T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AZALAN BOZULMA ORANINA SAHİP ÜÇ PARAMETRELİ YENİ BİR YAŞAM ZAMAN DAĞILIMI

MUSTAFA ÇAĞATAY KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI

KONYA, 2010

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AZALAN BOZULMA ORANINA SAHİP ÜÇ PARAMETRELİ YENİ BİR YAŞAM ZAMAN DAĞILIMI

MUSTAFA ÇAĞATAY KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONYA, 2010

Bu tez 18 / 01 / 2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından
oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

……..	…….	…….
Doç. Dr. Aşır GENÇ	**Doç. Dr. Coşkun KUŞ**	**Yrd. Doç. Dr. İsmail KINACI**
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AZALAN BOZULMA ORANINA SAHİP ÜÇ PARAMETRELİ YENİ BİR YAŞAM ZAMAN DAĞILIMI

Mustafa Çağatay KORKMAZ

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aşır GENÇ

2010, 52 sayfa

Jüri: Doç. Dr. Aşır GENÇ
Doç. Dr. Coşkun KUŞ
Yrd. Doç. Dr. İsmail KINACI

Bu tez çalışmasında, azalan bozulma oranına sahip üç parametreli ve azalan, artan ve küvet eğrisi bozulma oranına sahip dört parametreli iki yeni yaşam zamanı dağılımı sunulmuştur. Dağılımların karakteristik özellikleri incelenip, parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri için EM algoritması elde edilmiştir. Reel veriye dayalı nümerik bir uygulama verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Birleştirme, EM Algoritması, Üstel Dağılım, Weibull Dağılımı, Bozulma Oranı, Negatif Binom dağılımı, Yaşam Zamanı Dağılımları, En Çok Olabilirlik Tahmini, Küvet Eğrisi Bozulma Oranı

ABSTRACT

Ms Thesis

A NEW THREE PARAMETERS LIFETIME DISTRIBUTION WITH DECREASING FAILURE RATE

Mustafa Çağatay KORKMAZ

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aşır GENÇ

2010, 52 pages

Jury: Assoc. Prof. Dr. Aşır GENÇ
Assoc. Prof. Dr. Coşkun KUŞ
Assist. Prof.Dr. İsmail KINACI

In this thesis, a new three parameters life time distribution with decrasing failure rate and a new four parameters life time distribution with bathtubs, increasing and decreasing failure rate are introduced. Characteristic proporties of these distributions are discussed and the estimation of parameters are studied by the method of maximum likelihood via EM algorithm. A numerical example based on real data is also presented.

Keywords: Compounding, EM Algorithm, Exponential Distribution, Weibull Distribution, Failure Rate, Negative Binomial Distribution, Life Time Distrubitions, Maximum Likelihood Estimation, Bathtubs Failure Rate

TEŞEKKÜR

Benden her türlü desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli büyüklerim ve hocalarım Doç. Dr. Aşır GENÇ ve Doç. Dr. Coşkun Kuş'a ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
ŞEKİLLER DİZİNİ v
ÇİZELGELER DİZİNİ vi
1.GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 4
2.1. Yaşam Zamanı 4
2.2. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu 4
2.3. Dağılım Fonksiyonu 4
2.4. Yaşam Fonksiyonu 5
2.5. Bozulma Oranı Fonksiyonu 5
2.5.1. Monoton bozulma oranı 6
2.5.2. Küvet eğrisi bozulma oranları 7
2.6. Fonksiyonlar Arasındaki İlişkiler 8
2.7. Bazı Yaşam Zamanı Dağılımları Ve Özellikleri 9
2.7.1. Üstel dağılım 9
2.7.2. Weibull dağılımı 10
2.7.3. EG dağılımı 11
2.7.4. EP dağılımı 12
2.7.5. Gamma dağılımı 13
2.7.6. Düzgün Dağılım 13
2.7.7. Pareto I dağılımı 14
2.7.8. Geometrik dağılım 14
2.7.9. Negatif-binom dağılımı 15
2.8. En Çok Olabilirlik Parametre Tahmini 15
2.9. EM Algoritması 16
2.10. Özel Fonksiyonlar 17
2.10.1. Gama fonksiyonu 17
2.10.2. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon 18
3. ÜSTEL NEGATİF BİNOM YAŞAM ZAMANI DAĞILIMI 20
3.1. Yaşam Zamanı Dağılımının Elde Edilişi Ve Karakteristikleri 20
3.2. Diğer Dağılımlarla İlişki 26
3.3. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri 26
3.4. Simulasyon Algoritması 29
4. WEIBULL NEGATİF-BİNOM DAĞILIMI 31
4.1 Yaşam Zamanı Dağılımının Elde Edilişi Ve Karakteristikleri 31
4.2 Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahmini 36
5. UYGULAMA 40
5.1. Grizu Patlaması Verisi 40
6. SONUÇ VE ÖNERİLER 48
7. KAYNAKLAR 49

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Üstel dağılıma ait bozulma oranı grafiği.....9
Şekil 2.2 Farklı β ve $\lambda = 0.5$ parametreli Weibull dağılımına ait bozulma oranı fonksiyonu grafiği 10
Şekil 2.3 EG dağılımına ait bozulma oranı grafiği.....11
Şekil 2.4 EP dağılımına ait bozulma oranı grafiği 12
Şekil 2.5 Farklı β ve $\lambda = 1$ parametreli Gamma dağılımına dağılımına ait bozulma oranı grafiği 13
Şekil 3.1 Farklı β ve $p = 0.1$ ve $k = 1$ durumlarında ENB dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonun grafiği 23
Şekil 3.2 Farklı p değerleri, $\beta = 1$ ve $k = 1$ durumlarında ENB dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği 23
Şekil 3.3 ENB dağılımının bozulma oranı fonksiyonu grafiği 25
Şekil 4.1 Farklı β, k=3, p=0.5 ve $\alpha = 2$ için WNB dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği 33
Şekil 4.2 $\beta > 1$ için WNB dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....33
Şekil 4.3 $\beta \leq 1$ için WNB dağılımı bozulma oranı fonksiyonu grafiği.....34
Şekil 4.4 Farklı $\beta > 1$, $\alpha = 0.5$, $p = 0.5$ ve k=1 için WNB dağılımı bozulma oranı fonksiyonu grafiği 35
Şekil 4.5 Farklı α, $\beta = 2$, $p = 0.5$ ve k=3 için WNB dağılımı bozulma oranı fonksiyonu grafiği 35
Şekil 4.6 Farklı p, $\beta = 1.5$, $\alpha = 2$ ve k=1 için WNB dağılımı bozulma oranı fonksiyonu grafiği 36
Şekil 5.1 ENB dağılımında k parametresinin değerlerine göre logolabilirlik fonksiyonunun aldığı değerler.....42
Şekil 5.2 ENB Dağılımı P-P Plot Grafiği.....42
Şekil 5.3 EP Dağılımı P-P Plot Grafiği.....43
Şekil 5.4 EG Dağılımı P-P Plot Grafiği 43
Şekil 5.5 Weibull Dağılımı P-P Plot Grafiği.....44
Şekil 5.6 Gamma Dağılımı P-P Plot Grafiği.....44
Şekil 5.7 Grizu patlamaları arasındaki geçen sürelere dayalı en çok olabilirlik tahmin edicileri kullanılarak elde edilen ENB, EG, EP, Weibull ve Gamma dağılımlarının yaşam fonksiyonları grafiği. 45
Şekil 5.8 p parametresinin iterasyonlar sonucu aldığı değerler 46
Şekil 5.9 β parametresinin iterasyonlar sonucu aldığı değerler.....46

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1 $F(x), f(x), \overline{F}(x)$ *ve* $h(x)$ fonksiyonları arasındaki ilişki 8

Çizelge 5.1 İngilterede bir kömür madeninde meydana gelen ardışık grizu patlamaları arasında geçen süreler (gün) 41

Çizelge 5.2 Uygulama modellerine ait logolabilirlik değerleri ve parametre tahminleri 45

1. GİRİŞ

Organizmaların, materyallerin, sistemlerin vb. gibi yapıların yaşam zamanı dağılımlarının modellenmesi, yaşam testlerinde ve güvenirlikte çok önemli bir yere sahiptir ve bu konu ile ilgili literatürde bir çok çalışma mevcuttur. Yaşam zamanı dağılımlarının modellenmesindeki amaç, yaşam zamanını matematiksel olarak ifade etmek ve buna dayalı olarak istatistiksel sonuçlar çıkarmaktır. Bu sonuçlar, çıkarılırken de bozulma (hazard) oranı fonksiyonunun önemli bir yeri vardır. Gerçek hayattaki olayların modellenmesi, ileriye yönelik sonuç çıkarımı açısından kolaylıklar sağladığı gibi zaman ve maliyet unsurlarında da kazanç sağlamada önemli bir yer tutmaktadır. Örneğin; pahalı bir elektronik parçanın yaşam zamanı hakkında bilgi edinmek için yapılan yaşam testinde, parçaların bozulmalarının gözlenmesi hem maliyeti hem de test zamanını artıracağı için bu durum istenmeyebilir. Bu tip durumlarda deney ya da gözlem sonrası elde edilen veriye dayalı olarak bir yaşam zamanı modeli önerilebilinir. Bu tez çalışmasında önerilen yeni bir yaşam zamanı olan Üstel-Negatif Binom dağılımı zamanla bozulma oranı azalan bir veriye, yine yeni bir yaşam zamanı olarak önerilen Weibull-Negatif Binom dağılımı da yaşam zamanı boyunca bozulma oranı monoton veya küvet eğrisi olan bir veriye önerilebilir ve ileriye yönelik sonuç çıkarma da kolaylıklar sağlayabilir.

Literatürde bozulma oranı monoton veya küvet eğrisi (bathtubs failure) olan dağılım sınıfları için birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalardan, Lomax (1954), Proschan (1963), Barlow ve ark.'ları (1963), Barlow ve ark.'ları (1964, 1965), Marshall ve Proschan (1965), Cozzolino (1968), Dahiya ve Gurland (1972), McNolty ve ark.'ları (1980), Saunders ve Mhyre (1983), Nassar (1988), Gleser (1989), Gurland ve Sethuraman (1994), Finklestein ve Esaulova (2001, 2006), Frank (2005), Adamidis ve ark.'ları (2005)' nin yaptıkları çalışmalar monoton bozulma oranı dağılımlarına, Hjorth (1980), Glaser (1980), Mi (1995), Xei ve Lai (1996), Wang (1999), Chen (2000), Mudholkar ve Srivastava (2002), Xei ve ark.'ları (2002), Lai ve ark.'ları (2003), Dimitrakopoulou ve ark.'ları (2007), Bebbington ve ark.'ları (2007), Carrasco ve ark.'ları (2008), Souza ve ark.'ları (2008) ve Silva ve ark.'ları (2009)' nin yaptıkları çalışmalar da küvet eğrisi bozulma oranı dağılımlarına örnek

olarak gösterilebilir. Küvet eğrisi bozulma oranına sahip dağılımlar için ilgili makalelere bakılabilir.

