



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİNDEKİ GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Nesibe ACAR

YÜKSEK LİSANS

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2013

KONYA

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİNDEKİ GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Nesibe ACAR

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2013, 62 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Yrd. Doç. Dr. M. Emir KÖKSAL

Bu tez J. Rimas' ın (2005-2006) yılları arasındaki matris kuvvetleriyle ilgili makalelerindeki teorem ve ispatlarından derlenmiş bir çalışmadır. Bu çalışmada öncelikle bazı tridiagonal ve simetrik matrislerin öz değerleri ve öz vektörleri hesaplanmıştır. Daha sonra bu matrislerin dönüşüm matrisleri bulunup, matrislerin $n = 2p$ ve $n = 2p+1$ $(p \in \mathbb{N})$ için kuvvetlerinin Chebyshev polinomlarıyla genel bir ifadesi verilmiştir. Son bölümde ise nümerik örneklere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Chebyshev Polinomları, Özvektör, Özdeğer, Sirkülant Matris, Tridiagonal Matris

ABSTRACT

MS THESIS

DELAY DIFFERENTIAL EQUATION AND SOLUTIONS IN THE AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

Nesibe ACAR
THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2013, 62 Pages

Jury
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Yrd. Doç. Dr. M. Emir KÖKSAL

This thesis is compiled from the theorems and the proofs in the papers on matrix powers between the years 2004-2006 which belongs to J. Rimas. It has been first computed the eigenvalues and eigenvectors of some tridiagonal and symmetric matrices. Then, the transforming matrices of these matrices have been found and the powers of these matrices for $n = 2p$ and $n = 2p+1$ ($p \in \mathbb{N}$) have been established in terms of Chebyshev polynomials. As a final section, numerical examples have been given.

Keywords: Chebyshev Polynomials, Eigenvalues, Eigenvectors, Circulant Matrix, Tridiagonal Matrix

ÖNSÖZ

OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİNDEKİ GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ adlı bu çalışma, Selçuk üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Prof. Dr. Durmuş BOZKURT danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezimizde kullandığımız temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde, alınan tridiagonal bir matrisin l–inci kuvveti hesaplanmıştır. Üçüncü bölümde, alınan simetrik bir matrisin l–inci kuvveti hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde ise nümerik örnekler verilmiştir.

Çalışmayı hazırlama sürecinde bilgi ve tecrübelerini sonuna kadar benimle paylaşan danışman hocam sayın Prof. Dr. Durmuş BOZKURT' a saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca bu süreçte benden manevi desteğini esirgemeyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Nesibe ACAR
KONYA-2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Amaç ve Kapsam 1

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **2**

3. TEMEL KAVRAMLAR **4**

4. BAZI ÖZEL TİPTEKİ MATRİSLERİN POZİTİF KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI **12**

4.1. Tridiagonal Matrisin Pozitif Kuvvetlerinin Hesabı 12
4.1.1. Üçlü bant (tridiagonal) matrisler (Zhang, 1961) 12
4.2. Simetrik Sirkülant matrisin pozitif kuvvetleri 24

5. NÜMERİK ÖRNEKLER **47**

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **51**

KAYNAKLAR **52**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	: doğal sayılar kümesi
A	: alınan özel bir tridiagonal matris
λ_i	: herhangi bir matrisin *i*. öz değeri
x_i	: herhangi bir matrisin *i*. öz vektörü
λ^l	: öz değerin *l*. kuvveti
$\det(A)$	: A matrisinin determinantı
B	: alınan özel bir simetrik sirkülant matris
T	: bir matrisin dönüşüm matrisi
T^{-1}	: dönüşüm matrisinin tersi
A^l	: A matrisinin *l*. kuvveti
A^T	: A matrisinin transpozesi
π	: permütasyon matris
C	: c_{ij} elemanlarına sahip genel bir n-kare sirkülant matris
$C_R(a)$	: a_{ij} elemanlarına sahip genel bir n-kare sağ sirkülant matris
$C_L(a)$	: a_{ij} elemanlarına sahip genel bir n-kare sol sirkülant matris
$S_R(a)$	: a_{ij} elemanlarına sahip genel bir n-kare ters sağ sirkülant matris
$S_L(a)$	: a_{ij} elemanlarına sahip genel bir n-kare ters sol sirkülant matris
$T_n(x)$	: birinci tür Chebyshev polinomu
$U_n(x)$	: ikinci tür Chebyshev polinomu
$diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$	: öz değerlerin köşegen matrisi

1. GİRİŞ

Hayatımızın birçok yerinde teknolojik sistemler vardır. Bu sistemler bizim hayatımızı kolaylaştırmakta, bize faydalı ve yardımcı olmaktadır. Bundan dolayı teknolojinin gelişmesi hızla artmaktadır. Bu gelişme aynı zamanda kontrol sistemlerinin de gelişmesi demektir.

Sistem, özel bir görevi yapmak üzere, aralarında belirli ilişkiler ve etkileşimler bulunan nesneler ve donanımların bir bütün oluşturacak biçimde bir araya gelmesidir. Kontrol, sistemleri belirli bir duruma yönlendirme, işleyişine ve gidişatına müdahale etmektir. Otomatik kontrol sistemleri ise bir sistemin gidişini ve yönetimini otomatikleştirmek, verilen referanslara göre sistemin otomatik olarak işlemesini sağlamaktır.

Bazı kurumlar, özel kuruluşlar, tesisler ve fabrikalar sistemlerini ve işleyiş biçimini bir otomatik kontrol üzerine entegre etmişlerdir. Bu entegre sonucunda üretim kalitesi ve verimlilik artmaktadır. Böylece sistematik çalışmanın verdiği faydalardan yararlanılmaktadır.

Bu sistemlere örnek olarak elektriksel sistemler, mekanik sistemler, elektromanyetik sistemler, uzaktan kontrollü sistemler, endüstriyel sistemler ve foto-elektrik sistemler verilebilir. Bu sistemlerin işleyişinde kullanılan diferansiyel denklemlerin çözümünde matris kuvvetleri ile karşılaşılmaktadır. Bu nedenle matris kuvvetlerinin hesaplanması önemlidir.

1.1. Amaç ve Kapsam

Bazı diferansiyel fark ve gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kare matrislerin pozitif kuvvetlerinin hesabı ile karşılaşılmaktadır. Matrislerin kuvvetleri üzerine Jonas Rimas' ın birçok çalışması vardır. Bu çalışmada tridiagonal bir matris ile simetrik sirkülant bir matrisin $n = 2p$ ve $n = 2p+1$ $(p \in \mathbb{N})$ mertebeleri için l-inci kuvveti hesaplanmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Rimas (2004), *"Analysis of a Multidimensional Delay System"* isimli çalışmasında çok boyutlu gecikmeli sistemin işleyişi analiz edilmiştir. Bu analizler matrisin iz vektör ve öz değerlerinin kullanımı üzerine temellendirilmiştir.

Rimas (2005), *"On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order tridiagonal matrices with zero row-I"* isimli çalışmasında $n = 2p+1$ $(p \in \mathbb{N})$ mertebesi için ilk satırı sıfır olan tridiagonal bir matrisin l. $(l \in \mathbb{N})$ kuvvetinin genel ifadesini vermiştir.

Rimas (2005), *"On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order tridiagonal matrices with zero row-I"* isimli çalışmasında $n = 2p$ $(p \in \mathbb{N}, p \geq 2)$ mertebesi için ilk satırı sıfır olan tridiagonal bir matrisin l. $(l \in \mathbb{N}, l \geq 2)$ kuvvetinin genel ifadesini vermiştir.

Rimas (2005), *"On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order symmetric circulant matrices-I"* isimli çalışmasında $n = 2p+1$ $(p \in \mathbb{N})$ mertebeli simetrik sirkülant bir matrisin l. $(l \in \mathbb{N})$ kuvvetinin genel ifadesini vermiştir.

Rimas (2005), *"On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order symmetric circulant matrices-II"* isimli çalışmasında $n = 2p+1$ $(p \in \mathbb{N})$ mertebeli simetrik sirkülant bir matrisin l. $(l \in \mathbb{N})$ kuvvetinin genel ifadesi türetilmiştir. Matrisin Jordan formu, öz vektörleri, dönüşüm matrisi ve dönüşüm matrisinin tersi verilmiştir.

Rimas (2006), *"On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order symmetric circulant matrices-I"* isimli çalışmasında $n = 2p$ $(p \in \mathbb{N}, p \geq 2)$ mertebeli simetrik sirkülant bir matrisin l. $(l \in \mathbb{N}, l \geq 2)$ kuvvetinin genel ifadesini vermiştir.

Rimas (2006), *"On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order symmetric circulant matrices-II"* isimli çalışmasında $n = 2p$ $(p \in \mathbb{N}, p \geq 2)$ mertebeli simetrik sirkülant bir matrisin l. $(l \in \mathbb{N}, l \geq 2)$ kuvvetinin genel ifadesi türetilmiştir. Matrisin Jordan formu, öz vektörleri, dönüşüm matrisi ve dönüşüm matrisinin tersi verilmiştir.

Rimas (2006), *"On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order tridiagonal matrices with zero row-II"* isimli çalışmasında $n = 2p + 1$ $(p \in \mathbb{N})$ mertebeli ilk satırı sıfır olan tridiagonal bir matrisin l. $(l \in \mathbb{N})$ kuvvetinin genel ifadesi türetilmiştir. Matrisin Jordan formu, öz vektörleri, dönüşüm matrisi ve dönüşüm matrisinin tersi verilmiştir.

Kıyak ve Ark. (2010), "*A Formula for computing integer powers for one type of tridiagonal matrix"* isimli çalışmasında tridiagonal bir matrisin $r.(r \in \mathbb{N})$ kuvvetinin genel ifadesi türetilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızın 4. bölümünde faydalanacağımız bazı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 3.1 (Bozkurt ve ark., 2005) A ve B herhangi iki kare matris olsun.

$B = P^{-1}AP$

olacak şekilde P düzgün (tersi olan) matrisi varsa A ve B matrislerine *benzer matrisler*, P'ye *dönüşüm (benzerlik) matrisi* denir.

Teorem 3.1 (Bozkurt ve ark., 2005) A herhangi bir n-kare matris olsun. A matrisi $\lambda_i (1 \le i \le n)$ öz değerlerine karşılık

$(A - \lambda_i I)x_i = 0, \qquad x_i \neq 0$

denklemini sağlayan $x_1, x_2, ..., x_n$ şeklinde n tane lineer bağımsız öz vektöre sahip olsun.

$$P = [x_1, x_2, ..., x_n], \quad \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$P^{-1}AP = \Lambda$ veya $A = P\Lambda P^{-1}$

dir.

İspat. $1 \le i \le n$ için

$Ax_i = \lambda_i x_i$

olduğundan A matrisi ile P matrisini çarparsak;

$$\begin{aligned} AP &= A[x_1, x_2, ..., x_n] \\ &= [Ax_1, Ax_2, ..., Ax_n] \\ &= [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x, ..., \lambda_n x_n] \\ &= P\Lambda \end{aligned}$$

elde edilir. P matrisinin sütun vektörleri lineer bağımsız olduğundan $\det P \neq 0$ olup P^{-1} vardır. Bu durumda elde edilen $AP = P\Lambda$ eşitliği soldan P^{-1} ile çarpılırsa; $P^{-1}AP = \Lambda$ sağdan P^{-1} ile çarpılırsa da ; $A = P\Lambda P^{-1}$ elde edilir.

Teorem 3.2 (Bozkurt ve Ark., 2005) A köşegenleştirilebilen bir kare matris ise herhangi bir pozitif k tamsayısı için

$A^k = P\Lambda^k P^{-1}$

dir.

İspat. A köşegenletirilebilir olduğundan $A = P\Lambda P^{-1}$ olacak şekilde P düzgün matrisi vardır. k tane $P\Lambda P^{-1}$ matrisini çarpım şeklinde yazarsak;

$$A^k = \underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})...(P\Lambda P^{-1})}_{k \text{ tane}}$$

olur. Sonuç olarak $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$ elde edilir.

Tanım 3.2 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$; A n-kare matrisinin öz değerleri olmak üzere

$J = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

matrisine A'nın *Jordan formu* denir.

Yani,

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

şeklindeki matris bir *Jordan* bloğudur.

Tanım 3.4 (Karner ve ark., 2003) $a \in R^n$ ve $a = (a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1})^T$

$$C_R(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrise *sağ* (basit) *sirkülant* matris denir. Bu matriste her bir satır sağa kayarak devreder.

Tanım 3.5 (Karner ve ark., 2003)

$$C_L(a)=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & & a_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrise *sol sirkülant* (yada anti sirkülant veya (-1) sirkülant) matris denir. Her bir satır soldan yukarıdaki satırın bir kaydırılmışıdır.

Tanım 3.6 (Karner ve ark., 2003)

$$S_R(a)=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

matrisine *ters sağ sirkülant* matrisi denir. Ters sağ sirkülant aynı zamanda (-1) *çarpan sirkülant* matrisidir.

Tanım 3.7 (Karner ve ark., 2003)

$$S_L(a)=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & & -a_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & -a_0 & \cdots & -a_{n-2} \end{bmatrix}$$

matrisine *ters sol sirkülant* matris denir.

Teorem 3.3 (Karner ve ark., 2003) A ve B sirkülant matrisleri (sağ, sol, ters sağ, ters sol):

i) $A+B$ ve $A-B$ sirkülanttır,

ii) A^T sirkülanttır,

iii) AB sirkülanttır,

iv) αA sirkülanttır,

v) $\sum_{i=0}^{k} c_i A^k$ sirkülanttır,

vi) Ters sol sirkülant matris simetriktir,

özelliklerini sağlar.

Tanım 3.8 (Davis, 1979) $circ(c_1, c_2, ..., c_n)$ 'nin determinantı; değişkenleri $c_1, c_2, ..., c_n$ olan *n*-inci dereceden bir homojen polinomdur.

Sirkülant matrislerin determinantlarının hesabı için basit formüller yoktur. İlk dört durumun;

$n = 1$ *için* $\det circ(c_1) = c_1$

$n = 2$ *için* $\det circ(c_1, c_2) = c_1^{\,2} - c_2^{\,2}$

$n = 3$ *için* $\det circ(c_1, c_2, c_3) = c_1^{\,3} + c_2^{\,3} + c_3^{\,3} - 3c_1c_2c_3$

$n = 4$ *için* $\det circ(c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1^{\,4} - c_2^{\,4} + c_3^{\,4} - c_4^{\,4} - 2c_1^{\,2}(c_3^{\,2} + 2c_2c_4)$
$+ 4c_1(c_2^{\,2}c_3 + c_3c_4^{\,2}) + 2c_2^{\,2}c_4^{\,2} - 4c_2c_3c_4$

olduğunu görürüz.

