T.C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE BAZI UYGULAMALARI

NEJLA ÇALIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

KONYA, 2010

T.C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE BAZI UYGULAMALARI

NEJLA ÇALIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI

KONYA, 2010

Bu tez 16 / 04 / 2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından

oy birliği / [redacted] ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. E. Gökçen KOÇER	Doç. Dr. Süleyman SOLAK	Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE BAZI UYGULAMALARI

NEJLA ÇALIK

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

İlköğretim Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. E. Gökçen KOÇER

2010, 41 Sayfa

Jüri: Yrd. Doç. Dr. E. Gökçen KOÇER

Doç. Dr. Süleyman SOLAK

Doç. Dr. Cengiz ÇINAR

Bu çalışmada, ortogonal olma özelliğine sahip Chebyshev polinomlarının dört farklı türünün bazı temel özellikleri verilmiştir. Chebyshev polinomları ile adi diferansiyel denklemleri içeren başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümleri için yeni yaklaşımlar tanımlanmıştır. Ayrıca ötelenmiş Chebyshev polinomu ve bazı özellikleri kullanılarak dalga denklemine Chebyshev-Tau yöntemi uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Chebyshev polinomları, Ötelenmiş Chebyshev Polinomları, Taylor açılımı, Diferansiyel denklemler, Chebyshev-Tau yöntemi, Nümerik analiz.

ABSTRACT

Msc. Thesis

CHEBYSHEV POLYNOMIALS AND ITS SOME APPLICATIONS

NEJLA CALIK

Selcuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Elementary Education

Advisor: Assistant Prof. E. Gokcen KOCER

2010, 41 Pages

Jury: Assist. Prof. Dr. E. Gokcen KOCER

Assoc. Prof. Dr. Süleyman SOLAK

Assoc. Prof. Dr. Cengiz CINAR

In this study, some basic properties of the four kinds of the orthogonal Chebyshev polynomials are given. New approaches for the numerical solutions of the initial value problems are defined by Chebyshev polynomials. Also Chebyshev-Tau method is applied to the wave equation by using the Shifted Chebyshev polynomial and its some properties.

Key Words: Chebyshev polynomials, Shifted Chebyshev polynomials, Taylor expansion, Differential equations, Chebyshev-Tau method, Numerical analysis.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Yrd. Doç. Dr. Emine Gökçen KOÇER tarafından yönetilerek Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur. Bu çalışma süresince bilimsel bilgi, düşünce ve önerilerinden yararlandığım, tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Emine Gökçen KOÇER'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca en kötü zamanlarımda desteğini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan çok değerli arkadaşım Yusuf GÜREFE'ye, babam Muharrem ÇALIK'a, annem Hacer ÇALIK'a, bütün aileme ve bilimsel çalışmalarım süresince maddi desteklerinden ötürü TÜBİTAK-BİDEB' e sonsuz teşekkür ederim.

Nejla ÇALIK
KONYA, 2010

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ 1

2.CHEBYSHEV POLİNOMLARININ TANIMI VE BAZI ÖZELLİKLERİ 3

2.1.Birinci Çeşit Chebyshev Polinomu 3

2.2.İkinci Çeşit Chebyshev Polinomu 7

2.3.Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomu 11

2.4. Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomu 13

2.5. Ötelenmiş Chebyshev Polinomları 15

2.5.1. $T_n^*, U_n^*, V_n^*, W_n^*$ ötelenmiş Chebyshev Polinomları 15

2.5.2. Genel $[a,b]$ aralığı için Chebyshev Polinomları 17

3. CHEBYSHEV POLİNOMLARI İLE NÜMERİK YAKLAŞIMLAR 18

4. CHEBYSHEV TAU METODU İLE DALGA DENKLEMİNE UYGULAMA 28

4.1. Ötelenmiş *Chebyshev* Polinomlarının İşlemsel Özellikleri 28

SONUÇ VE ÖNERİLER 38

KAYNAKLAR 39

1.GİRİŞ

Chebyshev polinomları ilk olarak ünlü Rus matematikçi *Pafnuty Lvovich Chebyshev* (1821-1894) tarafından tanımlanmış ve nümerik analizin etkin matematikçilerinden olan *Corneilus Lanczos* tarafından da 1930'lu yıllarda sayısal analize uygulanmaya başlanmış ve pratik hesaplamalar kolaylıkla yapılmıştır. İlerleyen yıllarda bilgisayarlar teknolojisinin ve kullanımının yaygınlaşmasıyla bu gelişime ileri bir boyut kazandırılmıştır. Böylece *Chebyshev* polinom ve serilerinin kullanımı üzerine yapılan çalışmaların sayısı hızla artmıştır. Özellikle, yaklaştırma teorisi, integral denklemlerinin yaklaşık çözümleri, fark denklemlerinin yaklaşık çözümleri, interpolasyon ve özellikle adi ve kısmi diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için *Chebyshev* polinomları kullanılmıştır.

C. Lanczos 1938 yılında yaptığı çalışmada bir polinom yaklaşımı ortaya koyarak yaklaştırma teorisinde çok önemli bir adım atmıştır. Bu yaklaşımın ardından adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık sayısal çözümleri üzerine başta *C. W. Clenshaw* (1956; 1957; 1962) ve *Sezer* (1985; 1989; 1996 vb.) olmak üzere pek çok matematikçi uygulama yapmıştır. Öte yandan *El-Gendi* (1969) doğrusal adi diferansiyel denklemler, integral ve integro diferansiyel denklemlerin *Chebyshev* polinomlarıyla matris çözümleri için yeni yaklaşımlar ortaya koymuştur. Bu yaklaşım bilgisayar teknolojisiyle ortaya çıkan programlama teknikleri ile üzerinde çok fazla çalışılan bir konu haline gelmiştir. *Clenshaw* (1957), *Mason* (1967), *Sezer* (1996) ve diğer pek çok bilim adamının integral ve integro diferansiyel denklemlerin çözümü için yaptığı çalışmalar *Chebyshev* polinomlarının önemini artırmıştır.

Son yıllarda *Denghan* (2008) çeşitli doğrusal kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için yeni *Chebyshev* polinom yaklaşımları uygulamaktadır. *Denghan* (2009)'ın bu yaklaşımlarından en önemlisi ötelenmiş *Chebyshev* polinomları ile geliştirilen *Chebyshev-Tau* yöntemidir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, *Chebyshev* polinomlarının dört farklı çeşidinin, ötelenmiş *Chebyshev* polinomlarının temel tanım ve özellikleri verilmiş ve tezin üçüncü bölümünde herbiri için adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri üzerine bazı yaklaşımlar ortaya konulmuştur.

Tez çalışmasının dördüncü bölümünde, *Chebyshev-Tau* polinomu ile doğrusal homojen olmayan dalga denklemine bir yaklaştırma yapılmış ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Tezin son bölümünde ise, yapılan tüm uygulamalara yönelik olarak sonuç ve öneriler yer almaktadır.

2. CHEBYSHEV POLİNOMLARININ TANIMI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Nümerik analizde önemli uygulamaları olan *Chebyshev* polinomlarının dört farklı türü bulunmaktadır. Bu bölümde *Chebyshev* polinomlarının her bir türünün ve ötelenmiş *Chebyshev* polinomlarının tanımı, içerdiği rekürans bağıntıları, türev ve integral kavramları ile ilgili bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu kavramlarla ilgili bazı teoremler ele alınmıştır.

2.1. Birinci Çeşit Chebyshev Polinomu

Tanım 2.1.1: $n \geq 0$, $x \in [-1,1]$ olmak üzere,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{2.1}$$

ile tanımlanan polinoma birinci çeşit *Chebyshev* polinomu denir (Suli ve Mayers 2003).

Eğer (2.1) de $x = \cos\theta$ alınırsa

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \tag{2.2}$$

formülü elde edilir (Mason ve Handscomb 2003).

Chebyshev polinomları trigonometrik fonksiyonlar ile tanımlandığından θ değişkeni $[-\pi, \pi]$ aralığındadır. Böylece x değişkeni $[-1,1]$ aralığında tanımlanır.

Tanım 2.1.2: $x = \cos\theta$, $n \in Z$ olmak üzere

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye *De Moivre* formülü denir (Mason ve Hanscomb, 2003).

$T_n(x)$ değerleri (2.2) den bulunabileceği gibi (2.3) den de aşağıdaki gibi bulunabilir:

i) $-\pi \leq \theta \leq \pi$ için $x = \cos\theta$ ve $\sin\theta = \sqrt{1-x^2} \geq 0$ olmak üzere *binom açılımı* tanımından

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n$$

$$= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} i\sqrt{1-x^2} + \binom{n}{2} x^{n-2} \left(i\sqrt{1-x^2}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n} \left(i\sqrt{1-x^2}\right)^n$$

formülü elde edilir.

Buradan

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} i\sqrt{1-x^2} + \binom{n}{2} x^{n-2}\left(x^2-1\right) + \ldots$$

$$+\binom{n}{n}\left(x^2-1\right)^{\frac{n}{2}} \tag{2.4}$$

formülüne ulaşılır. (2.4) düzenlenerek

$$\cos n\theta = x^n + \binom{n}{2} x^{n-2}\left(x^2-1\right) + \binom{n}{4} x^{n-4}\left(x^2-1\right)^2 + \ldots \tag{2.5}$$

ve

$$\sin n\theta = \binom{n}{1} x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + \binom{n}{3} x^{n-3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + \ldots \tag{2.6}$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılar kullanılarak

$$T_n(x) = \cos n\theta = x^n + \binom{n}{2} x^{n-2}\left(x^2-1\right) + \ldots + \binom{n}{n}\left(x^2-1\right)^{\frac{n}{2}},\ (n = 0,1,\ldots) \tag{2.7}$$

formülüne ulaşılır. Buradan da $n = 0,1,\ldots$ için Tablo 2.1 de verildiği gibi $T_n(x)$ polinomları elde edilir.

