



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAF PARAMETRELERİ VE CEBİRSEL YAPILARA GRAFSAL YAKLAŞIMLAR

Nihat AKGÜNEŞ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık-2013

KONYA

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

GRAF PARAMETRELERİ VE CEBİRSEL YAPILARA GRAFSAL YAKLAŞIMLAR

Nihat AKGÜNEŞ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

2013, 81 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
Doç. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Doç. Dr. Bünyamin AYDIN

Teorik veya uygulama alanındaki problemlerin çoğunun incelenmesinde ve çözümünde, graf teori iyi bir model olmuştur. Genel manada graflar zor bir problemi daha anlaşılır şekillere dönüştüren bir araç olarak düşünülebilir. Bu sayede çok daha karmaşık yapılar ve ifadeler, graf yöntemleri kullanarak kolay bir şekilde çözülebilmektedir.

Tez toplam altı ana bölümden oluşmaktadır:

Birinci Bölüm, tüm tezde kullanılacak standart tanım ve özellikleri vermektedir.

İkinci Bölümde, özel bir cebirsel graf olan sıfır-bölen grapfların bazı parametreleri incelenmiştir.

Üçüncü Bölümde, başka bir referans tarafından yeni tanıtılmış düzensizlik indeksi ve özellikleri verilmiş, ayrıca düzensizlik indeksi kullanılarak bir grafın yarıçapı için kuvvetli bir sınır elde edilmiştir.

Dördüncü ve Beşinci Bölümler ise bu tezin diğer ana teması olan monojenik yarı gruplar üzerinde tanımlanan özel graflar ve bu grafların topolojik indekslerine ayrılmıştır. Özellikle 5. Bölümde, bu graflar için elde edilen indekslerin, sadece monojenik yarı grubun mertebesi ile ifade edilebileceği gösterilmiştir.

Son bölümde, tüm tezde elde edilen sonuçlar, öneriler eşliğinde tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel Graflar, Graf, Graf Parametreleri, Düzensizlik İndeksi, Monojenik Yarı Gruplar, Sıfır-bölen Graflar, Topolojik İndeksler.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

APPROACHES TO GRAPH PARAMETERS AND ALGEBRAIC STRUCTURES BY GRAPHS

Nihat AKGÜNEŞ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCEOF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

2013,81Pages

Jury
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
Assoc. Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Assoc. Prof. Dr. Bünyamin AYDIN

The graph theory has become a good model for investigating and solving of many problems given in the meaning of theoretically and applicational. In general, graphs can be thought as a good tool which convert a diffucult problem to more easier and understandable. Therefore, many complex structures and expressions can be easily solved by using graph theory methods.

This thesis contains six main sections.

The standard definitions and properties are given in the first section.

In the second section, some parameters of a special algebraic graph namely zero-divisor graphs are investigated.

In the third section, we present the irregularity index that described very recently in another reference, and then we obtain a strict bound for the radius of a graph by using this important index.

The special graphs over monogenic semigroups and their topological indices that are actually other main goals of this thesis are given in fourth and fifth sections. Specially in the 5th section, we point out that these topological indices can only be stated by means of the order of monogenic semigroups.

The final section discusses the whole results of the thesis with some suggestions.

Keywords: Algebraic Graphs, Graphs, Graphs Parameters, Irregularty Index, Monogenic Semigroup, Topological Indices, Zero-divisor Graphs.

ÖNSÖZ

Graf Parametreleri ve Cebirsel Yapılara Grafsal Yaklaşımlar isimli bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK yönetiminde hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora tezi olarak sunulmuştur.

Yapılan tüm çalışmalarımda bilgi, tecrübe ve samimiyetini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK' e saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca bilimsel açıdan çok faydalandığım sayın Prof. Dr. Kinkar Chandra DAS' a teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca hiçbir emeklerini esirgemeyip beni bugünlere getiren annem ve merhum babama, desteğini ve sabrını esirmeyen sevgili eşim Özlem' e ve kızım Fatma' ya sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.

Doktora öğrenimim boyunca maddi destek sağlayıp yükümü hafifleten TÜBİTAK a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Nihat AKGÜNEŞ
KONYA-2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **xi**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Grafın Tanımı ve Yapısı 2
1.2. Alt Graf 5
1.3. Yürüme ve Yol Kavramı 6
1.4. Graf Çeşitleri 7
1.5. Graf Parametreleri 11
1.6. Kaynak Araştırması 15
1.6.1. Graf Parametreleri Üzerine Çalışmalar 15
1.6.2. Sıfır-Bölen Graflar İle İlgili Kaynak Araştırması 18

2. SIFIR-BÖLEN GRAFLARIN BAZI PARAMETRELERİNİN İNCELENMESİ **20**

2.1. Gerekli Tanımlar ve Problemin Kısa Geçmişi 20
2.2. Temel Sonuçlar 21

3. GRAFLARIN DÜZENSİZLİK (İRREGULARTY) İNDEKSİ VE RADİUSU(YARIÇAPI) İÇİN ÜST SINIR **27**

3.1. Bölüm Tanımları ve Problemin Tanıtılması 27
3.2. Temel Sonuçlar 29

4. MONOJENİK YARI GRUPLARIN GRAFLARI **33**

4.1. Giriş ve Temel Tanımlar 33
4.2. Monojenik Yarı gruplar Üzerinde Graflar 34
4.3. $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in Bazı Graf Parametreleri 35
4.4. $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in Mükemmel (Perfect) Graf Özelliği 40

5. MONOJENİK YARI GRUP GRAFLARININ TOPOLOJİK İNDEKSLERİNİN İNCELENMESİ **45**

5.1. Algoritma 45
5.2. I. Durum: Köşelerin Derecelerini Temel Alan Sonuçlar 47

5.3. II. Durum: Köşelerin uzaklığını temel alan sonuçlar.....56

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 63

6.1 Sonuçlar 63
6.2 Öneriler 63

KAYNAKLAR 64

ÖZGEÇMİŞ.....69

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$G=(V,E)$	Graf
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
T	Ağaç
S_n	Yıldız Graf
W_n	Tekerlek graf
$d(u,v)$	u ve v köşeleri arası uzaklık
$e(v)$	v köşesinin eksantriği
Rad(G)	G nin radiusu
$diam(G)$	G nin diametresi
$\chi(G)$	Renklendirme sayısı
$\Delta(G)$	Maksimum derece
$\omega(G)$	Klik Sayısı
$ind(G)$	Bağımsızlık sayısı
$\kappa(G)$	Köşe bağlantılılık sayısı
$\alpha(G)$	Örtü sayısı
$\Gamma(R)$	Sıfır-bölen graf
R	Halka
$Z(R)$	Sıfır-bölen elemanların kümesi
$N(x)$	x elemanının komşuluğu
$N[x]$	x elemanının kapalı komşuluğu
$N[S]$	S kümesinin kapalı komşuluğu
$DS(G)$	Derece dizisi
$t=t(G)$	İrregularty(düzensizlik) indeksi
$\eta(G)$	Erişilebilirlik sayısı
$ABC(G)$	Bir grafın ABC indeksi
$W(G)$	Bir grafın Wiener indeksi
$\deg_G(x)$	x köşesinin derecesi
δ	Minimum derece
$G[S]$	S kümesi tarafından indüklenmiş graf
$\lceil r \rceil$	r nin üst tam değeri

Simgeler (devamı):

$M_1(G)$	G grafının birinci Zagreb indeksi
$M_2(G)$	G grafının ikinci Zagreb indeksi
$Ran(G)$	G grafının Randic indeksi
$GA(G)$	G grafının Geometrik-Aritmetik indeksi
$H(G)$	G grafının Harary indeksi
$E_1(G)$	G grafının birinci eksantrik indeksi
$E_2(G)$	G grafının ikinci eksantrik indeksi
$\xi^C(G)$	Eksantirik bağlantı indeksi
$D'(\Gamma(S_M))$	Derece uzaklığı
S_M	Monojenik yarı grup
$girth(G)$	G grafının girth i
C_n	Devir graf
P_n	Yol graf

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Çoklu graf örneği....2
Şekil 1.2 Basit graf....3
Şekil 1.3 Yönlendirilmiş graf....3
Şekil 1.4 Alt graf....5
Şekil 1.5 Bir graf ve indüklenmiş alt grafı....6
Şekil 1.6 Bir G grafı....7
Şekil 1.7 Tam graf örnekleri....7
Şekil 1.8 Tamamlayıcı graf....8
Şekil 1.9 3-düzgün ve 4-düzgün graflara örnek....8
Şekil 1.10 C_7 grafı....8
Şekil 1.11 Yol Graf....9
Şekil 1.12 İki parçalı graf....9
Şekil 1.13 Ağaç graf örnekleri....10
Şekil 1.14 Yıldız graf örnekleri....10
Şekil 1.15 Tekerlek graf....11
Şekil 1.16 G grafı diameter ve radius....12
Şekil 1.17 Renklendirme ve klik sayısı....13
Şekil 1.18 Bir G grafı....14
Şekil 1.19 G bir graf ve H , G nin indüklenmiş alt grafı....15
Şekil 2.1 Sıfır-Bölen graf örneği....25
Şekil 3.1 5 köşeli bir graf....27
Şekil 4.1 S_M^4 Monojenik yarı grubunun grafı....34
Şekil 4.2 S_M^6 Monojenik yarı grubunun grafı....39

1. GİRİŞ

Euler 1736 yılında yazdığı Königsberg'in Yedi Köprüsü isimli makale ile graf teori kavramının literatüre girmesini sağlamıştır. Euler, problemi çözerken somut bir olayı modelleyip soyut bir şekle dönüştürerek graf kuramının temellerini atmıştır. Dolayısıyla, graf teorisinin çıkış ve gelişmesi alışılagelmiş biçimde olmamıştır. Aslında, kendisinden çok daha eski bir problemin çözümü için ortaya konmuştur. Graflar 20.yy dan itibaren elektrik mühendisliği, kimya – kimya mühendisliği ve ekonomi gibi birbirinden bağımsız alanlarda karşımıza çıkmıştır. Yakın geçmişte ve günümüzde bu teori, modern cebirin içinde yer alan problemlerin çözümü için önemli bir yer işgal etmektedir.

Graf teori her şeyden önce çözümü aranan bir problemi ya da bir işi en etkin şekilde temsil edebilmeye, düzenlemeye ve çözmeye yardımcı olur. Bunun için bir problem, graf yapısına dönüştürüldükten sonra, problemin tüm amaçlarını yerine getirecek en hızlı veya en masrafsız yolu bulmak için sistematik yöntemler aranır. Bu durumun doğal bir sonucu olarak, graf teori pek çok değişik uygulama alanlarına sahiptir. Bunlardan bazıları; ulaşım ağlarının optimizasyonunda (yol ya da bilgi ulaşımı), elektrik şebekeleri kavramında, haberleşme ağlarında, istatistiksel mekanikte, kimyasal formüllerde, bilgisayar kuramında, toplumsal bilimlerde, coğrafyada, mimarlıkta,…vb. Çizge kuramı olarak da bilinen graf teorinin gelişmesinin en önemli nedeni, diğer pek çok bilim dallarına uygulanabilir olmasıdır. Çünkü örneğin; teorik bilgisayar bilimlerindeki karmaşık problemlerin çoğu, graf teori problemlerine dönüştürülerek çözülebilmektedir. Bunun dışında, matematiğin diğer bilim dallarıyla ortak alana sahip olması da graf teorinin önemini arttırmaktadır.

Yukarıda sayılan bir çok sebepten dolayı, teorik ve uygulamalı matematik alanlarında önemli bir yer tutan Graf Teori belirli noktalar eşliğinde bu noktaları belirli özelliklerle birleştirmeye çalışan bir alandır. Bu alanda tanımlanmış birçok graf çeşidi mevcuttur. Biz bunlardan bazı özel graf türlerinin incelenmesi ve bu özelliklerin grafları sınıflandırmadaki önemini göstermek üzerinde duracağız. Buna ek olarak bu özel graf türlerinin genel özelliklerini bir arada toparlayarak bunlar üzerinden yeni bulgular elde etmeye çalışacağız.

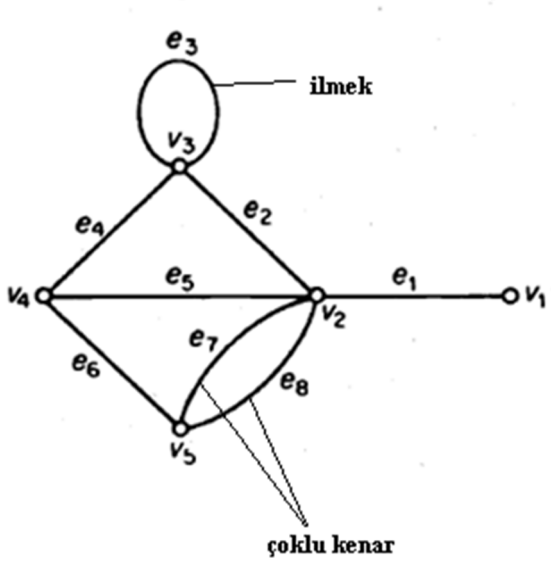
Bu bölümde ki bütün temel tanımlar Gross ve Yellen (Gross ve Yellen, 2004) ve Harris ve arkadaşları (Harris ve ark., 2008) nın kitaplarından aktarılmıştır.

1.1. Grafın Tanımı ve Yapısı

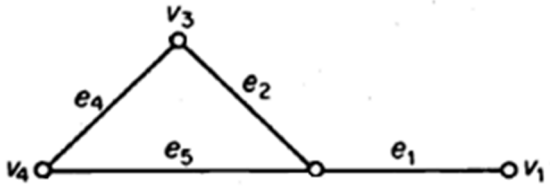
V elemanları noktalar olan boştan farklı bir küme, E de V 'nin elemanlarından oluşan sıralı olmayan bir küme olsun. V yi köşe kümesi, E yi kenar kabul edecek şekilde tanımlanan $G=(V,E)$ ikilisinden oluşan diagrama *graf* denir.

G grafında bir köşeyi yine kendisiyle birleştiren kenara *ilmek* denir. Aynı köşe çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara *çoklu kenar* denir**.** Bir graf çoklu kenar ve ilmek içermiyorsa *basit graf*, aksi duruma ise *çoklu graf* denir. Graf yapısındaki her bir köşeden diğer köşelere bir kenar varsa o graf *bağlıdır* denir. Köşe kümesi ve kenar kümesi sonlu olan bir graf *sonlu graf* olarak adlandırılır. Sonlu bir grafta $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ köşe kümesi olmak üzere $|V(G)|=n$ sayısına grafın *mertebesi,* $E(G)=\{e_1,e_2,...,e_m\}$ kenar kümesi olmak üzere $|E(G)|=m$ sayısına grafın *boyutu* denir. Şimdi bu özellikleri bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 1.1.1 Köşe kümesi $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ ve kenar kümesi $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$ olarak verilen bir $G=(V,E)$ grafının şekli aşağıdaki gibidir.

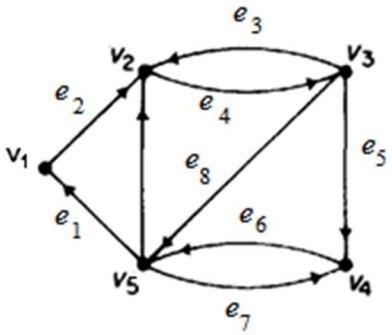


Şekil 1.1 Çoklu graf örneği



Şekil 1.2 Basit graf

Kenarları doğrultuya sahip veya kenarları sıralanmış olan graflara *yönlendirilmiş graf* denir. Burada herhangi iki köşe v_i , v_j arasındaki kenar olan $e = v_i v_j$ için $v_i v_j \neq v_j v_i$ dir. Köşelere bağlı kenarlar, köşeden dışarı doğru çıkıyorsa bu köşeye *başlangıç noktası,* köşeye doğru giriyorsa bu köşeye *final noktası* denir.



Şekil 1.3 Yönlendirilmiş graf

Şekil 1.3 de görüldüğü gibi v_1 köşesi e_2 kenarı için başlangıç noktası, e_1 kenarı için varış (final) noktasıdır. Görüldüğü gibi graf çizimlerinde şeklin çizimi önemli değildir. Önemli olan noktalar ile kenarlar arasındaki ilişkiyi tam olarak ortaya koyabilmektir. Bir G grafının köşe kümesi olan V den alınan iki köşe v_i ve v_j olsun. Alınan bu köşeler arasında bir kenar varsa bu köşelere *komşudur* denir.

Bir G grafında herhangi bir v_i köşesinin derecesi bu köşeye komşu olan köşelerin sayısıyla bulunur ve $der(v_i)$ ile gösterilir. Eğer köşe sıfır dereceli ise bu köşeye *izole nokta*, 1 dereceli ise bu köşeye *uç nokta (pendant)* adı verilir. Burada her bir köşe komşu olduğu köşeye bir 1 derece kazandırır. İlmekte ise köşe kendisine komşu olduğundan köşeye 2 derece kazandıracaktır. Derecesi tek sayı olan bir köşeye *tek nokta*, derecesi çift sayı olan bir köşeye *çift nokta* olarak adlandırılır. Bir grafta en az

dereceli köşeye *minimum dereceli* denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir. En çok dereceli köşeye ise *maksimum dereceli* denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir. Şekil 1.1 deki grafı ele alacak olursak $\delta(G)=1$ ve $\Delta(G)=5$ tir.

Teorem 1.1.2 (Gross ve Yellen, 2004) $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ köşe kümesi ve $E(G)=\{e_1,e_2,...,e_m\}$ kenar kümesi üzerinde tanımlanan bir G grafında aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\sum der\, v_i = 2m$$

İspat: *G* grafı, *n* mertebeli ve *m* boyutlu bir graf olduğundan dolayı her kenar, iki köşeye komşudur. Bu nedenle köşelerin dereceleri toplanırken her bir kenar iki köşeyi temsil eder. Dolayısıyla tüm köşelerin toplamı, kenar sayısının iki katına eşittir. Yani kısaca 2*m* dir. ■

Bu teoremin bazı sonuçlarını aşağıda vermek mümkündür.

Sonuç 1.1.3 (Gross ve Yellen, 2004) Herhangi bir G grafında bütün köşelerin dereceleri toplamı çifttir.

İspat: Teorem 1.1.2 den görüleceği gibi köşelerin dereceleri toplamı kenarların iki katıdır. Buda bir çift sayıdır. ■

Sonuç 1.1.4 (Gross ve Yellen, 2004) Bir G grafında tek dereceli köşelerin sayısı çifttir.

İspat: G grafının tek dereceli köşelerinin kümesi $A(G)$ ve çift dereceli köşelerinin kümesi $B(G)$ olsun. Teorem 1.1.2 den

$$\sum_{v\in A(G)} der(v) + \sum_{v\in B(G)} der(v) = \sum_{v\in V(G)} der(v) = 2m$$

olur ki, bu

$$\sum_{v\in A(G)} der(v) + \sum_{v\in B(G)} der(v)$$

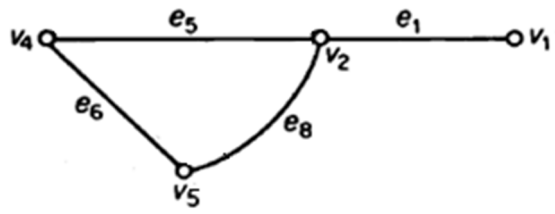
değerinin çift sayı olduğunu gösterir. $\sum_{v\in B(G)} der(v)$ toplamı terimler çift olduğundan dolayı çift sayı gelmek zorundadır. O halde $\sum_{v\in A(G)} der(v)$ toplamı çift olmalıdır. Toplamdaki tüm elemanlar tek olduğundan dolayı toplamın çift sayı gelebilmesi için çift sayıda terim toplanmalıdır. Buradan da $|A(G)|$ nin çift olduğu bulunmuş olur. ■

Bir G grafında her kenar iki köşeyi birleştirdiğinden köşelerin dereceleri toplamı kenar sayısının iki katı olup ve bütün köşelerin dereceleri toplamı çift sayıdır. Bu nedenle bir grafın bütün derecelerinin toplamı her zaman çift sayıdır.