Teorem 3.4 (Davis, 1979) $n \times n$ tipinde bir A matrisinin sirkülant matris olması için gerek ve yeter şart

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

permütasyon matrisi olmak üzere

$A\pi = \pi A$

şartının sağlanmasıdır.

Sonuç 3.1 (Davis, 1979) A matrisinin sirkülant olması için gerek ve yeter şart A^* matrisinin de sirkülant olmasıdır.

Sonuç 3.2 (Davis, 1979) A ve B, $n \times n$ tipinde sirkülant matrisler ise AB matrisi de sirkülanttır.

Ayrıca aynı mertebeli sirkülant matrisler değişmelidir. Dolayısıyla bu özellik ve Sonuç 3.1' den sirkülant matrislerin normal olduğu sonucuna varılabilir. Yani, A sirkülant matris ise $AA^* = A^*A$ şartı sağlanır.

Tanım 3.9 (Fox ve Parke, 1968) $x = \cos\theta$ olmak üzere,

$T_n(x) = \cos(n\theta) = \cos(n \arccos x)$

şeklinde tanımlanan *n*-inci dereceden polinoma *birinci tür chebyshev polinomu* denir. Bu polinom $T_0(x) = 1$ ve $T_1(x) = x$ başlangıç koşulları olmak üzere $n \geq 2$ tamsayıları için

$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Ayrıca $x = \cos\theta$ olmak üzere

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left\{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\right\}$$

eşitliği de *birinci tür Chebyshev polinomunu* verir. Birinci tür Chebyshev polinomlarının ilk beş tanesi;

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^3 + 1$

şeklindedir.

Tanım 3.10 (Fox ve Parke, 1968) $x = \cos\theta$ olmak üzere,

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}$$

şeklinde tanımlanan *n*- inci dereceden polinoma *ikinci tür Chebyshev polinomu* denir.

$U_o(x) = 1$ $U_1(x) = 2x$ başlangıç koşulları olmak üzere $n \geq 2$ tamsayıları için

$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$

rekürans bağıntısı ile ikinci tür Chebyshev polinomu tanımlanır. Ayrıca $x = \cos\theta$ olmak üzere

$$U_n(x) = \frac{1}{2}\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

eşitliği de ikinci tür Chebyshev polinomunu verir.

İkinci tür Chebyshev polinomlarının ilk beş tanesi,

$U_0(x)=1$
$U_1(x)=2x$
$U_2(x)=4x^2-1$
$U_3(x)=8x^3-4x$
$U_4(x)=16x^4-12x^2+1$

şeklindedir.

Tanım 3.11 (Fox ve Parke, 1968) Birinci ve ikinci tür Chebyshev polinomları arasında

$$T_n(x)=\frac{1}{2}(U_n(x)-U_{n-2}(x))$$

$$T_{n+1}(x)=xT_n(x)-(1-x^2)U_{n-1}(x)$$

$$T_n(x)=U_n(x)-U_{n-1}(x)$$

$$T_n(-x)=(-1)^k T_n(x)$$

$$U_n(-x)=(-1)^k U_n(x)$$

bağıntıları mevcuttur.

Tanım 3.12 (Agarwal, 1962) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ ile tanımlanan f fonksiyonu yardımıyla *birinci mertebeden fark denklemi*

$$f(n,y_n,y_{n+1})=0$$

ifadesiyle verilir. Benzer şekilde *m- inci mertebeden fark denklemi*

$$f(n,y_n,y_{n+1},...,y_{n+m})=0$$

ifadesiyle verilir.

Bir fark denkleminin mertebesi; *y'* nin en büyük indisi ile en küçük indisi arasındaki farka eşittir. Fark denkleminin mertebesi ile homojen fark denklemin çözümünden gelecek olan sabitlerin sayısı aynıdır. Birinci mertebeden

$$ay_{n+1}+by_{n+1}=f(n),\qquad a,b\in\mathbb{R}$$

fark denklemini ele alalım. Eğer $f(n)$ fonksiyonu doğrusal (lineer) ise fark denklemine lineer, aksi takdirde fark denklemine *lineer olmayan fark denklemi* adı verilir. Eğer $f(n)=0$ ise fark denklemine *homojen fark denklemi*, $f(n)\neq 0$ ise fark denklemine *homojen olmayan fark denklemi* adı verilir.

Örnek 3.1 $y_{n+2} = 7y_{n+1} - 6y_n + n$ fark denklemi ikinci mertebeden homojen olmayan lineer bir fark denklemidir.

Homojen fark denklemlerinin çözümü

k-ıncı mertebeden

$$a_1 y_{n+k} + a_2 y_{n+k-1} + ...a_{k+1} y_n = 0, \qquad (a_1, a_2, ..., a_{k+1} \in \mathbb{R})$$

homojen fark denklemini ele alalım. Bu denklemde

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha^0, \\ y_{n+1} &= \alpha^1, \\ y_{n+2} &= \alpha^2, \\ &\vdots \\ y_{n+k} &= \alpha^k, \end{aligned} \tag{3.1}$$

alarak α'ya bağlı bir denklem elde ederiz. Daha sonra bu denklemin kökleri $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ olarak bulunur. Bulunan bu köklere göre eğer $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq ... \neq \alpha_k$ ise (3.1) fark denklemin çözümü ($c_1, c_2, ..., c_k$ sabit olmak üzere);

$$y_n = c_1(\alpha_1)^n + c_2(\alpha_2)^n + ... + c_k(\alpha_k)^n \tag{3.2}$$

şeklinde olur.

Eğer bu köklerin bazıları birbirine eşitse; örneğin $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$, $\alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9$,… olması halinde fark denklemin çözümü ;

$$y_n = (c_1 n + c_2)(\alpha_1)^n + (c_3 n^2 + c_4 n + c_5)(\alpha_3)^n + ... + (c_6 n^3 + c_7 n^2 + c_8 n + c_9)(\alpha_6)^n + ... \tag{3.3}$$

şeklindedir. Verilen iki durumun bir arada olması halinde örneğin α_1 tek katlı, $\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_5$, α_7 tek katlı, ise fark denklemin çözümü;

$$y_n = c_1(\alpha_1)^n + (c_2 n + c_3)(\alpha_2)^n + ... + (c_4 n^2 + c_5 n + c_6)(\alpha_4)^n + ... + c_7(\alpha_7)^n + ... \tag{3.4}$$

olur.

Örnek 3.2 $y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0$ homojen fark denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm. Bu denklemin karakteristik denklemi $\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$ şeklinde yazılıp, kökleri $\alpha_1 = -2$ ve $\alpha_2 = 3$ olarak bulunur. Buradan genel çözüm $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olduğundan,

$$y_k = c_1 3^k + c_2(-2)^k$$

olarak bulunur.

$k=0$ *için* $c_1+c_2=0=y_0$

$k=1$ *için* $3c_1-2c_2=-5=y_1$

denklemleri elde edilir. Buradan, $c_1=-1$, $c_2=1$ sabitleri bulunur. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa, genel çözüm,

$y_k=-3^k+(-2)^k$

şeklinde bulunur.

4. BAZI ÖZEL TİPTEKİ MATRİSLERİN POZİTİF KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI

Bazı diferansiyel fark ve gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kare matrislerin pozitif kuvvetlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu denklemlere örnek olarak;

$D_x(t) = B_0(t) + B_1(t-\tau) + Z(t)$

verilebilir (Rimas, 2004). Buradaki D türev operatörü, τ gecikme sabiti, E n mertebeli birim matris ve κ sürtünme katsayısı olmak üzere $B_0 = -\kappa E$ ve $B_1 = \frac{\kappa}{2} B$ 'dir. B matrisi simetrik sirkülant bir matristir.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu denklemin çözümü;

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{L} (\frac{\kappa}{2})^l \frac{1}{(p+k)^{l+1}} e^{-pi\tau} B^l Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau$$

Şeklindedir (Rimas, 1977). Bu şekilde karşımıza çıkan B' nin kuvvetlerini formülüze etmeye çalışacağız.

Bu kısımda seçilmiş tridiagonal ve simetrik sirkülant bir matrisin $n=2p$ ve $n=2p+1$ ($p \in \mathbb{N}$) mertebeleri için pozitif kuvvetlerini hesaplayacağız.

4.1. Tridiagonal Matrisin Pozitif Kuvvetlerinin Hesabı

4.1.1. Üçlü bant (tridiagonal) matris (Zhang, 1961)

A n-kare matris olsun. A matrisin elemanları $|i-j|>1$ iken 0 ise A matrisine *tridiagonal matris* denir. Bir tridiagonal matris

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.1.1 $n=2p+1$ ve $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

tridiagonal matrisin ℓ ($\ell\in\mathbb{N}$)-inci kuvveti

$$\alpha_j=\begin{cases} 0, & if \quad j\neq 1, \\ 1, & if \quad j=1, \end{cases} \quad \text{ve} \quad p_{ij}=\begin{cases} 0, & if \quad i=1, \\ \dfrac{1}{2}, & if \quad i\neq 1, \quad j=n, \\ 1, & if \quad i\neq 1 \quad and \quad j\neq n, \end{cases}$$

için

$$q_{ij}(l)=\left[1+(-1)^{l+i+j}\right]p_{ij}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\lambda_k^{l-\alpha_j}\lambda_{\frac{n+1}{2}-k}^{2}U_{i-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{j-2+\alpha_j}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

olmak üzere

$$A^l=TJ^lT^{-1}=\frac{1}{2n-2}Q(l)=\frac{1}{2n-2}(q_{ij}(l));$$

ile hesaplanır. (Rimas, 2005)

İspat. A matrisinin ℓ. ($\ell\in N$) kuvvetini hesaplarken $A=TJT^{-1}$ dönüşümünden yararlanalım. Buradaki T matrisi A' nın öz vektörlerinden oluşan, J matrisi ise A' nın öz değerlerinden oluşan bir matristir.

$$A^l=\underbrace{(TJT^{-1})(TJT^{-1})...(TJT^{-1})}_{l \text{ tane}}$$

çarpımından $A^l = TJ^lT^{-1}$ olduğu görülür. (Horn, 1985)

O halde öncelikle A'nın öz değerlerini ve öz vektörlerini bulalım. Bunun içinde A matrisinin karakteristik denkleminden yararlanırız. Yani; $\alpha \in \mathbb{R}$ ve E birim matris olmak üzere $|A - \lambda E| = 0$ karakteristik denklemi için; aşağıda tanımlanan determinantlar kullanılırsa;

$$D_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & & & & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & & & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & & & & 2 & \alpha \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

ve

$$\Delta_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & & & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & & & & 1 & \alpha \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

determinantları kullanalım. $\alpha \in R$ olmak üzere $-\lambda = \alpha$ alınırsa

$|A - \lambda E| = D_n(-\lambda)$

olduğu görülür.

$\Delta_n = \Delta(\alpha)$ ve $D_n = D_n(\alpha)$ olmak üzere (4.3) determinantından;

$\Delta_0(\alpha) = 1$

$\Delta_1(\alpha) = \alpha$

$$\Delta_2(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 = \alpha\Delta_1(\alpha) - \Delta_0(\alpha)$$

$$\Delta_3(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 2\alpha = \alpha\Delta_2(\alpha) - \Delta_1(\alpha)$$

$$\Delta_4(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^4 - 3\alpha^2 + 1 = \alpha\Delta_3(\alpha) - \Delta_2(\alpha)$$

olup işleme bu şekilde devam edilirse;

$\Delta_0(\alpha)=1, \quad \Delta_1(\alpha)=\alpha$

başlangıç koşullarına sahip;

$\Delta_n(\alpha)=\alpha\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}$

homojen fark denklemi elde edilir. Fark denklemlerinin çözümü $c_1,\ c_2 \in R$ olmak üzere

$\Delta_n(\alpha)=c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$

şeklindedir. (Agarwal, 1992)

Bu fark denklemini çözersek ;

$$\Delta_n(\alpha)-\alpha\Delta_{n-1}+\Delta_{n-2}=0 \tag{4.4}$$

$r^2-\alpha r+1=0$

$$r_1=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}, \quad r_2=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$$

kökleri bulunur. Başlangıç koşullarını kullanarak c_1 ve c_2 sabitlerini bulalım. $\Delta_0(\alpha)=1$ için $c_1+c_2=1$ ve $c_1=1-c_2$ bulunur.

$\Delta_1(\alpha)=\alpha=c_1 r_1+c_2 r_2$

olur. Bu denklemde $c_1=1-c_2$ yazılırsa;

$\alpha=(1-c_2)r_1+c_2 r_2$

elde edilir. Buradan;

$$c_2=\frac{\alpha-r_1}{r_2-r_1}=\frac{\sqrt{\alpha^2-4}+\alpha}{2\sqrt{\alpha^2-4}}$$

ve

$$c_1=1-c_2=\frac{\sqrt{\alpha^2-4}-\alpha}{2\sqrt{\alpha^2-4}}$$

olarak bulunur. Buradan bulunan değerler (4.4)'de yerine yazılırsa;

$$\Delta_n(\alpha)=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4})^{n+1}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4})^{n+1}}{\sqrt{\alpha^2-4}} \tag{4.5}$$

elde edilir. İkinci tür chebyshev polinomunun bir ifadesinin

$$U_n(x)=\frac{1}{2}\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}-(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. (Fox ve Parke, 1968)

Bu ifadede $x=\frac{\alpha}{2}$ yazarsak;

$$U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2^{2n+1}}\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4})^{n+1}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4})^{n+1}}{\sqrt{\alpha^2-4}} \tag{4.6}$$

eşitliği elde edilir. (4.5) ve (4.6) denklemlerinden;

$$\Delta_n(\alpha)=U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

olduğu görülür. (4.2) determinantından;

$$D_1(\alpha)=\alpha$$

$$D_2(\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha & 0\\ 2 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^2$$

$$D_3(\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 1\\ 0 & 2 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^3-2\alpha=\alpha(\Delta_2-\Delta_0)$$

$$D_4(\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 1 & 0\\ 0 & 1 & \alpha & 1\\ 0 & 0 & 2 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^4-3\alpha^2=\alpha(\Delta_3-\Delta_1)$$

olup genelleştirme yapılırsa;

$$D_n=\alpha(\Delta_{n-1}-\Delta_{n-3})$$

bağıntısı elde edilir. Şimdi de $D_n(\alpha)$' nın Chebyshev polinomuyla bir ilişkisinin olup olmadığını araştıralım.