Lomax (1954), yaptığı çalışmada 1844-1926 yılları arasında New York' taki dört işyeri için iflas modellemesi yapmış ve modelin azalan bozulma oranı (DFR) özelliğine sahip olduğunu göstermiştir. Proschan (1963), Boing 720 uçak flosundaki havalandırma sistemlerinin ardışık bozulma sürelerini incelemiş ve bu sürelerin azalan bozulma oranına sahip olduğunu göstermiştir. Ayrıca Proschan (1963) üstel dağılımların karışımının da azalan bozulma oranına sahip olduğunu ispatlamıştır. Barlow ve ark.'ları (1963), monoton bozulma oranı fonksiyonlarının özelliklerini incelemiş, bozulma oranı fonksiyonunun limit özelliklerinin, dağılım momentleri ve moment çıkaran fonksiyon ile ilişkili olduğunu göstermişlerdir. Barlow ve ark.'ları (1964, 1965) bozulma oranı dağılımları için sınırları incelemişlerdir. Marshall ve Proschan (1965), monoton bozulma oranına sahip dağılımlar için en çok olabilirlik tahmini üzerinde bir çalışma yapıp, bu tahmin edicilerin tutarlı olduklarını göstermişlerdir. Dahiya ve Gurland (1972), $Gamma\left(0.76, 122.56^{-1}\right)$ azalan bozulma oranı dağılımının Proschan (1963)' nın verilerini daha iyi modelleyebildiğini göstermişlerdir. McNolty ve ark.'ları (1980), üstel aile karışımlarını sunmak için, üstel karışımların bozulma oranı fonksiyonlarını inceleyip, karakteristik özelliklerini araştırmışlardır. Gleser (1989), gamma dağılımının azalan olduğu durumlarda, üstel dağılımın karışımlarının gamma dağılımı ile ifade edilebileceğini göstermiştir. Gurland ve Sethuraman (1994), artan bozulma oranına sahip sıfırdan budanmış uç değer dağılımı ile üstel dağılımı karıştırmak üzere, karışım dağılımının azalan bozulma oranına sahip olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca artan bozulma oranına sahip weibull dağılımı ile gamma dağılımını karıştırmak suretiyle dağılımın yine azalan bozulma oranına sahip olacağını göstermişlerdir. Bahsedilen bu çalışmaların tamamında sürekli dağılımların karışımı kullanılarak modelleme yapılmıştır. Yakın zamanlarda yapılan bazı çalışmalarda kesikli bir dağılım ile sürekli dağılımların karışımı sonucu oluşan azalan bozulma oranına sahip yeni yaşam zamanı dağılımları elde etmişlerdir. Bunlara örnek olarak, Adamidis ve Loukas (1998), Kuş (2007), Tahmasbi ve Rezai (2008), Kuş (2009) ve Chankandi ve Ganjali (2009)'nin yaptıkları çalışmalar örnek olarak verilebilir. Adamidis ve Loukas (1998), Kuş

(2007), Tahmasbi ve Rezai (2008), Kuş (2009), Chankandi ve Ganjali (2009)' nin yaptıkları çalışmalarda üstel dağılımla sırasıyla geometrik, sıfırdan budanmış poisson, logaritmik, sıfırdan budanmış binom ve kuvvet seri (Power Series) dağılımlarını karıştırmak üzere sırasıyla EG, EP, EL, EB ve EPS isimli yeni yaşam zamanı dağılımları elde etmişlerdir. Bahsedilen araştırmacılar, dağılımların karakteristik özelliklerini inceleyip, dağılım parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini EM algoritması kullanarak elde etmişlerdir. Bunun yanında bu tahmin ediciler için gözlenen ve beklenen Fisher bilgi matrisinin tersini alarak asimptotik varyans-kovaryans matrisini elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, üstel dağılım ile negatif-binom dağılımı birleştirilerek Adamidis ve Loukas (1998)'ın elde ettiği EG dağılımının genel hali olan ENB isimli yeni bir yaşam zamanı dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca ENB yaşam zamanı dağılımının genel hali olan WNB isimli yeni bir yaşam zamanı dağılımı da önerilmiştir. Yeni yaşam zamanı dağılımlarının karakteristik özellikleri incelenmiş ve parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri için EM algoritması türetilmiştir. Elde edilen ENB dağılımının, gerçek bir veriyi modelleyebileceği uygulama yapılarak gösterilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümünde ise ENB isimli yeni yaşam zamanı dağılımının elde edilişi ve karakteristik özellikleri üzerinde durulmuş, parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri EM algoritması ile elde edilmiştir. Ayrıca simülasyon algoritması için iki yöntem verilmiştir. Dördüncü bölümde, Weibull dağılımı ile Negatif binom dağılımı birleştirilerek ENB dağılımının genel hali olan WNB bir isimli yaşam zamanı önerilmiş ve bu yaşam zamanı dağılımının karakteristik özellikleri incelenip, parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri için EM algoritması hesaplanmıştır. Beşinci bölümde ise ENB yaşam zamanı dağılımı için, gerçek bir veriyi modelleyebileceğini göstermek için uygulama yapılmıştır.

Uygulama bölümünde Excel 2003, Maple 9.5, Selçuk Stat paket programları ile Delphi 5 programlama dili kullanılmıştır.

Bu tezde yapılan işlemler Maple 9.5 paket programı ile hesaplanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, yapılmış olan çalışma için gerekli olan ilgili tanımlar ve temel bilgiler verilmiştir.

2.1. Yaşam Zamanı

Bir sistemin, bir nesnenin, bir canlının yaşam zamanı (lifetime) veya bozulma zamanı (failure time), negatif olmayan, mutlak sürekli rasgele değişken X ile gösterilmiştir.

2.2. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \lim_{m \to 0} \frac{P(x \le X < x + m)}{m}$$
$$= \lim_{m \to 0} \frac{F(x+m) - F(x)}{m}$$
$$= F'(x)$$

şeklindedir ve yaşam zamanının x anındaki yoğunluğunu ifade eder (Başar 1993). Burada F, X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir.

2.3. Dağılım Fonksiyonu

X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \le x)$$
$$= \int_0^x f(x)dx$$

şeklinde tanımlanır. Dağılım fonksiyonu azalmayan ve sağdan sürekli bir fonksiyondur. Burada f, olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Ayrıca

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} F(x) = 1$$

dir.

2.4. Yaşam Fonksiyonu

Yaşam fonksiyonu $\overline{F}(x)$, X rasgele değişkeninin x veya x' den daha büyük değer olma olasılığını başka bir deyişle sistemin x veya x' den daha büyük zamana kadar yaşama olasılığını ifade etmektedir. Yaşam fonksiyonu,

$$\overline{F}(x) = P(X \geq x),\ x \geq 0$$

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \int_{x}^{\infty} f(x)dx$$

şeklinde gösterilir. Burada f; olasılık yoğunluk fonksiyonu, F; dağılım fonksiyonudur. Yaşam fonksiyonu, monoton azalan bir fonksiyondur ve

$$\overline{F}(0) = \lim_{x\to 0} \overline{F}(x) = 1$$

$$\overline{F}(\infty) = \lim_{x\to \infty} \overline{F}(x) = 0$$

özelliklerini sağlar (Leemis 1986).

Yaşam fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu belli bir aralıkta bozulmayı ifade ederler. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ise belli bir zamanda bozulmayı ifade etmektedir ve anlık bir ölçümdür (Başar 1993).

2.5. Bozulma Oranı Fonksiyonu

Bozulma oranı fonksiyonu, x zamanına kadar yaşadığı bilinen parçanın bundan sonraki $[x, x+m]$ zaman aralığında bozulma olasılığının oranını ifade eder.

$$h(x) = \lim_{m \to 0} \frac{P(x \le X < x + m \mid X > x)}{m}$$

$$= \lim_{m \to 0} \frac{1}{m} \frac{P(x \le X < x + m,\ X > x)}{P(X > x)}$$

$$= \frac{1}{\overline{F}(x)} \lim_{m \to 0} \frac{P(x \le X < x + m)}{m}$$

$$= \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$$

biçimindedir. Bozulma oranı fonksiyonu,

$$h(x) \ge 0$$

$$\int_0^\infty h(x)dx = \infty$$

özelliklerini sağlar (Leemis 1986).

Bozulma oranı fonksiyonu genelde aşağıda belirtilen iki bozulma oranı adı altında toplanabilir.

2.5.1. Monoton bozulma oranı

Monoton (sabit, azalan ya da artan) bozulma oranı, yaşam zamanı geçtikçe bozulma oranının; sabit bozulma oranı, artan bozulma oranı (IFR) ya da azalan bozulma oranı (DFR) olduğunu ifade etmektedir. Bozulmanın rasgele olduğu dengeli kitlelerde sabit bozulma oranına, yeni doğan bebeklerin bağışıklık kazanmasına kadar geçen süre vücut direnci yönünden ve belirgin tipteki elektronik aletlerin yaşam sürelerinin dağılımı azalan bozulma oranına, belirli bir zamandan sonra ele alınan insan ömrü başka bir deyişle bir tür yaşlanma ya da tükenmenin var olduğu kitlelerdeki bireylere ait yaşam sürelerinin dağılımının da artan bozulma oranına örnek olarak gösterilebilinir. Bazı iki ve daha fazla parametreli dağılımların artan ya da azalan bozulma oranına sahip olduğu dağılımın şekil parametresinin durumlarına göre söylenebilinir. İlerleyen konularda bazı dağılımların şekil parametresine göre bozulma oranı durumları ele alınmıştır.

2.5.2. Küvet eğrisi bozulma oranları

Küvet eğrisi (bathtubs shape) bozulma oranı, biçimsel olarak genelde $\cap$ ve$\cup$ biçiminde ifade edilir. $\cap$ ve$\cup$ şekillerinde de anlaşılacağı üzere küvet eğrisi bozulma oranı, bütün zaman içerisinde zamanın belirli kısımlarında azalmayan, azalan ve artan gibi değişik durumlarda bulunabilen bozulma oranıdır. Doğumundan ölümüne kadar takip edilen bir kitledeki bireylere ait yaşam sürelerinin dağılımı, genellikle $\cup$ biçimli küvet eğrisi bozulma oranına, bir kanser tedavisi sonrası yaşam sürelerinin dağılımının $\cap$ biçimli küvet eğrisi bozulma oranına sahip olduğu söylenebilinir. Yapılan bilimsel çalışmalarda bozulma oranı, $\cap$ biçimli küvet eğrisi ve $\cup$ biçimli küvet eğrisi bozulma oranına sahip olması bakımından ayrı ayrı ele alınarak dağılım özelliklerine yansıtılmıştır.