G bir graf ve $v \in V$ olmak üzere v köşesinin *açık komşuluğu kümesi* $N(v)$ olarak gösterilir ve v ye komşu olan V deki tüm köşeleri içerir. $N[v] = N(u) \cup \{v\}$ kümesine de v nin *kapalı komşuluğu kümesi* denir.

1.2. Alt Graf

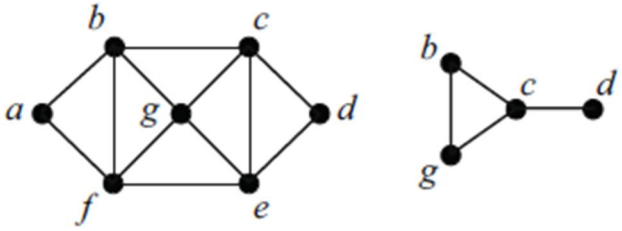
$G = (V_1, E_1)$ ve $H = (V_2, E_2)$ birer graf olsun. Eğer $V_2 \subseteq V_1$ ve $E_2 \subseteq E_1$ şartı sağlanıyorsa, H grafı G grafının *alt grafıdır* denir. Kısaca H grafı köşeleri G de bulunan ve kenarları da G deki aynı köşe çiftleri arasındaki ilişkiyi koruyan graftır. G grafına aynı zamanda H grafının *süper grafı* denir. Şekil 1.1 deki grafın bir alt grafı aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 1.4 Alt graf

G bir graf ve S de bu grafın nokta kümesinin boştan farklı alt kümesi olsun. G nin *indüklenmiş alt grafı (induced subgraph)*, köşe kümesi S ve kenar kümesi de G

nin S deki köşe çiftleriyle komşu olan kenarlardan oluşan kümedir ve $\langle S \rangle$ ile gösterilir. $\langle S \rangle$ kümesi S nin köşelerinin tümünü ve G nin kenarlarını kapsar.



Şekil 1.5 Bir graf ve indüklenmiş alt grafı

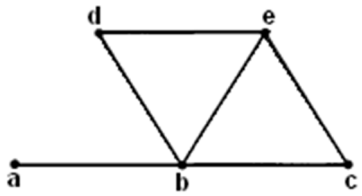
Bir grafın alt graflarını, o grafa ait köşe veya kenarları silerek de bulmak mümkündür.

1.3. Yürüme ve Yol Kavramı

Köşe kümesi $V = \{a, b, c, ..., y, z\}$ olan bir G grafı için her biri birbiriyle sırasıyla bağlanan köşeler dizisine *yürüme* denir. G deki $ab, bc, ..., yz$ formundaki yürümenin uzunluğu, k tane kenarın bir araya gelmesinden oluştuğu için bu yürümenin uzunluğu k dır. Bu şekildeki yürüme $abc...yz$ şeklinde gösterilir ve a ile z arasında bir yürüme olarak adlandırılır. Başlangıç ve bitiş köşeleri aynı olan yürümeye *kapalı yürüme* denir. Bir yürümede hiçbir köşe tekrar etmiyorsa bu yürümeye *yol* adı verilir. G grafından alınan farklı iki köşe arasında bir yol varsa bu iki nokta *bağlantılıdır* denir.

Teorem 1.3.1 (Harris ve ark., 2008) Bir G grafından alınan tüm u ve v köşeleri arasındaki $u-v$ yürümesi, bir $u-v$ yolunu içerir.

Eğer yürünen tüm kenarlar farklıysa bu yürümeye *gezi* denilmektedir. Tek bir köşe kendi başına bir yol teşkil eder. O halde her yol bir gezi olurken her gezi bir yol olmaz. Başlangıç ve bitiş noktaları hariç tüm köşeleri farklı ve tüm kenarları farklı olan kapalı yürümeye ise *devir* denir. k uzunluğundaki bir devire $k-devir$ denilir. k sayısının durumuna göre bu devir *tek devir* veya *çift devir* olarak adlandırılır.
Bir G grafı aşağıdaki gibi verilsin.

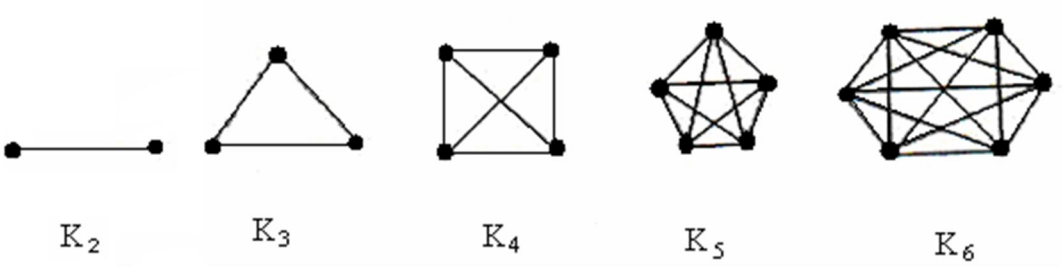


Şekil 1.6 Bir G grafı

Burada *abebc* asıl itibariyle 4 uzunluğunda bir yürümedir fakat dikkat edersek bir gezi değildir. Bununla beraber *abedbc* bir gezi ancak bir yol değildir. Ayrıca *abed* bir yol olup, *bdeb* bir devirdir diyebiliriz.

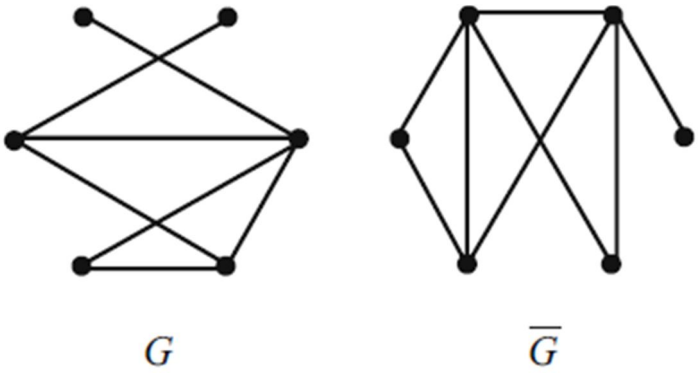
1.4. Graf Çeşitleri

Bir grafta her bir köşe çifti birbirine komşu ise bu grafa *tam graf* denir. n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir. n köşeli bir tam grafın kenar sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ ile ve köşe derecesi de $(n-1)$ ile bulunabilir.



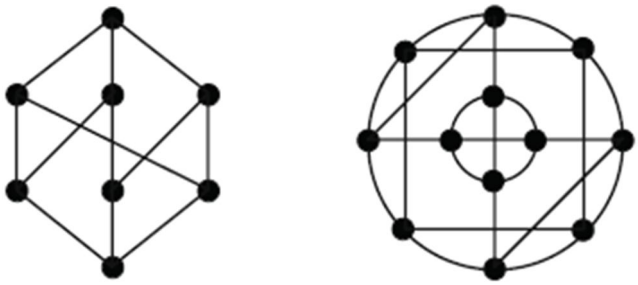
Şekil 1.7 Tam graf örnekleri

Köşe kümesi G nin nokta kümesiyle aynı olan, kenar kümesi ise G de olmayan kenarlardan oluşan ve komşu olmayan köşeleri birbirine komşu yapan grafa *tamamlayıcı (tümleyen) graf* denir. Bir G grafının tamamlayıcısı $\overline{G}$ ile gösterilir.



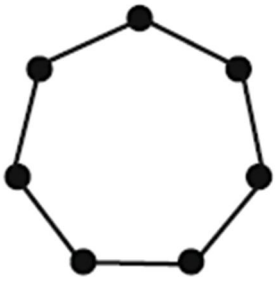
Şekil 1.8 Tamamlayıcı graf

Bir grafta tüm köşeler aynı dereceye sahipse bu tür graflara *düzgün graf* denir. Grafın tüm köşelerinin derecesi r ise bu grafa *r-düzgün graf* denir. n köşeli bir tam graf için her bir köşenin derecesi $n-1$ olduğundan dolayı $n-1$ dereceli düzgün graftır.



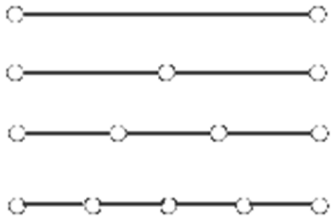
Şekil 1.9 3-düzgün ve 4-düzgün graflara örnek

Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan ve tüm köşelerin derecesi 2 olan grafa *devir veya çevre graf* denir. Özel olarak, n köşeli bir devir ya da çevre graf C_n ile gösterilir.



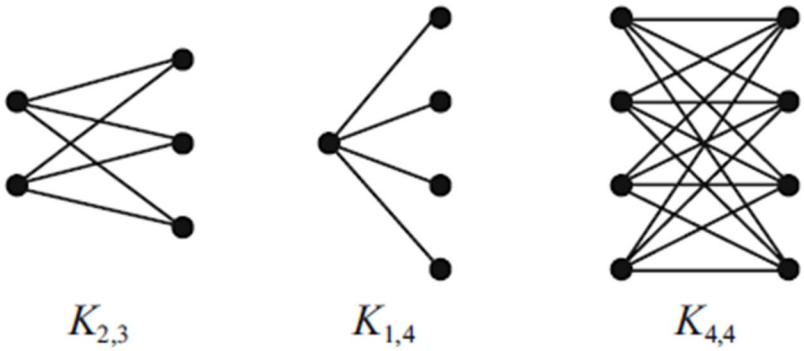
Şekil 1.10 C_7 grafı

Başlangıç ve bitiş köşelerinin derecesi 1 ve diğer köşelerin dereceleri 2 olan grafa *yol graf denir*. n köşeli bir yol graf P_n ile gösterilir.



Şekil 1.11 Yol Graf

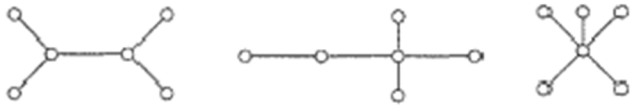
Bir grafın köşe kümesi V_1 ve V_2 şeklinde iki kümeye ayrılmış olsun. Eğer kenarları V_1 deki köşelerle V_2 deki köşelerin birleştirilmesiyle oluşuyorsa, bu grafa *iki parçalı graf* denir. $|V_1| = m$ ve $|V_2| = n$ olan iki parçalı bir graf $K_{m,n}$ ile gösterilir. V_1 ve V_2 deki tüm köşeler karşılıklı olarak birbirleriyle birleştirilmiş ise bu tür graflara *iki parçalı tam graf* denir.



Şekil 1.12 İki parçalı graf

Teorem 1.4.1 (Bondy ve Murty, 1978) Bir graf ancak tek devir içermiyorsa iki parçalı bir graftır.

Bir bağlantılı grafta hiç devir yoksa buna *ağaç graf* denir. Ağaç graflar T ile gösterilir.



Şekil 1.13 Ağaç graf örnekleri

Teorem 1.4.2 (Bondy ve Murty, 1978) Bir ağaç grafta herhangi iki köşe tek bir yolla birbirine bağlıdır.

Teorem 1.4.3 (Bondy ve Murty, 1978) Eğer G bir ağaç graf ise

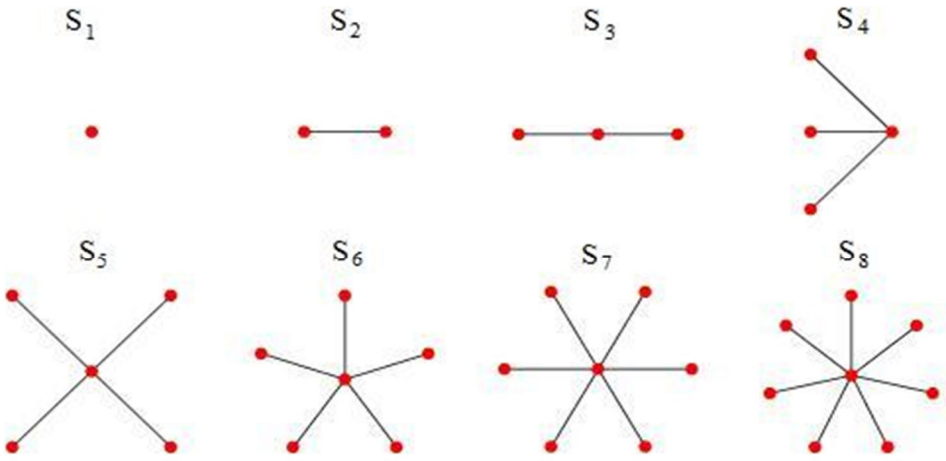
$$|E(G)| = |V(G)| - 1$$

eşitliği vardır.

Yukarıdaki teoremin önemli bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

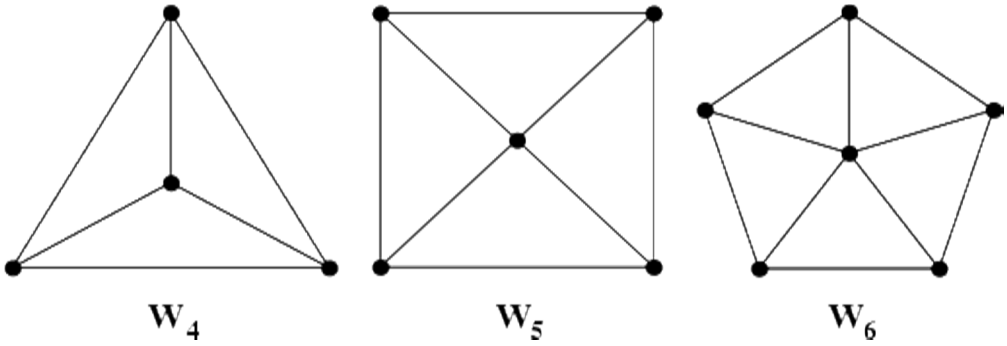
Sonuç 1.4.1 (Bondy ve Murty, 1978) Tüm aşikar olmayan ağaç graflarda, derecesi bir olan en az iki köşe vardır.

n köşeli bir ağaç grafın, bir köşesinin derecesi $n-1$ ve geriye kalan diğer tüm köşelerinin dereceleri 1 ise bu şekilde ki graflara *yıldız graf* denir. Yıldız graflar tam iki parçalı graf olarak da adlandırılırlar. İki parçalı graflarda özel olarak $m=1$ alınırsa oluşan $K_{1,n}$ grafı bir yıldız graftır ve S_n ile gösterilir.



Şekil 1.14 Yıldız graf örnekleri

n köşeli bir C_n çevre grafının tüm köşelerine tek bir kenarla komşu olan yeni bir köşe eklenmesiyle elde edilen grafa *tekerlek(wheel)graf* denir ve W_n ile gösterilir.



Şekil 1.15 Tekerlek graf

1.5. Graf Parametreleri

$G=(V,E)$ bir graf ve $u,v\in V(G)$ olmak üzere bu iki köşe arasındaki en kısa yolun uzunluğuna u ile v arasındaki *uzaklık (distance)* denir ve $d(u,v)$ ile gösterilir.

Bir $G=(V,E)$ grafından alınan v köşesi ile v köşesine en uzak köşe arasındaki uzaklığa v köşesinin *eksantiriği (eccentricity)* denir ve $e(v)$ ile gösterilir. Kısaca,

$$e(v)=\max\{d(v,x)\mid x\in V(G)\}$$

şeklinde matematiksel olarak gösterilir.

Bağlantılı bir grafın köşeleri arasındaki minimum eksantriğe G nin *yarıçapı (radius)* denir ve

$$rad(G)=\min\{e(v)\mid v\in V(G)\}$$

ile gösterilir.

Bağlantılı bir grafın köşeleri arasındaki maximum eksantriğe G nin çapı (diameter) denir ve

$$diam(G)=\max\{e(v)\mid v\in V(G)\}$$

ile gösterilir. Tam bir grafta tüm köşeler birbirine komşu olduğundan dolayı her zaman $diam(G)=1$ dir.

Teorem 1.5.1 (Ostrant, 1973) Herhangi bir G grafı için

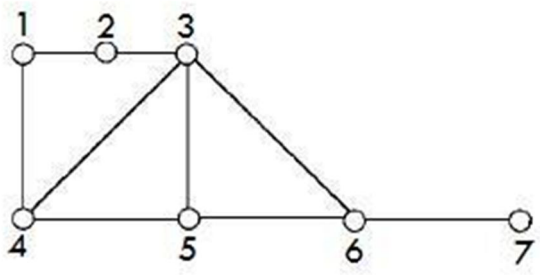
$$rad(G) \le diam(G) \le 2rad(G)$$

eşitsizliği mevuttur.

Teorem 1.5.2 (Haynes ve ark., 1998) Bir G grafınınn yarıçapının 1 olması için gerek ve yeter şart G grafının diğer bütün köşelere komşu bir düğüm içermesidir.

İspat: $(\Rightarrow)$ G yarıçapı 1 olan bir graf olsun. Varsayalım ki G nin diğer bütün köşelere komşu bir düğümü bulunmasın. O halde G nin herhangi bir u köşesi için $e(u) \ge 2$ olacaktır. Bu ise G nin yarıçapının 1 olması ile çelişir. O halde u köşesi v köşesi ile komşudur.

$(\Leftarrow)$ u, G grafının diğer tüm köşelere komşu bir köşe olsun. $e(u)=1$ olacağı açıktır. Üstelik bu değer, G nin köşeleri arasındaki minimum eksantriktir. O halde $rad(G)=1$ dir. ■



Şekil 1.16 G grafi diameter ve radius

Şekil 1.16 da verilen G grafının köşeleri arasındaki uzaklığa bakarsak, $d(5,6)=1$, $d(1,3)=2$, $d(4,7)=3$, $d(1,7)=4$ bazı köşelerin uzaklıkları olarak verilebilir. Çap bu köşeler arasındaki en büyük değer olduğundan dolayı G grafının çapı $diam(G)=4$ dür. Bu G grafının yarıçapı şekilden de anlaşılacağı gibi $rad(G)=2$ olarak bulunur.

G grafının köşe kümesi $V(G)$ ve $S \subseteq V(G)$ boştan farklı bir küme olmak üzere G deki tüm kenarların en az bir köşesi bu kümede ise bu kümeye *örtü kümesi* denir. Bir grafta en az bir tane örtü kümesi bulunur. Bu kümeler içinde en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısına G grafının *örtü sayısı (covering number)* denir. $\alpha(G)$ ile gösterilir.

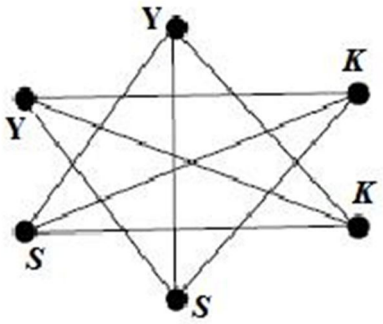
Bir G grafında, G'nin tüm köşelerini renklendirmek için gerekli olan en az sayıdaki renk sayısına *kromatik sayı (chromatic number)* denir ve $\chi(G)$ ile gösterilir. Yani komşu olan iki köşe farklı renklerle etiketlendirilir.

