T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KİTLE ORTALAMASI VE VARYANSI İÇİN SIRA İSTATİSTİKLERİNE DAYANAN HOMOJENLİK TESTLERİ

Neriman KARADAYI
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya,2010

ÖZET

Doktora Tezi

KİTLE ORTALAMASI VE VARYANSI İÇİN SIRA İSTATİSTİKLERİNE DAYANAN HOMOJENLİK TESTLERİ

Neriman KARADAYI

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. M. Fedai KAYA
2010, 100 Sayfa

Aynı parametrik dağılımlar ailesinden alınan $k \geq 2$ kitlenin parametrelerinin homojenliğinin (eşitliğinin) test edilmesi her alanda karşımıza çıkmaktadır. Uygulamada normal dağılıma sahip kitlelerin ortalamalarının eşitliğinin test edilmesi durumu ile çok sık karşılaşılmaktadır. Normal dağılıma sahip kitlelerin ortalamalarının karşılaştırılması durumunda en önemli varsayım ise varyansların homojenliğidir. Uygulamada en çok karşılaşılan diğer bir dağılım ise yaşam zamanı dağılımlarının modellenmesinde kullanılan üstel dağılımdır. Bu çalışmada normal dağılıma sahip kitlelerin ortalamalarının eşitliğinin ve varyansların homojenliğinin test edilmesi için sıra istatistiklerine dayanan test istatistikleri önerilmiştir. Önerilen yöntem tek ve iki parametreli üstel dağılıma sahip kitlelerin ortalamalarının eşitliğinin test edilmesinde de kullanılmıştır. Son olarak önerilen test istatistiklerinin güç değerleri literatürdeki bazı test istatistiklerinin güç değerleri ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Normal dağılım**,** varyansların homojenliği, üstel dağılım, sıra istatistikleri, test istatistikleri

ABSTRACT

PhD Thesis

HOMOGENEITY TESTS BASED ON ORDER STATISTICS FOR MEAN AND VARIANCE

Neriman KARADAYI

Selcuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. M. Fedai KAYA

2010, 100 Page

Tests of the homogeneity (equality) of $k \geq 2$ population parameters taken from the same parametric distribution families are encountered in each area. The situation of testing normally distributed population means equality is very common in application. The most important assumption in the comparison of testing normally distributed population means is the homogeneity of variances. In application, another distribution which is most confronted is the exponential distribution used in modelling life time distributions. In this study, test statistics based on order statistics for testing the equality of normally distributed population means and homogeneity of variances are proposed. The proposed method is also used for testing the equality of population means having one or two exponential distribution. Finally power values of the proposed test statistics are compared with the power values of some test statistics.

Key Words: Normal distribution, homogeneity of variances, exponential distribution, order statistics, test statistics.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın konusunun seçiminde ve gerçekleşmesinde bana yön veren çok değerli hocam Sayın Doç.Dr. Mehmet Fedai KAYA' ya, çalışmamda bana yardımcı olan Doç.Dr. Coşkun KUŞ, Yrd.Doç.Dr. İsmail KINACI, Yrd. Doç. Dr. Buğra SARAÇOĞLU ve Dr. Neslihan İYİT hocalarıma, benden hiçbir şekilde desteklerini esirgemeyen aileme, sevgili arkadaşlarım Yrd. Doç.Dr. Yasemin Öztekin, Yrd.Doç.Dr. Gülnur ÇELİK KIZILKAN ve tüm mesai arkadaşlarıma en içten duygularımla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
ŞEKİLLER DİZİNİ vii
ÇİZELGELER DİZİNİ ix
1. GİRİŞ..... 1
2. TEMEL KAVRAMLAR..... 3
2.1. Olasılık Uzayı ve Rasgele Değişkenler 3
2.2. Bazı Dağılımlar..... 5
2.2.1. Tek parametreli üstel dağılım..... 5
2.2.2. İki parametreli üstel dağılım..... 5
2.2.3. Normal dağılımı..... 6
2.2.4. Ki-kare dağılımı..... 6
2.2.5. *F* dağılımı..... 7
2.2.6. Beta dağılımı 7
2.3. Sıra İstatistikleri 8
2.3.1. Sıra istatistiklerinin dağılımları..... 9
2.4. Tahmin..... 14
2.4.1. Nokta tahmini..... 14
2.4.2. Normal dağılımın parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri 15
2.4.3. Tek parametreli üstel dağılımın parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicisi 16
2.4.4. İki parametreli üstel dağılımın parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri 17
2.5. Parametrik Hipotez Testleri 17
2.6. Olabilirlik Oran Testleri..... 18
2.7. Varyans Analizi (ANOVA)..... 20

3. VARYANSLARIN HOMOJENLİĞİ ……..... 22
3.1. Varyansların Homojenliği İçin Testler…..... 24
3.1.1.Bartlett'in χ^2 testi..... 24
3.1.2. Hartley testi ……..…..... 25
3.1.3. Levene1 testi…….. 26
3.1.4. Levene2 testi ……..…… 27
3.1.5.Levene3 testi …….. 27
3.1.6.Levene4 testi ……..……. 27
3.1.7.Cochran testi……...…..... 28
4. VARYANSLARIN HOMOJENLİĞİ İÇİN ÖNERİLEN TEST İSTATİSTİĞİ ... 29
4.1. Normal Dağılma Sahip $k \geq 2$ Kitle İçin Varyansların Homojenlik Testi .. 29
4.1.1. *K* test istatistiğinin dağılımı…….....……..... 30
4.1.2. *K* test istatistiğine ilişkin kritik değerler……..... 37
4.2. Simülasyon Çalışması…….. 37
5. NORMAL DAĞILIMIN ORTALAMALARININ EŞİTLİĞİ İÇİN ÖNERİLEN TEST İSTATİSTİĞİ.……..……..... 45
5.1. Normal Dağılma Sahip $k \geq 2$ Kitle İçin Ortalamaların Eşitliği Testi …… 45
5.1.1. *M* test istatistiğinin dağılımı…..……..…..... 46
5.1.2. *M* test istatistiğine ilişkin kritik değerler……..... 47
5.2. Simülasyon Çalışması…….. 49
6. ÜSTEL DAĞILIMIN PARAMETRELERİNİN EŞİTLİĞİ İÇİN TESTLER ….. 56
6.1. Üstel Dağılımın Parametrelerinin Eşitliği İçin Testler…….. 56
6.1.1. Üstel dağılıma sahip $k = 2$ kitlenin ortalamalarının eşitliği için olabilirlik oran testi …… 57
6.1.2. Üstel dağılma sahip $k > 2$ kitlenin ortalamalarının eşitliği için olabilirlik oran testi……... 60
6.1.3. Olabilirlik oran testi için kritik değerler ……... 63
7.ÜSTEL DAĞILIMIN ORTALAMASI İÇİN ÖNERİLEN TEST İSTATİSTİĞİ. 65
7.1. Tek Parametreli Üstel Dağılma Sahip $k \geq 2$ Kitle İçin Ortalamalarının Eşitliği Testi …….. 65
7.1.1. *N* test istatistiğinin dağılımı…… 66

7.1.2. *N* test istatistiğine ilişkin kritik değerler ……...…….. 69
7.2. Simülasyon Çalışması…….. 70
7.3. İki Parametreli Üstel Dağılma Sahip $k \geq 2$ Kitle İçin Ortalamalarının Eşitliği Testi …….. 79
7.3.1. *H* test istatistiğinin dağılımı…… 79
8. SONUÇ VE ÖNERİLER …. 81
KAYNAKLAR…… 82
EKLER……..…….. 87

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. (4:1:1), (4:1:1:1) ve (4:1:1:1:1) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması……. 41

Şekil 4.2. (4:2:2), (4:2:2:2) ve (4:2:2:2:2) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması……. 41

Şekil 4.3. (3:2:2), (3:2:2:2) ve (3:2:2:2:2) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması……. 42

Şekil 4.4. (7:4:4) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 ve %1 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması ……... 42

Şekil 4.5. (7:4:4:4) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 ve %1 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması ……43

Şekil 4.6 (7:4:4:4:4) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 ve %1 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması ……43

Şekil 4.7 (10:5:5), (10:5:5:5) ve (10:5:5:5:5) varyans değerleri için grup sayılarına göre %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması …… 44

Şekil 4.8. (10:5:5), (10:5:5:5) ve (10:5:5:5:5) varyans değerleri için grup sayılarına göre %1 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması …… 44

Şekil 5.1. (1:2:3) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırması ……. 53

Şekil 5.2. (2:3:3) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırması ……. 53

Şekil 5.3. (1:2:3:4) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırması ……..... 54

Şekil 5.4. (2:3:3:3) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırması ……. 54

Şekil 5.5. (1:2:3:4:5) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırması ……. 55

Şekil 5.6. (2:3:3:3:3) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırmaları ……55

Şekil 7.1. (0,3:0,7) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması ……. 74

Şekil 7.2. (0,5:1) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması …….. 74

Şekil 7.3. (1:1,5) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması ……. 75

Şekil 7.4. (6:1) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması ……. 75

Şekil 7.5. (0,5:0,5:1) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması …….. 76

Şekil 7.6. (1:1:1,5) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması …… 76

Şekil 7.7. (1:2:3) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması …… 77

Şekil 7.8. (2,4:2,3:2) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması ……. 77

Şekil 7.9. k=2 olması durumunda $\theta_2 = 1$ ve θ_1 değerleri için %10 anlam seviyesindeki güç grafiği …… 78

Şekil 7.10. k=3 olması durumunda $\theta_2 = 1, \theta_3 = 1$ ve θ_1 değerleri için %10 anlam seviyesindeki güç grafiği …… 78

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. K test istatistiğinin grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre %10, %5, %1 anlam seviyelerindeki kritik değerleri…….. 37

Çizelge 4.2. k=3 olması durumunda gözlem sayılarına göre NK testi, Bartlett testi ve Hartley testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri……..... 38

Çizelge 4.3. k=4 olması durumunda gözlem sayılarına göre NK testi, Bartlett testi ve Hartley testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri……..... 39

Çizelge 4.4. k=5 olması durumunda gözlem sayılarına göre NK testi, Bartlett testi ve Hartley testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri……..... 40

Çizelge 5.1. M test istatistiğinin grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre %10, %5, %1 anlam seviyelerindeki kritik değerleri ……... 48

Çizelge 5.2. k=3 olması durumunda gözlem sayılarına göre M testi ve F testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri …… 50

Çizelge 5.3. k=4 olması durumunda gözlem sayılarına göre M testi ve F testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri …… 51

Çizelge 5.4. k=5 olması durumunda gözlem sayılarına göre M testi ve F testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri …… 52

Çizelge 6.1. Olabilirlik oran test istatistiğinin grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre %10, %5 anlam seviyelerindeki kritik değerleri…… 64

Çizelge 7.1. N test istatistiğinin grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre %10, %5, %1 anlam seviyelerine göre kritik değerleri…… 70

Çizelge 7.2. k=2 ve gözlem sayısına göre Olabilirlik oran testi ve N testinin %10 ve %5 anlam seviyelerine göre güç değerleri…….. 71

Çizelge 7.3. k=3 ve gözlem sayısına göre Olabilirlik oran testi ve N testinin %10 ve %5 anlam seviyelerine göre güç değerleri ……. 72

Çizelge 7.4. k=4 ve gözlem sayısına göre Olabilirlik oran testi ve N testinin %10 ve %5 anlam seviyelerine göre güç değerleri ……. 73

1. GİRİŞ

Aynı dağılıma sahip k kitlenin parametrelerinin homojenliğinin test edilmesi problemi tarım, sosyoloji ve tıp gibi birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Örneğin; uygulamada $N\left(\mu_1,\sigma^2\right), N\left(\mu_2,\sigma^2\right),\ldots, N\left(\mu_k,\sigma^2\right)$ dağılımlarından gelen k kitlenin ortalamalarının eşitliğinin test edilmesi durumu ile çok sık karşılaşılmaktadır (Rohatgi, 1976). Genellikle elektronik bileşenler, ampuller ve ölüm zamanı gibi yaşam zamanı dağılımlarını modellemek için kullanılan üstel dağılımın parametrelerinin eşitliğinin test edilmesi aynı şekilde çok sık karşılaşılan bir durumdur.

Varyans Analizi (ANOVA), normal dağılıma sahip $k \geq 2$ kitlenin ortalamalarının eşitliğinin kıyaslanması anlamına gelir (Scheffe, 1959). Normal dağılıma sahip kitlelerin ortalamalarının karşılaştırılması durumunda en önemli varsayımlardan biri varyansların homojenliğidir. Eğer ilgilenilen kitleler üzerinde normallik varsayımı ve varyansların homojenliği varsayımı sağlanıyorsa, varyans analizinde kullanılan F test istatistiği oldukça güçlüdür. Bu varsayımlardan varyansların homojenliği varsayımının sağlanmaması I. Tip hata ve testin gücünü büyük ölçüde etkilemektedir (Cochran ve Cox, 1957; Lim ve Loh, 1996; Mendeş, 2002). Bundan dolayı, varyans analizinin uygulanmasından önce varyansların homojenliği probleminin belirlenmesi oldukça önemlidir. Farklı durumlar için varyansların homojenliğinin test edilmesi problemi için Bartlett'in χ^2 testi, Hartley testi, Levene testi, Cochran testi gibi birçok yöntem geliştirilmiştir (Bartlett, 1937; Bartlett ve Kendall, 1946; Box ve Anderson, 1955; Cochran, 1941; Hartley, 1940, 1950; Layard, 1973; Conover ve ark., 1981; Lim ve Loh, 1996; Nelson, 2000; Wilcox, 2002; Liu ve Xu, 2010)(Islam, 2006).

Üstel dağılım tarafından modellenen yaşam zamanı dağılımlarının uygulandığı birçok uygulama mevcuttur. 2 parametreli üstel dağılımda konum parametresi genellikle başarısızlık/ölüm olmadan önce garanti zamanını verirken, ölçek parametresi ortalama ömrünü verir. İki ya da daha fazla üstel dağılımdan gelen

örneklemlerin incelenmesinde bazen ortalama ömrün karşılaştırılması ile ilgilenilebilir. Örneğin; güvenilirlik analizinde elektrikli ampul yapımında birçok farklı elektrik teli kaplama süreçleri uygulanabilmektedir. Burada farklı süreçlerin farklı ortalama ömre sahip olup olmadığını bilmek çok önemlidir. Eğer bir ampulün ömrü üstel dağılıma sahipse, problem üstel dağılımların ölçek parametrelerinin eşitliğine dönüşür. Dolayısıyla yaşam testi problemlerinde üstel dağılımın iki ya da daha fazla ölçek parametresini karşılaştırmak çok önemlidir. Üstel dağılıma sahip farklı kitleler için garanti sürelerinin karşılaştırılması da birçok konum parametresi eşitliğini test etmek anlamına gelir (Singh, 1983). Hsieh (1981), Kambo (1987), Nagarsenker (1986), Singh(1983, 1985), Thiagarajh&Paul (1990) ve Tiku (1991, 1993) gibi birçok yazar tam ve başarısızlık sansürlü örneklemlere dayanan konum ve ölçek parametrelerinin eşitliğinin testi problemi ile ilgilenmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, temel kavramlar üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde, varyansların homojenliği ile ilgili geçmiş yıllarda yapılan çalışmalar özetlenmiştir. Dördüncü bölümde varyansların homojenliği için sıra istatistiklerine dayanan bir test istatistiği önerilmiş olup, uygulamada en çok kullanılan bazı varyansların homojenliği test istatistikleri ile güç karşılaştırmasına ilişkin bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Beşinci bölümde ortalamaların eşitliği için sıra istatistiklerine dayanan bir test istatistiği önerilmiş olup, F test istatistiği ile güç karşılaştırmasına ilişkin bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Altıncı bölümde üstel dağılımın ölçek parametresine ilişkin olabilirlik oran testi verilmiştir. Yedinci bölümde ise ölçek parametrelerinin eşitliği için sıra istatistiklerine dayanan bir test istatistiği önerilmiş olup olabilirlik oran test istatistiği ile güç karşılaştırmasına ilişkin bir simülasyon çalışması yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında Minitab 15, Maple 9.5, Paint paket programları ile Delphi 5 ve Q-Basic programlama dilleri kullanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, yapılmış olan çalışma için gerekli olan ilgili tanımlar ve temel bilgiler verilmiştir.

2.1. Olasılık Uzayı ve Rasgele Değişkenler

Ω, örnek uzay, U, Ω 'da bir σ-cebir olmak üzere (Ω,U) ikilisine *ölçülebilir uzay* denir.

U üzerinde tanımlı bir P fonksiyonu için;

i. $\forall A \in U$ için $P(A) \geq 0$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. $A_j \cap A_k = \varnothing$, $k \neq j$ olmak üzere $\{A_j\}$, $A_j \in U$, $j = 1,2,\ldots$ dizisi için

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \tag{2.1.1}$$

koşulu sağlanıyorsa P 'ye (Ω,U) ölçülebilir uzay üzerinde bir olasılık ölçüsü denir.

(Ω,U) 'dan $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı Borel ölçülebilir bir fonksiyona *rasgele değişken,* Ω 'dan $\mathbb{R}^p$ $(p \in \boldsymbol{N})$ 'ye tanımlı Borel ölçülebilir bir fonksiyona *rasgele vektör* denir. B reel sayılardaki Borel cebirini göstermek üzere bir $X : \Omega \to \mathbb{R}$ rasgele değişkeni $\forall B \in B$ için,

$$P_X : B \to \mathbb{R}$$
$$: B \to P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P\{w : w \in \Omega, X(w) \in B\}$$

biçiminde tanımlanan P_X olasılık ölçüsüne X rasgele değişkeninin *olasılık dağılımı* denir.

$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \to F(x) = P_X\left((-\infty, x]\right) = P(X \le x)$$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonuna X rasgele değişkeninin *dağılım fonksiyonu* denir.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ rasgele değişkeni için X 'in değer kümesi $D_X = \{x : X(w) = x\}$ sayılabilir olduğunda X 'e *kesikli rasgele değişken* denir. Kesikli bir X rasgele değişkeni için olasılık fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(x) = P(X = x) \quad , \quad x \in D_X \tag{2.1.5}$$

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x, t \in D_X} f(t) \ , \ x \in \mathbb{R} \tag{2.1.6}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{2.1.7}$$

olacak şekilde ve D_X 'in sayılamaz olması durumunda,

i. $f(x) \ge 0$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

koşullarını sağlayan bir $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ fonksiyonu varsa X rasgele değişkenine *mutlak sürekli* veya kısaca *sürekli rasgele değişken* ve f fonksiyonuna da X 'in *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir.

2.2. Bazı Dağılımlar

Bu bölümde, tezde ele alınan dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonları, dağılım fonksiyonları, beklenen değer ve varyansları verilmiştir.

2.2.1. Tek parametreli üstel dağılım

X rasgele değişkeni, Üstel dağılıma sahip ise, sırasıyla, olasılık yoğunluk, dağılım ve dağılım fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad x>0,\ \theta>0 \tag{2.2.1}$$

$$F(x)=1-\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \tag{2.2.2}$$

şeklindedir. Beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$EX=\theta \qquad Var(X)=\theta^2$$

biçimindedir. Üstel dağılım için $Üstel(\theta)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.2.2. İki parametreli üstel dağılım

X rasgele değişkeni, iki parametreli üstel dağılıma sahip ise, sırasıyla, olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{(x-\beta)}{\theta}\right), \quad x>\beta,\ \theta>0,\ \beta>0 \tag{2.2.3}$$

$$F(x)=1-\exp\left(-\frac{(x-\beta)}{\theta}\right) \tag{2.2.4}$$

şeklindedir. Beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$EX = (\theta + \beta) \qquad \text{ve} \qquad Var(X) = \theta^2$$

biçimindedir. Üstel dağılım için $Üstel(\theta, \beta)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.2.3. Normal dağılım

X rasgele değişkeni, Normal dağılıma sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad , -\infty \le x \le \infty \ , \ \sigma > 0 \qquad (2.2.5)$$

şeklindedir. Normal dağılımının beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X) = \mu \qquad Var(X) = \sigma^2$$

biçimindedir. Normal dağılımı için $N(\mu, \sigma^2)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.2.4. Ki-kare dağılımı

X rasgele değişkeni, Ki-kare dağılıma sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) 2^{\frac{r}{2}}} \ x^{n-1} \exp\left(-\frac{x}{2} \right) \quad , \quad x > 0 \ , \ r > 0 \qquad (2.2.6)$$

şeklindedir. Ki-kare dağılımının beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X) = r \qquad Var(X) = 2r$$

biçimindedir. Ki-kare dağılımı için $\chi^2_{(r)}$ gösterimi kullanılacaktır.

2.2.5. F dağılımı

X rasgele değişkeni, F dağılıma sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{\Gamma\left[\frac{(r_1+r_2)}{2}\right]\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)}x^{\frac{r_1}{2}-1}\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)x\right]^{-\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)} \quad ,x>0 \ , \ r_1,r_2=1,\ldots \quad (2.2.7)$$

şeklindedir. Beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X)=\frac{r_2}{(r_2-2)}, \quad r_2>2 \qquad Var(X)=2r_2^2\left[1+\frac{(r_2-2)}{r_1}\right]\frac{1}{(r_2-2)^2(r_2-4)}$$

biçimindedir. F dağılımı için F_{r_1,r_2} gösterimi kullanılacaktır.

2.2.6. Beta dağılımı

X rasgele değişkeni, Beta dağılıma sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{\Gamma(\lambda+\beta)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\beta)}x^{\lambda-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0<x<1, \ \lambda,\beta>0 \qquad (2.2.8)$$

biçimindedir. Beta dağılımında $\lambda=1$ ve $\beta=1$ alınırsa $Düzgün(0,1)$ dağılımı elde edilir. Beta dağılımının beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X)=\frac{\lambda}{(\lambda+\beta)} \qquad Var(X)=\frac{\lambda\beta}{(\lambda+\beta)^2(\lambda+\beta+1)}$$

şeklindedir. Beta dağılımı için $Beta(\lambda,\beta)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.3. Sıra İstatistikleri

Sıra istatistikleri; F dağılımına sahip bir kitleden alınan n boyutlu örneklemin küçükten büyüğe sıraya dizilmesiyle elde edilen istatistiklerdir.

$X_1, X_2, ..., X_n$ kitleden alınan örneklem ve $X_{1:n} \le X_{2:n} \le ... \le X_{n:n}$ bu örnekleme ait sıra istatistikleri olsun. $X_{i:n}$'e *i.* sıra istatistiği adı verilir.

$i = 1$ ve $i = n$ için sırasıyla $X_{1:n} = min\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ ve $X_{n:n} = maks\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ dir. Bu iki istatistik dağılımın uç noktaları olarak adlandırılır ve uygulamalarda önemli rol oynar.

Örneklem kendi içinde bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmasına rağmen bu örneklemden elde edilen sıra istatistikleri aralarındaki büyüklük ilişkisi sebebiyle bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmayacaklardır.

Sıra istatistiklerinin günlük hayatta kullanıldığı alanlara ilişkin aşağıdaki örnekler verilebilir.

Belli bir zaman aralığında bir nehirden akan suyun m^3 olarak dağılımı F olmak üzere suyun belli bir alt seviyeden az akması kuraklığı, belli bir üst seviyeden fazla akması da sele sebep olur. Su akış dağılımı F olan bu nehirden su seviyelerini gösteren $X_1, X_2, ..., X_n$ örneklemi alındığı varsayılsın.

$X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{k:n}$ alt sıra istatistiklerinin dağılımları ve $X_{n-k:n}, X_{n-k+1:n}, ..., X_{n:n}$ üst sıra istatistiklerinin dağılımları sırasıyla kuraklığın ve selin modellenmesi için, sadece $X_{n:n}$ maksimum sıra istatistiğinin dağılımı sel risklerinin çalışılmasında ve selin önlenmesinin planlanmasında kullanılabilir.

Belli bir sistemin yaşamı en zayıf bağlantı yöntemi tarafından belirleniyorsa sistemdeki en zayıf unsurun yaşam zamanı ile sistemin yaşam zamanı aynıdır. $X_1, X_2, ..., X_n$ bir sistemi oluşturan bileşenlerin yaşam zamanları ise o zaman sistemin yaşam zamanı

$$X_{1:n} = min\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$$

tarafından belirlenir. Böylece minimum sıra istatistiğinin (*1.sıra istatistiği*) dağılımı sistemin yaşam zaman dağılımıdır.

Bir sistemin *n* tane aynı dağılıma sahip bileşenden (unsurdan) oluştuğunu varsayalım. Öyle ki bu *n* bileşenden *r.* bozulma meydana geldiğinde sistemde bozuluyorsa o zaman *r.* sıra istatistiğinin yaşam zamanı dağılımı sistemin yaşam zaman dağılımı olur.

2.3.1. Sıra istatistiklerinin dağılımları

$X_1, X_2, ..., X_n \sim F$ dağılımına sahip bir örneklem olsun. $X_{1:n} = min\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ sıra istatistiğinin dağılımı;

$$\begin{aligned} F_1(x) &= P\{X_{1:n} \le x\} = P\{min(X_1, X_2, ..., X_n) \le x\} \\ &= 1 - P\{min(X_1, X_2, ..., X_n) > x\} \\ &= 1 - \left[P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\}...P\{X_n > x\}\right] \\ &= 1 - \left[\left(1 - \underbrace{P\{X_1 \le x\}}_{F(x)}\right)\left(1 - \underbrace{P\{X_2 \le x\}}_{F(x)}\right)...\left(1 - \underbrace{P\{X_n \le x\}}_{F(x)}\right)\right] \\ &= 1 - \left[1 - F(x)\right]^n \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

olasılık fonksiyonu,

$$f_1(x) = n\left[1 - F(x)\right]^{n-1} f(x)$$

$X_{n:n} = maks\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ sıra istatistiğinin dağılımı;

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P\{X_{n:n} \le x\} = P\{maks(X_1, X_2, ..., X_n) \le x\} \\ &= \underbrace{P\{X_1 \le x\}}_{F(x)}\underbrace{P\{X_2 \le x\}}_{F(x)}...\underbrace{P\{X_n \le x\}}_{F(x)} \\ &= \left[F(x)\right]^n \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

olasılık fonksiyonu,

$$f_n(x) = n\left[F(x)\right]^{n-1} f(x)$$

dır.

$1 \le r \le n$ olmak üzere $X_{r:n}$ $r.$ sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu ise

$$F_r(x) = P\{X_{r:n} \le x\} = P\{X_1, X_2, ..., X_n \text{ lerden enaz } r \text{ tanesi} \le x\}$$

$$= P\left\{\sum_{i=r}^{n} X_1, X_2, ..., X_n \text{ lerden tam i tanesi} \le x\right\}$$

olur. A_i: $\{X_1, X_2, ..., X_n$ lerden tam i tanesi $\le x\}$ olması olayı olsun. A_i olayları ayrık olduğundan,

$$F_r(x) = P\left\{\sum_{i=r}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=r}^{n} P\{A_i\}$$

$$= \sum_{i=r}^{n} C_n^i [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} \qquad (2.3.3)$$

dır. $C_n^i = \binom{n}{i}$ olmak üzere bu ise tam olmayan beta fonksiyonudur. Yani

$$F_r(x) = \sum_{i=r}^{n} C_n^i (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}$$

$$= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \int_0^{F(x)} t^{r-1} (1-t)^{n-r} \, dt$$

$$= I_{F(x)}(r, n-r+1) \qquad (2.3.4)$$

Şayet X_i' ler $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ olacak biçimde sürekli rasgele değişkenler ise

$$f_r(x) = \frac{dF_r(x)}{dx} = \frac{1}{B(r, n-r+1)} \frac{d}{dx} \int_0^{F(x)} t^{r-1} (1-t)^{n-r} \, dt$$

$$= \frac{1}{B(r, n-r+1)} (F(x))^{r-1} (1 - F(x))^{n-r} f(x) \qquad (2.3.5)$$

olur. Burada

$$B(r, n-r+1) = \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}$$

dir.

X_i rasgele değişkenlerinin kesikli olması durumunda (2.3.3)'den

$$f_r(x) = P\{X_{r:n} = x\}$$
$$= F_r(x) - F_r(x-1)$$
$$= \sum_{i=r}^{n} C_n^i \left(F(x)\right)^i \left(1-F(x)\right)^{n-i} - \sum_{i=r}^{n} C_n^i \left(F(x-1)\right)^i \left(1-F(x-1)\right)^{n-i} \qquad (2.3.6)$$

dır.

David 1970'te verilen bir yöntemde, sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları kombinatorik yöntemlerde kullanılarak aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$A_r = \{x < X_{r:n} < x + \Delta x\}$$

olayı göz önüne alınsın.

A_r olayının gerçeklenmesi için $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminden $r-1$ tane örneğin x den küçük, 1 tane örneğin $(x, x+\Delta x]$ aralığında ve $n-r$ tane örneğinde $x+\Delta x$ den büyük olması gerekiyor. Dolayısıyla A_r olayı

$$\binom{n}{r-1}\binom{n-(r-1)}{1}\binom{n-r}{n-r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

farklı sayıda gerçekleşebilir.

$$P\{A_r\} = P\{x < X_{r:n} < x + \Delta x\}$$
$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} P\{X_1, \ldots, X_{r-1} \le x; X_r \in (x, x+\Delta x]; X_{r+1}, \ldots, X_n > x + \Delta x\}$$
$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[F(x)\right]^{r-1} \left[F(x+\Delta x) - F(x)\right] \left[1 - F(x+\Delta x)\right]^{n-r} \qquad (2.3.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$F_r(x+\Delta x) - F_r(x) = P\{x < X_{r:n} < x + \Delta x\}$ olmak üzere

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_r(x+\Delta x) - F_r(x)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[F(x)\right]^{r-1} \left[F(x+\Delta x) - F(x)\right] \left[1 - F(x+\Delta x)\right]^{n-r}}{\Delta x}$$

$F(x+\Delta x)-F(x)=f(x)\Delta x+o(\Delta x)$ yazılırsa

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left[F(x)\right]^{r-1}f(x)\left[1-F(x+\Delta x)\right]^{n-r}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\frac{1}{B(r,n-r+1)}\left[F(x)\right]^{r-1}\left[1-F(x)\right]^{n-r}f(x)=f_r(x). \qquad (2.3.8)$$

bulunur.

