T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER EVOLÜSYON DENKLEMLERİ İÇİN HİROTA METODU

Mehmet KURKUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Haziran- 2018

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Mehmet KURKUT tarafından yapılan "Nonlineer Evolüsyon Denklemleri İçin Hirota Metodu" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı	Adı Soyadı	
Başkan:	Doç. Dr.	Ali AKGÜL
Üye :	Doç. Dr.	Erhan PİŞKİN
Üye :	Doç. Dr.	Halis YILMAZ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 11/06/2018

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Doç.Dr.Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansım sürecinde her türlü desteğini benden esirgemeyen deneyimi ve akademik bilgisiyle tezimin hazırlanmasında bana destek olan danışmanım Doç. Dr. Halis YILMAZ' a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisansım boyunca tezimin yazımında yardımlarını benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Faruk KARACA , abim Naci KORKUT, arkadaşlarım Şeyhmus ALTINDAĞ ve Rojda YÜCE'ye katkılarından ötürü teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
TEŞEKKÜR…….…….....		I
İÇİNDEKİLER……...…….....		II
ÖZET……..…….....		III
ABSTRACT……...…….....		IV
KISALTMA VE SİMGELER……..……....		V
1.	**GİRİŞ**……..…….…..	1
2.	**ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR**……..…….	3
3.	**MATERYAL VE METOT**……	5
3.1.	Temel Tanım ve Teoremler……..…….	5
3.2.	Birinci Basamaktan Yarı Lineer Denklemler……	9
3.3.	İkinci Mertebeden Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması…….	11
3.4.	Çarpanlarına (Değişkenlerine) Ayırma Yöntemi……...	18
4.	**ARAŞTIRMA BULGULARI……**	21
4.1.	Solitonlara Giriş…….	21
4.2.	Hirota Bilineer Metodu…….	23
4.3.	Multi Soliton Çözümler…….	28
5.	**TARTIŞMA VE SONUÇLAR**……	41
6.	**KAYNAKLAR**…….…….....	43
ÖZGEÇMİŞ…….....		45

ÖZET

NONLİNEER EVOLÜSYON DENKLEMLERİ İÇİN HİROTA METODU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet KURKUT

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2018

Bu tezin ilk bölümünde tarihsel olarak Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler anlatılmıştır.

İkinci bölümde KdV denklemi hakkında bilgi verilerek Hirota bilineer metodu ve evolüsyon denklemleriyle ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimiyle ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler için tanım ve teoremler verilip uygulama yapılmıştır.

Dördüncü bölüm ise iki kısımda incelenmiştir. Birinci kısımda soliton ve soliton etkileşimi hakkında bilgi verilip KdV denklemi için çözüm aranmıştır. İkinci kısımda ise KdV denklemi, Sawada Kotera denklemi, Bousinesq denklemi ve Kadomtsev-Petviashivili denklemleri Hirota bilineer forma getirilip, Hirota metodu KdV denklemi, Sawada-Kotera denklemi, Boussinesq denklemi ve Kadomtsev-Petviashivili denklemlerine uygulanıp multi-soliton çözümler aranmıştır.

Anahtar Kelimeler: Soliton, Hirota Metodu, KdV denklemi, Boussinesq Denklemi, Sawada-Kotera Denklemi, Kadomtsev-Petviashivili Denklemi

ABSTRACT

HIROTA METHOD FOR NONLINEAR EVALUATİON EQUATİONS

MASTER THESIS

Mehmet KURKUT

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2018

In the first chapter of this thesis, a brief historical development of Partial Differantial Equations is given.

In the second chapter, after giving information regarding the KdV equation, the given approaches from past to today about Hirota bilinear method and evaluation equations are analyzed based on historical progress.

In the third chapter, the definitions, theorems and some examples for Partial Differantial Equations are given.

The fourth chapter is analyzed as two parts. In the first part, after giving information about soliton and soliton interaction, a solution is sought for the KdV equation. In the second part, after we transform the KdV equation, Sawada-Kotera equation, Bousinesq equation and the Kadomtsev-Petviashivili equation into the Hirota bilinear form, Hirota's direct method is applied to the KdV equation, Sawada-Kotera equation, Bousinesq equation and the Kadomtsev-Petviashivili equations in order to have multi-soliton solutions for these equations.

Keywords: Soliton, Hirota method, KdV equation, Boussinesq equation, Sawada-Kotera equation, Kadomtsev-Petviashivili equation

KISALTMALAR VE SİMGELER

$\mathbb{R}$: Reel sayılar

$\mathbb{R}^n$: n boyutlu Öklit uzayı

C^n : n. dereceden Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Δ : Laplasyon

∇ : Nabla operatörü

α : Alpha

β : Beta

ε : Epsilon

λ : Lambda

η : Eta

ξ : Ksi

ψ : Psi

D : Hirota D operatörü

KdV : Korteweg-de Vries Denklemi

SK : Sawada Kotera Denklemi

BD : Boussinesq Denklemi

KP : Kadomtsev-Petviashivili Denklemi

1. GİRİŞ

Tarihsel olarak mekanikteki kısmi diferansiyel denklemler birçok problemin çözümünde ve geometride yüzey çalışmalarında ortaya çıkmıştır. 19. yüzyılın ikinci yarısı boyunca birçok matematikçi aktif olarak kısmi diferansiyel denklem ile temsil edilen birçok problemin çözümünden faydalanmışlar. Bu çalışmaların öncelikli sebebi kısmi diferansiyel denklemlerinin hem doğanın temel kanunlarına formüllendirilmesinde hem de sıklıkla bilimin ve mühendisliğin birçok farklı problemlerin matematiksel analizinde ortaya çıkmasıdır. Bu aşamadan sonra kısmi diferansiyel denklemlerinin sınıflandırılmasında özellikle lineer olanlar için genel teorinin kurulması ve bunlar için birçok metodun gerçekleştirilmesi olmuştur.

Birçok gerçek dünya problemleri uygun başlangıç koşulları ile birlikte kısmi diferansiyel denklem veya denklem sistemleri ile tanımlanmaktadır. Lineer kısmi diferansiyel denklemler üç sınıfa ayrılmaktadır. Bunlar; hiperbolik, parabolik ve eliptiktir. Bu sınıflama tamamen geometrik bakış açısıyladır. Denklemlerin karakteristik formları analitik geometrideki sınıflandırmada bildiğimiz hiperbolik, parabolik ve eliptik denklem sınıflandırmasıyla uyumlu olmasındandır. Bu sınıflandırma ikinci basamakta lineer kısmi diferansiyel denklemler temel alınarak yapılmıştır. Daha yüksek basamaktan diferansiyel denklemlerle sınıflandırmayı sağlayan asıl terimlerin mevcutluğuna göre sınıflandırmalar yapılır.

Lineer olmayan problemler uygulamalı matematiğin, fiziğin, mühendisliğin, akışkanlar dinamiğinin, lineer olmayan optiğin, katı mekaniklerin, plazma fiziğinin, kuantum teorisinin yoğun madde fiziğinin çalışmalarında ortaya çıkmaktadır. Kısmi diferansiyel denklem konusu modern matematiğin bilimlerde, özellikle fizikte, geometride ve analizde merkezi rol oynar.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerinin orijini oldukça eskiye dayanmasına rağmen kayda değer gelişmeler 20. yüzyılın son yarısında olmuştur. 19. yüzyılda Scott Russell'ın çalışmaları lineer olmayan çalışmaları motive etmiştir. 1871'de Boussinesq'ın sık su dalgalarındaki çalışması ile sayılabilecek modellemeyi vermiştir [Boussinesq, 1871].

Geçmişten günümüze lineer olmayan denklemlere yaklaşık ve analitik çözümler bulunmaya çalışılmıştır. Hirota bilineer yöntemi, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin multi soliton çözümleri için kullanılmıştır. Bu çalışmamızda Hirota bilineer yöntemi ile KdV, Sawada-Kotera, Boussinesq ve the Kadomtsev-Petviashivili denklemlerinin bir ve iki soliton çözümlerini inceleyeceğiz.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1895’ te Korteweg ve de Vries KdV denilen bir denklem elde ettiler. Bu denklem tek dalgaların varlığının doğrulandığı yerlerde sığ su dalgalarını açıklamaya yarıyordu [Korteweg D.J., de Vries G., 1895].

1955’ te, Fermi, Pasta ve Ulam (FPU) lineer olmayan yayların birleştirdiği özdeş kütlelerin tek boyutlu zinciri için Newton’un hareket denklemini sayısal olarak çözmeye karar verdiler. Onların çalışmaları Zapusky ve Kruskal’ a ilham vermiştir ve FPU probleminden ortaya çıkan KdV denklemini analiz ettiler. Onlar yerel dalgaların çağrışma anında şekillerini ve ivmelerini koruduklarını gözlemlediler. Bu dalgaları “solitonlar” olarak adlandırdılar.

Doğrudan ve ters yayılım(dağılım) düşüncesini kullanan Gardner, Greene, Kruskal ve Miura 1967’ de KdV denklemi için bir soliton metodu türettiler [Zabusky N.J., Kruskal M.D., 1965]. 1968’ de onların bulduğu sonuçları genellemesi Lax tarafından yapıldı ve Lax çifti kavramının tanıtımı yapıldı (Lax tarafından).

1971’ de Ryoga Hirota tarafından, solitonların çoklu çarpışmaları için KdV denkleminin kesin bir çözümünü bulmaya yarayacak olan “Hirota Direkt Metodu” olarak adlandırılan yeni bir metodu barındıran bir makale yayınlandı [Hirota R., 1971]. Bu başarılı makalesinde, kendisi ayrıca modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV), Sine Gordon (SG), lineer olmayan Schrödinger (NLS) ve Toda kafesi denklemleri gibi lineer olmayan bazı evrim denklemleriyle uğraştı. Bu metodun ilk ayağı, bağımlı değişkenlerdeki quadratik (ikinci dereceden denklem) formda olan denklemleri sağlayan lineer olmayan kısmi diferansiyel ve fark denklemlerinin uygun bir dönüşümü yapmaktı. Bu yeni form “Bilineer Form” olarak adlandırıldı. Böyle bir dönüşümü yapmak bazı denklemler için kolay değildir ve bazen yeni bağımlı hatta bağımlı olmayan bazı değişkenlerin tanıtılmasını gerektirir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 3.1.1. Verilen bir denklemde bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bir veya birden fazla bağımsız değişkene göre türevleri mevcut ise böyle bir denkleme diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemleri incelemenin başlıca üç amacı vardır:

1) Belirli bir fiziksel olayı tanımlayan diferansiyel denklemi bulmak

2) Diferansiyel denklemin tam ya da yaklaşık çözümünü elde etmek

3) Elde edilen bu çözümü yorumlamak

Örnek 3.1.1.

$$y'' - y = \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}$$

denklemi ikinci mertebeden lineer nonhomojen bir diferansiyel denklemdir.