$\Delta_n(\alpha)=\alpha\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}$ eşitliği $D_n=\alpha(\Delta_{n-1}-\Delta_{n-3})$ eşitliğinde yerine yazılırsa; daha sonrada denklemde $\Delta_n(\alpha)=U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ eşitliği yazılırsa;

$$D_n(\alpha)=\alpha\left[U_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)-U_{n-3}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \tag{4.7}$$

olduğu görülür.

$$T_n(x)=\frac{1}{2}(U_n(x)-U_{n-2}(x))$$

(Fox ve Parke, 1968) rekürans bağıntısı kullanılarak (4.7)' de yerine yazılırsa;

$$D_n(\alpha)=2\alpha T_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

elde edilir. Şimdi, birinci tür Chebyshev polinomunun köklerini bulalım. $x=\cos\varphi$ ve $-1\le x\le 1$ olmak üzere $T_n(x)=\cos(n\varphi)$ olduğundan $\arccos x=\varphi$ alırsak $\cos n\varphi=0$ olup $\cos n(\arccos x)=0$ elde edilir. Buradan $n\arccos x=\frac{\pi}{2}(2k-1)$ $(k=1,2,...,n)$ ve dolayısıyla $\arccos x=\frac{\pi}{2n}(2k-1)$ olup,

$x_{nk}=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ elde edilir. (Fox ve Parke, 1968)

$D_n(\alpha)=2\alpha T_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$'de $\frac{\alpha}{2}=y$ yazılırsa ve $D_n(\alpha)$' nın kökleri bulunursa;

$D_n(y)=4yT_{n-1}(y)$

$4yT_{n-1}(y)=0$

$T_{n-1}(y)=0$

$y_{nk}=\cos\frac{(2k-1)}{2n},\ k=1,2,...,n$

olarak bulunur. Böylelikle $D_n(\alpha)$'nın kökleri, yani matrisin öz değerleri;

$$\lambda_k=\begin{cases}-2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n-2}, & k=1,2,...,\frac{n-1}{2}\\ 0 \qquad\quad , & k=\frac{n+1}{2}\\ -2\cos\frac{(2k-3)\pi}{2n-2}, & k=\frac{n+3}{2},\frac{n+5}{2},...,n\end{cases}$$

olarak bulunur. J matrisi A matrisinin Jordan formu olsun. λ_k $k=1,2,...,n$ öz değerinin katlılığı $l_k=1$ olduğundan J matrisinde λ_k basit öz değerine tek Jordan blok karşılık gelir. Ayrıca $k=1,2,...,\frac{n-1}{2}$ için $\lambda_{\frac{n+1}{2}}=0$ ve $\lambda_k=-\lambda_{n-k+1}$ olur. Buradan A matrisinin J Jordan formu yazılırsa;

$$J=diag\left(-\lambda_n,-\lambda_{n-1},...,-\lambda_{\frac{n+3}{2}},0,\lambda_{\frac{n+3}{2}},...,\lambda_{n-1},\lambda_n\right)$$

olur.

Şimdi T ve T^{-1} matrislerini hesaplayalım. $n=2p+1$ için A' nın öz vektörlerini bulalım. $n=2p+1$ $(p\in\mathbb{N})$ olmak üzere TA' nın öz vektörlerinden oluşan

bir matristir (Horn, 1986). $T_j\,(j=1,.....,n)$ T' nin j. sütunu olmak üzere $T=(T_1,T_2,...,T_n)$ olsun. Buradan

$$(AT_1,AT_2,...,AT_n)=(T_1\lambda_1,T_2\lambda_2,...,T_n\lambda_n)$$

olur. O halde;

$$\begin{aligned}AT_1&=T_1\lambda_1\\AT_2&=T_2\lambda_2\\&\vdots\\AT_n&=T_n\lambda_n\end{aligned}$$

buluruz. A'nın öz vektörlerini Chebyshev polinomlarını kullanılarak;

$$T_j=\left[U_{-1}(\frac{\lambda_j}{2})\quad U_0(\frac{\lambda_j}{2})\quad U_1(\frac{\lambda_j}{2})\quad\cdots\quad U_{n-2}(\frac{\lambda_j}{2})\right]^T,\qquad j=\overline{1,n},\ ve\ \ j\neq\frac{n+1}{2}\tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}T_{\frac{n+1}{2}}&=\left[\sin\frac{i\pi}{2}\quad\sin\frac{i\pi}{2}\quad\sin\frac{i\pi}{2}\quad\cdots\quad\sin\frac{i\pi}{2}\quad\cdots\quad\sin\frac{i\pi}{2}\right]^T\\&=\left[1\quad 0\quad -1\quad\cdots\quad\sin\frac{i\pi}{2}\quad\cdots\quad\sin\frac{n\pi}{2}\right]^T\end{aligned}\tag{4.9}$$

şeklinde formulüze edilebilir. İkinci tür Chebyshev polinomu

$$U_k(x)=\frac{\sin(k+1)\arccos x}{\sin\arccos x},\qquad -1\le x\le 1$$

(Fox ve Parke, 1968) olduğundan (4.8) ve (4.9) eşitliklerinden T dönüşüm matrisi;

$$T=\begin{bmatrix}U_{-1}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & U_{-1}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & U_{-1}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) & 1 & U_{-1}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right) & \cdots & U_{-1}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & U_{-1}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\\ U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right) & \cdots & U_0\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & U_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\\ U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) & -1 & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right) & \cdots & U_1\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & U_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ U_{n-2}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & U_{n-2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & U_{n-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) & \sin\frac{n\pi}{2} & U_{n-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right) & \cdots & U_{n-2}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & U_{n-2}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\end{bmatrix}\tag{4.10}$$

şeklinde yazılır.

τ_j $(T^{-1}=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n))$ T^{-1} matrisinin j-inci sütununu göstersin.

$$t_k=\begin{cases}\dfrac{\lambda^2_{\frac{n+1}{2}-k}}{2(2n-2)}, & k=1,2,....,\dfrac{n-1}{2}\\ \dfrac{\lambda^2_{\frac{3(n+1)}{2}-k}}{2(2n-2)}, & k=\dfrac{n+3}{2},\dfrac{n+5}{2},....,n\end{cases} \tag{4.11}$$

ve $j=\overline{2,n-1}$ olmak üzere

$$\tau_1=\left[\frac{2t_1}{\lambda_1}U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\quad\frac{2t_2}{\lambda_2}U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)\quad\cdots\quad\frac{2t_{\frac{n-1}{2}}}{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right)\quad 1\quad\frac{2t_{\frac{n+3}{2}}}{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right)\quad\cdots\quad\frac{2t_{n-1}}{\lambda_{n-1}}U_0\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right)\quad\frac{2t_n}{\lambda_n}U_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right]^T$$

$$\tau_n=\left[t_1U_{n-2}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\quad t_2U_{n-2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)\quad\cdots\quad t_{\frac{n-1}{2}}U_{n-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right)\quad 0\quad t_{\frac{n+3}{2}}U_{n-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right)\quad\cdots\quad t_{n-1}U_{n-2}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right)\quad t_nU_{n-2}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right]^T$$

$$\tau_j=\left[2t_1U_{j-2}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\quad 2t_2U_{j-2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)\quad\cdots\quad 2t_{\frac{n-1}{2}}U_{j-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right)\quad 0\quad 2t_{\frac{n+3}{2}}U_{j-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right)\quad\cdots\quad t_{n-1}U_{j-2}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right)\quad t_nU_{n-2}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right]^T$$

şeklinde Chebysev polinomlarına bağlı matrisler olarak formulüze edilebilir. Bu matrisler kullanılarak T^{-1};

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}
\frac{2t_1}{\lambda_1}U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 2t_1U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 2t_1U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & \cdots & 2t_1U_{n-3}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & t_1U_{n-2}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\
\frac{2t_2}{\lambda_2}U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 2t_2U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 2t_2U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 2t_2U_{n-3}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & t_2U_{n-2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\frac{2t_{\frac{n-1}{2}}}{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) & 2t_{\frac{n-1}{2}}U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) & 2t_{\frac{n-1}{2}}U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) & \cdots & 2t_{\frac{n-1}{2}}U_{n-3}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) & t_{\frac{n-1}{2}}U_{n-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) \\
1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
\frac{2t_{\frac{n+3}{2}}}{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right) & 2t_{\frac{n+3}{2}}U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right) & 2t_{\frac{n-1}{2}}U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right) & \cdots & 2t_{\frac{n+3}{2}}U_{n-3}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right) & 2t_{\frac{n+3}{2}}U_{n-3}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\frac{2t_{\frac{n-1}{2}}}{\lambda_{n-1}}U_0\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 2t_{n-1}U_0\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 2t_{n-1}U_1\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & \cdots & 2t_{n-1}U_{n-3}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & t_{n-1}U_{n-2}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) \\
\frac{2t_n}{\lambda_n}U_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & 2t_nU_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & 2t_nU_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & \cdots & 2t_nU_{n-3}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & t_nU_{n-2}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)
\end{bmatrix}$$

(4.12)

şeklinde yazılır. Şimdi de A'nın l-inci kuvvetini oluşturalım. $L_i\ (i=\overline{1,n})$, T' nin i-inci satırı ve

$T=\begin{bmatrix}L_1 & L_2 & \cdots & L_n\end{bmatrix}^T$ ve $i=\overline{1,n}$ olmak üzere

$$L_i^T=\begin{bmatrix}U_{i-2}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & U_{i-2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & U_{i-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) & \sin\frac{i\pi}{2} & U_{i-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right) & \cdots & U_{i-2}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & U_{i-2}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\end{bmatrix}^T$$

ifadelerinden $A^l=TJ^lT^{-1}$ ve $J^l=diag(\lambda_1^l,\lambda_2^l,\lambda_3^l,...,\lambda_n^l)$ yazılır. Buradan da

$\lambda_{\frac{n+1}{2}}=0$ ve $U_0=\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)=1 \quad k=\overline{1,n}$ olmak üzere

$$\left\{A^l\right\}_{i1} = \left\{TJ^lT^{-1}\right\}_{i1} = L_iJ^l\tau_1$$

$$= L_i\left[2t_1\lambda_1^{l-1}U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \quad 2t_2\lambda_2^{l-1}U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \quad \cdots \quad 2t_{\frac{n-1}{2}}\lambda_{\frac{n-1}{2}}^{l-1}U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) \quad 0 \quad 2t_{\frac{n+3}{2}}\lambda_{\frac{n+3}{2}}^{l-1}U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right)\right.$$

$$\left. \cdots \quad 2t_{n-1}\lambda_{n-1}^{l-1}U_0\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) \quad 2t_n\lambda_n^{l-1}U_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right]^T \qquad i=\overline{1,n};$$

(4.13)

$$\left\{A^l\right\}_{in} = \left\{TJ^lT^{-1}\right\}_{in} = L_iJ^l\tau_n$$

$$= L_i\left[t_1\lambda_1^lU_{n-2}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \quad t_2\lambda_2^lU_{n-2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \quad \cdots \quad t_{\frac{n-1}{2}}\lambda_{\frac{n-1}{2}}^lU_{n-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) \quad 0 \quad t_{\frac{n+3}{2}}\lambda_{\frac{n+3}{2}}^lU_{n-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right)\right.$$

$$\left. \cdots \quad t_{n-1}\lambda_{n-1}^lU_{n-2}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) \quad t_n\lambda_n^lU_{n-2}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right]^T$$

$$= \sum_{k=1}^{n} t_k\lambda_k^lU_{i-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{n-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right), \quad i=\overline{1,n};$$

$$\left\{A^l\right\}_{ij} = L_iJ^l\tau_j$$

$$= L_i\left[2t_1\lambda_1^lU_{j-2}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \quad 2t_2\lambda_2^lU_{j-2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \quad \cdots \quad 2t_{\frac{n-1}{2}}\lambda_{\frac{n-1}{2}}^lU_{j-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-1}{2}}}{2}\right) \quad 0 \quad 2t_{\frac{n+3}{2}}\lambda_{\frac{n+3}{2}}^lU_{j-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+3}{2}}}{2}\right)\right.$$

$$\left. \cdots \quad 2t_{n-1}\lambda_{n-1}^lU_{j-2}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) \quad 2t_n\lambda_n^lU_{j-2}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right]^T$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} t_k\lambda_k^lU_{i-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{j-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) \qquad i=\overline{1,n}; \tag{4.14}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.13) ve (4.14) ifadelerinden

$$\left\{A^l\right\}_{ij} = 2p_{ij}\sum_{k=1}^{n} t_k\lambda_k^{l-\alpha j}U_{i-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{j-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) \tag{4.15}$$

ifadesi formulüze edilebilir. Bu ifadedeki t_k (4.11)' de tanımlanmıştır. λ_k, A' nin öz değerleri, n A ($n=2p+1, p\in\mathbb{N}$) matrisinin mertebesini, $U_n(x)$ k-ıncı dereceden ikinci tür Chebyshev polinomlarını ifade eder.

$$p_{ij}=\begin{cases}0, & if\ \ i=1\\ \dfrac{1}{2}, & if\ \ i\neq 1 ve\ j=n\\ 1, & if\ \ i\neq 1 ve\ j\neq n\end{cases}$$