$X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ $1\le r<s\le n$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da aynı yöntemle aşağıdaki gibi bulunur.

$A_{r,s}=\{x<X_{r:n}<x+\Delta x\,,\ y<X_{s:n}<y+\Delta y\}$

olayının gerçeklenmesi $X_1,X_2,\ldots,X_n$ örnekleminden $r-1$ tane örneğin x den küçük, 1 tane örneğin $(x,x+\Delta x]$ aralığında, $s-r-1$ tane örneğin $(x+\Delta x,y]$ aralığında, 1tane örneğin $(y,y+\Delta y]$ aralığında ve $n-s$ tane örneğinde $y+\Delta y$ den büyük olması durumunda sağlanır. Burada mümkün olan durumların sayısı

$C_n^{r-1}C_{n-(r-1)}^{1}C_{n-r}^{s-r-1}C_{n-s+1}^{1}C_{n-s}^{n-s}=\dfrac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$ dir.

$P\{x<X_{r:n}<x+\Delta x\,,\ y<X_{s:n}<y+\Delta y\}=$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\left[F(x)\right]^{r-1}\left[F(x+\Delta x)-F(x)\right]\mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\left[F(y)-F(x+\Delta x)\right]^{s-r-1}\left[F(y+\Delta y)-F(y)\right]\left[1-F(y+\Delta y)\right]^{n-s} \qquad (2.3.9)$$

dır. Diğer taraftan,

$F_{r,s}(x,y)=P\left\{X_r<x\,,\ X_s<y\right\}$ olmak üzere

$$f_{rs}(x,y)=\frac{\partial F_{r,s}(x,y)}{\partial x\partial y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\Delta x.\Delta y}P\{x<X_{r:n}<x+\Delta x\,,\ y<X_{s:n}<y+\Delta y\}$$

$F(x+\Delta x)-F(x)=f(x)\Delta x+o(\Delta x)$ ve

$F(y+\Delta y)-F(y)=f(y)\Delta y+o(\Delta y)$ (2.3.9) yerine yazılırsa, $x<y$ olmak üzere

$$f_{rs}(x,y)=\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\left[F(x)\right]^{r-1}\left[F(y)-F(x)\right]^{s-r-1}\times$$

$$\times\left[1-F(y)\right]^{n-s}f(y)f(x) \qquad (2.3.10)$$

$k \le n$ ve $1 \le r_1 < r_2 < \ldots < r_k \le n$ olmak üzere $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \ldots, X_{r_k:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da benzer şekilde

$$f_{r_1,\ldots,r_k}(x_1,\ldots,x_k) = \frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!\ldots(n-r_k)!}\left[F(x_1)\right]^{r_1-1}\left[F(x_2)-F(x_1)\right]^{r_2-r_1-1}\times$$

$$\times\left[1-F(x_k)\right]^{n-r_k} f(x_1)\ldots f(x_k) \quad x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k \tag{2.3.11}$$

dır. $x_0 = -\infty, x_{k+1} = \infty, r_0 = 0, r_{k+1} = n$ olarak alınırsa,

$$f_{r_1,\ldots,r_k}(x_1,\ldots,x_k) = n!\left[\prod_{i=1}^{k} f(x_i)\right]\prod_{i=0}^{k}\left(\frac{\left[F(x_{i+1})-F(x_i)\right]^{r_{i+1}-r_i-1}}{(r_{i+1}-r_i-1)!}\right) \tag{2.3.12}$$

şekline dönüşür.

$X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f_{1,2,\ldots,n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{cases} n!\,f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n) & ;\ x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \\ 0 & ;\ \text{d.y.} \end{cases} \tag{2.3.13}$$

olur. $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ sıra istatistiklerinin dağılım fonksiyonu $F_{r,s}(x,y)$ (2.3.10)'dan integral alınmak suretiyle elde edilebilir. Fakat $X_{i:n}$ lerin kesikli rasgele değişken olması durumunda $r < s$ olmak üzere $F_{r,s}(x,y)$ aşağıdaki gibidir.

$$F_{r,s}(x,y) = P\{\text{en az } r \text{ tane } X_i \le x, \text{ en az } s \text{ tane } X_i \le y\} \quad x < y$$

$$= \sum_{i=r}^{n}\sum_{j=s-i}^{n-i} P\{\text{tam } i \text{ tane } X_i \le x, \text{ tam } j \text{ tane } X_i \ (x,y] \text{ aralığında}\}$$

$i > s$ olması durumunda j sıfırdan başlar ve $x < y$ için

$$F_{r,s}(x,y) = \sum_{i=r}^{n}\sum_{j=maks\{0,s-i\}}^{n-i} \frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!}\left[F(x)\right]^{i}\left[F(y)-F(x)\right]^{j}\left[1-F(y)\right]^{n-i-j}$$

(2.3.14)

dır. $x \geq y$ olması durumunda $X_{s:n} \leq y$ olması $X_{r:n} \leq x$ olmasını gerektireceğinden

$$F_{r,s}(x,y) = F_s(y) \tag{2.3.15}$$

olur.

2.4. Tahmin

Dağılımı biçimsel olarak bilinen fakat parametreleri bilinmeyen bir kitlenin parametrelerinin tahmin edilmesi istatistik biliminin en önemli problemlerindendir. Kitle parametreleri, kitleden alınan bir örneklem yardımıyla oluşturulan istatistiklerle tahmin edilir. Parametre hakkında bütün bilgi örneklemin içindedir. Bu şekilde elde edilen tahminlere nokta tahmini denir. Ancak çoğu zaman nokta tahmini tek başına yeterli olmayabilir. Kitle parametresini belli bir olasılıkla içinde barındıran aralık şeklindeki bir tahmine de ihtiyaç duyulur. Burada aralığın alt ve üst sınırları yine örneklemin birer fonksiyonudur (istatistiğidir).

2.4.1. Nokta tahmini

Parametresi tahmin edilmek istenilen kitle $f(x,\gamma),\ \gamma \in \Gamma$ dağılımına sahip olsun. Burada γ kitle parametresini, Γ, parametre uzayını temsil etmektedir. Bu kitleden alınan ve her biri aynı $f(x,\gamma),\ \gamma \in \Gamma$ dağılımına sahip $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$L(\underline{x},\gamma) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \gamma) \tag{2.4.1}$$

biçimindedir. $L(\underline{x},\gamma)$, γ'nın bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde *olabilirlik fonksiyonu (likelihood function)* adını alır.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, $f(x,\gamma)$ $,\gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}^r$ dağılımından alınmış örneklem olmak üzere $L(\hat{\gamma}|\underline{x}) = \sup_{\gamma\in\Gamma}\left(L(\gamma|\underline{x})\right)$ olsun. $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(X_1, X_2 ..., X_n)$ istatistiğine γ 'nın *en çok olabilirlik tahmin edicisi (maximum likelihood estimator, MLE)* denir (Roussas, 1973).

2.4.2. Normal dağılımın parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri

$\{X_{ij} : i = 1,2,\ldots,k;\ j = 1,2,\ldots,n\}$ $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ dağılımına sahip *i.* kitleden alınan örneklemi göstermek üzere μ_i ve σ_i^2 parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri sırasıyla,

$$\hat{\mu}_i = \overline{X_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{n}\ ,\ i = 1,2,\ldots,k \tag{2.4.2}$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = S_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij} - \overline{X_i}\right)^2,\ \ i = 1,2,\ldots,k \tag{2.4.3}$$

dir. $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \mu$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma^2$ ise σ^2 ve μ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri sırasıyla,

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} X_{ij}}{nk} \tag{2.4.4}$$

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(X_{ij} - \overline{X_i}\right)^2}{nk-k} \tag{2.4.5}$$

dir (Rohatgi, 1976).

Burada *p* olasılıkta yakınsamayı göstermek üzere,

$$\overline{X} \xrightarrow[n\to\infty]{p} \mu \quad \text{ve} \quad \frac{\mu}{\overline{X}} \xrightarrow[n\to\infty]{p} 1,\ \mu \neq 0 \tag{2.4.6}$$

$$S^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p} \sigma^2 \ \text{ve} \quad \frac{\sigma^2}{S^2} \xrightarrow[n\to\infty]{p} 1 \tag{2.4.7}$$

olur.

2.4.3. Tek parametreli üstel dağılımın parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicisi

$\left\{X_{ij} : i = 1,2,\ldots,k;\ j = 1,2,\ldots,n\right\}$ $\ddot{U}(\theta_i)$ dağılımına sahip *i.* kitleden alınan örneklemi göstermek üzere θ_i parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{\theta}_i = \overline{X_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{n}\ ,\ i = 1,2,\ldots,k \tag{2.4.8}$$

$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_k = \theta$ ise θ için en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{\theta} = \overline{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} X_{ij}}{nk} \tag{2.4.9}$$

dir. Burada *p* olasılıkta yakınsamayı göstermek üzere,

$$\overline{X} \xrightarrow[n\to\infty]{p} \theta \quad \text{ve} \quad \frac{\theta}{\overline{X}} \xrightarrow[n\to\infty]{p} 1 \tag{2.4.10}$$

olur.

2.4.4. İki parametreli üstel dağılımın parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri

$\{X_{ij} : i = 1,2,\ldots,k;\ j = 1,2,\ldots,n\}$ $\ddot{U}(\theta_i, \beta)$ dağılımına sahip *i.* kitleden alınan örneklemi göstermek üzere θ_i parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \beta)}{n}\ ,\ i = 1,2,\ldots,k \qquad (2.4.11)$$

dir.

2.5. Parametrik Hipotez Testleri

Parametrik hipotez, bilinmeyen kitle parametresi (γ) hakkında bir iddiadır. Genellikle yokluk hipotezi $H_0 : \gamma \in \Gamma_0 \in \Gamma$, alternatif hipotez ise $H_1 : \gamma \in \Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$ şeklinde ifade edilir. Eğer $\Gamma_0(\Gamma_1)$ sadece bir eleman içeriyorsa basit hipotez aksi takdirde karmaşık hipotezdir.

Hipotezlerin test edilmesi problemi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:
$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ örneklem değerleri verilsin. Yokluk hipotezini kabul ya da reddine karar verecek bir karar kuralı (fonksiyonu) bulunur. Diğer bir ifade ile $\mathbb{R}^n$ uzayı C ve C^c gibi ayrık iki kümeye parçalanır. $X \in C$ ise $H_0 : \gamma \in \Gamma_0$ hipotezi reddedilir (H_1 kabul edilir) ve $X \in C^c$ ise H_0 kabul edilir ($X \sim f_\gamma, \gamma \in \Gamma_0$).

$X \sim f_\gamma, \gamma \in \Gamma_0$ olsun. $X \in C$ ise H_0 reddedilir (1 olasılıkla) o zaman $\mathbb{R}^n$'nin alt kümesi *C, kritik bölge (küme)* olarak adlandırılır.

$$C = \{X \in \mathbb{R}^n : X \in C \text{ ise } H_0 \text{ reddedilir}\}$$

Böyle bir durumda iki tür hata yapılabilir. H_0 doğru iken reddedilmesi *I. tip hata* olarak adlandırılır. H_0 yanlış iken kabul edilmesi *II. Tip hata* olarak adlandırılır.

		Doğru	
	H_0	H_1	
Kabul H_0	Doğru Karar	II. Tip Hata	
H_1	I. Tip Hata	Doğru Karar	

C kritik bölge olmak üzere $P_\gamma C,\ \gamma \in \Gamma_0$ I. Tip hata olasılığı ve $P_\gamma C^c,\ \gamma \in \Gamma_1$ II. Tip hata olasılığıdır. İdeal olarak her iki olasılığın 0 olan bir kritik bölge bulmak istenir (Rohatgi 1976).

2.6. Olabilirlik Oran Testi

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız ve aynı $f(x,\boldsymbol{\gamma}),\quad \gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}^r$ o(y)f' na sahip bir örneklem, $\Gamma_0, \Gamma_1 \in \Gamma,\quad \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma,\ L(\mathbf{x},\Gamma_0) = f(x_1,\boldsymbol{\gamma}) \times \cdots \times f(x_n,\boldsymbol{\gamma}),\quad \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_0$ ve $L(\mathbf{x},\Gamma_1) = f(x_1,\boldsymbol{\gamma}) \times \cdots \times f(x_n,\boldsymbol{\gamma}),\quad \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_1$ olsun. Γ_0 ve Γ_1 'in tek elemandan oluştuğunu düşünüldüğünde o zaman $L(\mathbf{x},\Gamma_1)/L(\mathbf{x},\Gamma_0)$ tek biçimde belirlenir. $H_0 : \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_0$ hipotezini $H_1 : \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_1$ hipotezine karşı test etmek için olabilirlik oran $L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma} \mid \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_1)/L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma} \mid \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_0)$ belli bir c değerinden büyük olunca H_0 hipotezi reddedilecektir. Burada c sabiti α anlam seviyesine göre belirlenir. Γ_0 ve Γ_1 birden fazla elemana sahip olduğu zaman $L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma}),\quad \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_0$ ve $L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma}),\quad \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_1$ tek biçimde belirlenemez ve yukarıdaki yöntem uygulanamaz. Γ_0 yada Γ_1 birden fazla elemanlı olsun. Bu durumda $H_0 : \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_0$ hipotezini $H_1 : \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_1$ hipotezine

karşı α anlam seviyesinde olabilirlik oran test (*Likelihood Ratio Test, LRT*) fonksiyonu,

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma_0}\left[L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma})\right]}{\sup_{\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma}\left[L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma})\right]} \tag{2.6.1}$$

olmak üzere,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad \lambda(\mathbf{x}) < c \\ 0 & , \quad \lambda(\mathbf{x}) \geq c \end{cases} \tag{2.6.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada c, $\sup_{\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma_0}\left[P_{\boldsymbol{\gamma}}\left(\lambda(\mathbf{X}) < c\right)\right] = \alpha$ olacak biçimde belirlenir. $\sup_{\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma_0}\left[L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma})\right] \leq \sup_{\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma}\left[L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma})\right]$ olduğu göz önünde bulundurulursa $0 < \lambda(\mathbf{x}) < 1$ dir. $\lambda(\mathbf{x})$ test istatistiğinin bire yakın değerler alması H_0 hipotezini, sıfıra yakın değerler alması H_1 hipotezini destekler.

Olabilirlik oran testlerinde iki problem ortaya çıkmaktadır. Birincisi *c*'yi belirlemek, ikincisi de $\sup_{\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma_0}\left[L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma})\right]$ ve $\sup_{\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma}\left[L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma})\right]$' yı belirlemektir. Birinci problemde $-2\log\lambda(\mathbf{X})$ istatistiğinin asimptotik dağılımı bilindiğinden büyük *n* 'ler için *c* kolaylıkla belirlenir. İkinci problemde ise $\sup_{\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma}\left[L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma})\right]$'yı belirlemek için $\boldsymbol{\gamma}$'nın MLE tahmin edicilerini bulmak yeterlidir. Çünkü MLE tahmin edicileri $L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma})$ olabilirlik fonksiyonunu supremum yapar. H_0 hipotezi tek elemanlıysa $\sup_{\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma_0}\left[L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma})\right]$'yı belirlemek de problem olmayacaktır. H_0 hipotezi birden fazla elemanlıysa $\sup_{\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma_0}\left[L(\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma})\right]$'yı belirlemede sıkıntı çıkabilir. Eğer $\lambda(\mathbf{X})$'in dağılım mutlak sürekli ise istenilen α için test yapılabilir. Ancak λ 'nn kesikli dağılıma sahip olması durumunda anlam seviyesi tam α olan LR testi bulmak mümkün olmayabilir. Bu durum LR testinin rasgeleleştirilmemiş bir test olmasından kaynaklanmaktadır. Bir parametre için yeterli bir istatistik varsa LR bu istatistiğin bir fonksiyonudur. Bir hipotezi test etmek için LR ile oluşturulan test fonksiyonlar çoğu zaman UMP (*uniformly most powerful*) veya UMPU (*uniformly most powerful unbiased*) özelliğini taşımaktadır. Rasgeleleştirilmemiş Neyman-Pearson test fonksiyonu aynı zamanda LRT'dir (Roussas, 1973).

2.7. Varyans Analizi (ANOVA)

Varyans Analizi (ANOVA), normal dağılıma sahip $k \geq 2$ kitlenin ortalamalarının eşitliğinin kıyaslanması anlamına gelir (Scheffe, 1959). Uygulamada $N\left(\mu_1,\sigma^2\right), N\left(\mu_2,\sigma^2\right),\ldots, N\left(\mu_k,\sigma^2\right)$ dağılımlarından gelen k kitlenin ortalamalarının eşitliğinin test edilmesi durumu ile çok sık karşılaşılmaktadır (Rohatgi, 1976).Yani, bu durum $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \mu$ hipotezinin test edilmesi anlamına gelir. $\mathrm{X} = \left(X_{11}, X_{12},\ldots, X_{1n_1}, X_{21}, X_{22},\ldots, X_{2n_2},\ldots, X_{k1}, X_{k2},\ldots, X_{kn_k}\right)$ olmak üzere X 'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f\left(\mathbf{x};\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k,\sigma^2\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\mu_i\right)^2\right\} \tag{2.7.1}$$

olur. H_0 hipotezinin doğruluğu altında ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f\left(\mathbf{x};\mu,\sigma^2\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\mu\right)^2\right\} \tag{2.7.2}$$

dır. Buradan en çok olabilirlik tahmin edicileri,

$$\hat{\mu}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i} = \overline{X_i},\ i = 1,2,\ldots,k \quad , \quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\overline{X}_i\right)^2}{n}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n} = \overline{X} \quad , \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2}{n}$$

şeklinde elde edilir. (2.6.2)'den olabilirlik oran testi sonucunda,

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2 - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\overline{X_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\overline{X_i}\right)^2}\left(\frac{n-k}{k-1}\right) \geq F_0 \tag{2.7.3}$$

elde edilir. Bu durumda H_0 hipotezi reddedilecektir. Burada F_0, α anlam seviyesindeki $F_{[(k-1),(n-k)]}$ dağılımından elde edilen değerdir.

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\overline{X_i}\right)^2+\sum_{i=1}^{k}n_i\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2$ olduğu düşünülürse (2.7.3) formu,

$$F=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2/(k-1)}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\overline{X_i}\right)^2/(n-k)}\geq F_0 \qquad (2.7.4)$$

şeklinde de yazılabilir (Rohatgi, 1976).

3. VARYANSLARIN HOMOJENLİĞİ

Varyans Analizi (ANOVA) uygulamalı istatistikte farklı kitlelerin ortalamalarının karşılaştırılmasında kullanılan parametrik bir istatistiksel yöntemdir. Parametrik yöntem olarak adlandırılmasının en önemli sebebi ilgilenilen kitle dağılımlarının normal dağılım olmasıdır. Kitle dağılımlarının normal dağılım olması varsayımı parametrik yöntemlerin uygulanması için en önemli varsayımlardan birisidir. Normal dağılıma sahip kitlelerin ortalamalarının karşılaştırılması durumunda yani sonuç çıkarımında parametrik yöntemler için diğer bir önemli varsayım ise varyansların homojenliğidir.

Varyans analizi gibi parametrik yöntemler için gerekli olan bu varsayımlar oldukça kısıtlayıcıdır. Eğer ilgilenilen kitleler üzerinde normallik varsayımı ve varyansların homojenliği varsayımı sağlanıyorsa varyans analizinde kullanılan F test istatistiği oldukça güçlüdür. Bu varsayımlardan varyansların homojenliği varsayımının sağlanmaması I. Tip hata ve testin gücünü büyük ölçüde etkilemektedir (Cochran ve Cox, 1957; Lim ve Loh, 1996; Mendeş, 2002). Varyansların homojen olmaması durumunda hem Tip I hem de Tip II hata oranları üstünde zayıf kontrol sağlar (Islam, 2006). Aynı zamanda varyansların homojenliğinin sağlanmaması durumunda örneklem ortalamaları eşit beklenen standart hatalara sahip olmayacaktır. Dolayısıyla özellikle örneklem büyüklüklerinin eşit olmadığı durumlarda kitle varyanslarının homojen olmaması kitle ortalamaları ile ilgili sonuç çıkarımında ciddi etkilere sebep olacaktır (Box, 1954; Welch, 1951; Bishop ve Dudewicz, 1978; Keselman ve ark., 2002; Mendeş, 2003; Çamdeviren ve Mendeş, 2005). Bundan dolayı normal dağılıma sahip kitlelerin varyansların homojenliği varsayımını sağlayıp sağlamadıklarının test edilmesi problemi istatistiğin önemli problemlerinden olmuştur (Islam, 2006). Böylece ANOVA yapılmadan önce varyansların homojenliği problemi belirlenmelidir (Cochran ve Cox, 1957; Brown ve Forsythe, 1974; Wilcox ve ark., 1986; Islam, 2006). Ancak varyansların homojenliği probleminin test edilmesi problemi ortalama ya da diğer konum ölçülerinin homojenliğinin test edilmesi probleminden daha zordur. Çünkü ortalamaların homojenliğinin test

edilmesi için geliştirilen test istatistikleri merkezi limit teoremi gereği standartlaştırılarak normal olmamaya karşı sağlam olur. Ancak varyansların homojenliği için geliştirilen birçok test istatistiği normal olmamaya karşı sağlam değildir. Asimptotik olarak dağılımdan bağımsız değildir dağılımın basıklığına (kurtosis) bağlıdır (Mu, 2006).

Varyans homojenliği için test edilecek hipotezler aşağıdaki şekilde olur:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 \tag{3.1}$$

$$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \quad bazı \ \ i \neq j \tag{3.2}$$

Farklı durumlar için varyansların homojenliğinin test edilmesi problemi için birçok yöntem geliştirilmiştir (Bartlett, 1937; Bartlett ve Kendall, 1946; Box ve Andersen, 1955; Cochran, 1941; Hartley, 1940, 1950; Layard, 1973; Conover ve ark., 1981; Lim ve Loh, 1996; Nelson, 2000; Wilcox, 2002; Liu ve Xu, 2010)(Islam, 2006). Bu testler birçoğu normallik varsayımına duyarlıdır (Cochran ve Cox, 1957; Levene, 1960; Conover ve ark., 1981; Weerahandi, 1995). Özellikle Tip I hata olasılığı α dağılımın basıklığına (kurtosis) bağlıdır.

Bu testlerin birçoğu birbirinin değiştirilmiş şekli olup söz konusu testlerin gerek I. Tip hata gerekse de testin gücü bakımından birbirleri ile karşılaştırıldığı birçok çalışma vardır (Conover ve ark., 1981; Tekindal, 2007; Mendeş, 2003; Çamdeviren ve Mendeş, 2005; Mu, 2006).

Conover ve arkadaşları (1981) varyansların homojenliğinin test edilmesi için önerilmiş 56 test istatistiğini kullanılarak güç ve sağlamlılığını değerlendirmek amacıyla bir simülasyon çalışması yapmışlar ve bu simülasyon çalışması sonucunda verilerin dağılımlarının, grup sayılarının ve bu gruplardaki gözlem sayılarının bu testleri etkilediklerini göstermişlerdir (Islam, 2006).

Tekindal (2007) değişik deneme koşullarında (dağılım şekli, varyans oranları, gözlem sayısı, grup sayısı vb) Brown-Forsythe, Cochran, Hartley ve Sattewaite gibi bazı varyans homojenliği test istatistiklerini I. Tip hata ve güç bakımında karşılaştırmıştır.

Mu (2006) literatürde daha önce de kullanılmış olan teknikleri tekrar gözden geçirmiş ve testlerin performanslarını değişik dağılım uygulamaları, gözlem sayıları ve varyans oranlarında karşılaştırmıştır.

3.1. Varyansların Homojenliği İçin Testler

Bu bölümde $k \geq 2$ kitlenin (grubun) varyansların homojenliği için en çok uygulanan bazı testler verilmiştir.

3.1.1. Bartlett'in χ^2 testi

Varyansların homojenliğini test etmek için kullanılan en yaygın yöntemlerden bir tanesi Bartlett'in χ^2 testidir . Test istatistiği,

$$B = \frac{(N-k)\ln S^2 - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln S_i^2}{1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N-k}\right]} \qquad (3.1.1)$$

şeklindedir. Buradaki S_i^2 *i.*örnekleme (gruba) ait örneklem varyansı ve $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$,

ve $S^2 = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)S_i^2 / (N-k)$' dir.

Gruplar normal dağılımdan geldiği takdirde (3.1)'deki hipotezinin doğruluğu altında B test istatistiğinin dağılımı *(k-1)* serbestlik dereceli χ^2 dağılımına yaklaşır ($B \xrightarrow{D} \chi^2_{(k-1)}$). B test istatistiğinin değeri α anlam seviyesinde $\chi^2_{(k-1)}$ değerinde büyük olduğunda (3.1)'deki hipotez reddedilir (Layard, 1973; Conover ve ark., 1981; Lim ve Loh, 1996).

Bartlett'in testi Boos ve Brownie (1989) tarafından değiştirilerek,

$$B_1 = \frac{2}{\left(\widehat{\beta_2} - 1\right)} B \tag{3.1.2}$$

$$\widehat{\beta_2} = \frac{nk \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij} - \overline{X_i}\right)^4}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij} - \overline{X_i}\right)^2} \tag{3.1.3}$$

şeklinde verilmiştir. $B \xrightarrow{D} \frac{1}{2}\left(\beta_2 - 1\right) \chi^2_{(k-1)}$ (β_2 dağılımın basıklığı) olmak üzere B_1'in kritik değeri B'nin kritik değeri ile aynıdır (Islam, 2006).

Bartlett'in testinin diğer bir versiyonu Miller (1986) tarafından önerilmiştir. Test istatistiği,

$$B_2 = \frac{2}{\left(\widehat{\beta_2} - 1\right)} \left[\left(N - k\right) \ln S^2 - \sum_{i=1}^{k} \left(n_i - 1\right) \ln S_i^2 \right] \tag{3.1.4}$$

şeklindedir. B_2 test istatistiğinin değeri α anlam seviyesinde $\chi^2_{(k-1)}$ değerinde büyük olduğunda (3.1)'deki hipotez reddedilir (Islam, 2006).

3.1.2. Hartley testi

Normal dağılıma sahip $k \geq 2$ kitlenin (grubun) eşit sayıda gözlem içermesini gerektiren test istatistiği maksimum örneklem varyansı ile minimum örneklem varyansının oranına dayanmaktadır. Test istatistiği,

$$H = \frac{\max\left\{S_i^2\right\}}{\min\left\{S_i^2\right\}} \tag{3.1.5}$$

şeklindedir. Buradaki S_i^2 i.örnekleme (gruba) ait örneklem varyansıdır.

H test istatistiğinin değeri α anlam seviyesinde, k ve (n-1)' e göre düzenlenmiş Hartley tablo değerinden büyük olduğunda (3.1)'deki hipotez reddedilir (Conover ve ark., 1981; Johnson, 1991; Tekindal, 2007; Kanji, 1993).

3.1.3. Levene 1 testi

Levene (1960) $Z_{ij} = \left| X_{ij} - \overline{X_{i.}} \right|$ yeni değişkenleri üzerinde tek yönlü varyans analizini kullanmayı önermiştir. Buradaki $\overline{X_{i.}}$ *i.* örneklemin (grubun) ortalaması olmak üzere test istatistiği;

$$Lev1 = \frac{(N-k)\sum_{i=1}^{k} n_i (\overline{Z}_{i.} - \overline{Z}_{..})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (Z_{ij} - \overline{Z}_{i.})^2} \tag{3.1.6}$$

şeklindedir. Buradaki $\overline{Z}_{i.}$, Z_{ij}'nin örneklem (grup) ortalaması, $\overline{Z}_{..}$ Z_{ij}'nin ağırlıklandırılmış ortalaması ve $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ 'dir.

Lev1 test istatistiğinin değeri α anlam seviyesinde $F_{\left[(k-1),(n-k)\right]}$ değerinden büyük olduğunda (3.1)'deki hipotez reddedilir.

Levene'nin (1960) orijinal çalışması sadece merkez olarak ortalamayı kullanmayı önermiştir. M.B. Brown ve A.B. Forsythe (1974) ortalamanın yerini almak üzere ya medyanın ya da düzeltilmiş ortalamanın kullanılmasını önererek Levene'in testini genişletmişlerdir (Mu, 2006).

Mu (2006), simetrik ve sağa çarpık dağılımına uyan verilerde düzeltilmiş ortalamanın ve χ^2 gibi çarpık dağılıma uyan verilerde medyanın kullanılmasında en iyi sonuç verdiğini, simetrik ve az sapmalı dağılımlarda ise merkez olarak ortalamanın kullanılmasının için en iyi sonuç verdiğini simülasyon çalışmasıyla göstermiştir.

3.1.4. Levene 2 testi

Levene 2 testinde yeni değişken olarak $Z_{ij} = \sqrt{\left| X_{ij} - \overline{X_{i.}} \right|}$ alınarak (3.1.6) formundaki test istatistiği uygulanır.

Lev2 test istatistiğinin değeri α anlam seviyesinde $F_{\left[(k-1),(n-k)\right]}$ değerinden büyük olduğunda (3.1)'deki hipotez reddedilir (Conover ve ark., 1981; Islam, 2006).

3.1.5. Levene 3 testi

Levene 3 testinde yeni değişken olarak $Z_{ij} = \ln\left| X_{ij} - \overline{X_{i.}} \right|$ alınarak (3.1.6) formundaki test istatistiği uygulanır.

Lev3 test istatistiğinin değeri α anlam seviyesinde $F_{\left[(k-1),(n-k)\right]}$ değerinden büyük olduğunda (3.1)'deki hipotez reddedilir (Conover ve ark., 1981; Islam, 2006).

3.1.6. Levene 4 testi

Levene 4 testinde yeni değişken olarak $Z_{ij} = \left(X_{ij} - \overline{X_{i.}} \right)^2$ alınarak (3.1.6) formundaki test istatistiği uygulanır.

Lev4 test istatistiğinin değeri α anlam seviyesinde $F_{\left[(k-1),(n-k)\right]}$ değerinden büyük olduğunda (3.1)'deki hipotez reddedilir (Conover ve ark., 1981; Islam, 2006).