Tablo 2.1 Birinci çeşit *Chebyshev* polinomları

n	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2-1$
3	$4x^3-3x$
4	$8x^4-8x^2+1$
5	$16x^5-20x^3+5x$
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$
⋮	⋮

Teorem 2.1.1: $n \geq 0$ olmak üzere $T_n(1) = 1$ ve $T_n(-1) = (-1)^n$ dir (Mason ve Handscomb 2003).

Teorem 2.1.2: Birinci çeşit *Chebyshev* polinomu $T_n(x)$ in *Binet* formülü

$$T_n(x)=\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2} \tag{2.8}$$

şeklindedir (Sinwell 2004).

Teorem 2.1.3: $T_n(x)$, birinci çeşit *Chebyshev* polinomu olmak üzere

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}\left(x^2-1\right)^k x^{n-2k} \tag{2.9}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

İspat: (2.8) den

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left(\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)+\binom{n}{2}x^{n-2}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+\ldots+\binom{n}{n}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\binom{n}{0}x^n-\binom{n}{1}x^{n-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)+\binom{n}{2}x^{n-2}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-\ldots+\binom{n}{n}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$$

$$=\frac{1}{2}2\left(\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{2}x^{n-2}\left(x^2-1\right)+\ldots+\binom{n}{n}\left(x^2-1\right)^{\frac{n}{2}}\right)$$

dir. Buradan da

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}\left(x^2-1\right)^k x^{n-2k}$$

formülü elde edilir.

Teorem 2.1.4: $n\geq 2$ ve $x\in[-1,1]$ iken birinci çeşit *Chebyshev* polinomları için rekürans bağıntısı

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x) \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlıdır (Mason ve Handscomb 2003).

İspat: Trigonometrik dönüşüm formüllerinden

$$\cos n\theta=\cos\left((n-1)\theta+\theta\right)=\cos\theta\cos(n-1)\theta-\sin\theta\sin(n-1)\theta,$$

$$\cos(n-2)\theta=\cos\left((n-1)\theta-\theta\right)=\cos\theta\cos(n-1)\theta+\sin\theta\sin(n-1)\theta$$

kullanılarak

$$\cos n\theta=2\cos\theta\cos(n-1)\theta-\cos(n-2)\theta$$

elde edilir. (2.2) bağıntısından

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısına ulaşılır.

$[-1,1]$ aralığında *n.* dereceden bir *Chebyshev* polinomu *Chebyshev kökler* olarak adlandırılan *n* farklı köke sahiptir.

Tanım 2.1.3: *Chebyshev* polinomlarının kökleri interpolasyon polinomlarındaki düğüm noktalarıdır. Bu düğüm noktalarına *Chebyshev* düğümleri denir (Mason ve Handscomb 2003).

Tanım 2.1.4: $n \geq 1$ ve $x \in [-1,1]$ için birinci çeşit *Chebyshev* polinomunu sıfır yapan x değerleri

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad (k = 0,1,...,n) \tag{2.11}$$

formülü ile hesaplanır (Mason ve Handscomb 2003).

Teorem 2.1.5: $x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için birinci çeşit *Chebyshev* polinomunun integrali

$$\int T_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right) \tag{2.12}$$

şeklindedir (Mason ve Handscomb 2003).

İspat: $x = \cos\theta$ için

$$dx = -\sin\theta d\theta$$

olur. Bu bağıntı kullanılıp (2.2) denkleminin her iki tarafının integrali alınarak

$$\int T_n(x)\,dx = -\int \cos n\theta \sin\theta d\theta$$

eşitliği, trigonometrik dönüşüm formülleri kullanılarak da

$$\int T_n(x)\,dx = -\int \frac{1}{2}\left(\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta\right)d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right)$$

ifadesi elde edilir. Buradan da aşağıdaki integral formülü elde edilir.

$$\int T_n(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right), & n \neq 1 \\ \frac{1}{4} T_2(x), & n = 1. \end{cases}$$

2.2 İkinci Çeşit Chebyshev Polinomu

Tanım 2.2.1: $x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için,

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \tag{2.13}$$

şeklindeki polinoma ikinci çeşit *Chebyshev* polinomu denir (Mason ve Handscomb 2003).

İkinci çeşit *Chebyshev* polinomunun elemanlarından birkaçı Tablo 2.2 de verilmiştir.

Tablo 2.2 İkinci çeşit *Chebyshev* polinomları

n	$U_n(x)$
0	1
1	$2x$
2	$4x^2 - 1$
3	$8x^3 - 4x$
4	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
6	$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
⋮	⋮

Teorem 2.2.1: $U_n(x)$ İkinci çeşit *Chebyshev* polinomunun *Binet* formülü

$$U_n(x) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} \tag{2.14}$$

şeklindedir (Sinwell 2004).

Teorem 2.2.2: $U_n(x)$, ikinci çeşit *Chebyshev* polinomu olmak üzere

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n+1}{2k+1}x^{n-2k}\left(x^2-1\right)^k \tag{2.15}$$

dir (Sinwell 2004).

İspat: (2.14) den

$$U_n(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\binom{n+1}{0}x^{n+1}+\binom{n+1}{1}x^n\left(\sqrt{x^2-1}\right)+\binom{n+1}{2}x^{n-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+\ldots+\binom{n+1}{n+1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\binom{n+1}{0}x^{n+1}-\binom{n+1}{1}x^n\left(\sqrt{x^2-1}\right)+\binom{n+1}{2}x^{n-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-\ldots-\binom{n+1}{n+1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2(\sqrt{x^2-1})}2\left(\binom{n+1}{1}x^n\left(\sqrt{x^2-1}\right)+\ldots+\binom{n+1}{n+1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right)$$

$$=\binom{n+1}{1}x^n+\binom{n+1}{3}x^{n-2}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+\ldots+\binom{n+1}{n+1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^n$$

$$=\binom{n+1}{1}x^n+\binom{n+1}{3}x^{n-2}\left(x^2-1\right)+\ldots+\binom{n+1}{n+1}\left(x^2-1\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n+1}{2k+1}x^{n-2k}\left(x^2-1\right)^k$$

olur. Dolayısıyla

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n+1}{2k+1}x^{n-2k}\left(x^2-1\right)^k$$

dir.

Teorem 2.2.3: $n\geq 2$ ve $x=\cos\theta$ için

$$U_n(x)=2xU_{n-1}(x)-U_{n-2}(x) \tag{2.16}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

İspat: (2.13) den

$$U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},\qquad U_{n-1}(x)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta},\qquad U_{n-2}(x)=\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$$

dir. Buradan

$$U_n(x)+U_{n-2}(x)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta \sin n\theta}{\sin\theta}$$

$$= 2xU_{n-1}(x)$$

dir. Dolayısıyla

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

elde edilir.

Tanım 2.2.2: $n \geq 1$ ve $x \in [-1,1]$ için ikinci çeşit *Chebyshev* polinomunu sıfır yapan x değerleri

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \qquad (k = 0,1,...,n) \tag{2.17}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

Teorem 2.2.4: $x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için ikinci çeşit *Chebyshev* polinomunun integrali

$$\int U_n(x)\,dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} \tag{2.18}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

İspat: $x = \cos\theta$ için

$$dx = -\sin\theta d\theta \tag{2.19}$$

olur. (2.13) de her iki tarafın integrali alınıp (2.19) kullanılırsa

$$\int U_n(x)\,dx = -\int \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\sin\theta d\theta$$

$$= \left(\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}\right)$$

$$= \frac{T_{n+1}(x)}{n+1}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\int U_n(x)\,dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1}$$

dir.

Teorem 2.2.5: $x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için ikinci çeşit *Chebyshev* polinomunun türevi

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2 - 1} \tag{2.20}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

İspat: (2.13) ve (2.19) dan

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)\cos(n+1)\theta\sin\theta - \cos\theta\sin(n+1)\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= \left(\frac{(n+1)\cos(n+1)\theta\sin\theta - \cos\theta\sin(n+1)\theta}{\sin^2\theta}\right)\frac{-1}{\sin\theta}dx$$

$$= \frac{(n+1)\cos(n+1)\theta - \cos\theta\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}}{-\sin^2\theta}dx$$

$$= \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2 - 1}dx$$

dir. Buradan

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2 - 1}$$

olur.

Teorem 2.2.6: $x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için birinci çeşit $T_n(x)$ *Chebyshev* polinomunun türevi

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1}(x) \tag{2.21}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

İspat: (2.1) ve (2.19) dan

$$T_n'(x)dx = n(-\sin n\theta)d\theta$$

$$= n\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)dx$$

$$= nU_{n-1}(x)dx$$

olur. Dolayısıyla birinci çeşit *Chebyshev* polinomu $T_n(x)$ ' in türevi

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1}(x)$$

olarak elde edilir.

2.3 Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomu

Tanım 2.3.1: $x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için,

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} \tag{2.22}$$

şeklindeki polinoma üçüncü çeşit *Chebyshev* polinomu denir (Mason ve Handscomb 2003).

Teorem 2.3.1: $n \geq 2$ ve $x = \cos\theta$ için

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x) \tag{2.23}$$

dir.

İspat: Trigonometrik dönüşüm formüllerinden yararlanılarak teorem ispatlanır.