Tanım 3.1.2. $y = f(x)$ tek değişkenli fonksiyonunda x bağımsız değişken y ise bağımlı değişkendir. Buna göre: x bağımsız değişkeninin, y fonksiyonun ve bu fonksiyonun bir veya birden fazla türevlerinin oluşturduğu denkleme sıradan diferansiyel denklem denir. Bu denklem

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.3. Bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini barındıran denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. Bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak

$$F\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots\right) = 0$$

biçimindedir.

Örnek 3.1.2.

$$xu_{xy} + u_y = y^2, \qquad x \neq 0$$

denklemi ikinci mertebeden lineer bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Tanım 3.1.4. Bir Kısmi Diferansiyel Denklemde en yüksek mertebeli terim denklemin mertebesini belirlemektedir. En yüksek türevin kuvvetine denklemin derecesi denir.

Örnek 3.1.3. α, c iki sabit olmak üzere

$$u_{tt} + \alpha u_t = c^2 u_{xx}$$

sönümlü dalga denklemi ikinci basamaktan bir kısmi türevli denklemdir.

Tanım 3.1.5. Kısmi Türevli Denklemlerin Sınıflandırılması

Lineer Denklemin Bazı Formları

(i) $A(x,y)z_x + B(x,y)z_y + C(x,y)z = D(x,y)$

(ii) $A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y)z_x + E(x,y)z_y + F(x,y)z = G(x,y)$

Hemen Hemen Lineer Denkleminin Birinci ve İkinci Mertebeden Formları

(i) $A(x,y)z_x + B(x,y)z_y = C(x,y,z)$

(ii) $A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0$

Yarı Lineer Denklemin Birinci ve İkinci Mertebeden Formu

(i) $A(x,y,z)z_x + B(x,y,z)z_y = C(x,y,z)$

(ii) $A(x,y,z,z_x,z_y)z_{xx} + B(x,y,z,z_x,z_y)z_{xy} + C(x,y,z,z_x,z_y)z_{yy} = D(x,y,z,z_x,z_y)$

En Genel Lineer Olmayan Denklemin Formu

$$F(x,y,z,\ z_x,\ z_y,\ z_{xx},\ z_{xy},\ z_{yy},\ldots) = 0$$

şeklindedir.

(i) $F(x,y,z,z_x,z_y) = 0$

(ii) $F(x,y,z,\ z_x,\ z_y,\ z_{xx},\ z_{xy},\ z_{yy},\ldots) = 0$

Her lineer denklem açıktır ki hemen hemen lineerdir, yarı lineerdir, lineer olmayandır. Benzer olarak hemen hemen lineer, yarı lineerdir, lineer olmayandır. Yarı lineer bir denklem aynı zamanda lineer olmayandır. Lineer $\subset$ hemen hemen lineer $\subset$ yarı lineer $\subset$ lineer olmayandır. Tersi doğru değildir. Diferansiyel denklemlerde bağmsız değişken, mertebe ve lineer olmayanlık arttıkça diferansiyel denklemin çözümü gittikçe zorlaşmaktadır.

Örnek 3.1.4. $u_t + c(u)u_x = 0$

kinematik denklemi yarı lineer tiptendir. Bu denklem lineer olmayan dalga yayılımını ifade eder.

Tanım 3.1.6. Denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyonlar içeren çözüme genel çözüm denir.

Tanım 3.1.7. Denklemi sağlayan içinde parametre ya da keyfi fonksiyon barındırmayan genel çözümden elde edilen çözüme özel çözüm denir.

Tanım 3.1.8. Denklemi sağlayan fakat genel çözüme dahil olmayan çözüme aykırı çözüm denir.

Tanım 3.1.9. Denklemi ve diğer başlangıç veya sınır koşullu gibi diğer koşulları da sağlayan çözümlere tam çözüm denir.

Şimdi bazı önemli klasik lineer model denklemlerini verelim.

Tanım 3.1.10. (Dalga Denklemi)

$$u_{tt} - c^2\Delta u = 0 \; ; (u = u(x,y,z,t))$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Burada bunu genelleştirirsek,

$$x \epsilon \mathbb{R}^n, t \epsilon \mathbb{R}, u = u(x,t) \;\; ve \;\; x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \text{ ve}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

olur.

Bu denklem bir dalganın yayılımını tanımlar. Fiziksel problemlerin geniş bir sınıfında ortaya çıkmaktadır. Titreşen şerit denklemleri bunun bir örneğidir. Sığ su dalgaları sesin iletebildiği akışkanlar için hız potansiyellerinin elastik problemleri bir kablo boyunca elektrik sinyallerinin iletimi güçsüz (yüksüz) ortamda elektrik ve manyetik alanlar bu denkleme tabidir.

Tanım 3.1.11. (Isı (difüzyon) Denklemi)

$$u_t - k\Delta u = 0 \; (k\text{: difüzyon sabiti})$$

Bu denklem bir niceliğin akıcılığını tanımlar. Bu ısı olabilir. Parçacığın konsantrasyonu olabilir. Bir tümörün büyümesi, populasyon gelişimleri, avcı av problemleri.

Tanım 3.1.12. (Laplace Denklemi

$$\nabla^2 u = \Delta u = 0$$

Yüksüz ortamda elektrostatik potansiyelleri tanımlar. Kütlesiz veya ağırlıksız ortamda yer çekimsel potansiyelli elektrostatik zarın denge değişimleri sıkıştırılamaz akışkanlar için hız potansiyelleri düzgün değişen bir ısının bir ısı iletim probleminde sıcaklık denklemi bu denkleme tabidir.

Tanım 3.1.13. (Klein-Gordon (K.G) Denklemi)

$$\Psi_{tt} - c^2\nabla^2\Psi + \frac{mc^2}{h}\Psi = 0$$

h=plench sabiti, m=kütle, c=sabit, Ψ=dispensive terimi

Elektromanyetik alanda yüklü parçacığın göreceli denklemini temsil eder.

Tanım 3.1.14. (Lineer Korteveg de Vries (Kdv) Denklemi)

$$u_t + \alpha u_x + \beta\, u_{xxx} = 0$$

şeklindedir. Uzun su dalgaları ve plazma dalgaları bu denkleme tabidir.

Tanım 3.1.15. (Lineer Boussinesq Denklemi)

α ve β iki sabit olmak üzere

$$u_{tt} - a^2\Delta u - \beta^2\Delta u_{tt} = 0$$

şeklindedir. Elastik bir çubuktaki dikey dalgalar, uzun su dalgaları ve plazma dalgaları bu denkleme tabidir.

Şimdi de bazı önemli lineer olmayan klasik model denklemlerini verelim.

Tanım 3.1.16. (Kinematik Dalga Denklemi)

$$u_t + c(u)u_x = 0$$

lineer olmayan dalga yayılımını temsil eder.

Tanım 3.1.17. (Boussinesq Denklemi)

$$u_{tt} - u_{xx} \pm u_{xxxx} = -(3u^2)_{xx}$$

pozitif ve negatif yönde yayılan su dalgalarıyla ilgilidir. Bir çok mekanik olayda da görülür.

Tanım 3.1.18. (KDV Denklemi)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

denklemi sığ dalgaları temsil eder.

3.2. Birinci Basamaktan Yarı Lineer Denklemler

$$P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y = R(x,y,u)$$

denklemi birinci basamaktan yarı lineer denklemdir. bu tipteki denklemlerin çözümünü karakteristik metotla (Lagrange Yöntemi) ile çözebiliriz.

Örnek 3.2.1. $u_x - u_y = 1\ ,\ u(x,0) = x^2$

lineer denkleminin çözümünü elde ediniz.

Çözüm 3.2.1.

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{1} = \frac{du}{1}$$

$dx = -dy = du$

$dx = -dy\ ,\ dx = du$

$$\left.\begin{matrix} x + y = c_1 \\ u - x = c_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \qquad \begin{matrix} \Phi_1(x,y,u) = c_1 \\ \Phi_2(x,y,u) = c_2 \end{matrix}$$

$\Phi_1 = x + y$

$\Phi_2 = u - x$

$$F(\Phi_1, \Phi_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x+y, u-x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u - x = g(x+y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x + g(x+y)$$

genel çözümü elde edilir.

Şimdi de $u(x,0) = x^2$ ifadesini genel denklemde yazalım.

$$x + g(x) = x^2 \ \Rightarrow\ g(x) = x^2 - x$$

olduğundan

$$u(x,y) = x + (x+y)^2 - (x+y)$$

$$\Rightarrow\ u(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - y$$

çözümü elde edilir.

Örnek 3.2.2. $u_t + uu_x = x \qquad u(x,0) = 1$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm 3.2.2.

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{x}$$

$\frac{dx}{u} = \frac{du}{x} \Rightarrow x^2 - u^2 = c_1$

$\frac{dt}{1} = \frac{dx+du}{u+x} = \frac{d(x+u)}{x+u} \qquad \Rightarrow t = ln(x+u) + lnc_2$

$$\Rightarrow e^t \frac{1}{x+u} = c_2$$

$u(x,0) = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = c_1 \Rightarrow x^2 = c_1 + 1$

$u(x,0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} = c_2 \Rightarrow x = \frac{1}{c_2} - 1 \Rightarrow x^2 = (\frac{1}{c_2} - 1)^2$

$$c_1 + 1 = (\frac{1}{c_2} - 1)^2$$

$$x^2 - u^2 + 1 = ((x+u)e^{-t} - 1)^2$$

$$x^2 - u^2 + 1 = (x+u)^2 e^{-2t} - 2(x+u)e^{-t} + 1$$

$$x - u = (x+u)e^{-2t} - 2e^{-t}$$

$$u(1 + e^{-2t}) = x - xe^{-2t} + 2e^{-t}$$

olduğundan

$$u(x,t) = \frac{x - xe^{-2t} + 2e^{-t}}{1 + e^{-2t}}$$

$$= \frac{x(1 - e^{-2t})}{1 + e^{-2t}} + \frac{2e^{-t}}{1 + e^{-2t}}$$

$$= x\frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} + \frac{2e^t}{e^{2t} + 1}$$

$$u(x,t) = xtanht + secht$$

genel çözümü elde edilir.