3.1.7. Cochran'nın C testi

Grupların eşit sayıda gözlem içermesini gerektiren test istatistiği maksimum örneklem varyansının bütün örneklem varyanslarının toplamının oranına dayanmaktadır. Test istatistiği,

$$C = \frac{\max\left\{S_i^2\right\}}{\sum_{i=1}^{k} S_i^2} \tag{3.1.7}$$

şeklindedir. Buradaki S_i^2 i.örnekleme (gruba) ait örneklem varyansıdır.

C test istatistiğinin değeri α anlam seviyesinde, k ve (n-1)'e göre düzenlenmiş Cochran tablo değerinden büyük olduğunda (3.1)'deki hipotez reddedilir (Legendre ve Borcard, 2007; Kanji, 1993).

4. VARYANSLARIN HOMOJENLİĞİ İÇİN ÖNERİLEN TEST İSTATİSTİĞİ

Bu bölümde normal dağılıma sahip $k \geq 2$ kitlenin varyansların homojenliği için maksimum ve minimum örneklem varyanslarının farkına dayalı bir test istatistiği önerilmiştir.

4.1. Normal Dağılıma Sahip $k \geq 2$ Kitle İçin Varyansların Homojenlik Testi

$\{X_{ij} : i = 1,2,\ldots,k;\ j = 1,2,\ldots,n\}$ μ_i ortalamalı ve σ_i^2 varyanslı normal dağılıma sahip, $f(x;\mu_i,\sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right], -\infty \leq x \leq \infty, \mu_i \in \Re, \sigma_i > 0$ *i.* kitleden alınan örneklemi göstersin. $k \geq 2$ farklı kitlenin varyanslarının homojenliğinin (eşitliğinin) testini göz önüne aldığımızda test edilecek hipotezler aşağıdaki şekilde olur:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma^2 \tag{4.1.1}$$

$$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \quad bazı \ \ i \neq j \tag{4.1.2}$$

σ_i^2'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi S_i^2 $i = 1,2,\ldots,k$ (S_i^2, *i.* grubun örneklem varyansıdır) olmak üzere (4.1.1)'deki H_0 hipotezinin doğruluğu altında $M_i = \frac{(n-1)S_i^2}{\sigma^2}$ $i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenleri tanımlansın.

M_i $i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenlerine ait sıra istatistikleri $M_{1:k} < M_{2:k} < \ldots < M_{k:k}$ olmak üzere önerdiğimiz test istatistiği,

$$K = M_{k:k} - M_{1:k} \tag{4.1.3}$$

dır. K'nın büyük değerlerinin H_1 hipotezin destekleyeceği açıktır. Bu durumda $P\{K > u\} = \alpha$ olacak biçimde belirlenecek olan u kritik değeri ile (4.1.1)'de verilen H_0 hipotezi test edilebilir.

4.1.1. K test istatistiğinin dağılımı

Kritik değerlerin belirlenmesi için ilk olarak K test istatistiğinin dağılımının bulunması gerekir. K test istatistiğinin dağılımı,

$$P\{K > u\} = P\{M_{k:k} - M_{1:k} > u\} = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=x+u}^{\infty} f_{1,k}(x, y)\, dydx \tag{4.1.4}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.1. (Slutsky Teoremi)

Eğer, $X_n \xrightarrow{D} X$ ve $Y_n \xrightarrow{p} a$ (a *sabit*) olmak üzere,

(Burada D; dağılımda yakınsamayı, p; olasılıkta yakınsamayı göstermektedir.)

i. $X_n \pm Y_n \xrightarrow{D} X \pm a$

ii. $X_n Y_n \xrightarrow{D} Xa$

iii. $\dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{D} \dfrac{X}{a}$, $(a \neq 0)$

dir (Akdi 2005).

H_0 hipotezinin doğruluğu altında tanımlanan $M_i, i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenlerinin dağılımları,

$$M_i \sim \chi^2_{(n-1)} \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{4.1.5}$$

dir. Eğer σ^2 bilinmiyorsa en çok olabilirlik tahmin edicisi (2.4.5)'de verildiği üzere S^2'dir. Bu durumda,

$$M_i^* = \frac{(n-1)S_i^2}{S^2} \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{4.1.6}$$

şeklinde düşünülürse M_i^* $i=1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenlerinin dağılımları (2.4.7) ve Slutsky Teoremi gereği,

$$M_i^* = M_i \frac{\sigma^2}{S^2} = \frac{(n-1)S_i^2}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{S^2} \xrightarrow{D} \chi^2_{(n-1)} \tag{4.1.7}$$

olur. $k=2$ olması durumunda $M_{1:2}^*$ ve $M_{2:2}^*$ 'nın ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{1,2}(x,y) &= 2!\, f(x) f(y) \\ &= 2\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{(n-1)}{2}}} x^{\frac{(n-1)}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{(n-1)}{2}}} y^{\frac{(n-1)}{2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

şeklinde elde edilir (David, 1970).

Bu durumda *K* test istatistiğinin dağılımı,

$$\begin{aligned} P\{K>u\} &= P\left\{M_{2:2}^* - M_{1:2}^* > u\right\} = \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=x+u}^{\infty} f_{1,2}(x,y)\,dydx \\ &= \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=u+x}^{\infty} 2\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{(n-1)}{2}}} x^{\frac{(n-1)}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{(n-1)}{2}}} y^{\frac{(n-1)}{2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) dydx \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

dir. *K* test istatistiğinin dağılımını $c=\frac{n-1}{2}$ olarak alındığı takdirde *n*'nin tek olması durumunda bulunabilir.

$$P\{K>u\} = \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=x+u}^{\infty} 2\ \frac{1}{\Gamma(c)2^c} x^{c-1} exp(-x/2) \frac{1}{\Gamma(c)2^c} y^{c-1} \exp(-y/2)dydx$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(c)2^{2c-1}} \int_{x=0}^{\infty} x^{c-1} exp(-x/2) \int_{y=x+u}^{\infty} y^{c-1} exp(-y/2)dydx$$

$I_1 = \int_{y=x+u}^{\infty} y^{c-1} exp(-y/2)dy$ olsun. Öncelikle I_1 integralini çözelim. I_1 integralinin çözülebilmesi için belirli aşamada kısmi integrasyon uygulanması gerekir. $\{ab| - \int bda\}$ kısmi integrasyonu için aşağıdaki dönüşümü uygulanırsa,

- $I_1 = \int_{y=x+u}^{\infty} y^{c-1} exp(-y/2)dy \qquad \begin{pmatrix} y^{c-1} = a & \exp(-y/2)dy = db \\ (c-1)y^{c-1}dy = da & -2\exp(-y/2) = b \end{pmatrix}$

$$I_1 = -2y^{c-1}\exp(-y/2) + \underbrace{2(c-1)\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-2}\exp(-y/2)dy}_{I_2}$$

- $I_2 = 2(c-1)\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-2}\exp(-y/2)dy \quad \begin{pmatrix} y^{c-2} = a & \exp(-y/2)dy = db \\ (c-2)y^{c-2}dy = da & -2\exp(-y/2) = b \end{pmatrix}$

$$I_2 = 2(c-1)\left\{-2y^{c-2}\exp(-y/2) + \underbrace{2(c-2)\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-3}\exp(-y/2)dy}_{I_3}\right\}$$

- $I_3 = 2(c-2)\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-3}\exp(-y/2)dy \quad \begin{pmatrix} y^{c-3} = a & \exp(-y/2)dy = db \\ (c-3)y^{c-4}dy = da & -2\exp(-y/2) = b \end{pmatrix}$

$$I_3 = 2(c-2)\left\{-2y^{c-3}\exp(-y/2) + \underbrace{2(c-3)\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-4}\exp(-y/2)dy}_{I_4}\right\}$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$$I_{c-2} = 2(c-(c-3))\left\{-2y^2\exp(-y/2) + 2(c-(c-2))\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-(c-1)}\exp(-y/2)dy\right\}$$

$$I_{c-2} = 2.3\left\{-2y^2\exp(-y/2) + \underbrace{2.2\int_{y=u+x}^{\infty} y\exp(-y/2)dy}_{I_{c-1}}\right\}$$

- $I_{c-1} = 2.2\int_{y=u+x}^{\infty} y\exp(-y/2)dy \qquad \begin{pmatrix} y=a & \exp(-y/2)dy = db \\ dy = da & -2\exp(-y/2) = b \end{pmatrix}$

$$I_{c-1} = 2.2\left\{-2y\exp(-y/2) + \underbrace{2\int_{y=u+x}^{\infty}\exp(-y/2)dy}_{I_c}\right\}$$

- $I_c = 2\int_{y=u+x}^{\infty}\exp(-y/2)dy = 2(-2)\left\{\exp(-y/2)\right|_{u+x}^{\infty}$

$$I_1 = \int_{y=x+u}^{\infty} y^{c-1}exp(-y/2)dy = -2y^{c-1}\exp(-y/2) + 2(c-1)\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-2}\exp(-y/2)dy$$

$$= -2y^{c-1}\exp(-y/2) + 2(c-1)\left\{-2y^{c-2}\exp(-y/2) + 2(c-2)\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-3}\exp(-y/2)dy\right\}$$

$$= -2y^{c-1}\exp(-y/2) - 2.2(c-1)y^{c-2}\exp(-y/2) + 2.2.(c-1)(c-2)\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-3}\exp(-y/2)dy$$

$$= -2y^{c-1}\exp(-y/2)\left[1+\frac{2}{y}(c-1)\right] + 2.2.(c-1)(c-2)\left\{-2y^{c-3}\exp(-y/2) + 2(c-3)\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-4}\exp(-y/2)dy\right\}$$

$$= -2y^{c-1}\exp(-y/2)\left[1+\frac{2}{y}(c-1)\right] - 2.2.2.(c-1)(c-2)y^{c-3}\exp(-y/2) +$$

$$+ 2.2.2.(c-1)(c-2)(c-3)\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-4}\exp(-y/2)dy$$

$$= -2y^{c-1}\exp(-y/2)\left[1+\frac{2}{y}(c-1)+\left(\frac{2}{y}\right)^2(c-1)(c-2)\right]+2.2.2.(c-1)(c-2)(c-3)\int_{y=u+x}^{\infty} y^{c-4}\exp(-y/2)dy$$

$$I_1 = -2y^{c-1}\exp(-y/2)\left[1+\frac{2}{y}(c-1)+\left(\frac{2}{y}\right)^2(c-1)(c-2)+\cdots+\left(\frac{2}{y}\right)^{c-2}(c-1)(c-2)\ldots 3.2\right]+$$

$$+2^{c-1}(c-1)(c-2)\ldots 2.1\int_{y=u+x}^{\infty}\exp(-y/2)dy$$

$$I_1 = -2y^{c-1}\exp(-y/2)\left[1+\frac{2}{y}(c-1)+\left(\frac{2}{y}\right)^2(c-1)(c-2)+\cdots+\left(\frac{2}{y}\right)^{c-2}(c-1)(c-2)\ldots 3.2\right]+$$

$$+2^{c-1}(c-1)(c-2)\ldots 2.1\{-2\exp(-y/2)\}$$

$$I_1 = -2\exp(-y/2)[2^0 y^{c-1}+2^1 y^{c-2}(c-1)+2^2 y^{c-3}(c-1)(c-2)+\cdots$$

$$\ldots+2^{c-2}y(c-1)(c-2)\ldots 3.2+2^{c-1}y^0(c-1)(c-2)\ldots 2.1]\Big|_{u+x}^{\infty}$$

$$I_1 = -2\exp(-y/2)\left[\sum_{k=0}^{c-1}2^k y^{c-(k+1)}\frac{(c-1)!}{(c-(k+1))!}\right]\Bigg|_{u+x}^{\infty}$$

$$I_1 = I_1(\infty)-I_1(u+x)$$

$I_1(\infty)=0$ {L.Hospital Sonucu 0'a gider}

$$I_1(u+x) = -2\exp(-(u+x)/2)\sum_{k=0}^{c-1}2^k(u+x)^{c-(k+1)}\frac{(c-1)!}{(c-(k+1))!}$$

$$I_1 = 0-\left\{-2\exp(-(u+x)/2)\sum_{k=0}^{c-1}2^k(u+x)^{c-(k+1)}\frac{(c-1)!}{(c-(k+1))!}\right\}$$

$$I_1 = 2\exp(-(u+x)/2)\sum_{k=0}^{c-1}2^k(u+x)^{c-(k+1)}\frac{(c-1)!}{(c-(k+1))!}$$

$$P\{K>u\}=\frac{1}{\Gamma^2(c)2^{2c-1}}\int_{x=0}^{\infty}x^{c-1}exp(-x/2)\sum_{k=0}^{c-1}2^{k-1}exp[-(u+x)/2](u+x)^{c-k-1}\frac{(c-1)!}{(c-k-1)!}dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(c)(c-1)!2^{2c-2}}2.(c-1)!\sum_{k=0}^{c-1}\frac{2^k exp(-u/2)}{(c-k-1)!}\int_{x=0}^{\infty}x^{c-1}(u+x)^{-(k+1-c)}exp(-x)dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(c)2^{2c-2}}\sum_{k=0}^{c-1}\frac{2^k exp(-u/2)}{(c-k-1)!}\int_{x=0}^{\infty}x^{c-1}(u+x)^{-(k+1-c)}exp(-x)dx$$

Daha sonra;

$$\int_{x=0}^{\infty}x^{c-1}(u+x)^{-(k+1-c)}exp(-x)dx=u^{c-1-\frac{k}{2}}exp(u/2)\Gamma(c)W_{-\frac{k}{2},\frac{2c-k-1}{2}}(u)$$

$$P\{K>u\}=\frac{1}{2^{2c-2}}\sum_{k=0}^{c-1}\frac{2^k}{(c-k-1)!}u^{c-1-\frac{k}{2}}W_{-\frac{k}{2},\frac{2c-k-1}{2}}(u) \qquad (4.1.10)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki,

- $W_{-\frac{k}{2},\frac{2c-k-1}{2}}(u)=Whitta\ker W\left(-\frac{k}{2},\frac{2c-k-1}{2},u\right)$

$$=\exp\left(-\frac{1}{2}u\right)uKummerU\left(\frac{1}{2}+\frac{2c-k-1}{2}+\frac{k}{2},2c-k,u\right)$$

$$=\exp\left(-\frac{1}{2}u\right)uKummerU(c,2c-k,u) \qquad (4.1.11)$$

ve

- $KummerM(a,b,z)=1+\frac{a^z}{b}+\frac{(a)_2 z^2}{(b)_2 2!}+\ldots+\frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}+\ldots\ldots\ldots$
- $(a)_n=a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1),\ (a)_0=1$
- $KummerU(c,2c-k,u)=\frac{\pi}{\sin\pi(2c-k)}\left\{\frac{KummerM(c,2c-k,u)}{\Gamma(1-c+k)\Gamma(2c-k)}-\right.$

$$-u^{1-2+k}\,\frac{KummerM\left(1-c+k,2-2c+k,u\right)}{\Gamma(c)\Gamma\left(2-2c+k\right)}\Bigg\} \qquad (4.1.12)$$

(Abramowitz ve Stegun, 1972).

$k>2$ olması durumunda $M_{1:k}^{*}$ ve $M_{k:k}^{*}$'nın ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{1,k}(x,y)$ olmak üzere,

$$f_{1,k}(x,y)=k(k-1)\left[F(y)-F(x)\right]^{(k-2)}f(x)f(y)$$

$$=k(k-1)\left[\int_{s=x}^{y}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{(n-1)}{2}}}\,s^{\frac{(n-1)}{2}-1}\exp\left(-\frac{s}{2}\right)ds\right]^{(k-2)}\times$$

$$\times\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{(n-1)}{2}}}x^{\frac{(n-1)}{2}-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{(n-1)}{2}}}y^{\frac{(n-1)}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{2}\right) \qquad (4.1.13)$$

şeklinde elde edilir (David, 1970). Bu durumda K test istatistiğinin dağılımı,

$$P\left\{K>u\right\}=P\left\{M_{k:k}^{*}-M_{1:k}^{*}>u\right\}=\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=x+u}^{\infty}f_{1,k}(x,y)\,dydx$$

$$=\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=u+x}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}k(k-1)\left[\int_{s=x}^{y}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{(n-1)}{2}}}\,s^{\frac{(n-1)}{2}-1}\exp\left(-\frac{s}{2}\right)ds\right]^{(k-2)}\times\\ \times\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{(n-1)}{2}}}x^{\frac{(n-1)}{2}-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{(n-1)}{2}}}y^{\frac{(n-1)}{2}-1}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)dydx\end{array}\right\} \qquad (4.1.14)$$

dir.

4.1.2. *K* test istatistiğine ilişkin kritik değerler

K test istatistiği ilişkin kritik değerler, grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre %10 , %5, %1 anlam seviyelerinde Maple 9.5 programı yardımıyla bulundu. Kritik değerler Çizelge 4.1' de verildi.

Çizelge 4.1. Grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre %10, %5, %1 anlam seviyelerindeki kritik değerler

Grup Sayısı (k)	Gözlem Sayısı (n)	$u_{\alpha\cong 0,1}$	$u_{\alpha\cong 0,05}$	$u_{\alpha\cong 0,01}$
2	**10**	9,82	12,04	16,77
	15	12,26	14,89	20,39
	20	14,30	17,28	23,44
	25	16,07	19,37	26,13
	30	17,68	21,26	28,56
	40	20,51	24,61	32,88
	50	22,99	27,55	36,70
	60	25,24	30,21	40,13
	70	27,29	32,66	43,31
3	**10**	12,37	14,54	19,15
	15	15,40	17,94	23,23
	20	17,94	20,78	26,67
	25	20,14	23,27	29,70
	30	22,13	25,53	32,45
	40	25,65	29,51	37,32
4	**10**	13,90	16,02	20,55
	15	17,27	19,73	24,91
	20	20,08	22,84	28,58
	25	22,54	25,57	31,82
	30	24,76	28,03	34,75
5	**10**	14,98	17,07	21,55
	15	18,58	21,00	26,11
	20	21,59	24,29	29,94
	25	24,23	27,19	33,32
	30	26,61	29,80	36,38

4.2. Simülasyon Çalışması

Q-basıc programı kullanılarak 100000 denemelik simülasyon çalışması yapılarak önerilen K testinin güç değerleri %5 ve %1 anlam seviyelerine göre Hartley ve Bartlett'in χ^2 testlerinin güç değerleri ile karşılaştırıldı ve bulunan güç

değerleri Çizelge 4.2, Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.4 'de verildi. Daha sonra bazı durumlar için güç değerlerinin Minitab 15 yardımıyla grafikleri çizdirildi.

Çizelge 4.2. k=3 olması durumunda gözlem sayılarına göre K testi, Bartlett testi ve Hartley testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri

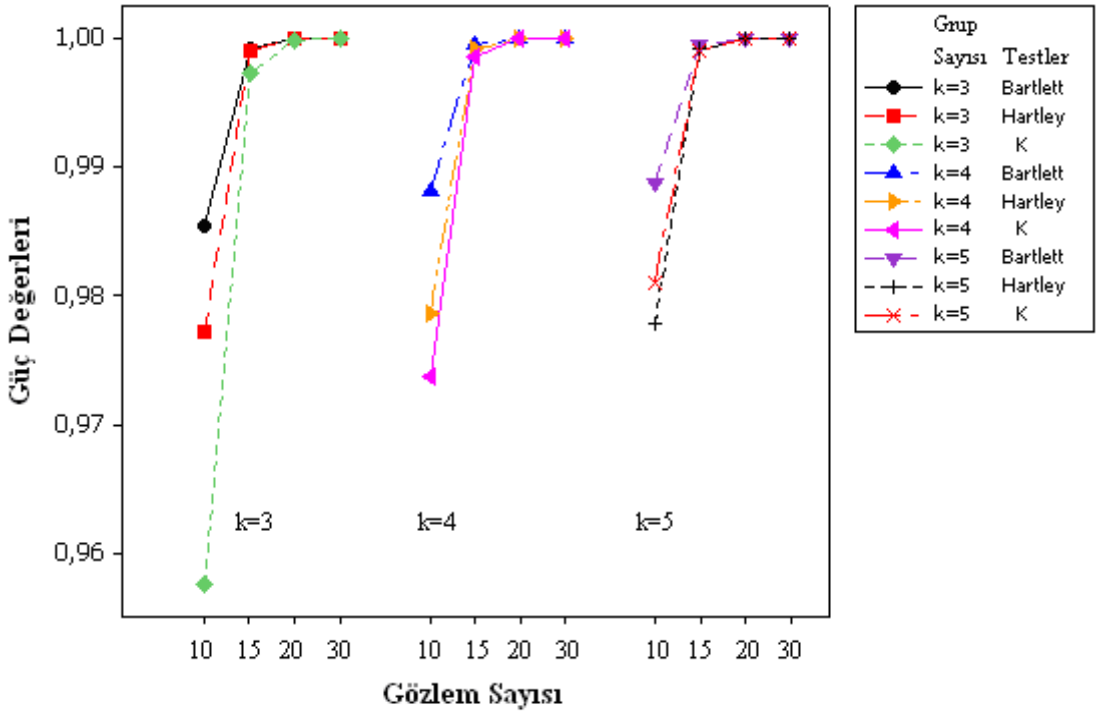
α		%5			%1		
n	$\sigma_1^2 : \sigma_2^2 : \sigma_3^2$	**Bartlet**	**Hartley**	**K**	**Bartlet**	**Hartley**	**K**
10	**(4:1:1)**	0,9855	0,97729	0,95764	0,9551	0,91384	0,82356
	(4:2:2)	0,55153	0,49518	0,4836	0,32125	0,23583	0,15302
	(3:2:2)	0,2164	0,19447	0,16500	0,07706	0,05789	0,02201
	(4:4:1)	0,98829	0,99033	0,59449	0,92107	0,93705	0,11457
	(8:1:1)	0,99993	0,99987	0,99119	0,99967	0,99912	0,95637
	(8:4:4)	0,55283	0,49772	0,48424	0,31876	0,23323	0,15036
	(8:5:5)	0,28023	0,24917	0,22379	0,11316	0,0839	0,03712
	(7:4:4)	0,38157	0,33852	0,31861	0,17856	0,12951	0,06917
	(10:5:5)	0,55595	0,50008	0,48765	0,31913	0,23402	0,15159
	(10:6:6)	0,32338	0,28683	0,26346	0,14036	0,1024	0,04953
	(10:7:7)	0,1737	0,15661	0,12707	0,05805	0,04476	0,01502
	(10:8:8)	0,09463	0,0888	0,05904	0,02364	0,02001	0,00407
15	**(4:1:1)**	0,99926	0,99902	0,99728	0,99702	0,99527	0,98483
	(4:2:2)	0,75968	0,74704	0,72904	0,5538	0,5131	0,43121
	(3:2:2)	0,32572	0,32777	0,29109	0,14471	0,14071	0,08446
	(4:4:1)	0,99982	0,99994	0,96323	0,99718	0,99862	0,44723
	(8:1:1)	1	1	0,99988	1	1	0,99863
	(8:4:4)	0,75997	0,74674	0,72975	0,55683	0,51556	0,43424
	(8:5:5)	0,42401	0,42177	0,3869	0,21599	0,20417	0,13581
	(7:4:4)	0,57063	0,56221	0,53593	0,33875	0,31218	0,23459
	(10:5:5)	0,75967	0,74718	0,7297	0,55461	0,51302	0,43245
	(10:6:6)	0,491	0,4852	0,45376	0,2686	0,25075	0,17692
	(10:7:7)	0,25967	0,26757	0,22528	0,1026	0,10312	0,05533
	(10:8:8)	0,12377	0,13477	0,0966	0,0365	0,04097	0,01531
20	**(4:1:1)**	0,99996	0,99997	0,99991	0,99982	0,99974	0,99895
	(4:2:2)	0,87982	0,86745	0,86657	0,73118	0,70677	0,65827
	(3:2:2)	0,43308	0,4282	0,41004	0,22017	0,22004	0,1623
	(4:4:1)	1	1	0,99887	0,99996	0,99996	0,86518
	(8:1:1)	1	1	1	1	1	0,99995
	(8:4:4)	0,87806	0,86741	0,86619	0,73272	0,70603	0,65997
	(8:5:5)	0,55394	0,54345	0,53118	0,32837	0,32022	0,25701
	(7:4:4)	0,7125	0,69713	0,69317	0,49518	0,47606	0,41537
	(10:5:5)	0,88086	0,86884	0,8684	0,73305	0,70663	0,66083
	(10:6:6)	0,62993	0,61651	0,60879	0,39974	0,38686	0,3221
	(10:7:7)	0,34753	0,34608	0,32324	0,15912	0,16387	0,11139
	(10:8:8)	0,15532	0,16244	0,13422	0,05104	0,05844	0,02959
30	**(4:1:1)**	1	1	1	1	1	1
	(4:2:2)	0,97361	0,96833	0,9117	0,91973	0,89202	0,89931
	(3:2:2)	0,61558	0,59917	0,60542	0,38624	0,34878	0,34157
	(4:4:1)	1	1	0,99999	1	1	0,99975
	(8:1:1)	1	1	1	1	1	1
	(8:4:4)	0,97414	0,96918	0,97223	0,921	0,89333	0,90083
	(8:5:5)	0,74905	0,7309	0,74107	0,53683	0,49028	0,49075
	(7:4:4)	0,88234	0,86846	0,8772	0,73552	0,68829	0,69607
	(10:5:5)	0,97352	0,96801	0,97144	0,91931	0,89267	0,89855
	(10:6:6)	0,81817	0,8022	0,81171	0,62998	0,57994	0,58525
	(10:7:7)	0,50147	0,48869	0,4905	0,2791	0,25288	0,24072
	(10:8:8)	0,21965	0,22006	0,20654	0,08362	0,07892	0,06329

Çizelge 4.3. k=4 olması durumunda gözlem sayılarına göre K testi, Bartlett testi ve Hartley testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri

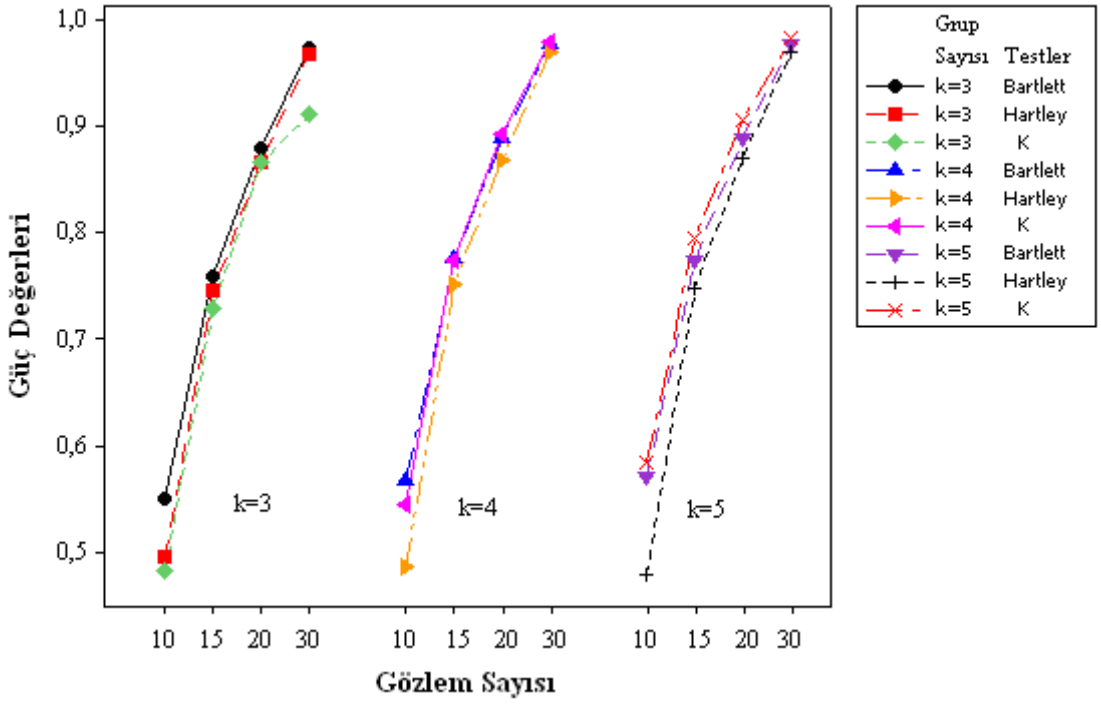
α		%5			%1		
n	$\sigma_1^2:\sigma_2^2:\sigma_3^2:\sigma_4^2$	**Bartlet**	**Hartley**	**K**	**Bartlet**	**Hartley**	**K**
10	**(4:1:1:1)**	0,9881	0,97871	0,97373	0,96729	0,91991	0,91356
	(4:2:2:2)	0,5669	0,48662	0,54534	0,35599	0,23093	0,26848
	(3:2:2:2)	0,21467	0,18121	0,18698	0,08235	0,05484	0,04505
	(4:4:1:1)	0,99869	0,99614	0,89695	0,99264	0,96761	0,4347
	(8:1:1:1)	0,99996	0,99992	0,99563	0,99982	0,99931	0,99398
	(8:4:4:4)	0,56737	0,48705	0,54592	0,35185	0,22669	0,26745
	(8:5:5:5)	0,27957	0,23522	0,25489	0,12131	0,07749	0,07416
	(7:4:4:4)	0,39045	0,32646	0,36598	0,19936	0,12623	0,1358
	(10:5:5:5)	0,56577	0,48502	0,54562	0,35588	0,23019	0,26867
	(10:6:6:6)	0,32929	0,27515	0,30421	0,154	0,09764	0,0992
	(10:7:7:7)	0,17281	0,14785	0,14455	0,06103	0,04195	0,03028
	(10:8:8:8)	0,09242	0,08403	0,06417	0,02486	0,01949	0,00872
15	**(4:1:1:1)**	0,99947	0,99916	0,99863	0,99811	0,99586	0,99393
	(4:2:2:2)	0,77547	0,75175	0,77451	0,59138	0,51651	0,5464
	(3:2:2:2)	0,3276	0,32129	0,3174	0,15373	0,13665	0,12146
	(4:4:1:1)	1	0,99998	0,99694	0,99989	0,99972	0,91412
	(8:1:1:1)	1	1	0,99994	1	1	0,99951
	(8:4:4:4)	0,7739	0,74993	0,77368	0,59247	0,51647	0,5472
	(8:5:5:5)	0,42821	0,41745	0,42434	0,22876	0,19681	0,19141
	(7:4:4:4)	0,58003	0,55807	0,57847	0,36766	0,32268	0,3234
	(10:5:5:5)	0,77387	0,74905	0,77305	0,59219	0,51883	0,54818
	(10:6:6:6)	0,4972	0,47937	0,49351	0,2863	0,24408	0,24462
	(10:7:7:7)	0,25894	0,25946	0,24594	0,10803	0,09943	0,08184
	(10:8:8:8)	0,12126	0,13189	0,10058	0,03553	0,0382	0,02025
20	**(4:1:1:1)**	0,99999	0,99997	0,99996	0,99981	0,99971	0,99961
	(4:2:2:2)	0,88854	0,86903	0,89355	0,76288	0,69348	0,74639
	(3:2:2:2)	0,43423	0,41793	0,43558	0,23431	0,20086	0,21145
	(4:4:1:1)	1	1	0,99994	1	1	0,99678
	(8:1:1:1)	1	1	1	1	1	1
	(8:4:4:4)	0,88917	0,86959	0,89407	0,76473	0,69414	0,74758
	(8:5:5:5)	0,56073	0,53839	0,56793	0,3444	0,29393	0,32117
	(7:4:4:4)	0,72176	0,69448	0,72943	0,52268	0,45189	0,50057
	(10:5:5:5)	0,88963	0,86982	0,89403	0,76534	0,69393	0,74799
	(10:6:6:6)	0,63799	0,61232	0,6463	0,4238	0,36279	0,40112
	(10:7:7:7)	0,34486	0,33266	0,34424	0,16409	0,14269	0,14272
	(10:8:8:8)	0,1515	0,15484	0,13783	0,05049	0,04907	0,03567
30	**(4:1:1:1)**	1	1	1	1	1	1
	(4:2:2:2)	0,97733	0,97038	0,97954	0,93429	0,89051	0,93291
	(3:2:2:2)	0,61848	0,5948	0,63236	0,40113	0,32408	0,39678
	(4:4:1:1)	1	1	1	1	1	1
	(8:1:1:1)	1	1	1	1	1	1
	(8:4:4:4)	0,97769	0,97101	0,97956	0,93518	0,89188	0,93412
	(8:5:5:5)	0,75798	0,7347	0,77208	0,55939	0,46856	0,55684
	(7:4:4:4)	0,89175	0,87406	0,89922	0,7624	0,67638	0,76108
	(10:5:5:5)	0,9769	0,96998	0,979	0,93387	0,98963	0,93277
	(10:6:6:6)	0,82743	0,80523	0,83885	0,65919	0,56627	0,65766
	(10:7:7:7)	0,50664	0,48635	0,51766	0,28909	0,22949	0,28204
	(10:8:8:8)	0,21432	0,21085	0,21129	0,0821	0,06655	0,07247