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \cos\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta = 2\cos\theta\cos\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta$$

$$\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \cos\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = 2\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)\cos\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$$

eşitliği söz konusudur. Bu eşitlik kullanılarak

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x),\ n = 2,3,....$$

formülü bulunur. Üçüncü çeşit *Chebyshev* polinomunun elemanları (2.22) den bulunabileceği gibi (2.23) den de bulunabilir. Üçüncü çeşit *Chebyshev* polinomunun ilk birkaç elemanı Tablo 2.3 de verilmiştir.

Tablo 2.3 Üçüncü çeşit *Chebyshev* polinomları

n	$V_n(x)$
0	1
1	$2x-1$
2	$4x^2-2x-1$
3	$8x^3-4x^2-4x+1$
4	$16x^4-8x^3-12x^2+4x+1$
5	$32x^5-16x^4-32x^3+12x^2+6x-1$
6	$64x^6-32x^5-80x^4+32x^3+24x^2-6x-1$
⋮	⋮

Tanım 2.3.2: $n \geq 1$ ve $x \in [-1,1]$ için üçüncü çeşit *Chebyshev* polinomunu sıfır yapan x değerleri

$$x_k = \cos \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{3}{2}}, \qquad (k=1,2,...,n+1) \tag{2.24}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

Teorem 2.3.2: $x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için üçüncü çeşit *Chebyshev* polinomunun integrali

$$\int V_n(x)\,dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n} \tag{2.25}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

İspat: (2.22), (2.19) ve trigonometrik dönüşüm formüllerinden

$$\int V_n(x) = -\int \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\sin\theta\, d\theta$$

$$= -\int \frac{\left(\cos n\theta\cos\frac{\theta}{2} - \sin n\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$= \int \left(\sin(n+1)\theta - \sin n\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\cos n\theta}{n}$$

olur. Buradan da

$$\int V_n(x)\,dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n}$$

elde edilir.

2.4 Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomu

Tanım 2.4.1: $x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için,

$$W_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \tag{2.26}$$

şeklindeki polinoma dördüncü çeşit *Chebyshev* polinomu denir (Mason ve Handscomb 2003).

Teorem 2.4.1: $n \geq 2$ ve $x = \cos\theta$ için

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x) \tag{2.27}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

İspat: Trigonometrik dönüşüm formüllerinden

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \sin\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta = 2\cos\theta\sin\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta$$

dönüşüm formülü kullanılırsa $n \geq 2$ için

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \quad (n \geq 2)$$

elde edilir.

Dördüncü çeşit *Chebyshev* polinomunun elemanları (2.26) dan bulunabileceği gibi (2.27) den de bulunabilir. Dördüncü çeşit *Chebyshev* polinomunun ilk birkaç elemanı Tablo 2.4 de verilmiştir.

Tablo 2.4 Dördüncü çeşit *Chebyshev* polinomları

n	$W_n(x)$
0	1
1	$2x+1$
2	$4x^2+2x-1$
3	$8x^3+4x^2-4x-1$
4	$16x^4+8x^3-12x^2-4x+1$
5	$32x^5+16x^4-32x^3-12x^2+6x+1$
6	$64x^6+32x^5-80x^4-32x^3+24x^2+6x-1$
⋮	⋮

Tanım 2.4.2: $n \geq 1$ ve $x \in [-1,1]$ için dördüncü çeşit *Chebyshev* polinomunu sıfır yapan x değerleri

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}, \qquad (k=1,2,...,n) \tag{2.28}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

Teorem 2.4.2: $x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için dördüncü çeşit *Chebyshev* polinomunun integrali

$$\int W_n(x)\,dx = -\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n} \tag{2.29}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

İspat: (2.26), (2.19) ve trigonometrik dönüşüm formüllerinden

$$\int W_n(x) = -\int \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\sin\theta\, d\theta$$

$$= -\int \frac{\left(\sin n\theta\cos\frac{\theta}{2}+\cos n\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$= \int \left(\sin n\theta + \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta\right)d\theta$$

$$= -\frac{\cos n\theta}{n} - \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}$$

olur. Buradan

$$\int W_n(x)\,dx = -\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n}$$

elde edilir.

2.5 Ötelenmiş Chebyshev Polinomları

2.5.1 $T_n^*, U_n^*, V_n^*, W_n^*$ Ötelenmiş Chebyshev Polinomları

Tanım 2.5.1.1: $[0,1]$ aralığında işlem yapmanın $[-1,1]$ aralığında işlem yapmaktan daha uygun olduğu durumda $[-1,1]$ aralığındaki s değişkeni $[0,1]$ aralığındaki bağımsız x değişkenine

$$s = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1+s)$$

bağıntısı kullanılarak dönüştürülür. Bu dönüşüm $[0,1]$ aralığında tanımlı x değişkenine bağlı n. dereceden

$$T_n^*(x) = T_n(s) = T_n(2x-1) \tag{2.30}$$

polinomuna birinci çeşit ötelenmiş *Chebyshev* polinomu denir (Mason ve Handscomb 2003).

(2.2) den $T_n^*(x)$ değerleri $n = 0,1,2,3,...$ için Tablo 2.5 de verilmiştir.

Tablo 2.5 Ötelenmiş *Chebyshev* polinomları

n	$T_n^*(x)$
0	1
1	$2x-1$
2	$8x^2-8x+1$
3	$32x^3-48x^2+18x-1$
4	$128x^4-256x^3+88x^2+40x+1$
5	$32x^5+16x^4-32x^3-12x^2+6x+1$
6	$64x^6+32x^5-80x^4-32x^3+24x^2+6x-1$
⋮	⋮

Teorem 2.5.1.1: $n \geq 2$ ve $x = \cos\theta$ için

$$T_n^*(x) = 2(2x-1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x), \tag{2.31}$$

dir (Mason ve Handscomb 2003).

Teorem 2.5.1.2 $n \geq 2$ ve $x = \cos\theta$ için

$$T_{2n}(x) = T_n^*(x^2) \tag{2.32}$$

eşitliği sağlanır (Mason ve Handscomb 2003).

İspat: (2.2) kullanılarak aşağıdaki gibi ispat tamamlanır.

$$T_{2n}(x) = \cos 2n\theta = \cos n(2\theta) = T_n(\cos 2\theta) = T_n(2x^2-1) = T_n^*(x^2).$$

Benzer şekilde U_n^*, V_n^*, W_n^* ötelenmiş *Chebyshev* polinomları için

$$U_n(s) = U_n^*(x) = U_n(2x-1)$$

$$V_n(s) = V_n^*(x) = V_n(2x-1)$$

$$W_n(s) = W_n^*(x) = W_n(2x-1)$$

eşitlikleri vardır.

2.5.2 Genel $[a,b]$ aralığı için Chebyshev Polinomları

Bir önceki bölümde $[0,1]$ aralığı dikkate alınarak ötelenmiş *Chebyshev* polinomları tanımlanmıştı. Bu kısımda, daha genel olarak x'in $[a,b]$ aralığını s'nin $[-1,1]$ aralığına uygun hale getirerek

$$s = \frac{2x-(a+b)}{b-a} \tag{2.33}$$

lineer dönüşümü altında bir *Chebyshev* polinomu tanımlanacaktır. s değeri (2.33) ile tanımlanırken, *Chebyshev* polinomları $T_n(s), U_n(s), V_n(s)$ ve $W_n(s)$ şeklindedir.

Örnek 2.5.2.1.: $[1,4]$ aralığında tanımlanan 3. dereceden *Chebyshev* polinomu aşağıdadır.

$$T_3(s) = T_3\left(\frac{2x-5}{3}\right) = 4\left(\frac{2x-5}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2x-5}{3}\right) = \frac{1}{27}\left(32x^3 - 240x^2 + 546x - 365\right).$$

3. CHEBYSHEV POLİNOMLARI İLE NÜMERİK YAKLAŞIMLAR

Bilim ve mühendislikte karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemesinde klasik türevlere bağlı diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Bu bölümde adi diferansiyel denklemlerin çözümlerine yönelik olarak *Chebyshev* polinomlarının çeşitleri ile yaklaşık nümerik çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu nümerik yöntemler *Taylor-Maclaurin* seri açılımı ve *Chebyshev* polinomları kullanılarak tanımlanmıştır. Bu yöntemler kullanılarak bir başlangıç değer problemi çözülmüş ve elde edilen sayısal çözümler ile gerçek çözümler karşılaştırılmıştır.

Matematikte, fonksiyon veya fonksiyonları ve onların herhangi bir değişkene bağlı türevlerini içeren denklemler adi diferansiyel denklemlerdir. *Chebyshev* polinomlarının dört çeşidi de kullanılarak adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri elde edilmiştir.

Tanım 3.1: $k \geq 0$ olmak üzere $[x_0, x]$ kapalı aralığında k. mertebeye kadar diferansiyellenebilir $f(x)$ fonksiyonunun *Taylor* açılımı

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(k)}(x_0)\frac{(x - x_0)^k}{k!} \qquad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. *Taylor* açılımının genelleştirilmiş formülü

$$f(x) \cong \sum_{i=0}^{k} f^{(i)}(x_0)\frac{(x - x_0)^i}{i!} \qquad (3.2)$$

dır (Mason ve Handscomb 2003).

Tanım 3.2: $k \geq 0$ ve $x_0 = 0$ için (3.1) formülü düzenlendiğinde

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x - x_0) + f''(0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(k)}(0)\frac{(x - x_0)^k}{k!} \qquad (3.3)$$

ve (3.2) formülü düzenlendiğinde ise (3.3)' ün genelleştirilmiş formülü $x_0 = 0$ için

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} f^{(i)}(0)\frac{(x)^i}{i!} \qquad (3.4)$$

şeklindedir. Bu bağıntı *Taylor-Maclaurin* açılımı olarak adlandırılabilir (Mason ve Handscomb 2003).