3.3. İkinci Mertebeden Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

a, b, c, d, e, f, g, x ve y nin fonksiyonlarıdır.

$\xi = \xi(x,y)$
$\eta = \eta(x,y)$ öyle ki $J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ dır.

$\Delta(x,y) = b^2 - 4ac$ olmak üzere;

- ***(i)*** $\Delta > 0 \Rightarrow$ denklem hiperboliktir.
- ***(ii)*** $\Delta = 0 \Rightarrow$ denklem paraboliktir.
- ***(iii)*** $\Delta < 0 \Rightarrow$ denklem eliptiktir.

Örnek 3.3.1. $x\,u_{xx} + 2y\,u_{xy} + u_x = 4x \;(y \neq 0)$ (3.3.1)

Yukarıda verilen denklemi kanonik forma getirip genel çözümünü bulunuz.

Çözüm 3.3.1.

$$x\,u_{xx} + 2y\,u_{xy} + u_x = 4x \;(y \neq 0)$$

$a = x,\ b = 2y,\ c = 0,\ \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$

$$\Delta = 4y^2 > 0$$

olduğundan hiperbolik bir denklemdir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2y \pm 2y}{2x}$$

buradan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \quad \Rightarrow\ 2lnx = lny + lnc$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y} = c_1$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = c_2$$

$$\Rightarrow \eta = y$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2x}{y} \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} u = u(\xi, \eta) \\ \xi = \xi\,(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_x = u_\xi \frac{2x}{y} + u_\eta 0$$

$$= \frac{2x}{y}\, u_\xi$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$= u_\xi \left(\frac{-x^2}{y^2}\right) + u_\eta$$

$$= \frac{-x^2}{y^2}\, u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{2}{y} u_\xi + \frac{2x}{y}\left(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x\right)$$

$$= \frac{2}{y}\, u_\xi + \frac{2x}{y} u_{\xi\xi} \frac{2x}{y}$$

$$= \frac{2}{y} u_\xi + \frac{4x^2}{y^2} u_{\xi\xi}$$

$$u_{xy} = \left(-\frac{2x}{y^2}\right) u_\xi + \frac{2x}{y}\left(u_{\xi\xi}\, \frac{-x^2}{y^2} + u_{\xi\eta}\right)$$

$$= \frac{-2x}{y^2}\, u_\xi - \frac{2x^3}{y^3}\, u_{\xi\xi} + \frac{2x}{y}\, u_{\xi\eta}$$

u_x , u_y , u_{xx} ve u_{xy} eşitlikleri (3.3.1) de yazılırsa,

$$\frac{2x}{y}\,u_\xi + \frac{4x^3}{y^2}u_{\xi\xi} - \frac{4x}{y}\,u_\xi - \frac{4x^3}{y^2}\,u_{\xi\xi} + 4x\,u_{\xi\eta} + \frac{2x}{y}\,u_\xi = 4x$$

$$u_{\xi\eta} = 1$$

kanonik formu elde edilir. Buradan,

$$u_\eta = \xi + f_1(\eta)$$

$$u = \xi\eta + \int f_1(\eta)d\eta$$

$$u = \xi\eta + g(\eta)$$

$$u = x^2 + g(y)$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 3.3.2. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$ (3.3.2)

Yukarıda verilen denklemi kanonik forma getirip genel çözümünü bulunuz.

Çözüm 3.3.2.

$$A = x^2\,, \qquad B = 2xy\,, \qquad C = y^2$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = (2xy)^2 - 4x^2y^2 = 0$$

olduğundan parabolik bir denklemdir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} = \frac{2xy}{2x^2} = \frac{y}{x}\,, \quad x \neq 0$$

$$\frac{y}{x} = c_1$$

$$\xi = \frac{y}{x}$$

$$\left.\begin{matrix}\xi = \frac{y}{x} \\ \eta = y\end{matrix}\right\} \qquad J = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2} \neq 0$$

$$z_x = z_\xi \, \xi_x + z_\eta \, \eta_x$$
$$= -\frac{y}{x^2} \, z_\xi$$

$$z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y$$
$$= \frac{1}{x} \, z_\xi + z_\eta$$

$$z_{xx} = \frac{2y}{x^3} \, z_\xi - \frac{y}{x^2} \, z_{\xi\xi} \left(-\frac{y}{x^2} \right)$$
$$= \frac{y^2}{x^4} \, z_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^3} \, z_\xi$$

$$z_{yy} = \frac{1}{x} \left(z_{\xi\xi} \, \frac{1}{x} + z_{\xi\eta} \, 1 \right) + z_{\eta\xi} \, \frac{1}{x} + z_{\eta\eta} \, 1$$
$$= \frac{1}{x^2} \, z_{\xi\xi} + \frac{2}{x} \, z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta}$$

z_x , z_y , z_{xx} ve z_{yy} eşitlikleri (3.3.2) de yazılırsa,

$$x^2 \left(\frac{y^2}{x^4} \, z_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^3} \, z_\xi \right) + 2xy \left(-\frac{y}{x^3} \, z_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2} \, z_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2} \, z_\eta \right)$$
$$+ y^2 \left(\frac{1}{x^2} \, z_{\xi\xi} + \frac{2}{x} \, z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta} \right) = 0$$

elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesiyle

$$y^2 z_{\eta\eta} = 0$$
$$z_{\eta\eta} = 0$$
$$z_\eta = f(\xi)$$
$$z = \eta f(\xi) + g(\xi)$$
$$z = y f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$$

genel çözüm elde edilir.

Örnek 3.3.3.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 17u_{yy} = 0 \qquad (3.3.3)$$

Yukarıda verilen denklemi kanonik forma getirip genel çözümünü bulunuz.

Çözüm 3.3.3.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 17\,u_{yy} = 0$$

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad c = 17$$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 4 - 68$
$= -64$

$\Delta < 0$ olduğundan verilen denklem eliptik bir denklemdir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{2 \pm i8}{2}$$
$$= 1 \pm 4i$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 4i \Rightarrow (1 + 4i)dx - dy = 0$$
$$(1 + 4i)x - y = c_1$$
$$x - y + 4\,ix = c_1$$
$$\xi\,(x, y) = x - y + 4\,i\,x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 4i \Rightarrow \qquad (1 - 4i)dx - dy = 0$$
$$(1 - 4i)x - y = c_2$$
$$x - y - 4i\,x = c_2$$
$$\eta(x, y) = x - y - 4\,i\,x$$

$\alpha = x - y$ ve $\beta = 4x$ olmak üzere $\xi = \alpha + i\,\beta$ ve $\eta = \alpha - i\beta$ olup

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2i}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$u = u(\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned} u_x &= u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x \\ &= u_\alpha + 4u_\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y \\ &= -u_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= -(u_{\alpha\alpha} \alpha_x + u_{\alpha\beta} \beta_x) \\ &= -(u_{\alpha\alpha} + 4u_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\alpha\alpha} \alpha_x + u_{\alpha\beta} \beta_x + 4(u_{\alpha\beta} \alpha_x + u_{\beta\beta} \beta_x) \\ &= u_{\alpha\alpha} + 4u_{\alpha\beta} + 4(u_{\alpha\beta} + 4u_{\beta\beta}) \\ &= u_{\alpha\alpha} + 8u_{\alpha\beta} + 16u_{\beta\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= -(u_{\alpha\alpha} \alpha_y + u_{\alpha\beta} \beta_y) \\ &= -(-u_{\alpha\alpha}) \\ &= u_{\alpha\alpha} \end{aligned}$$

u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy} ve u_{xy} eşitlikleri (3.3.3) de yazılırsa,

$$\begin{aligned} u_{\alpha\alpha} + 8u_{\alpha\beta} + 16u_{\beta\beta} - 2u_{\alpha\alpha} - 8u_{\alpha\beta} + 17u_{\alpha\alpha} &= 0 \\ 16(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta}) &= 0 \\ u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} &= 0 \end{aligned}$$

kanonik formu elde edilir.

$$u = u\,(\xi, \eta)$$

$$\xi = \alpha + i\,\beta$$

$$\eta = \alpha - i\,\beta$$

olmak üzere

$$u_\alpha = u_\xi\,\xi_\alpha + u_\eta\,\eta_\alpha$$

$$= u_\xi + u_\eta$$

$$u_\beta = u_\xi\,\xi_\beta + u_\eta\,\eta_\beta$$

$$= i\left(u_\xi - u_\eta\right)$$

$$u_{\alpha\alpha} = u_{\xi\xi}\,\xi_\alpha + u_{\xi\eta}\,\eta_\alpha + u_{\xi\eta}\,\xi_\alpha + u_{\eta\eta}\,\eta_\alpha$$

$$= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{\beta\beta} = -u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta}$$

yazılır. Buradan

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0$$

$$u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} = 0$$

$$4\,u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_{\xi\eta} = 0$$

olur ve

$$u_{\xi\eta} = 0 \;\Rightarrow u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

$$u(x, y) = f\,(x - y + 4\,i\,x) + g\,(x - y - 4\,i\,x)$$

$$u(x, y) = f\left((1 + 4i)x - y\right) + g((1 - 4i)x - y)$$

genel çözümü elde edilir. Genel çözümdeki f ve g keyfi fonksiyonlardır.