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}0, & if\ \ j\neq 1\\ 1, & if\ \ j=1\end{cases}$$

olmak üzere (4.15) ifadesini

$$S_1=2p_{ij}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}t_k\lambda_k^{l-\alpha j}U_{i-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{j-2+\alpha j}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right),\qquad i,j=\overline{1,n;} \tag{4.16}$$

$$S_2=2p_{ij}\sum_{k=\frac{n+3}{2}}^{n}t_k\lambda_k^{l-\alpha j}U_{i-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{j-2+\alpha j}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right),\qquad i,j=\overline{1,n;} \tag{4.17}$$

olacak şekilde

$$\left\{A^l\right\}_{ij}=S_1+S_2$$

biçiminde parçalayalım. İkinci toplamda $k=\dfrac{n+2m+1}{2}$ yazılırsa

$$S_2=2p_{ij}\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}t_{\frac{n+2m+1}{2}}\lambda_{\frac{n+2m+1}{2}}^{l-\alpha j}U_{i-2}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+2m+1}{2}}}{2}\right)U_{j-2+\alpha j}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+2m+1}{2}}}{2}\right),\qquad i,j=\overline{1,n} \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.18)' deki toplamda *m* değişkeni yerine *k* yazılırsa

$$S_2=2p_{ij}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}t_{n-k+1}\lambda_{n-k+1}^{l-\alpha j}U_{i-2}\left(\frac{\lambda_{n-k+1}}{2}\right)U_{j-2+\alpha j}\left(\frac{\lambda_{n-k+1}}{2}\right),\qquad i,j=\overline{1,n}$$

ifadesi elde edilir. $\lambda_k=-\lambda_{n-k+1}$ ve $t_k=t_{n-k+1}$ $\left(k=\overline{1,\dfrac{n-1}{2}}\right)$ eşitliği dikkate alınırsa;

$$\begin{aligned}S_2&=2p_{ij}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}t_k(-\lambda_k)^{l-\alpha j}U_{i-2}\left(-\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{j-2+\alpha j}\left(-\frac{\lambda_k}{2}\right)\\ &=(-1)^{l+i+j}2p_{ij}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}t_k\lambda_k^{l-\alpha j}U_{i-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{j-2+\alpha j}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)\qquad i,j=\overline{1,n}\end{aligned} \tag{4.19}$$

toplamı elde edilir. Burada $U_n(-x)=(-1)^kU_n(x)$ (Fox ve Parke, 1968) eşitliği kullanılmıştır. (4.16) ve (4.19) ifadeleri (4.15)' te yerine yazılırsa

$$\left\{A^l\right\}_{ij} = (1+(-1)^{l+i+j})2p_{ij}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} t_k \lambda_k^{l-\alpha j} U_{i-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) U_{j-2+\alpha j}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right), \qquad i,j=\overline{1,n}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.11)' deki t_k ifadesi dikkate alınırsa

$$\left\{A^l\right\}_{ij} = \frac{1+(-1)^{l+i+j}}{2n-2} p_{ij}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_k^{l-\alpha j}\lambda_{\frac{n+1}{2}-k}^{2} U_{i-2}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) U_{j-2+\alpha j}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right), \quad i,j=\overline{1,n;}$$

İfadesiyle A' nın l-inci kuvveti formulüze edilmiş olur. (Rimas, 2006)

$n=2p+1$ mertebeli matris için öz değer ve öz vektör bulma işlemleri $n=2p$ için de yapılırsa ($p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$)

$$\lambda_{2k-1} = -2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n-2}\ , \qquad (k=1,2,...,n-1)$$

$$\lambda_{2k} = -2\cos\frac{2k\pi}{2n-2} \qquad (k=1,2,...,n-2)$$

olarak bulunur. Buradan λ_{2k-1} $k=(1,2,...,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1,...,n-1)$ katlılığı $l_i=1$'dir.

λ_{n-1} $(k=\frac{n}{2})$ katlılığı $l_{n-1}=2$' dir. (Horn, 1986)

$$\lambda_{2k-1} = -\lambda_{2n-2k-1} \qquad (k=1,2,...,\frac{n-2}{2})$$

$\lambda_{2k} = -\lambda_{2n-2k-2}$ $(k=1,2,...,\frac{n-2}{2})$ ilişkisi vardır. A' nın Jordan formu;

$$J=\begin{bmatrix}
-\lambda_{2n-3} & 0 & & & & & & & & \\
 & -\lambda_{2n-5} & 0 & & & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & & 0 & & \\
 & & & -\lambda_{n+1} & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & & & \\
 & & 0 & & & & \lambda_{n+1} & 0 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & & \lambda_{2n-5} & 0 \\
 & & & & & & & & & \lambda_{2n-3}
\end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan $J=T^{-1}AT$ dönüşümü kullanılarak T, T^{-1} matrislerini bulup, A matrisinin l-inci kuvvetinin genel ifadesini

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & if \quad j \neq 1, \\ 1, & if \quad j = 1, \end{cases} \text{ ve } p_{ij} = \begin{cases} 0, & if \quad i = 1, \\ \dfrac{1}{2}, & if \quad i \neq 1, \quad j = n, \\ 1, & if \quad i \neq 1 \quad and \quad j \neq n, \end{cases}$$

için

$$q_{ij}(l) = \left[1 + (-1)^{l+i+j}\right] p_{ij} \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \lambda_{2k-1}^{l-\alpha_j} \lambda_{n-2k}^{2} U_{i-2}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right) U_{j-2+\alpha_j}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right) \qquad i, j = \overline{1,n}$$

olmak üzere

$$A^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{2n-2}\varphi(l) = q_{ij}(l)$$

olarak bulunur. (Rimas, 2005)

4.2. Simetrik Sirkülant matrisin pozitif kuvvetleri

Tanım 4.2.1 (Horn, 1985) C, mertebesi n olan karesel bir matris olsun. $C = circ(c_1, c_2, c_3, ..., c_n)$ olarak tanımlanan

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & & c_n \\ c_n & c_1 & c_2 & & c_{n-1} \\ & & & & \\ c_3 & c_4 & c_5 & & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_1 \end{bmatrix}$$

matrisine *sirkülant matris* denir. C 'nin her bir satırının elemanları; bir önceki satırın elemanları ile aynıdır. C sirkülant matrisi matrisi aynı zamanda simetrikse ($C^T = C$) C' ye simetrik sirkülant matris denir.

Teorem 4.2.1 $n = 2p + 1$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & & & & 1 & 0 & \end{bmatrix}$$

simetrik sirkülant matrisin l $(l \in N)$ -inci kuvveti

$$a_m(l)=\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} l_{n-2k+2}\lambda_{n-2k+2}^{l}T_{m-1}\left(\frac{\lambda_{n-2k+2}}{2}\right) \qquad m=\overline{1,\frac{n+1}{2}}$$

olmak üzere

$$B^l=TJ^lT^{-1}=\frac{1}{n}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n-1}{2}} & \cdots & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{\frac{n-1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} & \cdots & a_5 & a_4 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n-1}{2}} & a_{\frac{n-3}{2}} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

ile verilir. (Rimas, 2005)

İspat. B matrisinin l $(l\in N)$-inci kuvvetini hesaplarken $B=TJT^{-1}$ dönüşümünden yararlanalım. (Horn,1985) Buradaki T matrisi B' nin öz vektörlerinden oluşan, J matrisi de B' nin öz değerlerinden oluşan bir matristir.

$$B^l=\underbrace{(TJT^{-1})(TJT^{-1}).....(TJT^{-1})}_{l \text{ tane}}$$

çarpımından $B^l=TJ^lT^{-1}$ olduğu görülür. O halde öncelikle B' nin öz değerlerini ve öz vektörlerini bulalım. Bunun içinde B matrisinin karakteristik denkleminden yararlanalım. Yani; $\alpha\in\mathbb{R}$ ve E birim matris olmak üzere $|B-\lambda E|=0$ karakteristik denklemi için;

$$D_n(\alpha)=\begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & & & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & & & & 1 & \alpha \end{vmatrix} \tag{4.20}$$

ve

$$\Delta_n(\alpha)=\begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & & & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & & & \\ & & & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & & & & 1 & \alpha \end{vmatrix} \tag{4.21}$$

determinantları kullanalım. $\alpha \in R$ olmak üzere $-\lambda = \alpha$ alınırsa

$|B - \lambda E| = D_n(-\lambda)$

olduğu görülür.

$\Delta_n = \Delta(\alpha)$ olmak üzere (4.21) determinantından;

$\Delta_0(\alpha) = 1$,

$\Delta_1(\alpha) = \alpha$,

$$\Delta_2(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 = \alpha\Delta_1(\alpha) - \Delta_0(\alpha),$$

$$\Delta_3(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 2\alpha = \alpha\Delta_2(\alpha) - \Delta_1(\alpha)$$

ve

$$\Delta_4(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^4 - 3\alpha^2 + 1 = \alpha\Delta_3(\alpha) - \Delta_2(\alpha)$$

olup işleme böylece devam edilirse

$\Delta_0(\alpha) = 1$, $\Delta_1(\alpha) = \alpha$

başlangıç koşullarına sahip;

$\Delta_n(\alpha) - \alpha\Delta_{n-1}(\alpha) + \Delta_{n-2}(\alpha) = 0$

homojen fark denklemi elde edilir. Buradan

$r^2 - \alpha r + 1 = 0$

$r_1 = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$, $r_2 = \dfrac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$

kökleri bulunur. Fark denklemlerinin çözümü c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\Delta_n(\alpha) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \tag{4.22}$$

şeklindedir. (Agarwal, 1992) Başlangıç koşullarını kullanarak c_1 ve c_2 sabitlerini bulalım.

$\Delta_0(\alpha) = 1$ için $c_1 + c_2 = 1$ ve $c_1 = 1 - c_2$ bulunur.

$\Delta_1(\alpha) = \alpha = c_1 r_1 + c_2 r_2$ olur. Bu denklemde $c_1 = 1 - c_2$ yazılırsa;

$\Delta_1(\alpha) = \alpha = (1 - c_2) r_1 + c_2 r_2$

elde edilir. Buradan;

$$c_2 = \frac{\alpha - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4} + \alpha}{2\sqrt{\alpha^2 - 4}}$$

$$c_1 = 1 - c_2 = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4} - \alpha}{2\sqrt{\alpha^2 - 4}}$$

olarak bulunur. Buradan bulunan değerler (4.22)'de yerine yazılırsa;

$$\Delta_n(\alpha) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4})^{n+1}}{\sqrt{\alpha^2 - 4}} \tag{4.23}$$

elde edilir. İkinci tür Chebyshev polinomunun tanımından $x = \frac{\alpha}{2}$ olarak

$$U_n(x) = \frac{1}{2} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4})^{n+1}}{\sqrt{\alpha^2 - 4}} \tag{4.24}$$

eşitliği elde edilir. (4.23) ve (4.24) denklemlerinden

$$\Delta_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

olduğu görülür. (4.20) determinantından;

$$D_1(\alpha) = \alpha$$

$$D_2(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 = \alpha\Delta_1 - 2\Delta_0 - 2(-1)^2$$

$$D_3(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = \alpha\Delta_2 - 2\Delta_1 - 2(-1)^3$$

$$D_4(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^4 - 4\alpha^2 = \alpha\Delta_3 - 2\Delta_2 - 2(-1)^4$$

olup genelleştirme yapılırsa;

$$D_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2} - 2(-1)^n \tag{4.25}$$

bağıntısı elde edilir. Şimdi de $D_n(\alpha)$' nın Chebyshev polinomlarıyla bir ilişkisi olup olmadığına bakalım.

$$\Delta_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

olduğunu göstermiştik. (4.25)' de $\Delta_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ yazılırsa

$$D_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2U_{n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2(-1)^n \qquad (4.26)$$

elde edilir.

$\Delta_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlik

$$D_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2} - 2(-1)^n$$

eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$D_n(\alpha) = \Delta_n - \Delta_{n-2} - 2(-1)^n$$

olduğu görülür.

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(U_n(x) - U_{n-2}(x))$$

rekürans bağıntısı kullanılarak (4.26) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$D_n(\alpha) = 2T_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2(-1)^n$$

eşitliği elde edilir. Birinci tür Chebyshev polinomunun kökleri $x = \cos\varphi$, $-1 \le x \le 1$, olmak üzere

$$T_n(x) = \cos(n\varphi)$$

$$\arccos x = \varphi$$

$$\cos n\varphi = 0$$

$$\cos n(\arccos x) = 0$$

$$n\arccos x = \frac{\pi}{2}(2k-1) \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2n}(2k-1)$$

$$x = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

olarak bulunur. (Fox ve Parke, 1968) $D_n(\alpha) = 2(T_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) - (-1)^n)$ denkleminde $\frac{\alpha}{2} = y$ yazılırsa ve $D_n(\alpha)$ ' nın kökleri bulunursa

$$2(T_n(y) - (-1)^n) = 0$$

$$T_n(y) - (-1)^n = 0$$

$$T_n(y) = (-1)^n$$

$$T_n(y) = \cos n\varphi \qquad (y = \cos n\varphi)$$

$$\cos n\varphi = (-1)^n$$

$$n \arccos y = k\pi$$

$$y_{nk} = \cos\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

olarak bulunur. Böylelikle $D_n(\alpha)$ 'nın kökleri, yani öz değerleri

$-\lambda = \alpha$ ve $\frac{\alpha}{2} = y$ olmak üzere

$$-\frac{\lambda}{2} = \cos\frac{k\pi}{n}$$

$$\lambda_{nk} = -2\cos\frac{k\pi}{n} (k = 1, 3, 5, ..., n)$$

olarak bulunur.

λ_i $(i = 1, 3, ..., n-2)$ öz değerinin katlılığı $l_i = 2$ ve λ_n öz değerinin katlılığı $l_n = 1$'dir. J matrisi B matrisinin Jordan formu olsun. J matrisinde λ_n basit öz değerine tek Jordan blok karşılık gelir. λ_i $(l_i = 2)$ katlı öz değerine $j_1(\lambda_i)$ 2×2 Jordan bloğu karşılık gelir. (Fox ve Parke, 1968) Buradan B matrisinin J Jordan formu yazılırsa;

$$J = diag(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_3, ..., \lambda_{n-2}, \lambda_{n-2}, \lambda_n)$$

olur.