Çizelge 4.4 k=5 olması durumunda gözlem sayılarına göre K testi, Bartlett testi ve Hartley testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri

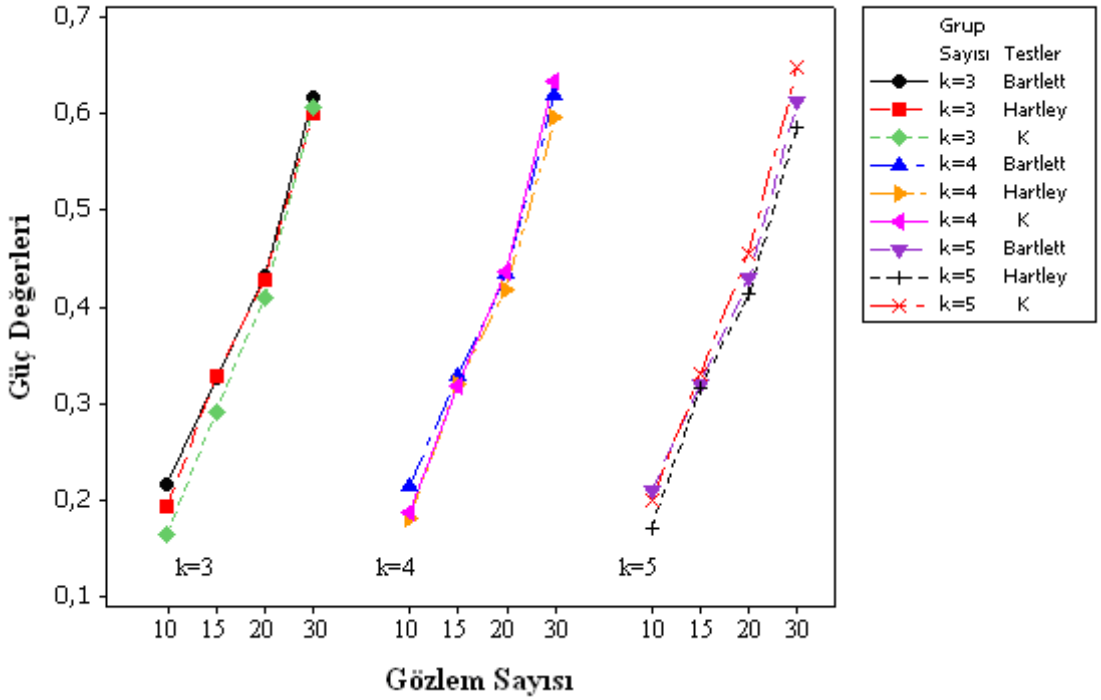
α		%5			%1		
n	$\sigma_1^2:\sigma_2^2:\sigma_3^2:\sigma_4^2:\sigma_5^2$	**Bartlet**	**Hartley**	**K**	**Bartlet**	**Hartley**	**K**
10	**(4:1:1:1:1)**	0,98879	0,97784	0,9811	0,97035	0,91756	0,94543
	(4:2:2:2:2)	0,57087	0,47931	0,58381	0,36185	0,22007	0,33843
	(3:2:2:2:2)	0,21038	0,17205	0,19953	0,082	0,05147	0,0643
	(4:4:1:1:1)	0,99954	0,99702	0,96845	0,99738	0,97556	0,7571
	(8:1:1:1:1)	0,99996	0,9999	0,99739	0,9999	0,99938	0,99208
	(8:4:4:4:4)	0,57124	0,47909	0,58269	0,36147	0,22087	0,338
	(8:5:5:5:5)	0,27941	0,22738	0,27672	0,12215	0,07303	0,10149
	(7:4:4:4:4)	0,38808	0,31667	0,39403	0,20088	0,11658	0,17887
	(10:5:5:5:5)	0,5692	0,48015	0,58184	0,36181	0,22196	0,33814
	(10:6:6:6:6)	0,32867	0,26484	0,33133	0,156	0,0929	0,1356
	(10:7:7:7:7)	0,16917	0,14092	0,15467	0,05919	0,0385	0,04245
	(10:8:8:8:8)	0,08814	0,08056	0,06634	0,02281	0,01783	0,01107
15	**(4:1:1:1:1)**	0,99949	0,99921	0,99903	0,99826	0,99614	0,9964
	(4:2:2:2:2)	0,77458	0,74892	0,79486	0,60093	0,51171	0,61019
	(3:2:2:2:2)	0,32015	0,31608	0,33132	0,14992	0,12851	0,14519
	(4:4:1:1:1)	1	0,99998	0,99942	1	0,99989	0,98814
	(8:1:1:1:1)	1	1	0,99997	1	1	0,9998
	(8:4:4:4:4)	0,77425	0,7484	0,7965	0,60137	0,51299	0,6094
	(8:5:5:5:5)	0,42586	0,41316	0,44437	0,22737	0,19015	0,22761
	(7:4:4:4:4)	0,57541	0,55332	0,60154	0,36601	0,30239	0,37299
	(10:5:5:5:5)	0,77376	0,74837	0,79519	0,59965	0,51055	0,60875
	(10:6:6:6:6)	0,49365	0,4768	0,51761	0,2888	0,23924	0,2907
	(10:7:7:7:7)	0,25117	0,25288	0,25552	0,10525	0,09359	0,09752
	(10:8:8:8:8)	0,11764	0,12948	0,10423	0,03462	0,03662	0,02486
20	**(4:1:1:1:1)**	0,99999	0,99995	0,99995	0,99984	0,99974	0,99977
	(4:2:2:2:2)	0,88996	0,86983	0,9067	0,7706	0,69647	0,78881
	(3:2:2:2:2)	0,4296	0,41274	0,45467	0,22836	0,19348	0,23851
	(4:4:1:1:1)	1	1	1	1	0,99999	0,99974
	(8:1:1:1:1)	1	1	1	1	1	1
	(8:4:4:4:4)	0,88949	0,87027	0,90645	0,76832	0,69509	0,78721
	(8:5:5:5:5)	0,55575	0,5311	0,58599	0,34153	0,28721	0,36028
	(7:4:4:4:4)	0,72187	0,69388	0,75226	0,52437	0,45118	0,5485
	(10:5:5:5:5)	0,89067	0,87113	0,90724	0,76939	0,69477	0,78852
	(10:6:6:6:6)	0,63258	0,60788	0,66397	0,42233	0,36101	0,44634
	(10:7:7:7:7)	0,33477	0,32525	0,35234	0,15925	0,13722	0,16298
	(10:8:8:8:8)	0,14658	0,15112	0,14073	0,04658	0,04663	0,04007
30	**(4:1:1:1:1)**	1	1	1	1	1	1
	(4:2:2:2:2)	0,97707	0,97026	0,98297	0,93757	0,90662	0,94881
	(3:2:2:2:2)	0,61326	0,58614	0,64781	0,39839	0,34854	0,43162
	(4:4:1:1:1)	1	1	1	1	1	1
	(8:1:1:1:1)	1	1	1	1	1	1
	(8:4:4:4:4)	0,97756	0,97056	0,98278	0,93896	0,90706	0,94962
	(8:5:5:5:5)	0,75352	0,72707	0,7861	0,55873	0,49723	0,59635
	(7:4:4:4:4)	0,89141	0,87114	0,91038	0,76247	0,70179	0,79255
	(10:5:5:5:5)	0,97751	0,97114	0,98291	0,93722	0,90556	0,94842
	(10:6:6:6:6)	0,82467	0,80048	0,8501	0,659	0,593	0,69571
	(10:7:7:7:7)	0,49516	0,47265	0,5267	0,28452	0,25015	0,31166
	(10:8:8:8:8)	0,20584	0,19949	0,21148	0,0783	0,07334	0,08088



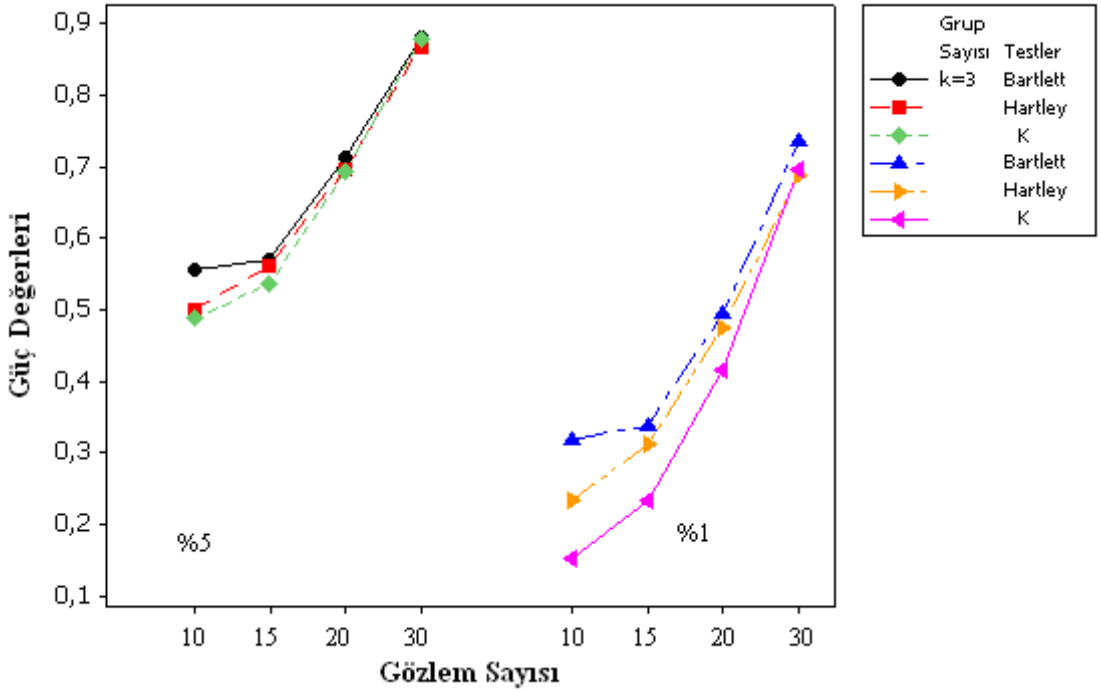
Şekil 4.1. (4:1:1), (4:1:1:1) ve (4:1:1:1:1) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



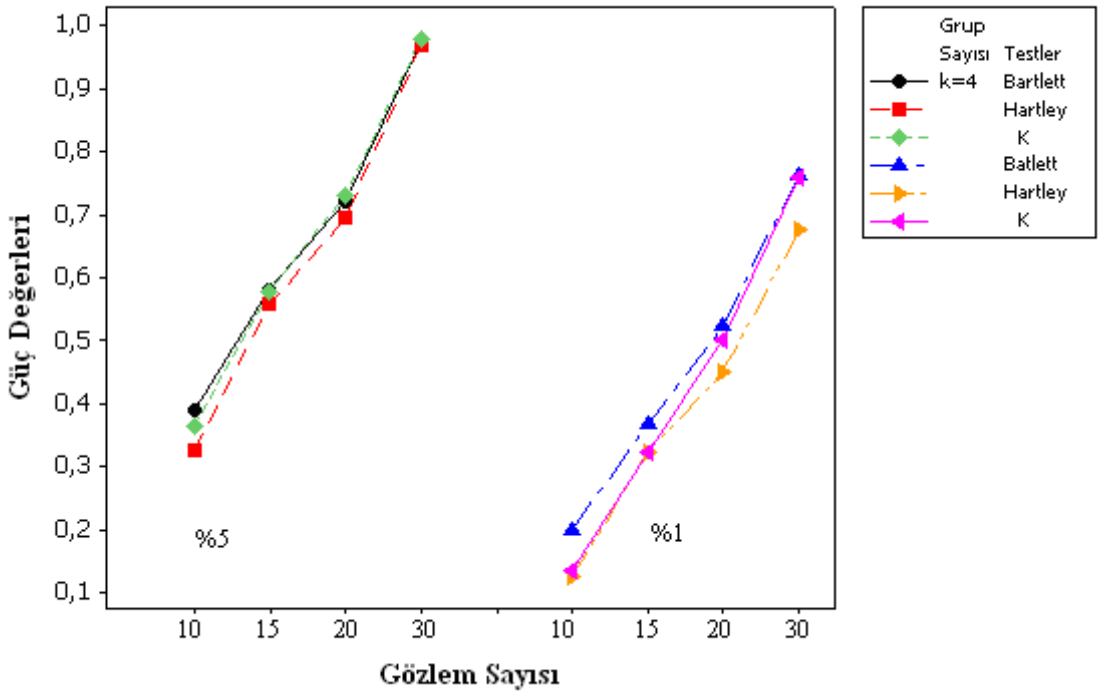
Şekil 4.2. (4:2:2), (4:2:2:2) ve (4:2:2:2:2) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



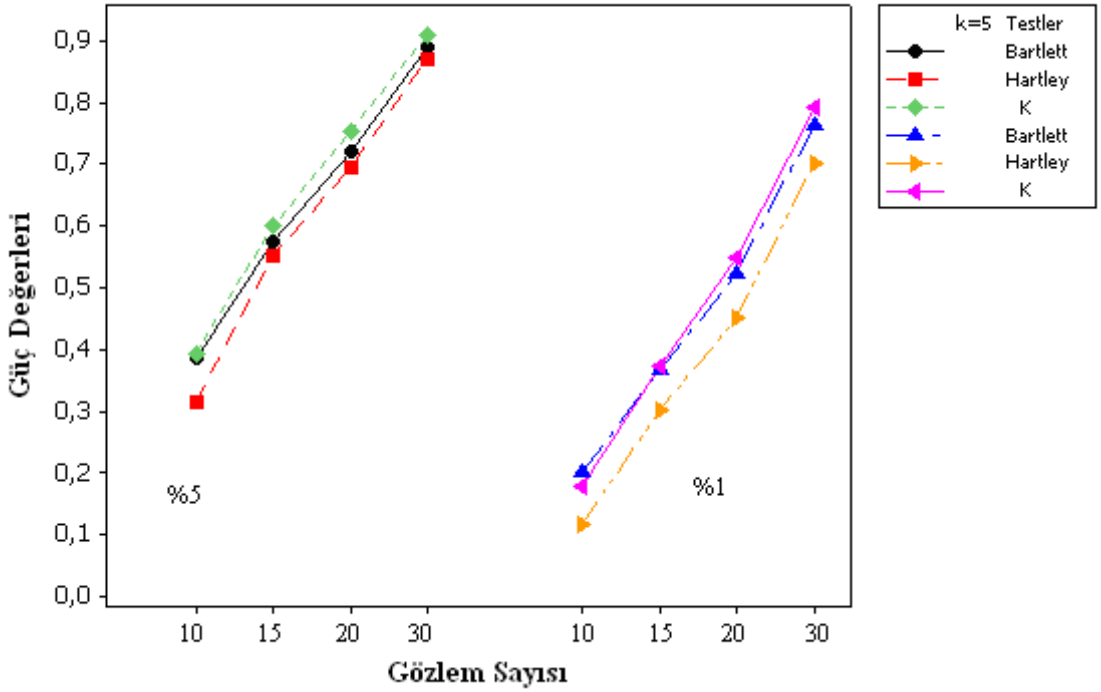
Şekil 4.3. (3:2:2), (3:2:2:2) ve (3:2:2:2:2) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



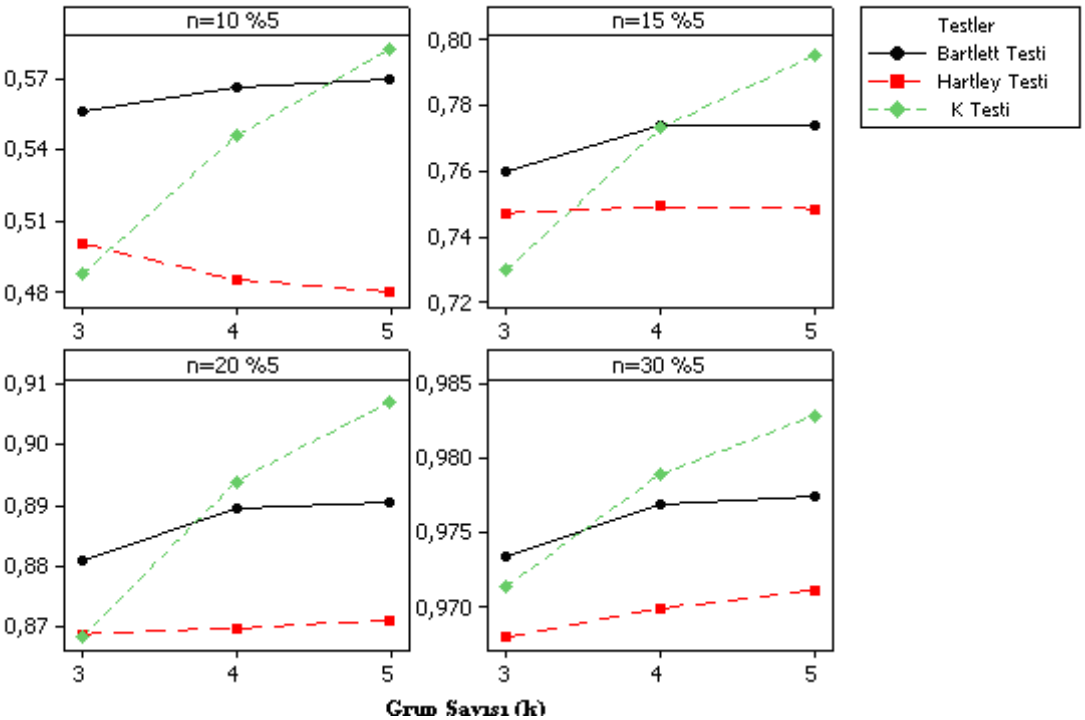
Şekil 4.4. (7:4:4) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 ve %1 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



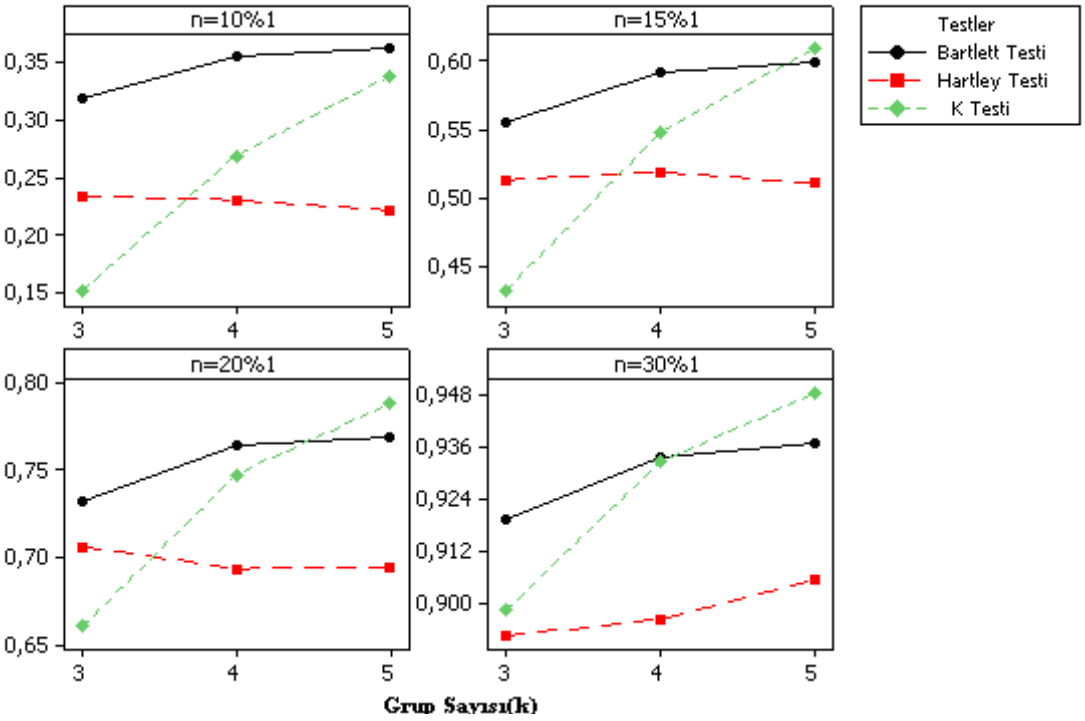
Şekil 4.5. (7:4:4:4) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 ve %1 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



Şekil 4.6. (7:4:4:4:4) varyans değerleri için gözlem sayılarına göre %5 ve %1 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



Şekil 4.7. (10:5:5), (10:5:5:5) ve (10:5:5:5:5) varyans değerleri için grup sayılarına göre %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



Şekil 4.8. (10:5:5), (10:5:5:5) ve (10:5:5:5:5) varyans değerleri için grup sayılarına göre %1 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması

5. NORMAL DAĞILIMIN ORTALAMALARININ EŞİTLİĞİ İÇİN ÖNERİLEN TEST İSTATİSTİĞİ

Bu bölümde normal dağılıma sahip $k \geq 2$ kitlenin (grubun) ortalamaların eşitliği için maksimum ve minimum örneklem ortalamalarının farkına dayalı bir test istatistiği önerildi.

5.1. Normal Dağılıma Sahip $k \geq 2$ Kitle İçin Ortalamalarının Eşitliği Testi

$\{X_{ij} : i = 1,2,\ldots,k;\ j = 1,2,\ldots,n\}$ μ_i ortalamalı ve σ^2 varyanslı normal dağılıma sahip, $f(x;\mu_i,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma}\right)^2\right]$, $-\infty \leq x \leq \infty, \mu_i \in \Re, \sigma > 0$

i. kitleden alınan örneklemi göstersin. $k \geq 2$ farklı kitlenin ortalamalarının eşitliğinin testini göz önüne aldığımızda ortalamaların eşitliği için test edilecek hipotezler aşağıdaki şekilde olur:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \mu \tag{5.1.1}$$

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j \ \ bazı\ \ i \neq j \tag{5.1.2}$$

μ_i'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\overline{X_i}$ $i = 1,2,\ldots,k$ (*i.* grubun örneklem ortalaması) olmak üzere (5.1.1)'deki H_0 hipotezinin doğruluğunda ve varyansların homojenliği varsayımı altında $Z_i = \frac{n(\overline{X_i} - \mu)}{\sigma}$ $i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenleri tanımlansın. Z_i $i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenlerine ait sıra istatistikleri $Z_{1:k} < Z_{2:k} < \ldots < Z_{k:k}$ olmak üzere önerdiğimiz test istatistiği,

$$M = Z_{k:k} - Z_{1:k} \tag{5.1.3}$$

dır. M'nin büyük değerlerinin H_1 hipotezin destekleyeceği açıktır. Bu durumda $P\{M > u\} = \alpha$ olacak biçimde belirlenecek olan *u* kritik değeri ile (5.1.1)'de verilen H_0 hipotezi test edilebilir.

5.1.1. *M* test istatistiğinin dağılımı

Kritik değerlerin belirlenmesi için ilk olarak *M* test istatistiğinin dağılımının bulunması gerekir. *M* test istatistiğinin dağılımı,

$$P\{M > u\} = P\{Z_{k:k} - Z_{1:k} > u\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=x+u}^{\infty} f_{1,k}(x,y)\,dydx \tag{5.1.4}$$

şeklinde elde edilir. H_0 hipotezinin doğruluğu altında tanımlanan $Z_i, i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenlerinin dağılımları,

$$Z_i \sim N(0,n) \tag{5.1.5}$$

dir. Eğer μ ve σ^2 bilinmiyorsa en çok olabilirlik tahmin edicileri, (2.4.4) ve (2.4.5)'de verildiği üzere $\overline{X}$ ve S^2'dir. Bu durumda,

$$Z_i^* = \frac{n\left(\overline{X_i} - \overline{X}\right)}{S} \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{5.1.6}$$

şeklinde düşünülürse $Z_i^* \quad i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenlerinin dağılımları (2.4.6), (2.4.7) ve Slutsky Teoremi gereği,

$$Z_i^* = \frac{Z_i}{\frac{\mu}{\overline{X}}}\frac{\sigma}{S} = \frac{n\left(\overline{X_i} - \mu\right)}{\sigma\frac{\mu}{\overline{X}}}\frac{\sigma}{S} \xrightarrow{D} Z_i \sim N(0,n) \tag{5.1.7}$$

olur.

$k > 2$ olması durumunda $Z_{1:k}^*$ ve $Z_{k:k}^*$'nın ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{1,k}(x,y) &= k(k-1)\left[F(y) - F(x)\right]^{(k-2)} f(x) f(y) \\ &= k(k-1)\left[\int_{s=x}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right) ds\right]^{(k-2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2n}\right) \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

şeklinde elde edilir (David, 1970).

Bu durumda M test istatistiğinin dağılımı,

$$P\{M > u\} = P\left\{Z^*_{k:k} - Z^*_{1:k} > u\right\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=x+u}^{\infty} f_{1,k}(x,y)\,dydx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=u+x}^{\infty} k(k-1)\left[\int_{s=x}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right) ds\right]^{(k-2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2n}\right) dydx \tag{5.1.9}$$

dır.

5.1.2. *M* test istatistiğine ilişkin kritik değerler

M test istatistiği ilişkin kritik değerler, grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre %10 , %5, %1 anlam seviyelerinde Maple 9.5 programı yardımıyla bulundu. Kritik değerler Çizelge 5.1' de verildi.

Çizelge 5.1. Grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre %10, %5, %1 anlam seviyelerindeki kritik değerler

Grup Sayısı (k)	Gözlem Sayısı (n)	$u_{\alpha \cong 0,1}$	$u_{\alpha \cong 0,05}$	$u_{\alpha \cong 0,01}$
3	***10***	9,177	10,481	13,029
	20	12,978	14,822	18,426
	30	15,897	18,154	22,566
	40	18,356	20,962	26,058
	50	20,523	23,437	29,133
	60	22,481	25,673	31,915
	70	24,283	27,731	34,472
	80	25,959	29,645	36,852
	90	27,534	31,444	39,086
	100	29,023	33,144	41,203
	1000	91,780	104,813	130,295
4	***10***	10,247	11,489	13,922
	20	14,491	16,247	19,689
	30	17,748	19,899	24,115
	40	20,494	22,978	27,845
	50	22,913	25,690	31,132
	60	25,100	28,142	34,103
	70	27,111	30,397	36,836
	80	28,983	32,495	39,379
	90	30,741	34,467	41,768
	100	32,404	36,331	44,028
	1000	102,471	114,890	139,228
5	***10***	10,999	12,198	14,555
	20	15,555	17,251	20,585
	30	19,051	21,129	25,210
	40	21,998	24,397	29,110
	50	24,595	27,277	32,546
	60	26,942	29,881	35,653
	70	29,101	32,275	38,509
	80	31,110	34,503	41,168
	90	32,997	36,596	43,666
	100	34,782	38,576	46,028
	1000	109,992	121,989	145,554
6	***10***	11,576	12,744	15,043
	20	16,371	18,023	21,274
	30	20,050	22,073	26,055
	40	23,052	25,488	30,086
	50	25,885	28,497	33,637
	60	28,355	31,216	36,847
	70	30,627	33,717	39,800
	80	32,742	36,046	42,548
	90	34,728	38,232	45,129
	100	36,607	40,300	47,570
	1000	115,760	127,442	150,430

5.2. Simülasyon Çalışması

Q-basıc programı kullanılarak 10000 denemelik simülasyon çalışması yapılarak önerilen *M* test istatistiğinin gücü %5 ve %1 anlam seviyelerine göre F (ANOVA) test istatistiğinin gücü ile karşılaştırıldı ve bulunan güç değerleri Çizelge 5.2, Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4 'de verildi. Daha sonra bazı durumlar için güç değerlerinin grafikleri Minitab 15 yardımıyla çizdirildi.