3.4. Çarpanlarına (Değişkenlerine) Ayırma Yöntemi

Örnek 3.4.1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$u\,(0,t\,) = 0$ ve $u\,(\,1,\ t) = 0$

$u\,(x\,,0\,) = 0$ ve $\frac{\partial u}{\partial t} = sin\,(3\pi x)$

Yukarıda sınır koşullarıyla verilen lineer dalga denklemini çarpanlara (değişkenlerine) ayırma yöntemiyle çözünüz.

Çözüm 3.4.1.

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$u_{xx} = u_{tt} \ \Rightarrow \ F^{''}\,G = F\,G^{''}$$

$$\Rightarrow \ \frac{F''}{F} = \frac{G''}{G} = -\lambda^2$$

$$F(x) = c_1\,cos\lambda x + c_2\,sin\lambda x$$

$$G(t) = \widetilde{c_1}\,cos\lambda t + \widetilde{c_2}\,sin\lambda t$$

$F(x)$ ve $G(t)$ fonksiyonları $u(x,t)$ de yazılırsa,

$$u(x,t) = (c_1\,cos\lambda x + c_2\,sin\lambda x)(\widetilde{c_1}\,cos\lambda t + \widetilde{c_2}\,sin\lambda t)$$

genel çözümü elde edilir.

$$u(0,t) = F(0)G(t)$$

$$= c_1\,G(t) = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = 0$$

$$u(x,t) = sin\lambda x\,(c_3\,cos\lambda t + c_4\,sin\lambda t)$$

$$u(x,0) = sin\lambda x\,c_3 = 0 \ \Rightarrow \ c_3 = 0$$

$$u(x,t) = csin\lambda x sin\lambda t$$

$$u_t(x,t) = c\lambda\,sin\lambda x\,cos\lambda t$$

$$u_t(x,0) = c\lambda\,sin\lambda x = sin(3\pi x)$$

$$c\lambda = 1\,, \qquad \lambda = 3\pi, \qquad c = \frac{1}{3\pi}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{3\pi}\, sin(3\pi x) sin(3\pi t)$$

çözümü bulunur.

Örnek 3.4.2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u\,(0,t\,) = 0\,, u(\pi,t) = 0, u(x,0) = sinx$$

Yukarıda sınır koşullarıyla verilen ısı denklemini çarpanlara (değişkenlerine) ayırma yöntemiyle çözünüz.

Çözüm 3.4.2.

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$F\,G^{'} = F^{''}\,G$$

$$\frac{F''}{F} = \frac{G'}{G} = -\lambda^2$$

$$\frac{F''}{F} = -\lambda^2 \;\Rightarrow\; F(x) = c_1 cos\lambda x + c_2 sin\lambda x$$

$$\frac{G'}{G} = -\lambda^2 \;\Rightarrow\; lnG = -\lambda^2 t + lnc_3$$

$$\Rightarrow\; G(t) = c_3\, e^{-\lambda^2 t}$$

$F(x)$ ve $G(t)$ fonksiyonları $u(x,t)$ de yazılırsa,

$$u(x,t) = (c_1\, cos\lambda x + c_2\, sin\lambda x)(c_3\, e^{-\lambda^2 t})$$

$$u(0,t) = c_1\big(\, c_3\, e^{-\lambda^2 t}\big) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0$$

$$u(x,t) = (c_2\, sin\lambda x)\big(c_3\, e^{-\lambda^2 t}\big) = ce^{-\lambda^2 t} sin\lambda x$$

$$u(x,0) = \; c\, Sin\lambda x = sinx \;\Rightarrow\; \lambda = 1,\; c = 1$$

$$u(x,t) = \; e^{-\lambda^2 t} sinx = e^{-t} sinx$$

çözümü elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Solitonlara Giriş

Solitonların hikâyesi John Scott Russell'ın 1834 yılındaki gözlemleriyle başlar. Edingburgh kanalında atların çektiği bir botun durması sırasında oluşan dalgayı dönüşüm dalgası olarak adlandırmıştır. Bu dalga şeklini bozmadan sabit hızla ilerlemektedir. Scott Russell atın arkasında bu dalgayı takip ederken dalganın saatte 8,9 mil hızla hareket ettiğini tespit etmiştir. Bu su dalgasının 1,5 feet yüksekliğinde ve otuz feet genişliğinde olduğunu belirtmiştir. Birkaç mil takip ettikten sonra kanalın dolambaçlı yollarında dalganın kaybolduğunu gözlemlemiştir. Yarım yüzyıldan fazla bilim dünyası buna kuşkuyla bakmıştır. Daha sonra Bousinesq (1871) ve Rayleigh (1876) çalışmalarıyla bu tür dalgaların oluşabilmesinin mümkün olduğunu belirtmişlerdir [Boussinesq J., 1871; Rayleigh L., 1876]. Bu tartışma 1895 yılına kadar sürmüştür. 1895 yılında KdV böyle bir eşitlikle ortaya çıkmıştır. Bu eşitliğin adına KdV denklemi denilmiştir [Korteweg D.J., de Vries G., 1895]. Bu matematik formülasyonu böyle bir dalganın olabileceğini göstermiş ve tartışmaya son noktayı koymuştur. Daha sonra Scott Russell bu tür dalgaları laboratuarda oluşturup aşağıdaki gözlemlerde bulunmuştur.

1 Bu dalgalar şeklini ve boyutunu koruyan ve dağılmayan dalgalardır.

2) Dalganın hızı yüksekliğiyle doğru orantılıdır.

3) Dolambaçlı yollarda aynı şekilde daha küçük dalgalarla ilerlemiştir.

4) Bir veya birden fazla dalganın çarpışması elastik çarpışma gibidir.

Şimdi de KdV denkleminin ilerleyen dalga çözümünü bulalım.

Örnek 4.1.1. (KdV Denklemi)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{4.1.1}$$

şeklinde olan Kdv denkleminin tam çözümünü bulalım.

Bu denklemin ilerleyen dalga çözümünü

$$u = \psi(\xi) = \psi(x - ct) \tag{4.1.2}$$

formunda kabul ediyoruz.

$$\xi = x - ct$$

$$u_t = u_\xi \xi_t = -c\psi'$$

$$u_x = u_\xi \xi_x = \psi'$$

bu dönüşümü (4.1.1) denklemine uygularsak

$$-c\psi' + \psi''' + 6\psi\psi' = 0 \tag{4.1.3}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin integralini alırsak c_1 integral sabiti olmak üzere

$$-c\psi + \psi'' + 3\psi^2 + c_1 = 0 \tag{4.1.4}$$

denklemi elde edilir.

Soliton çözümleri sınır koşulları sağladığında

$$x \to \mp\infty \text{ iken } \psi' = \psi'' = \psi''' = \cdots = 0$$

olur.

Bundan dolayı $c_1 = 0$ bulunur.

(4.1.4) denklemini ψ' ile çarpıp integralize edersek

$$\frac{(\psi')^2}{2} = c\frac{\psi^2}{2} + \psi^3 + c_2 \tag{4.1.5}$$

bulunur.

Burada da başlangıç sınır koşullarından dolayı $c_2 = 0$ olur.

$$(\psi')^2 = c\psi^2 - 2\psi^3 = 2\psi^2\left(\frac{c}{2} - \psi\right) \tag{4.1.6}$$

$$\psi' = \sqrt{2}\psi\sqrt{\frac{c}{2} - \psi}$$

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \sqrt{2}\psi\sqrt{\frac{c}{2} - \psi}$$

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{2}\psi\sqrt{\frac{c}{2} - \psi}} = \int d\xi$$

$$\psi = \frac{c}{2}sech^2\eta \Rightarrow d\psi = -csech^2\eta tanh\eta d\eta$$

$$\int \frac{-csech^2\eta tanh\eta d\eta}{\frac{c}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{c}{2}}sech^2\eta tanh\eta} = \xi - x_0$$

$$\frac{-2}{\sqrt{c}}\eta = \xi - x_0$$

x_0 integral sabiti olmak üzere

$$\psi = \frac{c}{2} sech^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right]$$

soliton çözümü elde edilir. İşaret seçimi önemli değildir çünkü çözüm fonksiyonu çift fonksiyondur. Burada x_0'ın bir önemi yoktur.

4.2. Hirota Bilineer Metodu

Bu metod nonlineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerinin çözümlerini bulmak için doğrudan kullanılan bir metottur. Nonlineer dalga ilerlemesi çalışmasının temel ilgi alanı bu tür denklemlerin çözümündeki özel tekniklerin gelişimidir. Soliton çözümlerini gerektiren bu tür denklemler için Hirota'nın önemli katkıları olmuştur. Bu çalışmalar Hirota'nın (1971-1973) çalışmalarında görülebilir. Hirota'nın bu çalışmaları ters yayılım dönüşümü çalışmalarını motive etmiştir. Bu direk metotlardaki fikirler aşağıdakiler gibidir.

1) Hirota metotunda öncelikle uygun bir değişken dönüşüm sunulur. Bu dönüşüm nonlineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerini bağımlı değişkenlerin quadratik biçimde yazılmasını sağlar. Bu dönüşüm evolüsyon denklemlerine uygulanıp denklemi bilineer forma getirir.

2) Bu kısımda Hirota D operatörü tanımlanır. Hirota D operatörü bilineer formdaki denklemleri Hirota bilineer forma dönüştürür.

3) Son kısımda ise denklem Hirota bilineer forma getirildikten sonra pertürbasyon açılımı yapılır. Bu açılımla integre edilebilir denklemlerin multi soliton çözümleri daha basit hale getirilir.

4.2.1. Hirota D Operatörü

$A: C^n \to C$ tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyon ve $D: A \times A \to A$ tanımlı olmak üzere;

Hirota D operatörü

$$D_t{}^m D_x{}^n (a.b) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n a(x.t) b(x'.t') \qquad (4.2.1)$$

Burada $m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $x' = x,\ t' = t$ dır.

(4.2.1) denklemi genelleştirilirse

$$[D_t{}^{n_1} D_x{}^{n_2} \dots](a.b) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^{n_1} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^{n_2} \dots \right] a(x, t, \dots) b(x', t', \dots)$$

burada $n_i\ (i = 1,2,3, \dots)$ biçimindeki pozitif tamsayılar, $x, t, \dots$ ise bağımsız değişkenlerdir. Ayrıca burada $x' = x,\ t' = t$,…dır.