Teorem 2.1. (Glaser 1980) *$f(x)$, $(0,\infty)$ aralığında sürekli ve iki kez türevlenebilir fonksiyon olmak üzere $l(x)=h^{-1}(x)$ ve $\eta(x)=-f'(x)/f(x)$ tanımlansın;*

(a) Eğer $\forall x>0$ için $\eta'(x)>0$ ise X 'in dağılımı artan bozulma oranına,

(b) Eğer $\forall x>0$ için $\eta'(x)<0$ ise X 'in dağılımı azalan bozulma oranına sahiptir.

(c) $\forall x\in(0,x_0)$ için $\eta'(x)=0$ ve $\forall x>x_0$ için $\eta'(x)>0$ olacak şekilde bir $x_0>0$ olduğunu kabul edilsin.

(i) Eğer $l'(y_0)=0$ olacak şekilde bir $y_0>0$ varsa X 'in dağılımı küvet eğrisi bozulma oranına,

(ii) Eğer $l'(y_0)=0$ olacak şekilde bir $y_0>0$ yoksa X 'in dağılımı artan bozulma oranına sahiptir.

(d) $\forall x\in(0,x_0)$ için $\eta'(x)=0$ ve $\forall x>x_0$ için $\eta'(x)<0$ olacak şekilde bir $x_0>0$ olduğunu kabul edilsin.

(i) Eğer $l'(y_0)=0$ olacak şekilde bir $y_0>0$ varsa X 'in dağılımı inişli-çıkışlı küvet eğrisi bozulma oranına,

(ii) *Eğer* $l'(y_0)=0$ *olacak şekilde bir* $y_0>0$ *yoksa* X *'in dağılımı azalan bozulma oranına sahiptir.*

2.6. Fonksiyonlar Arasındaki İlişkiler

Olasılık yoğunluk, dağılım, yaşam ve bozulma oranı fonksiyonları arasındaki ilişkiler Çizelge 1.1 deki gibi verilebilir. Çizelge 1.1. deki $\int_0^x h(x)dx$ ifadesine birikimli bozulma oranı fonksiyonu denir ve bu ifadeye $H(x)$ denirse, $H(x)$;

- Artan bir fonksiyondur
- $\lim_{x\to\infty}\int_0^x H(x)dx \to \infty$
- Sağdan sürekli bir fonksiyondur.

özelliklerini sağlar (Nelson 1982).

Çizelge 1.1. $F(x), f(x), \overline{F}(x)$ *ve* $h(x)$ fonksiyonları arasındaki ilişki

Fonksiyon	$F(x)$	$f(x)$	$\overline{F}(x)$	$h(x)$
$F(x)=$	-	$\int_0^x f(x)dx$	$1-\overline{F}(x)$	$1-\exp\{-\int_0^x h(x)dx\}$
$f(x)=$	$F'(x)$	-	$-\overline{F}'(x)$	$h(x)\exp\{-\int_0^x h(x)dx\}$
$\overline{F}(x)=$	$1-F(x)$	$\int_x^\infty f(x)dx$	-	$\exp\left(-\int_0^x h(x)dx\right)$
$h(x)=$	$\dfrac{\partial F(x)/\partial x}{1-F(x)}$	$\dfrac{f(x)}{\int_x^\infty f(x)dx}$	$-\dfrac{\partial}{\partial x}\log\overline{F}(x)$	-

2.7. Bazı Yaşam Zamanı Dağılımları ve Özellikleri

Bu kısımda tezde ele alınan bazı yaşam zamanı dağılımları verilmiştir.

2.7.1. Üstel dağılım

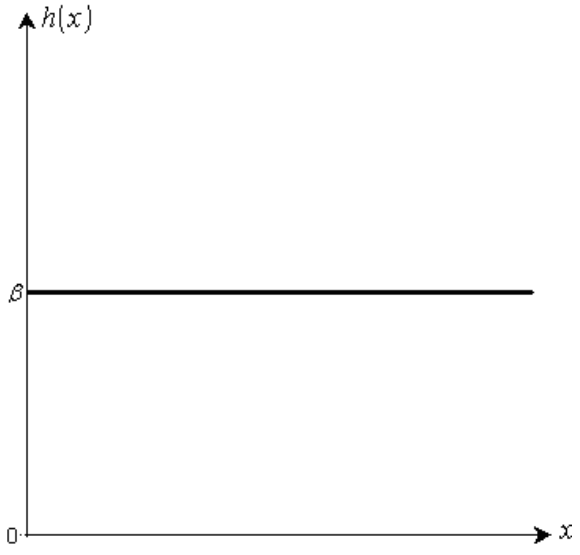
X rasgele değişkeni, Üstel dağılıma sahip ise, sırasıyla, olasılık yoğunluk, dağılım ve yaşam fonksiyonu,

$$f(x) = \beta \exp(-\beta x), \quad x > 0,\ \beta > 0 \tag{2.1}$$
$$F(x) = 1 - \exp(-\beta x)$$

şeklindedir. Üstel dağılımın bozulma oranı fonksiyonu, $h(x) = \beta$ olup bozulma oranı sabit olan tek dağılımdır. Şekil 1.1'de üstel dağılıma ait bozulma oranı grafiği verilmiştir. Üstel dağılımın Beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X) = \beta,\ Var(X) = \beta^2$$

biçimindedir.



Şekil 2.1 Üstel dağılıma ait bozulma oranı grafiği

2.7.2. Weibull dağılımı

Biyolojik, klinik, mühendislik, kalite kontrol ve diğer deneysel verilere iyi uyum göstermesi bakımından, ilk olarak Weibull (1939) tarafından önerilen ve $Weibull(\lambda,\beta)$ ile gösterilecek olan iki-parametreli Weibull dağılımı, uygulamada özel bir ilgi görmektedir. Weibull (1951), aşınma(wear-out) veya yorulma(fatigue) bozulmalarını tanımlarken, dağılımın kullanışlı olduğunu göstermiştir.

X rasgele değişkeni, Weibull dağılımına sahip ise, sırasıyla, olasılık yoğunluk, dağılım ve yaşam fonksiyonu,

$$f(x)=\beta\lambda^{-\beta}x^{\beta-1}\exp\left\{-\left(\lambda^{-1}x\right)^{\beta}\right\} \quad , \quad x>0 \ , \ \lambda>0 \ , \ \beta>0$$

$$F(x)=1-\exp\left\{-\left(\lambda^{-1}x\right)^{\beta}\right\}$$

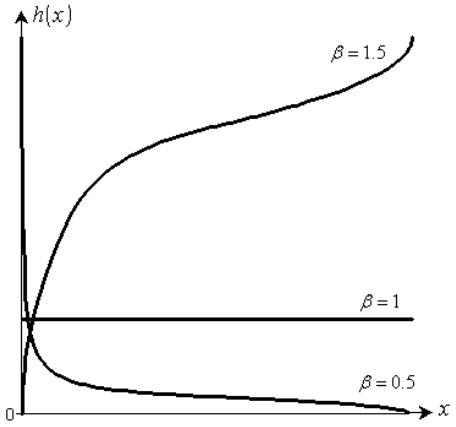
$$\overline{F}(x)=\exp\left\{-\left(\lambda^{-1}x\right)^{\beta}\right\}$$

biçimindedir. Burada β şekil, λ ölçek parametresidir (Lawless 1982). Bozulma oranı fonksiyonu $h(x)=\beta\lambda^{-\beta}x^{\beta-1}$ olup $\beta<1$ için azalan, $\beta=1$ için sabit ve $\beta>1$ için artandır. Beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X)=\lambda\left(1+\beta^{-1}\right)$$

$$Var(X)=\lambda^{2}\left\{\Gamma\left(1+2\beta^{-1}\right)-\Gamma^{2}\left(1+\beta^{-1}\right)\right\}$$

şeklindedir.



Şekil 2.2 Farklı β ve $\lambda=0.5$ parametreli Weibull dağılımına ait bozulma oranı grafiği

Şekil 2.2'den de kolayca görüleceği üzere Weibull dağılımı için, $\beta < 1$ için azalan bozulma, $\beta = 1$ için sabit bozulma ve $\beta > 1$ için artan bozulma oranı söz konusudur.

2.7.3. EG dağılımı

Azalan bozulma oranına sahip bir dağılım olup Adamidis ve Loukas (1998) tarafından üstel dağılım ile geometric dağılım birleştirilerek öne sürülmüştür.

X rasgele değişkeni EG (Exponential-Geometric) dağılımına sahip ise sırasıyla, olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu,

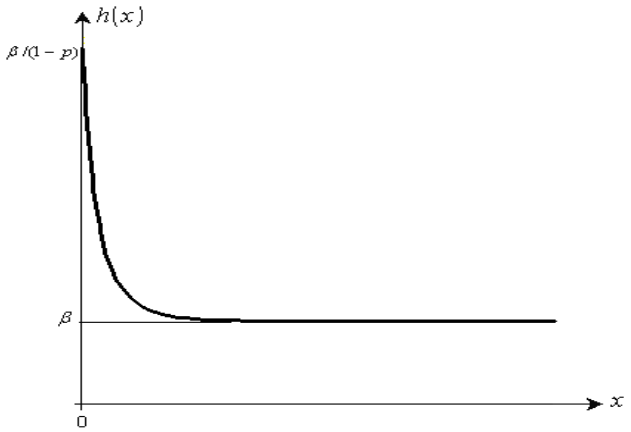
$$f(x) = \beta(1-p)\exp(-\beta x)\{1-p\exp(-\beta x)\}^{-2} \quad , \quad x > 0 \ , \ \beta > 0 \ , \ p \in (0,1)$$

$$F(x) = (1-\exp(-\beta x))\{1-p\exp($$

$$\overline{F}(x) = (1-p)\exp(-\beta x)\{1-p\exp(-\beta x)\}^{-1}$$

$$h(x) = \beta\{1-p\exp(-\beta x)\}^{-1}$$

şeklindedir. EG dağılımının beklenen değeri $E(X) = \beta p(p-1)\ln(1-p)$, varyansı $Var(X) = (1-p)(p\beta^2)^{-1}\{2L(p;2) + (1-p^{-1})\ln^2(1-p)\}$ şeklindedir. Burada $L(p;r)$ fonksiyonuna Euler'in genelleştirilmiş dilogaritma fonksiyonu denir ve $L(p;r) = \sum_{j=1}^{\infty} p^j j^{-r}$ eşitliğiyle hesaplanır (Adamidis ve Loukas 1998).