Çizelge 5.2 k=3 olması durumunda gözlem sayılarına göre M testi ve F testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri

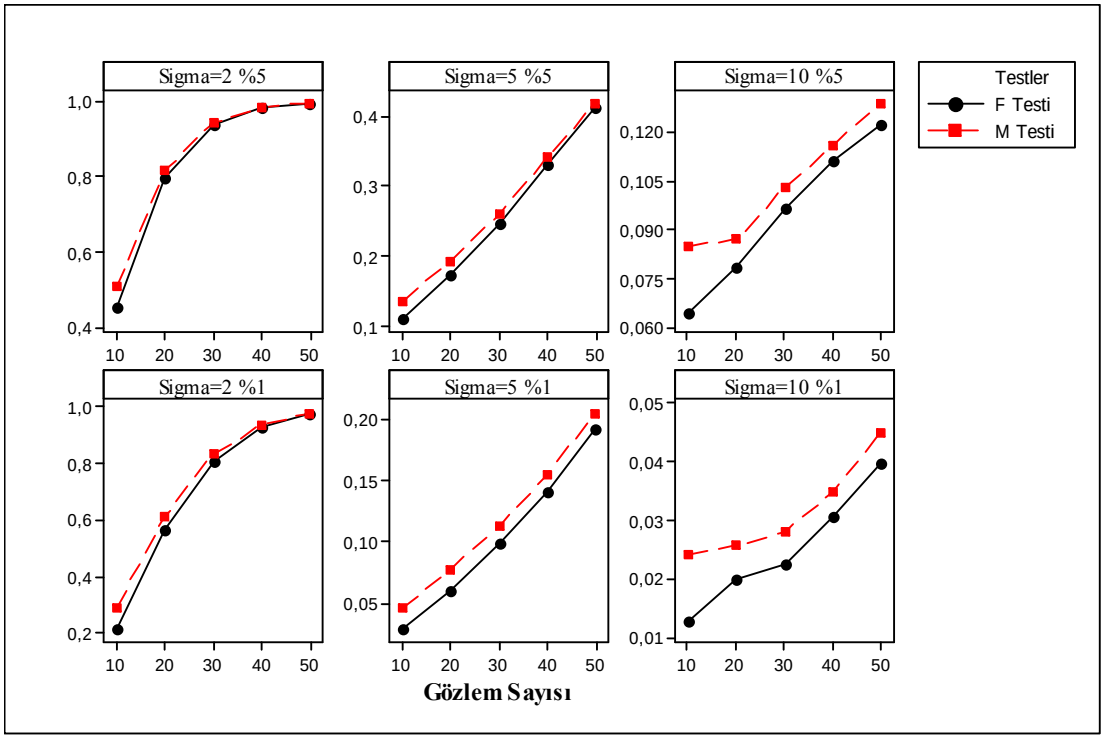
α			%5		%1	
n	σ	$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3$	**F testi**	**M testi**	**F testi**	**M testi**
10	**2**	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,4529 0,1768 1	0,5083 0,2147 1	0,2155 0,0551 1	0,2935 0,0895 1
	5	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,1109 0,0704 0,5824	0,1367 0,0925 0,6276	0,0296 0,0174 0,3211	0,0467 0,0296 0,3982
	10	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,0645 0,0508 0,1768	0,0851 0,0674 0,2154	0,0129 0,0104 0,0592	0,0242 0,0196 0,0886
20	**2**	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,7984 0,3328 1	0,8168 0,3553 1	0,5686 0,1439 1	0,6184 0,1704 1
	5	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,1746 0,0880 0,9013	0,1940 0,0999 0,9054	0,0617 0,0243 07354	0,0784 0,0306 0,7541
	10	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,0783 0,0594 0,3378	0,0871 0,0674 0,3575	0,0200 0,0129 0,1445	0,0258 0,0195 0,1708
30	**2**	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,9367 0,4807 1	0,9427 0,4941 1	0,8099 0,2511 1	0,8360 0,2688 1
	5	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,2474 0,1194 0,9793	0,2601 0,1264 0,9791	0,1001 0,0306 0,9233	0,1137 0,0362 0,9250
	10	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,0965 0,0660 0,4942	0,1030 0,0690 0,5068	0,0227 0,0168 0,2528	0,0283 0,0196 0,2722
40	**2**	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,9840 0,6133 1	0,9842 0,6202 1	0,9308 0,3708 1	0,9397 0,3793 1
	5	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,3314 0,1339 0,9974	0,3415 0,1386 0,9976	0,1421 0,0448 0,9865	0,1553 0,0509 0,9837
	10	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,1114 0,0672 0,6258	0,1160 0,0707 0,6299	0,0309 0,0182 0,3825	0,0349 0,0216 0,3919
50	**2**	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,9962 0,7273 1	0,9965 0,7243 1	0,9762 0,4843 1	0,9802 0,4837 1
	5	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,4119 0,1576 0,9997	0,4187 0,1636 0,9997	0,1929 0,0496 0,9962	0,2054 0,0550 0,9963
	10	**1:2:3** **2:3:3** **10:15:15**	0,1223 0,0784 0,7252	0,1289 0,0829 0,7250	0,0401 0,0182 0,4901	0,0453 0,0213 0,4959

Çizelge 5.3. k=4 olması durumunda gözlem sayılarına göre M testi ve F testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri

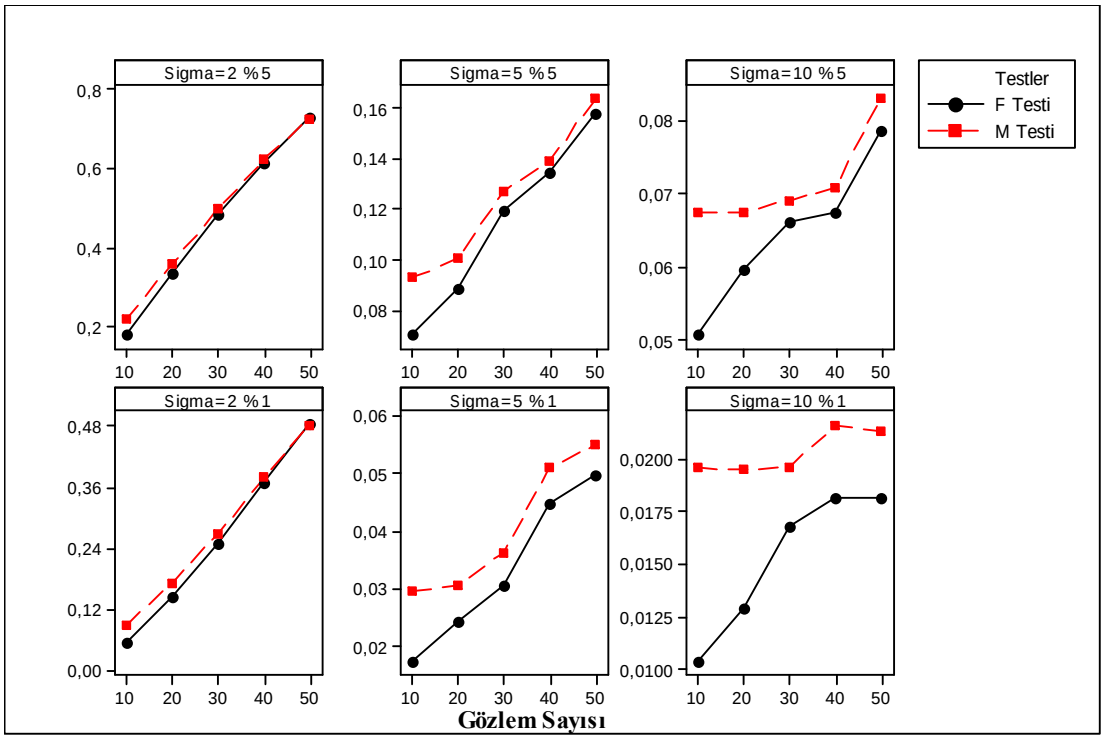
α			%5		%1	
n	σ	$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4$	**F testi**	**M testi**	**F testi**	**M testi**
10	**2**	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,8143 0,1675 0,9999	0,8364 0,2018 1	0,5859 0,0546 0,9991	0,6529 0,0806 0,9994
	5	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,1760 0,0649 0,5643	0,2062 0,0878 0,6176	0,0568 0,0147 0,3180	0,0836 0,0280 0,4003
	10	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,0781 0,0497 0,1655	0,0990 0,0665 0,1996	0,0200 0,0087 0,0518	0,0325 0,0161 0,0809
20	**2**	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,9894 0,3290 1	0,9891 0,3528 1	0,9579 0,1385 1	0,9609 0,1636 1
	5	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,3467 0,0820 0,9020	0,3588 0,0953 0,9068	0,1496 0,0228 0,7386	0,1698 0,0275 0,7612
	10	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,1147 0,0595 0,3221	0,1252 0,0686 0,3404	0,0297 0,0107 0,1310	0,0405 0,0161 0,1560
30	**2**	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,9995 0,4875 1	0,9994 0,5037 1	0,9978 0,2422 1	0,9978 0,2548 1
	5	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,5115 0,1027 0,9854	0,5140 0,1103 0,9851	0,2686 0,0287 0,9320	0,2804 0,0339 0,9331
	10	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,1533 0,0634 0,4840	0,1578 0,0691 0,4945	0,0447 0,0150 0,2428	0,0522 0,0162 0,2639
40	**2**	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	1 0,6112 1	1 0,6173 1	0,9999 0,3634 1	0,9999 0,3760 1
	5	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,6402 0,1285 0,9977	0,6329 0,1349 0,9982	0,4029 0,0396 0,9873	0,4020 0,0446 0,9867
	10	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,1882 0,0678 0,6035	0,1929 0,0721 0,6141	0,0668 0,0182 0,3624	0,0727 0,0182 0,3783
50	**2**	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	1 0,7236 1	1 0,7295 1	1 0,4881 1	1 0,4950 1
	5	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,7525 0,1540 0,9999	0,7439 0,1588 0,9999	0,5248 0,0489 0,9985	0,5166 0,0538 0,9982
	10	**1:2:3:4** **2:3:3:3** **10:15:15:15**	0,2246 0,0738 0,7201	0,2247 0,0750 0,7269	0,0869 0,0195 0,4787	0,0883 0,0192 0,4845

Çizelge 5.4 k=5 olması durumunda gözlem sayılarına göre M testi ve F testinin %5 ve %1 anlam seviyelerine göre güç değerleri

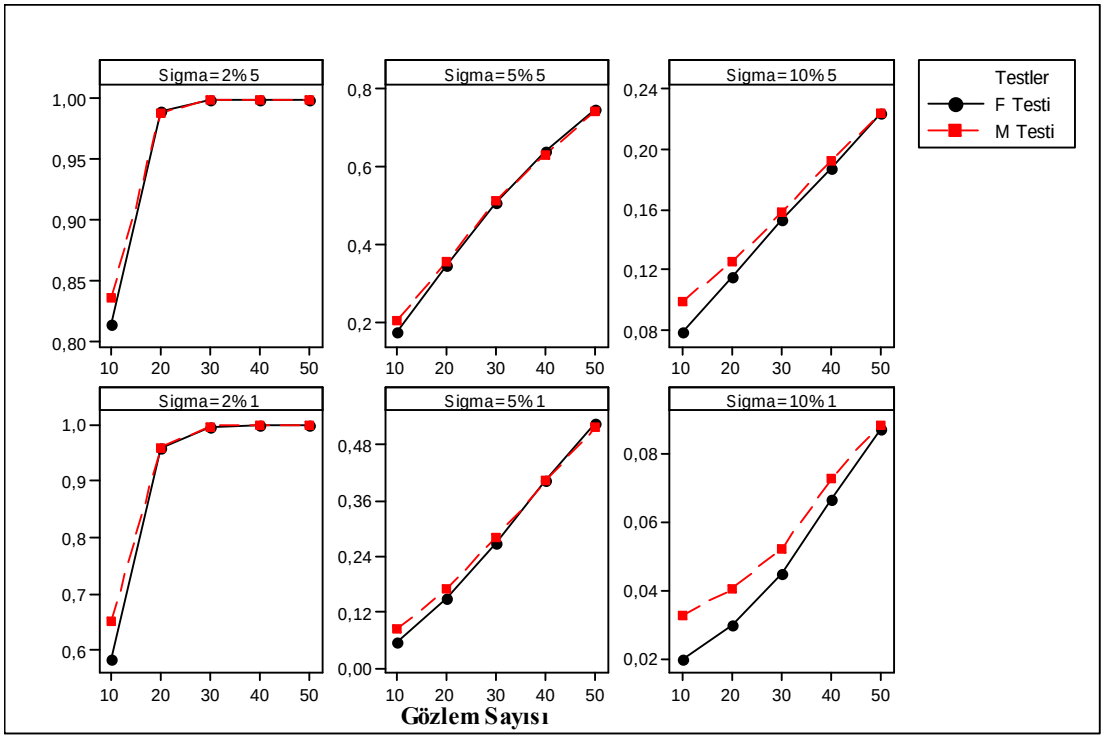
α			%5		%1	
n	σ	$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4 : \mu_5$	**F testi**	**M testi**	**F testi**	**M testi**
10	**2**	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	0,9828 0,1556 0,9999	0,9807 0,1868 0,9999	0,9173 0,0520 0,9997	0,9259 0,0799 0,9997
	5	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	0,2992 0,0638 0,5505	0,3250 0,0844 0,6074	0,1151 0,0131 0,3044	0,1495 0,0216 0,3854
	10	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	0,0954 0,0555 0,1586	0,1193 0,0654 0,1943	0,0244 0,0106 0,0492	0,0371 0,0172 0,0749
20	**2**	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	1 0,3068 1	1 0,3315 1	0,9999 0,1301 1	0,9996 0,1552 1
	5	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	0,5887 0,0837 0,8991	0,5775 0,0929 0,9122	0,3365 0,0199 0,7304	0,3367 0,0266 0,7596
	10	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	0,1641 0,0589 0,3067	0,1752 0,0659 0,3285	0,0563 0,0127 0,1278	0,0633 0,0172 0,1490
30	**2**	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	1 0,4578 1	1 0,4780 1	1 0,2277 0,9367	1 0,2510 0,9404
	5	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	0,7897 0,1024 0,9839	0,7735 0,1066 0,9837	0,5677 0,0277 0,9375	0,5426 0,0328 0,9399
	10	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	0,2379 0,0625 0,4605	0,2374 0,0670 0,4774	0,0886 0,0130 0,2412	0,0898 0,0174 0,2640
40	**2**	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	1 0,6016 1	1 0,6168 1	1 0,3463 1	1 0,3624 1
	5	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	0,9017 0,1173 0,9975	0,8864 0,1242 0,9980	0,7483 0,0357 0,9856	0,7195 0,0376 0,9851
	10	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	0,3076 0,0642 0,5943	0,3003 0,0680 0,6092	0,1325 0,0155 0,3565	0,1340 0,0173 0,3769
50	**2**	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	1 0,7039 1	1 0,7162 1	1 0,4705 1	1 0,4844 1
	5	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	0,9611 0,1397 0,9999	0,9533 0,1444 0,9998	0,8753 0,0453 0,9979	0,8499 0,0476 0,9977
	10	**1:2:3:4:5** **2:3:3:3:3** **10:15:15:15:15**	0,3879 0,0703 0,7003	0,3742 0,0727 0,7141	0,1832 0,0176 0,4680	0,1697 0,0184 0,4815



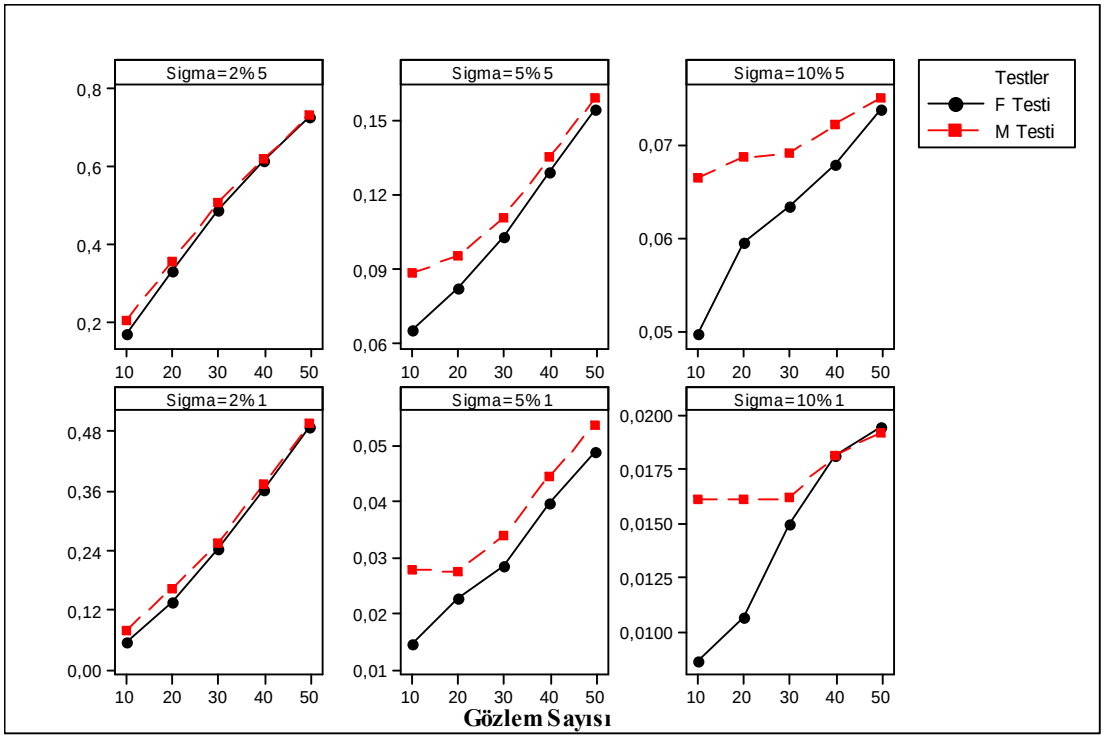
Şekil 5.1. (1:2:3) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırmaları



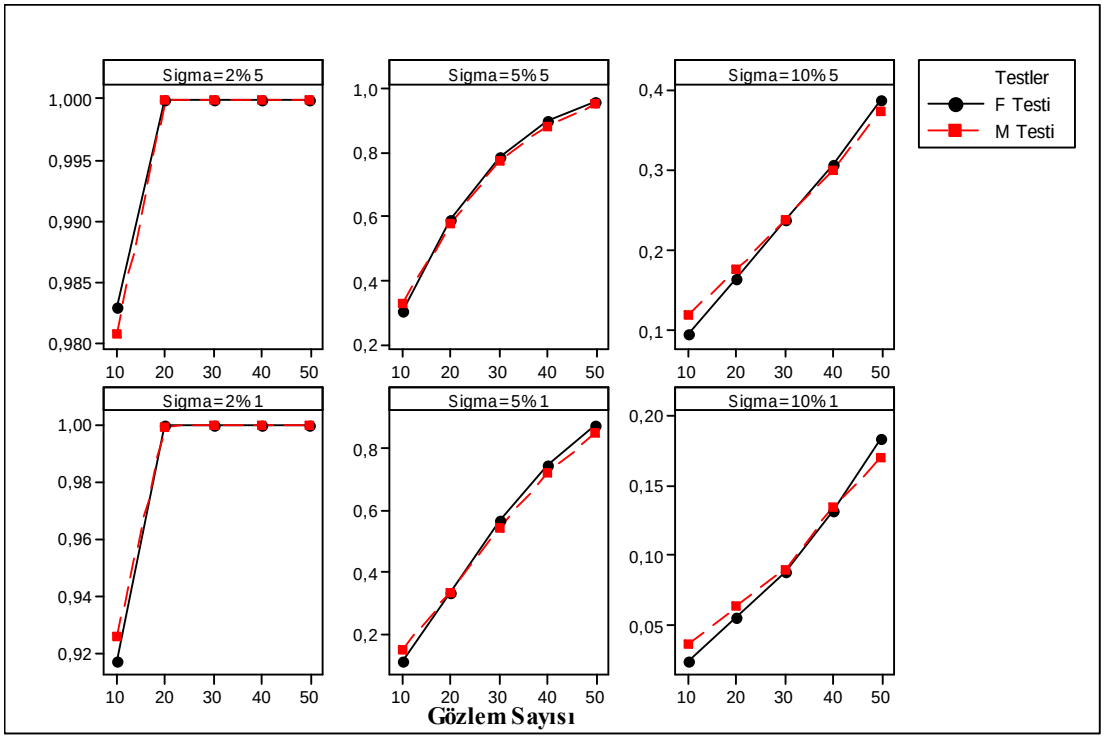
Şekil 5.2. (2:3:3) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırmaları



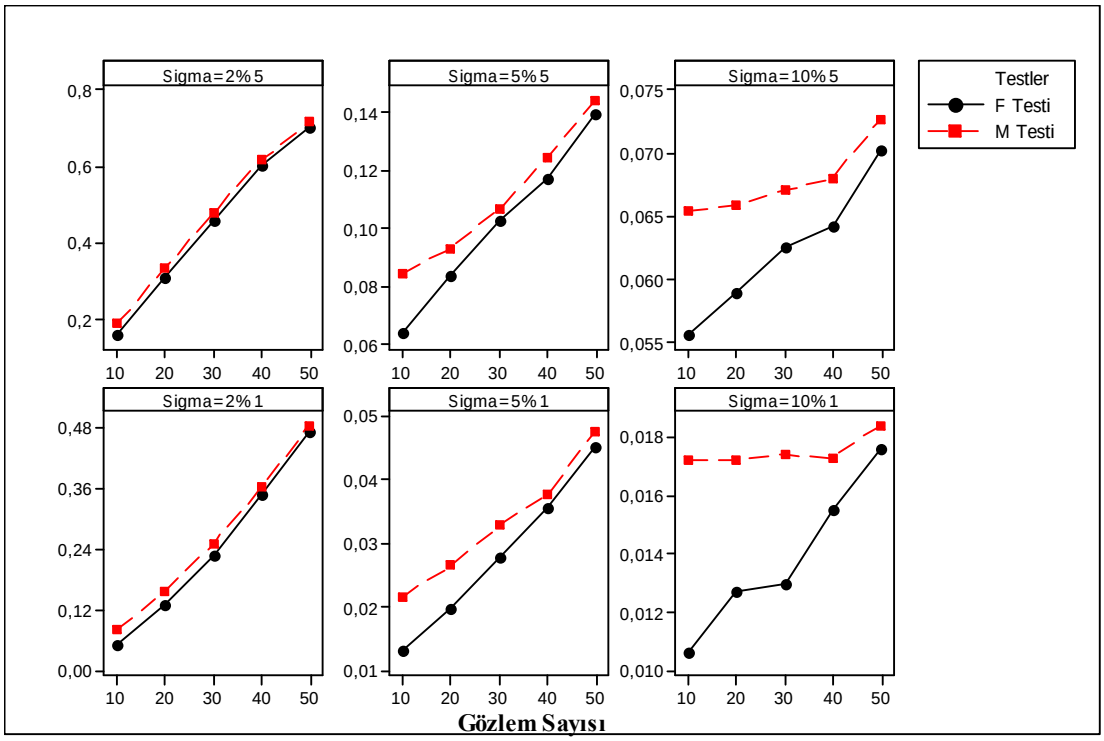
Şekil 5.3. (1:2:3:4) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırmaları



Şekil 5.4. (2:3:3:3) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırmaları



Şekil 5.5. (1:2:3:4:5) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırmaları



Şekil 5.6. (2:3:3:3:3) ortalama değerleri ve farklı varyanslar için gözlem sayılarına göre %5 ve %1'lik güç karşılaştırmaları

6. ÜSTEL DAĞILIMIN PARAMETRELERİNİN EŞİTLİĞİ İÇİN TESTLER

Üstel dağılım tarafından modellenen yaşam zamanı dağılımları gibi birçok uygulamalar mevcuttur. Üstel dağılım genellikle elektronik bileşenler, ampuller ve ölüm zamanı gibi yaşam zamanı dağılımlarını modellemek için kullanılır. 2 parametreli üstel dağılımda konum parametresi genellikle başarısızlık/ölüm olmadan önce garanti zamanı verirken, ölçek parametresi ortalama ömrü verir. İki ya da daha fazla üstel dağılımdan gelen örneklemlerin incelenmesinde bazen ortalama ömrün karşılaştırılması ile ilgilenilebilir. Örneğin; güvenilirlik analizinde elektrikli ampul yapımında birçok farklı elektrik teli kaplama süreçleri uygulanabilir. Farklı süreçlerin farklı ortalama ömre sahip olup olmadığını bilmek çok önemlidir. Eğer bir ampulün ömrü üstel dağılıyorsa, problem farklı üstel dağılımların ölçek parametrelerinin eşitliğine dönüşür. Dolayısıyla yaşam testi problemlerinde üstel dağılımın iki ya da daha fazla ölçek parametresini karşılaştırmak çok önemlidir. Farklı üstel dağılımları için garanti sürelerinin karşılaştırılması da birçok konum parametrelerinin homojenliğini test etmek anlamına gelir (Singh, 1983). Hsieh (1981), Kambo (1987), Nagarsenker (1986), Singh (1983,1985), Thiagarajh&Paul (1990), Thiagarajh (1995) ve Tiku (1991, 1993) gibi birçok yazar tam ve başarısızlık sansürlü örneklemlere dayanan konum ve ölçek parametrelerinin eşitliğinin testi problemi ile ilgilenmiştir.

6.1. Üstel Dağılımın Parametrelerinin Eşitliği İçin Testler

Bu bölümde üstel dağılma sahip $k \geq 2$ kitlenin ortalamalarının eşitliği için olabilirlik oran testi verilmiştir.

6.1.1. Üstel dağılıma sahip $k=2$ kitlenin ortalamalarının eşitliği için olabilirlik oran testi

Ortalamaları θ_1 ve θ_2 olan üstel dağılıma sahip iki kitlenin ortalamalarının eşitliği hipotezini test etmek için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta_1,\theta_2;X,Y)=\prod_{i=1}^{n} f_X(X_i;\theta_1)\prod_{j=1}^{m} f_Y(Y_j;\theta_2)$$

$$=\frac{1}{\theta_1^n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\theta_1}\right)\frac{1}{\theta_2^m}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{m}Y_j}{\theta_2}\right)$$

olup, θ_1 ve θ_2'nın en çok olabilirlik tahmin edicileri sırası ile

$$\hat{\theta}_1=\overline{X}_n \quad ve \quad \hat{\theta}_2=\overline{Y}_m$$

dir. $H_0:\theta_1=\theta_2$ hipotezinin doğru olduğu varsayımı altında olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta_1,\theta_2;X,Y)=\frac{1}{\theta^{n+m}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{m}Y_j}{\theta}\right)$$

olduğundan, θ' nın en çok olabilirlik tahmin edicisi ($\hat{\theta}$ ile gösterilsin),

$$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{m}Y_j}{n+m}$$

dır. Olabilirlik oranı,

$$\lambda(X,Y)=\frac{L(\hat{\theta};X,Y)}{L(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2;X,Y)}=\frac{\frac{1}{\hat{\theta}^{n+m}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{j=1}^{m}Y_j}{\hat{\theta}}\right)}{\frac{1}{\hat{\theta}_1^n}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\hat{\theta}_1}\right)\frac{1}{\hat{\theta}_2^m}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{m}Y_j}{\hat{\theta}_2}\right)}$$

dir. Bu oranın payı,

$$Pay = \frac{1}{\hat{\theta}^{n+m}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j}{\hat{\theta}} \right) = \frac{1}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j}{n+m} \right)^{n+m}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j}{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j}{n+m}} \right)$$

$$= \left(\frac{n+m}{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j} \right)^{n+m} \exp\left(-(n+m)\right)$$

ve paydası,

$$Payda = \frac{1}{\hat{\theta}_1^{n}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\hat{\theta}_1} \right) \frac{1}{\hat{\theta}_2^{m}} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{m} Y_j}{\hat{\theta}_2} \right) = \frac{1}{\overline{X}_n^{n}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\overline{X}_n} \right) \frac{1}{\overline{Y}_m^{m}} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{m} Y_j}{\overline{Y}_m} \right)$$

$$= \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \right)^{n} \exp(-n) \left(\frac{m}{\sum_{j=1}^{m} Y_j} \right)^{n} \exp(-m)$$

dir. Buradan sadeleştirmeler yapıldığında,

$$\lambda(X,Y) = \frac{L\left(\hat{\theta}; X, Y\right)}{L\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2; X, Y\right)} = \frac{(n+m)^{(n+m)}}{n^n m^m} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} Y_j \right)^{m}}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j \right)^{n+m}}$$

elde edilir. Olabilirlik oran test fonksiyonu,

$$\Psi(X,Y) = \begin{cases} 1, & \lambda(X,Y) < c \\ 0, & \lambda(X,Y) \geq c \end{cases}$$

olmak üzere, $c(0 < c < 1)$ sabiti

$$P_{\theta_1 = \theta_2}\left(\lambda(X,Y) < c\right) = \alpha$$

olacak şekilde belirlenir.

$$\lambda(X,Y) < c \Leftrightarrow \frac{(n+m)}{n^n m^m} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^n \left(\sum_{j=1}^{m} Y_j\right)^m}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j\right)^{n+m}} < c$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^n \left(\sum_{j=1}^{m} Y_j\right)^m}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j\right)^{n+m}} < c_1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j}\right)^n \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} Y_j}{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j}\right)^m < c_1$$

olup,

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j} \sim Beta(n,m)$$

yardımıyla,

$$\lambda(X,Y) < c \Leftrightarrow T^n (1-T)^m < c_1$$

gösterimi altında,

$$\Psi(X,Y) = \begin{cases} 1, & T^n (1-T)^m < c_1 \\ 0, & T^n (1-T)^m \geq c_1 \end{cases}$$

yazılabilir. c_1 sabiti,

$$P_{\theta_1=\theta_2}\left(T^n (1-T)^m < c_1\right) = \alpha$$

olacak şekilde belirlenir.

$$\left\{t : t^n (1-t)^m \geq c_1\right\} = \left\{t : t_1 \leq t \leq t_2\right\}$$

olmak üzere, t_1 ve t_2 değerlerinin,

$$t_1^n (1-t_1)^m = t_2^n (1-t_2)^m \ , \ \int_{t_1}^{t_2} f_T(t)dt = 1-\alpha$$

olacak şekilde belirlenmesiyle olabilirlik oran test fonksiyonu,

$$\Psi(X,Y)=\begin{cases}1, & T<t_1 \ \ yada \ \ T>t_2\\ 0, & t_1\le t\le t_2\end{cases}$$

olarak bulunur (Öztürk ve ark., 2006).