(4.2.1) denkleminde $m = n = 1$ alınırsa

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)a(x.t)b(x'.t') = \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)(a_x b - a b_{x'})$$

$$= a_{xt}b - a_t b_{x'} - a_x b_{t'} + a b_{x't'}$$

olur. $x' = x,\ t' = t$ eşitlikleri kullanılırsa

$$D_t D_x(a.b) = a_{xt}b + a b_{xt} - a_t b_x - a_x b_t$$

elde edilir. $a = b$ için

$$D_x D_t(a.a) = 2(a a_{xt} - a_x a_t)$$

olur. (4.2.1) denkleminde $m = 4,\ n = 0$ yazılırsa,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^4 a(x,t)b(x',t') = a_{xxxx}b - 4a_{xxx}b_{x'} + 6a_{xx}b_{x'x'} - 4a_x b_{x'x'x'} + a b_{x'x'x'x'}$$

olup $a = b$ alınırsa

$$D_x^4(a.a) = 2(a a_{xxxx} - 4a_x a_{xxx} + 3a_{xxx}^2)$$

elde edilir.

Hirota D-operatörünün bazı özellikleri

$D_x(a.b) = a_x b - a b_x$

$D_x^2(a.b) = a_{2x}b - 2a_x b_x + a b_{2x}$

$D_x^3(a.b) = a_{3x}b - 3a_{2x}b + 3a_x b_{2x} - a b_{3x}$

$D_x^4(a.b) = a_{4x}b - 4a_{3x}b_x + 6a_{2x}b_{2x} - 4a_x b_{3x} + a b_{4x}$

$D_x D_t(a.b) = D_x(a_t b - a b_t) = a_{xt}b - a_t b_x - a_x b_t + a b_{xt}$

$D_x D_t(a.a) = 2(a a_{xt} - a_x a_t)$

$D_x^4(a.a) = 2(a a_{xxxx} - 4a_x a_{xxx} + 3a_{xx}^2)$

$D^n(a.a) = 0 \quad n \in \mathbb{N}\ ve\ n\ tektir.$

Bazı Sonuçlar:

i. $D_x D_t(a.b) = D_t D_x(a.b)$

ii. $D_x(a.b) = -D_x(b.a)$

iii. $D_x{}^m(a.b) = (-1)^m D_x{}^m(b.a)$

iv. $\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i$, $i = 1,2$ olmak üzere;

$$D_x D_t\left(e^{\theta_1}.e^{\theta_2}\right) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)e^{\theta_1+\theta_2}$$

ve

$$D_x^m\left(e^{\theta_1}.e^{\theta_2}\right) = (\alpha_1 - \alpha_2)^m e^{\theta_1+\theta_2}$$

şeklindedir.

i. $b = 1$ ise $D_x(a.1) = a_x$

$$D_x^2(a.1) = a_{xx}$$

$$\vdots$$

$$D_x^m(a.1) = \partial_x^m(a)$$

ii. $a = 1$ ise $D_x(1.b) = -b_x$

$$D_x^2(1.b) = b_{xx}$$

$$\vdots$$

$$D_x^m(1.b) = (-1)^m \partial_x^m(b)$$

şeklindedir.

4.2.2. Hirota Bilineer Formu

Bu yöntemde lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleme Hirota D operatörü uygulanır. Hirota metodunda uygulanan dönüşüm üç tiptedir. Bunlar Rasyonel Dönüşüm, Logaritmik Dönüşüm ve Bi-logaritmik Dönüşümdür. Genellikle KdV tipi denklemlere $u = -2(lnf)_{xx}$ logaritmik dönüşümü uygulanır.

Şimdi de KdV denklemini, Boussinesq denklemini ve Sawada-Kotera denklemini Hirota bilineer formda yazalım.

Örnek 4.2.1. (KdV Denklemi) [Hirota, 2004]

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

şeklindeki KdV denklemini Hirota bilineer formunda yazalım.

$$u = -2(lnf)_{xx}$$

$$u = -2\left(\frac{f_x}{f}\right)_x$$

$u = w_x$ dönüşümü yapılırsa,

$$u = \left(\frac{-2f_x}{f}\right)_x$$

$$w = -2\left(\frac{f_x}{f}\right)$$

olur.

$$w_{xt} - 6w_x w_{xx} + w_{xxxx} = 0$$

$$w_t - 3{w_x}^2 + w_{xxx} = c_1(t)$$

$c_1(t) \to 0$ olduğundan,

$$w_t - 3w_x^2 + w_{xxx} = 0 \qquad (4.2.2)$$

yazılabilir.

$$w_t = -2\left[\frac{f_{xt}f - f_x f_t}{f^2}\right]$$

$$w_x = -2\left[\frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2}\right]$$

$$w_{xxx} = -2\left[\frac{f_{4x}}{f} - \frac{4f_x f_{3x}}{f^2} - \frac{3f_{xx}^2}{f^2} + \frac{12f_x^2 f_{2x}}{f^3} - \frac{6f_x^4}{f^4}\right]$$

bu ifadeler (4.2.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$ff_{xt} - f_x f_t + ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 = 0$$

KdV bilineer formu elde edilir.

$$D_x^4(f.f) = 2(3f_{xx}^2 + f_{xxxx}f - 4f_x f_{xxx}) = 0$$

$$D_x D_t(f.f) = 2(f_{xt}f - f_x f_t)$$

bu denklemin Hirota bilineer formu

$$P(D)(f.f) = (D_x^4 + D_x D_t)(f.f) = 0$$

$$D_x(D_t + D_x^3)(f.f) = 0$$

$$D_x D_t(f.f) + D_x^4(f.f) = 0$$

şeklindedir.

Örnek 4.2.2. (Boussinesq Denklemi) [Boussinesq J., 1871]

$$u_{tt} - u_{xx} + 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0$$

şeklindeki Bousinesq denklemini Hirota bilineer formunda yazalım.

$u(x,t) = -2(lnf)_{xx}$ ve $lnf = w$ dönüşümü yapılırsa,

$$u(x,t) = -2w_{xx}$$

elde edilir. Bu dönüşüm denkleme uygulanırsa,

$$-2w_{xxtt} + 2w_{xxxx} + 3(4w_{xx}^2)_{xx} + 2w_{xxxxxx} = 0$$

$$-2w_{tt} + 2w_{xx} + 12w_{xx}^2 + 2w_{xxxx} = 0$$

$$-2\left(\frac{f_t}{f}\right)_t + 2\left(\frac{f_x}{f}\right)_x + 12\left(\frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2}\right)^2 + 2\left(\frac{f_x}{f}\right)_{xxx} = 0$$

$$-2\left(\frac{f_{tt}f - f_t^2}{f^2}\right) + 2\left(\frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2}\right) + \frac{12\left(f_{xx}^2 - 2f_{xx}f_x^2 f + f_x^4\right)}{f^4} +$$

$$2\left[\frac{f_{xxxx}}{f} - \frac{4f_x f_{xxx}}{f^2} - \frac{3f_{xx}^2}{f^2} + \frac{12f_x^2 f_{xx}}{f^3} - \frac{6f_x^4}{f^4}\right] = 0$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-2\left(\frac{f_{tt}f - f_t^2}{f^2}\right) + 2\left(\frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2}\right) + \left(\frac{2f_{xxxx}}{f} - \frac{8f_x f_{xxx}}{f^2} + \frac{6f_{xx}^2}{f^2}\right) = 0$$

$$D_x^2(f.f) = 2f_{xx}f - 2f_x^2$$

$${D_t}^2(f.f) = 2f_{tt}f - 2f_t^2$$

$$D_x^4(f.f) = 2f_{xxxx}f - 8f_{xxx}f_x + 6f_{xx}^2$$

$$2f_{tt}f - 2f_t^2 - 2f_{xx}f + 2f_x^2 - 2f_{xxxx}f + 8f_{xxx}f_x - 6f_{xx}^2 = 0$$

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)(f.f) = 0$$

Hirota bilineer formu elde edilir.

Örnek 4.2.3. (Sawada-Kotera Denklemi) [Sawada K., Kotera T., 1974]

$$u_t + 45u^2u_x - 15u_xu_{xx} - 15uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0$$

şeklindeki Sawada Kotera denklemini Hirota bilineer formunda yazalım.

$u(x,t) = -2(lnf)_{xx}$ dönüşümü yapılırsa

$$u_x = -2\left(\frac{f_{xxx}}{f} - \frac{3f_x f_{xx}}{f^2} + \frac{2{f_x}^3}{f^3}\right)$$

$$u_t = -2\left(\frac{f_{xxt}}{f} - \frac{f_{xx}f_t}{f^2} - \frac{2f_x f_{xt}}{f^2} + \frac{2f_x^2 f_t}{f^3}\right)$$

$$u_{xx} = -2\left(\frac{f_{xxxx}}{f} - \frac{4f_x f_{xxx}}{f^2} - \frac{3f_{xx}^2}{f^2} + \frac{12f_x^2 f_{xx}}{f^3} - \frac{6f_x^4}{f^4}\right)$$

$$u_{xxx} = -2\left(\frac{f_{xxxxx}}{f} - \frac{5f_x f_{xxxx}}{f^2} - \frac{10f_{xx}f_{xxx}}{f^2} + \frac{20f_x^2 f_{xxx}}{f^3} + \frac{30f_{xx}^2 f_x}{f^3} - \frac{60{f_x}^3 f_{xx}}{f^4} + \frac{24f_x^5}{f^5}\right)$$

$$u_{xxxxx} = -2\left(\frac{f_{xxxxxxx}}{f} - \frac{7f_x f_{xxxxxx}}{f^2} - \frac{21f_{xx}f_{xxxxx}}{f^2} + \frac{42f_x^2 f_{xxxxx}}{f^3} - \frac{35f_{xxx}f_{xxxx}}{f^2} + \frac{210f_x f_{xx} f_{xxxx}}{f^3} - \frac{210f_x^3 f_{xxxx}}{f^4} + \frac{140f_{xxx}^2 f_x}{f^3} + \frac{210f_{xx}^2 f_{xxx}}{f^3} - \frac{1260f_x^2 f_{xx} f_{xxx}}{f^4} + \frac{840f_x^4 f_{xxx}}{f^5} - \frac{630f_{xx}^3 f_x}{f^4} + \frac{2520f_{xx}^3 f_x}{f^4} + \frac{2520f_x^3 f_{xx}^2}{f^5} - \frac{2520f_x^5 f_{xx}}{f^6} + \frac{720f_x^7}{f^7}\right)$$

elde edilir.