Teorem 1.5.3 (Bondy ve Murty, 1978) Herhangi bir G grafı için

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

eşitsizliği mevcuttur.

Bir G grafının *klik sayısı*, graftaki en büyük tam grafın köşe sayısı olup, $\omega(G)$ ile gösterilir.



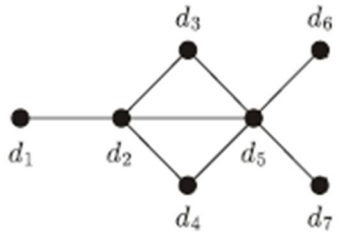
Şekil 1.17 Renklendirme ve klik sayısı

Şekil 1.17 de verilen G grafının köşelerini K (kırmızı), S (sarı) ve Y (yeşil) ile renklendirecek olursak, kromatik sayı 3 olarak bulunur. Klik sayısı da en büyük tam alt grafı olduğundan dolayı en büyük tam alt grafın köşe sayısı 3 dir.

Bir G grafını bağlantısız veya izole noktalı bir graf haline getirmek için graftan çıkarılması gerekli olan en az sayıdaki köşe sayısına *bağlantı noktaları sayısı (vertex connectivity)* denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir. G grafı n mertebeli tam graf ise $\kappa(G) = n - 1$

dir. Eğer G grafı bağlantısız bir graf ise $\kappa(G)=0$ dır. Bununla birlikte G grafı bağlantılı ancak tam graf değil ise $1 \le \kappa(G) \le n-2$ dir.

A bir küme ve $A \subseteq V(G)$ olsun. G grafındaki birbiriyle komşuluğu olmayan köşelerin kümesi A ise, özel olarak bu kümeye *bağımsız küme* denir. Bu kümelerden en geniş olanın eleman sayısına ise *bağımsız sayı (independent number)* denir ve $ind(G)$ ile gösterilir.



Şekil 1.18 Bir G grafı

Şekil 1.18 deki belirtilen G grafı için $A_1=\{d_1\}$, $A_2=\{d_1,d_3\}$, $A_3=\{d_2,d_4,d_6\}$, $A_4=\{d_1,d_3,d_4,d_6,d_7\}$ birer bağımsız küme örnekleridir. Ancak A_4 kümesi G nin bağımsız kümelerinin en genişidir. Dolayısıyla $ind(G)=5$ olarak bulunur. Bu grafın bağlantı noktaları sayısını bulmak için en az komşuluğa sahip olan köşenin kenarlarını silmemiz yeterlidir. Aynı G grafı için $\kappa(G)=1$ dir.

Teorem 1.5.4 (Bondy ve Murty, 1978) $S \subseteq V$ kümesi, G nin bağımsızlık kümesi ise, $V \setminus S$ aslında G grafının bir örtüsüdür.

Sonuç 1.5.5 (Bondy ve Murty, 1978) G bir graf olmak üzere

$$\kappa(G)+\alpha(G)=v$$

eşitliği vardır.

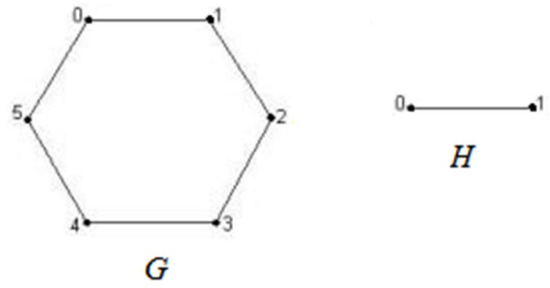
İspat: S, G nin en büyük bağımsız kümesi ve K da G nin en küçük örtüsü olsun. $V \setminus K$ bir bağımsız küme ve $V \setminus S$ bir örtüdür. Buradan

$$v-\kappa(G)=|V \setminus K| \le \alpha(G)$$

$$v-\alpha(G)=|V \setminus S| \ge \kappa(G)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlikten istenilen sonuca ulaşılabilir. ■

Bir G grafı için her indüklenmiş alt grafının klik sayısı ile kromatik sayısı eşitse G grafı *mükemmeldir* denir.



Şekil 1.19 G bir graf ve H , G nin indüklenmiş alt grafi

Şekil 1.19 da verilen G grafının indüklenmiş alt grafı olan H için $\omega(H)=2$ ve $\chi(H)=2$ dir. Yani $\chi(H)=\omega(H)$ olduğundan, G grafı mükemmeldir denir.

1.6. Kaynak Araştırması

Çalışmamızın bu kısmında bir çok araştırmacının çalışma konusu olmuş graf parametreleri ve sıfir-bölen graflar üzerinde literatürde var olan bazı çalışmalardan bahsedilecektir.

Öncelikle graf parametreleri ile ilgili çalışmalardan bahsedelim.

1.6.1. Graf Parametreleri Üzerine Çalışmalar

Wiener (1947), "*Structural determination of para±n boiling points*" adlı eserinde kimyasal özelliklerden ve moleküllerin yapılarından faydalanarak bulunmuş ve yazarın ismi ile anılan Wiener indeks ortaya konmuştur. Bu parametrenin graf teoride diğer parametrelerde arasında sıkı bir ilişki olduğu için popülerliği azalmadan devam etmiştir.

Berge (1962), *"The Theory of Graphs and Its Applications"* adlı eserinde kendi ismi ile anılan ve mükemmel graflar için bir kıstas vasıtası olan Berge Graflarını ve özelliklerini tanıtmıştır. Ayrıca genel graf bilgisi bu eserin içinde yer almaktadır.

Gutman ve Trinajstić (1972), "*Graph theory and molecular orbitals: Total π-electron energy of alternant hydrocarbons*" isimli çalışmalarında graf teoride ve kimsayal matematik konusunda önemli bir yere sahip olacak olan Birinci Zagreb indeksi ortaya koydular.

Lovász (1972), "*Normal hypergraphs and the weak perfect graph conjecture*" normal hipergraflar üzerinde çalışmış ayrıca grafların üzerinde zayıf mükemmellik koşulunu ortaya koymuştur.

Ostrand (1973), "*Graphs with specified radius and diameter*" isimli çalışmasında radius ve diameterle ilgili ilişkiye $rad(G) \leq diam(G) < 2rad(G)$ şeklinde ortaya koymuştur.

Gutman ve ark. (1975), "*Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes*" isimli çalışmalarında da yukarıdaki çalışmalarının ışığında İkinci Zagreb indeksi tanımlamışlar ve çeşitli özelliklerini ortaya koymuşlardır.

Randić (1975), "*On characterization of molecular branching*" çalışmasında kendi ismi ile anılan Randić indeksi tanımlamıştır. Bu çalışmanın ışığında Randić indeksi ve matrisi ilgi odağı olmuş ve bir çok graf teorist bunun üzerinde çalışmış ve çalışmaya devam etmektedir.

Erdös ve ark. (1989), "*Radius, diameter and minimum degree"* isimli önemli çalışmalarında hala çoğu zaman kullanılan Radius ve diameterle ile ilgili grafın yalnızca köşe sayısını ve minimum derecesini içeren sınırlar literatüre kazandırmışlardır.

Plavšić ve ark. (1993), "*On the Harary index for the characterization of chemical graphs"* adlı eserlerinde kimyasal grafların karakterizasyonun için Harary indeks adıyla bilinen graf parametresini ortaya koymuşlardır. Bu parametre yardımıyla çeşitli kimyasal graflar üzerinde sınıflandırma gerçekleştirmişlerdir.

Ivanciuc ve ark. (1993), "*Reciprocal distance matrix, related local vertex invariants and topological indices"* isimli çalışmalarında yukarıdan bağımsız olarak Harary indeksi tanımlamışlardır. İki çalışmada da Harary indeks isminin konulmasının sebebi çok önemli bir kimyacı ve matematikçi olan Harary'nin 70. Doğum yılı olmasıdır.

Estrada ve ark. (1998), yılında yayınladıkları "*An atom-bond connectivity index: modelling the enthalpy of formation of alkanes*" isimli makalelerinde yeni bir graf indeksi olan atom-bağ bağlantılılık (atom-bond connectivity) indeksi tanımlamışlar ve kimya da alkanların entalpisi alanında uygulmasını çalışmışlardır.

Dankelmann, ve ark. (2000), "Average distance, minimum degree and spanning trees" isimli eserinde bir grafın ortalama uzaklığı için minimum derece ve grafın köşe sayısı ile ilgili önemli bir sınır ispat etmiş ayrıca kullandığı ispat tekniği bir çok araştırmacı için yol gösterici olmuştur.

Dündar (2001), *"Accessibility number and the neighbor-integrity of generalised Petersen graphs*" adlı çalışmasında bir grafın komşulukları ile ilgili olarak erişilebilirlik sayısı adlı parametreyi tanıtmış ve bazı grafların Petersen grafları üzerinde çalışmıştır.

Chudnovsky ve ark. (2006), "*The strong perfect graph theorem*" isimli makalelerinde güçlü mükemmel graf konjektürünü ispat etmişlerdir. Bu çalışma mükemmel graflar için bir referans kaynağı olmuştur.

Vukičević ve Furtula (2009), "*Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges*" adlı eserlerinde matematik alanında iyi bilinen aritmetik ve geometrik ortalama ifadelerinden faydalanıp graflar için yeni parametre tanımlamışlardır. Geometrik-aritmetik indeks isimli bu parametre ile, genel aritmetik ve geometrik ortalamalarının da özellikleri ile bir çok sınırı daha iyi hale getirmişlerdir.

Vukičević ve Graovac (2010), "*Note on the comparison of the first and second normalized Zagreb eccentricity indices*" adlı eserlerinde birinci ve ikinci normalize edilmiş Zagreb eksantrik (eccenticity) indekslerini tanımlamış ve bunlar ile ilgili sınırlar ortaya koymuş ayrıca diğer topolojik indeksler ve parametrelerle olan ilişkilerini incelemişlerdir.

Lai ve ark. (2011), "*Degree sequences and graphs with disjoint spanning trees*", adlı eserlerinde derece dizisi ile bir graf geren ağacı arasındaki ilişkileri çalışmışlardır. Derece dizisi yardımıyla hangi koşullar altında geren ağacının parçalandığını ortaya koymuşlardır.

Ghorbani, ve ark. (2012), "*A new version of Zagreb indices*" isimli eserlerinde yıllardır çalışılan Zagreb indekslerinin uzaklık parametreleri yerine eccentricity parametrelerini yerleştirmişler böylece Zagreb indekslerin yeni bir versiyonunu elde etmişlerdir. Bu versiyonla ilgili diğer sınırları karşılaştırmışlardır.

Mukwembi (2012), "*A Note on Diameter and The Degree Sequence of a Graph*" adlı makalesinde yeni bir graf parametresi olan düzensizlik(irregularity) indeksi kavramını tanımlamış ve bunun yardımıyla önemli graf parametrelerinden diameter için bir sınır elde etmiştir.

Akgüneş ve Çevik (2013), "*A new bound of radius of irregularity index*" isimli yeni çalışmalarında graf teorinin önemli parametrelerinden biri olan radius kavramı için yukarıda yakın geçmişte tanımlanan düzensizlik(irregularity) indeks kavramı yardımıyla kuvvetli bir üst sınır elde etmişlerdir.

Şimdi de sıfır-bölen graflarla ilgili kaynakları özetleyelim.

1.6.2. Sıfır-Bölen Graflar İle İlgili Kaynak Araştırması

Beck (1988), "*Coloring of Commutating Rings*" adlı eseri sıfır-bölen grafların başlangıç noktasıdır. Bu çalışmasında yazar halkaların sıfır-bölen grafını tanımlamış bu grafın renklendirmesi problemi üzerinde durmuştur.

Anderson ve Naseer (1991), "*Beck's coloring of a commutative ring*" adlı eserlerinde Beck'in yukarıdaki eserinde sıfır-bölen grafların renklendirme sayı için bıraktığı açık problemi çözmüşlerdir. Ayrıca renklendirme sayısı 4 ve 4 ten küçük olan halkaları listelemişlerdir.

Anderson ve Livingston (1999), "*The Zero-divisor Graph of Commutative Ring*" adlı eserleri değişmeli halkaların sıfır-bölen grafları için çok temel teşkil eder. Bu çalışmalarında çok sayıda teorem ve örneklerde bu graflar iyice tanıtılmıştır. Eğer R sonlu ve cisim değil ise $\Gamma(R)$ nin de sonlu olacağını göstermiştir. Dahası R nin değişmeli olduğu durumda $\Gamma(R)$ nin daima bağlantılı olduğunu ortaya koymuştur.

DeMeyer ve ark. (2002), "*The Zero-Divisor Graph of a Commutative Semigroup*" adlı eserlerinde halkalarda tanımlanan sıfır-bölen graf tanımını yarı gruplara aktardılar ve bu grafın bağlantılı olduğunu ortaya koydular. Ayrıca bu grafların parametreleri için sınırlar ve koşullar elde ettiler.

DeMeyer, F. R. ve DeMeyer, L., (2005), "*Zero-Divisor Graphs of Semigroups*" adlı çalışmalarında yukarıda ki çalışmanın devamı niteliğinde değişmeli olması gerekmeyen yarı gruplar için sıfır-bölen graflarının özelliklerini incelemişlerdir.

Anderson ve Badawi (2008), "On the Zero-Divisor Graph of a Ring" isimli çalışmalarında sıfır olmayan sıfır-bölene sahip R halkası için, R nin elemanları arasında kesin bölünebilirlik şartlarını ve R ideal veya asal ideallerinin karşılaştırılabilirlik koşullarını $\Gamma(R)$ grafı ile ortaya koymuşlardır.

Akbari ve ark. (2003), "*When a Zero-Divisor Graph is Planar or a Complete r-Partite Graph*" adlı eserlerinde sıfır-bölen grafların ne zaman Planar graf ve ne zaman r-parçalı graf olduklarını göstermişlerdir.

Akgüneş (2012), "*Analyzing special parameters over zero-divisor graphs*" adlı eserinde p ve q farklı asalları için $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ sıfır-bölen graflarının çeşitli parametrelerini yalnızca p ve q ya bağlı olarak ortaya koymuştur.

Das, Akgüneş ve Çevik (2013), "*On a graph of monogenic semigroup*" adlı yeni eserlerinde monojenik yarı gruplar için graf tanımı vermişlerdir. Bu grafın çeşitli özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca bu grafın mükemmel bir graf olduğunu ortaya koymuşlardır. Bu graf üzerinde Kartezyen çarpımın (graf çarpımı) sağladığı özellikler incelenmiştir.

Akgüneş, Das ve Çevik (2014), "*Topological indices on a graph of monogenic semigroups*" adlı eserlerinde yukarıdaki çalışmalarında tanımladıkları monojenik yarı grupların graflarının topolojik indekslerinin yalnızca monojenik yarı grubun mertebesi ile ifade edilebileceğini ortaya koymuşlardır. Dahası bu grafların topolojik indekslerini hesaplamışlardır.

2. SIFIR-BÖLEN GRAFLARIN BAZI PARAMETRELERİNİN İNCELENMESİ

Sıfır-Bölen Graflar cebirsel graflarda önemli bir yer teşkil eder. Bizde bu bölümde p ve q farklı asallar olmak üzere, $\Gamma(R)$ burada $R=\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q$, grafının bazı özel parametrelerini ortaya koyacağız. Bunlar, $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)$ sıfır-bölen grafının, derece dizisi, düzensizlik(irregularty) indeksi, örtü sayısı (covering number), erişilebilirlik sayısı (accessible number), atom-bağ bağlantılılık indeksi ve Wiener indeksidir.

2.1. Gerekli Tanımlar ve Problemin Kısa Geçmişi

Irwin Beck(Beck, 1972), öncü çalışmasında değişmeli halkalar üzerinde sıfır-bölen graf teorisi ve $\Gamma(R)$ notasyonunu ilk defa ortaya koydu.

Ardından, bu tanım cebirsel yapıların grafları üzerinde derin merak uyandırdı ve bir çok araştırmacı hem değişmeli hem de değişmeli olmayan halkaların üzerinde sıfır-bölen grafları ile ilgili çalışmalar meydana getirdi.

Şimdi bu tanımı verelim.

Tanım 2.1.1 R, sıfır elemanına sahip, değişmeli bir halka ve $Z(R)$, R halkasının sıfır-bölenlerinin kümesi olsun. *Sıfır-bölen graf* $\Gamma(R)$, köşe kümesi $xy=0$ koşulunu sağlayan $x,y\in Z(R)^*=Z(R)\setminus\{0\}$ elemanlarından oluşan(bu koşulun aynı zamanda kenar oluşturma koşulu olduğu aşikardır), graflara denir.

Eğer R integral bölgesi ise $\Gamma(R)$ nin boş(empty) graf olacağı açıktır. Çünkü integral bölgeleri sıfır-bölen elemana sahip değildir.

Ayrıca (Anderson ve Livingston, 1999) eğer R sonlu ve cisim değil ise $\Gamma(R)$ nin de sonlu olacağını göstermiştir. Dahası R nin değişmeli olduğu durumda $\Gamma(R)$ nin daima bağlantılı olduğunu ortaya koymuştur.

Daha sonra Anderson ve Badawi (Anderson ve Badawi, 2008), sıfır olmayan sıfır-bölene sahip R halkası için, R nin elemanları arasında kesin bölünebilirlik şartlarını ve R ideal veya asal ideallerinin karşılaştırılabilirlik koşullarını $\Gamma(R)$ grafı ile ortaya koymuşlardır.

Sharma ve arkadaşları (Sharma ve ark., 2012), sonlu değişmeli halkaların sıfır-bölen graflarının komşuluk matrislerinin temel özelliklerini incelemişlerdir. Aslında sadece p asalı için $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ hakası üzerinde çalışmışlardır.

Değişmeli halkalar üzerinde daha bir çok yazarlar sıfır-bölen graflar, bunların özellikleri ve bu graflar yardımıyla halkaların özelliklerini incelemişlerdir. (Akbari ve ark, 2010) ve (Akgüneş ve Togan, 2012) çalışmaları örnek olarak verilebilir.

Bizde bu bölümde p ve q farklı asallar olmak üzere, $\Gamma(R)$ burada $R = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, grafının bazı özel parametrelerini ortaya koyacağız. Bunlar, $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ sıfır-bölen grafının, derece dizisi, düzensizlik indeksi, örtü sayısı (covering number), erişilebilirlik sayısı (accessible number), atom-bağ bağlantılılık indeksi ve Wiener indeksidir.

2.2. Temel Sonuçlar

Aşağıdaki teoremlerde kullanacağımız temel tanımları Gross ve Yellen (Gross ve Yellen, 2004) un kitabına uygun olarak tekrar hatırlatalım.

Basit bir G grafı için, uzaklık $d(u,v)$ G nin herhangi iki $u,v \in G$ köşesi için en kısa yol olarak adlandırılır. Bir köşenin derecesi ise $\deg(v)$ o köşeye komşu olan tüm köşelerin sayısı anlamındadır. Bir köşenin komşuluğu $N(x)$, $x \in V(G)$ köşesini içermeyen x in tüm komşuluklarının kümesidir. Eğer bu kümeye $x \in V(G)$ köşesini de ilave edersek kapalı komşuluğu $N[x]$ elde etmiş oluruz. Bir S kümesinin kapalı komşuluğu ise $\cup_{x \in S} N[x]$ elemanlarından oluşan kümesidir ve $N[S]$ ile gösterilir. Ayrıca G grafının köşelerinin derecelerinin yazılması ile elde edilen diziye derece dizisi ve bu dizinin farklı elemanlarının sayısına da düzensizlik(irregularity) indeksi denir ve sırasıyla $DS(G)$, $t = t(G)$ ile gösterilirler(Mukwembi, 2012). Burada açıktır ki; eğer $t = t(G) = 1$ ise G regüler graftır.