6.1.2. Üstel dağılma sahip $k>2$ kitlenin ortalamalarının eşitliği için olabilirlik oran testi

Ortalamaları θ_i , $i=1,2,\ldots,k$ olan üstel dağılıma sahip $k>2$ kitlenin ortalamalarının eşitliği hipotezini test etmek için olabilirlik fonksiyonu,

$$L\left(\theta_1,\ldots,\theta_k;X_{1j},\ldots,X_{kj}\right)=\prod_{j=1}^{n}f_{X_1}\left(X_{1j};\theta_1\right)\ldots\prod_{j=1}^{n}f_{X_k}\left(X_{kj};\theta_k\right)$$

$$=\frac{1}{\theta_1^n}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{1j}}{\theta_1}\right)\ldots\frac{1}{\theta_k^n}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{kj}}{\theta_k}\right)$$

olup, θ_i , $i=1,2,\ldots,k$ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicileri,

$$\hat{\theta}_i=\overline{X}_i \ , \ i=1,2,\ldots,k$$

dir. $H_0:\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_k$ hipotezinin doğru olduğu varsayımı altında olabilirlik fonksiyonu,

$$L\left(\theta_1,\ldots,\theta_k;X_{1j},\ldots,X_{kj}\right)=\frac{1}{\theta^{nk}}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{1j}+\ldots+\sum_{j=1}^{n}X_{kj}}{\theta}\right)$$

olduğundan, θ ' nın en çok olabilirlik tahmin edicisi ($\hat{\theta}$ ile gösterilsin),

$$\hat{\theta}=\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{1j}+\ldots+\sum_{j=1}^{n}X_{kj}}{nk}$$

dır.

Olabilirlik oranı,

$$\lambda\left(X_{1j},\ldots,X_{kj}\right)=\frac{L\left(\hat{\theta};X_{1j},\ldots,X_{kj}\right)}{L\left(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_k;X_{1j},\ldots,X_{kj}\right)}=\frac{\frac{1}{\hat{\theta}^{nk}}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{1j}+\ldots+\sum_{j=1}^{n}X_{kj}}{\hat{\theta}}\right)}{\frac{1}{\hat{\theta}_1^{n}}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{1i}}{\hat{\theta}_1}\right)\ldots\frac{1}{\hat{\theta}_k^{n}}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{m}X_{kj}}{\hat{\theta}_k}\right)}$$

dir. Bu oranın payı,

$$Pay=\frac{1}{\hat{\theta}^{nk}}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{1i}+\ldots+\sum_{j=1}^{n}X_{ki}}{\hat{\theta}}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{1j}+\ldots+\sum_{j=1}^{n}X_{kj}}{nk}\right)^{nk}}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{1j}+\ldots+\sum_{j=1}^{n}X_{kj}}{\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{1j}+\ldots+\sum_{j=1}^{n}X_{kj}}{nk}}\right)$$

$$=\left(\frac{nk}{\sum_{j=1}^{n}X_{1j}+\ldots+\sum_{j=1}^{n}X_{kj}}\right)^{nk}\exp\left(-nk\right)$$

ve paydası,

$$Payda=\frac{1}{\hat{\theta}_1^{n}}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{1i}}{\hat{\theta}_1}\right)\ldots\frac{1}{\hat{\theta}_k^{n}}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{m}X_{kj}}{\hat{\theta}_k}\right)$$

$$= \frac{1}{\overline{X}_1^n} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n} X_{1i}}{\overline{X}_1} \right) \ldots \frac{1}{\overline{X}_k^n} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{m} X_{kj}}{\overline{X}_k} \right)$$

$$= \left(\frac{n}{\sum_{j=1}^{n} X_{1j}} \right)^n \exp(-n) \ldots \left(\frac{n}{\sum_{j=1}^{n} X_{kj}} \right)^n \exp(-n)$$

dir. Buradan sadeleştirmeler yapıldığında,

$$\lambda\left(X_{1j},\ldots,X_{kj}\right) = \frac{L\left(\hat{\theta};X_{1j},\ldots,X_{kj}\right)}{L\left(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_k;X_{1j},\ldots,X_{kj}\right)}$$

$$= \frac{(nk)^{nk}}{kn^n} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} X_{1j}\right)^n \ldots \left(\sum_{j=1}^{n} X_{kj}\right)^n}{\left(\sum_{j=1}^{n} X_{1j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} X_{kj}\right)^{nk}}$$

elde edilir. Olabilirlik oran test fonksiyonu,

$$\Psi\left(X_{1j},\ldots,X_{kj}\right) = \begin{cases} 1, & \lambda\left(X_{1j},\ldots,X_{kj}\right) < c \\ 0, & \lambda\left(X_{1j},\ldots,X_{kj}\right) \geq c \end{cases}$$

olmak üzere, $c(0 < c < 1)$ sabiti

$$P_{\theta_1=\ldots=\theta_k}\left(\lambda\left(X_{1j},\ldots,X_{kj}\right) < c\right) = \alpha$$

olacak şekilde belirlenir.

$$\lambda\left(X_{1j},\ldots,X_{kj}\right) < c \Leftrightarrow \frac{(nk)^{nk}}{kn^n} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} X_{1j}\right)^n \ldots \left(\sum_{j=1}^{n} X_{kj}\right)^n}{\left(\sum_{j=1}^{n} X_{1j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} X_{kj}\right)^{nk}} < c$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} X_{1j}\right)^n \ldots \left(\sum_{j=1}^{n} X_{kj}\right)^n}{\left(\sum_{j=1}^{n} X_{1j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} X_{kj}\right)^{nk}} < c_1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} X_{1j}+\ldots+\sum_{j=1}^{n} X_{kj}}\right)\cdots\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_{kj}}{\sum_{j=1}^{n} X_{1j}+\ldots+\sum_{j=1}^{n} X_{kj}}\right)<c^{*}$$

olup,

$$T_i=\frac{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}+\ldots+\sum_{j=1}^{n} X_{ij}},\ i=1,2,\ldots,k\sim Beta\left[n,(k-1)n\right]$$

yardımıyla,

$$\lambda\left(X_{1j},\ldots,X_{kj}\right)<c\Leftrightarrow\prod_{i=1}^{k}T_i<c^{*}$$

gösterimi altında,

$$\Psi\left(X_{1j},\ldots,X_{kj}\right)==\begin{cases}1, & \prod_{i=1}^{k}T_i<c^{*}\\ 0, & \prod_{i=1}^{k}T_i\geq c^{*}\end{cases}$$

yazılabilir. c^{*} sabiti,

$$P_{\theta_1=\ldots=\theta_k}\left(\prod_{i=1}^{k}T_i<c^{*}\right)=\alpha$$

olacak şekilde belirlenir.

6.1.3. Olabilirlik oran testi için kritik değerler

Olabilirlik oran test istatistiğine ilişkin %10 , %5, %1 anlam seviyelerinde kritik değerler grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre k=2 durumunda Maple 9.5 programı yardımıyla, k=3,4,5 için Delphi programı kullanılarak simülasyonla bulundu ve Çizelge 5.1' de verildi.

Çizelge 6.1. Olabilirlik oran test istatistiğinin grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre %10, %5 anlam seviyelerindeki kritik değerleri

Grup Sayısı (k)	**Gözlem Sayısı (n)**	%10		%5	
		t_1	t_2	t_1	t_2
2	***10***	0,320087	0,6799134	0,2886432	0,7113567
	15	0,352010	0,6479900	0,3253149	0,6746850
	20	0,371362	0,6286380	0,3478024	0,6521977
	25	0,384691	0,6153090	0,3633767	0,6366217
	30	0,394590	0,6054150	0,3749831	0,6250170
	40	0,408543	0,5914578	0,3914100	0,6085924
	50	0,418110	0,5818900	0,4026990	0,5973020
Grup Sayısı (k)	**Gözlem Sayısı (n)**	%10		%5	
		c^*		c^*	
3	***10***	0,02927		0,02727	
	15	0,03171		0,03025	
	20	0,03298		0,03184	
	25	0,03376		0,03283	
	30	0,03430		0,03350	
	40	0,03497		0,03436	
	50	0,03537		0,03488	
4	***10***	0,002841		0,002622	
	15	0,003165		0,003000	
	20	0,003337		0,003207	
	25	0,003446		0,003338	
	30	0,003520		0,003427	
	40	0,003612		0,003541	
	50	0,003669		0,003612	
5	***10***	0,0002153		0,0001974	
	15	0,0002464		0,0002324	
	20	0,0002629		0,0002519	
	25	0,0002736		0,0002643	
	30	0,0002809		0,0002729	
	40	0,0002902		0,0002840	
	50	0,0002960		0,0002910	

7. ÜSTEL DAĞILIMIN ORTALAMASI İÇİN ÖNERİLEN TEST İSTATİSTİĞİ

Bu bölümde üstel dağılıma sahip $k \geq 2$ kitlenin (grubun) ortalamalarının eşitliği için maksimum ve minimum örneklem ortalamalarının farkına dayalı bir test istatistiği önerildi.

7.1. Tek Parametreli Üstel Dağılma Sahip $k \geq 2$ Kitle İçin Ortalamalarının Eşitliği Testi

θ_i parametreli üstel dağılıma sahip $f(x;\theta_i) = \frac{1}{\theta_i}\exp\left(-\frac{x}{\theta_i}\right)$, $x > 0, \theta_i > 0$

$\left\{X_{ij} : i = 1,2,\ldots,k;\ j = 1,2,\ldots,n\right\}$ örneklemleri ile verilen $k \geq 2$ kitlenin ortalamalarının eşitliği probleminin göz önüne alınması durumunda test edilecek hipotezler aşağıdaki şekilde olur:

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \ldots \theta_k = \theta \quad (7.1.1)$$
$$H_1 : \theta_i \neq \theta_j \quad bazı\ i \neq j \quad (7.1.2)$$

θ_i'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\overline{X_i}$ $i = 1,2,\ldots,k$ ($\overline{X_i}$ *i.* grubun örneklem ortalamasıdır) olmak üzere (7.1.1)'deki H_0 hipotezinin doğruluğunda $N_i = \frac{2n\overline{X_i}}{\theta}$ $i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenleri tanımlansın.

N_i $i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenlerine ait sıra istatistikleri $N_{1:k} < N_{2:k} < \ldots < N_{k:k}$ olmak üzere önerdiğimiz test istatistiği,

$$N = N_{k:k} - N_{1:k} \quad (7.1.3)$$

dır. N'nin büyük değerlerinin H_1 hipotezin destekleyeceği açıktır. Bu durumda $P\{N > u\} = \alpha$ olacak biçimde belirlenecek olan *u* kritik değeri ile (7.1.1)'de verilen H_0 hipotezi test edilebilir

7.1.1. N test istatistiğinin dağılımı

Kritik değerlerin belirlenmesi için ilk olarak N test istatistiğinin dağılımının oluşturulması gerekir. Bu durumda N test istatistiğinin dağılımı,

$$P\{N > u\} = P\{N_{kk} - N_{1:k} > u\} = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=x+u}^{\infty} f_{1,k}(x,y)\,dydx \tag{7.1.4}$$

şeklinde elde edilir.

H_0 hipotezinin doğruluğunda tanımlanan $N_i = \frac{2n\overline{X_i}}{\theta}$ $i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenlerinin dağılımları,

$$N_i \sim \chi^2_{(2n)} \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{7.1.5}$$

Eğer θ bilinmiyorsa en çok olabilirlik tahmin edicisi (2.4.8)'de verildiği üzere $\overline{X}$'dir. Bu durumda,

$$N_i^* = \frac{2n\overline{X_i}}{\theta} \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{7.1.6}$$

şeklinde düşünülürse N_i^* $i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenlerinin dağılımları (2.4.9) ve Slutsky Teoremi gereği,

$$N_i^* = N_i \frac{\theta}{\overline{X}} = \frac{2n\overline{X_i}}{\theta}\frac{\theta}{\overline{X}} = \frac{2n\overline{X_i}}{\overline{X}} \xrightarrow{D} N_i \sim \chi^2_{(2n)} \tag{7.1.7}$$

$k = 2$ olması durumunda $N^*_{1:2}$ ve $N^*_{2:2}$ 'nın ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{1,2}(x,y) = 2!\, f(x) f(y) = 2 \frac{1}{\Gamma(n) 2^n}\ x^{n-1}\ \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\ \frac{1}{\Gamma(n) 2^n}\ y^{n-1}\ \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \qquad (7.1.8)$$

şeklinde elde edilir (David, 1970). Bu durumda N test istatistiğinin dağılımı,

$$P\{N > u\} = P\left\{N^*_{2:2} - N^*_{1:2} > u\right\} = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=x+u}^{\infty} f_{1,2}(x,y)\, dydx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=x+u}^{\infty} 2 \frac{1}{\Gamma(n) 2^n} x^{n-1} exp(-x/2) \frac{1}{\Gamma(n) 2^n} y^{n-1} exp(-y/2) dydx$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(n) 2^{2n-1}} \int_{x=0}^{\infty} x^{n-1} exp(-x/2) \int_{y=x+u}^{\infty} y^{n-1} exp(-y/2) dydx$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(n) 2^{2n-1}} \int_{x=0}^{\infty} x^{n-1} exp(-x/2) \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-1} exp[-(u+x)/2] (u+x)^{n-k-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n) 2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k exp(-u/2)}{(n-k-1)!} \int_{x=0}^{\infty} x^{n-1} (u+x)^{-(k+1-n)} exp(-x) dx$$

Burada;

$$\int_{x=0}^{\infty} x^{n-1} (u+x)^{-(k+1-n)} exp(-x) dx = u^{n-1-\frac{k}{2}} exp(u/2) \Gamma(n) W_{-\frac{k}{2}, \frac{2n-k-1}{2}}(u)$$

$$P\{N > u\} = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{(n-k-1)!} u^{n-1-\frac{k}{2}} W_{-\frac{k}{2}, \frac{2n-k-1}{2}}(u) \qquad (7.1.9)$$

şeklindedir. Buradaki

- $W_{-\frac{k}{2}, \frac{2n-k-1}{2}}(u) = Whitta \ker W\left(-\frac{k}{2}, \frac{2n-k-1}{2}, u\right)$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}u\right) uKummerU\left(\frac{1}{2} + \frac{2n-k-1}{2} + \frac{k}{2}, 2n-k, u\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}u\right) uKummerU(n, 2n-k, u)$$

ve

- $KummerM(a,b,z)=1+\frac{a^z}{b}+\frac{(a)_2 z^2}{(b)_2 2!}+\ldots+\frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}+\ldots\ldots\ldots$
- $(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1),\ (a)_0 = 1$

- $KummerU(n,2n-k,u) = \frac{\pi}{\sin\pi(2n-k)}\left\{\frac{KummerM(n,2n-k,u)}{\Gamma(1-n+k)\Gamma(2n-k)} - u^{1-2+k}\,\frac{KummerM(1-n+k,2-2n+k,u)}{\Gamma(n)\Gamma(2-2n+k)}\right\}$

dir (Abramowitz ve Stegun, 1972).

$k>2$ olması durumunda $N^*_{1:k}$ ve $N^*_{k:k}$'nın ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{1,k}(x,y)$ olmak üzere,

$$f_{1,k}(x,y) = k(k-1)[F(y)-F(x)]^{(k-2)} f(x) f(y)$$

$$= k(k-1)\left[\int_{s=x}^{y} \frac{1}{\Gamma(n)2^n}\ s^{n-1}\ \exp\left(-\frac{s}{2}\right)ds\right]^{(k-2)} \times$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(n)2^n}\ x^{n-1}\ \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\Gamma(n)2^n}\ y^{n-1}\ \exp\left(-\frac{y}{2}\right)$$

şeklinde elde edilir (David, 1970) .

Bu durumda N test istatistiğinin dağılımı,

$$P\{N > u\} = P\left\{N_{k:k}^{*} - N_{1:k}^{*} > u\right\} = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=x+u}^{\infty} f_{1,k}(x,y)\, dydx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=u+x}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} k(k-1)\left[\int_{s=x}^{y} \frac{1}{\Gamma(n)2^{n}}\ s^{n-1}\ \exp\left(-\frac{s}{2}\right) ds\right]^{(k-2)} \times \\ \\ \times \frac{1}{\Gamma(n)2^{n}}\ x^{n-1}\ \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(n)2^{n}}\ y^{n-1}\ \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \end{array} \right\} dydx \quad (7.1.10)$$

dir.

7.1.2. N test istatistiğine ilişkin kritik değerler

N test istatistiği ilişkin grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre %10 , %5, %1 anlam seviyelerinde kritik değerler Maple 9.5 programı yardımıyla bulundu. Kritik değerler Çizelge 7.1' de verildi.

Çizelge 7.1. Grup sayısı (k) ve gözlem sayısına (n) göre %10, %5, %1 anlam seviyelerine göre kritik değerler

Grup Sayısı (k)	Gözlem Sayısı (n)	$u_{\alpha \cong 0,1}$	$u_{\alpha \cong 0,05}$	$u_{\alpha \cong 0,01}$
2	***10***	14,673	17,722	24,004
	15	17,983	21,626	29,023
	20	20,773	24,925	33,293
	25	23,232	27,837	37,069
	30	25,454	30,472	40,493
	35	27,497	32,896	43,648
	40	29,399	35,154	46,591
	50	32,874	39,282	51,977
	60	36,016	43,016	56,855
	70	38,904	46,451	61,346
	80	41,593	49,649	65,530
	90	44,118	52,653	69,462
	100	46,506	55,494	73,183
3	***10***	18,402	21,302	27,305
	15	22,512	25,953	32,968
	20	25,980	29,887	37,780
	25	29,040	33,361	42,041
	30	31,810	36,505	45,906
	40	36,724	42,096	52,791
	50	41,060	47,026	58,875
	60	44,970	51,487	64,384
	70	48,567	55,585	69,421
4	***10***	20,590	23,411	29,260
	15	25,181	28,500	35,305
	20	29,051	32,806	40,440
	25	32,464	36,610	44,988
	30	35,550	40,053	49,114
5	***10***	22,147	24,901	30,651
	15	27,060	30,298	36,963
	20	31,211	34,866	42,330

7.2. Simülasyon Çalışması

Q-basıc programı kullanılarak 10000 denemelik simülasyon çalışması yapılarak önerilen N testinin güç değerleri %10 ve %5 anlam seviyesine göre olabilirlik oran testi ile karşılaştırıldı ve bulunan güç değerleri Çizelge 7.2, Çizelge 7.3, Çizelge 7.4 ve Çizelge 7.5'de verildi. Daha sonra bazı durumlar için güç değerlerinin Minitab 15 yardımıyla grafikleri çizdirildi.

Çizelge 7.2. k=2 ve gözlem sayısına göre Olabilirlik oran testi ve N testinin %10 ve %5 anlam seviyelerine göre güç değerleri

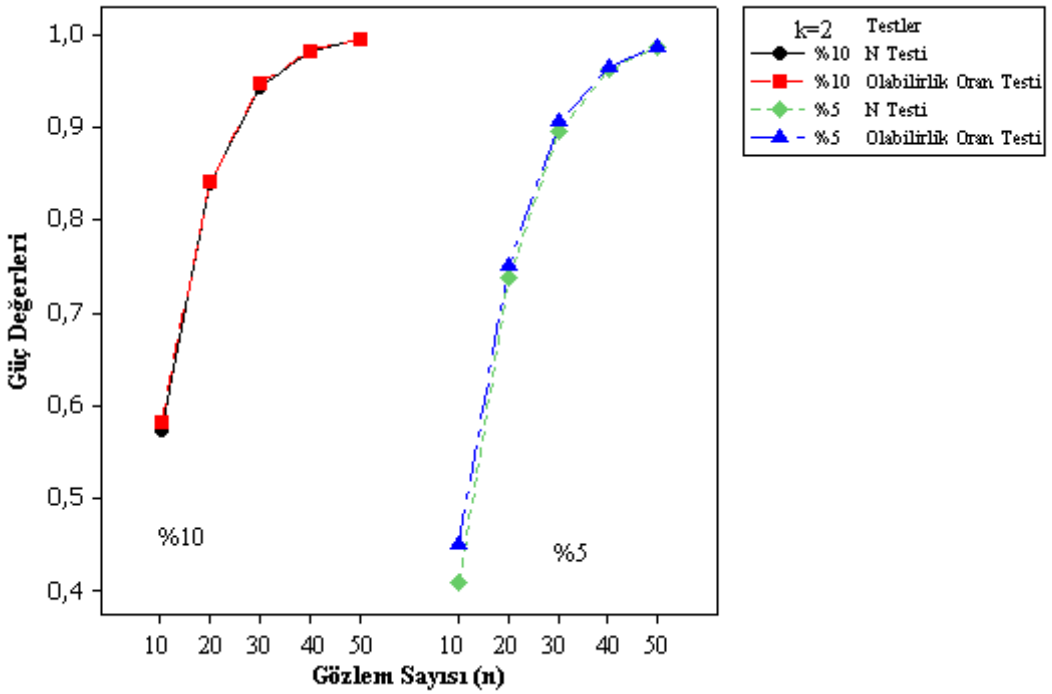
α		%10		%5	
n	$\theta_1 : \theta_2$	**Olabilirlik Oran Testi**	**N Testi**	**Olabilirlik Oran Testi**	**N Testi**
10	**(0,3:0,7)**	0,58296	0,57329	0,45055	0,40928
	(0,5:1)	0,45103	0,43629	0,32359	0,28558
	(1:1,5)	0,22769	0,21688	0,14069	0,11565
	(2,5:3)	0,12576	0,11982	0,06692	0,05404
	(1:2)	0,44979	0,43528	0,32407	0,28355
	(1:3)	0,77527	0,76561	0,66553	0,62708
	(6:1)	0,98802	0,98727	0,97403	0,96679
	(10:15)	0,22757	0,21662	0,14227	0,11599
20	**(0,3:0,7)**	0,84197	0,83971	0,75189	0,73726
	(0,5:1)	0,70157	0,69604	0,58051	0,55979
	(1:1,5)	0,35354	0,34967	0,24518	0,22680
	(2,5:3)	0,15242	0,15099	0,08623	0,07846
	(1:2)	0,70047	0,69545	0,58120	0,55867
	(1:3)	0,96333	0,96240	0,92959	0,92115
	(6:1)	0,99994	0,99991	0,99984	0,99985
	(10:15)	0,35473	0,34959	0,24212	0,22825
30	**(0,3:0,7)**	0,94773	0,94465	0,90590	0,89582
	(0,5:1)	0,84632	0,84258	0,75910	0,74772
	(1:1,5)	0,46617	0,46155	0,34434	0,33014
	(2,5:3)	0,18239	0,17722	0,10570	0,09750
	(1:2)	0,84655	0,84269	0,76000	0,74607
	(1:3)	0,99518	0,99478	0,98763	0,98670
	(6:1)	1	1	1	1
	(10:15)	0,4670	0,45975	0,33860	0,32680
40	**(0,3:0,7)**	0,98347	0,98212	0,96473	0,96210
	(0,5:1)	0,92409	0,92271	0,86725	0,86186
	(1:1,5)	0,56088	0,55731	0,43614	0,42542
	(2,5:3)	0,20723	0,20744	0,12747	0,12233
	(1:2)	0,92555	0,92314	0,86999	0,86457
	(1:3)	0,99937	0,99935	0,99846	0,99833
	(6:1)	1	1	1	1
	(10:15)	0,56265	0,55747	0,43970	0,42501
50	**(0,3:0,7)**	0,99503	0,99462	0,98773	0,98752
	(0,5:1)	0,96359	0,96477	0,93056	0,92942
	(1:1,5)	0,64416	0,64140	0,52153	0,51385
	(2,5:3)	0,23601	0,23338	0,14874	0,14123
	(1:2)	0,96500	0,96329	0,93182	0,92904
	(1:3)	0,99995	0,99994	0,99978	0,99982
	(6:1)	1	1	1	1
	(10:15)	0,63870	0,64404	0,51804	0,51288

Çizelge 7.3. k=3 ve gözlem sayısına göre Olabilirlik oran testi ve N testinin 0.10 ve 0.05 anlam seviyelerine göre güç değerleri

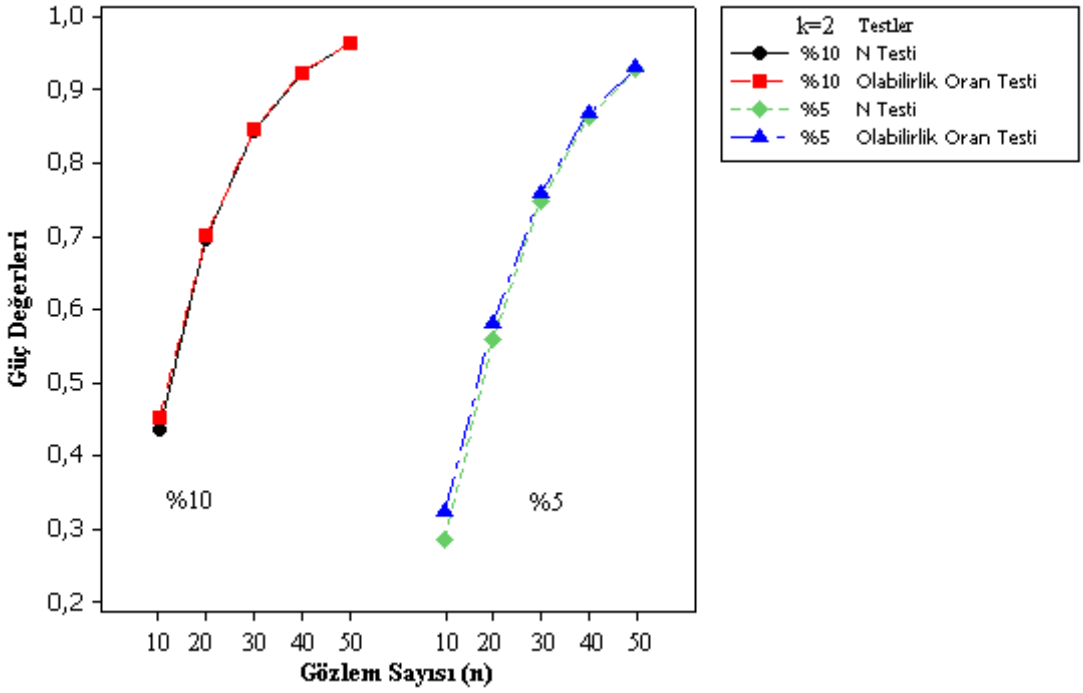
α		%10		%5	
n	$\theta_1 : \theta_2 : \theta_3$	**Olabilirlik Oran Testi**	**N Testi**	**Olabilirlik Oran Testi**	**N Testi**
10	**(0,5:0,5:1)**	0,46374	0,42833	0,34324	0,29812
	(1:1:1,5)	0,22791	0,18891	0,14157	0,10228
	(1:2:3)	0,68862	0,64658	0,56251	0,47257
	(2:5:7)	0,80954	0,75142	0,70119	0,57613
	(8:3:6)	0,60736	0,59248	0,47038	0,41519
	(1:1:2)	0,46383	0,42624	0,34450	0,29903
	(1:4:4)	0,93690	0,93714	0,87760	0,73612
	(2,4:2,3:2)	0,12017	0,10746	0,06327	0,04921
	(10:15:18)	0,29582	0,27393	0,18870	0,14836
20	**(0,5:0,5:1)**	0,72925	0,71662	0,62180	0,59615
	(1:1:1,5)	0,35903	0,32396	0,24637	0,21650
	(1:2:3)	0,93511	0,92201	0,88186	0,84611
	(2:5:7)	0,98163	0,97393	0,96004	0,93208
	(8:3:6)	0,88481	0,88373	0,80456	0,78486
	(1:1:2)	0,72854	0,71285	0,61883	0,59921
	(1:4:4)	0,99820	0,99753	0,99690	0,99040
	(2,4:2,3:2)	0,14188	0,13690	0,07724	0,06927
	(10:15:18)	0,49271	0,48418	0,36018	0,33199
30	**(0,5:0,5:1)**	0,87502	0,87172	0,80225	0,79723
	(1:1:1,5)	0,47886	0,45150	0,35550	0,33070
	(1:2:3)	0,98967	0,98645	0,97553	0,96675
	(2:5:7)	0,99892	0,99803	0,99651	0,99328
	(8:3:6)	0,97288	0,97107	0,94162	0,93537
	(1:1:2)	0,87479	0,86801	0,80199	0,79693
	(1:4:4)	0,99998	0,99998	0,99996	0,99979
	(2,4:2,3:2)	0,16415	0,15934	0,09196	0,08668
	(10:15:18)	0,65359	0,64355	0,52443	0,49421
40	**(0,5:0,5:1)**	0,94628	0,94479	0,90379	0,90282
	(1:1:1,5)	0,58339	0,55659	0,45958	0,43268
	(1:2:3)	0,99844	0,99797	0,99606	0,99434
	(2:5:7)	0,99997	0,99988	0,99977	0,99951
	(8:3:6)	0,99448	0,99379	0,98420	0,98364
	(1:1:2)	0,94566	0,94318	0,90474	0,90170
	(1:4:4)	1	1	1	1
	(2,4:2,3:2)	0,18604	0,18296	0,10747	0,10354
	(10:15:18)	0,77177	0,76152	0,66105	0,63357
50	**(0,5:0,5:1)**	0,97710	0,97547	0,95708	0,95597
	(1:1:1,5)	0,66935	0,65076	0,55435	0,53553
	(1:2:3)	0,99988	0,99973	0,99935	0,99889
	(2:5:7)	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999
	(8:3:6)	0,99897	0,99878	0,99719	0,99647
	(1:1:2)	0,97718	0,97664	0,95644	0,95567
	(1:4:4)	1	1	1	1
	(2,4:2,3:2)	0,20465	0,20419	0,12300	0,11230
	(10:15:18)	0,85299	0,84295	0,76532	0,74286