Teorem 3.1: $[-1,1]$ aralığında $f(x)=x^k$ fonksiyonuna yaklaştırılan $(k-1)$. dereceden birinci çeşit *Chebyshev* polinomu için;

$$p_{k-1}(x)=p_k(x)-\frac{2^{1-k}}{k!}T_k(x),\ k\geq 1, \tag{3.5}$$

ikinci çeşit *Chebyshev* polinomu için;

$$p_{k-1}(x)=p_k(x)-\frac{2^{-k}}{k!}U_k(x),\ k\geq 1, \tag{3.6}$$

üçüncü çeşit *Chebyshev* polinomu için;

$$p_{k-1}(x)=p_k(x)-\frac{2^{-k}}{k!}V_k(x),\ k\geq 1, \tag{3.7}$$

dördüncü çeşit *Chebyshev* polinomu için ise;

$$p_{k-1}(x)=p_k(x)-\frac{2^{-k}}{k!}W_k(x),\ k\geq 1 \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Mason ve Handscomb 2003).

Tanım 3.3: f türevlenebilir bir fonksiyon, x_0 başlangıç değeri olmak üzere

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\qquad y(x_0)=y_0 \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanan probleme *başlangıç değer problemi* denir.

Bu kısımda bir başlangıç değer problemi ele alınacaktır. Bu başlangıç değer probleminin her iki tarafı $[x_n,x_{n+1}]$ aralığında integre edilerek

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{dy}{dx}dx=\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y)\,dx$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}dy=\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y)\,dx$$

$$y_{n+1}=y_n+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y)\,dx \tag{3.10}$$

bağıntısı elde edilir. (3.10) integral denklemindeki $f(x,y)$ fonksiyonuna yaklaşık eşit olduğu kabul edilen yani, $f(x,y)\approx p_{k-1}(x)$ biçimindeki $p_{k-1}(x)$ polinomu (3.5), (3.6), (3.7) ve (3.8) den yararlanılarak bulunur. Buradaki $p_k(x)$ polinomları

(3.4) ten, $T_k(x), U_k(x), V_k(x)$ ve $W_k(x)$ *Chebyshev* polinomları ise trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak tanımlanan rekürans bağıntıları ile elde edilir.

$p_{k-1}(x)$ polinomları (3.10) bağıntısında $f(x,y)$ fonksiyonunun yerine yazılarak diferansiyel denklemin yaklaşık sayısal çözümlerini veren algoritmalar elde edilir. Böylece diferansiyel denklemdeki y_{n+1} değerleri sırasıyla $k = 1,2,3,...$ için aşağıdaki bağıntı kullanılarak hesaplanabilir:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_{k-1}(x)\,dx\,. \tag{3.11}$$

(3.5), (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.11) bağıntıları kullanılarak birinci çeşit *Chebyshev* polinomları için;

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(p_k(x) - \frac{2^{1-k}}{k!} T_k(x) \right) dx\,, \tag{3.12}$$

ikinci çeşit *Chebyshev* polinomları için;

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(p_k(x) - \frac{2^{-k}}{k!} U_n(x) \right) dx\,, \tag{3.13}$$

üçüncü çeşit *Chebyshev* polinomları için;

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(p_k(x) - \frac{2^{-k}}{k!} V_n(x) \right) dx\,, \tag{3.14}$$

dördüncü çeşit *Chebyshev* polinomları için ise;

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(p_k(x) - \frac{2^{-k}}{k!} W_n(x) \right) dx \tag{3.15}$$

bağıntıları elde edilir.

Örnek 3.1: $h = 0{,}1$ ve $y(0) = 1$ başlangıç şartı altında tanımlanan

$$y' = f(x,y) = e^x$$

fonksiyonunun nümerik çözümünü *Chebyshev* polinomlarının dört çeşidi için geliştirilen yöntem ile hesaplayalım.

Çözüm: Örnek 3.1 de verilen başlangıç değer probleminin bir tam çözümü

$$y(x) = e^x \tag{3.16}$$

fonksiyonudur. Burada *Chebyshev* polinomlarının dört çeşidi için de elde edilen sayısal sonuçlar incelenmiştir.

a) (3.5) kullanılarak birinci çeşit *Chebyshev* polinomları için aşağıdaki gibi Tablo 3.1 elde edilir.

Tablo 3.1 Birinci çeşit *Chebyshev* polinomları için $p_{k-1}(x)$ yaklaşımları

k	$p_{k-1}(x)$
1	1
2	$x+\frac{5}{4}$
3	$\frac{x^2}{2}+\frac{9x}{8}+1$
4	$\frac{x^3}{6}+\frac{5x^2}{6}+x+\frac{23}{24}$
5	$\frac{x^4}{24}+\frac{17x^3}{96}+\frac{x^2}{2}+\frac{383x}{384}+1$
6	$\frac{x^5}{120}+\frac{21x^4}{480}+\frac{x^3}{6}-\frac{639x^2}{1280}+x+\frac{23041}{23040}$
$\vdots$	$\vdots$

Tablo 3.1 deki polinomlar (3.11) de yerine yazılarak $n \geq 0$ olmak üzere y_{n+1} değerleri sırasıyla;

i) $k=1$ için;

$$y_{n+1} = y_n + h,$$

ii) $k=2$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left(x_{n+1}+x_n\right)h + \frac{5}{4}h,$$

iii) $k=3$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(x_{n+1}{}^3 - x_n{}^3\right) + \frac{9}{16}\left(x_{n+1}+x_n\right)h + h,$$

iv) $k=4$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}\left(x_{n+1}{}^4 - x_n{}^4\right) + \frac{5}{18}\left(x_{n+1}{}^3 - x_n{}^3\right) + \frac{1}{2}\left(x_{n+1}+x_n\right)h + \frac{23}{24}h,$$

v) $k=5$ için;

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{120}\left(x_{n+1}{}^5-x_n{}^5\right)+\frac{17}{384}\left(x_{n+1}{}^4-x_n{}^4\right)+\frac{1}{6}\left(x_{n+1}{}^3-x_n{}^3\right)+\frac{383}{768}\left(x_{n+1}+x_n\right)h+h,$$

vi) $k=6$ için;

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{720}\left(x_{n+1}{}^6-x_n{}^6\right)+\frac{21}{2400}\left(x_{n+1}{}^5-x_n{}^5\right)+\frac{1}{24}\left(x_{n+1}{}^4-x_n{}^4\right)-\frac{639}{3840}\left(x_{n+1}{}^3-x_n{}^3\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(x_{n+1}+x_n\right)h+\frac{23041}{23040}h$$

şeklinde elde edilir.

b) (3.6) kullanılarak ikinci çeşit *Chebyshev* polinomları için aşağıdaki gibi Tablo 3.2 elde edilir.

Tablo 3.2 İkinci çeşit *Chebyshev* polinomları için $p_{k-1}(x)$ yaklaşımları

k	$p_{k-1}(x)$
1	1
2	$x+\frac{9}{8}$
3	$\frac{x^2}{2}+\frac{13x}{12}+1$
4	$\frac{x^3}{6}+\frac{17x^2}{32}+x+\frac{383}{384}$
5	$\frac{x^4}{24}+\frac{21x^3}{120}+\frac{x^2}{2}+\frac{639x}{640}+1$
6	$\frac{x^5}{120}+\frac{25x^4}{576}+\frac{x^3}{6}+\frac{961x^2}{1920}+x+\frac{4609}{4608}$
⋮	⋮

Tablo 3.2 deki polinomlar (3.11) de yerine yazılarak $n\geq 0$ olmak üzere y_{n+1} değerleri sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır:

i) $k=1$ için;

$$y_{n+1}=y_n+h,$$

ii) $k=2$ için;

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}\left(x_{n+1}+x_n\right)h+\frac{9}{8}h\,,$$

iii) $k=3$ için;

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}\left({x_{n+1}}^3-{x_n}^3\right)+\frac{13}{24}\left(x_{n+1}+x_n\right)h+h\,,$$

iv) $k=4$ için;

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{24}\left({x_{n+1}}^4-{x_n}^4\right)+\frac{17}{96}\left({x_{n+1}}^3-{x_n}^3\right)+\frac{1}{2}\left(x_{n+1}+x_n\right)h+\frac{383}{384}h\,,$$

v) $k=5$ için;

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{120}\left({x_{n+1}}^5-{x_n}^5\right)+\frac{21}{480}\left({x_{n+1}}^4-{x_n}^4\right)+\frac{1}{6}\left({x_{n+1}}^3-{x_n}^3\right)+\frac{639}{1280}\left(x_{n+1}+x_n\right)h+h\,,$$

vi) $k=6$ için;

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{720}\left({x_{n+1}}^6-{x_n}^6\right)+\frac{25}{2880}\left({x_{n+1}}^5-{x_n}^5\right)+\frac{1}{24}\left({x_{n+1}}^4-{x_n}^4\right)+\frac{961}{5760}\left({x_{n+1}}^3-{x_n}^3\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(x_{n+1}+x_n\right)h+\frac{4609}{4608}h$$

c)(3.7) kullanılarak üçüncü çeşit *Chebyshev* polinomları için Tablo 3.3 bulunur.