Şimdi T ve T^{-1} matrislerini hesaplayalım. $n = 2p + 1$ için B' nin öz vektörlerini bulalım. $n = 2p + 1 \quad p \in N$ olmak üzere T, B' nin öz vektörlerinden oluşan bir matristir. $T_j (j = 1, 2, ..., n)$ T'nin j-inci sütunu olmak üzere

$$(BT_1, BT_2, ..., BT_n) = (T_1\lambda_1, T_2\lambda_1, T_3\lambda_3, T_4\lambda_3., ...T_{n-2}\lambda_{n-2}, T_{n-1}\lambda_{n-2}, T_n\lambda_n)$$

olur. Buradan;

$$
\begin{aligned}
BT_1 &= T_1\lambda_1 \\
BT_2 &= T_2\lambda_1 \\
BT_3 &= T_3\lambda_3 \\
BT_4 &= T_4\lambda_3 \\
&\vdots \\
BT_{n-2} &= T_{n-2}\lambda_{n-2} \\
BT_{n-1} &= T_{n-1}\lambda_{n-2} \\
BT_n &= T_n\lambda_n
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

bulunur.

$$
T_j = \begin{cases} T_{j1}, & j = 2p-1 \\ T_{j-1,2}, & j = 2p\,(p \in \mathbb{N}, j = \overline{1, n-1}) \end{cases}
$$

olmak üzere B' nin öz vektörleri Chebyshev polinomu kullanılarak;

$$
T_{j1} = \left[U_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ U_1\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ U_2\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \cdots\ U_{n-2}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ 0 \right]^T \quad j = 1,3,5,...,n-2 \tag{4.28}
$$

$$
T_{j2} = \left[U_{n-3}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \cdots\ U_2\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ U_1\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ U_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ 0\ U_{n-2}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \right]^T
$$

$$
j = 1,3,5,...,n-2,
$$

$$
T_n = \left[1\ 1\ 1\ \cdots\ 1\right]^T; \tag{4.29}
$$

şeklinde formule edilebilir. Burada ikinci tür Chebyshev polinomu tanımından;

$$
U_{n-2}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) = -1 \qquad (j = 1,3,5,...,n-2)
$$

olmak üzere (4.28) ve (4.29) ifadelerinden T dönüşüm matrisi;

$$T=\begin{bmatrix} U_0(\frac{\lambda_1}{2}) & U_{n-3}(\frac{\lambda_1}{2}) & U_0(\frac{\lambda_3}{2}) & U_{n-3}(\frac{\lambda_3}{2}) & \cdots & U_0(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & 1 \\ U_1(\frac{\lambda_1}{2}) & U_{n-4}(\frac{\lambda_1}{2}) & U_1(\frac{\lambda_3}{2}) & U_{n-4}(\frac{\lambda_3}{2}) & \cdots & U_1(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & U_{n-4}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & 1 \\ U_2(\frac{\lambda_1}{2}) & U_{n-5}(\frac{\lambda_1}{2}) & U_2(\frac{\lambda_3}{2}) & U_{n-5}(\frac{\lambda_3}{2}) & \cdots & U_2(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & U_{n-5}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{n-4}(\frac{\lambda_1}{2}) & U_1(\frac{\lambda_1}{2}) & U_{n-4}(\frac{\lambda_3}{2}) & U_1(\frac{\lambda_3}{2}) & \cdots & U_{n-4}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & U_1(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & 1 \\ U_{n-3}(\frac{\lambda_1}{2}) & U_0(\frac{\lambda_1}{2}) & U_{n-3}(\frac{\lambda_3}{2}) & U_0(\frac{\lambda_3}{2}) & \cdots & U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & U_0(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4.30)

şeklinde yazılır.

$\frac{\tau_j}{n}(T^{-1}=\frac{1}{n}(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n))$ T^{-1} matrisinin j.sütunu olmak üzere

$$\tau_j=\begin{pmatrix} \lambda_1 U_{n-j-2}(\frac{\lambda_1}{2})+2U_{j-1}(\frac{\lambda_1}{2}) \\ 2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_1}{2})+\lambda_1 U_{j-1}(\frac{\lambda_1}{2}) \\ \lambda_3 U_{n-j-2}(\frac{\lambda_3}{2})+2U_{j-1}(\frac{\lambda_3}{2}) \\ 2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_3}{2})+\lambda_3 U_{j-1}(\frac{\lambda_3}{2}) \\ \lambda_5 U_{n-j-2}(\frac{\lambda_5}{2})+2U_{j-1}(\frac{\lambda_5}{2}) \\ 2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_5}{2})+\lambda_5 U_{j-1}(\frac{\lambda_5}{2}) \\ \vdots \\ \lambda_{n-2} U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+2U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) \\ 2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+\lambda_{n-2} U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad j=\overline{1,n-2}$$

(4.31)

olup

$$\tau_{n-1}=\begin{bmatrix} -2-\lambda_1 & -2-\lambda_3 & -2-\lambda_5 & \cdots & -2-\lambda_{n-2} & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\tau_n = \left[-\lambda_1 \ -2 \ -\lambda_3 \ -2 \ -\lambda_5 \ -2 \ \cdots \ -\lambda_{n-2} \ -2 \ 1\right]^T \tag{4.32}$$

(4.31) ve (4.32) matrisleri kullanılarak

$$T^{-1} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix}
\lambda_1 U_{n-3}(\frac{\lambda_1}{2}) + 2U_0(\frac{\lambda_1}{2}) & \lambda_1 U_{n-4}(\frac{\lambda_1}{2}) + 2U_1(\frac{\lambda_1}{2}) & \cdots & \lambda_1 U_0(\frac{\lambda_1}{2}) + 2U_{n-3}(\frac{\lambda_1}{2}) & -2 & -\lambda_1 \\
2U_{n-3}(\frac{\lambda_1}{2}) + \lambda_1 U_0(\frac{\lambda_1}{2}) & 2U_{n-4}(\frac{\lambda_1}{2}) + \lambda_1 U_1(\frac{\lambda_1}{2}) & \cdots & 2U_0(\frac{\lambda_1}{2}) + \lambda_1 U_{n-3}(\frac{\lambda_1}{2}) & -\lambda_1 & -2 \\
\lambda_3 U_{n-3}(\frac{\lambda_3}{2}) + 2U_0(\frac{\lambda_3}{2}) & \lambda_3 U_{n-4}(\frac{\lambda_3}{2}) + 2U_1(\frac{\lambda_3}{2}) & \cdots & \lambda_3 U_0(\frac{\lambda_3}{2}) + 2U_{n-3}(\frac{\lambda_3}{2}) & -2 & -\lambda_3 \\
2U_{n-3}(\frac{\lambda_3}{2}) + \lambda_3 U_0(\frac{\lambda_3}{2}) & 2U_{n-4}(\frac{\lambda_3}{2}) + \lambda_3 U_1(\frac{\lambda_3}{2}) & \cdots & 2U_0(\frac{\lambda_3}{2}) + \lambda_3 U_{n-3}(\frac{\lambda_3}{2}) & -\lambda_3 & -2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda_{n-2} U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + 2U_0(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & \lambda_{n-2} U_{n-4}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + 2U_1(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & \cdots & \lambda_{n-2} U_0(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + 2U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & -2 & -\lambda_{n-2} \\
2U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + \lambda_{n-2} U_0(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & 2U_{n-4}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + \lambda_{n-2} U_1(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & \cdots & 2U_0(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + \lambda_{n-2} U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & -\lambda_{n-2} & -2 \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix} \tag{4.33}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi de B' nin l-inci kuvvetini oluşturalım. $L_i \quad (i = \overline{1,n})$ T' nin i- inci satırı olmak üzere ; $T = \left[L_1 \ L_2 \ \cdots \ L_n\right]^T$ ve buradan da

$$L_i^T = \left[U_{i-1}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \ U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \ U_{i-1}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \ U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \ U_{i-1}\left(\frac{\lambda_5}{2}\right) \ U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_5}{2}\right)\right.$$

$$\left. \cdots \ U_{i-1}\left(\frac{\lambda_{n-4}}{2}\right) \ U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_{n-4}}{2}\right) \ U_{i-1}\left(\frac{\lambda_{n-2}}{2}\right) \ U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_{n-2}}{2}\right) \ 1\right]^T \qquad i = \overline{1,n-2}$$

$$L_{n-1}^T = \left[-1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ \cdots \ -1 \ 0 \ 1\right]^T$$

$$L_n^T = \left[0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ \cdots \ 0 \ -1 \ 1\right]^T$$

olur. Bu ifadelerden $B^l = TJ^lT^{-1}$ ve $J^l = diag(\lambda_1^l, \lambda_1^l, \lambda_3^l, \lambda_3^l, ..., \lambda_{n-2}^l, \lambda_{n-2}^l, \lambda_n^l)$ yazılırsa

$$\left\{B^l\right\}_{ij}=\frac{1}{n}L_iJ^l\tau_j=\frac{L_i}{n}\begin{bmatrix}\lambda_1^l(\lambda_1U_{n-j-2}(\frac{\lambda_1}{2})+2U_{j-1}(\frac{\lambda_1}{2}))\\ \lambda_1^l(2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_1}{2})+\lambda_1U_{j-1}(\frac{\lambda_1}{2}))\\ \lambda_3^l(\lambda_3U_{n-j-2}(\frac{\lambda_3}{2})+2U_{j-1}(\frac{\lambda_3}{2}))\\ \lambda_3^l(2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_3}{2})+\lambda_3U_{j-1}(\frac{\lambda_3}{2}))\\ \vdots\\ \lambda_{n-2}^l(\lambda_{n-2}U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+2U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}))\\ \lambda_{n-2}^l(2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+\lambda_{n-2}U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}))\\ \lambda_n^l\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{n}\left\{\lambda_1^lU_{i-1}(\frac{\lambda_1}{2})\left[\lambda_1U_{n-j-2}(\frac{\lambda_1}{2})+2U_{j-1}(\frac{\lambda_1}{2})\right]\right.\\&\left.+\lambda_1^lU_{n-i-2}(\frac{\lambda_1}{2})\left[2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_1}{2})+\lambda_1U_{j-1}(\frac{\lambda_1}{2})\right]\right\}\\&+\frac{1}{n}\left\{\lambda_3^lU_{i-1}(\frac{\lambda_3}{2})\left[\lambda_3U_{n-j-2}(\frac{\lambda_3}{2})+2U_{j-1}(\frac{\lambda_3}{2})\right]\right.\\&\left.+\lambda_3^lU_{n-i-2}(\frac{\lambda_3}{2})\left[2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_3}{2})+\lambda_3U_{j-1}(\frac{\lambda_3}{2})\right]\right\}\\&+\ldots+\frac{1}{n}\left\{\lambda_{n-2}^lU_{i-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\left[\lambda_{n-2}U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+2U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\right]\right.\\&\left.+\lambda_{n-2}^lU_{n-i-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\left[2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+\lambda_{n-2}U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\right]\right\}+\frac{\lambda_n^l}{n},\quad i,j=\overline{1,n-2};\end{aligned}\tag{4.34}$$

$$\left\{B^l\right\}_{in-1}=\frac{1}{n}L_iJ^l\tau_{n-1}=\frac{L_i}{n}\left[-2\lambda_1^l\ -\lambda_1^{l+1}\ -2\lambda_3^l\ -\lambda_3^{l+1}\ \cdots\ -2\lambda_{n-2}^l\ -\lambda_{n-2}^{l+1}\ -\lambda_n^l\right]^T$$

$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{n}\left[2\lambda_1^lU_{i-1}(\frac{\lambda_1}{2})+\lambda_1^{l+1}U_{n-i-2}(\frac{\lambda_1}{2})\right]\\&-\frac{1}{n}\left[2\lambda_3^lU_{i-1}(\frac{\lambda_3}{2})+\lambda_3^{l+1}U_{n-i-2}(\frac{\lambda_3}{2})\right]\\&-\ldots-\frac{1}{n}\left[2\lambda_{n-2}^lU_{i-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+\lambda_{n-2}^{l+1}U_{n-i-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\right]+\frac{\lambda_n^l}{n},\quad i,j=\overline{1,n-2};\end{aligned}$$

$$\left\{B^l\right\}_{n-1\,j}=\frac{1}{n}L_{n-1}J^l\tau_j$$

$$=-\frac{1}{n}\left[\lambda_1^{l+1}U_{n-j-2}(\frac{\lambda_1}{2})+2\lambda_1^lU_{j-1}(\frac{\lambda_1}{2}))\right]$$

$$-\frac{1}{n}\left[\lambda_3^{l+1}U_{n-j-2}(\frac{\lambda_3}{2})+2\lambda_3^lU_{j-1}(\frac{\lambda_3}{2})\right]$$

$$-\ldots-\frac{1}{n}\left[\lambda_{n-2}^{l+1}U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+2\lambda_{n-2}^lU_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}))\right]+\frac{\lambda_n^l}{n},\ i,j=\overline{1,n-2;}$$

$$\left\{B^l\right\}_{in}=\frac{1}{n}L_iJ^l\tau_n=\frac{L_i}{n}\left[-\lambda_1^{l+1}\ -2\lambda_1^{l+1}\ -\lambda_3^{l+1}\ -2\lambda_3^l\ \cdots\ -\lambda_{n-2}^{l+1}\ -2\lambda_{n-2}^l\ \lambda_n^l\right]^T$$

$$=-\frac{1}{n}\left[\lambda_1^{l+1}U_{i-1}(\frac{\lambda_1}{2})+2\lambda_1^lU_{n-i-2}(\frac{\lambda_1}{2})\right]$$

$$-\frac{1}{n}\left[\lambda_3^{l+1}U_{i-1}(\frac{\lambda_3}{2})+2\lambda_3^lU_{n-i-2}(\frac{\lambda_3}{2})\right]$$

$$-\ldots-\frac{1}{n}\left[\lambda_{n-2}^{l+1}U_{i-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+2\lambda_{n-2}^lU_{n-i-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\right]+\frac{\lambda_n^l}{n},\ i=\overline{1,n-2;}$$

$$\left\{B^l\right\}_{nj}=\frac{1}{n}L_nJ^l\tau_j=-\frac{1}{n}\left[2\lambda_1^lU_{n-j-2}(\frac{\lambda_1}{2})+\lambda_1^{l+1}U_{j-1}(\frac{\lambda_1}{2})\right]$$

$$-\frac{1}{n}\left[2\lambda_3^lU_{n-j-2}(\frac{\lambda_3}{2})+\lambda_3^{l+1}U_{j-1}(\frac{\lambda_3}{2})\right]$$

$$-\ldots-\frac{1}{n}\lambda_{n-2}^l\left[2\lambda_{n-2}^lU_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+\lambda_{n-2}^{l+1}U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\right]+\frac{\lambda_n^l}{n},\ j=\overline{1,n-2;}$$

$$\left\{B^l\right\}_{n-1n-1}=\frac{1}{n}L_{n-1}J^l\tau_{n-1}=\frac{2}{n}(\lambda_1^l+\lambda_3^l+\ldots+\lambda_{n-2}^l)+\frac{\lambda_n^l}{n};$$

$$\left\{B^l\right\}_{nm-1}=\frac{1}{n}L_nJ^l\tau_{n-1}=\frac{1}{n}(\lambda_1^{l+1}+\lambda_3^{l+1}+\ldots+\lambda_{n-2}^{l+1})+\frac{\lambda_n^l}{n};$$

$$\left\{B^l\right\}_{n-1n}=\frac{1}{n}L_{n-1}J^l\tau_n=\left\{B^l\right\}_{nm-1};$$

$$\left\{B^l\right\}_{nn}=\frac{1}{n}L_nJ^l\tau_n=\left\{B^l\right\}_{n-1n-1}\qquad(4.35)$$