Bunları Sawada Kotera denkleminde yerine yazarsak

$$-f_{xt}f + f_x f_t - f_{xxxxxx}f + 6f_{xxxxx}f_x - 15f_{xxxx}f_{xx} + 20f_{xxx}f_{xxx} - 15f_{xx}f_{xxxx} + 6f_{xxxxx}f_x - ff_{xxxxxx} = 0$$

bulunur. Buradan

$$D_x D_t(f.f) = 2(f_{xt}f - f_x f_t)$$

$$D_x{}^6(f.f) = f_{xxxxxx}f - 6f_{xxxxx}f_x + 15f_{xxxx}f_{xx} - 20f_{xxx}f_{xxx} + 15f_{xx}f_{xxxx} - 6f_{xxxxx}f_x + f_{xxxxx}f_x$$

$$(D_x D_t + D_x^6)(f.f) = 0 \Rightarrow$$

$$D_x(D_t + D_x^5)(f.f) = 0$$

Hirota bilineer formu elde edilir.

4.3. Multi Soliton Çözümler

Bu kısımda Hirota bilineer formuna pertürbasyon açılımı yapılarak lineer olmayan denklemin multi soliton çözümleri bulunmaya çalışılacaktır.

4.3.1. Pertürbasyon Açılımı

Kısmi diferansiyel denklemlerin genel formu $F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0$ şeklindedir. Hirota bilineer formu $P(D)(f.f) = 0$ olan $F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0$ biçimindeki lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleme pertürbasyon açılımı yapılarak soliton çözümler bulunmaya çalışılır. Burada

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n$$

şeklinde tanımlanır. Bu açılımı multi soliton çözümlerinde kullanacağız. Denklemin multi soliton çözümlerini bulmak için pertürbasyon açılımını kullanıyoruz.

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots$$

pertürbasyon açılımını ele alalım. Burada ε pertürbasyon parametresi f_0 da sabit olup genellikle 1 alınır.

$$f.f = 1.1 + (f_1.1 + 1.f_1)\varepsilon + (f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2)\varepsilon^2 + (f_3.1 + f_2.f_1 + f_1.f_2 + 1.f_3) + \cdots$$

olur.

$$P(D)(f.f) = 0$$

olduğundan

$$P(D)(f.f) = P(D)(1.1) + \varepsilon P(D)(f_1.1 + 1.f_1) + \varepsilon^2 P(D)(f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2) + \varepsilon^3 P(D)(f_3.1 + f_2.f_1 + f_1.f_2 + 1.f_3) + \cdots = 0$$

burada $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$ katsayıları sıfıra eşitlenirse

$\varepsilon^0 : P(D)(1.1) = 0$

$\varepsilon^1 : P(D)(f_1.1 + 1.f_1) = 2P(D)(f_1.1) = 0$

$\varepsilon^2 : 2P(D)(f_2.1) + P(D)(f_1.f_1) = 0$

$\varepsilon^3 : 2P(D)(f_3.1) + 2P(D)(f_1.f_2) = 0$

.

.

.

$\varepsilon^n = P(D)\left(\sum_{j=0}^{n} f_j f_{n-j}\right) = 0$ olur.

$$P(D)(f_1.1 + 1.f_1) = 2P(D)(f_1.1) = 2P(\partial)f_1 = 0$$

dan bu denklemin çözümlerinden biri üstel gelecektir.

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots, \delta_i$ sabit olmak üzere $\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i y + \cdots + \delta_i$ dır.

Buradan,

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \delta_1$ sabit ve $\theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1 y + \cdots \delta_1$

$f_1 = e^{\theta_1}$ olur. Aynı şekilde f_2, f_3, ... ler de üstel olurlar.

1- Soliton Çözüm (1SÇ):

$$u(x,t) = -2(lnf)_{xx}$$

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i$$

ve

$$f_1 = \sum_{i=1}^{N} e^{\theta_i}$$

olmak üzere 1-soliton çözüm için $N = 1$ alınır.

$f_1 = e^{\theta_1}, \theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1$ olur. $i \geq 2$ için $f_i = 0$ olur. Bu ε^i katsayısından dolayıdır.

$$2P(D)(f_1.1) = 2P(D)\left(e^{\theta_1}.1\right) = 2P(\partial)e^{\theta_1} = 0$$

$$P(D)(f_1.f_1) = P(D)\left(e^{\theta_1}.e^{\theta_1}\right)$$

$$= P(\alpha_1 - \alpha_1, \beta_1 - \beta_1)e^{\theta_1 + \theta_1} = 0$$

$$= P(p_1) = 0$$

$\varepsilon = 1$ alınırsa $f = 1 + e^{\theta_1}$ olur. $\theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1$ olmak üzere denklemin 1-soliton çözümü

$$u(x,t) = U\left[1 + e^{\theta_1}\right]$$

biçimindedir.

2- Soliton Çözüm (2SÇ):

$$f_1 = \sum_{i=1}^{N} e^{\theta_i}$$

ise $f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2} \ \ (N = 2)$

$$f_2 = \sum_{1 \le i \le j \le N} A(i,j)\, e^{\theta_i + \theta_j}$$

$\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i \quad i = 1{,}2$ olmak üzere $i \geq 3$ için $f_i = 0$ olur. Bu ε^i nin katsayısından ötürüdür.

$f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2$ olur.

$P(D)(f.f) = 0$ dan

$P(D)(1.1) = 0$ bulunur.

$$P(D)(f_1.1 + 1.f_1) = 2P(D)(f_1.1) = 2P(\partial)\left(e^{\theta_1}.e^{\theta_2}\right) = 0$$

$i = 1{,}2$ olmak üzere $P(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = P(p_i) = 0$ olur.

$$P(D)(f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2) = 2P(\partial)f_2 + 2P(D)\left(e^{\theta_1+\theta_2}\right)$$

$$= 2P(\partial)f_2 + 2P(D)(\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2)e^{\theta_1}.e^{\theta_2}$$

burada $f_2 = A_{12}e^{\theta_1+\theta_2}$ formatındadır.

$$A_{ij} = -\frac{P(p_i - p_j)}{P(p_i + p_j)} = \left(\frac{\alpha_i - \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j}\right)^2$$

dan $A_{12} = -\frac{P(p_1-p_2)}{P(p_1+p_2)} = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2$ dır.

$\varepsilon = 1$ alınır ve f_2 de f denkleminde yazılırsa $f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12}e^{\theta_1+\theta_2}$ bulunur. Buradan ikinci soliton çözümü

$u = U\left[1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12}e^{\theta_1+\theta_2}\right]$ biçimindedir.

Örnek 4.3.1.

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0$$

olan KdV denkleminin 1-soliton ve 2-soliton çözümlerini bulalım.

KdV denkleminin bilineer formu

$$(D_x D_t + D_x^4)(f.f) = 0$$

biçimindedir. KdV denkleminin 1-soliton çözümü için $N = 1$ alınırsa $f_1 = e^{\theta_1}$ olur. Pertürbasyon açılımından $f = 1 + e^{\theta_1}$ olduğunu biliyoruz.

Burada $\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i$ den $\theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1$ olur.

$\varepsilon^1 : f_{xt}^{(1)} + f_{xxxx}^{(1)} = 0 \Rightarrow$

$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_1^4)e^{\theta_1} = 0 \Rightarrow$

$\alpha_1(\beta_1 + \alpha_1^3) = 0 \Rightarrow$

$\beta_1 = -\alpha_1^3$ olur. Burada

$\theta_i = \alpha_i x - \alpha_i^3 t + \gamma_i$ ve $\theta_1 = \alpha_1 x - \alpha_1^3 t + \gamma_1$ dır.

$f = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{\alpha_1 x - \alpha_1^3 t + \gamma_1}$ elde edilir.

$$f_x = \alpha_1 e^{\theta_1}$$

$$f_{xx} = \alpha_1^2 e^{\theta_1}$$

f, f_x, f_{xx} ifadeleri

$$u(x,t) = -2\left(\frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2}\right)$$

de yazılır.

$$u(x,t) = -2\left[\frac{\alpha_1^2 e^{\theta_1}\left(1 + e^{\theta_1}\right) - \alpha_1^2 e^{2\theta_1}}{(1 + e^{\theta_1})^2}\right] = -2\frac{\alpha_1^2 e^{\theta_1}}{(1 + e^{\theta_1})^2} = -2\frac{\alpha_1^2 e^{\theta_1}}{1 + 2e^{\theta_1} + e^{2\theta_1}}$$

$$= -2\frac{\alpha_1^2}{e^{-\theta_1} + 2 + e^{\theta_1}}$$

$$cosh\theta_1 = \frac{e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}}{2}$$

ise $e^{\theta_1} + e^{-\theta_1} = 2cosh\theta_1$ olur. Bunu yerine yazarsak

$$u(x,t) = -2\frac{\alpha_1^2}{2 + 2cosh\theta_1} = -\frac{\alpha_1^2}{1 + cosh\theta_1} = -\frac{\alpha_1^2}{2cosh^2\frac{\theta_1}{2}}$$

$$= -\frac{\alpha_1^2}{2}sech^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$$

$$= -\frac{\alpha_1^2}{2}sech^2\left(\frac{\alpha_1 x - {\alpha_1}^3 t + \gamma_1}{2}\right)$$

KdV denkleminin 1- soliton çözümü olur.

KdV denkleminin 2-soliton çözümü için $N = 2$ alınırsa $f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$ olur.

Burada $\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i$ den $\theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1$ ve $\theta_2 = \alpha_2 x + \beta_2 t + \gamma_2$ olur.

$\beta_i = -\alpha_i^3$ seçilirse;

$\theta_i = \alpha_i x - \alpha_i^3 t + \gamma_i$ olup $\theta_1 = \alpha_1 x - \alpha_1^3 t + \gamma_1$ ve $\theta_2 = \alpha_2 x - \alpha_2^3 t + \gamma_2$ şeklindedir.