Şekil 2.3 EG dağılımına ait bozulma oranı grafiği

2.7.4. EP dağılımı

Kuş (2007) tarafından öne sürülen bu dağılım üstel dağılımla sıfırdan budanmış poisson dağılımı ile birleştirilmiş olup azalan bozulma oranı özelliği göstermektedir. X rasgele değişkeni EP (Exponantial-Poisson) dağılımına sahip ise sırasıyla, olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu,

$$f(x) = \beta\lambda(1-\exp(-\lambda))^{-1}\exp\{-\lambda-\beta x+\lambda\exp(-\beta x)\},\quad x>0,\ \lambda>0,\beta>0$$

$$F(x) = (1-\exp(-\lambda))^{-1}\{\exp(\lambda\exp(-\beta x))-\exp(\lambda)\}$$

$$\overline{F}(x) = \{1-\exp(\lambda\exp(-\beta x))\}\{(1-\exp(\lambda))^{-1}$$

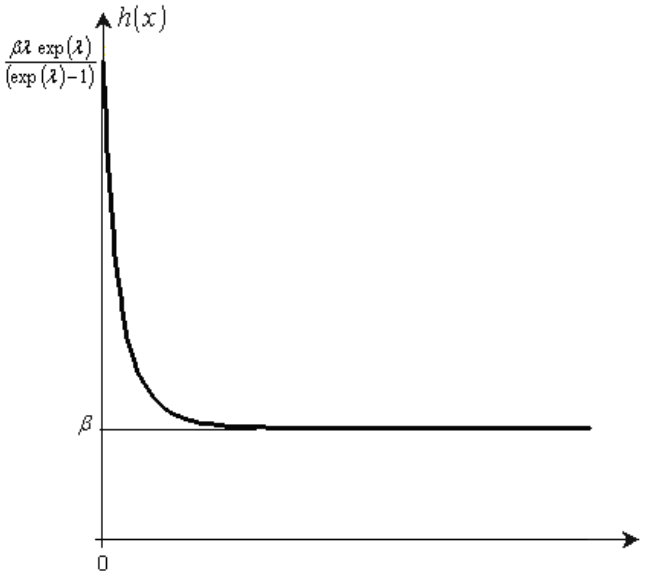
$$h(x) = \beta\lambda\exp(-\lambda-\beta x+\lambda\exp(-\beta x))(1-\exp(\lambda))\{(1-\exp(-\lambda))(1-\exp(\lambda\exp(-\beta x)))\}^{-1}$$

şeklindedir. X rasgele değişkenin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \lambda\{\beta(\exp(\lambda)-1)\}^{-1}H_{2,2}([1,1],[2,2],\lambda)$$

$$Var(X) = \lambda\left\{\beta^2(\exp(\lambda)-1)\right\}^{-1}\left\{2H_{3,3}([1,1,1],[2,2,2],\lambda)-\lambda\{(\exp(\lambda)-1)\}^{-1}H_{2,2}^2[1,1],[2,2],\lambda\right\}$$

biçimindedir (Kuş 2007).



Şekil 2.4 EP dağılımına ait bozulma oranı grafiği

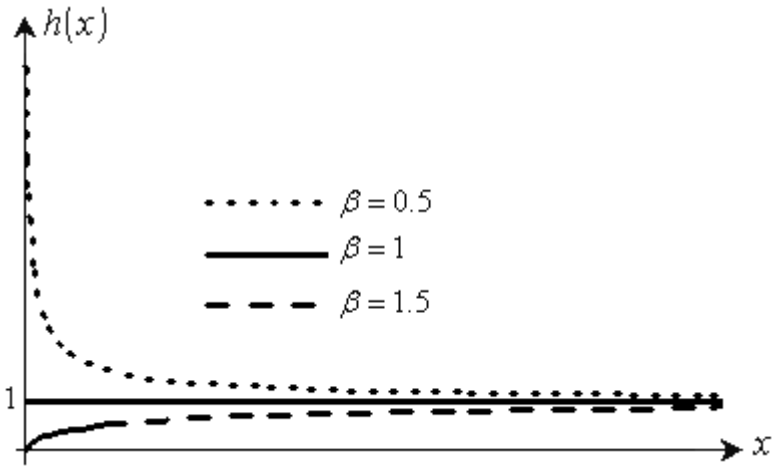
2.7.5. Gamma dağılımı

X rasgele değişkeni Gamma dağılımına sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu ve yaşam fonksiyonu fonksiyonu sırasıyla,

$$f(x) = \Gamma^{-1}(\beta)\lambda^{\beta} x^{\beta-1} \exp(-\lambda x) \quad , \; x > 0 \; , \; \lambda > 0 \; , \; \beta > 0$$

$$\overline{F}(x) = \Gamma^{-1}(\beta) \int_{x}^{\infty} \lambda^{\beta} x^{\beta-1} \exp(-\lambda x) dx$$

şeklindedir. Ayrıca Gamma dağılımı için; beklenen değer $E(X) = \lambda\beta$, varyans $Var(X) = \lambda^2\beta$ dir.



Şekil 2.5 Farklı β ve $\lambda = 1$ parametreli Gamma dağılımına ait bozulma oranı grafiği

Gamma dağılımı, $\beta = 1$ için üstel dağılım olduğundan $\beta = 1$ sabit bozulma oranına sahiptir. $\beta < 1$ için azalan bozulma oranı, $\beta > 1$ için artan bozulma oranına sahiptir.

2.7.6. Düzgün Dağılım

X rasgele değişkeni, (λ, β) aralığında düzgün dağılıma sahip ise, sırasıyla, olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonu,

$$f(x) = (\beta - \lambda)^{-1}, \ \lambda < x < \beta$$

$$F(x) = (x - \lambda)(\beta - \lambda)^{-1}, \ \lambda < x < \beta$$

biçimindedir. Beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X) = (\beta + \lambda)2^{-1}$$

$$Var(X) = (\beta - \lambda)^2 12^{-1}$$

şeklindedir. Düzgün dağılım için $Düzgün(\lambda, \beta)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.7.7. Pareto I dağılımı

X rasgele değişkeni, Pareto I dağılıma sahip ise, sırasıyla, olasılık yoğunluk, dağılım ve yaşam fonksiyonu,

$$f(x) = \lambda\beta^{\lambda} x^{-(\lambda+1)}, \quad x > \beta > 0, \ \lambda > 0$$

$$F(x) = 1 - \beta^{\lambda} x^{-\lambda}$$

$$\overline{F}(x) = \beta^{\lambda} x^{-\lambda}$$

şeklindedir. Hazard (bozulma) oranı $h(x) = \lambda x^{-1}$ olup azalandır. Pareto I dağılımının beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X) = \lambda\beta(\lambda - 1)^{-1}, \ \lambda > 1$$

$$Var(X) = \beta^2 \lambda \left\{(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)\right\}^{-1}, \ \lambda > 2$$

biçimindedir. Pareto I dağılımı aynı zaman da Lomax dağılımı olarak da bilinir. Pareto I dağılımı için $Pareto\,I(\lambda, \beta)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.7.8. Geometrik dağılım

Bu dağılım kesikli bir dağılım olup istatistik ve güvenirlik teorisinde kullanılmaktadır. X rasgele değişkeni, $(1 - p)$ başarı olasılıklı,

$$f(x, p) = (1 - p)p^{x-1} \quad p \in (0, 1) \ , \ x = 1,2,...$$

olasılık fonksiyonu ile belirtilen geometrik dağılıma sahiptir. Beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = (1-p)^{-1}$$

$$Var(X) = p(1-p)^{-2}$$

şeklindedir.

2.7.9. Negatif-binom dağılımı

Negatif-Binom dağılımı geometrik dağılımın genel şeklidir. n. denemede k. başarıyı sağlayan rasgele değişken negatif-binom dağılım özelliği gösterir. Negatif binom dağılımında denemelerin sayısı bir rasgele değişkendir ve başarıların sayısı sabittir. X rasgele değişkeni $(1-p)$ başarı olasılıklı negatif-binom dağılımına sahip ise olasılık fonksiyonu,

$$f(x,p,k) = \binom{x-1}{k-1}(1-p)^k p^{x-k},\ x = k, k+1, \ldots,\ p \in (0,1), k \in N^+ \qquad (2.2)$$

şeklindedir. Burada N^+ pozitif doğal sayıları göstermektedir. Negatif Binom dağılımının beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = k(1-p)^{-1}$$

$$Var(X) = kp(1-p)^{-2}$$

dir. Negatif Binom dağılımı için $NB(p,k)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.8. En Çok Olabilirlik Parametre Tahmini

Parametresini tahmin etmek istenilen kitle $f(x,\theta), \theta \in \Theta$ dağılımına sahip olsun. Burada θ kitle parametresini, Θ, parametre uzayını temsil etmektedir. Bu kitleden alınan ve her biri aynı $f(x,\theta), \theta \in \Theta$ dağılımına sahip $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rasgele değişkenlerin dizisine *örneklem* denir. Örneklemin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$L(\mathbf{x},\theta)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta)$$

biçimindedir. $L(\mathbf{x},\theta)$, θ'nın bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde *olabilirlik fonksiyonu(likelihood function)* adını alır.

Örneklemin bilinmeyen parametre içermeyen Borel ölçülebilir bir fonksiyonuna *istatistik* denir. İstatistikler aynı zamanda birer rasgele değişkendir. Bir istatistik bir parametreyi veya parametrenin bir fonksiyonunu tahmin etmek amacıyla kullanıldığında *tahmin edici(estimator)* adını alır. Tahmin edicinin aldığı değere de *tahmin(estimation)* denir.

$X_1,X_2,\ldots,X_n$, $f(x,\theta)$ $,\theta\in\Theta\subset R^r$ dağılımından alınmış örneklem olmak üzere $L(\hat{\theta}\mid\mathbf{x})=\sup_{\theta\in\Theta}(L(\theta\mid\mathbf{x}))$ olsun. $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2...,X_n)$ istatistiğine θ'nın *en çok olabilirlik tahmin edicisi (maximum likelihood estimator)* denir (Kuş 2004).