(4.34) ve (4.35) ifadelerinden

$$\left\{B^l\right\}_{ij} = \frac{\lambda_n^l}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_{2k-1}^l \left\{ U_{i-1}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right)\left[\lambda_{2k-1} U_{n-j-2}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right)\right.\right.$$
$$\left. + 2U_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right)\right] + U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right)\left[2U_{n-j-2}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right)\right.$$
$$\left.\left. + \lambda_{2k-1} U_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right)\right]\right\},\ i, j = \overline{1, n};$$

elde edilebilir. Bu ifadedeki $\lambda_i \quad (i = 1,3,5,...,n)$ B matrisinin öz değerleri, n ($n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}$) B 'nin mertebesi, $U_k(x)$ k-ıncı dereceden ikinci tür Chebyshev polinomlarını ifade eder. B sirkülant matrisinin kuvvetleri de sirkülant matristir. Bundan dolayı B' nin l-inci kuvveti

$$B^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n-1}{2}} & \cdots & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{\frac{n-1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} & \cdots & a_5 & a_4 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n-1}{2}} & a_{\frac{n-3}{2}} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

şeklinde yazılır. Bu matrisin elemanları $U_0\left(\frac{\lambda_{2k+1}}{2}\right) = 1,\ k = \overline{1, \frac{n-1}{2}}$ olmak üzere;

$$\lambda_{2k-1}\left[U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}) + U_{j-1}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2})U_{n-3}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2})\right]$$
$$+ 2\left[U_{j-1}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}) + U_{n-3}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2})U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2})\right] \tag{4.37}$$
$$= 2T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right) \quad k = \overline{1, \frac{n-1}{2}},\ j = \overline{1, \frac{n+1}{2}}$$

bağıntısı kullanılırsa;

$$a_j(l) = \left\{B^l\right\}_{1j^n}$$
$$= \lambda_n^l + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_{2k-1}^l \left[\lambda_{2k-1}\left(U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}) + U_{j-1}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}) + U_{n-3}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2})\right)\right. \tag{4.38}$$
$$\left. + 2\left(U_{j-1}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}) + U_{n-3}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2})U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{2k-1}}{2})\right), \quad j = \overline{1, \frac{n+1}{2}}\right.$$

şeklinde yazılır. (4.37)' deki eşitlik k ve j' nin bütün değerleri için ispatlanabilir. Örneğin $k = 1\ ve\ j = 1$ için

$$\lambda_1\left[U_{n-3}(\frac{\lambda_1}{2})+U_{n-3}(\frac{\lambda_1}{2})\right]+2\left[U_0(\frac{\lambda_1}{2})+U_{n-3}(\frac{\lambda_1}{2})U_{n-3}(\frac{\lambda_1}{2})\right]=2T_0(\frac{\lambda_1}{2}). \tag{4.39}$$

yazılabilir.

$T_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)=U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)=1$ olmak üzere;

$$U_{n-3}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)=\frac{\sin(n-2)\arccos\frac{\lambda_1}{2}}{\sin\arccos\frac{\lambda_1}{2}}=\frac{\sin(n-2)\arccos(-\cos\frac{\pi}{n})}{\sin\arccos(-\cos\frac{\pi}{n})}$$

$$=\frac{\sin(n-2)\arccos(\cos(\pi-\frac{\pi}{n}))}{\sin\arccos(\cos(\pi-\frac{\pi}{n}))}=\frac{\sin((n-2)(\pi-\frac{\pi}{n}))}{\sin(\pi-\frac{\pi}{n})}$$

$$=\frac{\sin(n\pi-2\pi-\frac{(n-2)\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}=\frac{\sin(n\pi-\pi+\frac{2\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}=\frac{-\sin(n\pi+\frac{2\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

bulunur. Sonuç olarak, *n* tek olmak üzere

$$U_{n-3}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)=\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}=2\cos\frac{\pi}{n}=-\lambda_1$$

yazılabilir. (4.39) ifadesinde $T_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)=U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)=1$ ve $U_{n-3}(\frac{\lambda_1}{2})=-\lambda_1$ eşitlikleri yazılırsa bu ifadenin sağ ve sol taraflarının 2' ye eşit olduğu görülür. (4.37) denkleminin $k=1$, $j=1$, *n* tek mertebesi ve λ_i için doğru olduğu anlamına gelir. Benzer olarak *k* ve *j*' nin bütün değerleri için hesaplanırsa (4.37)' deki ifadeden

$$a_j(l)=\lambda_n^l+2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\lambda_{2k-1}^l T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right),\quad j=\overline{1,\frac{n+1}{2}}$$

ve

$T_{j-1}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)=T_{j-1}(1)=1$ ($j=\overline{1,\frac{n+1}{2}}$) eşitiklerinden

$$a_j(l)=\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}l_{2k-1}\lambda_{2k-1}^l T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right),\quad j=\overline{1,\frac{n+1}{2}} \tag{4.40}$$

şeklinde yazılır. l_i, öz değer katlılığıdır. (4.40)' daki ifadede $\lambda_{2k-1}=\lambda_{n-2k+2}$ yazılırsa;

$$a_j(l)=\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} l_{n-2k+2}\lambda_{n-2k+2}^{l}T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{n-2k+2}}{2}\right),\quad j=\overline{1,\frac{n+1}{2}} \tag{4.41}$$

elde edilir. (4.36) ve (4.41) ifadelerinden *B'* nin *l*-inci kuvveti bulunur. (Rimas, 2005)

$n=2p+1$ mertebeli matris için öz değer ve öz vektör bulma işlemlerini $n=2p$ için de yapalım. *B* matrisinin $n=2p$ ($p\in\mathbb{N}$ $p\geq 2$) mertebesi için *B*' nin öz değerleri

$$\lambda_{nk}=-2\cos\frac{k\pi}{n}\qquad k=0,2,4,....,n$$

olarak bulunur. Burada $l_0=l_n=1$ ve $i=2,4,6,.....,n-2$ için $l_i=2$ 'dir. (Horn, 1986)

B' nin Jordan formu;

$$J=diag(\lambda_0,\lambda_2,\lambda_2,\lambda_4,\lambda_4,...,\lambda_{n-2},\lambda_{n-2},\lambda_n)$$

şeklinde yazılır. Buradan $J=T^{-1}BT$ dönüşümü kullanılarak *T,* T^{-1} matrisleri bulunup, $n=2p$ için *B*' nin öz vektörlerini bulalım. ($p\in\mathbb{N}$ $p\geq 2$) olmak üzere *T, B*' nin öz vektörlerinden oluşan bir matristir. T_j ($j=1,2,.....,n$) *T*" nin *j*-inci sütunu olmak üzere

$$(BT_1,BT_2,...,BT_n)=(T_1\lambda_0,T_2\lambda_2,T_3\lambda_2,T_4\lambda_4,T_5\lambda_4,...,T_{n-2}\lambda_{n-2},T_{n-1}\lambda_{n-2},T_n\lambda_n)$$

olur.

Buradan;

$$\begin{aligned}
BT_1&=T_1\lambda_0\\
BT_2&=T_2\lambda_2\\
BT_3&=T_3\lambda_2\\
BT_4&=T_4\lambda_4\\
BT_5&=T_5\lambda_4,\\
&\vdots\\
BT_{n-2}&=T_{n-2}\lambda_{n-2}\\
BT_{n-1}&=T_{n-1}\lambda_{n-2}\\
BT_n&=T_n\lambda_n
\end{aligned}$$

buluruz.

$$T_j=\begin{cases}T_{j1}, & j=2p\\ T_{j-1,2}, & j=2p+1\end{cases}\quad(p\in\mathbb{N},j=\overline{2,n-1})$$

olmak üzere *B*' nin öz vektörleri Chebyshev polinomları cinsinden

$$T=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1\end{bmatrix}^T\qquad T_{j1}=\begin{bmatrix}U_0(\frac{\lambda_j}{2}) & U_1(\frac{\lambda_j}{2}) & U_2(\frac{\lambda_j}{2}) & \cdots & U_{n-3}(\frac{\lambda_j}{2}) & U_{n-2}(\frac{\lambda_j}{2}) & 0\end{bmatrix}^T$$

$$j=2,4,6,...,n-2 \tag{4.42}$$

$$T_{j2}=\left[U_{n-3}(\frac{\lambda_j}{2})\ \cdots\ U_2(\frac{\lambda_j}{2})\ U_1(\frac{\lambda_j}{2})\ U_0(\frac{\lambda_j}{2})\ 0\ U_{n-2}(\frac{\lambda_j}{2})\right]^T \qquad j=2,4,6,...,n-2$$

$$T_n=\left[-1\ -1\ -1\ -1\ \cdots\ -1\ -1\right]^T \tag{4.43}$$

şeklinde formule edilebilir.

(4.42) ve (4.43) ifadelerinden T dönüşüm matrisi;

$$T=\begin{bmatrix}
-1 & U_0(\frac{\lambda_2}{2}) & U_{n-3}(\frac{\lambda_2}{2}) & U_0(\frac{\lambda_4}{2}) & U_{n-3}(\frac{\lambda_4}{2}) & \cdots & U_0(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & -1\\
1 & U_1(\frac{\lambda_2}{2}) & U_{n-4}(\frac{\lambda_2}{2}) & U_1(\frac{\lambda_4}{2}) & U_{n-4}(\frac{\lambda_4}{2}) & \cdots & U_1(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & U_{n-4}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & -1\\
-1 & U_2(\frac{\lambda_2}{2}) & U_{n-5}(\frac{\lambda_2}{2}) & U_2(\frac{\lambda_4}{2}) & U_{n-5}(\frac{\lambda_4}{2}) & \cdots & U_2(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & U_{n-5}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & -1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
-1 & U_{n-4}(\frac{\lambda_2}{2}) & U_1(\frac{\lambda_2}{2}) & U_{n-4}(\frac{\lambda_4}{2}) & U_1(\frac{\lambda_4}{2}) & \cdots & U_{n-4}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & U_1(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & -1\\
1 & U_{n-3}(\frac{\lambda_2}{2}) & U_0(\frac{\lambda_2}{2}) & U_{n-3}(\frac{\lambda_4}{2}) & U_0(\frac{\lambda_4}{2}) & \cdots & U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & U_0(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & -1\\
-1 & -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & -1\\
1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & -1 & -1
\end{bmatrix} \tag{4.44}$$

şeklinde yazılır.

$\frac{\tau_j}{n}$ $(T^{-1}=\frac{1}{n}(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n))$ T^{-1} matrisinin j .sütunudur.

$$\tau_j = \begin{pmatrix} (-1)^j \\ \lambda_2 U_{n-j-2}(\frac{\lambda_2}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_2}{2}) \\ 2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_2}{2}) + \lambda_2 U_{j-1}(\frac{\lambda_2}{2}) \\ \lambda_4 U_{n-j-2}(\frac{\lambda_4}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_4}{2}) \\ 2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_4}{2}) + \lambda_4 U_{j-1}(\frac{\lambda_4}{2}) \\ \vdots \\ \lambda_{n-2} U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) \\ 2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + \lambda_{n-2} U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) \\ -1 \end{pmatrix} \qquad j = \overline{1, n-2,} \qquad (4.45)$$

$$\tau_{n-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -\lambda_2 & -2 & -\lambda_4 & \cdots & -2 & -\lambda_{n-2} & -1 \end{bmatrix}^T \qquad (4.46)$$

(4.45) ve (4.46) matrisleri kullanılarak

$$T^{-1} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & 1 \\ \lambda_2 U_{n-3}(\frac{\lambda_2}{2}) + 2U_0(\frac{\lambda_2}{2}) & \lambda_2 U_{n-4}(\frac{\lambda_2}{2}) + 2U_1(\frac{\lambda_2}{2}) & \cdots & \lambda_2 U_0(\frac{\lambda_2}{2}) + 2U_{n-3}(\frac{\lambda_2}{2}) & -2 & -\lambda_2 \\ 2U_{n-3}(\frac{\lambda_2}{2}) + \lambda_2 U_0(\frac{\lambda_2}{2}) & 2U_{n-4}(\frac{\lambda_2}{2}) + \lambda_2 U_1(\frac{\lambda_2}{2}) & \cdots & 2U_0(\frac{\lambda_2}{2}) + \lambda_2 U_{n-3}(\frac{\lambda_2}{2}) & -\lambda_2 & -2 \\ \lambda_4 U_{n-3}(\frac{\lambda_4}{2}) + 2U_0(\frac{\lambda_4}{2}) & \lambda_4 U_{n-4}(\frac{\lambda_4}{2}) + 2U_1(\frac{\lambda_4}{2}) & \cdots & \lambda_4 U_0(\frac{\lambda_4}{2}) + 2U_{n-3}(\frac{\lambda_4}{2}) & -2 & -\lambda_4 \\ 2U_{n-3}(\frac{\lambda_4}{2}) + \lambda_4 U_0(\frac{\lambda_4}{2}) & 2U_{n-4}(\frac{\lambda_4}{2}) + \lambda_4 U_1(\frac{\lambda_4}{2}) & \cdots & 2U_0(\frac{\lambda_4}{2}) + \lambda_4 U_{n-3}(\frac{\lambda_4}{2}) & -\lambda_4 & -2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-2} U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + 2U_0(\frac{\lambda_{n-3}}{2}) & \lambda_{n-2} U_{n-4}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + 2U_1(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & \cdots & \lambda_{n-2} U_0(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + 2U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & -2 & -\lambda_{n-2} \\ 2U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + \lambda_{n-2} U_0(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & 2U_{n-4}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + \lambda_{n-2} U_1(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & \cdots & 2U_0(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + \lambda_{n-2} U_{n-3}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) & -\lambda_{n-2} & -2 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (4.47)$$

