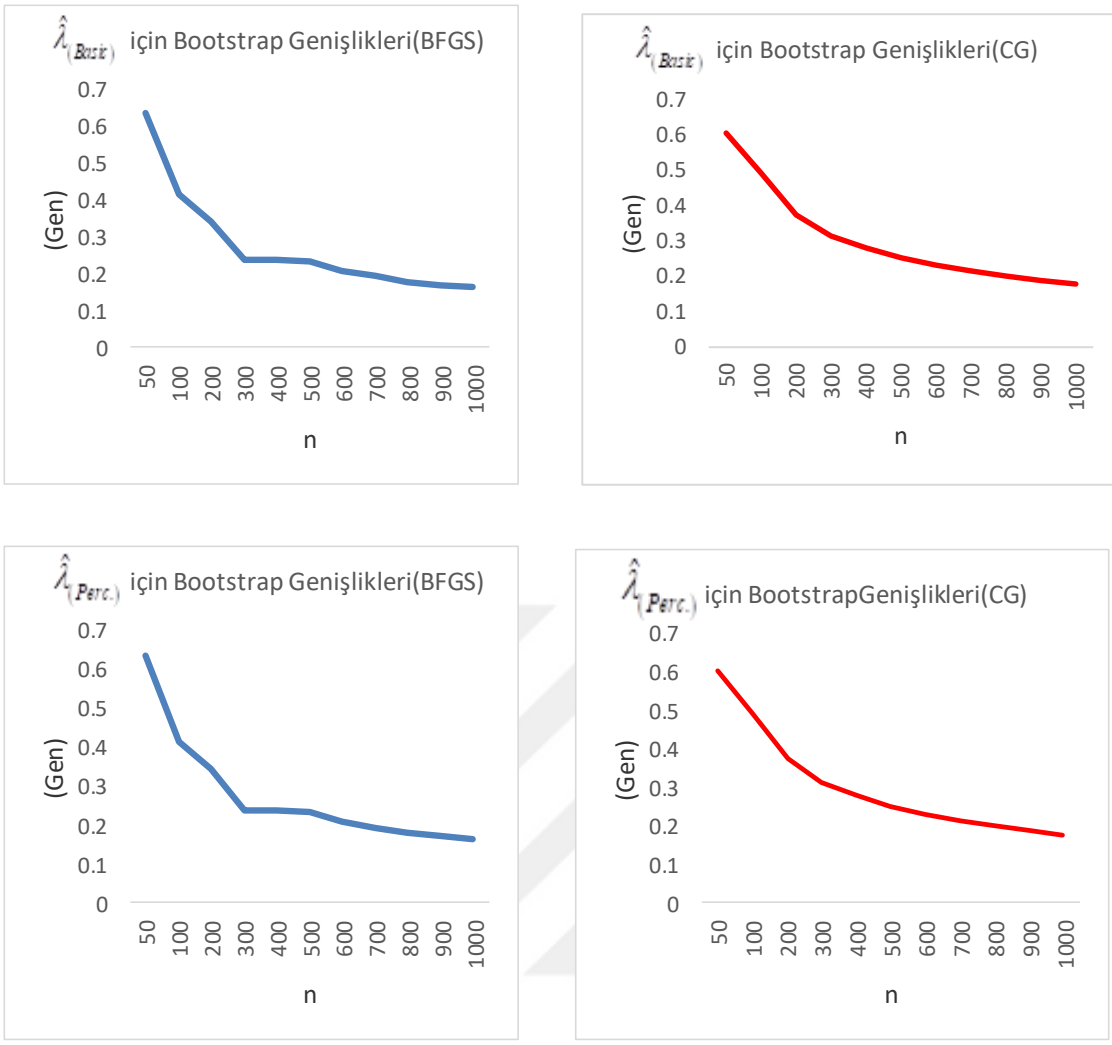

için BootstrapGenişlikleri(CG)
(Gen)
n


için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
n


için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
n


için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
n


için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
n




**Şekil 5.13**. EP-Ch dağılımının çeşitli parametre değerlerine ilişkin Bootstrap

**Çizelge 5.5.** EP-Ch dağılımı için BFGS ve CG yöntemleri kullanılarak elde edilen EÇO ve aralık tahmin edicilerinin performansları $(1.5, 0.9, 0.7, 0.5)$

| | **EÇO tahmin edicilerinin Yanları** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | | **(CG)** | | | |
| $n$ | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\lambda}$ |
| 50 | 0.17108 | -0.23248 | 0.39172 | -0.11070 | 0.03268 | -0.24772 | 0.39318 | -0.12753 |
| 100 | 0.13486 | -0.15524 | 0.23546 | -0.06435 | 0.02298 | -0.17341 | 0.23816 | -0.08437 |
| 200 | 0.07435 | -0.07829 | 0.12051 | -0.03311 | 0.01139 | -0.07747 | 0.10988 | -0.04044 |
| 300 | 0.07641 | -0.04184 | 0.07239 | -0.00922 | 0.00808 | -0.05704 | 0.07397 | -0.02840 |
| 400 | 0.06440 | -0.01700 | 0.04747 | -0.00263 | 0.00597 | -0.04002 | 0.05620 | -0.02118 |
| 500 | 0.02209 | -0.00977 | 0.03627 | -0.01009 | 0.00602 | -0.04033 | 0.05334 | -0.02076 |
| 600 | 0.00275 | -0.00210 | 0.02718 | -0.01239 | 0.00426 | -0.02322 | 0.03828 | -0.01478 |
| 700 | 0.00195 | 0.00386 | 0.01959 | -0.00965 | 0.00234 | -0.00835 | 0.02437 | -0.00869 |
| 900 | 0.00014 | 0.01344 | 0.00829 | -0.00568 | 0.00284 | -0.01671 | 0.02658 | -0.00973 |
| 1000 | 0.01708 | 0.00733 | 0.01186 | -0.00113 | 0.00145 | -0.00191 | 0.01477 | -0.00536 |

**Çizelge5.5.(Devam)**

| EÇO tahmin edicilerinin MSE'leri | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | | (CG) | | | |
| $n$ | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\lambda}$ | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\lambda}$ |
| 50 | 0.15812 | 0.13703 | 0.32361 | 0.03385 | 0.00257 | 0.12912 | 0.33398 | 0.03859 |
| 100 | 0.09457 | 0.08907 | 0.14885 | 0.01758 | 0.00149 | 0.08124 | 0.14119 | 0.01965 |
| 200 | 0.07154 | 0.06126 | 0.06319 | 0.00926 | 0.00078 | 0.04954 | 0.05436 | 0.00874 |
| 300 | 0.04637 | 0.04656 | 0.03865 | 0.00707 | 0.00049 | 0.03292 | 0.03116 | 0.00542 |
| 400 | 0.04673 | 0.04009 | 0.02892 | 0.00554 | 0.00041 | 0.02837 | 0.02421 | 0.00430 |
| 500 | 0.03864 | 0.03488 | 0.02257 | 0.00533 | 0.00036 | 0.02681 | 0.02083 | 0.00371 |
| 600 | 0.04040 | 0.03219 | 0.01970 | 0.00497 | 0.00029 | 0.02299 | 0.01589 | 0.00292 |
| 700 | 0.02838 | 0.02882 | 0.01628 | 0.00339 | 0.00027 | 0.02256 | 0.01427 | 0.00258 |
| 900 | 0.01886 | 0.02672 | 0.01301 | 0.00211 | 0.00022 | 0.01819 | 0.01147 | 0.00210 |
| 1000 | 0.02009 | 0.02332 | 0.01202 | 0.00225 | 0.00019 | 0.01667 | 0.00980 | 0.00178 |

**Çizelge5.5.(Devam)**

| EÇO tahmin edicilerinin kapsanma olasılıkları (Fisher) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | | (CG) | | | |
| $n$ | $\hat{\alpha}_{(KO)}$ | $\hat{\beta}_{(KO)}$ | $\hat{\theta}_{(KO)}$ | $\hat{\lambda}_{(KO)}$ | $\hat{\alpha}_{(KO)}$ | $\hat{\beta}_{(KO)}$ | $\hat{\theta}_{(KO)}$ | $\hat{\lambda}_{(KO)}$ |
| 50 | 1 | 0.734 | 0.915 | 1 | 1 | 0.744 | 0.914 | 0.998 |
| 100 | 1 | 0.800 | 0.924 | 1 | 1 | 0.793 | 0.933 | 1 |
| 200 | 1 | 0.841 | 0.942 | 1 | 1 | 0.878 | 0.954 | 1 |
| 300 | 1 | 0.889 | 0.960 | 1 | 1 | 0.925 | 0.965 | 1 |
| 400 | 1 | 0.898 | 0.959 | 1 | 1 | 0.911 | 0.960 | 1 |
| 500 | 1 | 0.912 | 0.960 | 1 | 1 | 0.911 | 0.961 | 1 |
| 600 | 1 | 0.910 | 0.960 | 1 | 1 | 0.918 | 0.973 | 1 |
| 700 | 1 | 0.939 | 0.973 | 1 | 1 | 0.934 | 0.968 | 1 |
| 900 | 1 | 0.940 | 0.968 | 1 | 1 | 0.927 | 0.968 | 1 |
| 1000 | 1 | 0.943 | 0.959 | 1 | 1 | 0.939 | 0.974 | 1 |

**Çizelge5.5.(Devam)**

| Fisher Genişlikleri $(Gen)$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | | (CG) | | | |
| $n$ | $\hat{\alpha}_{(Gen)}$ | $\hat{\beta}_{(Gen)}$ | $\hat{\theta}_{(Gen)}$ | $\hat{\lambda}_{(Gen)}$ | $\hat{\alpha}_{(Gen)}$ | $\hat{\beta}_{(Gen)}$ | $\hat{\theta}_{(Gen)}$ | $\hat{\lambda}_{(Gen)}$ |
| 50 | 331.99640 | 1.95952 | 2.17087 | 85.18870 | 323.18490 | 2.25113 | 2.52806 | 89.21330 |
| 100 | 243.68830 | 1.55728 | 1.47675 | 69.20790 | 232.39450 | 1.74102 | 1.64859 | 68.69650 |
| 200 | 172.13620 | 1.26068 | 1.02487 | 52.91260 | 171.26760 | 1.37457 | 1.11254 | 54.36130 |
| 300 | 144.93760 | 1.08537 | 0.82516 | 46.58620 | 155.12210 | 1.28473 | 1.01383 | 49.91570 |
| 400 | 124.02390 | 0.98026 | 0.71389 | 40.32420 | 118.89550 | 1.02941 | 0.78031 | 38.66780 |
| 500 | 106.35330 | 0.88719 | 0.63963 | 35.02960 | 109.87490 | 0.94046 | 0.70658 | 35.93210 |
| 600 | 92.64850 | 0.80836 | 0.57700 | 30.53040 | 99.68540 | 0.86816 | 0.63674 | 32.95510 |
| 700 | 85.79080 | 0.76064 | 0.53769 | 28.42970 | 91.96670 | 0.81283 | 0.57569 | 30.78660 |
| 900 | 80.33070 | 0.67829 | 0.47008 | 27.21540 | 75.74920 | 0.66713 | 0.49281 | 25.02090 |
| 1000 | 73.46140 | 0.63785 | 0.45131 | 24.42360 | 74.63970 | 0.66639 | 0.47610 | 24.93790 |