2.9. EM Algoritması

EM algoritması, rasgele değişkenlerin bazılarının gözlenmediği yani kayıp veya sansürlü olduğu durumlarda parametrelerin en çok olabilirlik tahminlerini elde etmek için önerilen genel bir iteratif algoritmadır. EM (Expectation-Maximization) terimi ilk kez Dempster ve ark. (1977) tarafından ortaya atılmış ve algoritmanın yapısı ve davranışı ile genel sonuçların ispatı ve çok sayıda uygulama bu çalışmada sunulmuştur.

Varsayalım ki $\mathbf{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)$, $f(\mathbf{y};\theta)$, $\theta\in\Re$ ortak oyf'na sahip bir örneklem olsun. $Y_1,\ldots,Y_n$'lerin hepsi gözlenmişse θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi, tam log-olabilirlik fonksiyonu $\ell(\theta,\mathbf{y})$'nın θ'ya göre maksimize edilmesiyle elde edilir. Burada,

$$\ell(\theta,\mathbf{y})=\log[L(\theta,\mathbf{y})]=\log[f(\mathbf{y},\theta)]$$

şeklindedir

EM algoritması, $\ell(\theta,\mathbf{y})$'nin θ'ya göre maksimize edilmesinin kolay fakat gözlenen log-olabilirlik fonksiyonu $\ell_g(\theta,\mathbf{y}_g)$'nin maksimize edilmesinin zor olduğu durumlarda kullanışlıdır. $\mathbf{Y}$'nin bir kısmı gözlenemediğinde $\ell(\theta,\mathbf{y})$ maksimize

edilemez. EM algoritması $\mathbf{Y}_g$ verildiğinde $\ell(\theta,\mathbf{y})$ nın koşullu beklenen değerini iteratif olarak maksimize eder.

$\mathbf{Y}$ tam veriyi(complete data); $\mathbf{Y}_g$, gözlenen veya tamamlanmayan(incomplete) verileri; $\mathbf{Y_k}$, kayıp (missing data) veya sansürlü (censored data) verileri göstermek üzere $\mathbf{Y}$ 'yi $\mathbf{Y}=(\mathbf{Y}_g,\mathbf{Y}_k)$şeklinde ifade edilebilir (Rubin 1976).

Algoritma

E- adımı.

$$Q(\theta;\theta^{(h)}) = E\left[\ell(\theta,\mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y}_g = \mathbf{y}_g, \theta^{(h)}\right]$$
$$= \int \ell(\theta,\mathbf{y}) f(\mathbf{y}_k \mid \mathbf{y}_g, \theta = \theta^{(h)}) d\mathbf{y}_k$$

M-adımı.

$E\left[\ell(\theta,\mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y}_g = \mathbf{y}_g, \theta^{(h)}\right]$'yi maksimize eden θ değeri, bir sonraki adımda $\theta^{(h+1)}$'in yerine kullanılarak, yakınsama gerçekleşinceye kadar E ve M adımları tekrar edilir. Algoritmanın yakınsadığı değer $\boldsymbol{\theta}$ 'nın en çok olabilirlik tahminidir (Little ve Rubin 1986). EM algoritması için geniş bilgi için McLachlan ve Krishnan'a (1997) bakılabilir.

2.10. Özel Fonksiyonlar

Bu tez çalışmasında ele alınan ve gösterim açısından kolaylık olması bakımından Gamma fonksiyonu ve Genelleştirilmiş Hipergeometrik fonksiyon aşağıdaki gibi tanıtılmıştır.

2.10.1. Gama fonksiyonu

Gama fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Gamma(\beta)=\int_0^{\infty} t^{\beta-1}\exp(-t)dt,\ \ \beta>0$$

β pozitif tam sayı olmak üzere

$$\Gamma(\beta+1)=\beta!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}\exp(-t^2)dt=\sqrt{\pi}=1.7724538509$$

$$\Gamma(2\beta)=(2\pi)^{-1/2}2^{2\beta-1/2}\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+1/2)$$

dir. Stirling formülü

$$\Gamma(\beta)\sim\exp(-\beta)\beta^{\beta-1/2}(2\pi)^{1/2}\left[1+\frac{1}{12\beta}+\frac{1}{288}\right]$$

olup $\Gamma(\beta)$ 'nın logaritması

$$\log[\Gamma(\beta)]=(\beta-2^{-1})\log(\beta)-\beta+2^{-1}\log(2\pi)+\frac{1}{12\beta}-\frac{1}{360\beta^3}+\frac{1}{1260\beta^5}+\cdots$$

dır.

2.10.2. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon

Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyon,

$$H_{a,b}(n,d,\zeta)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\zeta^j\prod_{i=1}^{a}\Gamma(n_i+j)\Gamma^{-1}(n_i)}{\Gamma(j+1)\prod_{i=1}^{b}\Gamma(d_i+k)\Gamma^{-1}(d_i)} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n=[n_1,n_2,...,n_a]$ olmak üzere, a, işlenen n'in sayısı, $d=[d_1,d_2,...,d_b]$, b işlenen d'in sayısını göstermektedir. Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyon ile ilgili bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

$$H_{2,1}([1,1],[1],z)=(1-z)^{-1}$$

$$H_{2,1}([1,2],[1],z)=(1-z)^{-2}$$

t, doğal sayı olmak üzere,

$$H_{2,1}([1,t],[1],2)=\begin{cases}-1 & ,\ t\ \ tek\ \ sayı\ ise\\ 1 & ,\ t\ \ çift\ \ sayı\ ise\end{cases}$$

dir.

a, b, c doğal sayı olmak üzere,

$$H_{2,1}([a,b],[c],1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}$$

şeklindedir. Bu fonksiyon aynı zamanda Barnes'in genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu olarak ta bilinir.

3. ÜSTEL NEGATİF BİNOM YAŞAM ZAMANI DAĞILIMI

Tezin bu bölümünde Üstel Negatif Binom yaşam zamanının elde edilişi karakteristik özellikleri ve EM algoritması ile en çok olabilirlik parametre tahmini elde edilmiştir.

3.1. Yaşam Zamanı Dağılımının Elde Edilişi Ve Karakteristikleri

$\{Y_i\}_{i=1}^{Z}$ bağımsız ve aynı (2.1)'deki olasılık yoğunluğuna sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Burada Z; (2.2)'deki olasılık fonksiyonuna sahip Y_i 'lerden bağımsız rasgele değişkendir. $X = \min\left(\{Y_i\}_{i=1}^{Z}\right)$ rasgele değişkeni tanımlansın. X rasgele değişkeni; Z rasgele sayıda birimden oluşan bir seri sistemin ömrü olarak düşünülebilir.

$Z = z$ verildiğinde X 'in koşullu dağılımı;

$$
\begin{aligned}
F_{X|Z=z}(x) &= P(X \le x \mid Z = z) \\
&= 1 - P(X > x \mid Z = z) \\
&= 1 - P(\min\left(\{Y_i\}_{i=1}^{z}\right) > x \mid Z = z) \\
&= 1 - \frac{P(\min\left(Y_1, Y_2, \cdots, Y_z\right) > x \ , \ Z = z)}{P(Z = z)} \\
&= 1 - \frac{P(Y_1 > x) \times P(Y_2 > x) \times \cdots \times P(Y_z > x) \times P(Z = z)}{P(Z = z)} \\
&= 1 - \exp(-\beta x) \times \exp(-\beta x) \times \cdots \times \exp(-\beta x) \\
&= 1 - \exp(-\beta z x), \quad x > 0
\end{aligned}
$$

dir. Buna göre $Z = z$ verildiğinde X 'in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$
\begin{aligned}
f_{X|Z=z}(x) &= \frac{\partial F_{X|Z=z}(x)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\{1 - \exp(-\beta z x)\}
\end{aligned}
$$

$$= \beta z \exp(-\beta z x) \ , \ x > 0$$

şeklinde elde edilir.

X ile Z rasgele değişkenlerinin ortak dağılımı $\theta = (\beta, p, k)$ gösterimi altında;

$$f(x, z; \theta) = \beta z \exp(-\beta z x) \binom{z-1}{k-1} (1-p)^k \, p^{z-k} \ , x > 0 , \beta > 0$$

şeklinde yazılabilir. X rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$f(x; \theta) = \sum_{z=k}^{\infty} f(x, z; \theta)$$

$$= \sum_{z=k}^{\infty} \beta z \exp(-\beta z x) \binom{z-1}{k-1} (1-p)^k \, p^{z-k}$$

$$= \beta k (1-p)^k \exp(\beta x) \{\exp(\beta x) - p\}^{-(k+1)}$$

$$= \beta k (1-p)^k \exp(-\beta k x) \{1 - p \exp(-\beta x)\}^{-(k+1)} , \quad x > 0 , \beta > 0 , p \in (0,1) , k \in N^+ \tag{3.1}$$

olacaktır.

Aşağıda $f(x;\theta)$'nın bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğu gösterilmiştir. $f(x;\theta) > 0$ olduğu aşikardır. $\int_0^{\infty} f(x;\theta) dx = 1$ olduğu gösterilirse $f(x;\theta)$'nın bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğu gösterilmiş olacaktır.

$$\int_0^{\infty} f(x;\theta) dx = \int_0^{\infty} \beta k (1-p)^k \exp(-\beta k x) \{1 - p \exp(-\beta x)\}^{-(k+1)} dx$$

$$= \beta k (1-p)^k \int_0^{\infty} \exp(-\beta k x) \{1 - p \exp(-\beta x)\}^{-(k+1)} dx$$

$$= \beta k(1-p)^k \int_0^\infty \exp(-\beta k x) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} \{p \exp(-\beta x)\}^j dx$$

$$= \beta k(1-p)^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} p^j \int_0^\infty \exp\{-\beta x(k+j)\} dx$$

$$= \beta k(1-p)^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} p^j \frac{1}{\beta(k+j)}$$

$$= k(1-p)^k \frac{1}{k(1-p)^k} = 1$$

olarak elde edilir. Burada ikinci satırdan üçüncü satıra geçerken

$$(1-a)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} a^j \,,\ |a| < 1 \tag{3.2}$$

eşitliği kullanılmıştır (Roussas 1973).

Kolaylık olması bakımından eşitlik (3.1)'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip dağılıma ENB (Exponential-Negative Binomial) dağılımı denilecektir. ENB dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonun grafiği farklı β, p ve k değerleri için Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de verilmiştir.