Çizelge 7.4. k=4 ve gözlem sayısına göre Olabilirlik oran testi ve N testinin 0.10 ve 0.05 anlam seviyelerine göre güç değerleri

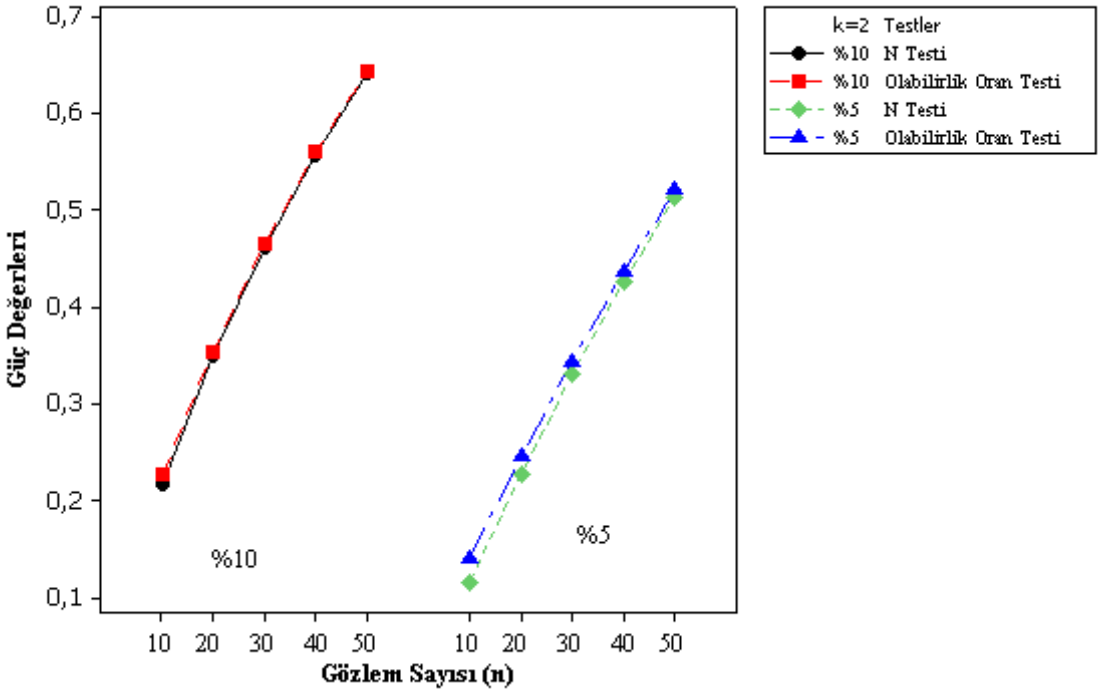
α		%10		%5	
n	$\theta_1 : \theta_2 : \theta_3 : \theta_4$	**Olabilirlik Oran Testi**	**N Testi**	**Olabilirlik Oran Testi**	**N Testi**
10	**(0,5:0,5:0,5:1)**	0,45910	0,46525	0,34287	0,34150
	(1:1:1:1,5)	0,22122	0,21133	0,13606	0,12300
	(1:2:3:3)	0,73524	0,63254	0,60475	0,43751
	(2:5:7:7)	0,83644	0,72651	0,72937	0,52287
	(8:3:6:6)	0,54945	0,45888	0,40590	0,29127
	(1:1:1:2)	0,46010	0,46546	0,34224	0,33965
	(1:4:4:4)	0,93389	0,82714	0,86772	0,61377
	(2,4:2,3:2:2)	0,12414	0,10805	0,06591	0,04901
	(10:15:18:18)	0,30360	0,24952	0,19139	0,13060
20	**(0,5:0,5:0,5:1)**	0,72586	0,73872	0,62136	0,63854
	(1:1:1:1,5)	0,34880	0,32253	0,23910	0,24244
	(1:2:3:3)	0,96254	0,93860	0,92298	0,86129
	(2:5:7:7)	0,99057	0,97876	0,97649	0,93741
	(8:3:6:6)	0,84696	0,79652	0,74791	0,66603
	(1:1:1:2)	0,72842	0,73923	0,62283	0,63858
	(1:4:4:4)	0,99905	0,99638	0,99757	0,98320
	(2,4:2,3:2:2)	0,14951	0,13977	0,08237	0,07216
	(10:15:18:18)	0,51668	0,46126	0,37704	0,30511
30	**(0,5:0,5:0,5:1)**	0,87476	0,88485	0,80450	0,81836
	(1:1:1:1,5)	0,46729	0,47717	0,34561	0,35422
	(1:2:3:3)	0,99651	0,99335	0,99045	0,97870
	(2:5:7:7)	0,99949	0,99901	0,99894	0,99557
	(8:3:6:6)	0,95975	0,94083	0,91788	0,87790
	(1:1:1:2)	0,87712	0,88498	0,80416	0,81902
	(1:4:4:4)	1	0,99997	0,99998	0,99972
	(2,4:2,3:2:2)	0,17802	0,16747	0,10016	0,09166
	(10:15:18:18)	0,68779	0,63793	0,55828	0,48264



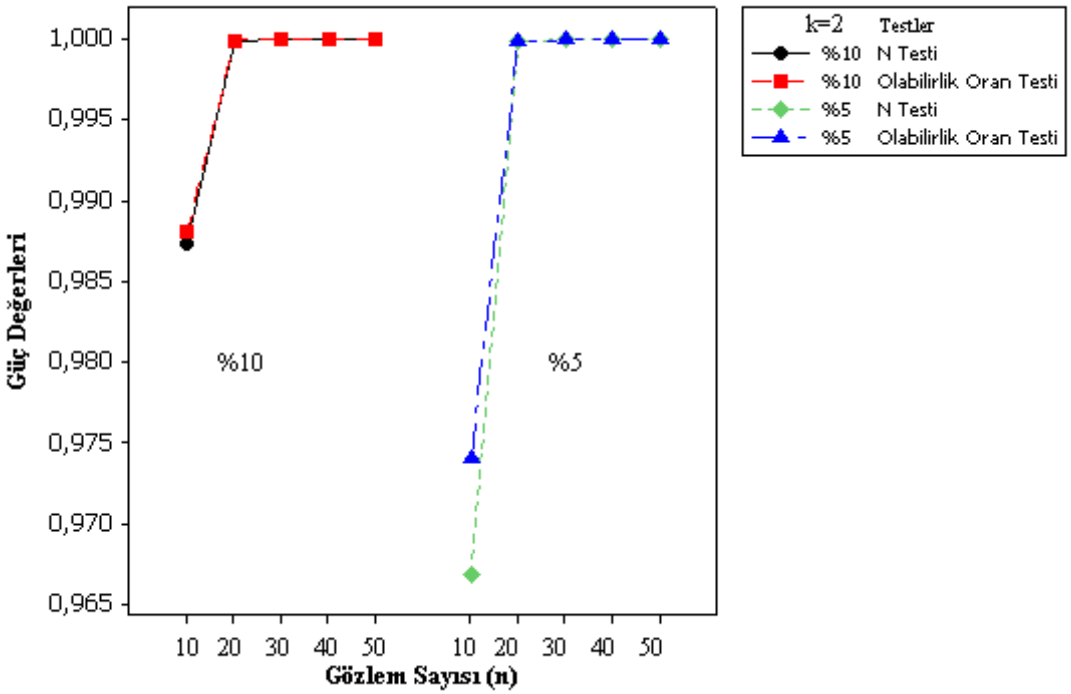
Şekil 7.1. (0,3:0,7) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



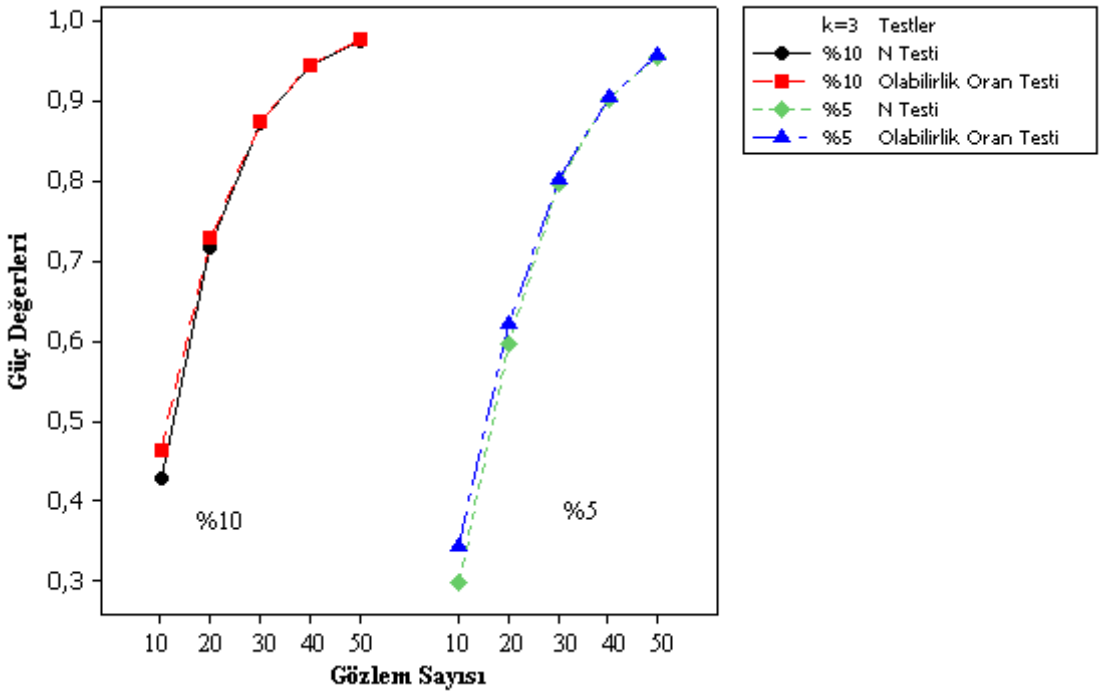
Şekil 7.2. (0,5:1) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



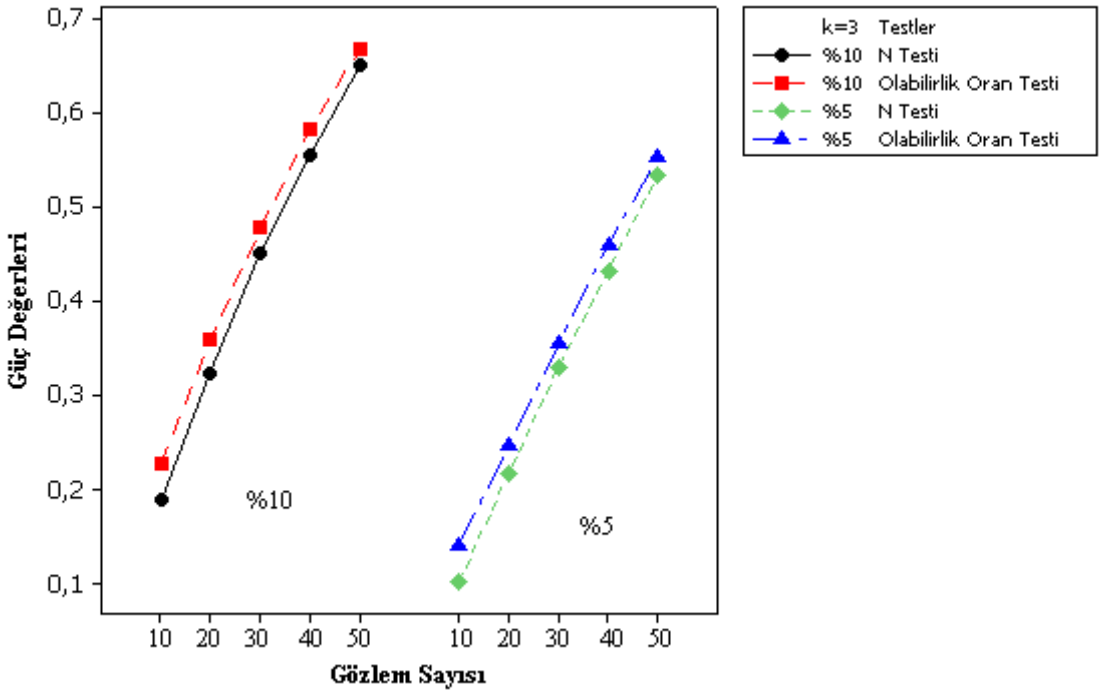
Şekil 7.3. (1:1,5) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



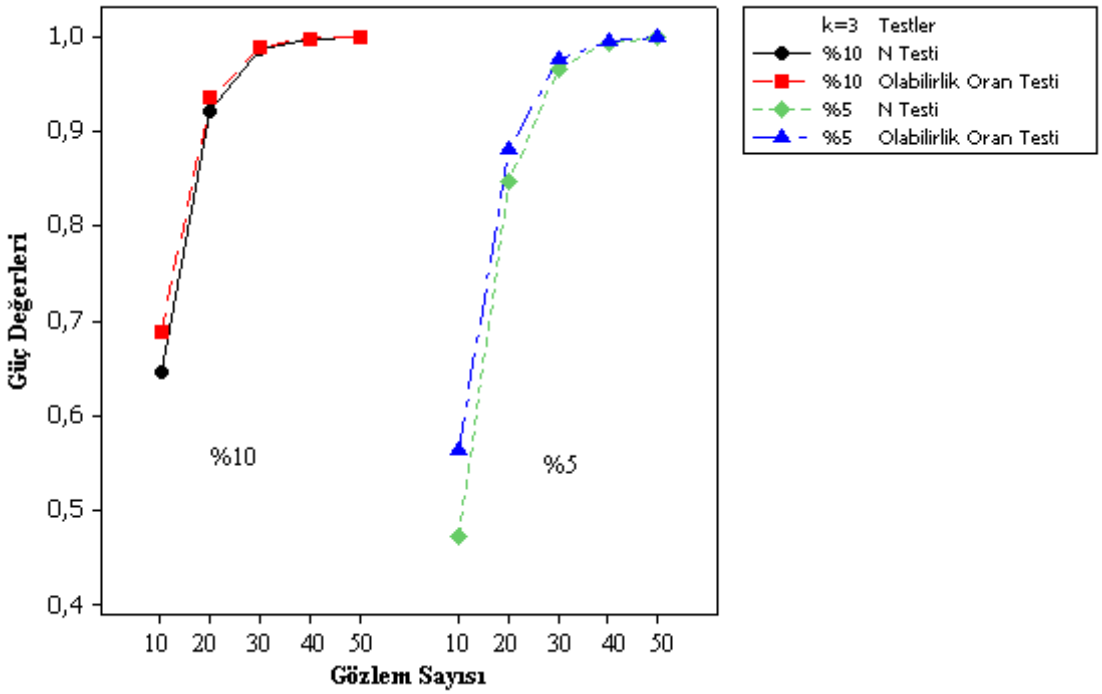
Şekil 7.4. (6:1) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



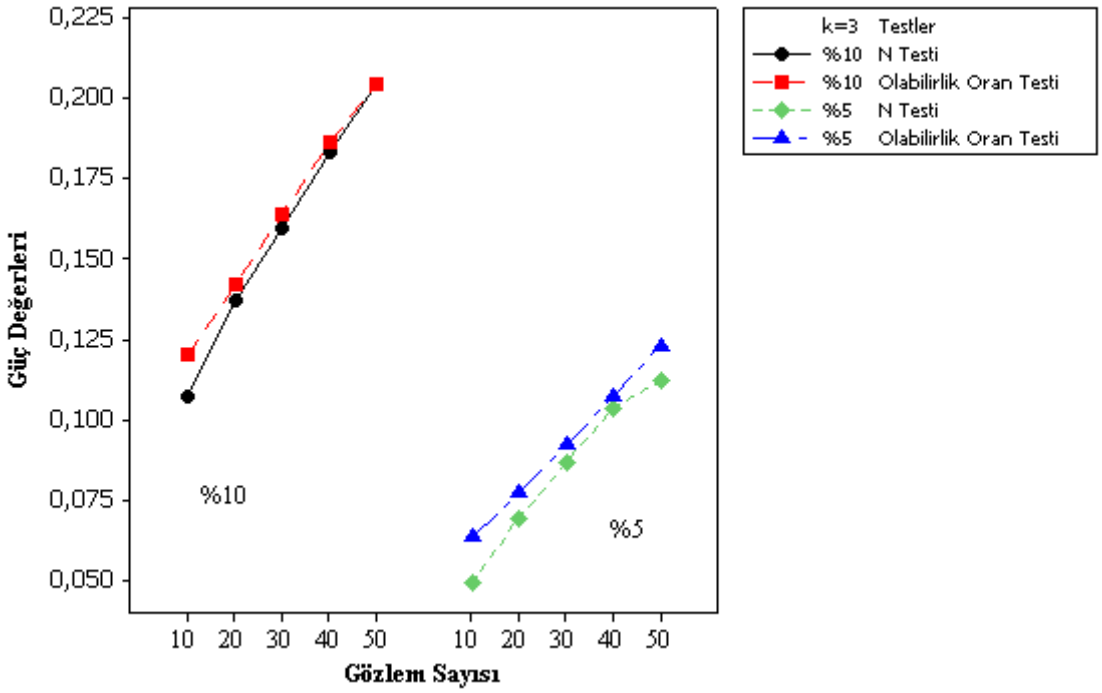
Şekil 7.5. (0,5:0,5:1) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



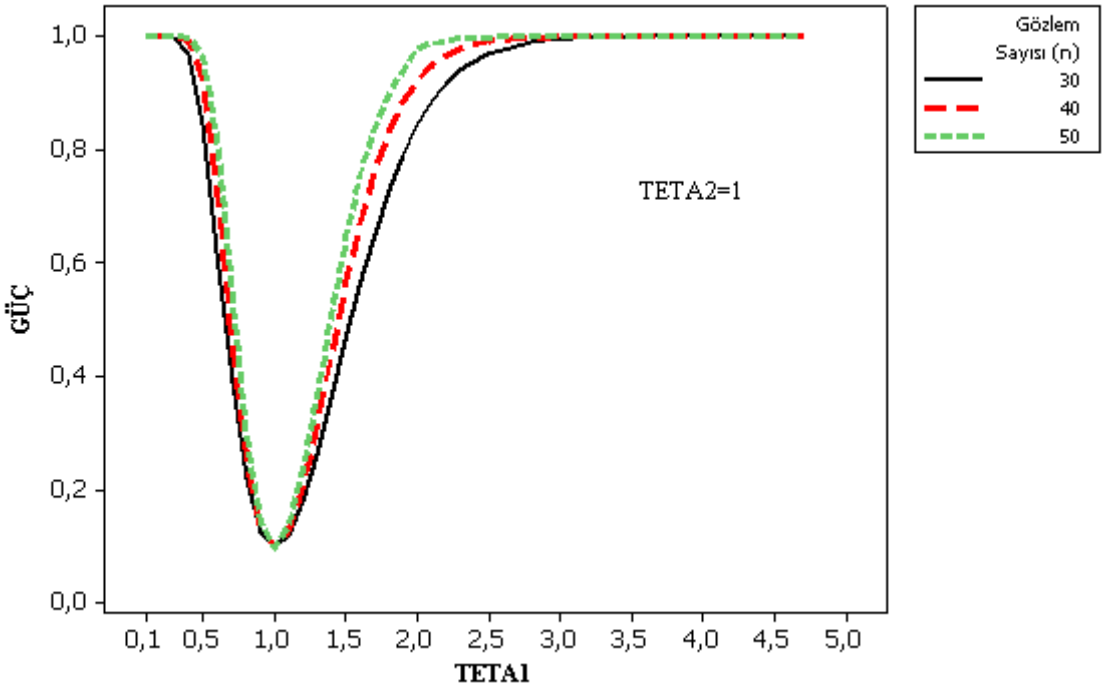
Şekil 7.6. (1:1:1,5) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



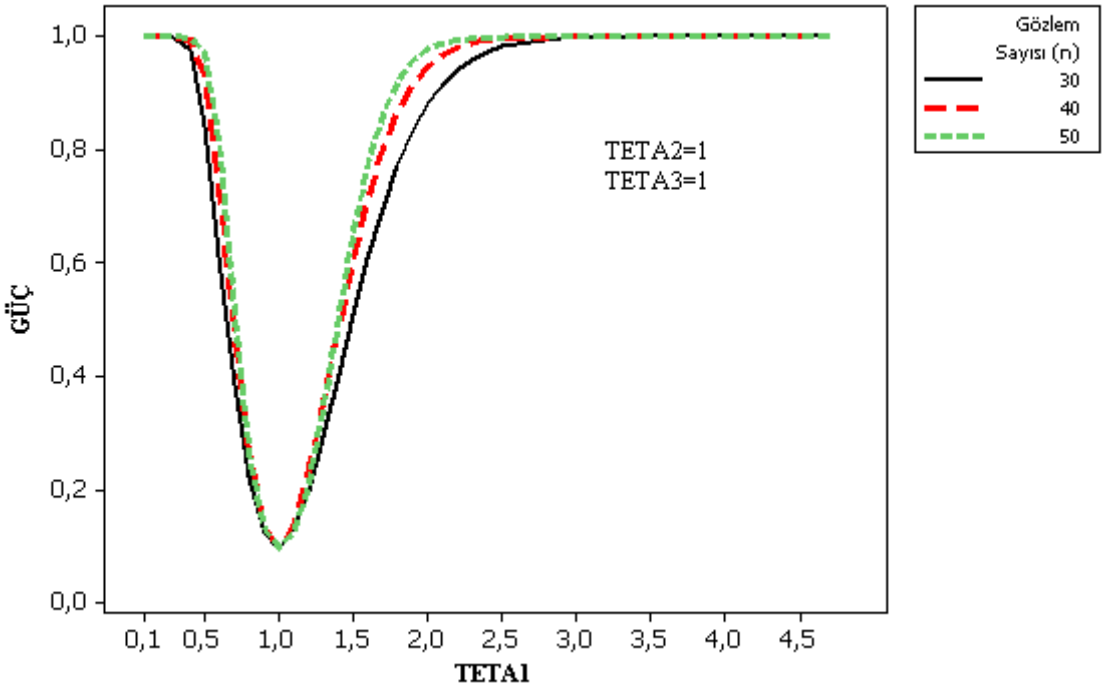
Şekil 7.7. (1:2:3) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



Şekil 7.8. (2,4:2,3:2) θ değerleri için gözlem sayılarına göre %10 ve %5 anlam seviyesindeki güç karşılaştırması



Şekil 7.9. k=2 olması durumunda $\theta_2 = 1$ ve θ_1 değerleri için %10 anlam seviyesindeki güç grafiği



Şekil 7.10. k=3 olması durumunda $\theta_2 = 1, \theta_3 = 1$ ve θ_1 değerleri için %10 anlam seviyesindeki güç grafiği

7.3. İki Parametreli Üstel Dağılıma Sahip $k \geq 2$ Kitle İçin Ortalamalarının Eşitliği Testi

θ_i ölçek parametresi ve β konum parametresi ile $f(x;\theta_i,\beta)=\frac{1}{\theta_i}\exp\left(-\frac{(x-\beta)}{\theta_i}\right)$, $x>\beta$, $\theta_i>0$, $\beta>0$ üstel dağılıma sahip *i.* kitleden $\{x_{ij}: i=1,2,\ldots,k;\ j=1,2,\ldots,n\}$ örneklemleri ile verilen $k \geq 2$ kitlenin θ_i ortalamalarının eşitliği problemi için de (7.1.1)'deki H_0 hipotezi geçerlidir.

θ_i'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\beta)}{n}$ $i=1,2,\ldots,k$ olmak üzere (7.1.1)'deki H_0 hipotezinin doğruluğunda ve β'nın aynı ve biliniyor varsayımı altında $H_i=\frac{2\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\beta)}{\theta}$ $i=1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenleri tanımlansın. Tanımlanan H_i $i=1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenlerine ait sıra istatistikleri $H_{1:k}<H_{2:k}<\ldots<H_{k:k}$ olmak üzere önerdiğimiz test istatistiği,

$$H=H_{k:k}-H_{1:k} \tag{7.1.11}$$

dır. H'nin büyük değerlerinin H_1 hipotezin destekleyeceği açıktır. Bu durumda $P\{H>u\}=\alpha$ olacak biçimde belirlenecek olan *u* kritik değeri ile (7.1.1)'de verilen H_0 hipotezi test edilebilir

7.3.1. H test istatistiğinin dağılımı

Kritik değerlerin belirlenmesi için ilk olarak H test istatistiğinin dağılımının oluşturulması gerekir. Bu durumda H test istatistiğinin dağılımı,

$$P\{H > u\} = P\{H_{k:k} - H_{1:k} > u\} = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=x+u}^{\infty} f_{1,k}(x,y)\,dydx \qquad (7.1.12)$$

şeklinde elde edilir.

H_0 hipotezinin doğruluğunda tanımlanan H_i $i = 1,2,\ldots,k$ rasgele değişkenlerinin dağılımları,

$$H_i \sim \chi^2_{(2n)} \quad i = 1,2,\ldots,k \qquad (7.1.13)$$

Bu durumda H test istatistiğinin dağılımı k=2 olması durumunda (7.1.9) ve $k > 2$ olması durumunda da (7.1.10) formundaki gibi olur. Dolayısıyla iki parametreli üstel dağılıma sahip $k \geq 2$ kitlenin θ_i ortalamalarının eşitliği için oluşturulan H test istatistiği β 'nın aynı ve biliniyor varsayımı altında Çizelge 7.1.'deki kritik değerlere sahip olacaktır. β 'nın farklı değerleri için güç değerleri de değişmemektedir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Normal dağılıma sahip k kitlenin ortalamalarının eşitliğinin ve varyanslarının homojenliğinin test edilmesi için önerilen test istatistiklerinin kritik değerleri bulunmuştur. Ortalamalarının eşitliği için önerilen test istatistiğinin, F test istatistiğine karşı güçleri incelenmiştir. Varyansların homojenliği için önerilen test istatistiğinin, Bartlett'in χ^2 ve Hartley test istatistiklerine karşı güçleri incelenmiştir. Üstel dağılıma sahip k kitlenin ortalamalarının eşitliğinin test edilmesi için önerilen test istatistiğinin kritik değerleri ve olabilirlik oran test istatistiğine karşı güçleri incelenmiştir.

Normal dağılımın ortalamalarının eşitliğinin test edilmesi için önerilen test istatistiğinin güç değerlerinin varyans değerinin artması durumunda, F test istatistiğinin güç değerlerinden daha fazla olduğu gözlenmiştir. Varyansların homojenliği için önerilen test istatistiğinin güç değerlerinin, Bartlett'in χ^2 ve Hartley test istatistiklerinin güç değerleri ile aynı olduğu gözlenmiştir. Ancak, grup sayısının artması durumunda diğer test istatistiklerinin güç değerlerinden biraz fazla olduğu söylenebilir. Üstel dağılımın ortalamalarının eşitliğinin test edilmesi için önerilen test istatistiğinin güç değerlerinin olabilirlik oran test istatistiğinin güç değeri ile aynı olduğu gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I.,eds.1972. Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York.

Akdi, Y. 2005. Matematiksel İstatistiğe Giriş. Bıçaklar Kitabevi, Ankara, Türkiye.

Bartlett, M. S. 1937. Properties of sufficiency and statistical tests. Proceedings of the Royal Society of London, A, 160, 268–282.

Bartlett, M. S. and Kendall, D. G. 1946. The statistical analysis of variance heterogeneity and the logarithmic transformation. J. Roy. Statist. Soc., Suppl. 8, 128–138.

Bishop, T. A. and Dudewicz, E. J. 1978. Exact analysis of variance with unequal variances: Test procedures and tables. Technometrics, 20, 419–430.

Brown, M.B. and Forsythe, A.B. 1974. Robust tests for the equality of variances. *J. Amer. Statist. Assoc*. 69 364–367.

Boos, D. D. and Brownie, C. 1989. Bootstrap methods for testing homogeneity of variances. Technometrics, 31(1), 69–82.

Box, G. E. P. 1954. Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems, I. Effect of inequality of variance in one-way model. Ann. Math. Statist., 25, 290–302.

Box, G. P. E. and Andersen, S. L. 1955. Permutation theory in the derivation of robust criteria and the study of departures from assumptions. J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 17,1–34.

Camdeviren, H. and Mendes, M. 2005. A simulation study for type III error rates of some variance homogeneity tests. Pak. J. Statist., 212, 223–234.

Cochran, W. G. 1941. The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total. Ann. Eug., 11, 47–52.

Cochran, W. G. and Cox, G. M. 1957. Experimental design. New York: John Willey and Sons Inc.

Conover, W. J., Johnson, M. E. and Johnsons, M. M. 1981. A comparative study of tests for homogeneity of variances with applications to the outer continental shelf bidding data. Technometrics, 23, 351–361.

David, H. 1970. Order Statistics.John Wiley, New York.

Hartley, H. O. 1940. Testing the homogeneity of a set of variances. Biometrika, 31,249–255.

Hsieh, H. K., 1981.On Testing the Equality of Two Exponential Distributions. Technometrics, 23, 265-269.

Islam, M. K. 2006. Transformed Tests For Homogeneıty Of Varıances And Means. A Dissertation Submitted to the Graduate College of Bowling Green State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of phılosophy.

Johnson, J.D. 1991. Applied Multivariate Data Analysis. Springer-Verlag New York, Inc. USA, 621.

Kanji, G.K., 1993 . 100 Statistical Tests. SAGE Publication Ltd, London.

Karadayı, N., Kaya M. F. 2010. Homogeneity Test Based On Order Statistics For Means Of Normal Distributed Populations. *OSDA*, Egypt.

Kaya M. F., Karadayı, N. 2010. Homogeneity Test Based On Order Statistics For Variances Of Normal Distributed Populations. *OSDA*, Egypt.

Layard, M. W. J. 1973. Robust large sample tests for homogeneity of variances. J. Amer. Statist. Assoc., 68, 195–198.