$A_{ij} = \left(\frac{\alpha_i - \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j}\right)^2$ den $A_{12} = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2$ dir.

2-soliton çözüm için

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$f_x = \alpha_1 e^{\theta_1} + \alpha_2 e^{\theta_2} + A_{12}(\alpha_1 + \alpha_2) e^{\theta_1 + \theta_2}$$

$$f_{xx} = \alpha_1^2 e^{\theta_1} + \alpha_2^2 e^{\theta_2} + A_{12}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}$$

f, f_x, f_{xx} ifadeleri $u = -2(lnf)_{xx}$ dönüşümünde yazılırsa

$$u(x,t) = -2\frac{\left[\alpha_1^2 e^{\theta_1} + \alpha_2^2 e^{\theta_2} + A_{12}\left(\alpha_2^2 e^{\theta_1} + \alpha_1^2 e^{\theta_2}\right) e^{\theta_1 + \theta_2} + 2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}\right]}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2})^2}$$

2-soliton çözümü elde edilir.

Örnek 4.3.2. (Sawada-Kotera Denklemi) [Sawada K., Kotera T., 1974]

$$u_t + 45u^2 u_x - 15u_x u_{xx} - 15uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0$$

şeklindeki Sawada Kotera denkleminin 1-soliton ve 2-soliton çözümlerini bulalım.

Sawada Kotera denkleminin bilineer formu

$$(D_x D_t + D_x^6)(f.f) = 0$$

biçimindedir. Sawada Kotera denkleminin 1-soliton çözümü için $N = 1$ alınırsa $f_1 = e^{\theta_1}$ olur. Pertürbasyon açılımından $f = 1 + e^{\theta_1}$ olduğunu biliyoruz.

Burada $\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i$ den $\theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1$ olur.

$\varepsilon^1 : f_{xt}^{(1)} + f_{xxxxxx}^{(1)} = 0 \Rightarrow$

$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_1^6)e^{\theta_1} = 0 \Rightarrow$

$\alpha_1(\beta_1 + \alpha_1^5) = 0 \Rightarrow$

$\beta_1 = -{\alpha_1}^5$ olur. Burada

$\theta_i = \alpha_i x - {\alpha_i}^5 t + \gamma_i$ ve $\theta_1 = \alpha_1 x - {\alpha_1}^5 t + \gamma_1$ dır.

$f = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{\alpha_1 x - {\alpha_1}^5 t + \gamma_1}$ elde edilir.

$$f_x = \alpha_1 e^{\theta_1}$$

$$f_{xx} = \alpha_1^2 e^{\theta_1}$$

f, f_x, f_{xx} ifadeleri

$$u(x,t) = -2\left(\frac{f_{xx}f - {f_x}^2}{f^2}\right)$$

de yazılır.

$$u(x,t) = -2\left[\frac{{\alpha_1}^2 e^{\theta_1}\left(1 + e^{\theta_1}\right) - {\alpha_1}^2 e^{2\theta_1}}{(1 + e^{\theta_1})^2}\right] = -2\frac{{\alpha_1}^2 e^{\theta_1}}{(1 + e^{\theta_1})^2} = -2\frac{{\alpha_1}^2 e^{\theta_1}}{1 + 2e^{\theta_1} + e^{2\theta_1}}$$

$$= -2\frac{{\alpha_1}^2}{e^{-\theta_1} + 2 + e^{\theta_1}}$$

$$cosh\theta_1 = \frac{e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}}{2}$$

ise $e^{\theta_1} + e^{-\theta_1} = 2cosh\theta_1$ olur. Bunu yerine yazarsak

$$u(x,t) = -2\frac{{\alpha_1}^2}{2 + 2cosh\theta_1} = -\frac{{\alpha_1}^2}{1 + cosh\theta_1} = -\frac{{\alpha_1}^2}{2cosh^2\frac{\theta_1}{2}}$$

$$= -\frac{{\alpha_1}^2}{2}sech^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$$

$$= -\frac{{\alpha_1}^2}{2}sech^2\left(\frac{\alpha_1 x - {\alpha_1}^5 t + \gamma_1}{2}\right)$$

Sawada Kotera denkleminin 1- soliton çözümü olur.

Sawada Kotera denkleminin 2-soliton çözümü için $N = 2$ alınırsa $f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$ olur.

Burada $\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i$ den $\theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1$ ve $\theta_2 = \alpha_2 x + \beta_2 t + \gamma_2$ olur.

$\beta_i = -{\alpha_i}^5$ seçilirse;

$\theta_i = \alpha_i x - {\alpha_i}^5 t + \gamma_i$ olup $\theta_1 = \alpha_1 x - {\alpha_1}^5 t + \gamma_1$ ve $\theta_2 = \alpha_2 x - {\alpha_2}^5 t + \gamma_2$ şeklindedir.

$A_{ij} = \left(\frac{\alpha_i - \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j}\right)^2$ den $A_{12} = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2$ dir.

2-soliton çözüm için

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$f_x = \alpha_1 e^{\theta_1} + \alpha_2 e^{\theta_2} + A_{12}(\alpha_1 + \alpha_2) e^{\theta_1 + \theta_2}$$

$$f_{xx} = \alpha_1^2 e^{\theta_1} + \alpha_2^2 e^{\theta_2} + A_{12}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}$$

f, f_x, f_{xx} ifadeleri $u = -2(lnf)_{xx}$ dönüşümünde yazılırsa

$$u(x,t) = -2\frac{\left[\alpha_1^2 e^{\theta_1} + \alpha_2^2 e^{\theta_2} + A_{12}\left(\alpha_2^2 e^{\theta_1} + \alpha_1^2 e^{\theta_2}\right) e^{\theta_1 + \theta_2} + 2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}\right]}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2})^2}$$

2-soliton çözümü elde edilir.

Örnek 4.3.3. (Boussinesq Denklemi) [Boussinesq J., 1871]

$$u_{tt} - u_{xx} + 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0$$

şeklindeki Boussinesq denkleminin 1-soliton ve 2-soliton çözümünü bulalım.

Boussinesq denkleminin bilineer formu

$$\left({D_t}^2 - {D_x}^2 - {D_x}^4\right)(f.f) = 0$$

biçimindedir. Boussinesq denkleminin 1-soliton çözümü için $N = 1$ alınırsa $f_1 = e^{\theta_1}$ olur. Pertürbasyon açılımından $f = 1 + e^{\theta_1}$ olduğunu biliyoruz.

Burada $\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i$ den $\theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1$ olur.

ε^1: $f_{tt}^{(1)} - f_{xx}^{(1)} - f_{xxxx}^{(1)} = 0 \Rightarrow$

$(\beta_1^2 - \alpha_1^2 - \alpha_1^4) e^{\theta_1} = 0 \Rightarrow$

$\beta_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_1^4}$ olur. Burada

$\theta_i = \alpha_i x + \sqrt{\alpha_i^2 + \alpha_i^4}\, t + \gamma_i$ ve $\theta_1 = \alpha_1 x + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_1^4}\, t + \gamma_1$ dır.

$f = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{\alpha_1 x + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_1^4} t + \gamma_1}$ elde edilir.

$$f_x = \alpha_1 e^{\theta_1}$$

$$f_{xx} = \alpha_1^2 e^{\theta_1}$$

f, f_x, f_{xx} ifadeleri

$$u(x,t) = -2\left(\frac{f_{xx} f - {f_x}^2}{f^2}\right)$$

de yazılır.

$$u(x,t) = -2\left[\frac{{\alpha_1}^2 e^{\theta_1}\left(1 + e^{\theta_1}\right) - {\alpha_1}^2 e^{2\theta_1}}{(1 + e^{\theta_1})^2}\right] = -2\frac{{\alpha_1}^2 e^{\theta_1}}{(1 + e^{\theta_1})^2} = -2\frac{{\alpha_1}^2 e^{\theta_1}}{1 + 2e^{\theta_1} + e^{2\theta_1}}$$

$$= -2\frac{{\alpha_1}^2}{e^{-\theta_1} + 2 + e^{\theta_1}}$$

$$cosh\theta_1 = \frac{e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}}{2}$$

ise $e^{\theta_1} + e^{-\theta_1} = 2cosh\theta_1$ olur. Bunu yerine yazarsak

$$u(x,t) = -2\frac{{\alpha_1}^2}{2 + 2cosh\theta_1} = -\frac{{\alpha_1}^2}{1 + cosh\theta_1} = -\frac{{\alpha_1}^2}{2cosh^2\frac{\theta_1}{2}}$$

$$= -\frac{{\alpha_1}^2}{2} sech^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$$

$$= -\frac{{\alpha_1}^2}{2} sech^2\left(\frac{\alpha_1 x + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_1^4} t + \gamma_1}{2}\right)$$

Boussinesq denkleminin 1- soliton çözümü olur.

Boussinesq denkleminin 2-soliton çözümü için $N = 2$ alınırsa $f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$ olur.

Burada $\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i$ den $\theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1$ ve $\theta_2 = \alpha_2 x + \beta_2 t + \gamma_2$ olur.

$\beta_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \alpha_i^4}$ seçilirse;

$\theta_i = \alpha_i x + \sqrt{\alpha_i^2 + \alpha_i^4} t + \gamma_i$ olup $\theta_1 = \alpha_1 x + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_1^4} t + \gamma_1$ ve

$\theta_2 = \alpha_2 x + \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_2^4} t + \gamma_2$ şeklindedir.

$A_{ij} = \left(\frac{\alpha_i - \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j}\right)^2$ den $A_{12} = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2$ dir.

2-soliton çözüm için

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12}e^{\theta_1+\theta_2}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$f_x = \alpha_1 e^{\theta_1} + \alpha_2 e^{\theta_2} + A_{12}(\alpha_1 + \alpha_2)e^{\theta_1+\theta_2}$$

$$f_{xx} = \alpha_1^2 e^{\theta_1} + \alpha_2^2 e^{\theta_2} + A_{12}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 e^{\theta_1+\theta_2}$$

f, f_x, f_{xx} ifadeleri $u = -2(lnf)_{xx}$ dönüşümünde yazılırsa

$$u(x,t) = -2\frac{\left[\alpha_1^2 e^{\theta_1} + \alpha_2^2 e^{\theta_2} + A_{12}\left(\alpha_2^2 e^{\theta_1} + \alpha_1^2 e^{\theta_2}\right)e^{\theta_1+\theta_2} + 2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^{\theta_1+\theta_2}\right]}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12}e^{\theta_1+\theta_2})^2}$$

2-soliton çözümü elde edilir.