**Çizelge5.5.(Devam)**

| $\hat{\alpha}$ için Bootstrap Kapsama olasılıkları | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\alpha}_{(Norm)}$ | $\hat{\alpha}_{(basic)}$ | $\hat{\alpha}_{(perc.)}$ | $\hat{\alpha}_{(Norm)}$ | $\hat{\alpha}_{(basic)}$ | $\hat{\alpha}_{(perc.)}$ |
| 50 | 0.975 | 0.957 | 0.996 | 0.740 | 0.579 | 0.917 |
| 100 | 0.944 | 0.957 | 0.987 | 0.815 | 0.688 | 0.945 |
| 200 | 0.931 | 0.933 | 0.990 | 0.879 | 0.795 | 0.945 |
| 300 | 0.942 | 0.949 | 0.997 | 0.904 | 0.870 | 0.950 |
| 400 | 0.893 | 0.892 | 1 | 0.906 | 0.857 | 0.954 |
| 500 | 0.894 | 0.906 | 1 | 0.907 | 0.877 | 0.946 |
| 600 | 0.892 | 0.890 | 0.999 | 0.912 | 0.879 | 0.953 |
| 700 | 0.925 | 0.891 | 0.998 | 0.918 | 0.877 | 0.953 |
| 900 | 0.937 | 0.891 | 1 | 0.909 | 0.898 | 0.964 |
| 1000 | 0.921 | 0.898 | 0.998 | 0.910 | 0.888 | 0.957 |

**Çizelge5.5.(Devam)**

| $\hat{\alpha}$ için Bootstrap Genişlikleri | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\alpha}_{(Norm)}$ | $\hat{\alpha}_{(basic)}$ | $\hat{\alpha}_{(perc.)}$ | $\hat{\alpha}_{(Norm)}$ | $\hat{\alpha}_{(basic)}$ | $\hat{\alpha}_{(perc.)}$ |
| 50 | 2.32699 | 2.41494 | 2.41494 | 0.16047 | 0.14641 | 0.14641 |
| 100 | 1.72841 | 1.84017 | 1.84017 | 0.13524 | 0.12612 | 0.12612 |
| 200 | 1.26690 | 1.34044 | 1.34044 | 0.10478 | 0.10042 | 0.10042 |
| 300 | 1.12518 | 1.18773 | 1.18773 | 0.08635 | 0.08492 | 0.08492 |
| 400 | 1.04513 | 1.08253 | 1.08253 | 0.08078 | 0.07899 | 0.07899 |
| 500 | 0.95689 | 0.99219 | 0.99219 | 0.07381 | 0.07271 | 0.07271 |
| 600 | 0.89326 | 0.92141 | 0.92141 | 0.06963 | 0.06865 | 0.06865 |
| 700 | 0.83332 | 0.82422 | 0.82422 | 0.06522 | 0.06443 | 0.06443 |
| 900 | 0.71778 | 0.69430 | 0.69435 | 0.05733 | 0.05699 | 0.05699 |
| 1000 | 0.66912 | 0.65329 | 0.65329 | 0.05407 | 0.05387 | 0.05387 |

**Çizelge5.5.(Devam)**

| $\hat{\beta}$ için Bootstrap Kapsama olasılıkları | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\beta}_{(Norm)}$ | $\hat{\beta}_{(Basic)}$ | $\hat{\beta}_{(Perc.)}$ | $\hat{\beta}_{(Norm)}$ | $\hat{\beta}_{(Basic)}$ | $\hat{\beta}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.971 | 0.547 | 0.959 | 0.781 | 0.566 | 0.941 |
| 100 | 0.935 | 0.660 | 0.946 | 0.838 | 0.651 | 0.943 |
| 200 | 0.904 | 0.756 | 0.946 | 0.875 | 0.771 | 0.953 |
| 300 | 0.915 | 0.799 | 0.961 | 0.903 | 0.849 | 0.950 |
| 400 | 0.914 | 0.835 | 0.954 | 0.904 | 0.852 | 0.959 |
| 500 | 0.923 | 0.855 | 0.961 | 0.898 | 0.844 | 0.958 |
| 600 | 0.916 | 0.853 | 0.959 | 0.900 | 0.870 | 0.961 |
| 700 | 0.939 | 0.902 | 0.969 | 0.912 | 0.872 | 0.955 |
| 900 | 0.942 | 0.902 | 0.968 | 0.896 | 0.859 | 0.955 |
| 1000 | 0.933 | 0.892 | 0.965 | 0.900 | 0.873 | 0.959 |

**Çizelge5.5.(Devam)**

| $\hat{\beta}$ **için Bootstrap Genişlikleri** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\beta}_{(Norm)}$ | $\hat{\beta}_{(Basic)}$ | $\hat{\beta}_{(Perc.)}$ | $\hat{\beta}_{(Norm)}$ | $\hat{\beta}_{(Basic)}$ | $\hat{\beta}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 6.03612 | 5.40278 | 5.40278 | 1.42047 | 1.31131 | 1.31131 |
| 100 | 3.46001 | 3.25979 | 3.25979 | 1.21832 | 1.14843 | 1.14843 |
| 200 | 2.24676 | 2.16602 | 2.16602 | 0.9390 | 0.89725 | 0.89725 |
| 300 | 1.66031 | 1.61088 | 1.61088 | 0.79475 | 0.78190 | 0.78190 |
| 400 | 1.32805 | 1.30086 | 1.30086 | 0.74996 | 0.73386 | 0.73386 |
| 500 | 1.12012 | 1.09445 | 1.09445 | 0.68831 | 0.67851 | 0.67851 |
| 600 | 0.98498 | 0.96231 | 0.96231 | 0.65856 | 0.64769 | 0.64769 |
| 700 | 0.89513 | 0.88082 | 0.88082 | 0.62414 | 0.61582 | 0.61582 |
| 900 | 0.76176 | 0.75382 | 0.75382 | 0.53732 | 0.53482 | 0.53482 |
| 1000 | 0.69526 | 0.69102 | 0.69102 | 0.51349 | 0.50967 | 0.50967 |

**Çizelge5.5.(Devam)**

| $\hat{\theta}$ **için Bootstrap Kapsama olasılıkları** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\theta}_{(Norm)}$ | $\hat{\theta}_{(Basic)}$ | $\hat{\theta}_{(Perc)}$ | $\hat{\theta}_{(Norm)}$ | $\hat{\theta}_{(Basic)}$ | $\hat{\theta}_{(Perc)}$ |
| 50 | 0.94 | 0.916 | 0.948 | 0.879 | 0.847 | 0.908 |
| 100 | 0.931 | 0.925 | 0.936 | 0.925 | 0.890 | 0.927 |
| 200 | 0.941 | 0.939 | 0.936 | 0.932 | 0.880 | 0.945 |
| 300 | 0.964 | 0.962 | 0.956 | 0.946 | 0.921 | 0.946 |
| 400 | 0.962 | 0.962 | 0.949 | 0.945 | 0.916 | 0.953 |
| 500 | 0.961 | 0.960 | 0.954 | 0.941 | 0.916 | 0.945 |
| 600 | 0.961 | 0.963 | 0.951 | 0.946 | 0.922 | 0.959 |
| 700 | 0.971 | 0.968 | 0.969 | 0.932 | 0.910 | 0.955 |
| 900 | 0.963 | 0.960 | 0.963 | 0.926 | 0.906 | 0.955 |
| 1000 | 0.955 | 0.952 | 0.960 | 0.923 | 0.902 | 0.963 |

**Çizelge5.5.(Devam)**

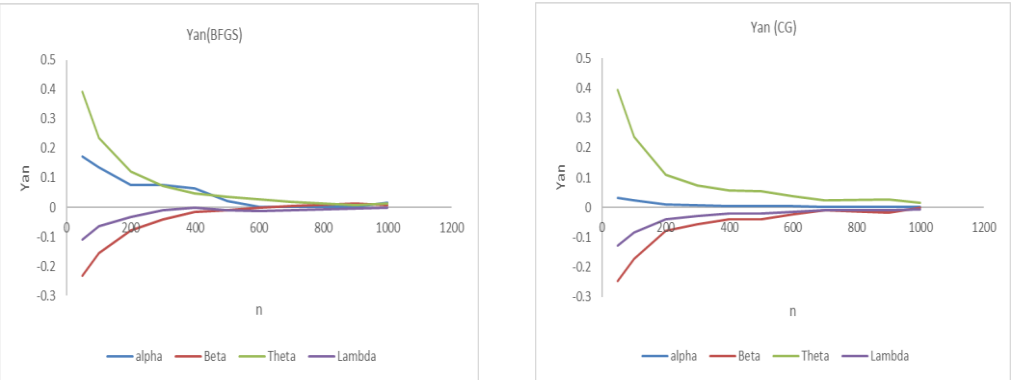
| $\hat{\theta}$ **için Bootstrap Genişlikleri** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **(BFGS)** | | | **(CG)** | | |
| $n$ | $\hat{\theta}_{(Norm)}$ | $\hat{\theta}_{(Basic)}$ | $\hat{\theta}_{(Perc)}$ | $\hat{\theta}_{(Norm)}$ | $\hat{\theta}_{(Basic)}$ | $\hat{\theta}_{(Perc)}$ |
| 50 | 2.27683 | 2.16928 | 2.16928 | 1.89265 | 1.78464 | 1.78464 |
| 100 | 1.50466 | 1.47687 | 1.47687 | 1.33345 | 1.27872 | 1.27872 |
| 200 | 1.03807 | 1.03832 | 1.03832 | 0.88677 | 0.86013 | 0.86013 |
| 300 | 0.83333 | 0.83914 | 0.83914 | 0.69022 | 0.68335 | 0.68335 |
| 400 | 0.71168 | 0.71599 | 0.71599 | 0.62563 | 0.61592 | 0.61592 |
| 500 | 0.63434 | 0.63837 | 0.63837 | 0.56197 | 0.55602 | 0.55602 |
| 600 | 0.58032 | 0.58339 | 0.58339 | 0.51781 | 0.51179 | 0.51179 |
| 700 | 0.53569 | 0.53883 | 0.53883 | 0.47627 | 0.47165 | 0.47165 |
| 900 | 0.46809 | 0.47081 | 0.47081 | 0.41686 | 0.41509 | 0.41509 |
| 1000 | 0.44197 | 0.44428 | 0.44428 | 0.38910 | 0.38759 | 0.38759 |