Aşağıdaki teoremler (Akgüneş, 2012) çalışmasında ki temel teoremlerdir.

Şimdi $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ sıfır-bölen grafının derece dizisi ve düzensizlik indeksi ile ilgili olan teoremi verelim.

Teorem 2.2.1 $G = \Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ sıfır bölen grafını göz önüne alalım.

1) Eğer $p = q$ ise $DS(G)$, $p+q-2$ tane $p-1$ dereceli elemanı içerir, böylece $t = 1$ dir.
2) Eğer p ve q farklı asallar ise, $DS(G)$, $p-1$ tane $q-1$ dereceli elemanı ve $q-1$ tane $p-1$ dereceli elemanı içerir, böylece $t = 2$ dir.

İspat: Öncelikle kabul edelim ki $p = q$ dur. Böylece G nin bütün köşelerinin dereceleri $p-1$ dir. Ayrıca düzensizlik indeksinin tanımı kullanırsak, $t(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)) = 1$ olur.

Şimdi $a_i \in Z(\mathbb{Z}_p)^*$ ve $b_i \in Z(\mathbb{Z}_q)^*$, p ve q farklı asallar olsun. Bu aslında bize G nin tam iki parçalı graf $K^{p-1,q-1}$ olduğunu verir. Çünkü, herhangi bir $(a_i, 0)$ elemanı diğer bütün $(0, b_i)$ formundaki elemanlara komşudur. Benzer şekilde herhangi bir $(0, b_i)$ elemanı diğer bütün $(a_i, 0)$ formundaki elemanlara komşudur. Bu gerçekler bize

$$DS(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)) = \left\{ \underbrace{p-1, p-1, \cdots, p-1}_{q-1 \text{ tane}}, \underbrace{q-1, q-1, \cdots, q-1}_{p-1 \text{ tane}} \right\}$$

sağlandığını gösterir. Dahası buradan $t(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)) = 2$ olduğunu elde ederiz. ■

Tanım 2.2.2 Eğer G deki iki köşe birbirinin komşusu ise bu köşeler birbirinin örter (cover) denir. G nin bir köşe örtüsü G nin tüm köşe'lerini örten bir kümedir. G nin örtü sayısı (covering number) ise köşe örtü kümelerinin minimum elemana sahip olanının eleman sayına denir. (Gross ve Yellen, 2004) $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.3 $\alpha\left(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)\right) = \min\{p-1, q-1\}$.

İspat: $a_i \in \mathbb{Z}_p^*$, $1 \le i \le p-1$ ve $b_i \in \mathbb{Z}_q^*$, $1 \le i \le q-1$ olsun. Kabul edelim ki $p < q$. $G = \Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ deki $(a_i, 0)$ elemanları için, $(a_i, 0).(0, b_i) = (0,0)$ olduğunu tanımdan görürüz. Dolayısıyla, $(a_i, 0)$ elemanı $q-1$ farklı kenara sahiptir. Bu yüzden $a_i \in \mathbb{Z}_p^*$ elemanları $(p-1)(q-1)$ tane kenarı örter. Böylece kabul gereği, minimum sayılı örtü kümesi $\{a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}\}$ dir. Bu ise $\alpha\left(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)\right) = \min\{p-1, q-1\}$ olduğunu gösterir. ■

Aşağıdaki diğer temel teoremimiz erişilebilirlik(accessible) sayısı ile ilgilidir. Öncelikle erişilebilirlik sayısının tanımını verelim.

Tanım 2.2.4 Bir $A \subseteq V(G)$ verilsin, eğer her $v \in \{V(G) - A\}$ köşesi $N[A]$ ya komşu ise $A \subseteq V(G)$ kümesine erişilebilir(accessible) küme denir. Erişilebilir(accessible) kümelerden minimum köşeye sahip olanının eleman sayısına da *G* nin erişilebilirlik sayısı(*accessible number) denir ve* $\eta(G)$ ile gösterilir. (Dündar, 2001).

Teorem 2.2.5 $\eta(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)) = 1$.

İspat: $G = \Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ sıfır-bölen grafı için $A \subseteq V(G)$ olarak $A = \{(a_1, 0)\}$, kümesi seçilebileceği kolaylıkla görülebilir, burada $a_1 \in \mathbb{Z}_p^*$ dir.

O halde $N[A] = \{(a_1,0), (0,b_1), (0,b_2), \cdots, (0,b_{q-1})\}$ olur. Böylece, yukarıda gösterdiğimiz gibi her $(a_i, 0)$ elemanı her $(0, b_i)$ elemanına komşudur, buradan biz her $v \in \{V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)\right) - A\}$ elemanının $N[A]$ ya komşu olduğunu göstermiş oluruz. Böylece $\eta\left(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)\right) = 1$ eşitliği sağlanır. ■

Tanım 2.2.6 (Estrada ve ark., 1998) Bir $G=(V,E)$ bağlantılı grafı için,

$$ABC(G)=\sum_{i\sim j}\sqrt{\frac{d_i+d_j-2}{d_i d_j}}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye *atom-bağ bağlantılılık* (*atom-bond connectivity) indeksi* denir.

Aşağıdaki teorem bu tanımla ilgilidir.

Teorem 2.2.7

$$ABC(\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q))=\sqrt{(p+q-4)(p-1)(q-1)}\,.$$

Proof: $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\sim K^{p-1,q-1}$, olduğunu yukarıdaki teoremlerde görmüştük. O halde $p-1$ tane $a_i(\in\mathbb{Z}_p^*)$ köşesi $q-1$ derecesine ve $q-1$ tane $b_i(\in\mathbb{Z}_q^*)$ köşesi $p-1$ dereceye sahiptir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}ABC\left(\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\right)&=(q-1)(p-1)\sqrt{\frac{p-1+q-1-2}{(p-1)(q-1)}}\\&=\sqrt{(p+q-4)(p-1)(q-1)}\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. ■

Tanım 2.2.8 (Wiener, 1947) G grafının *Wiener indeksi*

$$W(G)=\frac{1}{2}\sum_{u,v\in V(G)}d(u,v)$$

şeklindedir.

Son olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 2.2.9 $W(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)) = \frac{1}{2}\left[(p-1)(q+2p-5)+(q-1)(p+2q-5)\right]$.

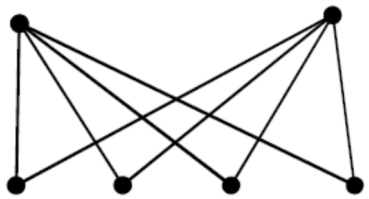
İspat: Teoremin ispatı için bütün köşeler arasındaki uzaklıkların toplamını bulmamız gerekir. $a_i \in \mathbb{Z}_p^*$, $(1 \le i \le p-1)$ ve $b_i \in \mathbb{Z}_q^*$, $(1 \le i \le q-1)$ için $(a_i, 0)$ ve $(0, b_i)$ köşeleri için uzaklıklar 1 dir. Ayrıca $(a_i, 0)$ ve $(a_j, 0)$ köşeleri için uzaklıklar 2 dir. Benzer şekilde $(0, b_i)$ ve $(0, b_j)$ köşeleri için uzaklıklar da 2 dir. Böylece Wiener indeksin tanımını kullanırsak:

$$W\left(\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)\right) = \frac{1}{2}[2(q-1)(p-1)+2(p-2)(p-1)+2(q-2)(q-1)]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(p-1)(q+2p-5)+(q-1)(p+2q-5)\right]$$

olduğunu elde ederiz. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Teoremlerin ifadelerini pekiştirmek ve sağladığı kolaylıkları görmek bakımından aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 2.2.10 $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ sıfır-bölen grafını çizelim ve özelliklerini yukarıda verilen teoremlerden bulalım.



Şekil 2.1 Sıfır-bölen graf örneği

Yukarıdaki $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ sıfır-bölen grafiği de göz önüne alırsak

1) $DS(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)) = \{2,2,2,2,4,4\}$ ve $t(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)) = 2$ (Teorem 2.1 den),
2) $\alpha\left(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)\right) = 2$ (Teorem 2.3 den),
3) $\eta\left(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)\right) = 1$ (Teorem 2.5 den),

4) $ABC\left(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)\right) = 4\sqrt{2}$ (Teorem 2.7 den),

5) $W(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)) = 22$ (Teorem 2.9 den),

olduklarını elde ederiz.

Dolayısıyla p ve q asallarını bildiğimizde grafı çizmeden yalnızca p ve q asalları ile yukarıda teoremlerde verilen graf parametrelerini hesaplayabiliriz.

3. GRAFLARIN DÜZENSİZLİK (İRREGULARTY) İNDEKSİ VE RADİUSU(YARIÇAPI) İÇİN ÜST SINIR

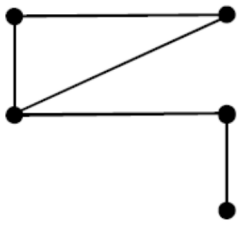
Bu bölümde son zamanlarda tanımlanan bir graf parametresini tanıtıp, o parametreyi kullanıp graf teorinin her döneminde önemli olan radius(yarıçap) için daha önce elde edilmiş sınırlardan daha kuvvetli olan bir sınır bulup, o sınırın diğer sınırlardan daha iyi olduğunu göstereceğiz.

3.1. Bölüm Tanımları ve Problemin Tanıtılması

$G=(V,E)$ grafı $V=V(G)$ köşe kümesi ve $E=E(G)$ kenar kümesi olan bağlantılı ve basit bir graftır. G grafının x, y noktaları arasındaki uzaklık $\mathrm{d}_G(x,y)$ ile gösterilsin. G nin x noktasının derecesi $\deg_G(x)$ nin x e komşu noktaların sayısı olduğunu hatırlayalım. Tüm dereceler arasında, bir G grafında noktaların minimum derecesi δ ile temsil edilir. Aynı zamanda biliyoruz ki G nin noktalarının derecelerinin dizisi (degree sequence) $DS(G)$ ile gösterilir. $DS(G)$ tanımına dayanarak yakın zamanda, (Mukwembi, 2012) kısaca G nin düzensizlik(irregularity) index $t=t(G)$ olarak gösterilen bir parametre tanımladı.

Tanım 3.1.1 (Mukwembi, 2012) Bir G grafının derece dizisinin farklı elemalarının sayısına *düzensizlik*(*irregularity) indeksi* denir.

Örnek 3.1.2



Şekil 3.1 5 köşeli bir graf

Yukarıdaki graf için $DS(G)=\{1,2,2,2,3\}$ ve düzensizlik indeksi 3 tür.

Grafların derece dizileri üzerine bir çok sayıda çalışma mevcut olmasına rağmen düzensizlik indeksi üzerine gösterilecek referanslar çok azdır.

G bağlantılı grafının herhangi bir u köşesinin diğer köşelerden arasındaki uzaklık en büyük olanın uzaklığına u noktasının *eksantriği*(*eccentricitysi)* denir ve $\varepsilon(v)$ ile gösterilir. Bağlantısız bir graf için tüm noktalar sonsuz eksantriğe sahip olarak tanımlanmıştır. Giriş kısmında tanımladığımız gibi G nin herhangi iki noktası arasındaki maksimum mesafeye diameter denir ve $diam(G)$ ile temsil edilir. Açıkça görülür ki G nin tüm noktaları arasıdaki maksimum eksantrik ile $diam(G)$ birbirine denktir. Diğer taraftan minimum eksantrik G nin *radiusu(yarıçapı)* olarak adlandırılır ve $rad(G) = \min_u \left\{ \max_v \left\{ d_G(u,v) \right\} \right\}$ ile gösterilir.

(Ostrand, 1973) de ki çalışmasında G bağlantılı grafı için $rad(G) \le diam(G) < 2rad(G)$ eşitsizliğini doğru olduğu ortaya koymuştur. Dikkatle incelediğimizde, grafların uzaklık içeren parametreleri üzerine yazarlar geniş bir şekilde çalışmışlar ve bu konu her zaman ilgi odağı olmuşdur. (bakınız (Aouchiche ve Hansen, 2013), (Kouider ve Winkler, 1997), (Krumme ve Fragopoulou, 2001), (Randic, 2001)).

(Erdös ve ark., 1989) Radius için bu konunun öncü makalesinde, n mertebeli ve $\delta(\ge 2)$ minimum dereceli bağlantılı herhangi bir grafta, G nin radius u için

$$rad(G) \le \frac{3}{2}\frac{n-3}{\delta+1} + 5$$

sınırını ispatlamışlardır ve bu sınır uzun yıllar önemli yere sahip olmuştur. Buna ek olarak [(Kim ve ark., 2012) teorem 1] , yakın zamanda gösterdi ki eğer,

$$n \ge 2\delta + 2 \text{ ve } rad(G) \ge 3$$

olursa

$$rad(G) \le \frac{3}{2}\left\lfloor \frac{n}{\delta+1} \right\rfloor$$

dir.

Bu çalışmada, [(Erdös ve ark., 1989), (Kim ve ark., 2012)] makalelerindeki sonuçlar dikkate alınmış ve *t, n* ve δ parametreleri kullanılmıştır. Bizde burada herhangi basit bağlantılı G grafının radius u için bir üst sınır bulacağız. Bunu yapmak için Dankelmann ve Entringer (Dankelmann ve Entringer, 2000) çalışmalarında kullandığı bir tekniği kullanacağız. Ayrıca radius için yukarıda verilen sınırlardan hangi durumlarda daha güçlü olduğunu göstereceğiz ve işaret edeceğiz.

3.2. Temel Sonuçlar

Aksi belirtilmedikçe G basit, bağlantılı, n mertebeli ve minimum derecesi δ olan bir graf olarak temsil edilecektir. Ana sonuçları vermeden önce başlıkla ilgili bazı diğer temel bilgileri verelim. (Aşağıdaki tanımlar herhangi bir graf kitabında temel olarak bulunabilir. Biz notasyon olarak Gross ve Yellen' in (Gross ve Yellen, 2004) notasyonlarını kullanacağız.)

$x \in V(G)$ köşesinin *komşuluğu* $N_G(x)$, x e komşu tüm noktaların kümesidir. $x \in V(G)$ köşesinin *kapalı(closed) komşuluğu* $N_G[x]$, x ve x in tüm komşuluklarını içeren noktalar kümesidir. $S \subseteq V$ alt küme olmak üzere, kabul edilim ki $G[S]$, G nin S tarafından indüklenmiş alt grafıdır. S kümesi ve bir x noktası arasındaki uzaklık $\min_{v \in S} d_G(x,v)$ olarak tanımlıdır ve $d_G(x,S)$ olarak gösterilir. $\cup_{x \in S} N_G[x]$ kümesi S nin kapalı komşuluklarıdır ve $N_G[S]$ ile gösterilir. G nin k. kuvveti G^k ile gösterilir ki bu graf G ile aynı köşe kümesine sahip graftır. G grafının $u \neq v \in V(G)$ iki köşesi eğer $d_G(u,v) \leq k$ ise bu köşeler G^k grafında komşudurlar. $A \subseteq V(G)$ alt köşe kümesi için, G^k grafı A kümesi tarafından indükleniyorsa $G^k[A]$ ile gösterilir. Pozitif bir k tamsayısı için, her $a,b \in A$ için $d_G(a,b) > k$ oluyorsa $A \subseteq V(G)$ alt kümesine *k-packing* kümesi denir.

Son olarak sonuçlarımıza geçmeden önce reel sayılarla ilgili

$$r \leq \lceil r \rceil < r+1$$

ifadesini hatırlatmış olalım.

Aşağıdaki önerme bizim temel sonuçlarımızda önemli bir rol oynayacaktır.

Önerme 3.2.1 (Mukwembi, 2012) Eğer A bir maksimum 2-packing kümesi ise

$$|A| \leq \frac{n-t+1}{\delta+1}$$

dır. Burada *t, G* nin düzensizlik indeksidir.

Yukarıda verdiğimiz temel hatırlatmalardan sonra aşağıdaki teoremimizi verebiliriz.

Teorem 3.2.2(Akgüneş ve Çevik, 2013) *t, G* nin düzensizlik indeksi olsun. *G* nin radiusu için

$$rad(G) \le \frac{3}{2}(\frac{n-t+1}{\delta+1}+1)$$

üst sınırı mevcuttur.

İspat: Kabul edelim ki *G* grafının derece dizisi *DS(G)* nin farklı eleman sayısı *t* olsun. Yani başka bir deyişle *t*, *G* grafının düzensizlik indeksidir. İlk olarak *G* nin maksimal 2-packingi olan $A \subseteq V(G)$ kümesini bulmamız gereklidir. Bunu aşağıdaki prosedür ile elde edebiliriz: $A \subseteq V(G)$ kümesi seçimi için $A = \{v\}$ olsun. $V(G)$ de herhangi bir *u* köşesi $d_G(u, A) = 3$ durumuna sahipse $A \subseteq V(G)$ ya *u* eklenir. Tüm bu $d_G(u', A) = 3$ koşulunu sağlayan elemanları $A \subseteq V(G)$ kümesine ekleriz.

Bir diğer adım olarak $T_1 \le G$, $N_G[A]$ köşe kümesi ve *A* daki köşelere komşu olan tüm kenarlardan oluşan bir orman (forest) olur. *A* üzerindeki bu yapıyla *G* de |A|-1 kenar vardır ki bu kenarlar *A* nın 2 farklı komşusunu birbirlerine bağlar. Böylece bunların T_1 e eklenmesiyle $T_2 \le G$ ağacını elde ederiz. Şimdi T_2 de olmayan tüm *u* noktaları, T_2 deki diğer bazı u'' noktalarıyla komşudur. $T[A]$, $E(T_2) \cup \{uu'' \mid u \in V(G) - V(T_2)\}$ kenar kümesine sahip *G* nin geren ağacı(***spaning tree)*** olsun. Tanımdan dolayı $T^3[A]$ bağlantılıdır. Çünkü *A* kümesini 2-packing kümesi olarak özel elemanlardan oluşturduk. Böylece aşağıdaki

$$rad(T[A]) \le 3rad(T^3[A]) \quad \text{ve}$$

$$rad(T^3[A]) \le \left\lceil \frac{|A|-1}{2} \right\rceil$$

eşitsizliklerini elde etmiş oluruz.

Dikkat edelim ki, bu elde ettiğimiz eşitsizliklerin eşitlik durumu ancak ve ancak $T^3[A]$ bir yol(path) graf ise sağlanır. (En büyük radius yol graftadır, gerçeğini kullandık) O halde açıkça

$$rad(T[A]) \le 3\left\lceil \frac{|A|-1}{2} \right\rceil$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Buna ek olarak üst tam değerin özelliğinden

$$\left\lceil \frac{|A|-1}{2} \right\rceil < \frac{|A|-1}{2}+1$$

eşitsizliği elde ederiz.

Lemma 3.2.1 ve son eşitsizlikten

$$rad(T[A]) \le 3\left\lceil \frac{|A|-1}{2} \right\rceil \le 3\left(\frac{|A|-1}{2}+1 \right) = \frac{3}{2}(|A|-1)+3$$

ki buradan

$$rad(T[A]) \le \frac{3}{2}\left(\frac{n-t+1}{\delta+1}-1 \right)+3 = \frac{3}{2}\left(\frac{n-t+1}{\delta+1}+1 \right)$$

olur.