Legendre, P. ve Borcard, D. 2007. Statistical comparison of univariate tests of homogeneity of variances, Submitted to the Journal of Statistical Computation and Simulation,

Levene, H. 1960. Robust tests for equality of variances. Contributions to probability and statistics. edited by I. Olkin. Stanford University Press. Palo Alto. CA., 278–292.

Lim, T. S. and Loh, W. Y. 1996. A comparison of tests of equality of variances. Computational Statistics and Data Analysis, 22, 287–301.

Liu, X. and Xu, X. 2010. A new generalized p-value approach for testing the homogeneity of variances. Statistics and Probability Letters, 80, 1486-1491.

Mendes, M. 2003. The comparison of Levene, Bartlett, Neymann-Pearson and Bartlett 2 tests in terms of actual type I error rates. Journal of Agriculture Sciences, 92, 143–146.

Mendeş, M. 2002. Normal Dağılım ve Varyansların Homojenliği Ön Şartlarının Gerçekleşmediği Durumlarda Varyans Analizi Tekniğinin Yerine Kullanılabilecek Bazı Parametrik Testlerin I. Tip Hata ve Testin Gücü Bakımından İrdelenmesi Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Miller, R. G. Jr. 1986. Beyond ANOVA, Basics of Applied Statistics.Wiley, New York

Mu, Z. 2006. Comparing the Statistical Tests for Homogeneity of Variances. A thesis presented to the faculty of the Department of Mathematics East Tennessee Stae University.

Nagarsenker, P. B., Nagarsenker, B. N. 1986. "On a test of equality of scale parameters of several exponential distributions", Communications in Statistics - Simulation and Computation,15, 497 – 504.

Nelson, L. S. 2000. Comparing two variances from normal populations. J. Qual. Tech-nol., 32, 79–80..

Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu, H., Karabulut, İ. 2006. Parametre Tahmini ve Hipotez Testi, Bıçaklar Kitabevi, Ankara, Türkiye.

Rohatgi, V.K. 1976. An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, New York.

Roussas, G.G. 1973. A First Course in Mathematical Statistics. Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A.

Scheffe, H. 1959. The Analysis of Variance. John Wiley and Sons, New York.

Singh, N. 1983. The Likelihood Ratio Test for the Equality of Location Parameters of k (>= 2) Exponential Populations Based on Type II Censored Samples, Technometrics, Vol. 25, 193-195.

Singh, N. 1985. A simple and asymptotically optimal test for the equality of k(≥2) exponential distributions based on type II censored samples, Communications in Statistics - Theory and Methods, 14, 1615 - 1625 .

Tekindal, B. 2007. Varyansların homojenliğinde kullanılan bazı yöntemlerin I. tip hata ve testin gücü bakımından karşılaştırılması: Bir monte carlo simülasyon çalışması. Gazi Üniversitesi Endüstriyel Sanatlar Eğitim Fakültesi Dergisi, 20, 90-101.

Thiagarajh, K., Paul S. R. 1990. Testtesting for the equality of scale parameters of k(> 2) exponential populations based on complete and type II censored samples , Communications in Statistics - Simulation and Computation, Vol. 19, 891 – 902.

Thiagarajah, K., R. 1995**.** Homogeneity Tests for Scale Parameters of 2- Parameter Exponential Populations under Time Censoring. IEEE Transactions on Reliability, 44, No.2.

Tiku, M., L., Vaughan, D., C. 1991**.**Testing equality of location parameters of two exponential distributions from censored samples.Communications in Statistics - Theory and Methods, 20, 929 – 944.

Vaughan, D. C., Tiku M. L. 1993**.** Testing the equality of location parameters of exponential populations from censored samples", Communications in Statistics - Theory and Methods, 22 , 2567 – 2581

Welch, B. L. 1951. On the comparison of several mean values: An alternative approach. Biometrika, 38, 330–336.

Weerahandi, S. 1995. ANOVA under unequal error variances. Biometrics, 51, 589–599.

Wilcox, R. R. 2002. Comparing variances of two independent groups. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 55, 169–175.

EKLER

Ek-1
Ki-Kare Kritik Değer Tablosu

sd	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90
1	---	---	0,001	0,004	0,016
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358

sd: Serbestlik derecesi

sd	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
80	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
90	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
100	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169

http://people.richland.edu/james/lecture/m170/tbl-chi.html

Ek-2

Hartley Kritik Değer Tablosu

%1 anlam seviyesinde

%1	*k*										
(n-1)	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
2	199	448	729	1036	1362	1705	2069	2432	2813	3204	3605
3	47,5	85	120	151	184	216*	249*	281*	310*	337*	361*
4	23,2	37	49	59	69	79	89	97	106	113	120
5	14,9	22	28	33	38	42	46	50	54	57	60
6	11,1	15.5	19,1	22	25	27	30	32	34	36	37
7	8,89	12.1	14,5	16,5	18,4	20	22	23	24	26	27
8	7,50	9.9	11,7	13,2	14,5	15,8	16,9	17,9	18,9	19,8	21
9	6,54	8,5	9,9	11,1	12,1	13,1	13,9	14,7	15,3	16,0	16,6
10	5,85	7,4	8,6	9,6	10,4	11,1	11,8	12,4	12,9	13,4	13,9
12	4,91	6,1	6,9	7,6	8,2	8,7	9,1	9,5	9,9	10,2	10,6
15	4,07	4,9	5,5	6,0	6,4	6,7	7,1	7,3	7,5	7,8	8,0
20	3,32	3,8	4,3	4,6	4,9	5,1	5,3	5,5	5,6	5,8	5,9
30	2,63	3,0	3,3	3,4	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2
60	1,96	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7
∞	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

*The third-digit figures for n - 1 = 3 are uncertain.

%5 anlam seviyesinde

%5	*k*										
(n-1)	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
2	39,0	87,5	142	202	266	333	403	475	550	626	704
3	15,4	27,8	39,2	50,7	62,0	72,9	83,5	93,9	104	114	124
4	9,6	15,5	20,6	25,2	29,5	33,6	37,5	41,1	44,6	48,0	51,4
5	7,15	10,8	13,7	16,3	18,7	20,8	22,9	24,7	26,5	28,2	29,9
6	5,82	8,38	10,4	12,1	13,7	15,0	16,3	17,5	18,6	19,7	20,7
7	4,99	6,94	8,44	9,70	10,8	11,8	12,7	13,5	14,3	15,1	15,8
8	4,43	6,00	7,18	8,12	9,03	9,78	10,5	11,1	11,7	12,2	12,7
9	4,03	5,34	6,31	7,11	7,80	8,41	8,95	9,45	9,91	10,3	10,7
10	3,72	4,85	5,67	6,34	6,92	7,42	7,87	8,28	8,66	9,01	9,34
12	3,28	4,16	4,79	5,30	5,72	6,09	6,42	6,72	7,00	7,25	7,48
15	2,86	3,54	4,01	4,37	4,68	4,95	5,19	5,40	5,59	5,77	5,93
20	2,46	2,95	3,29	3,54	3,76	3,94	4,10	4,24	4,37	4,49	4,59
30	2,07	2,40	2,61	2,78	2,91	3,02	3,12	3,21	3,29	3,36	3,39
60	1,67	1,85	1,96	2,04	2,11	2,17	2,22	2,26	2,30	2,33	2,36
∞	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Kanji, Gopal K. **100 Statistical Tests**. London : SAGE Publication Ltd., 1993.
http://www.watpon.com/table/hartley.pdf

Ek-3

Cohran Kritik Değer Tablosu

%1 anlam seviyesinde

%1	*k*													
(n-1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	16	144	∞
2	,9999	,9950	,9794	,9586	,9373	,9172	,8988	,8823	,8674	,8539	,7949	,7067	,6062	,5000
3	,9933	,9423	,8831	,8335	,7933	,7606	,7335	,7107	,6912	,6743	,6059	,5153	,4230	,3333
4	,9676	,8643	,7814	,7212	,6761	,6410	,6129	,5897	,5702	,5536	,4884	,4057	,3251	,2500
5	,9279	,7885	,6957	,6329	,5875	,5531	,5259	,5037	,4854	,4697	,4094	,3351	,2644	,2000
6	,8828	,7218	,6258	,5635	,5195	,4866	,4608	,4401	,4229	,4084	,3529	,2858	,2229	,1667
7	,8376	,6644	,5685	,5080	,4659	,4347	,4105	,3911	,3751	,3616	,3105	,2494	,1929	,1429
8	,7945	,6152	,5209	,4627	,4226	,3932	,3704	,3522	,3373	,3248	,2779	,2214	,1700	,1250
9	,7544	,5727	,4810	,4251	,3870	,3592	,3378	,3207	,3067	,2950	,2514	,1992	,1521	,1111
10	,7175	,5358	,4469	,3934	,3572	,3308	,3106	,2945	,2813	,2704	,2297	,1811	,1376	,1000
12	,6528	,4751	,3919	,3428	,3099	,2861	,2680	,2535	,2419	,2320	,1961	,1535	,1157	,0833
15	,5747	,4069	,3317	,2882	,2593	,2386	,2228	,2104	,2002	,1918	,1612	,1251	,0934	,0667
20	,4799	,3297	,2654	,2288	,2048	,1877	,1748	,1646	,1567	,1501	,1248	,0960	,0709	,0500
24	,4247	,2871	,2295	,1970	,1759	,1608	,1495	,1406	,1338	,1283	,1060	,0810	,0595	,0417
30	,3632	,2412	,1913	,1635	,1454	,1327	,1232	,1157	,1100	,1054	,0867	,0658	,0480	,0333
40	,2940	,1915	,1508	,1281	,1135	,1033	,0957	,0898	,0853	,0816	,0668	,0503	,0363	,0250
60	,2151	,1371	,1069	,0902	,0796	,0722	,0668	,0625	,0594	,0567	,0461	,0344	,0245	,0167
120	,1225	,0759	,0585	,0489	,0429	,0387	,0357	,0334	,0316	,0302	,0242	,0178	,0125	,0083
∞	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	

%5 anlam seviyesinde

%5	*k*													
(n-1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	16	144	∞
2	,9985	,9750	,9392	,9057	,8772	,8534	,8332	,8159	,8010	,7880	,7341	,6602	,5813	,5000
3	,9669	,8709	,7977	,7457	,7071	,6771	,6530	,6333	,6167	,6025	,5466	,4748	,4031	,3333
4	,9065	,7679	,6841	,6287	,5895	,5598	,5365	,5175	,5017	,4884	,4366	,3720	,3093	,2500
5	,8412	,6838	,5981	,5441	,5065	,4783	,4564	,4387	,4241	,4118	,3645	,3066	,2513	,2000
6	,7808	,6161	,5321	,4803	,4447	,4184	,3980	,3817	,3682	,3568	,3135	,2612	,2119	,1667
7	,7271	,5612	,4800	,4307	,3974	,3726	,3535	,3384	,3259	,3154	,2756	,2278	,1833	,1429
8	,6798	,5157	,4377	,3910	,3595	,3362	,3185	,3043	,2926	,2862	,2462	,2022	,1616	,1250
9	,6385	,4775	,4027	,3584	,3286	,3067	,2901	,2768	,2659	,2568	,2226	,1820	,1446	,1111
10	,6020	,4450	,3733	,3311	,3029	,2823	,2666	,2541	,2439	,2353	,2032	,1655	,1308	,1000
12	,5410	,3924	,3264	,2880	,2624	,2439	,2299	,2187	,2098	,2020	,1737	,1403	,1100	,0833
15	,4709	,3346	,2758	,2419	,2195	,2034	,1911	,1815	,1736	,1671	,1429	,1144	,0889	,0667
20	,3894	,2705	,2205	,1921	,1735	,1602	,1501	,1422	,1357	,1303	,1108	,0879	,0675	,0500
24	,3434	,2354	,1907	,1656	,1493	,1374	,1286	,1216	,1160	,1113	,0942	,0743	,0567	,0417
30	,2929	,1980	,1593	,1377	,1237	,1137	,1061	,1002	,0958	,0921	,0771	,0604	,0457	,0333
40	,2370	,1576	,1259	,1082	,0968	,0887	,0827	,0780	,0745	,0713	,0595	,0462	,0347	,0250
60	,1737	,1131	,0895	,0765	,0682	,0623	,0583	,0552	,0520	,0497	,0411	,0316	,0234	,0167
120	,0998	,0632	,0495	,0419	,0371	,0337	,0312	,0292	,0279	,0266	,0218	,0165	,0120	,0083
∞	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000

http://faculty.washington.edu/heagerty/Books/Biostatistics/TABLES/Cochran/index.html

Ek-4

F Kritik Değer Tablosu

%1 anlam seviyesinde

sd	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052,181	4999,500	5403,352	5624,583	5763,650	5858,986	5928,356	5981,070	6022,473	6055,847
2	98,503	99,000	99,166	99,249	99,299	99,333	99,356	99,374	99,388	99,399
3	34,116	30,817	29,457	28,710	28,237	27,911	27,672	27,489	27,345	27,229
4	21,198	18,000	16,694	15,977	15,522	15,207	14,976	14,799	14,659	14,546
5	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,456	10,289	10,158	10,051
6	13,745	10,925	9,780	9,148	8,746	8,466	8,260	8,102	7,976	7,874
7	12,246	9,547	8,451	7,847	7,460	7,191	6,993	6,840	6,719	6,620
8	11,259	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,178	6,029	5,911	5,814
9	10,561	8,022	6,992	6,422	6,057	5,802	5,613	5,467	5,351	5,257
10	10,044	7,559	6,552	5,994	5,636	5,386	5,200	5,057	4,942	4,849
11	9,646	7,206	6,217	5,668	5,316	5,069	4,886	4,744	4,632	4,539
12	9,330	6,927	5,953	5,412	5,064	4,821	4,640	4,499	4,388	4,296
13	9,074	6,701	5,739	5,205	4,862	4,620	4,441	4,302	4,191	4,100
14	8,862	6,515	5,564	5,035	4,695	4,456	4,278	4,140	4,030	3,939
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	4,318	4,142	4,004	3,895	3,805
16	8,531	6,226	5,292	4,773	4,437	4,202	4,026	3,890	3,780	3,691
17	8,400	6,112	5,185	4,669	4,336	4,102	3,927	3,791	3,682	3,593
18	8,285	6,013	5,092	4,579	4,248	4,015	3,841	3,705	3,597	3,508
19	8,185	5,926	5,010	4,500	4,171	3,939	3,765	3,631	3,523	3,434
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,699	3,564	3,457	3,368
21	8,017	5,780	4,874	4,369	4,042	3,812	3,640	3,506	3,398	3,310
22	7,945	5,719	4,817	4,313	3,988	3,758	3,587	3,453	3,346	3,258
23	7,881	5,664	4,765	4,264	3,939	3,710	3,539	3,406	3,299	3,211
24	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,667	3,496	3,363	3,256	3,168
25	7,770	5,568	4,675	4,177	3,855	3,627	3,457	3,324	3,217	3,129
26	7,721	5,526	4,637	4,140	3,818	3,591	3,421	3,288	3,182	3,094
27	7,677	5,488	4,601	4,106	3,785	3,558	3,388	3,256	3,149	3,062
28	7,636	5,453	4,568	4,074	3,754	3,528	3,358	3,226	3,120	3,032
29	7,598	5,420	4,538	4,045	3,725	3,499	3,330	3,198	3,092	3,005
30	7,562	5,390	4,510	4,018	3,699	3,473	3,304	3,173	3,067	2,979
40	7,314	5,179	4,313	3,828	3,514	3,291	3,124	2,993	2,888	2,801
60	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,953	2,823	2,718	2,632
120	6,851	4,787	3,949	3,480	3,174	2,956	2,792	2,663	2,559	2,472
∞	6,635	4,605	3,782	3,319	3,017	2,802	2,639	2,511	2,407	2,321

%1 anlam seviyesinde

sd	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6106,321	6157,285	6208,730	6234,631	6260,649	6286,782	6313,030	6339,391	6365,864
2	99,416	99,433	99,449	99,458	99,466	99,474	99,482	99,491	99,499
3	27,052	26,872	26,690	26,598	26,505	26,411	26,316	26,221	26,125
4	14,374	14,198	14,020	13,929	13,838	13,745	13,652	13,558	13,463
5	9,888	9,722	9,553	9,466	9,379	9,291	9,202	9,112	9,020
6	7,718	7,559	7,396	7,313	7,229	7,143	7,057	6,969	6,880
7	6,469	6,314	6,155	6,074	5,992	5,908	5,824	5,737	5,650
8	5,667	5,515	5,359	5,279	5,198	5,116	5,032	4,946	4,859
9	5,111	4,962	4,808	4,729	4,649	4,567	4,483	4,398	4,311
10	4,706	4,558	4,405	4,327	4,247	4,165	4,082	3,996	3,909
11	4,397	4,251	4,099	4,021	3,941	3,860	3,776	3,690	3,602
12	4,155	4,010	3,858	3,780	3,701	3,619	3,535	3,449	3,361
13	3,960	3,815	3,665	3,587	3,507	3,425	3,341	3,255	3,165
14	3,800	3,656	3,505	3,427	3,348	3,266	3,181	3,094	3,004
15	3,666	3,522	3,372	3,294	3,214	3,132	3,047	2,959	2,868
16	3,553	3,409	3,259	3,181	3,101	3,018	2,933	2,845	2,753
17	3,455	3,312	3,162	3,084	3,003	2,920	2,835	2,746	2,653
18	3,371	3,227	3,077	2,999	2,919	2,835	2,749	2,660	2,566
19	3,297	3,153	3,003	2,925	2,844	2,761	2,674	2,584	2,489
20	3,231	3,088	2,938	2,859	2,778	2,695	2,608	2,517	2,421
21	3,173	3,030	2,880	2,801	2,720	2,636	2,548	2,457	2,360
22	3,121	2,978	2,827	2,749	2,667	2,583	2,495	2,403	2,305
23	3,074	2,931	2,781	2,702	2,620	2,535	2,447	2,354	2,256
24	3,032	2,889	2,738	2,659	2,577	2,492	2,403	2,310	2,211
25	2,993	2,850	2,699	2,620	2,538	2,453	2,364	2,270	2,169
26	2,958	2,815	2,664	2,585	2,503	2,417	2,327	2,233	2,131
27	2,926	2,783	2,632	2,552	2,470	2,384	2,294	2,198	2,097
28	2,896	2,753	2,602	2,522	2,440	2,354	2,263	2,167	2,064
29	2,868	2,726	2,574	2,495	2,412	2,325	2,234	2,138	2,034
30	2,843	2,700	2,549	2,469	2,386	2,299	2,208	2,111	2,006
40	2,665	2,522	2,369	2,288	2,203	2,114	2,019	1,917	1,805
60	2,496	2,352	2,198	2,115	2,028	1,936	1,836	1,726	1,601
120	2,336	2,192	2,035	1,950	1,860	1,763	1,656	1,533	1,381
∞	2,185	2,039	1,878	1,791	1,696	1,592	1,473	1,325	1,000

%5 anlam seviyesinde

sd	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,4476	199,5000	215,7073	224,5832	230,1619	233,9860	236,7684	238,8827	240,5433	241,8817
2	18,5128	19,0000	19,1643	19,2468	19,2964	19,3295	19,3532	19,3710	19,3848	19,3959
3	10,1280	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123	8,7855
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,0410	5,9988	5,9644
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,0990	4,0600
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660	3,7870	3,7257	3,6767	3,6365
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881	3,3472
9	5,1174	4,2565	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789	3,1373
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,4780	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204	2,9782
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,9480	2,8962	2,8536
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964	2,7534
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144	2,6710
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458	2,6022
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876	2,5437
16	4,4940	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377	2,4935
17	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,8100	2,6987	2,6143	2,5480	2,4943	2,4499
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563	2,4117
19	4,3807	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227	2,3779
20	4,3512	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5990	2,5140	2,4471	2,3928	2,3479
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,3660	2,3210
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419	2,2967
23	4,2793	3,4221	3,0280	2,7955	2,6400	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201	2,2747
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002	2,2547
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821	2,2365
26	4,2252	3,3690	2,9752	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655	2,2197
27	4,2100	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501	2,2043
28	4,1960	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,2360	2,1900
29	4,1830	3,3277	2,9340	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2783	2,2229	2,1768
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107	2,1646
40	4,0847	3,2317	2,8387	2,6060	2,4495	2,3359	2,2490	2,1802	2,1240	2,0772
60	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2541	2,1665	2,0970	2,0401	1,9926
120	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2899	2,1750	2,0868	2,0164	1,9588	1,9105
∞	3,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799	1,8307

%5 anlam seviyesinde

sd	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	243,9060	245,9499	248,0131	249,0518	250,0951	251,1432	252,1957	253,2529	254,3144
2	19,4125	19,4291	19,4458	19,4541	19,4624	19,4707	19,4791	19,4874	19,4957
3	8,7446	8,7029	8,6602	8,6385	8,6166	8,5944	8,5720	8,5494	8,5264
4	5,9117	5,8578	5,8025	5,7744	5,7459	5,7170	5,6877	5,6581	5,6281
5	4,6777	4,6188	4,5581	4,5272	4,4957	4,4638	4,4314	4,3985	4,3650
6	3,9999	3,9381	3,8742	3,8415	3,8082	3,7743	3,7398	3,7047	3,6689
7	3,5747	3,5107	3,4445	3,4105	3,3758	3,3404	3,3043	3,2674	3,2298
8	3,2839	3,2184	3,1503	3,1152	3,0794	3,0428	3,0053	2,9669	2,9276
9	3,0729	3,0061	2,9365	2,9005	2,8637	2,8259	2,7872	2,7475	2,7067
10	2,9130	2,8450	2,7740	2,7372	2,6996	2,6609	2,6211	2,5801	2,5379
11	2,7876	2,7186	2,6464	2,6090	2,5705	2,5309	2,4901	2,4480	2,4045
12	2,6866	2,6169	2,5436	2,5055	2,4663	2,4259	2,3842	2,3410	2,2962
13	2,6037	2,5331	2,4589	2,4202	2,3803	2,3392	2,2966	2,2524	2,2064
14	2,5342	2,4630	2,3879	2,3487	2,3082	2,2664	2,2229	2,1778	2,1307
15	2,4753	2,4034	2,3275	2,2878	2,2468	2,2043	2,1601	2,1141	2,0658
16	2,4247	2,3522	2,2756	2,2354	2,1938	2,1507	2,1058	2,0589	2,0096
17	2,3807	2,3077	2,2304	2,1898	2,1477	2,1040	2,0584	2,0107	1,9604
18	2,3421	2,2686	2,1906	2,1497	2,1071	2,0629	2,0166	1,9681	1,9168
19	2,3080	2,2341	2,1555	2,1141	2,0712	2,0264	1,9795	1,9302	1,8780
20	2,2776	2,2033	2,1242	2,0825	2,0391	1,9938	1,9464	1,8963	1,8432
21	2,2504	2,1757	2,0960	2,0540	2,0102	1,9645	1,9165	1,8657	1,8117
22	2,2258	2,1508	2,0707	2,0283	1,9842	1,9380	1,8894	1,8380	1,7831
23	2,2036	2,1282	2,0476	2,0050	1,9605	1,9139	1,8648	1,8128	1,7570
24	2,1834	2,1077	2,0267	1,9838	1,9390	1,8920	1,8424	1,7896	1,7330
25	2,1649	2,0889	2,0075	1,9643	1,9192	1,8718	1,8217	1,7684	1,7110
26	2,1479	2,0716	1,9898	1,9464	1,9010	1,8533	1,8027	1,7488	1,6906
27	2,1323	2,0558	1,9736	1,9299	1,8842	1,8361	1,7851	1,7306	1,6717
28	2,1179	2,0411	1,9586	1,9147	1,8687	1,8203	1,7689	1,7138	1,6541
29	2,1045	2,0275	1,9446	1,9005	1,8543	1,8055	1,7537	1,6981	1,6376
30	2,0921	2,0148	1,9317	1,8874	1,8409	1,7918	1,7396	1,6835	1,6223
40	2,0035	1,9245	1,8389	1,7929	1,7444	1,6928	1,6373	1,5766	1,5089
60	1,9174	1,8364	1,7480	1,7001	1,6491	1,5943	1,5343	1,4673	1,3893
120	1,8337	1,7505	1,6587	1,6084	1,5543	1,4952	1,4290	1,3519	1,2539
∞	1,7522	1,6664	1,5705	1,5173	1,4591	1,3940	1,3180	1,2214	1,0000

Ek-5

K Test İstatistiğinin Kritik Değer Tablosu

Grup Sayısı (k)	Gözlem Sayısı (n)	$u_{\alpha \cong 0,1}$	$u_{\alpha \cong 0,05}$	$u_{\alpha \cong 0,01}$
2	**10**	9,82	12,04	16,77
	15	12,26	14,89	20,39
	20	14,30	17,28	23,44
	25	16,07	19,37	26,13
	30	17,68	21,26	28,56
	40	20,51	24,61	32,88
	50	22,99	27,55	36,70
	60	25,24	30,21	40,13
	70	27,29	32,66	43,31
3	**10**	12,37	14,54	19,15
	15	15,40	17,94	23,23
	20	17,94	20,78	26,67
	25	20,14	23,27	29,70
	30	22,13	25,53	32,45
	40	25,65	29,51	37,32
4	**10**	13,90	16,02	20,55
	15	17,27	19,73	24,91
	20	20,08	22,84	28,58
	25	22,54	25,57	31,82
	30	24,76	28,03	34,75
5	**10**	14,98	17,07	21,55
	15	18,58	21,00	26,11
	20	21,59	24,29	29,94
	25	24,23	27,19	33,32
	30	26,61	29,80	36,38

Ek-6

M Test İstatistiğinin Kritik Değer Tablosu

Grup Sayısı (k)	Gözlem Sayısı (n)	$u_{\alpha \cong 0,1}$	$u_{\alpha \cong 0,05}$	$u_{\alpha \cong 0,01}$
3	***10***	9,177	10,481	13,029
	20	12,978	14,822	18,426
	30	15,897	18,154	22,566
	40	18,356	20,962	26,058
	50	20,523	23,437	29,133
	60	22,481	25,673	31,915
	70	24,283	27,731	34,472
	80	25,959	29,645	36,852
	90	27,534	31,444	39,086
	100	29,023	33,144	41,203
	1000	91,780	104,813	130,295
4	***10***	10,247	11,489	13,922
	20	14,491	16,247	19,689
	30	17,748	19,899	24,115
	40	20,494	22,978	27,845
	50	22,913	25,690	31,132
	60	25,100	28,142	34,103
	70	27,111	30,397	36,836
	80	28,983	32,495	39,379
	90	30,741	34,467	41,768
	100	32,404	36,331	44,028
	1000	102,471	114,890	139,228
5	***10***	10,999	12,198	14,555
	20	15,555	17,251	20,585
	30	19,051	21,129	25,210
	40	21,998	24,397	29,110
	50	24,595	27,277	32,546
	60	26,942	29,881	35,653
	70	29,101	32,275	38,509
	80	31,110	34,503	41,168
	90	32,997	36,596	43,666
	100	34,782	38,576	46,028
	1000	109,992	121,989	145,554
6	***10***	11,576	12,744	15,043
	20	16,371	18,023	21,274
	30	20,050	22,073	26,055
	40	23,052	25,488	30,086
	50	25,885	28,497	33,637
	60	28,355	31,216	36,847
	70	30,627	33,717	39,800
	80	32,742	36,046	42,548
	90	34,728	38,232	45,129
	100	36,607	40,300	47,570
	1000	115,760	127,442	150,430

Ek-7

N Test İstatistiğinin Kritik Değer Tablosu

Grup Sayısı (k)	Gözlem Sayısı (n)	$u_{\alpha \cong 0,1}$	$u_{\alpha \cong 0,05}$	$u_{\alpha \cong 0,01}$
2	***10***	14,673	17,722	24,004
	15	17,983	21,626	29,023
	20	20,773	24,925	33,293
	25	23,232	27,837	37,069
	30	25,454	30,472	40,493
	35	27,497	32,896	43,648
	40	29,399	35,154	46,591
	50	32,874	39,282	51,977
	60	36,016	43,016	56,855
	70	38,904	46,451	61,346
	80	41,593	49,649	65,530
	90	44,118	52,653	69,462
	100	46,506	55,494	73,183
3	***10***	18,402	21,302	27,305
	15	22,512	25,953	32,968
	20	25,980	29,887	37,780
	25	29,040	33,361	42,041
	30	31,810	36,505	45,906
	40	36,724	42,096	52,791
	50	41,060	47,026	58,875
	60	44,970	51,487	64,384
	70	48,567	55,585	69,421
4	***10***	20,590	23,411	29,260
	15	25,181	28,500	35,305
	20	29,051	32,806	40,440
	25	32,464	36,610	44,988
	30	35,550	40,053	49,114
5	***10***	22,147	24,901	30,651
	15	27,060	30,298	36,963
	20	31,211	34,866	42,330

Ek-8

Olabilirlik Oran Testinin Kritik Değer Tablosu

Grup Sayısı (k)	Gözlem Sayısı (n)	%10		%5	
		t_1	t_2	t_1	t_2
2	10	0,320087	0,6799134	0,2886432	0,7113567
	15	0,352010	0,6479900	0,3253149	0,6746850
	20	0,371362	0,6286380	0,3478024	0,6521977
	25	0,384691	0,6153090	0,3633767	0,6366217
	30	0,394590	0,6054150	0,3749831	0,6250170
	40	0,408543	0,5914578	0,3914100	0,6085924
	50	0,418110	0,5818900	0,4026990	0,5973020

Grup Sayısı (k)	Gözlem Sayısı (n)	%10	%5
		c^*	c^*
3	10	0,02927	0,02727
	15	0,03171	0,03025
	20	0,03298	0,03184
	25	0,03376	0,03283
	30	0,03430	0,03350
	40	0,03497	0,03436
	50	0,03537	0,03488
4	10	0,002841	0,002622
	15	0,003165	0,003000
	20	0,003337	0,003207
	25	0,003446	0,003338
	30	0,003520	0,003427
	40	0,003612	0,003541
	50	0,003669	0,003612
5	10	0,0002153	0,0001974
	15	0,0002464	0,0002324
	20	0,0002629	0,0002519
	25	0,0002736	0,0002643
	30	0,0002809	0,0002729
	40	0,0002902	0,0002840
	50	0,0002960	0,0002910