**Çizelge5.5.(Devam)**

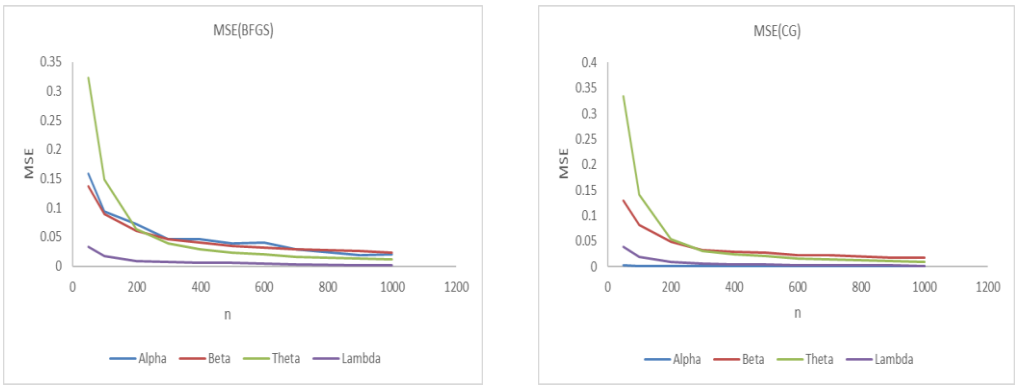
| $\hat{\lambda}$ için Bootstrap Kapsama olasılıkları | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.843 | 0.738 | 0.958 | 0.793 | 0.694 | 0.925 |
| 100 | 0.882 | 0.838 | 0.957 | 0.877 | 0.794 | 0.946 |
| 200 | 0.918 | 0.896 | 0.973 | 0.918 | 0.852 | 0.945 |
| 300 | 0.935 | 0.901 | 0.981 | 0.926 | 0.902 | 0.950 |
| 400 | 0.892 | 0.865 | 0.986 | 0.934 | 0.896 | 0.955 |
| 500 | 0.892 | 0.844 | 0.997 | 0.924 | 0.901 | 0.947 |
| 600 | 0.879 | 0.840 | 0.995 | 0.931 | 0.908 | 0.954 |
| 700 | 0.917 | 0.836 | 0.995 | 0.928 | 0.892 | 0.955 |
| 900 | 0.930 | 0.847 | 0.996 | 0.923 | 0.900 | 0.963 |
| 1000 | 0.913 | 0.893 | 0.999 | 0.922 | 0.904 | 0.960 |

**Çizelge5.5.(Devam)**

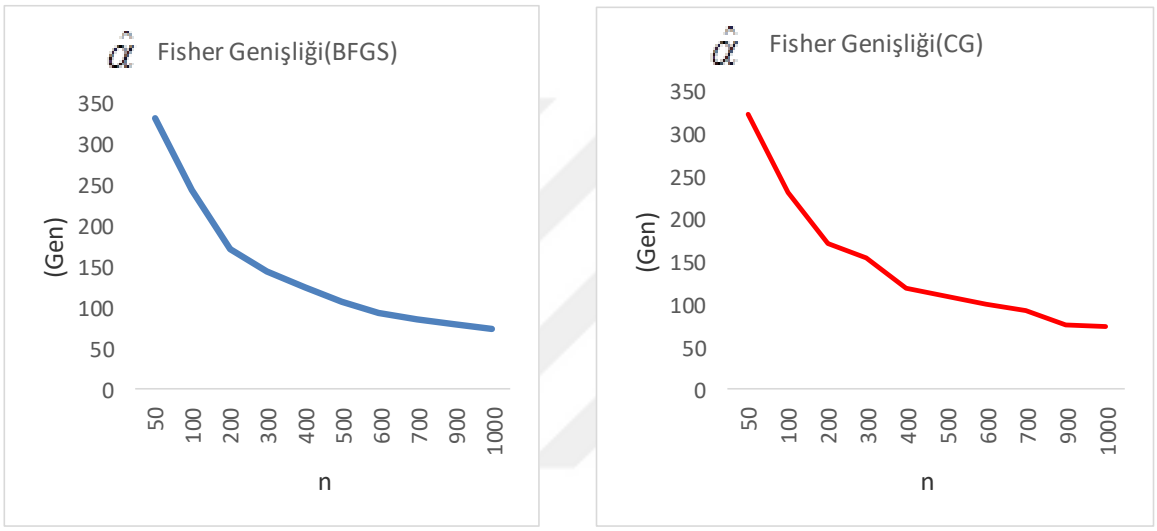
| $\hat{\lambda}$ için Bootstrap Genişlikleri | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (BFGS) | | | (CG) | | |
| $n$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ | $\hat{\lambda}_{(Norm)}$ | $\hat{\lambda}_{(Basic)}$ | $\hat{\lambda}_{(Perc.)}$ |
| 50 | 0.71225 | 0.68401 | 0.68401 | 0.60092 | 0.54918 | 0.54918 |
| 100 | 0.52624 | 0.54263 | 0.54263 | 0.48663 | 0.45956 | 0.45956 |
| 200 | 0.44187 | 0.45305 | 0.45305 | 0.35323 | 0.34177 | 0.34177 |
| 300 | 0.40639 | 0.40974 | 0.40974 | 0.28557 | 0.28243 | 0.28243 |
| 400 | 0.33219 | 0.34316 | 0.34316 | 0.26129 | 0.25688 | 0.25688 |
| 500 | 0.32471 | 0.32599 | 0.32599 | 0.23664 | 0.23408 | 0.23408 |
| 600 | 0.29363 | 0.29145 | 0.29145 | 0.21934 | 0.21685 | 0.21685 |
| 700 | 0.27646 | 0.26459 | 0.26459 | 0.20293 | 0.20091 | 0.20091 |
| 900 | 0.23641 | 0.22416 | 0.22416 | 0.17832 | 0.17754 | 0.17754 |
| 1000 | 0.22307 | 0.21857 | 0.21857 | 0.16668 | 0.16628 | 0.16628 |