Ancak *T[A], G* nin geren ağacı (spaning tree) olduğundan (bir geren ağacın radiusu grafın radiusundan büyük ya da eşit olduğu radiusun tanımından açıktır) son olarak

$$rad(G) \le rad(T[A]) \le \frac{3}{2}\left(\frac{n-t+1}{\delta+1}+1 \right)$$

eşitsizliğini elde ederiz, bu ise aradığımız sonuçtur. ■

Aşağıdaki sonuçlar Teorem 3.2.2 de bulunan üst sınırın kuvvetli bir üst sınır olduğunu gösterir.

Not 3.2.3 Teorem 3.2.2 de elde edilen sınır (Erdös ve ark, 1989) de verilen sınırdan daha iyidir. Düzensizlik indeksinin tanımını ve $\delta+1 \in Z^+$ kullanarak aşağıdakini gösterebiliriz

$$\delta \ge 1 \ge \frac{2}{7} \Rightarrow 9 \le 7\delta+7 \Rightarrow \frac{9}{2(\delta+1)} \le \frac{7}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2(\delta+1)}+\frac{3}{(\delta+1)} \le \frac{7}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{n-t}{\delta+1} \right)+\frac{3}{2(\delta+1)}+\frac{3}{2} \le \frac{3}{2}\left(\frac{n-t}{\delta+1} \right)-\frac{3}{(\delta+1)}+5 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{n-t+1}{\delta+1}+1 \right) \le \frac{3}{2}\left(\frac{n-t-1}{\delta+1} \right)+5.$$

Buna ek olarak

$$t \geq 1 \Rightarrow n-3 \geq n-t-2 \Rightarrow \frac{n-3}{\delta+1} \geq \frac{n-t-2}{\delta+1} \Rightarrow$$
$$\frac{3}{2}\left(\frac{n-3}{\delta+1}\right)+5 \geq \frac{3}{2}\left(\frac{n-t-2}{\delta+1}\right)+5$$

dır.

Yukarıda ki eşitsizlikler bize;

$$\frac{3}{2}\left(\frac{n-t+1}{\delta+1}+1\right) \leq \frac{3}{2}\left(\frac{n-3}{\delta+1}\right)+5$$

olduğunu gösterir. ■

Not 3.2.4 Eğer $t \geq \frac{5\delta+8}{3}$ ise Teorem 3.2.2 de elde edilen sınırlar (Kim ve ark., 2012) de elde edilen sınırlardan daha iyidir. Bunu Not 3.2.3 den kolayca görebiliriz.

$$t \geq \frac{5\delta+8}{3} \Rightarrow 3(t-1) \geq 5(\delta+1)$$

olduğundan dolayı

$$\frac{3}{2}\left(\frac{t-1}{\delta+1}\right) \geq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\frac{n}{\delta+1}-1 \geq \frac{3}{2}\frac{n}{\delta+1}+\frac{3}{2}\left(\frac{1-t}{\delta+1}\right)+\frac{3}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Buradan açıkça görülüyor ki

$$\frac{3}{2}\left\lfloor\frac{n}{\delta+1}\right\rfloor \geq \frac{3}{2}\frac{n}{\delta+1}-1 \geq \frac{3}{2}\left(\frac{n-t+1}{\delta+1}+1\right)$$

elde edilmiş olur. ■

Sonuç 3.2.5 Eğer G bir regüler graf ise; Teorem 3.2.2 de verilen üst sınır

$$rad(G) \leq \frac{3}{2}\left(\frac{n}{\delta+1}+1\right)$$

şeklini alacağı açıktır.

4. MONOJENİK YARI GRUPLARIN GRAFLARI

Bu bölümde Zero-Divisor Grafların yeni bir versiyonu olarak, Cebir anabilim dalının önemli bir sınıfı olan yarı grupların özel bir çeşidi olan monojenik yarı grupların grafları tanımlanıp, bu grafların çeşitli özellikleri incelenecektir.

4.1. Giriş ve Temel Tanımlar

Değişmeli halkalar üzerinde sıfır-bölen graf çalışmaları Beck' in (Beck, 1972) çalışması ile başlamıştır. Bu çalışmanın ardından Anderson ve arkadaşları (Anderson ve Livingston, 1999) , (Anderson ve Badawi, 2008) değişmeli ve değişmeli olmayan halkalar üzerinde sıfır-bölen graflar alanında önemli çalışmalarda bulunmuştur. Bu çalışmaların ışığında bir çok araştırmacı ve bilim adamı bu özel graflar üzerinde çalışmalar ortaya koymuştur.

Yukarıda ki çalışmalardan faydalanarak özellikle DeMeyer ve arkadaşları ayrıca diğer bazı yazarlar bu özel grafları değişmeli ve değişmeli olmayan yarı-gruplara taşımışlardır((DeMeyer ve Ark., 2002), (DeMeyer ve Ark., 2005), (Wright, 2007)). Ardından, bu çalışmaların ışığında sıfır-bölen graflar alanında bir çok sayıda bilimsel makale literatüre kazandırılmıştır.

Bu konunun önemi üzerinde çalışılan karmaşık cebirsel bir ifadeyi karakterize etmek ve onun özellikleri incelemek için kolay fırsat yakalamaktır.

Şimdi yarı gruplar üzerinde sıfır-bölen grafların tanımını verelim. Bu tanım (DeMeyer ve Ark., 2002) ve (DeMeyer ve Ark., 2005) çalışmalarında şu şekilde verilmiştir.

4.1.1 Tanım: Sıfırı içeren (değişmeli) S yarı grubunu göz önüne alalım. Sıfır-bölen graf $\Gamma(G)$, $Z(S)^* = Z(S)-\{0\}$ köşe kümesine sahip, S nin sıfırdan farklı sıfır-bölenleri için, farklı $x, y \in Z(S)^*$ olmak üzere x, y ile komşudur ancak ve ancak $xy = 0$ dır, kuralı ile elemanlar arasında bağlantıyı kuran yönlendirilmemiş bir graftır.

Biz de yukarıdaki tanımdan faydalanıp, aşağıdaki yeni komşuluk kuralı ile vereceğimiz grafı tanımlayalım.

4.2. Monojenik Yarı gruplar Üzerinde Graflar

Bu kısımda sonlu, çarpımsal, sıfır içeren,

$$S_M^n = \left\{x, x^2, x^3, \cdots, x^n\right\} \cup \{0\} \tag{4.2.1}$$

monojenik yarı grubunu göz önüne alalım.

Şimdi de (aslında sıfır-bölen graflara benzeyen) yönlendirilmemiş, monojenik yarı gruplar üzerinde $\Gamma\left(S_M^n\right) = (V, E)$ grafını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

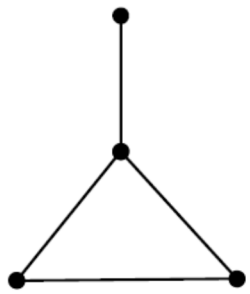
Tanım 4.2.1 $\Gamma\left(S_M^n\right) = (V, E)$, köşe kümesi S_M^n'in sıfırdan farklı sıfır-bölenleri (yani açıktır ki, sıfır olmayan tüm elemanları), kenar kümesi ise birbirinden farklı x^i ve x^j $(1 \le i \le n$ ve $1 \le j \le n)$ ler için $x^i.x^j = 0$ olacak şekildeki elemanların oluşturduğu kümedir. Burada $x^i.x^j = 0$ koşulu için şu kuralı kullanacağız:

$$x^i.x^j = x^{i+j} = 0 \Leftrightarrow i + j > n.$$

Tanımı bir örnekle pekiştirelim.

Örnek 4.2.2 $S_M^4 = \left\{x, x^2, x^3, x^4\right\} \cup \{0\}$ monojenik yarı grubunu göz önüne alalım ve $\Gamma\left(S_M^4\right)$ grafını çizelim. Bu grafın köşe kümesi $V\left(S_M^4\right) = \left\{x, x^2, x^3, x^4\right\}$ dir. Komşuluklar ise :

x^4 ile x^3 komşudur, çünkü $x^4.x^3 = x^7 = 0$ (7>4 olduğundan). Benzer mantıkla $x^4 \sim x^2$, $x^4 \sim x$, $x^3 \sim x^2$, $x^3 \sim x$ dir. Köşe ve komşulukları göz önüne alırsak aşağıdaki gibi grafı çizeriz.



Şekil 4.1 S_M^4 Monojenik yarı grubunun grafı

Böylece tanımı pekiştirmiş oluruz.

4.3. $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in Bazı Graf Parametreleri

Bu kısımda bir önceki kısımda tanıtılan $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in özellikleri incelenecektir. Bu özellikler, diameter, girth, maksimum ve minimum derece, baskınlık sayısı, ve düzensizlik indeksidir. Bu inceleyeceğimiz özellikler aslında, grafların, uzaklık ve köşelerine bağlı parametrelerinin özellikleridir. Bizde bu kısımda teoremlerin ispatını verirken bu gerçekleri kullanacağız.

Öncelikle tüm kısım boyunca gerekli olan, temel kavramları tanımlayıp, ifade ile ilgili teoremi ve ispatını vereceğiz.

Bu bölümde ki temel sonuçlar, (Das, Akgünes ve Cevik, 2013) çalışmalarındaki literatüre kazandırılmış temel sonuçlarıdır.

Tanım 4.3.1 Herhangi bir G basit grafı için, G nin herhangi iki köşesi u ve v *uzaklık* aralarındaki en kısa yolun uzunluğu olarak adlandırılır ve $d_G(u,v)$ şeklinde gösterilir. (Gross ve Yellen, 2004)

Tanım 4.3.2 Bir G grafının *diameter* i *diam(G)* şeklinde gösterilir ve

$$diam(G) = \text{maks}\{d_G(x,\ y) :\ x \text{ ve } y\ G \text{ nin köşeleri}\}$$

şeklinde tanımlanır. (Gross ve Yellen, 2004)

Şimdi $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in diameteri ile ilgili teoremi ve ispatını verelim.

Teorem 4.3.3 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının diameter'i 2 dir.

İspat: $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının x köşesi tek bir komşuluğa sahiptir yani *pendant* köşedir. Dolayısıyla diameter bu köşe ile arasındaki uzaklık en fazla olan köşe kümesinin herhangi bir elemanı ile bulunabilir. x köşesi sadece x^n köşesi ile komşudur. x^n köşesi

ise $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in diğer tüm köşeleriyle komşudur. Çünkü $x^n.x^i = 0, 1 \le i \le n$ dir. O halde x köşesinden herhangi bir köşeye x^n köşesinden geçerek ulaşabiliriz. Böylece $diam\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = 2$ dir. ■

Tanım 4.3.4 Bir G basit grafının içerdiği en kısa uzunluklu *devrin* uzunluğuna grafın *girth* i denir ve *girth(G)* ile gösterilir. Eğer graf hiçbir devir içermiyorsa girthi sonsuzdur denir. (Gross ve Yellen, 2004)

Yukarıdaki tanımdan faydalanıp aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 4.3.5 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının girth'i 3 tür.

İspat: $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının tanımını göz önünde bulundurursak; $x^n.x^{n-1} = 0$, $x^{n-1}.x^2 = 0$ ve $x^n.x^2 = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla biz buradan $x^n - x^{n-1} - x^2 - x^n$ şeklinde bir devir elde ederiz ki bu devrin uzunluğunun en kısa olduğu açıktır. Bu devrin uzunluğu 3 olduğundan ispat tamamlanmış olur. ■

Not 4.3.6 Yukarıdaki teorem literatür için oldukça önemlidir. Çünkü DeMeyer ve ark. çalışmalarında bir yarı grupların sıfır-bölen grafları için girthlerini 3 ten küçük eşit bulmuşlardır. Biz ise bu teoremle graf teorinin önemli problemlerinden biri olan eşitlik koşulunu, hangi tür yarı gruplar için sağlandığını vermiş olduk.

Tanım 4.3.7 Bir $v \in V(G)$ köşesinin komşu olduğu köşelerin sayısına o köşenin derecesi denir ve $\deg_G(v)$ ile gösterilir. Ayrıca, derecelerin en büyük olanına maksimum derece, derecelerin en küçük olanına da minimum derece denir ve sırasıyla $\Delta(G)$ ve $\delta(G)$ ile gösterilirler. (Gross ve Yellen, 2004)

Derece tanımlarından faydalanıp aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.3.8 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının maksimum ve minimum dereceleri

$$\Delta\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=n-1 \text{ ve } \delta\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=1$$

dir.

İspat: $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının x^n köşesini göz önüne alalım. Her $1\le i\le n$ için $x^n.x^i=0$ olduğu grafın tanımdan açıkça görülür. Çünkü $n+i>n$ dir. O halde $x^n x^i\in E\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)$, olduğunu her $1\le i\le n$ için elde ederiz. Dolayısıyla $\Delta\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=n-1$ dir.

Diğer taraftan $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının x köşesini göz önüne alırsak $x.x^i=0$ eşitliği sadece $i=n$ olduğu zaman sağlanır. Bu ise x köşesinin yalnızca bir komşuluğa sahip olduğunu yani derecesinin 1 olduğunu gösterir bu ise $\delta\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=1$ olduğunu ispatlar. ■

Bir önceki bölümümüzde **Tanım 3.1.1** de bir grafın *derece dizisi DS(G)* ve düzensizlik (irregularity) $t(G)$ indeksini tanımlamıştık. Sıradaki teoremimiz $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının düzensizlik indeksi hakkındadır.

Teorem 4.3.9 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının derece dizisi ve düzensizlik indeksi

$$DS\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=\left\{1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,\cdots,n-1\right\} \text{ ve } t\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=n-1$$

dir.

İspat: $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafında x köşesinin yalnızca x^n köşesine komşu olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu köşenin dercesi 1 dir. x^2 köşesini dikkate alırsak, komşuluklarının x^n ve x^{n-1} olduğunu kolayca görürüz. Böylece x^2 köşesinin derecesi 2 dir. Bu yöntemle kalan köşeler için sırayla devam edersek:

- $x^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}$ köşesinin derecesi $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$ ve

- $x^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ köşesinin derecesi $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ fakat
- $x^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1}$ köşesinin derecesinin de $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olduğu görülür.

Dahası;

- $x^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+2}$ köşesinin derecesinin $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1$ ve
- $x^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+3}$ köşesinin derecesinin $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+2$ olduğunu görürüz.

Aynı prosedür ile devam edersek;

- x^{n-1} köşesinin derecesini $n-2$ ve nihayet x^n köşesinin derecesini $n-1$ olarak elde ederiz.

Böylece derece dizisini elde ederiz. Ayrıca bu dizinin yalnızca iki teriminin aynı diğer terimlerinin farklı olduğu gerçeğinden düzensizlik indeksini $n-1$ olarak bulmuş oluruz. Böylece teoremin ispatı verilmiş olur. ■

Graf teoride, herhangi bir iletişim ağında öğeler arasındaki iletişimi güçlendirmek ve sağlamlaştırmak amacıyla çeşitli parametrelerden faydalanılmaktadır. Bu parametereler, iletişimin işlevine ve amaca yönelik farklılıklar taşımaktadırlar. Baskınlık sayısı bu parametrelerden biri olup, özellikle görev paylaşımı problem modellerinde kullanılarak iletişim ağını bölgesel olarak kuvvetlendirmeye çalışmaktadır. Baskınlık kavramına göre, herhangi bir köşe komşu olduğu köşeleri bastırmakta olup, komşu olduğu köşeler tarafından da bastırılmaktadır. Bir başka deyişle, baskınlık tanımı köşeler arasındaki komşuluğu dolayısıyla da iletişimi incelemektedir.

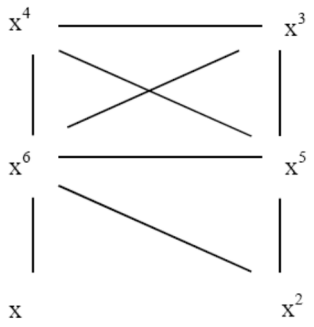
Tanım 4.3.10 Bir $G=\left(V\left(G\right),E\left(G\right)\right)$ grafında, $D\subseteq V\left(G\right)$ olmak üzere; $V\left(G\right)-D$ 'deki her köşe, D 'nin bir köşesine komşu (yani $V\left(G\right)-D$, D 'nin komşuluğunda) ise; D kümesine, G grafının bir *baskın kümesi (dominating set*) denir. *Baskınlık sayısı (domination number)*; G grafının baskın kümeleri arasında en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısıdır ve $\gamma(G)$ ile gösterilir. (Chartrand ve Lesniak, 2005).

Teorem 4.3.11 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının baskınlık sayısı 1 dir.

İspat: $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in verilen tanımdan faydalanırsak tek bir x^n köşesi diğer bütün köşeleri domine eder. Dolayısıyla $D \subseteq V(G)$ olarak $D = \left\{x^n\right\}$ baskınlık kümesi olarak alabiliriz. Bu ise $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in baskınlık sayısının 1 olduğu anlamına gelmektedir. ■

Yukarıdaki beş teoremi pekiştirmek için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 4.3.9 $S_{M_6} = \left\{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\right\} \cup \{0\}$ monojenik yarı grubunu göz önüne alalım ve $\Gamma\left(S_M^6\right)$ grafını $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in verilen tanımdan faydalanıp çizelim.



Şekil 4.2 S_M^6 Monojenik yarı grubunun grafı

Yukarıdaki şekilden de görülebileceği gibi; biz teoremleri kullanırsak:

- $diam\left(\Gamma\left(S_M^6\right)\right) = 2$ Teorem 4.3.3 den,
- $girth\left(\Gamma\left(S_M^6\right)\right) = 3$ Teorem 4.3.5 ten,
- $\Delta\left(\Gamma\left(S_M^6\right)\right) = 5$ ve $\delta\left(\Gamma\left(S_M^6\right)\right) = 1$ Teorem 4.3.8 den,
- $DS\left(\Gamma\left(S_M^6\right)\right) = \{1,2,3,3,4,5\}$ ve $t\left(\Gamma\left(S_M^6\right)\right) = 5$ Teorem 4.3.9 dan,
- $\gamma\left(\Gamma\left(S_M^6\right)\right) = 1$ Teorem 4.3.11 den,

oldukları görülür. Teoremlerin, büyük boyutlu graflar için çok büyük kolaylıklar sağladığı ve sadece monojenik yarı grubun boyutu bilinmesiyle grafın özelliklerinin bulunabileceğini göstermesi bakımından önemli bir yer teşkil ettiği gerçeğini vurgulamakta fayda görürüz.

4.4. $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in Mükemmel (Perfect) Graf Özelliği

Bu kısımda Graf teori de önemli bir yere sahip olan ve oldukça ilgi duyulan *Mükemmel (Perfect) graflara* yeni bir graf çeşidi ekleyeceğiz. Bunun için gerekli olan tanım ve teorileri aktarıp $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in mükemmel bir graf olduğunu göstereceğiz dolayısıyla da literatüre yeni bir mükemmel graf eklemeye çalışacağız.

Mükemmel graf kavramı *renklendirme (coloring)* ve *klik (clique) sayıları* ile doğrudan ilişkilidir. O yüzden ilk önce bu terimleri tanıyalım.

Tanım 4.4.1 Bir G grafının köşeleri, komşu olan köşeler farklı renkte olması koşuluyla (komşu olmayan köşeler aynı renk ile boyanabilir), renklendirilebilir. Eğer bu renklendirme işleminde *n* tane farklı renk kullanılmış ise bu işleme *n-renklendirme* (*n coloring*) denir. Mümkün olan en az sayıda renk kullanarak renklendirilmiş bir bir grafı renklendirmek için kullanılan renklerin sayısına da *renklendirme sayısı (choramatic number)* denir ve $\chi(G)$ ile gösterilir. (Gross ve Yellen, 2004)

Tanım 4.4.2 Bir *G* grafının içerdiği maksimal tam altgrafların her birine *klik (clique)* denir. Klik'lerin içindeki en fazla köşe sayısına sahip olan klik'in köşe sayısına grafın *klik sayısı (clique number)* denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir. (Gross ve Yellen, 2004)

Genellikle bu sayıların arasında herhangi bir *G* graf için,

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

olduğu bilinir (bkn. örneğin, Gross ve Yellen, 2004). Eşitliğin ise çok nadir durumlarda olduğu malumdur. Graf teorinin önemli araştırma konularından biri de bu eşitliği sağlayan graf ailelerinin ortaya konulmasıdır.