şeklinde yazılır. Şimdi B'nin l-inci kuvvetini oluşturalım. $T = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_n \end{bmatrix}^T$ olmak üzere;

$$L_i^T = \left[(-1)^i \quad U_{i-1}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \quad U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \quad U_{i-1}\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) \quad U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) \quad U_{i-1}\left(\frac{\lambda_6}{2}\right) \right.$$

$$\left. U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_6}{2}\right) \cdots U_{i-1}\left(\frac{\lambda_{n-4}}{2}\right) \quad U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_{n-4}}{2}\right) \quad U_{i-1}\left(\frac{\lambda_{n-2}}{2}\right) \quad U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_{n-2}}{2}\right) \quad -1 \right]^T$$

$$i = \overline{1, n-2}$$

$$L_{n-1}^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$L_n^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

ifadelerinden $B^l = TJ^lT^{-1}$ ve $J^l = diag(\lambda_1^l, \lambda_1^l, \lambda_3^l, \lambda_3^l, ..., \lambda_{n-2}^l, \lambda_{n-2}^l, \lambda_n^l)$ yazılır. L_i, T'nin i-inci satırı olmak üzere

$$\left\{B^l\right\}_{ij} = \frac{1}{n} L_i J^l \tau_j = \frac{L_i}{n} \begin{bmatrix} \lambda_0^l (-1)^j \\ \lambda_2^l (\lambda_2 U_{n-j-2}(\frac{\lambda_2}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_2}{2})) \\ \lambda_2^l (2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_2}{2}) + \lambda_2 U_{j-1}(\frac{\lambda_2}{2})) \\ \lambda_4^l (\lambda_4 U_{n-j-2}(\frac{\lambda_4}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_4}{2})) \\ \lambda_4^l (2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_4}{2}) + \lambda_4 U_{j-1}(\frac{\lambda_4}{2})) \\ \vdots \\ \lambda_{n-2}^l (\lambda_{n-2} U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})) \\ \lambda_{n-2}^l (2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + \lambda_{n-2} U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})) \\ -\lambda_n^l \end{bmatrix}$$

olup

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{i+j}\frac{\lambda_0^l}{n} + \frac{1}{n}\left\{\lambda_2^l U_{i-1}(\frac{\lambda_2}{2})\left[\lambda_2 U_{n-j-2}(\frac{\lambda_2}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_2}{2})\right]\right. \\
&\left. + \lambda_2^l U_{n-i-2}(\frac{\lambda_2}{2})\left[2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_2}{2}) + \lambda_2 U_{j-1}(\frac{\lambda_2}{2})\right]\right\} \\
&+ \frac{1}{n}\left\{\lambda_4^l U_{i-1}(\frac{\lambda_4}{2})\left[\lambda_4 U_{n-j-2}(\frac{\lambda_4}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_4}{2})\right]\right. \\
&\left. + \lambda_4^l U_{n-i-2}(\frac{\lambda_4}{2})\left[2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_4}{2}) + \lambda_4 U_{j-1}(\frac{\lambda_4}{2})\right]\right\} \\
&+ \ldots + \frac{1}{n}\left\{\lambda_{n-2}^l U_{i-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\left[\lambda_{n-2} U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\right]\right. \\
&\left. + \lambda_{n-2}^l U_{n-i-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\left[2U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + \lambda_{n-2} U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\right]\right\} + \frac{\lambda_n^l}{n}, \quad i,j = \overline{1,n-2;}
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

$$
\left\{B^l\right\}_{in-1} = \frac{1}{n} L_i J^l \tau_{n-1} = \frac{L_i}{n}\left[-\lambda_0^l \;\; -2\lambda_2^l \;\; -\lambda_2\lambda_2^l \;\; -2\lambda_4^{l+1} \;\; -\lambda_4\lambda_4^l \;\; \cdots \;\; -2\lambda_{n-2}^l \;\; -\lambda_{n-2}\lambda_{n-2}^{l+1} \;\; -\lambda_n^l\right]^T
$$

$$
\begin{aligned}
&= -(-1)^i \lambda_0^l - \frac{1}{n}\left[2\lambda_2^l U_{i-1}(\frac{\lambda_2}{2}) + \lambda_2\lambda_2^l U_{n-i-2}(\frac{\lambda_2}{2})\right] \\
&\quad - \frac{1}{n}\left[2\lambda_4^l U_{i-1}(\frac{\lambda_4}{2}) + \lambda_4\lambda_4^l U_{n-i-2}(\frac{\lambda_4}{2})\right] \\
&\quad - \ldots - \frac{1}{n}\left[2\lambda_{n-2}^l U_{i-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + \lambda_{n-2}\lambda_{n-2}^l U_{n-i-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\right] + \frac{\lambda_n^l}{n}, \quad i,j = \overline{1,n-2;}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{B^l\right\}_{n-1\,j} = \frac{1}{n} L_{n-1} J^l \tau_j \\
&\quad = -(-1)^j \frac{\lambda_0^l}{n} - \frac{1}{n}\left[\lambda_2^l(\lambda_2 U_{n-j-2}(\frac{\lambda_2}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_2}{2}))\right] \\
&\quad - \frac{1}{n}\left[\lambda_4^l(\lambda_4 U_{n-j-2}(\frac{\lambda_4}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_4}{2})\right] \\
&- \ldots - \frac{1}{n}\left[\lambda_{n-2}^l(\lambda_{n-2} U_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}) + 2U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2}))\right] + \frac{\lambda_n^l}{n}, \;\; i,j = \overline{1,n-2;}
\end{aligned}
$$

$$\left\{B^l\right\}_{in}=\frac{1}{n}L_iJ^l\tau_n=\frac{L_i}{n}\left[\lambda_0^l\ -\lambda_2\lambda_2^l\ -2\lambda_2^l\ -\lambda_4\lambda_4^l\ 2\lambda_4\cdots\ -\lambda_{n-2}\lambda_{n-2}^l\ -2\lambda_{n-2}^l\ -\lambda_n^l\right]^T$$

$$=-(-1)^i\frac{\lambda_0^l}{n}-\frac{1}{n}\left[\lambda_2\lambda_2^lU_{i-1}(\frac{\lambda_2}{2})+2\lambda_2^lU_{n-i-2}(\frac{\lambda_2}{2})\right]$$

$$-\frac{1}{n}\left[\lambda_4\lambda_4^lU_{i-1}(\frac{\lambda_4}{2})+2\lambda_4^lU_{n-i-2}(\frac{\lambda_4}{2})\right]-$$

$$...-\frac{1}{n}\left[\lambda_{n-2}\lambda_{n-2}^{l+1}U_{i-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+2\lambda_{n-2}^lU_{n-i-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\right]+\frac{\lambda_n^l}{n},\ i=\overline{1,n-2;}$$

$$\left\{B^l\right\}_{nj}=\frac{1}{n}L_nJ^l\tau_j$$

$$=-\frac{1}{n}\left[2\lambda_1^{l+1}U_{n-j-2}(\frac{\lambda_1}{2})+\lambda_1^{l+1}U_{j-1}(\frac{\lambda_1}{2})\right]$$

$$-\frac{1}{n}\left[2\lambda_3^lU_{n-j-2}(\frac{\lambda_3}{2})+\lambda_3^{l+1}U_{j-1}(\frac{\lambda_3}{2})\right]$$

$$-...-\frac{1}{n}\left[2\lambda_{n-2}^lU_{n-j-2}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})+2\lambda_{n-2}^{l+1}U_{j-1}(\frac{\lambda_{n-2}}{2})\right]+\frac{\lambda_n^l}{n},\ j=\overline{1,n-2;}$$

$$\left\{B^l\right\}_{n-1n-1}=\frac{1}{n}L_{n-1}J^l\tau_{n-1}=\frac{\lambda_0^l}{n}+\frac{1}{n}(2\lambda_2^l)+\frac{1}{n}(2\lambda_4^l)+...+\frac{1}{n}(2\lambda_{n-2}^l)+\frac{\lambda_n^l}{n};$$

$$\left\{B^l\right\}_{nn-1}=\frac{1}{n}L_nJ^l\tau_{n-1}=-\frac{\lambda_0^l}{n}+\frac{1}{n}(\lambda_2\lambda_2^l)+\frac{1}{n}(\lambda_4\lambda_4^l)+...+\frac{1}{n}(\lambda_{n-2}\lambda_{n-2}^l)+\frac{\lambda_n^l}{n};$$

$$\left\{B^l\right\}_{n-1n}=\frac{1}{n}L_{n-1}J^l\tau_n=\left\{B^l\right\}_{nm-1}$$

ve

$$\left\{B^l\right\}_{nn}=\frac{1}{n}L_nJ^l\tau_n=\left\{B^l\right\}_{n-1n-1}\qquad(4.49)$$

elde edilir. (4.48) ve (4.49) ifadelerinden

$$\left\{B^l\right\}_{ij}=(-1)^{i+j}\frac{\lambda_0^l}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\lambda_{2k}^l\left\{U_{i-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)\left[\lambda_{2k}U_{n-j-2}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)+2U_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)\right]\right.$$

$$\left.+U_{n-i-2}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)\left[2U_{n-j-2}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)+\lambda_{2k}U_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)\right]\right\}+\frac{\lambda_n^l}{n},\ i,j=\overline{1,n}$$

ifadesi elde edilebilir. Bu ifadedeki $\lambda_i \quad (i=1,3,5,...,n)$; B matrisinin öz değerleri, n ($n=2p+1$)($p\in\mathbb{N}$) B' nin mertebesi, $U_k(x)$ k-ıncı dereceden ikinci tür Chebyshev polinomlarını ifade eder. B matrisinin kuvvetleri de sirkülant matristir. Bundan dolayı B' nin l-inci kuvveti

$$B^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}} & \cdots & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{\frac{n}{2}-1} & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & \cdots & a_5 & a_4 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

şeklinde yazılır. $k=\overline{1,\frac{n}{2}}$ için

$U_0\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)=1,$ ve $j=\overline{1,\frac{n+2}{2}}$ için

$$\lambda_{2k}\left[U_{n-j-2}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)+U_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)U_{n-3}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)\right]$$
$$+2\left[U_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)+U_{n-3}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)U_{n-j-2}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)\right]=2T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right) \tag{4.51}$$

bağıntısı kullanılırsa;

$$a_j(l)=\left\{B^l\right\}_{1j^n}$$
$$=(-1)^{j+1}\lambda_0^l+\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\lambda_{2k}^l\left[\lambda_{2k}\left(U_{n-j-2}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)+U_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)+U_{n-3}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)\right)\right. \tag{4.52}$$
$$\left.+2\left(U_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)+U_{n-3}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)U_{n-j-2}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)\right)\right]+\lambda_n^l \quad j=\overline{1,\frac{n+2}{2}}$$

olur. (4.51)'deki eşitlik k ve j' nin bütün değerleri için ispatlanabilir. Örneğin $k=1$ *ve* $j=1$ için

$$\lambda_2\left[U_{n-3}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)+U_{n-3}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)\right]+2\left[U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)+U_{n-3}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)U_{n-3}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)\right]=2T_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \tag{4.53}$$

yazılabilir. $T_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)=U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)=1$ 'dir.

$$U_{n-3}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)=\frac{\sin(n-2)\arccos\frac{\lambda_2}{2}}{\sin\arccos\frac{\lambda_2}{2}}=\frac{\sin(n-2)\arccos(-\cos\frac{2\pi}{n})}{\sin\arccos(-\cos\frac{2\pi}{n})}$$

$$=\frac{\sin(n-2)\arccos(\cos(\pi-\frac{2\pi}{n}))}{\sin\arccos(\cos(\pi-\frac{2\pi}{n}))}=\frac{\sin((n-2)(\pi-\frac{2\pi}{n}))}{\sin(\pi-\frac{2\pi}{n})}$$

$$=\frac{\sin(n\pi-2\pi-\frac{2(n-2)\pi}{n})}{\sin(\frac{2\pi}{n})}=\frac{\sin(n\pi-2\pi+\frac{4\pi}{n})}{\sin(\frac{2\pi}{n})}=\frac{\sin(n\pi+\frac{4\pi}{n})}{\sin(\frac{2\pi}{n})}$$

bulunur. Sonuç olarak, *n* çift tamsayı olmak üzere

$$U_{n-3}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)=\frac{\sin\frac{4\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}=2\cos\frac{2\pi}{n}=-\lambda_2$$

elde edilir. (4.53) ifadesinde $T_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)=U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)=1$ ve $U_{n-3}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)=-\lambda_2$ eşitlikleri yazılırsa bu ifadenin sağ ve sol taraflarının 2' ye eşit olduğu görülür. Bu (4.51) denkleminin $k=1$, $j=1$, n çift mertebesi ve λ_i için doğru olduğu anlamına gelir. Benzer olarak *k* ve *j*' nin bütün değerleri için (4.52) $j=\overline{1,\frac{n+2}{2}}$ için

$$a_j(l)=(-1)^{j+1}\lambda_0^l+2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\lambda_{2k}^l T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)+\lambda_n^l$$

ve

$T_{j-1}\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)=T_{j-1}(-1)=(-1)^{j+1}$ eşitiklerinden

$$a_j(l)=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}l_{2k}\lambda_{2k}^l T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right) \qquad (4.54)$$

şeklinde yazılır. Buradaki l_i, λ_i öz değerinin katlılığıdır. (4.54)' deki ifade

$$j=\overline{1,\frac{n+2}{2}},\quad v=\begin{cases}4,\ if\ n=4p\ (p\in\mathbb{N}),\\ 2,\ if\ n=4p-2\,(p\in\mathbb{N},p\geq 2).\end{cases}$$

olmak üzere

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\frac{n-v}{2}} l_{2k} \lambda_{2k}^{l} T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right), \tag{4.55}$$

$$S_2 = \sum_{k=\frac{n+v}{4}}^{\frac{n}{2}} l_{2k} \lambda_{2k}^{l} T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right); \tag{4.56}$$

olmak üzere

$$\alpha_j(l) = S_1 + S_2; \tag{4.57}$$

şeklinde yazalım.