Tablo 3.3 Üçüncü çeşit *Chebyshev* polinomları için $p_{k-1}(x)$ yaklaşımları

k	$p_{k-1}(x)$
1	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{5x}{4}+\frac{9}{8}$
3	$\frac{7x^2}{12}+\frac{13x}{12}+\frac{47}{48}$
4	$\frac{9x^3}{48}+\frac{17x^2}{32}+\frac{95x}{96}+\frac{383}{384}$
5	$\frac{11x^4}{240}+\frac{21x^3}{120}+\frac{159x^2}{320}+\frac{639x}{640}+\frac{3841}{3840}$
6	$\frac{13x^5}{1440}+\frac{25x^4}{576}+\frac{239x^3}{1440}+\frac{961x^2}{1920}+\frac{7681x}{7680}+\frac{46081}{46080}$
⋮	⋮

Tablo 3.3 deki polinomlar (3.11) de yerine yazılarak $n \geq 0$ olmak üzere y_{n+1} değerleri sırasıyla;

i) $k = 1$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2}h,$$

ii) $k = 2$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{5}{8}\left(x_{n+1} + x_n\right)h + \frac{9}{8}h,$$

iii) $k = 3$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{7}{36}\left({x_{n+1}}^3 - {x_n}^3\right) + \frac{13}{24}\left(x_{n+1} + x_n\right)h + \frac{47}{48}h,$$

iv) $k = 4$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{9}{192}\left({x_{n+1}}^4 - {x_n}^4\right) + \frac{17}{96}\left({x_{n+1}}^3 - {x_n}^3\right) + \frac{95}{192}\left(x_{n+1} + x_n\right)h + \frac{383}{384}h,$$

v) $k = 5$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{11}{1200}\left({x_{n+1}}^5 - {x_n}^5\right) + \frac{21}{480}\left({x_{n+1}}^4 - {x_n}^4\right) + \frac{159}{960}\left({x_{n+1}}^3 - {x_n}^3\right) + \frac{639}{1280}\left(x_{n+1} + x_n\right)h + \frac{3841}{3840}h,$$

vi) $k = 6$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{13}{8640}\left({x_{n+1}}^6 - {x_n}^6\right) + \frac{25}{2880}\left({x_{n+1}}^5 - {x_n}^5\right) + \frac{239}{5760}\left({x_{n+1}}^4 - {x_n}^4\right) + \frac{959}{5760}\left({x_{n+1}}^3 - {x_n}^3\right) + \frac{7681}{15360}\left(x_{n+1} + x_n\right)h + \frac{46081}{46080}h$$

şeklinde elde edilir.

d) (3.8) kullanılarak dördüncü çeşit *Chebyshev* polinomları için aşağıdaki gibi Tablo 3.4 elde edilir.

Tablo 3.4 Dördüncü çeşit *Chebyshev* polinomları için $p_{k-1}(x)$ yaklaşımları

k	$p_{k-1}(x)$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3x}{4}+\frac{9}{8}$
3	$\frac{5x^2}{12}+\frac{13x}{12}+\frac{49}{48}$
4	$\frac{7x^3}{48}+\frac{17x^2}{32}+\frac{97x}{96}+\frac{583}{584}$
5	$\frac{9x^4}{240}+\frac{21x^3}{120}+\frac{161x^2}{320}+\frac{639x}{640}+\frac{3639}{3640}$
6	$\frac{11x^5}{1440}+\frac{25x^4}{576}+\frac{241x^3}{1440}+\frac{959x^2}{1920}+\frac{7679x}{7680}+\frac{46081}{46080}$
⋮	⋮

Tablo 3.4 deki polinomlar (3.11) de yerine yazılarak $n \geq 0$ olmak üzere y_{n+1} değerleri sırasıyla;

i) $k=1$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h,$$

ii) $k=2$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{8}(x_{n+1}+x_n)h + \frac{9}{8}h,$$

iii) $k=3$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{5}{36}\left(x_{n+1}{}^3 - x_n{}^3\right) + \frac{13}{24}(x_{n+1}+x_n)h + \frac{49}{48}h,$$

iv) $k=4$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{9}{192}\left(x_{n+1}{}^4 - x_n{}^4\right) + \frac{17}{96}\left(x_{n+1}{}^3 - x_n{}^3\right) + \frac{95}{192}(x_{n+1}+x_n)h + \frac{383}{384}h,$$

v) $k=5$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{9}{1200}\left(x_{n+1}{}^5 - x_n{}^5\right) + \frac{21}{480}\left(x_{n+1}{}^4 - x_n{}^4\right) + \frac{161}{960}\left(x_{n+1}{}^3 - x_n{}^3\right) + \frac{639}{1280}\left(x_{n+1} + x_n\right)h + \frac{3639}{3640}h,$$

vi) $k = 6$ için;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{11}{8640}\left(x_{n+1}{}^6 - x_n{}^6\right) + \frac{25}{2880}\left(x_{n+1}{}^5 - x_n{}^5\right) + \frac{241}{5760}\left(x_{n+1}{}^4 - x_n{}^4\right) + \frac{959}{5760}\left(x_{n+1}{}^3 - x_n{}^3\right) + \frac{7679}{15360}\left(x_{n+1} + x_n\right)h + \frac{46081}{46080}h$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.1 geliştirilen algoritmalar ile çözülmüştür. Farklı çeşit *Chebyshev* polinomları ile elde edilen sayısal çözümler problemin tam çözümleri ile Tablo 3.5 te karşılaştırılmıştır.

Tablo 3.5 *Chebyshev* polinomlarının dört çeşidi için bulunan sonuçlar ve tam çözüm

n	x_n	Tam Çözüm	Çeşit	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	0.1	1.105170918	1.Çeşit	1.10	1.13000	1.1057916	1.101115278	1.105158156
			2.Çeşit	1.10	1.11750	1.1055833	1.104920833	1.105163313
			3.Çeşit	1.15	1.11875	1.1035277	1.104869270	1.105188321
			4.Çeşit	1.05	1.11625	1.1076388	1.104869271	1.105136873
2	0.2	1.221402758	1.Çeşit	1.2	1.2700	1.2238333	1.213955556	1.221335475
			2.Çeşit	1.2	1.2450	1.2230000	1.220962500	1.221374750
			3.Çeşit	1.3	1.2500	1.2190555	1.220762500	1.221418767
			4.Çeşit	1.1	1.2400	1.2265444	1.220762500	1.221327872
3	0.3	1.349858808	1.Çeşit	1.30	1.42000	1.3555125	1.340337500	1.349761656
			2.Çeşit	1.30	1.38250	1.3532500	1.349337500	1.349804313
			3.Çeşit	1.45	1.39375	1.3477500	1.348910933	1.349856338
			4.Çeşit	1.15	1.37125	1.3587500	1.348910938	1.349804313
4	0.4	1.491824698	1.Çeşit	1.4	1.5800	1.5006666	1.482177778	1.491677000
			2.Çeşit	1.4	1.5300	1.4973333	1.491358330	1.491747000
			3.Çeşit	1.6	1.5500	1.4907777	1.490658330	1.491793033
			4.Çeşit	1.2	1.5100	1.5038888	1.490658333	1.491695243
5	0.5	1.648721271	1.Çeşit	1.50	1.75000	1.6614583	1.641493056	1.648535156
			2.Çeşit	1.50	1.68750	1.6562500	1.648437500	1.648632813
			3.Çeşit	1.75	1.71875	1.6493055	1.647460930	1.648658854
			4.Çeşit	1.35	1.65625	1.6631944	1.647460938	1.648599617
6	0.6	1.822118800	1.Çeşit	1.60	1.9300	1.8385000	1.820400000	1.821916750
			2.Çeşit	1.60	1.8550	1.8310000	1.822087500	1.822036750
			3.Çeşit	1.90	1.9000	1.8245000	1.820887500	1.822032800
			4.Çeşit	1.40	1.8100	1.8375000	1.820887500	1.822032115
7	0.7	2.013752707	1.Çeşit	1.70	2.1200	2.032791	2.021115278	2.013558656
			2.Çeşit	1.70	2.0325	2.022583	2.013920833	2.013688130
			3.Çeşit	2.05	2.0937	2.017527	2.012619271	2.013653871
			4.Çeşit	1.45	1.9712	2.027638	2.012619271	2.013713738
8	0.8	2.225540928	1.Çeşit	1.80	2.3200	2.245333	2.245955555	2.225364000
			2.Çeşit	1.80	2.2200	2.232000	2.225650000	2.225484000
			3.Çeşit	2.20	2.3000	2.229555	2.224450000	2.225432067
			4.Çeşit	1.50	2.1400	2.234444	2.224450000	2.225524486
9	0.9	2.459603111	1.Çeşit	1.90	2.5300	2.47125	2.49733750	2.459412156
			2.Çeşit	1.90	2.4175	2.46025	2.45908750	2.459492300
			3.Çeşit	2.35	2.5187	2.46175	2.45828593	2.459459388
			4.Çeşit	1.55	2.3162	2.45875	2.45828285	2.459512360
10	1	2.718281828	1.Çeşit	2.00	2.7500	2.725166	2.77777777	2.717968750
			2.Çeşit	2.00	2.6250	2.708333	2.71614583	2.717968750
			3.Çeşit	2.50	2.7500	2.715277	2.71614583	2.718020833
			4.Çeşit	1.60	2.5000	2.701388	2.71614583	2.717902358

4. CHEBYSHEV TAU METODU İLE DALGA DENKLEMİNE UYGULAMA

Bu bölümde *Chebyshev Tau* metodu ile aşağıdaki ikinci mertebe dalga denkleminin nümerik yaklaştırması yapılmıştır.

u bilinmeyen bir çözüm fonksiyonu, f, g_1, g_2, h_1, h_2 bilinen fonksiyonlar ve α bilinen pozitif sabit katsayı iken

$$u(x,0) = g_1(x), \qquad 0 < x < \ell, \tag{4.1}$$

$$u_t(x,0) = g_2(x), \qquad 0 < x < \ell, \tag{4.2}$$

başlangıç koşulları ve

$$u(0,t) = h_1(t), \qquad 0 < t \le \tau, \tag{4.3}$$

$$u(\ell,t) = h_2(t), \qquad 0 < t \le \tau, \tag{4.4}$$

Dirichlet sınır koşulları ile tanımlı

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < \ell, \quad 0 < t < \tau, \tag{4.5}$$

şeklindeki lineer dalga denklemine *Chebyshev Tau* metodu uygulanacaktır.