Tanım 4.4.3 (Lovász, 1972) G grafının her H indüklenmiş altgrafı için $\chi(H)=\omega(H)$ oluyor ise G grafına *mükemmel (perfect) graf* denir.

Biz burada $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafı için sırasıyla renklendirme ve klik sayılarını bulalım. Daha sonra da bu ifadelerin, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ özel grafı için mükemmellik özelliğini verdiğini göstermeye çalışalım.

Teorem 4.4.4 $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının renklendirme sayısı;

$$\chi\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=1+\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$$

dir.

İspat: Renklendirme sayısını bulmak için verilen $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının tanımını yani komşuluklarını göz önüne alalım. İlk olarak x^n köşesini dikkate alırsak, bu köşe diğer bütün köşelerle komşudur, yani x^n köşesi için kullandığımız rengi başka hiçbir köşe için kullanamayız. Bu renge C_1 diyelim.

İkinci olarak x^{n-1} köşesini göz önüne alalım. x^{n-1} köşesi x köşesi hariç diğer bütün köşelere komşudur, yani bu köşeyi C_2 rengiyle renklendirirsek sadece x köşesini de bu renk ile renklendirebiliriz. Benzer düşünceyi x^{n-2} köşesi içinde düşünürsek, bu köşe x ve x^2 hariç diğer köşelerle komşudur. Dolayısıyla eğer bu köşeyi C_3 rengiyle renklendirirsek sadece x^2 köşesini bu renk ile renklendirebiliriz (x köşesini bir önceki adımda C_2 rengiyle renklendirmiştik).

Benzer şekilde devam edersek $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının köşe kümesi $V\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)$ köşe kümesini renklendirmek için en az $1+\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$ tane farklı renge ihtiyaç duyarız. Bu ise bize $\chi\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=1+\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$ olduğunu ispatlar. ■

Lemma 4.4.5 Herhangi bir pozitif n doğal sayısı için $n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$ eşitliği sağlanır.

İspat: Matematiksel tümevarımdan ispat açıktır. ■

Teorem 4.4.6 $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının klik sayısı;

$$\omega\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=1+\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$$

dir.

İspat: $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının bir $A\subseteq\Gamma\left(S_M^n\right)$ tam altgrafını göz önüne alalım. Tam alt grafın tanımı gereği, A alt grafının bütün farklı elemanları bir birine komşu olmalıdır. O halde her farklı $x^i,x^j\in V\left(A\right)$ için;

$$x^i.x^j=x^{i+j}=0\text{, yani } x^ix^j\in E\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) \tag{4.2.1}$$

koşulu her i ve j için sağlanmalıdır.

Aslında (4.2.1) koşulu $i+j$ toplamının en az $n+1$ olması gerektiğini göstermektedir. Böylece $x^i,x^j\in V\left(A\right)$herhangi iki köşe için i ve j en azından

$$i=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \text{ ve } j=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1$$

olması gerekir. Çünkü $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\geq n+1$ dir. Bu yöntem bize $A\subseteq\Gamma\left(S_M^n\right)$ tam altgrafının köşe kümesinin

$$V(A)=\left\{x^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil},x^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1},\cdots,x^{n-1},x^n\right\}$$

şeklinde olduğunu gösterir. Dolayısıyla bu kümenin eleman sayısı $n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1$ yani Lemma 4.4.5 i kullanırsak ifadenin $\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil+1$ olduğunu elde ederiz.

Şimdi de bu kümenin gerçekten de mümkün olan en fazla elemanlı küme olduğunu gösterelim. Tersini kabul edelim diyelim ki $V\left(A\right)$ nın eleman sayısı $\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil+1$ dan büyük olsun. Bu $V\left(A\right)$ nın elemanlarının içinde yukarıdakilerden başka

bir elemanın da varlığını söyler. Yani bir $x^k \left(x^k \in V\left(\Gamma\left(S_{M_n}\right)\right)\right)$, $1 \le k \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ in $V(A)$ nın içinde olması demektir. Ancak $k + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < n$, $1 \le \mathrm{k} \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ olur ki bu x^k nın diğer bütün elemanlarla komşu olması koşulunu sağlamaz yani çelişki elde ederiz. Bu ise gösterir ki yukarıda bulunan $V(A)$ kümesi en fazla elemana sahip tam altgraf köşe kümesidir. Böylece $\omega\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = 1 + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ dir. ■

Yukarıda ki teoremler bize aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç 4.4.7 $\omega\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = \chi\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)$ dir.

Şimdi ise $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in mükemmel graf olduğunu gösterelim.

Tanım 4.4.8 (Berge, 1962) Bir G grafı, hiçbir indüklenmiş alt grafı ya da tamamlayıcısı(complement) en az 5 uzunluklu tek devir içermezse bu grafa *Berge* denir.

Lemma 4.4.9 (Chudnosky ve ark., 2006) G grafı mükemmeldir ancak ve ancak G Berge dir.

Teorem 4.4.10 $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafı mükemmeldir.

İspat: Kabul edelim ki $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının herhangi bir indüklenmiş alt grafı köşe sayısı $2k+1$ $(k \ge 2)$ olan tek devir C_{2k+1} i içersin. Kabul edelim ki C_{2k+1} in $x^{a_1}, x^{a_2}, \cdots, x^{a_{2k+1}}$ köşeleri $x^{a_1} - x^{a_2} - \cdots - x^{a_{2k+1}} - x^{a_1}$ şeklinde devir oluştursun (burada $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{2k+1}$). Böylece $x^{a_i} x^{a_{i+1}} \in E\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)$ $(1 \le i \le 2k)$ ve $x^{a_1} x^{a_{2k+1}} \in E\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)$, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in tanımından $x^{a_1} x^{a_j} \in E\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)$, $3 \le j \le 2k$ olur. Çünkü, $a_1 + a_j > a_1 + a_2 \ge n+1$ olur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla bu çelişki bize $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in hiçbir indüklenmiş alt grafının

en az 5 uzunluklu tek sayıda köşeye sahip devir içermeyeceğini gösterir. Lemma 4.4.9 dan $\Gamma\left(S_M^n\right)$ mükemmeldir. ■

Sonuç 4.4.11 Mükemmel grafların tamamlayıcıları da mükemmel olacağından (Lovász, 1972), $\Gamma\left(S_M^n\right)$ in tamamlayıcısı $\overline{\Gamma\left(S_M^n\right)}$ grafı da mükemmeldir.

5. MONOJENİK YARI GRUP GRAFLARININ TOPOLOJİK İNDEKSLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde 4. Bölüm de ayrıntılı bir şekilde tanıtılan monojenik yarı grup graflarının topolojik indeksleri sadece monojenik yarı grubun mertebesi ile ifade edilecektir.

Topolojik indeksler, graf teorinin diğer bilim dalları (özellikle de moleküler kimya) içindeki uygulamalardan ortaya çıkmıştır. Organik moleküllerin moleküler grafiğinden elde edilmiş ve belirli yapısal özelliklerini yansıtan ifadeler *moleküler yapı tanımlayıcıları* ya da genellikle *topolojik indeksler* olarak adlandırılırlar.

Topolojik indeksler kimya ve eczacılık biliminde önemli rol oynarlar. Maddelerin bağları, moleküllerin çeşitli uzaklıkları ve birbirini etkileme dereceleri farklı birer topolojik indekslerle verilebilir.

Topolojik indeksler genel manada dereceye bağlı olarak ya da uzaklığa bağlı olarak yazılan kesin formüller olarak ikiye ayrılır. Bizde bu çalışmamızda monojenik yarı grubun graflarının topolojik indekslerini iki temel kısma ayırıp vereceğiz.

Şimdi bu bölümde kullanacağımız, ispatların verilmesinde ve anlaşılmasında temel teşkil edecek algoritmamızı verelim.

Aşağıdaki algoritma ve temel sonuçlar (Akgunes ve ark., 2014) çalışmasının temel sonuçlarıdır.

5.1. Algoritma

Hesaplamalarımızda bazı basitleştirmeler yapmak ve topolojik indeksler için temel sonuçları elde etmek amacıyla, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ özel grafının 4. Bölüm de verilen tanımını kullanarak $\Gamma\left(S_M^n\right)$ üzerindeki köşelerin komşulukları hakkında aşağıdaki algoritmayı verebiliriz.

I_n : x^n köşesi, kendisi hariç tüm x^{i_1} lere ($1 \le i_1 \le n-1$) komşudur.

I_{n-1}: x^{n-1} köşesi kendisi hariç tüm x^{i_2} lere ($2 \le i_2 \le n-2$) ve x^n köşesine (I_n ilk adımında ki) komşudur.

I_{n-2}: x^{n-2} köşesi kendisi hariç tüm x^{i_3} lere ($3 \le i_3 \le n-3$), x^n köşesine (I_n ilk adımında ki) ve x^{n-1} köşesine (I_{n-1} ikinci adımında ki) komşudur.

Bu algoritmada ki adımları takip ederek, *n* nin tek ya da çift olmasına bağlı olan iki aşamanın sonunda iki ihtimale sahip oluruz:

<u>*n* çift ise:</u>

$I_{\frac{n}{2}+2}$: $x^{\frac{n}{2}+2}$ köşesi sadece $x^{\frac{n}{2}-1}$, $x^{\frac{n}{2}}$ ve $x^{\frac{n}{2}+1}$ köşelerine değil, aynı zamanda x^n (I_n adımında ki), x^{n-1} (I_{n-1} adımında ki), x^{n-2} (I_{n-2} adımında ki), $\cdots$, $x^{\frac{n}{2}+3}$ ($I_{\frac{n}{2}+3}$ adımında ki) köşelere de komşudur.

$I_{\frac{n}{2}+1}$: $x^{\frac{n}{2}+1}$ köşesi sadece $x^{\frac{n}{2}}$ köşesine değil, aynı zamanda x^n (I_n adımında ki), x^{n-1} (I_{n-1} adımında ki), x^{n-2} (I_{n-2} adımında ki), $\cdots$, $x^{\frac{n}{2}+2}$ ($I_{\frac{n}{2}+2}$ adımında ki) köşelere de komşudur.

<u>*n* tek ise:</u>

$I_{\frac{n+1}{2}+2}$: $x^{\frac{n+1}{2}+2}$ köşesi sadece $x^{\frac{n+1}{2}-2}$, $x^{\frac{n+1}{2}-1}$, $x^{\frac{n+1}{2}}$ ve $x^{\frac{n+1}{2}+1}$ köşelerine değil, aynı zamanda x^n (I_n adımında ki), x^{n-1} (I_{n-1} adımında ki), x^{n-2} (I_{n-2} adımında ki), $\cdots$, $x^{\frac{n+1}{2}+3}$ ($I_{\frac{n+1}{2}+3}$ adımında ki) köşelere de komşudur.

$I_{\frac{n+1}{2}+1}$: $x^{\frac{n+1}{2}+1}$ köşesi sadece $x^{\frac{n+1}{2}-1}$ ve $x^{\frac{n+1}{2}}$ köşelerine değil, aynı zamanda x^n (I_n adımında ki), x^{n-1} (I_{n-1} adımında ki), x^{n-2} (I_{n-2} adımında ki), $\cdots$, $x^{\frac{n+1}{2}+2}$ ($I_{\frac{n+1}{2}+2}$ adımında ki) köşelere de komşudur.

Alışılageldiği gibi, $d_1, d_2, \cdots, d_n$ sembolleri sırasıyla $\Gamma\left(S_M^n\right)$ deki $x, x^2, \cdots, x^n$ köşelerinin derecelerini tanımlasın. Şunu belirtmeliyiz ki *derece dizileri* gibi farklı isimler altında köşelerin dereceleriyle ilişkili çok fazla çalışma vardır. Aşağıdaki lemma, dereceler arasındaki $d_1 \leq d_2 \leq,...,\leq d_n$ sıralamasının varlığını doğrulayan bu konu ile doğrudan ilişkilidir. Bu önermenin ispatı, (Das, Akgunes ve Cevik, 2013) de bulunmasına rağmen, yukarıda ki etkili algoritma kullanılarak da kolay bir şekilde görülebilir.

Önerme 5.1.1 (Das, Akgüneş ve Çevik, 2013)

$$d_1 = 1,\ d_2 = 2, \cdots, d_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,\ d_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, d_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \cdots, d_n = n - 1. \quad (5.1.1)$$

Not 5.1.2 Dikkat edilirse, önerme 5.1.1 de

$$d_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = d_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}$$

şeklinde tekrar eden bir çift vardır. Bu yüzden köşe sayısı n olmasına rağmen son derece olan d_n, $n-1$ ile temsil edilir.

5.2. I. Durum: Köşelerin Derecelerini Temel Alan Sonuçlar

Bu ilk ana bölümde , *birinci Zagreb indeksi, ikinci Zagreb indeksi, Randic indeksi, Geometrik-Aritmetik indeksi* ve *Atom-bağ Bağlantılılık indeksi* göz önüne alınarak, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ üzerindeki köşelerin dereceleri temel alınarak bazı kesin sonuçlar ifade edilecektir. Bu yapılırken, Kısım 5.1 de tanımlanan algoritma ve Önerme 5.1.1 de verilen derece sıralaması temel olarak kullanılacaktır.

Tanım 5.2.1 *Birinci* ve *ikinci Zagreb indeksleri* sırasıyla

$$M_1(G) = \sum_{i \in V} d_i^2 \quad \text{ve}$$

$$M_2(G) = \sum_{ij \in E(G)} d_i d_j,$$

şeklinde tanımlanmıştır (Gutman ve Trinastic, 1972, Gutman ve ark. 1975).

İlk temel sonucumuz birinci ve ikinci Zagreb indeksleri le ilgili aşağıdaki teoremimizdir:

Teorem 5.2.2 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının birinci Zagreb indeksi

$$M_1\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = \begin{cases} \dfrac{4n^3 - 3n^2 + 2n}{12} & ; \quad n \quad \text{çift ise} \\ \dfrac{4n^3 - 3n^2 - 4n + 3}{12} & ; \quad n \quad \text{tek ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: (5.1.1) ve Not 5.1.2. yi göz önüne alalım. Birinci Zagreb indeksinin tanımından,

$$M_1\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=\sum_{x^i\in V} d_i^2 = 1^2+2^2+\cdots+\underbrace{\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)^2+\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)^2}_{\text{Not 5.1.2 den}}+\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)^2+\cdots+(n-1)^2$$

$$=1^2+2^2+\cdots+\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)^2+\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)^2+\cdots+(n-1)^2+\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)^2$$

$$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)^2.$$

Şimdi, $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ de n in teklik çiftlik durumuna bağlı olarak, istediğimiz sonucu elde etmiş oluruz. ■

Not 5.2.3 Yukarıda görüldüğü gibi, satırın sonuna yazılan ifadeyi yani $\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)^2$ ifadesini yeni toplamın sonuna yazmamız gerekir. Çünkü bu ifade sıra ile artarak devam eden derece dizisinin ortasındaki aynı ifadeden birisidir. O yüzden bu ifadenin biri genel toplam ifadesinin içine alınmışken biriside genelliği bozmaması açısından tüm toplamların sonuna yazılmıştır. Benzer yöntem aşağıdaki sonuçların ispatlarında da kullanılacaktır.

Teorem 5.2.4 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının ikinci Zagreb indeksi

$$M_2\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=\begin{cases}\dfrac{5n^4-8n^3+10n^2-4n}{48} & ; \quad n \text{ çift ise}\\ \dfrac{5n^4-8n^3-2n^2+8n-3}{48} & ; \quad n \text{ tek ise}\end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: Burada ki temel amaç, derecelerin toplam sayısına bağlı olarak $M_2\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)$ yi karakterize etmek olduğu için toplamı, farklı blokların toplamı olarak düşünmemiz ve sonra onların her birini ayrı ayrı hesaplamamız gerekir. Hesaplamalarımız sırasında, köşelerin derecelerine karar vermede çok sistematik bir yöntem sunduğu için Kısım 5.1

deki tanımlanan algoritmaya odaklanacağız. Ek olarak, Önerme (5.1.1) ve Not (5.1.2) yi kullanacağız.

Kabul edelim ki *n* çift olsun.

$$M_2\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = d_n d_1 + d_n d_2 + d_n d_2 + \cdots + d_n d_{n-2} + d_n d_{n-1} +$$

(I_n ile yazılan. Bu toplama J_n diyelim)

$$+ d_{n-1} d_2 + d_{n-1} d_3 + \cdots + d_{n-1} d_{n-2} +$$

(I_{n-1} ile yazılan. Bu toplama J_{n-1} diyelim)

$$+ \cdots +$$

$$+ d_{\frac{n}{2}+2} d_{\frac{n}{2}-1} + d_{\frac{n}{2}+2} d_{\frac{n}{2}} + d_{\frac{n}{2}+2} d_{\frac{n}{2}+1} +$$

($I_{\frac{n}{2}+2}$ ile yazılan. Bu toplama $J_{\frac{n}{2}+2}$ diyelim)

$$+ d_{\frac{n}{2}+1} d_{\frac{n}{2}}.$$

($I_{\frac{n}{2}+1}$ ile yazılan. Bu toplama $J_{\frac{n}{2}+1}$ diyelim)

Sonuç olarak, ikinci Zagreb indeksi

$$\sum_{ij \in E(G)} d_i d_j = J_n + J_{n-1} + \cdots + J_{\frac{n}{2}+2} + J_{\frac{n}{2}+1}$$

toplamı olarak yazılır.

Amacımıza ulaşmak için, bu ispatın başında belirtildiği gibi, her bir J_t ($\frac{n}{2}+1 \le t \le n$) yi ayrı ayrı araştırmaya ihtiyaç duyuyoruz. *n* çift sayı iken $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$ dir.

$$J_n = (n-1)1 + (n-1)2 + (n-1)3 + \cdots + \underbrace{(n-1)\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n-1)\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)}_{\text{Not 5.1.2}} + \cdots$$

$$\cdots + (n-1)(n-2).$$

Buradan da,

$$J_n = (n-1)1 + (n-1)2 + (n-1)3 + \cdots + (n-1)\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \cdots$$

$$\cdots + (n-1)(n-2) + (n-1)\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

$$= (n-1)(n^2 - 2n + 2)\frac{1}{2}$$

olduğunu elde ederiz.