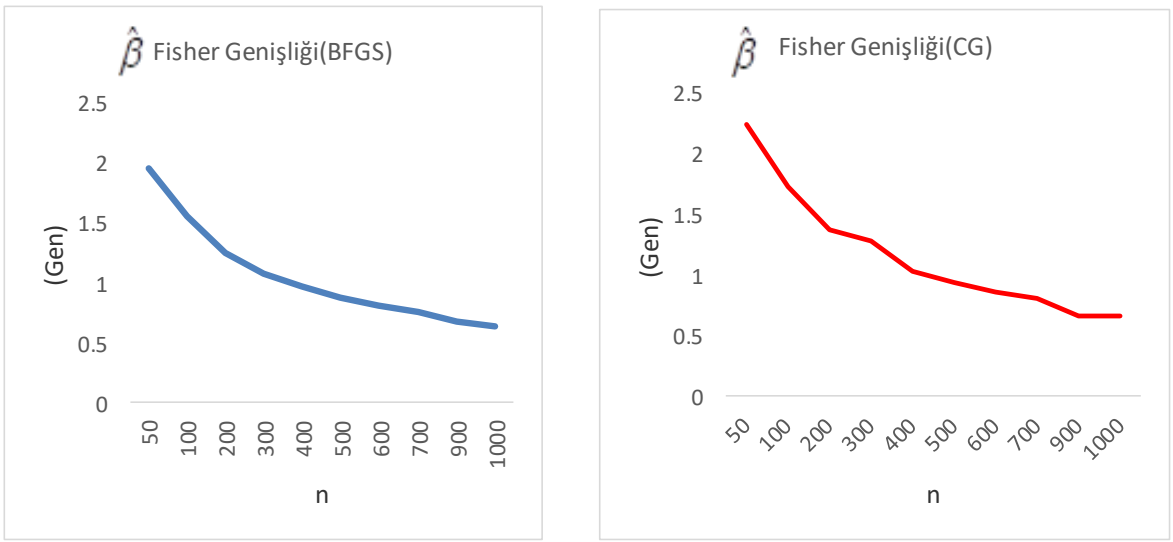


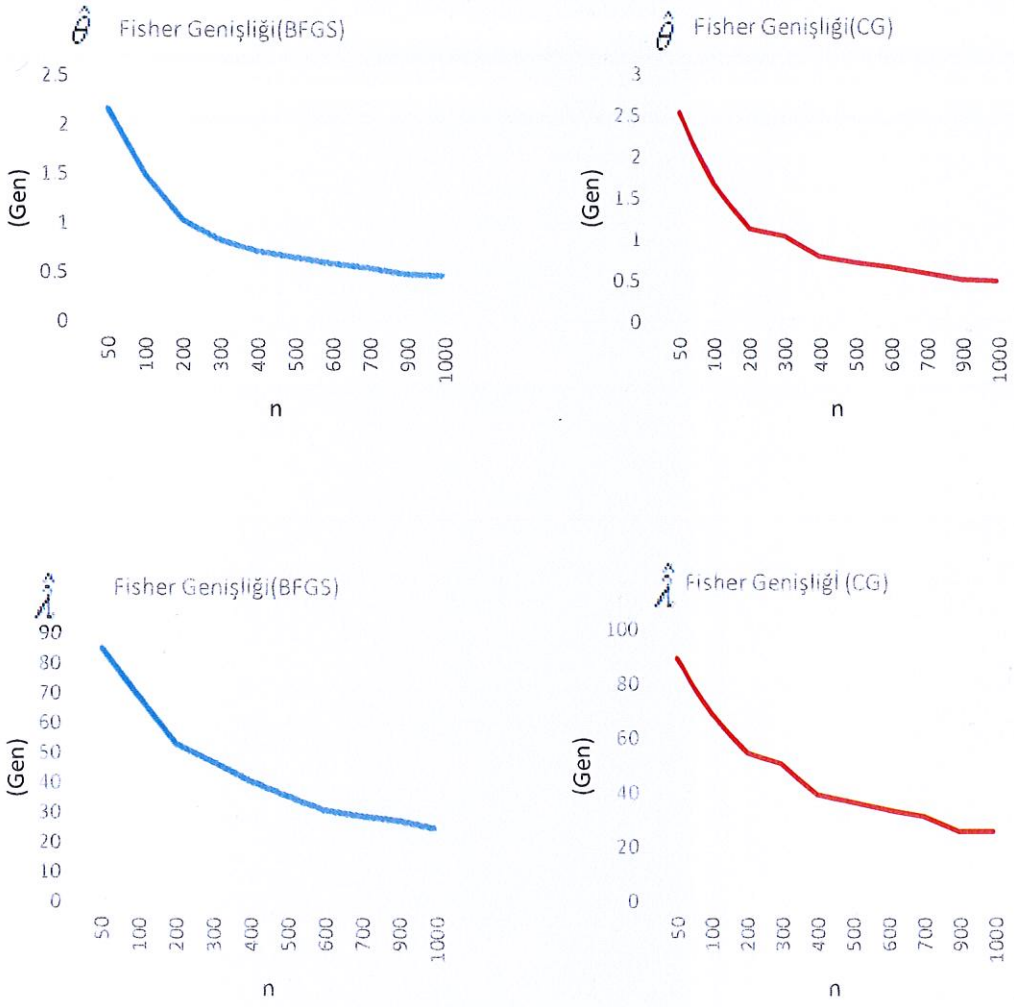

**Şekil 5.14**.EP-Ch dağılımının parametreleri için yan



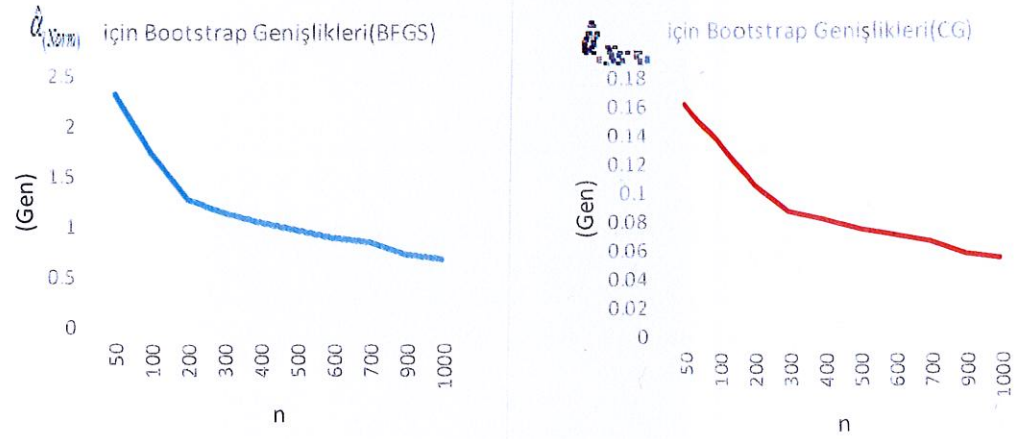

**Şekil 5.15**.EP-Ch dağılımının parametreleri için MSE 'ler.

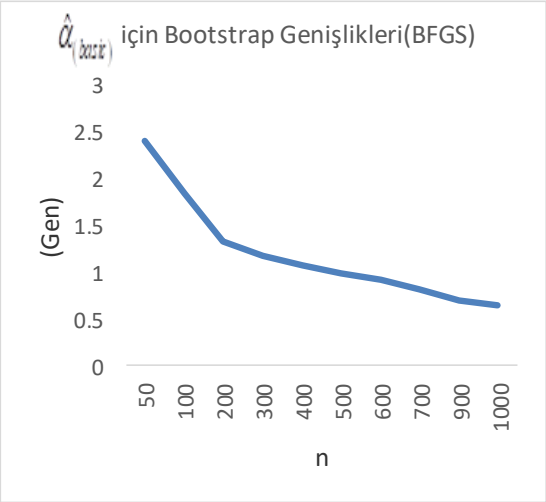


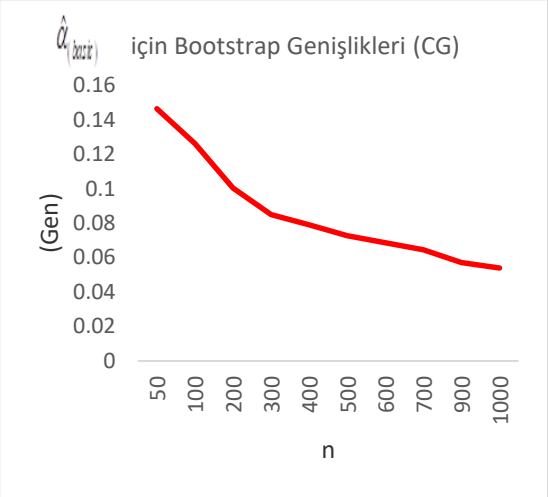



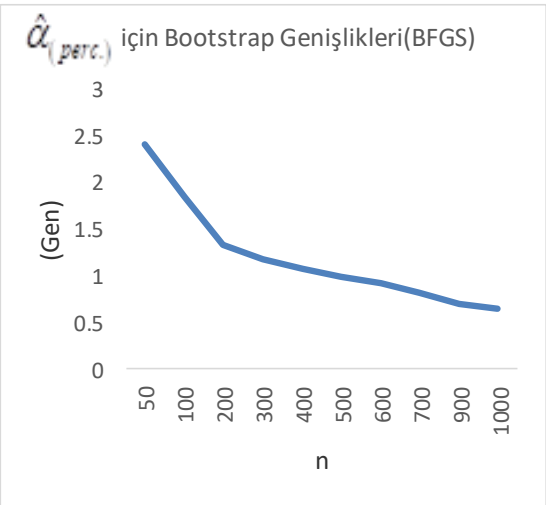


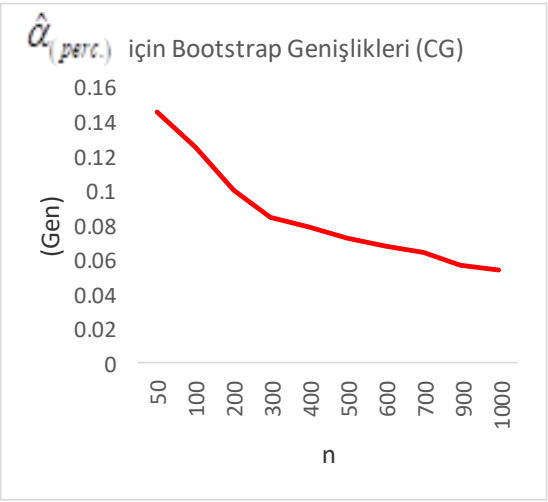

**Şekil 5.16.** EP-Ch dağılımının çeşitli parametre değerlerine ilişkin Fisher Genişlikleri

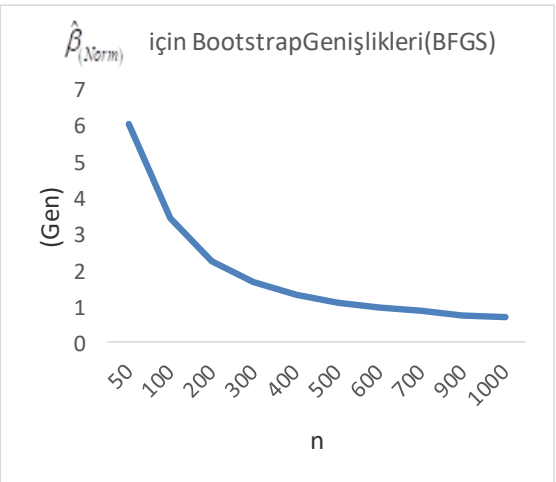


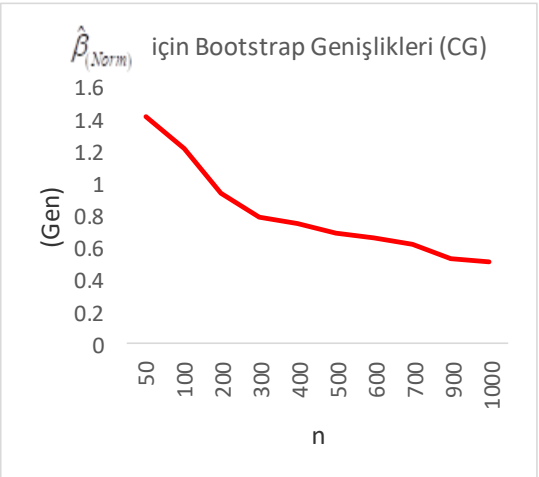

$\hat{\alpha}_{(bazit)}$ için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
50 100 200 300 400 500 600 700 900 1000
n

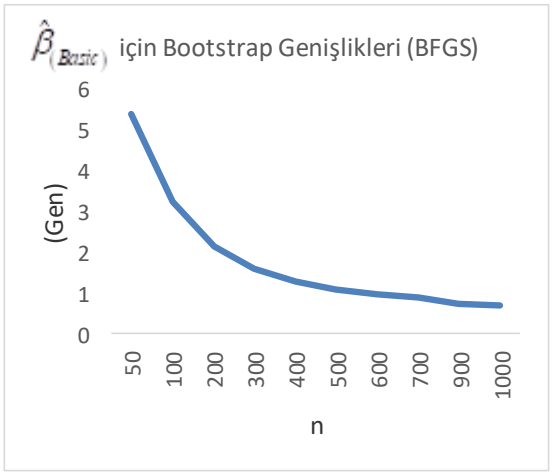

$\hat{\alpha}_{(bazit)}$ için Bootstrap Genişlikleri (CG)
(Gen)
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
50 100 200 300 400 500 600 700 900 1000
n

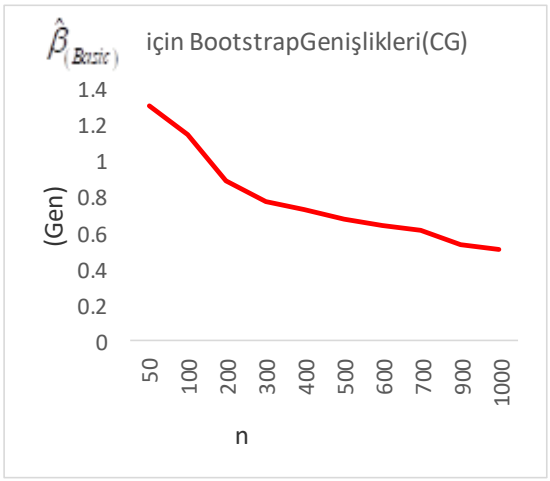

$\hat{\alpha}_{(perc.)}$ için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
50 100 200 300 400 500 600 700 900 1000
n

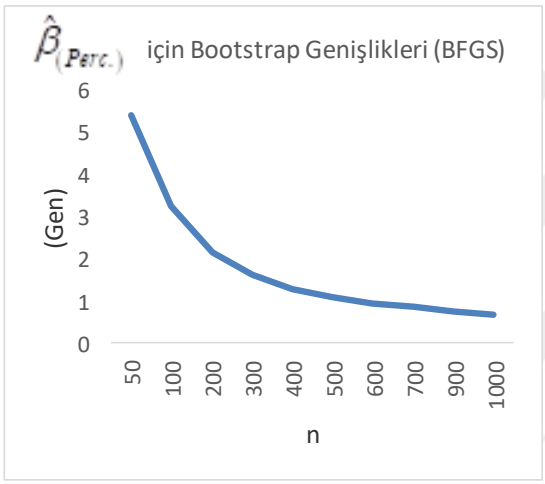

$\hat{\alpha}_{(perc.)}$ için Bootstrap Genişlikleri (CG)
(Gen)
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
50 100 200 300 400 500 600 700 900 1000
n

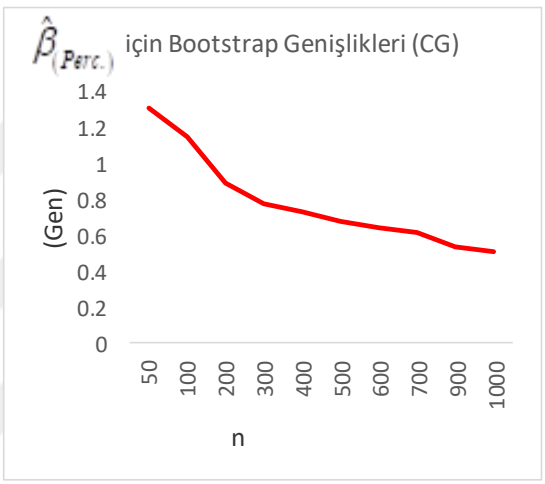

$\hat{\beta}_{(Norm)}$ için BootstrapGenişlikleri(BFGS)
(Gen)
7
6
5
4
3
2
1
0
50 100 200 300 400 500 600 700 900 1000
n

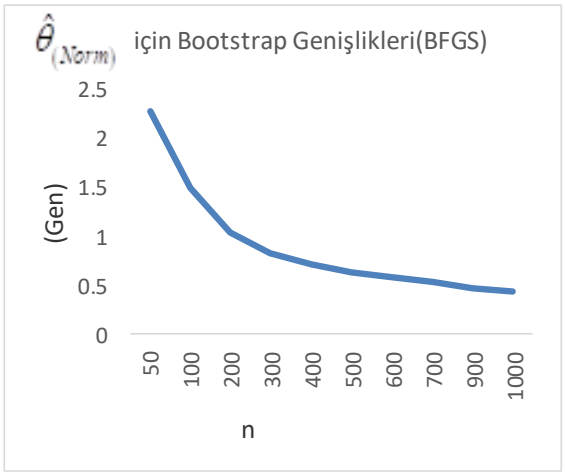

$\hat{\beta}_{(Norm)}$ için Bootstrap Genişlikleri (CG)
(Gen)
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
50 100 200 300 400 500 600 700 900 1000
n