X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu eşitlik (3.2) yardımıyla

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

$$= \int_0^x \beta k(1-p)^k \exp(-\beta k x)\{1 - p\exp(-\beta x)\}^{-(k+1)} dx$$

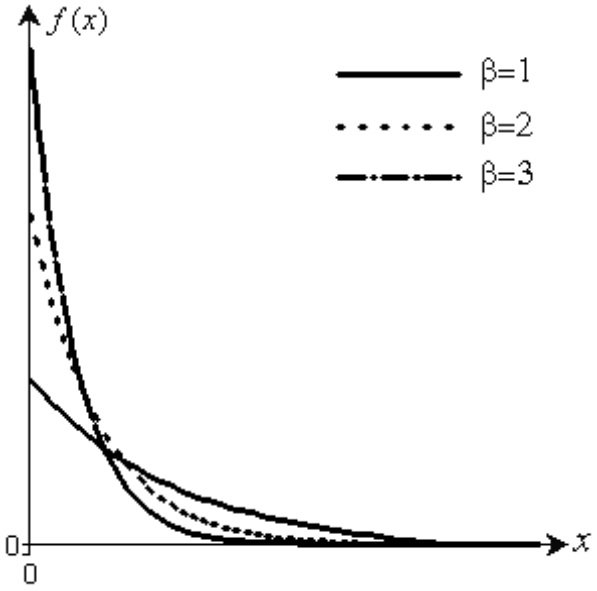
$$= \beta k(1-p)^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} p^j \int_0^x \exp\{-\beta x(k+j)\} dx$$

$$= \beta k(1-p)^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} p^j \frac{1 - \exp\{-\beta x(k+j)\}}{\beta(k+j)}$$

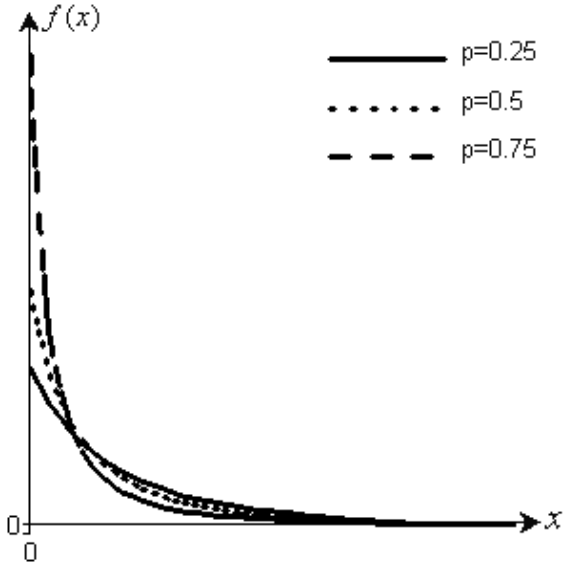
$$= 1 - (1-p)^k \{\exp(\beta x - p)\}^{-k}$$

şeklinde elde edilir.

ENB dağılımına sahip bir X rasgele değişkenin medyanı $F_X(x) = 1-(1-p)^k\{\exp(\beta x - p)\}^{-k} = 2^{-1}$ denklemin çözümünden $x_{0.5} = \beta^{-1}\log(\sqrt[k]{2}(1-p)+p)$ şeklinde elde edilir.



Şekil 3.1 Farklı β ve $p = 0.1$ ve $k = 1$ durumlarında ENB dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonun grafiği



Şekil 3.2 $\beta = 1$ ve $k = 1$ durumlarında ENB dağılımının olasılık yoğunluk grafiği

X rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu;

$$\mu_X(t) = E(\exp\{tX\})$$

$$= \beta k(1-p)^k \int_0^\infty \exp(tx)\exp(-\beta kx)\{1-p\exp(-\beta x)\}^{-(k+1)}\,dx$$

$$= \beta k(1-p)^k \int_0^\infty \exp\{-x(k\beta - t)\}\{1-p\exp(-\beta x)\}^{-(k+1)}\,dx$$

$$= \beta k(1-p)^k \sum_{j=0}^{\infty}\binom{k+j}{j}p^j \int_0^x \exp\{-x(k\beta + j\beta - t)\}dx$$

$$= \beta k(1-p)^k \sum_{j=0}^{\infty}\binom{k+j}{j}p^j \frac{1}{\beta(k+j)-t}$$

$$= \frac{\beta k(1-p)^k}{\beta k - t} H_{2,1,1}\left\{\left[k+1, k-t\beta^{-1}\right], \left[1+k-t\beta^{-1}\right], p\right\}$$

şeklinde bulunmuştur. Burada H fonksiyonu, (2.3)'de verilen genelleştirilmiş *Hipergeometrik* fonksiyondur.

$r.$ moment ve $r.$ moment yardımıyla beklenen değer ve varyans sırasıyla

$$E(X^r) = \beta k(1-p)^k \int_0^\infty x^r \exp(-\beta kx)\{1-p\exp(-\beta x)\}^{-(k+1)}\,dx$$

$$E(X) = \frac{(1-p)^k}{\beta k} H_{2,1,1}\{[k,k],[k+1],p\}$$

$$Var(X) = \frac{(1-p)^k}{(\beta k)^2}\left(2H_{3,2,1}\{[k,k,k],[k+1,k+1],p\} - (1-p)^k H^2_{2,1,1}\{[k,k],[k+1],p\}\right)$$

şeklindeki gibi elde edilir.

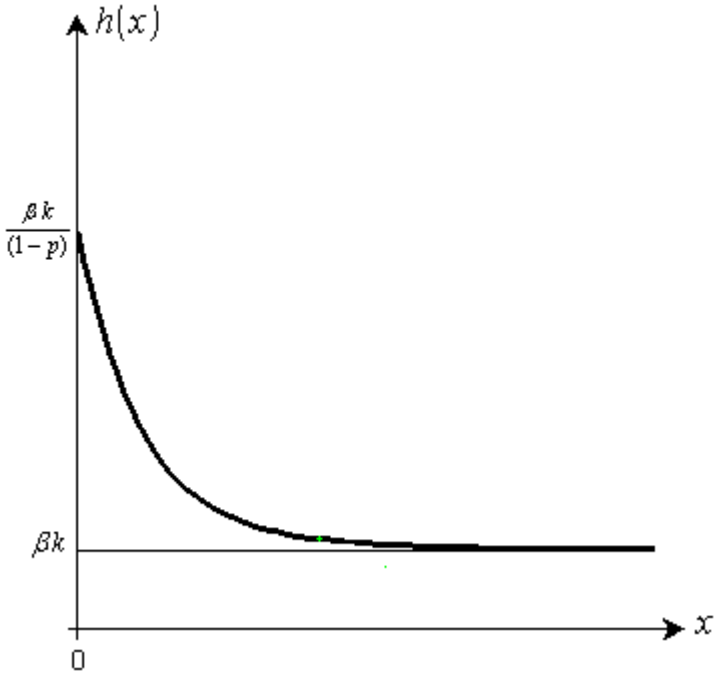
Eşitlik (3.3) kullanılarak X rasgele değişkenin yaşam (güvenilirlik) fonksiyonu,

$$\overline{F}(x;\theta) = (1-p)^k\{\exp(\beta x - p)\}^{-k} \tag{3.4}$$

eşitlik (3.1) ve eşitlik (3.4) den elde edilen hazard fonksiyonu da,

$$h(x;\theta) = f(x;\theta)\overline{F}^{-1}(x;\theta) = \beta k\exp(\beta x)\{\exp(\beta x) - p\}^{-1}$$

gibi olup grafiği Şekil 3.3'deki gibidir.



Şekil 3.3 ENB dağılımının bozulma oranı fonksiyonu grafiği

Teorem 2.1 gereği

$$\eta'(x) = -p\beta^2(k+1)\exp(\beta x)\{p-\exp(\beta x)\}^{-2} < 0 \ , \forall x > 0$$

olduğu için ENB dağılımı azalan bozulma oranına (DFR) sahiptir. Şekil 3.3'den de görüldüğü üzere ENB dağılımı için yine azalan bozulma oranı özelliğine sahip olduğu söylenebilir. ENB dağılımının başlangıç ve uzun dönemli bozulma oranları Weibull dağılımının $\left(h(0)=\infty\right.$ ve $\left.h(\infty)=0\right)$ aksine $h(0)=\beta k(1-p)^{-1}$ ve $h(\infty)=\beta k$ olup sabittir.

Bir parçanın x_0 kadar yaşadığı bilindiğinde, bu parça bozuluncaya kadar geçen süreye geriye kalan ömür denir. ENB dağılımının ortalama geriye kalan ömrü,

$$m(x_0;\theta) = E\{X - x_0 \mid X \geq x_0;\theta\}$$

$$= \int_{x=x_0}^{\infty} (x-x_0) f_{X|X\geq x_0}(x)\,dx$$

$$= \frac{\exp(-\beta x_0 k)\{\exp(\beta x_0)-p\}^k \, H_{2,1}\{[k,k],[k+1], p\exp(-\beta x_0)\}}{\beta k}$$

şeklinde bulunmuştur. $x_0 = 0$ düşünüldüğü zaman ortalama geriye kalan ömür beklenen değere eşit olur.

3.2. Diğer Dağılımlarla İlişki

X rasgele değişkeni eşitlik (3.1)'de verilen olasılık yoğunluklu ENB dağılımına sahip ise $Y = -\alpha\, k \log\big((1-p)(\exp\{\beta X\} - p)\big)$ rasgele değişkeni $Üstel(\alpha)$ dağılımına, $Y_1 = -k\lambda\alpha^{-1} \log\big((1-p)(\exp\{\beta X\} - p)\big)$ rasgele değişkeni $Weibull(\lambda, \alpha)$ dağılımına, $Y_2 = \alpha\Big((1-p)\{\exp(\beta X) - p\}^{-1}\Big)^{-k/\lambda}$ rasgele değişkeni $Pareto\, I\,(\lambda, \alpha)$ dağılımına sahiptir. p, sıfıra yaklaştıkça ENB dağılımı Üstel(βk)dağılımına yakınsar. Parametrelerin alabileceği tüm değerler için ENB dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu kesin azalandır ve x sonsuza yaklaştıkça $f(x)$ sıfıra yaklaşır.

3.3. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri

En çok olabilirlik tahmin edicisini bulmak için $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ve $\boldsymbol{\theta} = (\beta, p, k)$ olmak üzere, gözlenen verilerin olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = \big(\beta k(1-p)\big)^n \exp\left(-\beta k \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \prod_{i=1}^{n} \big(1 - p\exp(-\beta x_i)\big)^{-(k+1)}$$

ve gözlenen verilerin log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = n\log(\beta) + n\log(k) + kn\log(1-p) - \beta k \sum_{i=1}^{n} x_i - (k+1)\sum_{i=1}^{n} \log\big(1 - p\exp(-\beta x_i)\big)$$

şeklindedir. Buradan en çok olabilirlik denklemleri;

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x})}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} x_i - (k+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - p\exp(-\beta x_i)} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x})}{\partial p} = \frac{1}{p}\left\{\frac{n(p-k-1)}{1-p} + (k+1)\right\}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - p\exp(-\beta x_i)}$$

şeklinde elde edilir. $k \in N^{+}$ olduğu için olabilirlik denklemi yazılamaz. Bu nedenle *k*'nın değer kümesi içinde olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden k, model için uygun *k* değeri olarak alınacaktır. Uygulama kısmında *k*' nın seçim süreci üzerinde durulmuştur.