J_n de olduğu gibi benzer argümanları uygulayarak, biz

$$J_{n-1} = (n-2)2 + (n-2)3 + \cdots + (n-2)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + (n-2)(n-3) + (n-2)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$
$$= (n-2)(n^2 - 4n + 4)\frac{1}{2},$$
$$J_{n-2} = (n-3)3 + \cdots + (n-3)(n-4) + (n-3)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = (n-3)(n^2 - 6n + 6)\frac{1}{2},$$
$$\vdots$$
$$J_{\frac{n}{2}+2} = \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right) + \left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$
$$= \left(n - \frac{n}{2} + 1\right)\left(n^2 - 2\left(\frac{n}{2}-1\right)n + 2\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)\frac{1}{2},$$

ve son olarak

$$J_{\frac{n}{2}+1} = \frac{n}{2}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}\frac{n}{2} = \left(n - \frac{n}{2}\right)\left(n^2 - 2\frac{n}{2}n + 2\frac{n}{2}\right)\frac{1}{2}.$$

Böylece,

$$J_n + J_{n-1} + \cdots + J_{\frac{n}{2}+2} + J_{\frac{n}{2}+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2}(n-k)(n^2 - 2kn + 2k)$$
$$= \frac{1}{48}(5n^4 - 8n^3 + 10n^2 - 4n).$$

<u>Kabul edelim ki *n* tek olsun:</u>

n nin çift olması durumunda ki adımları aynen uygulayarak, biz

$$J_n + J_{n-1} + \cdots + J_{\frac{n+1}{2}+2} + J_{\frac{n+1}{2}+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2}(n-k)(n^2 - 2kn + (2k-1))$$
$$= \frac{1}{48}(5n^4 - 8n^3 - 2n^2 + 8n - 3)$$

eşitliğini elde ederiz.

Böylece sonuç elde edilmiş olur. ■

Tanım 5.2.5. Randić indeks

$$Ran(G) = \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}},$$

dir. Burada $\sum_{i\sim j}$ toplamı v_i köşesinin derecesi d_i olacak şekilde v_i ve v_j şeklindeki tüm komşu köşe çiftleri üzerinde tanımlanmıştır. Randić indekse göre, aşağıdaki sonucu $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafları için verebiliriz. (Randić, 1975)

Teorem 5.2.6 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ *grafının Randić indeksi* aşağıdaki şekildedir:

$$Ran\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{\sqrt{n-i}}\sum_{k=i}^{n-i-1}\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\sqrt{n-i}} & ;\quad n\ çift\ ise\\ \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{n-i}}\sum_{k=i}^{n-i-1}\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{n-1}{2}}}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{n-i}} & ;\quad n\ tek\ ise\end{cases}.$$

İspat: Bu sonuçları kanıtlamak için $\Gamma\left(S_M^n\right)$ ve Randić indeksin tanımı da hesaba katılarak yukarıdaki teoremin ispatında ki metot uygulanacaktır.

<u>*n* nin tek olması durumu:</u>

$$Ran\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{d_nd_1}}+\frac{1}{\sqrt{d_nd_2}}+\frac{1}{\sqrt{d_nd_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{d_nd_{n-2}}}+\frac{1}{\sqrt{d_nd_{n-1}}}+$$

(I_n ile yazılan. Bu toplama R_n diyelim)

$$+\frac{1}{\sqrt{d_{n-1}d_2}}+\frac{1}{\sqrt{d_{n-1}d_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{d_{n-1}d_{n-2}}}+$$

($I_{n\text{-}1}$ ile yazılan. Bu toplam $R_{n\text{-}1}$ olsun)

$$+\cdots+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{d_{\frac{n+1}{2}+2}\,d_{\frac{n+1}{2}-2}}}+\frac{1}{\sqrt{d_{\frac{n+1}{2}+2}\,d_{\frac{n+1}{2}-1}}}+\frac{1}{\sqrt{d_{\frac{n+1}{2}+2}\,d_{\frac{n+1}{2}}}}+\frac{1}{\sqrt{d_{\frac{n+1}{2}+2}\,d_{\frac{n+1}{2}+1}}}$$

($I_{\frac{n+1}{2}+2}$ ile yazılan. Bu toplam $R_{\frac{n+1}{2}+2}$ olsun)

$$+\frac{1}{\sqrt{d_{\frac{n+1}{2}+1}\,d_{\frac{n+1}{2}-1}}}+\frac{1}{\sqrt{d_{\frac{n+1}{2}+1}\,d_{\frac{n+1}{2}}}}.$$

($I_{\frac{n+1}{2}+1}$ ile yazılan. Bu toplam $R_{\frac{n+1}{2}+1}$ olsun)

Böylece Randic indeksi

$$Ran\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=\sum_{i\sim j}\frac{1}{\sqrt{d_id_j}}=R_n+R_{n-1}+\cdots+R_{\frac{n+1}{2}+2}+R_{\frac{n+1}{2}+1}$$

toplamı şeklinde yazabiliriz.

Not 5.2.3 deki düşünceyi kullanarak, biz her bir $R_t(\frac{n+1}{2}+1 \le t \le n)$ yi ayrı ayrı hesaplayabiliriz. Biliyoruz ki *n* tek ise $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ dir.

O halde

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{(n-1)1}} + \frac{1}{\sqrt{(n-1)2}} + \frac{1}{\sqrt{(n-1)3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} + \ldots$$
$$\cdots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n-1)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{(n-1)\left(\frac{n-1}{2}\right)}}.$$

R_n de olduğu gibi benzer argümanlar kullanılarak, biz

$$R_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \sum_{k=2}^{n-3} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{(n-2)\left(\frac{n-1}{2}\right)}},$$

$$\vdots$$

$$R_{\frac{n+1}{2}+2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}},$$

elde ederiz ve son olarak

$$R_{\frac{n+1}{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)}}$$

yazılır. Böylece

$$R_n + R_{n-1} + \cdots + R_{\frac{n+1}{2}+2} + R_{\frac{n+1}{2}+1} = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-i}} \sum_{k=i}^{n-i-1} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{n-1}{2}}} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-i}}$$

elde edilmiş olur.

Ayrıca *n* nin tek olması durumundaki adımlar takip edilerek, *n* nin çift olması durumu için

$$R_n + R_{n-1} + \cdots + R_{\frac{n}{2}+2} + R_{\frac{n}{2}+1} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{\sqrt{n-i}} \sum_{k=i}^{n-i-1} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-i}}$$

elde edilir. Böylece tüm ispat tamamlanmış olur. ■

Bir graftaki kenarların son köşe noktasının dereceleriyle ilgilenen Randić indeksinin tanımı yardımıyla, Vukucević ve Furtula (Vukucević ve Furtula, 2009) *geometrik-aritmetik index* olarak isimlendirilen, ve GA ile temsil edilen yeni bir topolojik indeks sundular . Bu referansta gösterildiği gibi, entropi, buharlaşma entalpisi, buharlaşmanın standart entalpisi, formasyon entalpisi ve asentrik faktörü gibi fiziko-kimyasal özellikler için GA indeksinin tahmin gücü, Randić indeksinin tahmin gücünden biraz daha iyidir. Bununla beraber GA indeksi kavramı bizim üzerinde çalıştığımız $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafına değer katmaktadır.

Tanım 5.2.7 Herhangi basit bir G grafı için, geometrik-aritmetik indeks,

$$GA(G) = \sum_{i \sim j} \frac{2\sqrt{d_i d_j}}{d_i + d_j}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Şimdi vereceğimiz sonuç $\Gamma\left(S_M^n\right)$ üzerindeki GA indeksi hakkındadır.

Teorem 5.2.8 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının Geometrik-aritmetik indeksi,

$$GA\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = \begin{cases} 2\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{n-i} \sum_{k=i}^{n-i-1} \frac{\sqrt{k}}{n+k-i} + \sqrt{\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\sqrt{n-i}}{\frac{3}{2}n-i}\right) & ; \quad n \text{ çift ise} \\ 2\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n-i} \sum_{k=i}^{n-i-1} \frac{\sqrt{k}}{n+k-i} + \sqrt{\frac{n-1}{2}} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sqrt{n-i}}{\frac{3n-1}{2}-i}\right) & ; \quad n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: Yapmamız gereken sadece bir önceki teoremdeki hesaplamalarımızı buraya adapte etmektir. Yukarıdaki temel sonuçların ispatında olduğu gibi aynı yöntemleri takip edeceğiz.

<u>*n* çift sayı olsun:</u> Burada,

$$GA\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=\frac{2\sqrt{d_n d_1}}{d_n+d_1}+\frac{2\sqrt{d_n d_2}}{d_n+d_2}+\frac{2\sqrt{d_n d_3}}{d_n+d_3}+\cdots+\frac{2\sqrt{d_n d_{n-2}}}{d_n+d_{n-2}}+\frac{2\sqrt{d_n d_{n-1}}}{d_n+d_{n-1}}+$$

(I_n ile yazılan. Bu toplam GA_n olsun)

$$+\frac{2\sqrt{d_{n-1} d_2}}{d_{n-1}+d_2}+\frac{2\sqrt{d_{n-1} d_3}}{d_{n-1}+d_3}+\cdots+\frac{2\sqrt{d_{n-1} d_{n-2}}}{d_{n-1}+d_{n-2}}+$$

(I_{n-1} ile yazılan. Bu toplam GA_{n-1} olsun.)

$$+\cdots+$$

$$+\frac{2\sqrt{d_{\frac{n}{2}+2}\, d_{\frac{n}{2}-1}}}{d_{\frac{n}{2}+2}+d_{\frac{n}{2}-1}}+\frac{2\sqrt{d_{\frac{n}{2}+2}\, d_{\frac{n}{2}}}}{d_{\frac{n}{2}+2}+d_{\frac{n}{2}}}+\frac{2\sqrt{d_{\frac{n}{2}+2}\, d_{\frac{n}{2}+1}}}{d_{\frac{n}{2}+2}+d_{\frac{n}{2}+1}}+$$

($I_{\frac{n}{2}+2}$ ile yazılan. Bu toplam $GA_{\frac{n}{2}+2}$ olsun.)

$$+\frac{2\sqrt{d_{\frac{n}{2}+1} d_{\frac{n}{2}}}}{d_{\frac{n}{2}+1}+d_{\frac{n}{2}}}$$

($I_{\frac{n}{2}+1}$ ile yazılan. Bu toplam $GA_{\frac{n}{2}+1}$ olsun.)

Böylece Geometrik-aritmetik indeks,

$$\sum_{i\sim j}\frac{2\sqrt{d_i d_j}}{d_i+d_j}=GA_n+GA_{n-1}+\cdots+GA_{\frac{n}{2}+2}+GA_{\frac{n}{2}+1}.$$

toplamı olarak yazılır.

Daha öncede yaptığımız gibi, her bir $(\frac{n}{2}+1\le t\le n)$ için, bizim yapmamız gereken şey n çift sayı iken $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=\frac{n}{2}$ alarak GA_t yi ayrı ayrı hesaplamaktır.

$$GA_n=\frac{2\sqrt{(n-1)1}}{(n-1)+1}+\frac{2\sqrt{(n-1)2}}{(n-1)+2}+\cdots+\frac{2\sqrt{(n-1)\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}{(n-1)+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{2\sqrt{(n-1)(n-2)}}{(n-1)+(n-2)}+\frac{2\sqrt{(n-1)\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}{(n-1)+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}$$

$$=2\sqrt{n-1}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\sqrt{k}}{n+k-1}+\frac{2\sqrt{(n-1)\frac{n}{2}}}{(n-1)+\frac{n}{2}}$$

Benzer şekilde, diğer terimler için aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$GA_{n-1} = 2\sqrt{n-2}\sum_{k=2}^{n-3}\frac{\sqrt{k}}{n+k-2} + \frac{2\sqrt{(n-2)\frac{n}{2}}}{(n-2)+\frac{n}{2}},$$

$$GA_{n-2} = 2\sqrt{n-3}\sum_{k=3}^{n-4}\frac{\sqrt{k}}{n+k-3} + \frac{2\sqrt{(n-3)\frac{n}{2}}}{(n-3)+\frac{n}{2}},$$

dahası,

$$GA_{\frac{n}{2}+2} = \frac{2\sqrt{\left(n-\frac{n}{2}+1\right)\left(n-\frac{n}{2}-2\right)}}{\left(n-\frac{n}{2}+1\right)+\left(n-\frac{n}{2}-2\right)} + \frac{2\sqrt{\left(n-\frac{n}{2}+1\right)\left(n-\frac{n}{2}\right)}}{\left(n-\frac{n}{2}+1\right)+\left(n-\frac{n}{2}\right)} + \frac{2\sqrt{\left(n-\frac{n}{2}+1\right)\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}{\left(n-\frac{n}{2}+1\right)+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}.$$

Son olarak,

$$GA_{\frac{n}{2}+1} = \frac{2\sqrt{\left(n-\frac{n}{2}\right)\frac{n}{2}}}{\left(n-\frac{n}{2}\right)+\frac{n}{2}}$$

ifadesini elde ederiz.

Böylece,

$$GA_n + GA_{n-1} + \cdots + GA_{\frac{n}{2}+2} + GA_{\frac{n}{2}+1} = 2\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{n-i}\sum_{k=i}^{n-i-1}\frac{\sqrt{k}}{n+k-i} + \sqrt{\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\sqrt{n-i}}{\frac{3}{2}n-i}\right)$$

olur.

n nin çift olması durumunda olduğu gibi aynı adımlar uygulanarak, *n* nin bir tek doğal sayı olması durumu için aşağıdaki denklik elde edilir:

$$GA_n + GA_{n-1} + \cdots + GA_{\frac{n+1}{2}+2} + GA_{\frac{n+1}{2}+1} = 2\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n-i}\sum_{k=i}^{n-i-1}\frac{\sqrt{k}}{n+k-i} + \sqrt{\frac{n-1}{2}}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sqrt{n-i}}{\frac{3n-1}{2}-i}\right).$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Tanım 5.2.9 Bir $G=(V,E)$ bağlantılı grafı için,

$$ABC(G)=\sum_{i\sim j}\sqrt{\frac{d_i+d_j-2}{d_i d_j}}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye *atom-bağ bağlantılılık indeksi* denir.(Estrada ve ark., 1998)

Alkanların oluşumu ısı ile mükemmel bir korelasyon gösterir (Estrada ve ark., 1998). ABC indeks alkanların nitelik ve niceliklerini sınıflandırmada ve lineer enerjilerinin hesaplanmasında temel rol oynayan temel bir topolojik yaklaşımdır. (bak. (Estrada, 2008)). ABC indeksin sınırları için bugüne kadar çok sayıda çalışma literatüre kazandırılmıştır.

$\Gamma\left(S_M^n\right)$ üzerinde ABC indeks aşağıdaki teoremde verilmiştir. Bu teoremin ispatı da yukarıda verilen temel algoritmamız ve yöntemimizle kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 5.2.10 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının Atom-bağ bağlantılılık indeksi

$$ABC\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{\sqrt{n-i}}\sum_{k=i}^{n-i-1}\sqrt{\frac{n+k-i-2}{k}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{\frac{3}{2}n-i-2}{n-i}} & ; \quad n \text{ çift ise}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{n-i}}\sum_{k=i}^{n-i-1}\sqrt{\frac{n+k-i-2}{k}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{n-1}{2}}}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{\frac{3n-1}{2}-i-2}{n-i}} & ; \quad n \text{ tek ise}\end{cases}$$

dir.

5.3. II. Durum: Köşelerin uzaklığını temel alan sonuçlar

Bu ikinci temel alt bölümde, biz, *Wiener indeks, Harary indeks, birinci ve ikinci Zagreb eksantriklik indeksleri, eksantrik bağlantılılık indeks ve derece mesafesi* gibi kavramları düşünerek, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ üzerinde köşe mesafelerini temel alan bazı diğer kesin sonuçlar sunacağız.

Wiener indeksi kimya alnında büyük bir öneme sahiptir (Das, 2010). Wiener indeks graf temelli moleküler yapı tanımları çalışmalarında çokça kullanılan ve bunların en eskilerinden birisidir(bu yüzden topolojik indeks olarak isimlendirilir). Onun kimyasal uygulamalarının sayısı rapor edilmiştir (Rücker ve Rücker, 1999) ve onun matematiksel özellikleri oldukça iyi anlaşılmıştır (Das ve Gutman, 2010) ve (Wang, 2008) G grafının x^i *ve* x^j köşeleri arasındaki mesafe olan $d(x^i, x^j)$, x^i *ve* x^j bağlayan en kısa yolun uzunluğuna eşittir.

Tanım 5.3.1 G grafının *Wiener indeksi*

$$W = W(G) = \frac{1}{2} \sum_{\{x^i, x^j\} \subseteq V} d(x^i, x^j)$$

şeklindedir. (Wiener, 1947)

Aşağıdaki sonuç $\Gamma\left(S_M^n\right)$ üzerindeki Wiener indeksi hakkındadır.

Teorem 5.3.2 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının Wiener indeksi

$$W\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = \frac{3}{4} n(n-1) - \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

şeklindedir.

İspat:

$$\begin{aligned} W\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} d(x^i, x^j) \\ &= \frac{1}{2}[(2(n-2)+1) + (2(n-3)+2) + (2(n-4)+3) + \cdots \\ &\quad + (2(n-1-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + (2(n-1-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) \\ &\quad + \cdots + ((n-1-n+2)2 + n-2) + ((n-1-n+1)2 + n-1)] \\ &= \frac{3}{4} n(n-1) - \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

■

Bir G grafının *Harary indeksi* $H(G)$ olarak tanımlanmış ve Plavšić ve arkadaşları (Plavšić ve ark., 1993) ve Ivanciuc ve arkadaşları (Ivanciuc ve ark., 1993) tarfından bağımsız bir şekilde 1993 yılında tanıtılmıştır. Bu indeks Profesör Frank Harary' nin 70. doğum günü sebebiyle onun ismiyle anılmıştır. Harary indeksi karşılıklı mesafe matrisinde(reciprocal distance matrix) elemanların yarı-toplamı olarak tanımlanmış ve Harary matrisi olarak isimlendirilmiştir(Janejic ve ark., 2007). H nin matematiksel uygulamaları ve özellikleri halen merak uyandırmaktadır. (Örneğin, (Das ve ark, 2013), (Das ve ark, 2009), (Xu ve Das, 2011))

$\gamma\left(\Gamma\left(S_M^n\right),k\right)$, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının köşe çiftlerinin sayısı olsun burada k uzaklıktır. Bu durumda

$$H\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\gamma\left(\Gamma\left(S_M^n\right),k\right).$$

şeklindedir.

Gelecek sonuç $\Gamma\left(S_M^n\right)$ üzerindeki *Harary indeksi hakkındadır.*

Teorem 5.3.3 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının *Harary indeksi*

$$H\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=\frac{3n(n-1)}{4}+\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

şeklindedir.

İspat:

$$H\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)=(n-1)+\left((n-2)+\frac{1}{2}\right)+\left((n-3)+\frac{2}{2}\right)+\cdots+\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+(n-1-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)\frac{1}{2}\right)$$
$$+\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+(n-1-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(2+\frac{n-3}{2}\right)+\left(1+\frac{n-2}{2}\right)$$

$$=\frac{3n(n-1)}{4}+\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Zagreb eksantirik (Zagreb eccentricity) (E_1 ve E_2) indeksler kavramı çok yakın bir zamanda kimyasal graf teoride Ante Graovać ve diğerleri tarafından tanıtılmıştır (Ghourbani ve ark, 2010 ve Vukicevic ve Graovać, 2010). Bir G grafının, birinci Zagreb eksantrik (E_1) ve ikinci Zagreb eksantrik (E_2) indeksleri, G grafında,

$E(G)$ bir kenar ve e_i de x^i köşesinin bir eksantiriği olmak üzere,

$$E_1 = E_1(G) = \sum_{x^i \in V(G)} e_i^2 \text{ ve}$$
$$E_2 = E_2(G) = \sum_{x^i x^j \in E(G)} e_i \cdot e_j ,$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Teorem 5.3.4 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafında birinci Zagreb eksantirik (E_1) ve ikinci Zagreb eksantirik (E_2) indeksleri,

$$E_1\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = 4n-3 \quad \text{ve} \quad E_2\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = (n-1)(n-2) + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

şeklindedir.