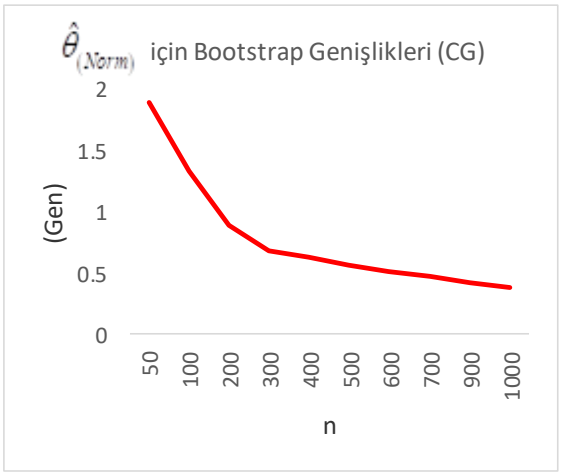

$\hat{\beta}_{(Basic)}$ için Bootstrap Genişlikleri (BFGS)
(Gen)
0
1
2
3
4
5
6
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n

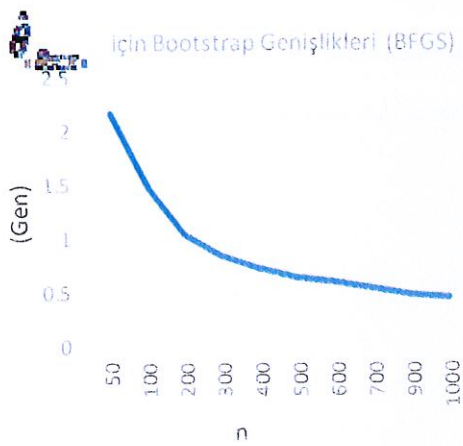

$\hat{\beta}_{(Basic)}$ için BootstrapGenişlikleri(CG)
(Gen)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n

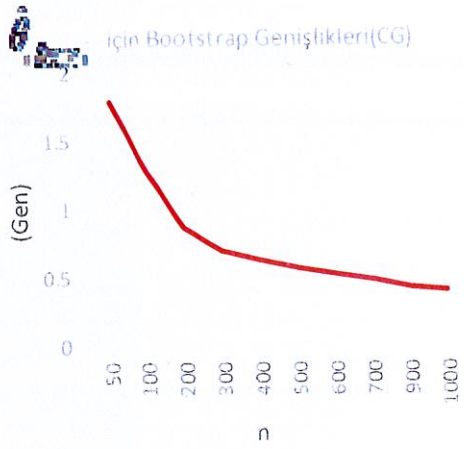

$\hat{\beta}_{(Perc.)}$ için Bootstrap Genişlikleri (BFGS)
(Gen)
0
1
2
3
4
5
6
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n

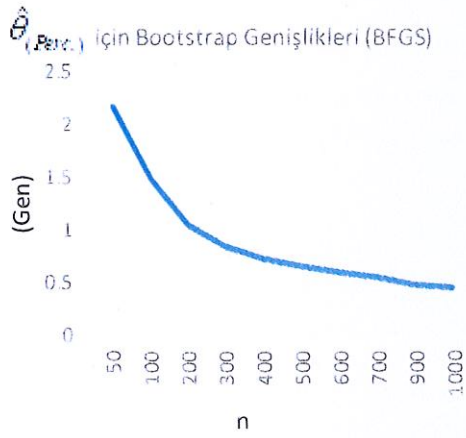

$\hat{\beta}_{(Perc.)}$ için Bootstrap Genişlikleri (CG)
(Gen)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n

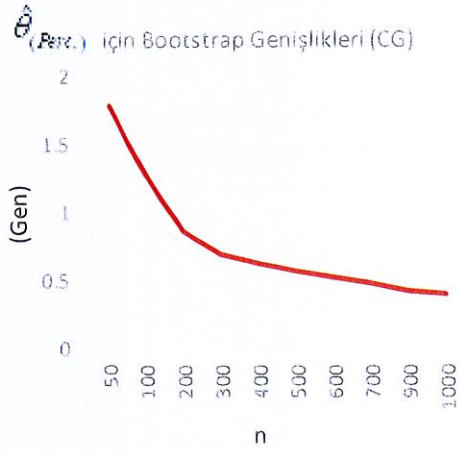

$\hat{\theta}_{(Norm)}$ için Bootstrap Genişlikleri(BFGS)
(Gen)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n

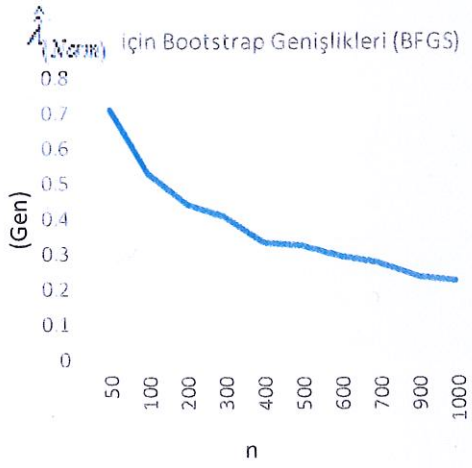

$\hat{\theta}_{(Norm)}$ için Bootstrap Genişlikleri (CG)
(Gen)
0
0.5
1
1.5
2
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n

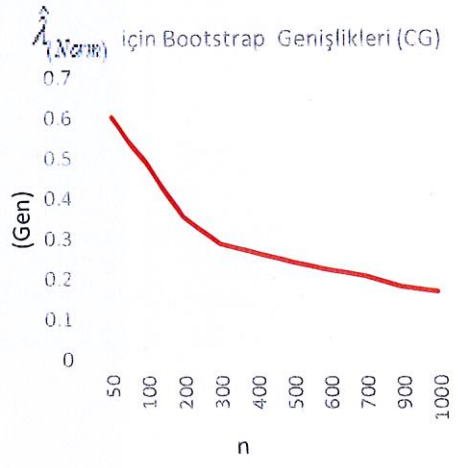

için Bootstrap Genişlikleri (BFGS)
(Gen)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n

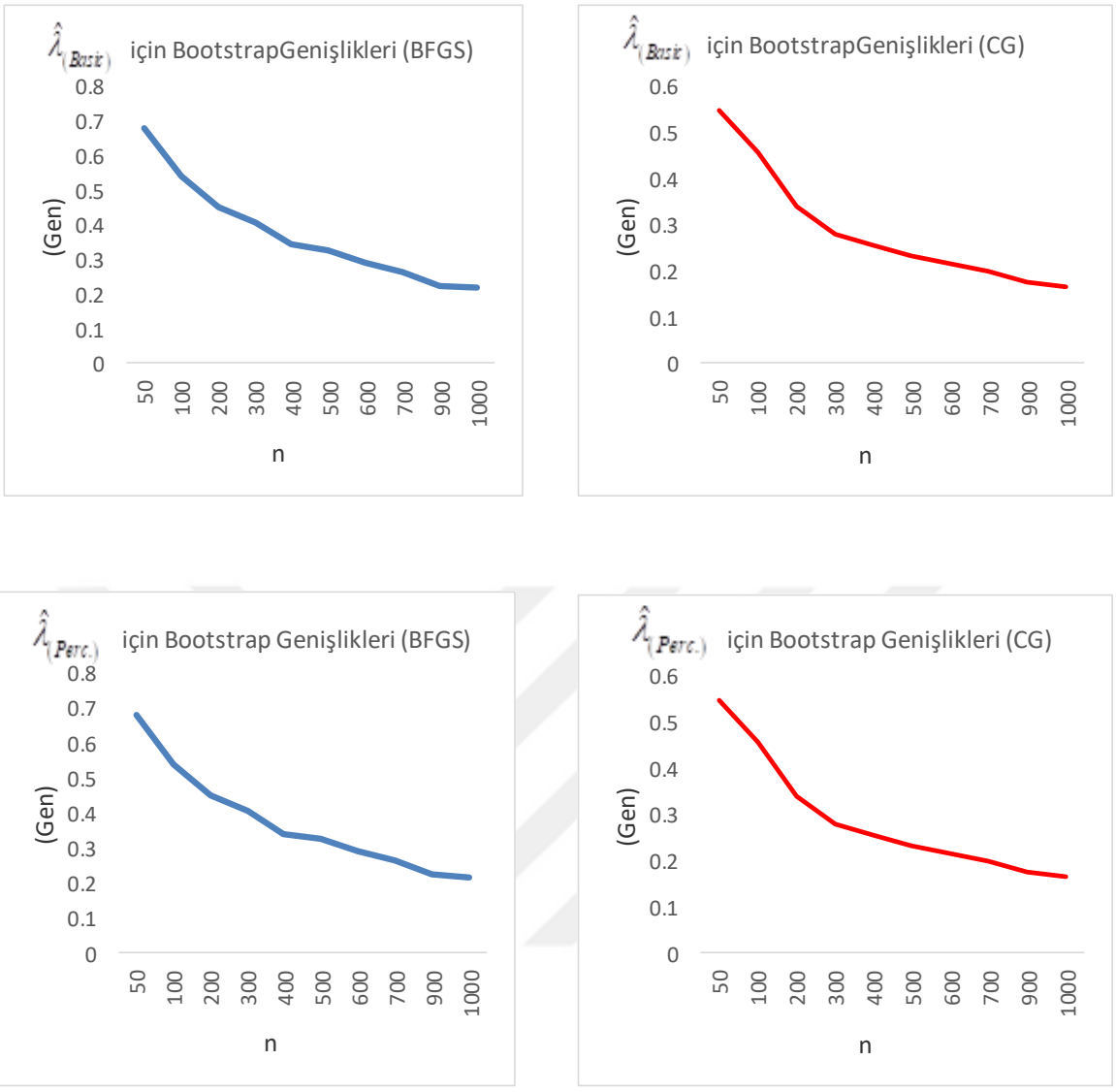

için Bootstrap Genişlikleri(CG)
(Gen)
2
1.5
1
0.5
0
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n


için Bootstrap Genişlikleri (BFGS)
(Gen)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n


için Bootstrap Genişlikleri (CG)
(Gen)
2
1.5
1
0.5
0
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n


için Bootstrap Genişlikleri (BFGS)
(Gen)
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n


için Bootstrap Genişlikleri (CG)
(Gen)
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50
100
200
300
400
500
600
700
900
1000
n




**Şekil 5.17**. EP-Ch dağılımının çeşitli parametre değerlerine ilişkin Bootstrap.

Yukarıdaki tablolar ve grafikler incelendiğinde her iki farklı parametre değerleri için aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

BFGS ve CG yöntemleri kullanılarak elde edilen EÇO tahmin edicilerinin yan ve MSE değerlerinin örneklem hacmi arttıkça düzenli bir şekilde azaldığı ve 0 değerine yaklaştığı görülmüştür. Ayrıca CG yöntemi ile elde edilen EÇO tahmin edicilerinin yan ve MSE değerlerinin BFGS yöntemine göre daha küçük ve örneklem hacmi arttıkça düzenli bir şekilde azaldığı gözlenmiştir.