4.1. Ötelenmiş *Chebyshev* Polinomlarının İşlemsel Özellikleri

Tanım 2.1.1 den $T_i(\bar{x})$ *Chebyshev* polinomunun

$$T_i(\bar{x}) = \cos\left(i \cos^{-1}(\bar{x})\right), \qquad -1 \le \bar{x} \le 1, \tag{4.6}$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. (4.1)-(4.5) problemini işleme tabi tutmak için tanım bölgesinin 0 ve h arasındaki değerlere dönüştürülmesi gerekir. Bunun için

$$-1 \le \bar{x} \le 1$$

$$0 \le \frac{h}{2}(1-\bar{x}) \le h$$

dır ve

$$x = \frac{h}{2}(1-\bar{x}) \tag{4.7}$$

için ötelenmiş *Chebyshev* polinomunun

$$0 \le x \le h$$

aralığı elde edilir. Böylece x değişkenine bağlı olarak ötelenmiş *Chebyshev* polinomları

$$T_0^h(x)=1, \quad T_1^h(x)=1-\frac{2x}{h},$$

$$T_{i+1}^h(x)=\left(2-\frac{4x}{h}\right)T_i^h(x)-T_{i-1}^h(x), \quad i=1,2,... \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlanır (Denghan, 2008).

Tanım 4.1.1: $f(\bar{x})$, $g(\bar{x})$ ve negatif olmayan sürekli $w(\bar{x})$ fonksiyonları, $L_2[a,b]$ Hilbert uzayında tanımlı olmak üzere

$$\int_a^b w(\bar{x})f(\bar{x})g(\bar{x})d\bar{x}=0 \tag{4.9}$$

ise f ve g fonksiyonlarına ortogonaldir denir (Mason ve Handscomb, 2003).

Tanım 4.1.2: $w(\bar{x})$, $f(\bar{x})$ ve $g(\bar{x})$, $[a,b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$<f,g>=\int_a^b w(\bar{x})f(\bar{x})g(\bar{x})d\bar{x} \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya f ve g fonksiyonlarının iç çarpımı denir (Mason ve Handscomb, 2003).

$w(\bar{x})=\frac{1}{\sqrt{1-\bar{x}^2}}$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere, (4.7) dönüşümü ile ötelenmiş *Chebyshev* polinomları için ağırlık fonksiyonu

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{hx-x^2}}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre ötelenmiş *Chebyshev* polinomlarının ortogonallik şartı

$$\int_0^h \frac{T_i^h(x)T_j^h(x)}{\sqrt{hx-x^2}}dx=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \frac{\pi}{2}, & i=j\neq 0\\ \pi, & i=j=0.\end{cases} \tag{4.11}$$

dır.

Ötelenmiş *Chebyshev* katsayılar vektörü

$$C = \left[c_0, c_1, ...c_{m-1}\right]^T \tag{4.12}$$

ve ötelenmiş *Chebyshev* vektörü

$$\Phi_{m,h}(x) = \left[T_0^h(x), T_1^h(x), ..., T_{m-1}^h(x)\right]^T, \tag{4.13}$$

olmak üzere herhangi bir $y(x)$ fonksiyonuna ötelenmiş *Chebyshev* polinomları aşağıdaki gibi yaklaştırılabilir.

$$y_m(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j T_j^h(x) = C^T \Phi_{m,h}(x). \tag{4.14}$$

Benzer şekilde $\Phi_{m,\ell}(x)$ ve $\Phi_{n,\tau}(t)$, (4.13) denklemine uygun olarak tanımlanan ötelenmiş *Chebyshev* vektörleridir. $0 < x < \ell$ ve $0 < t \le \tau$ için tanımlanmış i bir $u(x,t)$ fonksiyonu ötelenmiş *Chebyshev* polinomlarının terimlerinde açılabilir. Ayrıca A ötelenmiş *Chebyshev* katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & ... & a_{0,m-1} \\ a_{10} & a_{11} & ... & a_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & ... & a_{n-1,m-1} \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $u(x,t)$ fonksiyonunun ötelenmiş *Chebyshev* polinom yaklaşımı

$$u_{n,m}(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} T_i^\tau(t) T_j^\ell(x) = \Phi_{n,\tau}^T(t)\, A \Phi_{m,\ell}(x) \tag{4.16}$$

olur. Horng (1985), Ötelenmiş *Chebyshev* polinomları için integrasyon işlemsel matrisi
aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$\int_0^t \Phi_{n,\tau}(t')\, dt' = P \Phi_{n,\tau}(t). \tag{4.17}$$

Burada P, mertebesi $n \times n$ olan

$$P=\tau\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{-1}{8} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{16} & 0 & \frac{1}{8} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-1}{2(n-1)(n-3)} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{4(n-3)} & 0 & \frac{-1}{4(n-1)} \\ \frac{-1}{2n(n-2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4(n-2)} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

işlemsel integrasyon matrisidir.

k bir tamsayı olmak üzere k kez integrasyon

$$\int_0^t\int_0^t\dots\int_0^t \Phi_{n,\tau}(t)(dt)^k = P^k\Phi_{n,\tau}(t) \tag{4.19}$$

olur.

Horng (1985), Ötelenmiş *Chebyshev* polinomlarının türev özelliklerini aşağıdaki gibi vermiştir:

$$\frac{dT_{2k+1}^{\ell}(x)}{dx}=\left(-\frac{4}{\ell}\right)(2k+1)\left[T_{2k}^{\ell}(x)+T_{2k-2}^{\ell}(x)+\dots+T_2^{\ell}(x)+\frac{T_0^{\ell}(x)}{2}\right], \tag{4.20}$$

$$\frac{dT_{2k}^{\ell}(x)}{dx}=\left(-\frac{8k}{\ell}\right)\left[T_{2k-1}^{\ell}(x)+T_{2k-3}^{\ell}(x)+\dots+T_1^{\ell}(x)\right]. \tag{4.21}$$

D işlemsel türev matrisi olmak üzere, (4.20) ve (4.21) denklemleri kullanılarak $\Phi_{m,\ell}(x)$ vektörünün türevi

$$\frac{d\Phi_{m,\ell}(x)}{dx}=D\Phi_{m,\ell}(x) \tag{4.22}$$

şeklinde tanımlanır. D, mertebesi $m\times m$ olan işlemsel türev matrisi

$$D=\frac{1}{\ell}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -12 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -16 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m-2)\left[(-1)^{m-2}-1\right] & -2(m-2)\left[(-1)^{m-2}+1\right] & 2(m-2)\left[(-1)^{m-2}-1\right] & -2(m-2)\left[(-1)^{m-2}+1\right] & \dots & \dots & 0 & 0 \\ (m-2)\left[(-1)^{m-1}-1\right] & -2(m-1)\left[(-1)^{m-1}+1\right] & 2(m-1)\left[(-1)^{m-1}-1\right] & -2(m-1)\left[(-1)^{m-1}+1\right] & \dots & \dots & -4(m-1) & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

Benzer şekilde k kez türev alınırsa

$$\frac{d^k\Phi_{m,\ell}(x)}{dx^k}=D^k\Phi_{m,\ell}(x) \tag{4.23}$$

bağıntısı elde edilir.

Lemma 4.1.1: $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ fonksiyonlarına ötelenmiş *Chebyshev* polinom yaklaştırması

$$g_{1m}(x)=\sum_{i=0}^{m-1}g_{1i}T_i^{\ell}(x), \quad g_{2m}(x)=\sum_{i=0}^{m-1}g_{2i}T_i^{\ell}(x) \tag{4.24}$$

şeklindedir.

Ardından $0\le x\le \ell$ ve $0\le t\le \tau$ için $g_1(x)$ ve $tg_2(x)$ fonksiyonlarına

$$g_{1m}(x)=\Phi_{n,\tau}^T(t)E\Phi_{m,\ell}(x),\ tg_{2m}(x)=\Phi_{n,\tau}^T(t)H\Phi_{m,\ell}(x) \tag{4.25}$$

şeklinde bir yaklaştırma uygulanır. E ve H matrisleri sırasıyla

$$E=\begin{pmatrix} g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1,m-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

ve

$$H=\frac{\tau}{2}\begin{pmatrix} g_{20} & g_{21} & \cdots & g_{2,m-1} \\ -g_{20} & -g_{21} & \cdots & -g_{2,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

biçiminde elde edilir.