S_2 de $k = \frac{n+v}{4} + m$ yazılırsa;

$$S_2 = \sum_{m=0}^{\frac{n-v}{4}} l_{\frac{n+v}{2}+2m} \lambda_{\frac{n+v}{2}+2m}^{l} T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{\frac{n+v}{2}+2m}}{2}\right) \quad \text{ve}$$

S_2 toplamında m yerine k yazılırsa;

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\frac{n-v}{4}} l_{n-2k} \lambda_{n-2k}^{l} T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{n-2k}}{2}\right)$$

olur.

$$\lambda_{2k} = -\lambda_{n-2k} \left(k = 0, \frac{n-v}{4}\right) \tag{4.58}$$

ifadesi S_2'de yerine yazılırsa;

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\frac{n-v}{4}} l_{2k} (-\lambda_{2k})^{l} T_{j-1}\left(-\frac{\lambda_{2k}}{2}\right) = (-1)^{l+j-1} \sum_{k=0}^{\frac{n-v}{4}} l_{2k} \lambda_{2k}^{l} T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right) \tag{4.59}$$

olur. (4.55) ve (4.59) ifadeleri (4.57)' de yerine yazılırsa $j = \overline{1, \frac{n+2}{2}}$ için

$$\alpha_j(l) = \left[1 + (-1)^{l+j-1}\right] \sum_{k=0}^{\frac{n-v}{4}} l_{2k} \lambda_{2k}^{l} T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right)$$

elde edilir. (4.55) ifadesinden

$$\alpha_j(l)=\left[1+(-1)^{l+j-1}\right]\sum_{k=0}^{\overline{\frac{n-v}{4}}} l_{n-2k}(\lambda_{n-2k})^l T_{j-1}\left(-\frac{\lambda_{n-2k}}{2}\right)$$

$$=\left[1+(-1)^{l+j-1}\right](-1)^{l+j-1}\sum_{k=0}^{\overline{\frac{n-v}{4}}} l_{n-2k}\lambda_{n-2k}^l T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{n-2k}}{2}\right) \qquad (4.60)$$

$$=\left[1+(-1)^{l+j-1}\right]\sum_{k=0}^{\overline{\frac{n-v}{4}}} l_{n-2k}\lambda_{n-2k}^l T_{j-1}\left(\frac{\lambda_{n-2k}}{2}\right)$$

olup (4.50) ve (4.60) ifadelerinden *B*' nin *l*-inci kuvveti bulunur. (Rimas, 2006)

B matrisinin l-inci kuvvetinin genel ifadesini;

$$v=\begin{cases}4,\ if\ \ n=4p\,(p\in\mathbb{N})\\ 2,\ if\ \ n=4p-2\,(p\in\mathbb{N},p\geq 2)\end{cases}$$

için

$$a_m(l)=\left[1+(-1)^{l+m-1}\right]p_{ij}\sum_{k=0}^{\overline{\frac{n-y}{4}}} l_{n-2k}\lambda_{n-2k}^l T_{m-1}\left(\frac{\lambda_{n-2k}}{2}\right)\qquad m=\overline{1,\frac{n}{2}+1}$$

olmak üzere

$$B^l=TJ^lT^{-1}=\frac{1}{n}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}} & \cdots & a_4 & a_3 & a_2\\ a_2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{\frac{n}{2}-1} & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & \cdots & a_5 & a_4 & a_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. (Rimas, 2006)

5. NÜMERİK ÖRNEKLER

Örnek 5.1 $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&0\end{bmatrix}$ tridiagonal matrisinin ℓ. $(\ell\in\mathbb{N})$ kuvvetlerini hesaplayalım. Matrisin Jordan formu:

$$J=\begin{bmatrix}-\lambda_5&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&\lambda_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&a\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $a=\sqrt{3}$ ' tür. Böylece

$$B^l=\frac{1}{6}(q_{ij})=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\a_1&a_2&a_3&a_2\\a_2&a_3&a_4&a_3\\2a_1&2a_2&2a_3&2a_2\end{bmatrix}$$

olup, burada $l\in\mathbb{N},\ l\geq 2$ olmak üzere

$$a_1(l)=a^{l-1}(1-(-1)^l)$$
$$a_2(l)=a^{l}(1-(-1)^l)$$
$$a_3(l)=a^{l+1}(1-(-1)^l)$$
$$a_4(l)=a^{l+2}(1-(-1)^l)$$

şeklindedir.

Örnek 5.2 $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&2&0\end{bmatrix}$ tridiagonal matrisinin T dönüşüm matrisini ve dönüşüm matrisinin tersini hesaplayalım.

A 'nın öz değerleri ve ikinci tür Chebyshev polinomları cinsinden ifadeleri

$$\lambda_1=-a,\ \lambda_2=-c,\ \lambda_3=0,\ \lambda_4=c,\ \lambda_5=a;\ a=2\cos\frac{\pi}{8},\ c=2\cos\frac{3\pi}{8}$$

$i=1,2,4,5$ olmak üzere $U_{-1}(\frac{\lambda_i}{2})=0,\ i=1,2,4,5\ U_0(\frac{\lambda_i}{2})=1,\ U_1(\frac{\lambda_i}{2})=\lambda_i,$

$$U_2(\frac{\lambda_1}{2}) = U_2(\frac{\lambda_5}{2}) = \frac{a}{c},\ U_2(\frac{\lambda_2}{2}) = U_2(\frac{\lambda_4}{2}) = -\frac{c}{a},$$

$$U_3(\frac{\lambda_1}{2}) = -\frac{2}{c},\ U_3(\frac{\lambda_2}{2}) = \frac{2}{a},\ U_3(\frac{\lambda_4}{2}) = -\frac{2}{a},\ U_3(\frac{\lambda_5}{2}) = \frac{2}{c}$$

şeklindedir. Ayrıca $t_1 = \frac{\lambda_2^2}{16},\ t_2 = \frac{\lambda_1^2}{16},\ t_4 = \frac{\lambda_5^2}{16},\ t_5 = \frac{\lambda_4^2}{16}$ olup

$$T = \begin{bmatrix} U_{-1}(\frac{\lambda_1}{2}) & U_{-1}(\frac{\lambda_2}{2}) & 1 & U_{-1}(\frac{\lambda_4}{2}) & U_{-1}(\frac{\lambda_5}{2}) \\ U_0(\frac{\lambda_1}{2}) & U_0(\frac{\lambda_2}{2}) & 0 & U_0(\frac{\lambda_4}{2}) & U_0(\frac{\lambda_5}{2}) \\ U_1(\frac{\lambda_1}{2}) & U_0(\frac{\lambda_2}{2}) & -1 & U_1(\frac{\lambda_4}{2}) & U_1(\frac{\lambda_5}{2}) \\ U_2(\frac{\lambda_1}{2}) & U_2(\frac{\lambda_2}{2}) & 0 & U_2(\frac{\lambda_4}{2}) & U_2(\frac{\lambda_5}{2}) \\ U_3(\frac{\lambda_1}{2}) & U_3(\frac{\lambda_2}{2}) & 1 & U_3(\frac{\lambda_4}{2}) & U_3(\frac{\lambda_5}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -a & -c & -1 & c & a \\ \frac{a}{c} & -\frac{c}{a} & 0 & -\frac{c}{a} & \frac{a}{c} \\ -\frac{2}{c} & \frac{2}{a} & 1 & -\frac{2}{a} & \frac{2}{c} \end{bmatrix}$$

ve

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2t_1}{\lambda_1}U_0(\frac{\lambda_1}{2}) & 2t_1U_0(\frac{\lambda_1}{2}) & 2t_1U_1(\frac{\lambda_1}{2}) & 2t_1U_2(\frac{\lambda_1}{2}) & t_1U_3(\frac{\lambda_1}{2}) \\ \frac{2t_2}{\lambda_2}U_0(\frac{\lambda_2}{2}) & 2t_2U_0(\frac{\lambda_2}{2}) & 2t_2U_1(\frac{\lambda_2}{2}) & 2t_2U_2(\frac{\lambda_2}{2}) & t_2U_3(\frac{\lambda_2}{2}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2t_4}{\lambda_4}U_0(\frac{\lambda_4}{2}) & 2t_4U_0(\frac{\lambda_4}{2}) & 2t_4U_1(\frac{\lambda_4}{2}) & 2t_4U_2(\frac{\lambda_1}{2}) & t_4U_3(\frac{\lambda_4}{2}) \\ \frac{2t_5}{\lambda_5}U_0(\frac{\lambda_5}{2}) & 2t_5U_0(\frac{\lambda_5}{2}) & 2t_5U_1(\frac{\lambda_5}{2}) & 2t_5U_2(\frac{\lambda_5}{2}) & t_5U_3(\frac{\lambda_5}{2}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -\frac{c^2}{a} & c^2 & -c^2a & ac & -c \\ -\frac{a^2}{c} & a^2 & -a^2c & -ac & a \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^2}{c} & a^2 & a^2c & -ac & -a \\ \frac{c^2}{a} & c^2 & c^2a & ac & c \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 5.3 $B=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$ simetrik sirkülant matrisinin $l.$ $(l\in\mathbb{N})$ kuvvetlerini hesaplayalım. Matrisin Jordan formu;

$J=diag(\lambda_0,\lambda_2,\lambda_2,\lambda_4)=(-2,0,0,2)$

şeklindedir. Böylece

$$B^l=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_2\\a_2&a_1&a_2&a_3\\a_3&a_2&a_1&a_2\\a_2&a_3&a_2&a_1\end{bmatrix}$$

olup, burada

$a_1(l)=2^l(1+(-1)^l)$

$a_2(l)=2^l(1-(-1)^l)$

$a_3(l)=2^l(1+(-1)^l)$

şeklindedir.

Örnek 5.4 $B=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{bmatrix}$ simetrik bir sirkülant matrisin T dönüşüm matrisini ve dönüşüm matrisinin tersini heasplayalım.

A' nın öz değerleri ve ikinci tür Chebyshev polinomları cinsinden ifadeleri

$\lambda_1=-2\cos\frac{\pi}{5}=-a,\ \lambda_3=-2\cos\frac{3\pi}{5}=b;\ a=2\cos\frac{\pi}{5},\ b=2\cos\frac{2\pi}{5}$

$i=1,3$ olmak üzere $U_0(\frac{\lambda_i}{2})=1,\ \ U_1(\frac{\lambda_i}{2})=\lambda_i,\ \ U_2(\frac{\lambda_1}{2})=a,\ U_2(\frac{\lambda_3}{2})=-b$

şeklindedir.

$$T=\begin{bmatrix} U_0(\frac{\lambda_1}{2}) & U_2(\frac{\lambda_1}{2}) & U_0(\frac{\lambda_3}{2}) & U_2(\frac{\lambda_3}{2}) & 1 \\ U_1(\frac{\lambda_1}{2}) & U_1(\frac{\lambda_1}{2}) & U_1(\frac{\lambda_3}{2}) & U_1(\frac{\lambda_3}{2}) & 1 \\ U_2(\frac{\lambda_1}{2}) & U_0(\frac{\lambda_1}{2}) & U_2(\frac{\lambda_3}{2}) & U_0(\frac{\lambda_3}{2}) & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & a & 1 & -b & 1 \\ -a & -a & b & b & 1 \\ a & 1 & -b & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$T^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} \lambda_1 U_2(\frac{\lambda_1}{2})+2U_0(\frac{\lambda_1}{2}) & (\lambda_1+2)U_1(\frac{\lambda_1}{2}) & \lambda_1 U_0(\frac{\lambda_1}{2})+2U_2(\frac{\lambda_1}{2}) & -2 & -\lambda_1 \\ 2U_2(\frac{\lambda_1}{2})+\lambda_1 U_0(\frac{\lambda_1}{2}) & (\lambda_1+2)U_1(\frac{\lambda_1}{2}) & 2U_0(\frac{\lambda_1}{2})+\lambda_1 U_2(\frac{\lambda_1}{2}) & -\lambda_1 & -2 \\ \lambda_3 U_2(\frac{\lambda_3}{2})+2U_0(\frac{\lambda_3}{2}) & (\lambda_3+2)U_1(\frac{\lambda_3}{2}) & \lambda_3 U_0(\frac{\lambda_3}{2})+2U_2(\frac{\lambda_3}{2}) & -2 & -\lambda_3 \\ 2U_2(\frac{\lambda_3}{2})+\lambda_3 U_0(\frac{\lambda_3}{2}) & (\lambda_3+2)U_1(\frac{\lambda_3}{2}) & 2U_0(\frac{\lambda_3}{2})+\lambda_3 U_2(\frac{\lambda_3}{2}) & -\lambda_3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -b & -b & a & -2 & a \\ a & -b & -b & a & -2 \\ a & a & -b & -2 & -b \\ -b & a & a & -b & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada seçilmiş simetrik bir sirkülant matris ile tridiagonal bir matrisin $n = 2p$ ve $n = 2p + 1$ için pozitif kuvvetlerinin genel ifadesi türetilmiştir. Bu genel ifade kökleri bilinen Chebyshev polinomuna bağlı olarak ifade edilebilmiştir. Böylelikle bu matrislerin herhangi bir pozitif tamsayı kuvvetinin hesabı Chebyshev polinomu yardımıyla kolaylıkla bulunabilir.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P. 1992, Difference Equations and Inequalities Marcel Dekker.

Bozkurt, D., Türen, B., Solak, S., 2005, Lineer Cebir, *Dizgi Ofset Matbaacılık*, Konya.

Davis, P.J., 1979, Circulant Matrices, *John Wiley and Sons*, New York.

Fox, L., Parke J. B., 1968, Chebyshev polynomials in Numerical Analysis, *Oxford University Press,* London.

James, G., 1994, Advanced Modern Engeneering Mathematics, *Addison-Wesley.*

Karner, H., Schneid, J. Ueberhuber, C.W., 2003, Spectral decomposition of real circulant matrices, *Linear Algebra and Applications,* 367, 301-311.

Kıyak, H., Gürses, I., Yılmaz, F., Bozkurt, D., 2010, A Formula for Computing Integer Powers for One Type of Tridiagonal Matrix, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39 (3), 351-363.

Rimas, J., 2005, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order symmetric circulant matrices-I, *Applied Mathematics and Computation*, 165, 137-141.

Rimas, J., 2005, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order symmetric circulant matrices-II, *Applied Mathematics and Computation*, 169, 1016-1027.

Rimas, J., 2006, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order symmetric circulant matrices-I, *Applied Mathematics and Computation*, 172, 86-90.

Rimas, J., 2006, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order tridiagonal matrices with zero row-I, *Applied Mathematics and Computation*, 169, 1390-1394.

Rimas, J., 2006, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order symmetric circulant matrices-II, *Applied Mathematics and Computation*, 174, 511-523.

Rimas, J., 2006, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order tridiagonal matrices with zero row-II, *Applied Mathematics and Computation*, 174, 490-499.

Rimas, J., 2005, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of even order tridiagonal matrices with zero row-I, *Applied Mathematics and Computation*, 164, 149-154.

Rimas, J., 2004, Analysis of Multidimensional Delay System, *Proceedings Sixteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems,* Lenven, Belgium. ISBN 90-5682-517-8.

Rimas, J., 1977, Investigation of the Dynamics of Mutually Synchronized Systems, Telecommunications and Radio Engineering, 32, 68-79.

Zhang, F., 1961, Matrix Theory, *Springer*, USA

http://www.biyosim.com/tr/genel-bilgiler/otomatik-kontrol-sistemi-nedir.html

http://www.cmeks.com/otomasyon-kontrol-sistemleri.html

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Nesibe ACAR
Uyruğu	**:**	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Merzifon/Amasya, 01.06.1985
Telefon	**:**	055533505824
Faks	**:**	
e-mail	**:**	nesbiyv@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Güventaş Anadolu Lisesi, Konya**	**2003**
Üniversite	:	**Mimar Sinan Üniversitesi, İstanbul**	**2009**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Konya**	**2013**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2008-2009	**Fem Dersaneleri**	**Ögretmen**
2009-2013	**Sabah Dersaneleri**	**Ögretmen**

UZMANLIK ALANI

Matris Kuvvetleri

YABANCI DİLLER

İngilizce