Parametrelerin BFGS ve CG yöntemli EÇO tahmin edicilerine dayalı asimptotik güven aralıklarının (Fisher aralıkları) genişliklerinin $\alpha$ ve $\lambda$ parametreleri için çok yüksek olduğu gözlenirken $\beta$ ve $\theta$ için ise düşük olduğu ve ayrıca $\alpha, \beta, \theta$ ve $\lambda$ parametreleri için oluşturulan %95 'lik güven aralıklarının kapsama olasılıklarının

$\alpha$ ve $\lambda$ için hemen hemen her örneklem boyutu için 1 değerini alırken $\beta$ ve $\theta$ için ise kapsama olasılıklarının örneklem boyutu arttıkça 0.95 değerine ulaştığı gözlenmiştir. Dolayısıyla fisher aralıklarının sadece $\beta$ ve $\theta$ için aralık tahmin edicisi olarak kullanılmasının uygun olacağı ancak diğer parametreler için ise bu güven aralıklarının kullanılmaması gerektiği söylenebilir. Bu problemden dolayı normal, basic ve percentile isimli üç çeşit Bootstrap güven aralıkları BFGS ve CG yöntemlerinin kullanılmasıyla oluşturulmuş ve bu aralıkların genişlikleri incelendiğinde $\alpha, \beta, \theta$ ve $\lambda$ için CG yöntemli aralık genişliklerinin örneklem boyutunun artmasıyla azaldığı ve sıfır değerine yaklaştığı gözlenmekle beraber bu genişliklerin BFGS yöntemli genişliklere göre genelde daha küçük olduğu gözlenmiştir. Ayrıca $\beta$ ve $\theta$ için her iki yöntem ile oluşturulan fisher aralıkları ile normal, basic ve percentile bootstrap güven aralıklarının genişliklerinin ve kapsama olasılıklarının örneklem boyutunun artmasıyla birbirine yaklaştığı gözlenirken diğer parametreler için ise normal, basic ve percentile bootstrap güven aralıklarının genişliklerinin birbirlerine yaklaştıkları gözlenmiştir. Ayrıca CG ile elde edilen Bootstrap güven aralıklarının genişliklerinin bütün parametreler için BFGS yöntemine göre elde edilen aralıklara göre daha düşük olduğu gözlenmiştir. Ayrıca tüm parametreler için percentile bootstrap güven aralıklarının kullanılması önerilir.

## 5.6. Gerçek Veri Analizi

Bu bölümde EP-Ch modelinin gerçek veri setlerine uyumunu incelemek ve diğer dağılımlarla karşılaştırmak için gerçek bir veri uygulaması gerçekleştirilmektedir. Tez çalışmasının 3.4. bölümünde formülleri verilen uyum iyiliği ölçütlerinden AIC, AICc, BIC, HQIC, KS istatistiği ile -2log-olabilirlik değerleri kullanılarak dağılımların veri setlerine uygunlukları karşılaştırılmıştır. Gerçek veri analizi için ilk veri seti olarak Brezilyanın Carnauba çiftliğinde yaşayan 107 sığıra ilişkin toplam süt üretim oranlarına ilişkin veri seti kullanılmıştır. Bu veri seti (Khater ve ark., 2017) ,(Cordeiro ve dos Santos Brito, 2012) ve (de Brito-Ashurst ve ark., 2009) gibi birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bu veri seti aşağıdaki gibidir.

**Çizelge 5.6** Süt üretim oranlarına ilişkin veri seti1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.4365 | 0.6012 | 0.6789 | 0.5481 | 0.5627 | 0.4612 | 0.5349 | 0.6488 |
| 0.4260 | 0.1525 | 0.4576 | 0.1131 | 0.515 | 0.3188 | 0.3751 | 0.2747 |
| 0.5140 | 0.5483 | 0.3259 | 0.7290 | 0.0776 | 0.2160 | 0.1546 | |
| 0.6907 | 0.6927 | 0.2303 | 0.0168 | 0.3945 | 0.6707 | 0.4517 | |
| 0.7471 | 0.7261 | 0.7687 | 0.5529 | 0.4553 | 0.6220 | 0.2681 | |
| 0.2605 | 0.3323 | 0.4371 | 0.4530 | 0.4470 | 0.5629 | 0.4049 | |
| 0.6196 | 0.0671 | 0.3383 | 0.3891 | 0.5285 | 0.4675 | 0.5553 | |
| 0.8781 | 0.2361 | 0.6114 | 0.4752 | 0.5232 | 0.6844 | 0.5878 | |
| 0.4990 | 0.4800 | 0.348 | 0.3134 | 0.6465 | 0.3413 | 0.4741 | |
| 0.6058 | 0.5707 | 0.4564 | 0.3175 | 0.065 | 0.4332 | 0.3598 | |
| 0.6891 | 0.7131 | 0.7804 | 0.1167 | 0.8492 | 0.0854 | 0.7629 | |
| 0.5770 | 0.5853 | 0.3406 | 0.6750 | 0.8147 | 0.3821 | 0.5941 | |
| 0.5394 | 0.6768 | 0.4823 | 0.5113 | 0.3627 | 0.4694 | 0.6174 | |
| 0.1479 | 0.5350 | 0.5912 | 0.5447 | 0.3906 | 0.3635 | 0.6860 | |
| 0.2356 | 0.4151 | 0.5744 | 0.4143 | 0.4438 | 0.4111 | 0.0609 | |

---

İkinci veri seti olarak ise büyük bir sistemde yaşam testine tabi tutulan 30 aygıtın çeşitli sebepler ile bozulma zamanlarını gösteren ve (Meeker ve Escobar, 1998) tarafından elde edilen aşağıdaki veri seti kullanılmıştır (Merovci ve Elbatal, 2015) bu veri setinin kendileri tarafından tanıtılan Weibull-Rayleigh dağılımına uyum gösterdiğini çeşitli uyum iyiliği kriterlerini kullanarak göstermişlerdir.

**Çizelge 5.7.** Aygıtların bozulma zamanlarına ilişkin veri seti (Veri Seti 2)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.75 | 0.13 | 1.47 | 0.23 | 1.81 | 0.30 | 0.65 | 0.10 | 3.00 | 1.73 |
| 1.06 | 3.00 | 3.00 | 2.12 | 3.00 | 3.00 | 3.00 | 0.02 | 2.61 | 2.93 |
| 0.88 | 2.47 | 0.28 | 1.43 | 3.00 | 0.23 | 3.00 | 0.80 | 2.45 | 2.66 |

Bu veri setleri için, EP-Chen dağılımı ile literatürde mevcut bazı sürekli dağılımların bazı uyum iyiliği kriterleri açısından karşılaştırılmış ve sonuçlar, veri seti 1 için Çizelge 5.8 ’de ve veri seti 2 için ise Çizelge 5.12 ’de gösterilmiştir. Ayrıca bu dağılımlara ilişkin en çok olabilirlik tahminleri ve bu tahminlere ilişkin standart hatalar ile BFGS ve CG yöntemli bootstrap güven aralıkları ve genişliklerine ilişkin sonuçlar veri seti 1 için Çizelge 5.8, Çizelge 5.9, Çizelge 5.10 ve Çizelge 5.11’de, veri seti 2 için ise Çizelge 5.12, Çizelge 5.13, Çizelge 5.14 ve Çizelge 5.15 'de verilmiştir.

**Çizelge 5.8.** Veri seti 1 için seçim kriterleri istatistikleri

| | EP-Ch | EP-W | W | TEE | CH | TW | LW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LogL | **28.2874** | 27.1128 | 21.3475 | 10.0882 | 24.2291 | 22.9188 | 23.6708 |
| -2LogL | **-56.5748** | -54.2257 | -42.6950 | -20.1764 | -48.4583 | -45.8377 | -47.3417 |
| AIC | **-48.5748** | -48.2257 | -38.6950 | -14.1764 | -44.4584 | -39.8377 | -41.3417 |
| BIC | **-37.8835** | -40.2072 | -33.3493 | -6.1579 | **-39.1127** | -31.8192 | -33.3232 |
| AICc | **-48.1827** | -47.9927 | -38.5796 | -13.9434 | -44.3430 | -39.6047 | -41.1087 |
| HQIC | **-44.2407** | -44.9751 | -36.5280 | -10.9258 | -42.2913 | -36.58711 | -38.0911 |
| KS_istat. | **0.0658** | 0.06660 | 0.0832 | 0.1232 | 0.0758 | 0.06762 | 0.0653 |
| p-değeri | **0.7427** | 0.7298 | 0.4487 | 0.0777 | 0.5706 | 0.7122 | 0.7517 |

**Çizelge 5.9.** Veri seti 1 için Parametre tahminleri (standart hatalar)

| Dağılımlar | EÇO tahminleri (Standart hatalar) |
|---|---|
| EP-Ch | $\alpha$=2.7199 (92.6866), $\beta$=1.9744 (1.8712), $\hat{\theta}$=0.7611 (0.8204), $\hat{\lambda}$ = 2.5583 (87.2122) |
| EP-W | $\hat{\lambda}$=0.8752(3.8836), $\hat{\delta}$=1.9788(0.1612), $\hat{\psi}$=0.3261(2.8628) |
| W | $\hat{\lambda}$=1.9098 (0.0739), $\hat{\theta}$=2.6012 (0.2098) |
| TEE | $\hat{\lambda}$= – 0.6874 (0.1415), $\beta$=4.7499 (0.4033), $\alpha$=3.1199 (0.5967) |
| Chen | $\hat{\lambda}$=3.9085(0.6125), $\hat{\theta}$=2.3318 (0.2112) |
| TW | $\hat{\eta}$= – 0.4801 (0.2084), $\hat{\lambda}$=2.1199 (0.1304), $\hat{\theta}$=2.3229 (0.2388) |
| LW | $\alpha$=3.0721 (1.1522), $\beta$=2.2558 (0.2360), $\hat{\theta}$=0.5823 (0.3865) |

**Çizelge 5.10.** Veri seti 1 için EP-Ch dağılımına ilişkin Bootstrap Güven Aralıkları (BFGS)(B=1000)

| parametre | Normal | Basic | Percentile |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | (2.0360, 3.5560) | (2.0840, 3.6620) | (1.7780, 3.3560) |
| $\beta$ | (0, 7.0060) | (0, 2.9620) | (0.9860, 13.4560) |
| $\theta$ | (0, 1.6345) | (0, 1.4187) | (0.1035, 1.6365) |
| $\lambda$ | (1.6890, 3.4920) | (1.8560, 3.8010) | (1.3160, 3.2600) |

**Çizelge 5.11.** Veri seti 1 için EP-Ch dağılımına ilişkin Bootstrap Güven Aralıkları (CG)(B=1000)

| parametre | Normal | Basic | Percentile |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | (2.5290, 2.9920) | (2.5840, 3.0460) | (2.3940, 2.8560) |
| $\beta$ | (1.3880, 2.6230) | (1.4390, 2.6560) | (1.293, 2.5100) |
| $\theta$ | (0.4214, 1.0030 ) | (0.3230, 0.9266 ) | (0.5956, 1.1992) |
| $\lambda$ | (2.2860, 2.7520) | (2.2410, 2.7080 ) | (2.409, 2.8750) |

Bu güven aralıkları oluşturulurken başlangıç noktası olarak Çizelge 5.9' daki EÇO tahminleri kullanılmış olup bu tahminlerin gerek BFGS gerekse CG yöntemi ile elde edilen aralıklar tarafından kapsandığı çizelge 5.10 - 5.11 'den görülmektedir. Tablolardan görüldüğü üzere genelde CG ile elde edilen Bootstrap güven aralıklarının BFGS yöntemine göre daha dar olduğundan bu veri için CG ile elde edilen güven aralıklarının kullanılması önerilir.