Teorem 3.1. *(3.5) eşitliğinin sağ tarafı* $g(\beta, p, k; x)$ *ile gösterilsin ve* $\bar{x} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$ *olsun. O zaman* $p \in (0,1)$ *için* $g(\beta, p, k; x) = 0$ *denkleminin* $(k+1)\{\bar{x}(k+p)\}^{-1}$ *ile* $(k\bar{x})^{-1}$ *arasında en az bir kökü vardır.*

İspat

$w(\beta, p, k; \mathbf{x}) = (k+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - p\exp(-\beta x_i)}$ olsun. Açıktır ki; w, β'nın kesin azalan bir fonksiyonudur ve $\lim_{\beta \to \infty} w(\beta, p, k; \mathbf{x}) = (k+1)\sum_{i=1}^{n} x_i$ dir. Buradan;

$$g(\beta, p, k; \mathbf{x}) < n\beta^{-1} - \sum_{i=1}^{n} x_i - \lim_{\beta \to \infty} w(\beta, p, k; \mathbf{x}) = n\beta^{-1} - k\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ve böylelikle $g(\beta, p, k; \mathbf{x}) < 0$ olduğu zaman $\beta > (k\bar{x})^{-1}$ olur.

Diğer yandan $\lim_{\beta \to 0} w(\beta, p, k; \mathbf{x}) = (k+1)(1-p)^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$ açıktır ki;

$$g(\beta, p, k; \mathbf{x}) > n\beta^{-1} - \sum_{i=1}^{n} x_i - \lim_{\beta \to 0} w(\beta, p, k; \mathbf{x}) = n\beta^{-1} - \sum_{i=1}^{n} x_i - (k+1)(1-p)^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

dir. Böylelikle $g(\beta, p, k; \mathbf{x}) > 0$ olduğu zaman $\beta < (k+1)\{\bar{x}(k+p)\}^{-1}$ olur ve $g(\beta, p, k; \mathrm{x}) = 0$ denkleminin $(k+1)\{\bar{x}(k+p)\}^{-1}$ ile $(k\bar{x})^{-1}$ arasında en az bir kökü olduğunu ispatlamış olduk.

Bu teorem ve ispatı Adamidis ve Loukas (1998) ve Kuş (2007)'un yaptıkları çalışmalar göz önünde tutularak yapılmıştır. Kökünün tek olup olmadığı problemi halen açıktır. Ancak yapılan tez çalışmasında kökün tek olduğu düşünülmektedir.

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, ENB dağılımından alınmış bağımsız ve aynı dağılımlı tam örneklem olsun. Her X_i için arka planda bir Z_i'nin gözlenemeyeceği düşünülürse $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$'ler kayıp örneklem olur.

Problemimiz tamamlanmamış veri problemi gibi görülebileceğinden parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmede EM algoritması kullanılabilir. EM algoritmasını uygulayabilmek için tam veriye dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^{n} z_i \binom{z_i - 1}{k-1} (1-p)^{nk} \, p^{-nk + \sum_{i=1}^{n} z_i} \, \beta^n \exp\left\{ -\beta \sum_{i=1}^{n} z_i x_i \right\}$$

$$x_i > 0 \ , \ z_i = 1,2,\ldots n \ , \ p \in (0,1) \ , k \in N^+ \ , \ \beta > 0 \ \ , \ i = 1,2,\ldots,n$$

şeklindedir. Buradan da logolabilirlik fonksiyonu;

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}, \mathrm{z}) = \log\left[\prod_{i=1}^{n} z_i \binom{z_i - 1}{k-1} \right] + nk \log(1-p) + \left(-nk + \sum_{i=1}^{n} z_i \right) \log(p)$$

$$+ n \log(\beta) - \beta \sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

dir ve EM algoritmasının E-adımı

$$E\{\log[f(\mathbf{X}, \mathbf{Z})]\} = E\left(\log\left[\prod_{i=1}^{n} Z_i \binom{Z_i - 1}{k-1} \right] | \, \mathbf{X} = \mathbf{x}, \beta^{(t)}, p^{(t)} \right) + nk \log(1-p)$$

$$+ \log(p) E\left(-nk + \sum_{i=1}^{n} Z_i \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}, \beta^{(t)}, p^{(t)} \right) + n \log(\beta)$$

$$- \beta E\left(\log\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i \mathbf{X}_i \right) | \, \mathbf{X} = \mathbf{x}, \beta^{(t)}, p^{(t)} \right) \qquad (3.6)$$

şeklinde tamamlanır. Eşitlik (3.6)'dan EM algoritmasının E-adımını gerçekleştirebilmek için $E(Z \mid X)$ koşullu beklenen değerin hesaplanması gerekmektedir. Koşullu beklenen değer için $X = x$ verildiğinde Z'in koşullu dağılımı

$$f(z \mid x) = \frac{f(x,z)}{f(x)} = \frac{\binom{z-1}{k-1} (1-p)^z \, p^{z-k} \, \beta \, z \exp(-\beta \, z \, x)}{\beta k (1-p)^k \exp(-\beta k x) \{1 - p \exp(-\beta x)\}^{-(k+1)}}$$

$$= \binom{z}{k} \exp\{-\beta x(z+k)\} p^{z-k} \{1 - p\exp(-\beta x)\}^{k+1}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $X = x$ verildiğinde Z 'nin koşullu beklenen değeri;

$$E(Z \mid X = x) = \sum_{z=k}^{\infty} z \binom{z}{k} \exp\{-\beta x(z+k)\} p^{z-k} \{1 - p\exp(-\beta x)\}^{k+1}$$

$$= (k+1)\{1 - p\exp(-\beta x)\}^{-1} - 1 \qquad (3.7)$$

biçiminde elde edilir. EM algoritmasının M adımında ise tam veriyi kullanarak elde edilen en çok olabilirlik tahmin edicisinde kayıp veri olan $Z_i, i = 1,...,n$ 'lerin yerine $E(Z \mid X)$'nin (3.7)'deki değeri yazılarak EM algoritması tamamlanır. Tam veriyi kullanarak elde edilen en çok olabilirlik tahmin edicileri,

$$\hat{\beta} = n\left\{\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i\right\}^{-1} \qquad \text{ve} \qquad \hat{p} = 1 - nk\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^{-1}$$

şeklindedir ve buradan da EM iterasyonları;

$$\hat{\beta}^{(t+1)} = n\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\left(k + p^{(t)}\exp\left(-\beta^{(t)}x_i\right)\right)}{1 - p^{(t)}\exp\left(-\beta^{(t)}x_i\right)}\right\}^{-1}$$

$$\hat{p}^{(t+1)} = 1 - nk\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(k + p^{(t)}\exp\left(-\beta^{(t)}x_i\right)\right)}{1 - p^{(t)}\exp\left(-\beta^{(t)}x_i\right)}\right\}^{-1}$$

biçiminde elde edilir.

3.4. Simulasyon Algoritması

ENB dağılımından sayı üretmek için iki yöntem aşağıdaki gibi verilmiştir.

I. Yöntem (Dönüşüm yöntemi)

$Z \sim NB(p,k)$' dan bir sayı üretilir. Daha sonra $Y_1, Y_2, ..., Y_Z \sim Üstel(\beta)$'dan bir örneklem alınır. $X = Min(Y_1, Y_2, ..., Y_Z) \sim \text{ENB}(\beta, p, k)$'dır.

II.Yöntem (Ters dönüşüm yöntemi)

i. $U \sim Düzgün(0,1)$'den bir sayı üretilir.

ii. $X = \beta^{-1} \log\left\{(1-p)(1-U)^{-1/k} + p\right\}$

olmak üzere $X \sim \text{ENB}(\beta, p, k)$.'dır.

4. WEIBULL NEGATİF-BİNOM DAĞILIMI

Tezin bu bölümünde Weibull Negatif Binom dağılımının elde edilişi karakteristik özellikleri ve EM algoritması ile en çok olabilirlik parametre tahmini elde edilmiştir.

4.1 Yaşam Zamanı Dağılımının Elde Edilişi Ve Karakteristikleri

$\{Y_i\}_{i=1}^{Z}$ bağımsız ve aynı $f(y;\beta,\alpha)=\beta\alpha^{\beta}y^{\beta-1}\exp\{-(\alpha y)^{\beta}\}, y,\beta,\alpha>0$ Weibull olasılık yoğunluğuna sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Burada Z; (2.2)'deki olasılık fonksiyonuna sahip $Y_i, i=1,2,...Z$ 'lerden bağımsız rasgele değişkendir. $X=\min\left(\{Y_i\}_{i=1}^{Z}\right)$ rasgele değişkeni tanımlansın.

$Z=z$ verildiğinde X 'in koşullu dağılımı;

$$
\begin{aligned}
F_{X|Z=z}(x) &= P(X \le x \mid Z=z) \\
&= 1-P(X>x \mid Z=z) \\
&= 1-P(\min\left(\{Y_i\}_{i=1}^{z}\right)>x \mid Z=z) \\
&= 1-\frac{P(\min\left(Y_1,Y_2,\cdots,Y_z\right)>x\ ,\ Z=z)}{P(Z=z)} \\
&= 1-\frac{P(Y_1>x)\times P(Y_2>x)\times\cdots\times P(Y_z>x)\times P(Z=z)}{P(Z=z)} \\
&= 1-\exp\{-(x\alpha)^{\beta}\}\times\exp\{-(x\alpha)^{\beta}\}\times\cdots\times\exp\{-(x\alpha)^{\beta}\} \\
&= 1-\exp\{-z(x\alpha)^{\beta}\}\ ,\ x>0
\end{aligned}
$$

dir. Buna göre $Z=z$ verildiğinde X 'in koşullu olasılık dağılımı;

$$
\begin{aligned}
f_{X|Z=z}(x) &= \frac{\partial F_{X|Z}(x)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(1-\exp\{-z(x\alpha)^{\beta}\}\right) \\
&= z\beta\alpha^{\beta}x^{\beta-1}\exp\{-z(x\alpha)^{\beta}\}\ ,\ x>0
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir.