İspat: (4.8) denklemi kullanılarak

$$1=T_0^{\tau}(t) \tag{4.28}$$

ve

$$t=\frac{\tau}{2}T_0^{\tau}(t)-\frac{\tau}{2}T_1^{\tau}(t) \tag{4.29}$$

bağıntıları yazılabilir. Buradan aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$g_{1m}(x)=T_0^{\tau}(t)\sum_{i=0}^{m-1}g_{1i}T_i^{\ell}(x), \tag{4.30}$$

$$tg_{2m}(x)=\left(\frac{\tau}{2}T_0^{\tau}(t)-\frac{\tau}{2}T_1^{\tau}(t)\right)\sum_{i=0}^{m-1}g_{2i}T_i^{\ell}(x) \tag{4.31}$$

Böylece

$$g_{1m}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}e_{ij}T_i^{\tau}(t)T_j^{\ell}(x),\ tg_{2m}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}h_{ij}T_i^{\tau}(t)T_j^{\ell}(x) \tag{4.32}$$

olur. (4.30) ve (4.31) denklemleri ile

$$e_{0j}=g_{1j},\ e_{ij}=0,\ i=1,2,...,n-1,\ j=0,1,...,m-1,$$

ve

$$h_{0j}=\frac{\tau}{2}g_{2j},\ h_{1j}=-\frac{\tau}{2}g_{2j},\ h_{ij}=0,\ i=2,3,...,n-1,\ j=0,1,...,m-1.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Başlangıç koşulları kullanılarak (4.5) denkleminin her iki tarafının 0 'dan t ' ye kadar integrasyonu ile

$$\int_0^t\int_0^t u_{tt}(x,t)\,dtdt=\alpha\int_0^t\int_0^t u_{xx}(x,t)\,dtdt+\int_0^t\int_0^t f(x,t)\,dtdt$$

$$\int_0^t\left[u_t(x,t)\Big|_0^t\right]dt=\alpha\int_0^t\int_0^t u_{xx}(x,t)\,dtdt+\int_0^t\int_0^t f(x,t)\,dtdt$$

$$\int_0^t\left[u_t(x,t)-u_t(x,0)\right]dt=\alpha\int_0^t\int_0^t u_{xx}(x,t)\,dtdt+\int_0^t\int_0^t f(x,t)\,dtdt$$

$$\left[u(x,t)\Big|_0^t\right]-\left[tu_t(x,0)\Big|_0^t\right]=\alpha\int_0^t\int_0^t u_{xx}(x,t)\,dtdt+\int_0^t\int_0^t f(x,t)\,dtdt$$

$$u(x,t)-u(x,0)-tu_t(x,0)=\alpha\int_0^t\int_0^t u_{xx}(x,t)\,dtdt+\int_0^t\int_0^t f(x,t)\,dtdt$$

$$u(x,t)-g_1(x)-tg_2(x)=\alpha\int_0^t\int_0^t u_{xx}(x,t)\,dtdt+\int_0^t\int_0^t f(x,t)\,dtdt \tag{4.33}$$

bağıntısı elde edilir.

(4.16) denklemine benzer olarak F, $n\times m$ tipinde bilinen bir matris olmak üzere $f(x,t)$ fonksiyonu

$$f_{n,m}(x,t)=\Phi_{n,\tau}^{T}(t)F\Phi_{m,\ell}(x) \tag{4.34}$$

şeklinde elde edilir. (4.16) ve (4.17) denklemleri ile

$$\int_0^t u_{n,m}(x,t)dt=\left(\int_0^t \Phi_{n,\tau}^{T}(t)\,dt\right)A\Phi_{m,\ell}(x)=\Phi_{n,\tau}^{T}(t)P^{T}A\Phi_{m,\ell}(x) \tag{4.35}$$

ve

$$\int_0^t\int_0^t u_{n,m}(x,t)\,dtdt=\left(\int_0^t\left(\int_0^t \Phi_{n,\tau}^{T}dt\right)dt\right)A\Phi_{m,\ell}(x)=\Phi_{n,\tau}^{T}(t)\left(P^{T}\right)^{2}A\Phi_{m,\ell}(x) \tag{4.36}$$

formülleri bulunur (Denghan, 2008).

Benzer şekilde (4.17) ve (4.34) denklemleri kullanılarak

$$\int_0^t\int_0^t f_{n,m}(x,t)\,dtdt=\Phi_{n,\tau}^{T}(t)\left(P^{T}\right)^{2}F\Phi_{m,\ell}(x) \tag{4.37}$$

bağıntısı ve ayrıca (4.16), (4.17) ve (4.22) denklemleri kullanılarak ise

$$\int_0^t\int_0^t \frac{\partial^2 u_{n,m}(x,t)}{\partial x^2}dtdt=\left(\int_0^t\left(\int_0^t \Phi_{n,\tau}^{T}dt\right)dt\right)A\left(\frac{d^2}{dx^2}\Phi_{m,\ell}(x)\right)$$

$$=\Phi_{n,\tau}^{T}(t)\left(P^{T}\right)^{2}AD^{2}\Phi_{m,\ell}(x) \tag{4.38}$$

bağıntısı elde edilir (Denghan, 2008).

Öte yandan (4.16), (4.25), (4.37) ve (4.38) denklemleri kullanılarak (4.33) denklemi için $R_{n,m}(x,t)$ fonksiyonu

$$R_{n,m}(x,t)=\Phi_{n,\tau}^{T}(t)\left[A-E-H-\alpha\left(P^{T}\right)^{2}AD^{2}-\left(P^{T}\right)^{2}F\right]\Phi_{m,\ell}(x),$$

$$Q=A-E-H-\alpha\left(P^{T}\right)^{2}AD^{2}-\left(P^{T}\right)^{2}F \tag{4.39}$$

olmak üzere

$$R_{n,m}(x,t)=\Phi_{n,\tau}^{T}(t)Q\Phi_{m,\ell}(x) \tag{4.40}$$

Şeklinde yazılabilir. Tipik bir *Tau* metodunda olduğu gibi aşağıdaki cebirsel denklemler kullanılarak $n\times(m-2)$ tipindeki lineer cebirsel denklemler

$$Q_{i,j}=0,\qquad i=0,1,...,n-1,\qquad j=0,1,...,m-3. \tag{4.41}$$

olarak bulunur.

Ayrıca (4.16) denklemi *Dirichlet* sınır koşullarında yerine yazılırsa sırasıyla

$$\Phi_{n,\tau}^{T}(t)\,A\Phi_{m,\ell}(0)=h_1(t), \tag{4.42}$$

$$\Phi_{n,\tau}^{T}(t)\,A\Phi_{m,\ell}(0)=h_2(t) \tag{4.43}$$

denklemleri elde edilir.

Şimdi kısmi lineer diferansiyel denklem olan dalga denkleminin nümerik integrasyonu için geliştirilen algoritmaları test edebileceğimiz bir örnek ele alacağız. Problemin çözümü için Matlab veya Mathematica gibi paket programlar kullanılmıştır.

Örnek 4.1.1: $\ell=1$, $\tau=1$, $\alpha=1$ sabit değerleri ve $g_1(x)=0$, $g_2(x)=0$, $h_1(t)=\sin t$, $h_2(t)=0$, $f(x,t)=0$ fonksiyonları için tanımlanan (4.1)-(4.5) probleminin nümerik çözümünü bulalım (Articolo D.A.).

Çözüm: $m=n=4$ alınarak aşağıdaki gibi bir yaklaşık çözüm fonksiyonu elde edilir:

$$u_{n,m}(x,t)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}T_i^1(t)T_j^1(x)=\Phi_{4,1}^{T}(t)\,A\Phi_{4,1}(x) \tag{4.44}$$

Buradan da (4.39) denkleminde kullanılacak olan matrisler

$$A=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03}\\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{12}\\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{-1}{8} & 0\\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{12}\\ \frac{-1}{16} & 0 & \frac{1}{8} & 0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 0 & 0\\ -6 & 0 & -12 & 0\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Burada *E, F* ve *H* sıfır matrisler olduğundan (4.39) denklemi

$$Q=A-\left(P^{T}\right)^{2}AD^{2} \tag{4.45}$$

biçiminde düzenlenebilir.

Diğer taraftan (4.41)

$$Q_{ij}=0,\ i=0,1,2,3,\ j=0,1 \tag{4.46}$$

şeklinde bir lineer cebirsel denklem sistemine dönüştürülür. *Tau* metodunun klasik yapısına bağlı olarak (4.46) sisteminden 8 farklı lineer cebirsel denklem hesaplanmıştır:

$$a_{00}-\frac{35}{12}a_{02}-\frac{4}{3}a_{12}+\frac{3}{4}a_{22}+\frac{25}{3}a_{32}=0,$$

$$a_{01}-\frac{35}{2}a_{03}-8a_{13}+\frac{9}{2}a_{23}+5a_{33}=0,$$

$$4a_{02}+a_{10}+\frac{3}{2}a_{12}-\frac{4}{3}a_{22}-a_{32}=0,$$

$$24a_{03}+a_{11}+9a_{13}-8a_{23}-6a_{33}=0,$$

$$a_{20}-\frac{7}{6}a_{02}+\frac{2}{3}a_{22}=0,$$

$$a_{21}-7a_{03}+4a_{23}=0,$$

$$\frac{2}{9}a_{22}-\frac{1}{3}a_{12}-\frac{2}{3}a_{02}+a_{30}+\frac{1}{4}a_{32}=0,$$

$$\frac{4}{3}a_{23}-2a_{13}-4a_{03}+a_{31}+\frac{3}{2}a_{33}=0.$$

(4.13) bağıntısından, (4.42) ve (4.43) denklemlerinden sırasıyla

$$\Phi_{4,1}^{T}(t)=\left[T_0^1(t)\ T_1^1(t)\ T_2^1(t)\ T_3^1(t)\right]=\left[1\quad 1-2t\quad 1-8t+8t^2\quad 1-18t+48t^2-32t^3\right],$$

$$\Phi_{4,1}(0)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\ \Phi_{4,1}(1)=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

matrisleri ve aşağıdaki 8 farklı lineer cebirsel denklem elde edilir:

$$a_{00}+a_{01}+a_{02}+a_{03}+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{20}+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{30}+a_{31}+a_{32}+a_{33}=0,$$