**Çizelge 5.12.** Veri seti 2 için seçim kriterleri istatistikleri

| | EP-Ch | EPW | W | EP | EE | TEE | CH | GOMP | TW | LW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LogL | **-35,5599** | -42.7214 | -46.1587 | -42.7214 | -46.9569 | -46.2865 | -41.0704 | -41.3460 | -45.8659 | -45.5257 |
| -2LogL | **71,12214** | 85.4428 | 92.3175 | 85.4428 | 93.91389 | 92.5730 | 82.1407 | 82.6919 | 91.7318 | 91.0514 |
| AIC | **79,12214** | 91.4428 | 96.3175 | 89.4428 | 97.91389 | 98.5730 | 86.1407 | 86.6919 | 97.7320 | 97.0514 |
| BIC | **84,72693** | 95.6464 | 99.1199 | 92.2452 | 100.7163 | 102.7766 | 88.9431 | 89.4943 | 101.9354 | 101.2550 |
| AICc | **80,72214** | 92.3658 | 96.7619 | 89.8872 | 98.3583 | 99.4961 | 86.5852 | 87.1363 | 98.6549 | 97.9745 |
| HQIC | **80,91516** | 92.7875 | 97.2140 | 90.3393 | 98.8104 | 99.9178 | 87.0372 | 87.5884 | 99.0766 | 98.3962 |
| KS_istat | **0,159831** | 0.2234 | 0.2194 | 0.2234 | 0.21560 | 0.2097 | 0.1917 | 0.1887 | 0.2132 | 0.2141 |
| p-değeri | **0,427538** | 0.1001 | 0.1114 | 0.1001 | 0.1217 | 0.1429 | 0.2200 | 0.2355 | 0.1307 | 0.1277 |

**Çizelge 5.13.** Veri seti 2 için Parametre tahminleri (standart hatalar)

| Dağılımlar | EÇO tahminleri (Standart hatalar) |
|---|---|
| EP-Ch | $\hat{\alpha}$=1.2221 (6.7330), $\hat{\beta}$=0.3661(0.2395), $\hat{\theta}$=1.4368(0.5701), $\hat{\lambda}$ = 0.0147 (0.0539) |
| EP-W | $\hat{\lambda}$=0.4340 (25.0683), $\hat{\delta}$=1.1028 (0.1902), $\psi$=1.2140 (77.3272) |
| W | $\hat{\lambda}$=0.5318 (0.07979), $\hat{\theta}$=1.2650 (0.2044) |
| EP | $\alpha$=2.7471 (0.2825), $\beta$=1.1028 (0.1902) |
| EE | $\beta$=0.6161 (0.1369), $\hat{\lambda}$=1.1543 (0.2734) |
| TEE | $\hat{\lambda}$= – 0.4800 (0.3857), $\beta$=0.6829 (0.1441), $\alpha$=0.9805 (0.3349) |
| Chen | $\hat{\lambda}$=0.1726 (0.0571), $\hat{\theta}$=0.8485 (0.1101) |
| GOMP | $\hat{\lambda}$=0.1848 (0.0803), $c$=0.7403 (0.2228) |
| TW | $\hat{\eta}$= – 0.2907 (0.3499), $\hat{\lambda}$=0.5976 (0.1242), $\hat{\theta}$=1.2009 (0.2237) |
| LW | $\alpha$=0.7429 (0.8120), $\beta$=1.1808 (0.2226), $\hat{\theta}$=1.0273 (1.0885) |

**Çizelge 5.14.** Veri seti 2 için EP-Ch dağılımına ilişkin Bootstrap Güven Aralıkları (BFGS)(B=1000)

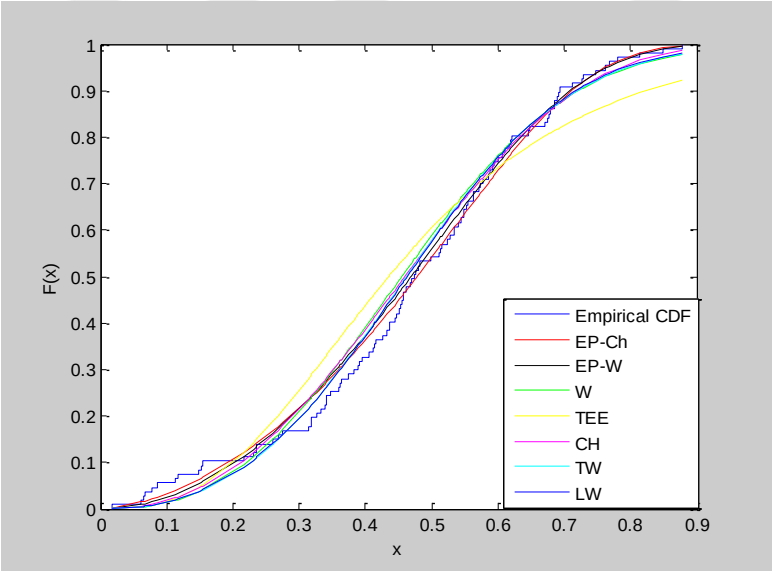
| parametre | Normal | Basic | Percentile |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | (0, 4.8070 ) | (0, 4.0860 ) | (0.4230, 6.2680 ) |
| $\beta$ | (0, 0.5122 ) | (0, 0.2895 ) | (0.1873, 0.4978) |
| $\theta$ | ( 1.5020, 2.4040 ) | ( 1.7090, 2.5770) | (1.0890, 1.9560 ) |
| $\lambda$ | (0, 0.0165 ) | (0, 0.0032 ) | (0.0021, 0.0319) |

**Çizelge 5.15.** Veri seti 2 için EP-Ch dağılımına ilişkin Bootstrap Güven Aralıkları (CG)(B=1000)

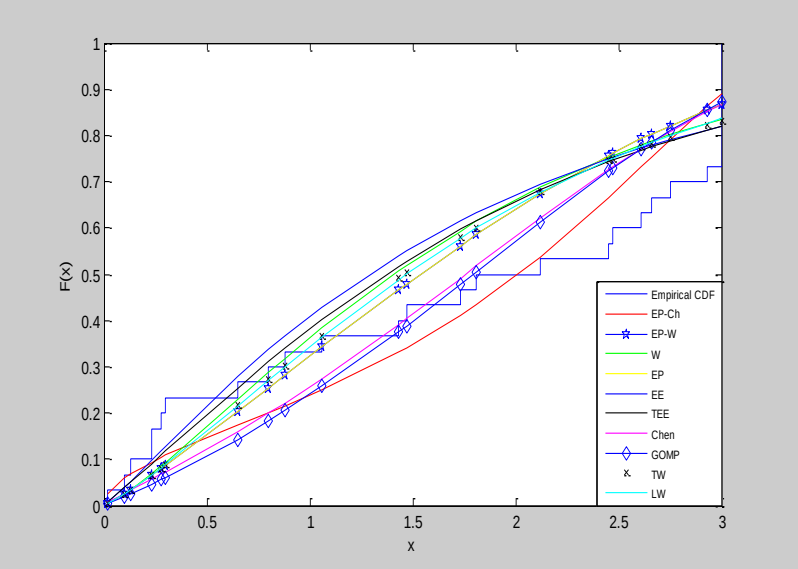
| parametre | Normal | Basic | Percentile |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | (1.2190, 1.2280) | (1.2220, 1.2240) | (1.2220, 1.2240) |
| $\beta$ | (0.1675, 0.4376) | (0.1790, 0.4039) | (0.2410, 0.4659) |
| $\theta$ | (1.3890, 1.7820) | (1.4310, 1.8430) | (1.2880, 1.7000) |
| $\lambda$ | (0, 0.0428) | (0, 0.0119) | (0.0035, 0.0406) |

Çizelge (5.14) ve (5.15) 'den görüldüğü üzere genelde CG ile elde edilen Bootstrap güven aralıklarının genişliklerinin BFGS yöntemine göre daha dar olduğundan bu veri için CG ile elde edilen güven aralıklarının kullanılması önerilir.

Ayrıca, karşılaştırılmak istenen dağılımların teorik dağılım fonksiyonları ile ampirik dağılım fonksiyonunun grafik gösterimi ise Şekil 5.18 ve Şekil 5.19 'da verilmiştir.




**Şekil 5.18.** Birinci veri seti için dağılımların uyum iyiliği grafikleri




**Şekil 5.19.** İkinci veri seti için dağılımlar için uyum iyiliği grafikleri

Yukarıdaki tablo ve grafiklerden anlaşıldığı üzere EP-Ch dağılımı, diğer mevcut dağılımlara göre gerçek veri setleri için en iyi uyuma sahiptir.

# 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Alzaatreh ve diğerleri (2013) tarafından ortaya atılan yöntem kullanılarak elde edilen Üstel Güç (Power)-X dağılımlar ailesinin birer alt modeli olan Üstel Güç Weibull (EP-W) ve Üstel Güç-Chen (EP-Ch) isimli iki dağılım tanıtıldı. EP-W dağılımı artan ve küvet şeklindeki bozulma oranına sahip verilerin modellenmesi için kullanılabilirken EP-Ch dağılımı ise artan, azalan ve küvet şeklindeki bozulma oranına sahip verilerin modellenmesi için kullanılabilir. Bu dağılımların momentleri, moment çıkaran fonksiyonları, ortalama kalan yaşam fonksiyonu gibi bazı istatistiksel özellikleri ve belirsizlik ölçülerinden Renyi ve Shannon entropileri elde edilmiştir. Bunlara ek olarak bu dağılımların bilinmeyen parametrelerinin en çok olabilirlik (EÇO) tahmin edicileri türetilmiştir. Bu tahmin edicilerin performanslarını hata kareler ortalaması (HKO) ve yan bakımından incelemek adına bir Monte-Carlo simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Ayrıca bilinmeyen parametreler için Fisher ve Bootstrap güven aralıkları oluşturulmuştur. Simülasyon çalışmaları R-studio yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu yazılımda CG ve BFGS algoritmalarının yanında Boot paketi kullanılmıştır. Son olarak, gerçek veri uygulamaları ile EP-W ve EP-Ch dağılımları, log-olabilirlik, AIC, AICc, BIC, HQIC ve KS uyum iyiliği kriterleri aracılığı ile literatürde mevcut bazı istatistiksel dağılımlar ile karşılaştırılmıştır. Gerçek veri analiz sonuçlarına göre EP-W ve EP-Ch dağılımlarının analizde kullanılan diğer dağılımlara göre çalışılan veri setleri için en uygun iki model oldukları görülmüştür.

EP-X dağılımlar ailesinin başka alt modelleri bulunarak bu modellere ilişkin bilinmeyen parametreler için EÇO ve bayes tahminleri incelenebilir.

**KAYNAKLAR**


Ahuja, J. ve Nash, S. W., 1967, The generalized Gompertz-Verhulst family of distributions, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A.*, 141-156.

Akaike, H., 1974, A new look at the statistical model identification, In: Selected Papers of Hirotugu Akaike, Eds: Springer, p. 215-222.

Akinsete, A., Famoye, F. ve Lee, C., 2008, The beta-Pareto distribution, *Statistics.*, 42 (6), 547-563.

Alzaatreh, A., Lee, C. ve Famoye, F., 2013, A new method for generating families of continuous distributions, *Metron.*. 71 (1), 63-79.

Alzaatreh, A., Famoye, F., Lee, C. J. C. S. ve Analysis, D., 2014, The gamma-normal distribution: Properties and applications, 69, 67-80.

Alzaghal, A., Famoye, F. ve Lee, C., 2013, Exponentiated TX family of distributions with some applications, *International Journal of Statistics and Probability.*, 2 (3), 31.

Andrews, D. F. ve Herzberg, A. M., 2012, Data: a collection of problems from many fields for the student and research worker, Springer Science & Business Media, p.