İspat: x^n köşesi, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının tüm diğer köşelerine komşu olduğundan x^n nin köşe eksantiriği 1 $(e_n = 1)$ ve diğer köşelerin eksantiriği 2 dir $(e_i = 1,\ i = 1,2,.....,n-1)$. Böylece biz

$$E_1\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = 1 + 4(n-1) = 4n-3.$$

ifadesini elde ederiz.

Dahası, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ de köşelerin sayısı,

$$m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{2}\left(1+2+\cdots+(n-1)+\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$
$$= \frac{n(n-1)}{4} + \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

şeklindedir. Diğer bir ifadeyle,

$$E_2\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = (n-1)2 + \left[\frac{n(n-1)}{4} + \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (n-1)\right] \times 4$$
$$= (n-1)(n-2) + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

şeklindedir. ■

Bir $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının e*ksantrik bağlantılılık indeksi (eccentricity connectivity indeks)* (Sardana ve Madan, 2001 ve Gupta ve ark., 2002) $\xi^C\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)$ olarak gösterilir ve

$$\xi^C\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} d_i\, e_i,$$

Şeklinde tanımlanır. Burada x^i köşesinin derecesi d^i ve $\Gamma\left(S_M^n\right)$de x^iköşesinin eksantiriği e_i dir.

Eksantrik bağlantılılık indeks fiziksel ve biyolojik özellikler bakımından iyi bir kolerasyon sağlar(Madan ve Hureja, 2010).

Aşağıdaki teoremi $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının eksantirik connectivity indeksi için verebiliriz.

Teorem 5.3.5 (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafında eksantirik connectivity indeksi, aşağıdaki gibidir:

$$\xi^C\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = (n-1)^2 + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

İspat:

$$\xi^C\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot 2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot 2 + (\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1)\cdot 2$$
$$+ \cdots + (n-3)\cdot 2 + (n-2)\cdot 2 + (n-1)\cdot 1$$
$$= (n-1)^2 + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

■

Dobrynin, Kotchetova (Dobrynin ve Kotchetova, 1994) ve Gutman (Gutman, 1994), Wiener indeksinden daha hassas olan aşağıdaki yeni bir graf invaryantı sundular.

Tanım 5.3.6 $\Gamma\left(S_M^n\right)$ veriliyor, $x^i \in V\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)$ köşesinin derece uzaklığı $D_i' = d_i D_i$ şeklinde tanımlanır, burada x^i , d_i nin derecesidir ve

$$D_i = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} d(x^i,\ x^j)$$

şeklindedir.

$D'\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right)$ ile temsil edilen, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ nin derece uzaklığı,

$$D'\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} D_i^{'} = \sum_{i=1}^{n} d_i D_i = \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le n} d(x^i,\ x^j)(d_i + d_j).$$

şeklindedir.

Teorem 5.**3.7** (4.2.1) de verilen herhangi bir monojenik yarı grup S_M^n için, $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının derece mesafesi, aşağıdaki gibidir.

$$D'\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) = (2n-2-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{n(n-1)(4n-5)}{6}.$$

İspat: Derece mesafesi ve $\Gamma\left(S_M^n\right)$ grafının tanımını kullanırsak

$$
\begin{aligned}
D'\left(\Gamma\left(S_M^n\right)\right) &= (2n-3)+2(2n-4)+3(2n-5)+\cdots+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor(2n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2) \\
&\quad+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor(2n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2)+(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1)(2n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-3) \\
&\quad+\cdots+(n-3)(n+1)+(n-2)n+(n-1)^2 \\
&= \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor(2n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2)+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n+i-2) \\
&= (2n-2-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\frac{n(n-1)(4n-5)}{6}
\end{aligned}
$$

olduğunu elde ederiz böylece ispat tamamlanmış olur. ■

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu tezde çeşitli graf parametreleri, bazı cebirsel yapılar ve bu yapıların grafları ele alınmıştır. Öncelikle graf parametreleri tanıtılmıştır. Ayrıca sıfır-bölen grafların bazı graf parametreleri verilmiş, yakın zamanda tanımlanan düzensizlik(irregularty) indeks ile graf teoride önemli yere sahip olan radius kavramı için güçlü bir sınır verilmiştir.

Cebirsel yapıların özelliklerini incelemek soyut kavram oldukları için her zaman kolay olmamıştır. Bu gerçeği kolaylaştırmak için önemli bir cebirsel yapı olan yarı grupların bir takım sınıflarının grafları tanımlanmış ve graflar vasıtasıyla özellikleri incelemiştir. Sonucunda bu cebirsel yapının grafının mükemmel olduğu ortaya konmuştur. Bu ise bu çalışma için önemli bir yer teşkil etmektedir. Ayrıca bu grafın çeşitli özellikleri ortaya konmuştur.

Ayrıca tanımlanan bu grafın temel bilimlerde uygulaması çok fazla olan topolojik indeksleri ortaya konmuştur.

6.2 Öneriler

Verilen tanımlar, örnekler ve teoremler graf teori alanında çalışan ya da çalışmak isteyen araştırmacılar için iyi bir referans olur. Bizim tanımladığımız gibi bir grafı araştırmacılarda farklı matematiksel yapılar üzerinde farklı koşullar altında tanımlayıp özelliklerini inceleyebilir.

Ayrıca verilen özgün tanımlar ve yöntemlerden faydalanıp farklı parametreler üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Akbari, S., Maimani, H. R., Yassemi, S., 2003, When a Zero-Divisor Graph is Planar or a Complete r-Partite Graph, *Journal of Algebra* 270, 169-180.

Akgüneş, N. (2012, September). Analyzing special parameters over zero-divisor graphs. *In AIP Conference Proceedings* Vol. 1479, 390-393.

Akgunes, N., and Cevik, A. S., 2013, A new bound of radius of irregularity index, *Applied Math. Comput*. 219 (11), 5750-5753.

Akgunes, N., and Cevik, A. S., Das, K. C., 2014, Topological indices on a graph of monogenic semigroups, *Topics in Chemical Graph Theory*, 16(a), 3-20, *University of Kragujevac, Kragujevac*

Akgunes, N., Togan, M., 2012, Some graph theoretical properties over zero-divisor graphs of special finite commutative rings, *Adv. Studies Contemp. Math.* 22(2), 305-315.

Anderson, D. F., Badawi, A., 2008, On the Zero-Divisor Graph of a Ring, *Communications in Algebra* 36 (8), 3073-3092.

Anderson, D. F., Livingston, P. S., 1999, The Zero-divisor Graph of Commutative Ring, *J. Algebra* 217, 434-447.

Anderson, D. D., Naseer, M., 1991, Beck's coloring of a commutative ring, *J. Algebra* 159, 500-514.

Aouchiche, M., and Hansen, P., 2013, A survey of Nordhaus–Gaddum type relations. *Discrete Applied Mathematics*, 161(4), 466-546.

Beck, I., 1988, Coloring of Commutating Rings, *J. Algebra* 116, 208-226.

Berge, C., 1962 The Theory of Graphs and Its Applications, x+247 pp. *Wiley, New York Translated by Alison Doig Methuen & Co. Ltd.,* London

Bollobás, B., 1998, Modern Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, 184, *Springer*, New York.

Bondy, J. A., Murty U. S. R., 1976, Graph theory with applications. Vol. 290. *London: Macmillan*.

Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P., Thomas, R., 2006, The strong perfect graph theorem, *Ann. Math.,* 164, 51-229

Dankelmann, P., Entringer, R.C., 2000, Average distance, minimum degree and spanning trees, *J. Graph Theory* 33, 1–13.

Das, K. C., 2004, Maximizing the sum of the squares of the degrees of a graph, *Discrete Math.* 285, 57-66.

Das, K. C., 2010, Atom-bond connectivity index of graphs, Discrete Appl. Math. 158, 1181-1188.

Das, K. C., Akgunes, N., Cevik, A. S., 2013, On a graph of monogenic semigroup, *Journal of Inequalities and Applications*. 2013:44, 2013. Doi:10.1186/1029-242X-2013-44.

Das, K. C., Gutman, I., 2009, Estimating the Szeged index, *Appl. Math. Lett.* 22, 1680-1684

Das, K. C., Gutman, I., 2010, Estimating the Wiener index by means of number of vertices, number of edges, and diameter, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 64 (3), 647-660.

Das, K. C., Lee, D. W., Graovac, A., 2013, Some properties of the Zagreb eccentricity indices, *ARS Mathematica Contemporanea* 6, 117-125 .

Das, K. C., Trinajstić, N., 2011, Relationship between the eccentric connectivity index and Zagreb indices, *Comput. Math. Appl.* 62, 1758-1764.

Das, K. C., Xu, K., Cangul, I. N., Cevik, A. S., Graovac, A., 2013, On the Harary Index of Graph Operations, *Journal of Inequalities and Applications, SI: Recent Advances in General Inequalities*. DOI: 10.1186/1029-242X-2013-339.

Das, K. C., Xu, K., Gutman, I., 2013, On Zagreb and Harary indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 70 (1), 301-314.

Das, K. C., Yurttas, A., Togan, M., Cangul, I. N., Cevik, A. S., 2013, The Multiplicative Zagreb Indices of Graph Operations, *Journal of Inequalities and Applications*, 2013:90.

Das, K. C., Zhou, B., Trinajstić, N., 2009, Bounds on Harary index, *Journal of Mathematical Chemistry* 46 (4), 1377-1393.

DeMeyer, F. R., DeMeyer, L., 2005, Zero-Divisor Graphs of Semigroups, *J. Algebra* 283, 190-198.

DeMeyer, F. R., McKenzie, T., Schneider, K., 2002, The Zero-Divisor Graph of a Commutative Semigroup, *Semigroup Forum* 65, 206-214.

Dobrynin, A. A., Kochetova, A. A., 1994, Degree distance of a graph: A degree analogue of the Wiener index, *J. Chem. Inform. Comput. Sci.* 34, 1082-1086.

Doslic, T., Ghorbani, M., Hosseinzadeh, M. A., 2013, The relationships between Wiener index, stability number and clique number of composite graphs, *Bull. Malays. Math. Soc.* 36(1), 165-172.

Euler, L., 1953, Leonhard Euler and the Königsberg bridges, *Scientific American* 189, 66-70.

Dündar, P., 2001, Accessibility number and the neighbor-integrity of generalised Petersen graphs, *Neural Network World*, 2, 167-174.

Erdös, P., Pach, J., Pollack, R., Tuza, Z., 1989, Radius, diameter and minimum degree, *J. Combin. Theory B* 47, 73–79.

Estrada, E., 2008, Atom-bond connectivity and the energetic of branched alkanes, *Chem. Phys. Lett.* 463, 422-425.

Estrada, E., Torres, L., Rodríguez, L., Gutman, I., 1998, An atom-bond connectivity index: modelling the enthalpy of formation of alkanes, *Indian J. Chem. Sect. A* 37, 849-855.

Ghorbani, M., Hosseinzadeh, M. A., 2012, A new version of Zagreb indices, Filomat, 26, 93-100.

Gross, J.L., Yellen, J., 2004, Handbook of Graph Theory, *Chapman Hall*, CRC Press.

Gupta, S., Singh, M., Madan, A. K., 2002, Application of graph theory: relationship of eccentric connectivity index and Wiener's index with anti-inflammatory activity, *J. Math. Anal. Appl.* 266, 259-268.

Gutman, I., 1994, Selected properties of the Schultz molecular topological index, *J. Chem. Inform. Comput. Sci.* 34, 1087-1089.

Gutman, I., Polansky, O. E., 1986, Mathematical Concepts in Organic Chemistry, *Springer*, Berlin.

Gutman, I., Ruščić, B., Trinajstić, N., Wilcox, C. F., 1975, Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes, *J. Chem. Phys.* 62, 3399-3405.

Gutman, I., Trinajstić, N., 1972, Graph theory and molecular orbitals: Total π-electron energy of alternant hydrocarbons, *Chem. Phys. Lett*. 17, 535-538.

Harris, J., Jeffry L. H., and Michael J. M., 2008, Combinatorics and graph theory, *Springer*.

Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., Slater P. JB., 1998, Fundamentals of domination in graphs, Vol. 208, *CRC Press*.

Ivanciuc, O., Balaban, T. S., Balaban, A. T., 1993, Reciprocal distance matrix, related local vertex invariants and topological indices, *J. Math. Chem.* 12 , 309-318.

Janežič, D., Miličević, A., Nikolić, S., Trinajstić, N., 2007, Graph Theoretical Matrices in Chemistry Mathematical Chemistry Monographs No. 3, *University of Kragujevac, Kragujevac.*

Kim, B. M., Rho, Y., Song, B. C., Hwang, W., 2012, The maximum radius of graphs with given order and minimum degree, *Discr. Math.* 312, 207–212.

Krumme, D. W., Fragopoulou, P., 2001, Minimum eccentricity multicast trees, *Discr. Maths. Theory Comput. Sci*. 4, 157–172.

Kouider, M., Winkler, P., 1997, Mean distance and minimum degree, *J. Graph Theory* 25, 95–99.

Lai, H.-J., Liang, Y., Li, P., Xu, J., 2011, Degree sequences and graphs with disjoint spanning trees, *Discr. Appl. Math.* 159, 1447–1452.

Liu, Y., Liu, B., 2010, The spectral radius of bicycle graphs with prescribed degree equence, *Lin. Algebra Appl*. 433, 1015–1023.

Lovász, L., 1972, Normal hypergraphs and the weak perfect graph conjecture, *Discrete Math.* 2, 253-267.

Madan, A. K., Dureja, H., 2010, Eccentricity based descriptors for QSAR / QSPR, *In: Novel Molecular Structure Descriptors - Theory and Applications II.* Eds. I. Gutman, B. Furtula, University of Kragujevac 91-138.

Maden, A. D., Cevik, A. S., 2012, A generalization for the clique and independence numbers, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 23, 164-170.

Morgan, M. J., Mukwembi, S., Swart, H. C., 2011, On the eccentric connectivity index of a graph, *Discrete Math.*, 311(13), 1229-1234.

Mukwembi, S., 2012, A Note on Diameter and The Degree Sequence of a Graph, *Applied Mathematics Letters* 25, 175-178.

Plavšić, D., Nikolić, S., Trinajstić, N., Mihalić, Z., 1993, On the Harary index for the characterization of chemical graphs, *J. Math. Chem.* 12, 235-250.

Randić, M., 1975, On characterization of molecular branching, *J. Amer. Chem. Soc.* 97, 6609-6615.

Randić, M., 1979, Characterization of atoms, molecules and classes of molecules based on path enumerations, in: Proceeding of Bremen Konferenz zur Chemie), *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, vol. 7, pp. 5–64.

Rücker, G., Rücker, C., 1999, On topological indices, boiling points, and cycloalkanes, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* 39, 788-802.

Sabidussi, G., 1957, Graphs with given group and given graph-theoretical properties, *Canad. J. Math.* 9, 515-525 .

Sardana, S., Madan, A. K., 2001, Application of graph theory: relationship of molecular connectivity index, Wiener's index and eccentric connectivity index with diuretic activity, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 43, 85-98.

Sharma, P., Sharma, A., Vats, R.K., 2011, Analysis of Adjacency Matrix and Neighborhood Associated with Zero Divisor Graph of Finite Commutative Rings, *International Journal of Computer Applications* 14(3), 38-42.

Shetty, B. S., Lokesha, V., Ranjini, P. S., Das, K. C., 2012, Computing some Topological indices of smart polymer, *Digest Journal of Nanomaterials and Biostructures* 7 (3), 1097--1102.

Todeschini, R., Consonni, V., 2009, Molecular Descriptors for Chemoinformatics, *Wiley–VCH*, Weinheim.

Ostrand, P. A., 1973, Graphs with specified radius and diameter, *Discr. Math.* 4, 71–75.

Vukičević, D., Furtula, B., 2009, Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges. *J. Math. Chem.* 46, 1369-1376.

Vukičević, D., Graovac, A., 2010, Note on the comparison of the first and second normalized Zagreb eccentricity indices. *Acta Chim. Slov.* 57, 524-528 .

Wang, H., 2008, The extremal values of the Wiener index of a tree with given vertex degree sequence, *Discrete Appl. Math.* 156, 2647-2656.

Wiener, H., 1947, Structural determination of para±n boiling points. *J. Am. Chem. Soc.* 69, 17-20.

Vizing, V. G., 1963, The Cartesian product of graphs, *Vycisl. Sist*. 9, 30-43 (in Russian)

Wright, S. E., 2007, Lengths of paths and cycles in zero-divisor graphs and digraphs of semi-groups. *Commun. Algebra* 35, 1987-1991.

Xu , K., Das, K. C., 2011, On Harary index of graphs. *Discrete Applied Math.* 159, 1631-1640.

Xu, J. M., Yang, C., 2006, Connectivity of Cartesian product graphs. *Discrete Math.* 306(1), 159-165.

Yuan, Y., Zhou, B., Trinajstić, N., 2010 On geometric-arithmetic index. J. Math. Chem. 47, 833-841.

Zhou, B., Xing, R., 2011, On atom-bond connectivity index, *Z. Naturforsch. A,* 66, 61-66 .

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : NihatAkgüneş
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Doğanhisar - 01.10.1985
Telefon : 05063284752
Faks : -
e-mail : nihatakgunes@gmail.com, nakgunes@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Akşehir Y.D.A.Lisesi, Akşehir, Konya**	**2003**
Üniversite	:	**Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas**	**2008**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Konya**	**2010**
Doktora	:	**Selçuk Üniversitesi, Konya**	**2013**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2008-2008	**Derbent Ç.P.Lisesi**	**Matematik Öğret.**
2008-	**Selçuk Üniversitesi**	**Araştırma Görevlisi**

UZMANLIK ALANI: Cebir ve Sayılar teorisi

YABANCI DİLLER: İngilizce

İLGİ ALANLARI: Cebirsel Yapılar, Graf Teori ve Uygulamaları

YAYINLAR

Akgüneş, N., 2012, Analyzing special parameters over zero-divisor graphs. *In AIP Conference Proceedings* Vol. 1479, p. 390. (ISI) **(Doktora tezinden yapılmıştır.)**

Akgunes, N., and Cevik, A. S., 2013, A new bound of radius of irregularity index, *Applied Math. Comput*. 219 (11), 5750-5753. (ISI) **(Doktora tezinden yapılmıştır.)**

Akgunes, N., and Cevik, A. S., Das, K. C., Topological indices on a graph of monogenic semigroups, *Topics in Chemical Graph Theory*, 16(a), 3-20, *University of Kragujevac, Kragujevac*. **(Doktora tezinden yapılmıştır.)**

Das, K. C., **Akgunes, N**., Cevik, A. S., 2013, On a graph of monogenic semigroup, *Journal of Inequalities and Applications*. 2013:44, 2013. Doi:10.1186/1029-242X-2013-44. (ISI) **(Doktora tezinden yapılmıştır.)**

Akgunes, N., Das, K. C., Cevik, A. S., & Cangul, I. N., 2013, Some properties on the lexicographic product of graphs obtained by monogenic semigroups.*Journal of Inequalities and Applications*, 2013(1), 1-9. (ISI)

Akgunes, N., Kurbanlı, A. S., On the system of rational difference equations $x_n = f\left(x_{n-a_1}, y_{n-b_1}\right)$, $y_n = g\left(y_{n-b_2}, z_{n-c_1}\right)$, $z_n = h\left(z_{n-c_2}, x_{n-a_2}\right)$," *Selcuk Journal of Applied Math.* (Kabul edildi) **(Yüksek lisans tezinden yapılmıştır.)**

Akgunes, N., Togan, M., 2012, Some graph theoretical properties over zero-divisor graphs of special finite commutative rings, *Adv. Studies Contemp. Math.* 22(2), 305-315.