$$a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+4a_{20}+4a_{21}+4a_{22}+4a_{23}+9a_{30}+9a_{31}+9a_{32}+9a_{33}=0,$$

$$a_{20}+a_{21}+a_{22}+a_{23}+6a_{30}+6a_{31}+6a_{32}+6a_{33}=0,$$

$$a_{30}+a_{31}+a_{32}+a_{33}=0,$$

$$a_{00}-a_{01}+a_{02}-a_{03}+a_{10}-a_{11}+a_{12}-a_{13}+a_{20}-a_{21}+a_{22}-a_{23}+a_{30}-a_{31}+a_{32}-a_{33}=0,$$

$$-a_{10}+a_{11}-a_{12}+a_{13}-4a_{20}+4a_{21}-4a_{22}+4a_{23}-9a_{30}+9a_{31}-9a_{32}+9a_{33}=0,$$

$$a_{20}-a_{21}+a_{22}-a_{23}+6a_{30}-6a_{31}+6a_{32}-6a_{33}=0,$$

$$-a_{30}+a_{31}-a_{32}+a_{33}=0.$$

Hesaplanan bu 16 denklemden oluşan lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü Mathematica paket programı yardımıyla bulunmuştur. Buradan da A matrisi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$A=\begin{pmatrix} 0.2037 & 0.1869 & -0.0058 & 0.0110 \\ -0.2642 & -0.1666 & 0.0923 & -0.0053 \\ 0.0423 & -0.0674 & -0.0735 & 0.0361 \\ 0.0560 & 0.0450 & -0.0507 & -0.0398 \end{pmatrix}.$$

Böylece

$$u_{4,4}(x,t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2t \\ 1-8t+8t^2 \\ 1-18t+48t^2-32t^3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.2037 & 0.1869 & -0.0058 & 0.0110 \\ -0.2642 & -0.1666 & 0.0923 & -0.0053 \\ 0.0423 & -0.0674 & -0.0735 & 0.0361 \\ 0.0560 & 0.0450 & -0.0507 & -0.0398 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2x \\ 1-8x+8x^2 \\ 1-18x+48x^2-32x^3 \end{pmatrix}$$

Bu problemin tam çözümü ise

$$u(x,t)=\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(x)$$

şeklindedir.

Bu örnekteki hata analizi aşağıdaki gibi yapılmıştır. n ve m nin farklı değerleri için hata analizi

$$L_2=\left\|u_{n,m}(x,t)-u(x,t)\right\|_2=\left(\int_0^{\tau}\int_0^{l}\left(u_{n,m}(x,t)-u(x,t)\right)^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

formülüyle verilebilir. Örnek 4.1 deki hata analizi ise

$$L_2=\left\|u_{4,4}(x,t)-u(x,t)\right\|_2=\left(\int_0^{1}\int_0^{1}\left(u_{4,4}(x,t)-u(x,t)\right)^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}=1.591\times10^{-1}$$

şeklindedir. Elde edilen hata değerine bakıldığında n ve m nin daha büyük değerleri için çok daha az hata ile çözüm yapılabileceği söylenebilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bilim ve mühendislikte karşılaşılan problemlerin matematiksel modelleri adi ve kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilebilir. Bu nedenle diferansiyel denklemler ve çözümleri büyük bir öneme sahiptir. Diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak zor olduğundan yaklaşık sayısal çözümlerine gerek duyulmaktadır. Diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için geliştirilen pek çok yöntem bulunmaktadır. Bu tez çalışmasında *Chebyshev* polinomlarının dört farklı çeşidi için de temel kavramlar tanımlanmış, bazı özellikler verilmiştir. Ayrıca *Chebyshev* polinomları kullanılarak bilim ve mühendislikte karşılaşılan problemlerin çözümleri için yeni nümerik algoritmalar geliştirilmiştir.

Öte yandan *Chebyshev* polinomları, trigonometrik fonksiyonlarla ifade edildiğinden $[-1,1]$ aralığında tanımlıdır ve bu aralıktaki problemlere çözüm üretmektedir. Bu tez çalışmasında, basit bir dönüşümle problemin tanım bölgesi $[0,h]$ gibi bir aralığa dönüştürülerek daha geniş bir bölgede çözüm aranmıştır. Bu dönüşüm kullanılarak Ötelenmiş *Chebyshev* polinomu diye adlandırılan *Chebyshev* polinomunun farklı bir versiyonu tanımlanmıştır. Bu polinom ile dalga denklemine *Chebyshev-Tau* yöntemi uygulanmış ve tam çözüme yakın sonuçlar elde edilmiştir.

Böylece, *Chebyshev* polinomlarının bazı matematiksel problemlerin yaklaşık sayısal çözümlerinde daha kolay ve etkin sonuçlar verebileceği ve diğer problemlere genişletilebileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Akyüz, A., Sezer, M. 1999 A Chebyshev Collocation Method for the Solution of Linear Integro-Differential Equations. *Intern. J. Computer Math*., 72: 4, 491-507.

Articolo, G.A. 2009 *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Maple V*. 2nd edition, Academic Press.

Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., Zang, T. A. 1988 *Spectral methods in fluid dynamic*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Clenshaw, C.W. 1956 The Numerical Solution of Linear Differential Equations in Chebyshev Series. *Proc. Camb. Phil. Socb*., 53:134-149.

Clenshaw, C.W., Curtis, A.R. 1960 A Method for Numerical Integration on an Automatic Computer. *Numerische Math*., 2: 197-205.

Clenshaw, C.W. 1962 Chebyshev Series for Mathematical Functions. *National Physical Laboratory* (Mathematical Tables). 5: 1-15.

Coleman J.P., Booth, A.S. 1992 Analysis of a family of Chebyshev Methods for $y''(x) = f(x, y)$. *J. Comput. Appl. Math*., 44: 95-114.

Dehghan, M. 2005 On the solution of an initial-boundary value problem that combines Neumann and integral condition for the wave equation, *Numer. Methods Partial Differential Eq*., 21: 24–40.

Dehghan, M., Shokri, A. 2008 A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation, *Numer. Methods Partial Differential Eq*., 24: 1080–1093.

Dehghan, M., Mirzaei, D. 2008 The boundary integral equation approach for numerical solution of the one-dimensional Sine-Gordon equation, *Numer. Methods Partial Differential Eq*., 24: 1405–1415.

Elbarbary M.E., El-Kady, M. 2003 Chebyshev Finite Difference Approximation for the Boundary Value Problems. *Appl. Math. Comput*., 139: 513-523.

El-Gendi, S.E. 1969 Chebyshev Solution of Differential, Integral and Integro-Differential Equations. *Computer Journal*, 12: 282-287.

Elliot, D. 1961 A Method for the Numerical Integration of the one Dimensional Heat Equation Using Chebyshev Series. *Proc. Camb. Phil. Soc*., 57: 823-832.

Elliot, D. 1963 A Chebyshev series method for the numerical solution of Fredholm integral equations. *Computer Journal*, 6: 102-111.

Fox, L., Parker, I.B. 1968. *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*. London: Oxford University Press.

Greig, D.M., Abd-el, N.M.A. 1980 Iterative solutions of nonlinear initial value differential equations in Chebyshev series using Lie series. *Numer. Math*., 34: 1-13.

Horng I.R., Chou, J.H. 1985 Application of ötelenmiş Chebyshev series to the optimal control of linear distributed-parameter systems, *Int J Control* 42: 233–241.

Hosseini, M.M. 2006 Adomian Decomposition Method with Chebyshev Polynomials. *Appl. Math. Comput*., 175: 1685-16.

Köroğlu, H. 1998 Chebyshev Series Solution of Linear Fredholm Integro Differential Equations. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*., 29: 4, 489-500.

Mason, J.C. 1967 Chebyshev Polynomial Approximations for the I-membrane eigenvalue problem. *SIAM J. Appl. Math*., 15. 1, 172-186.

Mason, J.C., Handscomb, D.C. 2003. *Chebyshev Polynomials*. Chapman and Hall/Crc, Washington.

Mohebbi, A., Dehghan, M. 2008 High order compact solution of the one-space dimensional linear hyperbolic equation, *Numer. Methods Partial Differential Eq*., 24: 1222–1235.

Piessens, R. 2000 Computing integral transforms and solving integral equations using Chebyshev Polynomial Approximations, *J. Comput. Appl. Math*., 121: 113-124.

Saadatmandi, A., Dehghan, M. 2007 Numerical solution of the one-dimensional wave equation with an integral condition, *Numer. Methods Partial Differential Eq*., 23: 282–292.

Sezer, M. 1985 On the Solution Methods of Cauchy Problem Associated with Parabolic Partial Differential Equations. *E.U.J. Sci. Faculty Series A*, 8: 1, 59-69.

Sezer, M. 1989 A Chebyshev Polynomial Approxımation For Dirichlet Problem. *J. Faculty Sci. Ege Uni. Series A*, 12: 2, 69-77.

Sezer, M., Kaynak, M. 1996 Chebyshev polynomial solutions of linear differential equations. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*., 27: 4, 607-618.

Sezer, M., Doğan, S. 1996 Chebyshev series solutions of Fredholm integral equations. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*., 27: 5, 649-657.

Sinwell, Benjamin, 2004 The Chebyshev Polynomials: Patterns and Derivation, Mathematics Teacher, 98(1), August.

Süli, E., Mayers, D.F. **2003.** An Introduction to Numerical Analysis, New York: Cambridge University Pres..

Synder, M.A. 1966 *Chebyshev methods in numerical approximation*. N. J.: Prentrice-Hall. London.