Aryal, G. R. ve Tsokos, C. P., 2011, Transmuted Weibull distribution: A generalization of theWeibull probability distribution, *European Journal of Pure and Applied Mathematics.*, 4 (2), 89-102.

Barreto-Souza, W., Santos, A. H. ve Cordeiro, G. M., 2010, The beta generalized exponential distribution, *Statistical Computation and Simulation.* , 80 (2), 159-172.

Bryson, M. C. ve Siddiqui, M., 1969, Some criteria for aging, *Journal of the American Statistical Association.*, 64 (328), 1472-1483.

BULUT, F., 2017, Different Mathematical Models for Entropy in Information Theory, *Bilge International Journal of Science and Technology Research.*, 1 (2), 167-174.

Cakmakyapan, S. ve Ozel, G., 2016, The Lindley family of distributions: properties and applications, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics.*, 46 (6), 1113-1137.

Celik, N. ve Guloksuz, C. T., 2017, A new lifetime distribution, *Nowy Rozkład Cyklu Życia. Eksploatacja I Nıezawodnosc.*, 19 (4), 634-639.

Chen, Z., 2000, A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function, *Statistics & Probability Letters.*, 49 (2), 155-161.

Cordeiro, G. M. ve de Castro, M., 2011, A new family of generalized distributions, *Journal of statistical computation and simulation.* , 81 (7), 883-898.

Cordeiro, G. M. ve dos Santos Brito, R., 2012, The beta power distribution, *Brazilian Journal of Probability and Statistics.* , 26 (1), 88-112.

Cordeiro, G. M., Afify, A. Z., Yousof, H. M., Cakmakyapan, S. ve Ozel, G., 2018, The Lindley Weibull distribution: properties and applications, *Anais da Academia Brasileira de Ciências.*, 90 (3), 2579-2598.

da Silva, R. C., Sanchez, J. J., Lima, F. ve Cordeiro, G., 2015, The Kumaraswamy Gompertz distribution, *Journal of Data Science.* , 13 (2), 241-259.

Dagum. , C., 1977, New model of personal income-distribution-specification and estimation. , *Economic Appliquee.*, 30 (3), 413-437.

Dasgupta, R., 2011, On the distribution of burr with applications, *Sankhya B.*, 73 (1), 1-19.

de Brito-Ashurst, I., Varagunam, M., Raftery, M. J. ve Yaqoob, M. M., 2009, Bicarbonate supplementation slows progression of CKD and improves nutritional status, *the American Society of Nephrology*, 20 (9), 2075-2084.

Domma, F., 2002, L'andamento della hazard function nel modello di Dagum a tre parametri, *Quaderni di Statistica.*, 4, 1-12.

Efron, B., 1979, Bootstrap methods: another look at the jackknife . *Annals of Statistics.*, 7, 1-26.

Efron, B. ve Tibshirani, R., 1994, An introduction to the bootstrap, CRC press, p.

Eugene, N., Lee, C., Famoye, F. ve methods, 2002, Beta-normal distribution and its applications, *Theory and methods.* , 31 (4), 497-512.

Famoye, F., Lee, C. ve Olumolade, O., 2005, The beta-Weibull distribution, *Statistical Theory and Applications.* . , 4 (2), 121-136.

Ghitany, M., Alqallaf, F., Al-Mutairi, D. K. ve Husain, H., 2011, A two-parameter weighted Lindley distribution and its applications to survival data, *Mathematics and Computers in simulation.*. 81 (6), 1190-1201.

Glaser, R. E., 1980, Bathtub and related failure rate characterizations, *Journal of the American Statistical Association.*, 75 (371), 667-672.

Gompertz., B., 1825, "On the nature of the function expressive of the law of human mortality. and on a new mode of determining the value of life contingencies". *Philosophical Transactions of the Royal Society London.*, vol. 115, 513 - 585.

Guess, F. ve Proschan, F., 1985, Mean residual life: theory and applications (No. FSU-STATISTICS-M702), *.Dept. of Statistics, Florida State University Tallahassee.*

.

Gupta, R. D., Kundu, D. J. A. ve Statistics, N. Z. J. o., 1999, Theory & methods: Generalized exponential distributions, 41 (2), 173-188.

Hannan, E. J. ve Quinn, B. G., 1979, The determination of the order of an autoregression, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B Methodologica.*, 41 (2), 190-195.

Hurvich, C. M. ve Tsai, C.-L., 1989, Regression and time series model selection in small samples, *Biometrice.*, 76 (2), 297-307.

Johnson, O. T., 2004, Information theory and the central limit theorem, World Scientific, p.

Jones, M., 2009, Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages, *Statistical Methodology.*, 6 (1), 70-81.

Khater, M. M., El-Sayed, S. H., Yousof, H.-A. S., Mahmoud, S. S., El-Dib, N. ve El-Badry, A. A., 2017, Anti-Cryptosporidium efficacy of Olea europaea and Actinidia deliciosa in a neonatal mouse model, *Kasr Al Ainy Medical Journal*, 23 (1), 32.

Kong, L., Lee, C. ve Sepanski, J., 2007, On the properties of beta-gamma distribution, 6 (1), 18.

Kumaraswamy, P., 1980, A generalized probability density function for double-bounded random processes, *J. Hydrol.*, 462 (1980), pp.79-88.

Lai, C., Xie, M. ve Murthy, D., 2003, A modified Weibull distribution, *IEEE Transactions on reliability.*, 52 (1), 33-37.

Meeker, W. Q. ve Escobar, L. A., 1998, Statistical methods for reliability data John Wiley & Sons.

Merovci, F., 2013, Transmuted exponentiated exponential distribution, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes.*, 1 (2), 112-122.

Merovci, F. ve Elbatal, I., 2015, Weibull Rayleigh distribution: Theory and applications, *Applied Mathematics & Information Sciences.*, 9 (4), 2127.

Nadarajah, S. ve Kotz, S., 2004, The beta Gumbel distribution, *Mathematical Problems in Engineering.* , 2004 (4), 323-332.

Nadarajah, S. ve Kotz, S., 2006, The beta exponential distribution, *Reliability engineering & system safety.*, 91 (6), 689-697.

Nichols, M. D. ve Padgett, W., 2006, A bootstrap control chart for Weibull percentiles, *Quality and reliability engineering international.*, 22 (2), 141-151.

Owen, A. B., 2001, Empirical likelihood, Chapman and Hall/CRC, p.

Pararai, M., Warahena-Liyanage, G. ve Oluyede, B. O., 2015, A new class of generalized Power Lindley distribution with applications to lifetime data, *Theoretical Mathematics and Applications.*, 5 (1), 53.

Pinho, L., Cordeiro, G., Nobre, J. ve Applications, 2012, The gamma-exponentiated Weibull distribution, *Statistical Theory and Applications.*. , 11 (4), 379-395.

Principe, J. C., 2010, Information theoretic learning: Renyi's entropy and kernel perspectives, Springer Science & Business Media, p.

Rényi, A., 1961, On measures of entropy and information, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics*.

Ristić, M. M. ve Balakrishnan, N., 2012, The gamma-exponentiated exponential distribution, *Statistical Computation and Simulation.*, 82 (8), 1191-1206.

Schwarz, G., 1978, Estimating the dimension of a model, *annals of Statistics.*, 6 (2), 461-464.

Serfling, R. J., 1980, Approximation theorems of mathematical statistics., *John Wiley & Sons.*

Shannon, C. E., 1948, A mathematical theory of communication, *The Bell System Technical Journa.*. 27 (3), 379-423.

Silva, G. O., Ortega, E. M. ve Cordeiro, G. M., 2010, The beta modified Weibull distribution, *Lifetime data analysis.*, 16 (3), 409-430.

Smith, R. M. ve Bain, L. J., 1975, An exponential power life-testing distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods.*, 4 (5), 469-481.

Tahir, M., Cordeiro, G. M., Alzaatreh, A., Mansoor, M. ve Zubair, M., 2016a, The Logistic-X family of distributions and its applications, 45 (24), 7326-7349.

Tahir, M., Zubair, M., Mansoor, M., Cordeiro, G. M., Alizadehk, M. ve Hamedani, G., 2016b, A new Weibull-G family of distributions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics.*, 45 (2), 629-647.

Ugarte, M. D., Militino, A. F. ve Arnholt, A. T., 2015, Probability and Statistics with R, *Chapman and Hall/CRC.*, p.

Verhulst, P., 1845, Recherches mathematiques sur La loi d'accroissement de la population". *Nouvelles Memoires de l'Academie Royale des Sciencs et Belles-Lettres de Bruxelles [i.e.. Memoires. Series 2]*. 18, 38 PP.

Verhulst, P. F., 1838, Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement". *Correspondence mathematique et physique. publiee L. A. J. Quetelet* . 10, 113-121.

Verhulst, P. F., 1847, Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population, *Memoires de l'Academie Royale des Sciences. des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique . Series 2.*, 20, 32 pp.

Weibull, W., 1951, A statistical distribution function of wide applicability, *Journal of applied mechanics.*, 18 (3), 293-297.

Yeh, J., 2006, Real analysis: theory of measure and integration second edition, World Scientific Publishing Company, p.

Zografos, K. ve Balakrishnan, N. J. S. M., 2009, On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference, 6 (4), 344-362.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER


**Adı Soyadı** : Noorsl AHMED Z. ZEENALABIDEN

**Uyruğu** : Irak

**Doğum Yeri ve Tarihi** : 20-10-1963

**Telefon** : 05513866175

**e-mail** : zeennorsal@yahoo.com


## EĞİTİM

| Derece | | Adı, İlçe, İl | Bitirme Yılı |
|---|---|---|---|
| Lise | : | Musul -Iraq | 1982 |
| Üniversite | : | University of mosul -College of computer sciences and Mathematics Mosul -Iraq | 1986 |
| Yüksek Lisans | : | University of mosul -College of computer sciences and Mathematics, Mosul-Iraq | 2009 |
| Doktora | : | | |

## İŞ DENEYİMLERİ

| Yıl | Kurum | Görevi |
|---|---|---|
| 1986 | Musul Üniversitesinde | Asistan |
| 2009 | Musul Üniversitesinde | Öğretim Görevlisi |

## UZMANLIK ALANI

**Uygulamalı İstatistik – İstatistik Teorisi**

## YABANCI DİLLER

**Arapça – Turkçe – İnglizce.**

**YAYINLAR**

**Ulusal ve Uluslar arası Hakemli dergilerde Yayınlanan Makaleler**

1- نورسل احمد زين العابدين.( 2013),"مقارنه بين نمادج الشبكات العصبيه الاصطناعيه والتمهيد الاسي مع التطبيق "المجله العراقيه للعلوم الاحصائيه. كلية العلوم جامعة الموصل.

**2-** Norsal Ahmad.Zain.Abdeen (2013). Comparison Between Intervention model and ARIMA Time Series. Tikrit journal of pure science.Iraq. 18 (4) pg. 330-337.

**Uluslararası Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler**

1- **Noorsl Ahmed ZEENALABIDEN**, Buğra SARAÇOĞLU, 2018, A new Family of Distributions: Exponential Power-X Family of Distributions And its Some Properties. 4th International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress Abstract book, pg. 154, İzmir, Turkey (Doktora tezinden).

2- **Noorsl Ahmed Zeenalabiden**, Buğra Saraçoğlu, 2019. Exponential Power-Chen Distribution and Its Some Properties. 2 nd International Conference on Mathematics and Statistics (ICoMS), pg. 23, Praque, Czech Republic (Doktora tezinden).