Örnek 4.3.4. (The Kadomtsev - Petviashivili (KP) Denklemi)

$$(u_t + u_{xxx} - 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0$$

şeklindeki KP denkleminin 1- soliton ve 2- soliton çözümünü elde ediniz.

Çözüm 4.3.4. $u(x,t,y) = -2(lnf)_{xx}$ dönüşümü kullanılırsa KP denkleminin bilineer formu $ff_{xt} - f_x f_t + 3f_{xx}^2 + ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{yy}f - 3f_y{}^2 = 0$

Buna Hirota Bilineer formu uygulanırsa

$$P(D)(f.f) = \left(D_x^4 + D_x D_t + 3D_y^2\right)(f.f) = 0$$

elde edilir.

Hirota pertürbasyon açılımı

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots$$

şeklindedir.

$P(D)(f.f) = P(D)(1.1) + \varepsilon P(D)(f_1.1 + 1.f_1) + \varepsilon^2 P(D)(f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2) + \varepsilon^3 P(D)(f_3.1 + f_2.f_1 + f_1.f_2 + 1.f_3) + \cdots = 0$

1-soliton çözümü için $N = 1$ alınırsa $f_1 = e^{\theta_1}$ olur. Pertürbasyon açılımından $f = 1 + e^{\theta_1}$ olduğunu biliyoruz.

Burada $\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i y + k_i$ den $\theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1 y + k_1$ olur.

ε^1: $f_{xt}^{(1)} + f_{xxxx}^{(1)} + 3f_{yy}^{(1)} = 0 \Rightarrow$

$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_1^4 + 3\gamma_1^2)e^{\theta_1} = 0 \Rightarrow$

$\beta_1 = -\frac{\alpha_1^4+3\gamma_1^2}{\alpha_1}$ olur.

$\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i y + k_i$ ve $\theta_1 = \alpha_1 x - \frac{\alpha_1^4+3\gamma_1^2}{\alpha_1} t + \gamma_1 y + k_1$ dır.

$f = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{\alpha_1 x - \frac{\alpha_1^4+3\gamma_1^2}{\alpha_1} t + \gamma_1 y + k_1}$ elde edilir.

$$f_x = \alpha_1 e^{\theta_1}$$

$$f_{xx} = \alpha_1^2 e^{\theta_1}$$

f, f_x, f_{xx} ifadeleri

$$u(x,t) = -2\left(\frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2}\right)$$

de yazılır.

$$u(x,t) = -2\left[\frac{\alpha_1^2 e^{\theta_1}\left(1+e^{\theta_1}\right) - \alpha_1^2 e^{2\theta_1}}{(1+e^{\theta_1})^2}\right] = -2\frac{\alpha_1^2 e^{\theta_1}}{(1+e^{\theta_1})^2} = -2\frac{\alpha_1^2 e^{\theta_1}}{1+2e^{\theta_1}+e^{2\theta_1}}$$

$$= -2\frac{\alpha_1^2}{e^{-\theta_1}+2+e^{\theta_1}}$$

$$cosh\theta_1 = \frac{e^{\theta_1}+e^{-\theta_1}}{2}$$

ise $e^{\theta_1} + e^{-\theta_1} = 2cosh\theta_1$ olur. Bunu yerine yazarsak

$$u(x,t) = -2\frac{\alpha_1^2}{2+2cosh\theta_1} = -\frac{\alpha_1^2}{1+cosh\theta_1} = -\frac{\alpha_1^2}{2cosh^2\frac{\theta_1}{2}}$$

$$= -\frac{{\alpha_1}^2}{2} sech^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$$

$$= -\frac{{\alpha_1}^2}{2} sech^2\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1 y + k_1}{2}\right)$$

KP denkleminin bir soliton çözümü olur.

KdV denkleminin 2-soliton çözümü için $N = 2$ alınırsa $f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$ olur.

Burada $\theta_i = \alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i$ den $\theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t + \gamma_1$ ve $\theta_2 = \alpha_2 x + \beta_2 t + \gamma_2$ olur.

$\beta_i = -\frac{\alpha_i^4+3\gamma_i^2}{\alpha_i}$ seçilirse;

$\theta_i = \alpha_i x - \frac{\alpha_i^4+3\gamma_i^2}{\alpha_i} t + \gamma_i$ olup

$\theta_1 = \alpha_1 x - \frac{\alpha_1^4+3\gamma_1^2}{\alpha_1} t + \gamma_1 y + k_1$ ve $\theta_2 = \alpha_2 x - \frac{\alpha_2^4+3\gamma_2^2}{\alpha_2} t + \gamma_2 y + k_2$ şeklindedir.

$A_{ij} = \left(\frac{\alpha_i-\alpha_j}{\alpha_i+\alpha_j}\right)^2$ den $A_{12} = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2$ dir.

2-soliton çözüm için

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12} e^{\theta_1+\theta_2}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$f_x = \alpha_1 e^{\theta_1} + \alpha_2 e^{\theta_2} + A_{12}(\alpha_1 + \alpha_2) e^{\theta_1+\theta_2}$$

$$f_{xx} = \alpha_1^2 e^{\theta_1} + \alpha_2^2 e^{\theta_2} + A_{12}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 e^{\theta_1+\theta_2}$$

f, f_x, f_{xx} ifadeleri $u = -2(lnf)_{xx}$ dönüşümünde yazılırsa

$$u(x,t) = -2\frac{\left[\alpha_1^2 e^{\theta_1} + \alpha_2^2 e^{\theta_2} + A_{12}\left(\alpha_2^2 e^{\theta_1} + \alpha_1^2 e^{\theta_2}\right) e^{\theta_1+\theta_2} + 2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^{\theta_1+\theta_2}\right]}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12} e^{\theta_1+\theta_2})^2}$$

2-soliton çözümü elde edilir.

5. TARTIŞMA SONUÇ

Bu tez çalışmasında lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygun bir dönüşüm yapılarak Hirota Bilineer forma getirildikten sonra bu yöntemle KdV denklemi, Boussinesq denklemi, Sawada-Kotera denklemi ve Kadomtsev-Petviashvilli denklemlerinin 1. ve 2. soliton çözümleri yapılmıştır.

Bu yöntemle lineer olmayan diğer kısmi diferansiyel denklemlerin 1., 2., …, N. soliton çözümleri başka bir tez konusu olarak çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Boussinesq J., 1871. Théorie de I'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire Comptes Rendus, 72**,** 755-759.

Drazin P.G. Johnson R.S., 1996. Solitons: An introduction, Cambridge University Press, Cambridge.

Fermi A., Pasta J. and Ulam S., Studies of non-linear problems, I. Los. Alamos Report LA 1940 (1955)

Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D. and Miura R. M., Method for solving the Korteweg-de Vries equation, ***Phys. Rev. Lett***., 19, 1095-1097 (1967)

Hirota R., 1971a. Exact solution of the KdV equation for multiple collisions of solitons, ***Phsy. Rev. Lett***. 27**,** 1192-1194.

Hirota R., 1973. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equations, ***J. Math. Phys***. 14, 805-809.

Hirota R., 1971b. Exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, ***Phys. Rev. Lett***. 27, 1192.

Hirota R., 1972a. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, ***J. Phys. Soc. Japan***, 33, 1456.

Hirota R., 1972b. Exact solution of the sine-Gordon equation for multiple collisions of solitons, ***J. Phys. Soc. Japan***, 33, 1459.

Hirota R., 1973. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation, ***J. Math. Phys.*** 14, 805-809.

Hirota R., 2004. The Direct Method in Soliton Theory.

Karataş E., 2013. Bazı lineer olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin çoklu soliton çözümleri için Hirota Metodu, Fırat Üniversitesi, Elazığ.

Korteweg D.J., de Vries G., 1895. Onthe change of from of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave, ***Phil. Mag.***, 39, 422-443.

Lax P. D., Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves, ***Commun. Pure Appl. Math.***, 21, 467-490 (1968).

Pekcan A., 2005. The Hirota Direct Method, Master of Science, Bilkent Universty, Ankara.

Rayleigh L., 1876. On waves, ***Phil. Mag***., 1, 257-279.

Russell, S. J., Fourteenth meeting of British association of the advancement of science, Report on waves, 311-390, eds. John Murray, London (1844).

Sawada K., Kotera T., 1974. A method for finding N-soliton solutions for the KdV equation and KdV-like equation, ***Prog. Theor. Phys.*** 51,

355-1367Zabusky N.J., Kruskal M.D., 1965. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, ***Phsy. Rev.Lett***., 15, 240-243.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Diyarbakır ilinin Lice ilçesinde dünyaya geldim. İlk, orta ve lise öğrenimini Diyarbakır'da bitirdim. 2011'de Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimini tamamladım. Çeşitli özel kurumlarda Matematik öğretmeni olarak görev yaptıktan sonra 2013 yılından itibaren faal bir şekilde Milli Eğitim Bakanlığına bağlı okullarında Matematik öğretmenliğini icra etmiş bulunmaktayım. Halen Bismil Fen Lisesinde Matematik öğretmeni olarak görevimi sürdürmekteyim.

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Mehmet KURKUT
ÖĞRENCİ NO	15804001
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2017-2018
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Nonlineer Evolüsyon Denklemleri İçin Hirota Metodu
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	52
BENZERLİK ORANI	%18
RAPORLAMA TARİHİ	28/06/2018

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 52 sayfalık kısmına ilişkin, 28/06/2018 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 18 'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☐ Kaynakça hariç
- ☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
- ☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Mehmet KURKUT

28/06/2018	28/06/2018
Doç. Dr. Halis YILMAZ **Tez Danışmanı**	Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY **Anabilim Dalı Başkanı**