X ile Z rasgele değişkenlerinin ortak dağılımı $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, p, k)$ gösterimi altında;

$$f(x,z;\theta) = z\beta\alpha^{\beta} x^{\beta-1} \exp\left\{-z(x\alpha)^{\beta}\right\} \binom{z-1}{k-1} (1-p)^{k} p^{z-k}$$

şeklinde bulunur. X rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= \sum_{z=k}^{\infty} f(x,z;\theta) \\ &= \sum_{z=k}^{\infty} z\beta\alpha^{\beta} x^{\beta-1} \exp\left\{-z(x\alpha)^{\beta}\right\} \binom{z-1}{k-1} (1-p)^{k} p^{z-k} \\ &= \beta k x^{\beta-1} \alpha^{\beta} (1-p)^{k} \exp\left\{-k(x\alpha)^{\beta}\right\} \left(1 - p\exp\left\{-(x\alpha)^{\beta}\right\}\right)^{-(k+1)} \\ &\quad x, \alpha, \beta > 0 \ , p \in (0,1), k \in N^{+} \end{aligned} \tag{4.1}$$

olacaktır.

Eşitlik (4.1)'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip dağılıma WNB (Weibull-Negative Binomial) dağılımı denilecektir. WNB dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonun grafiği farklı α , β, p ve k değerleri için Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de verilmiştir.

WNB dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$F_X(x) = 1 - (1-p)^{k} \exp\left\{-k(x\alpha)^{\beta}\right\} \left(1 - p\exp\left\{-(x\alpha)^{\beta}\right\}\right)^{-k} \tag{4.2}$$

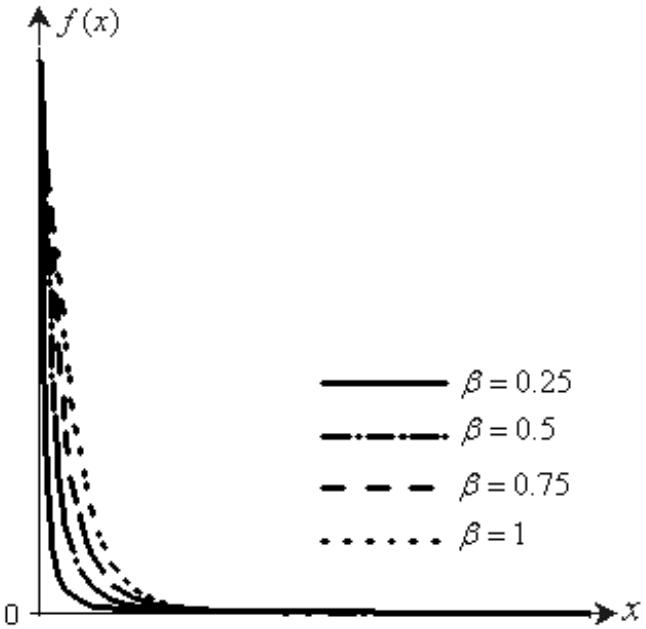
şeklinde bulunmuştur.

WNB dağılımının *r.* momenti ve beklenen değeri eşitlik 3.2 kullanılarak sırasıyla,

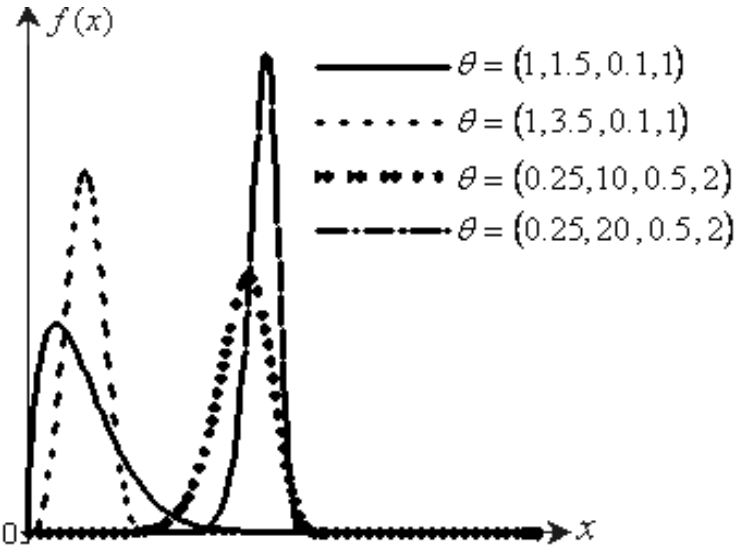
$$E\left(X^{r}\right) = k(1-p)^{k} \alpha^{-r} \Gamma\left(1 + r\beta^{-1}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} p^{j} (k+j)^{-\left(1+r\beta^{-1}\right)}$$

$$E(X) = k(1-p)^k \alpha^{-1}\Gamma(1+\beta^{-1})\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k+j}{j} p^j (k+j)^{-(1+\beta^{-1})}$$

şeklindeki gibi elde edilmiştir.



Şekil 4.1 Farklı β, k=3, p=0.5 ve $\alpha = 2$ için WNB dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



Şekil 4.2 $\beta > 1$ için WNB dağılımı olasılık yoğunluk grafiği

Eşitlik (4.2) kullanılarak WNB dağılımının yaşam (güvenilirlik) fonksiyonu,

$$\overline{F}(x;\theta) = (1-p)^k \exp\left\{-k(x\alpha)^\beta\right\}\left(1-p\exp\left\{-(x\alpha)^\beta\right\}\right)^{-k} \tag{4.3}$$

eşitlik (4.1) ve eşitlik (4.3) den elde edilen hazard fonksiyonu da,

$$h(x;\theta) = k\beta\alpha^\beta x^{\beta-1}\left(1-p\exp\left\{-(x\alpha)^\beta\right\}\right)^{-1}$$

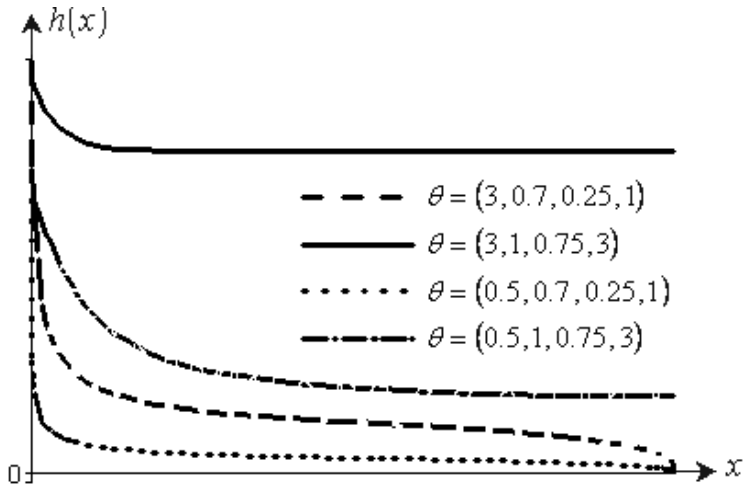
gibi elde edilmiştir.

$$\lim_{x\to 0} h(x;\theta) = 0$$

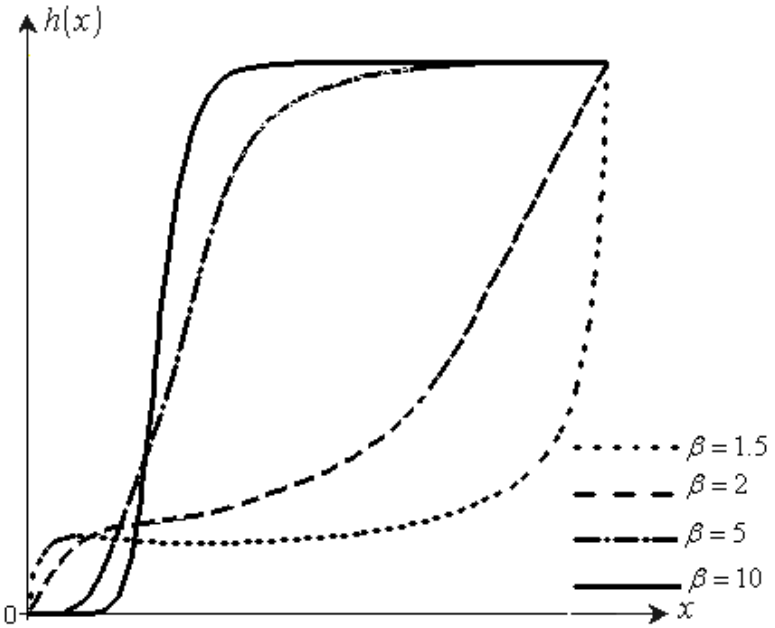
$$\lim_{x\to \infty} h(x;\theta) = \infty$$

dir.

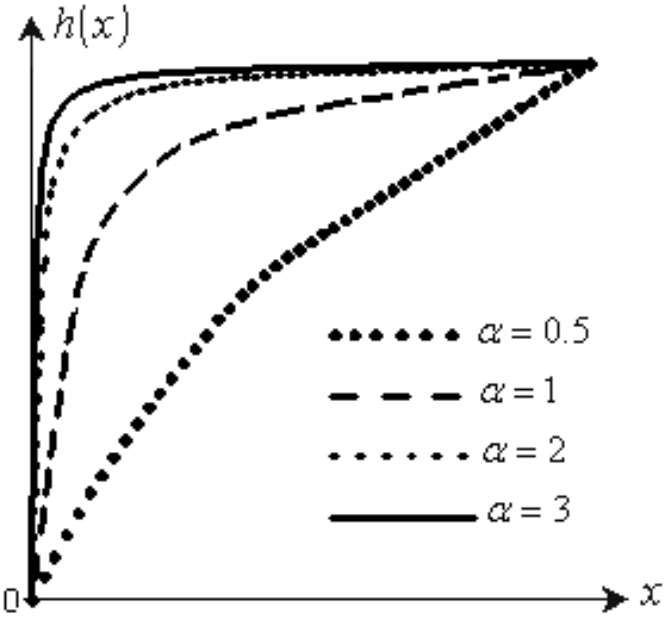
$\beta \le 1$ olduğu durumlarda WNB dağılımı azalan bozulma oranına sahiptir. $\beta = 1$ için WNB dağılımı ENB dağılımına dönüşmekte olup azalan bozulma oranına sahip olmaktadır. $\beta \le 1$ olduğu durumlarda WNB dağılımının azalan bozulma oranı grafiği Şekil. 4.3'de gösterilmiştir. $\beta > 1$ olduğu durumlarda ise WNB dağılımı artan, azalan ve küvet eğrisi bozulma oranlarına sahip olmaktadır. WNB dağılımının artan, azalan ve küvet eğrisi bozulma oranları grafikleri farklı parametre değerleri için, Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'daki gibidir.



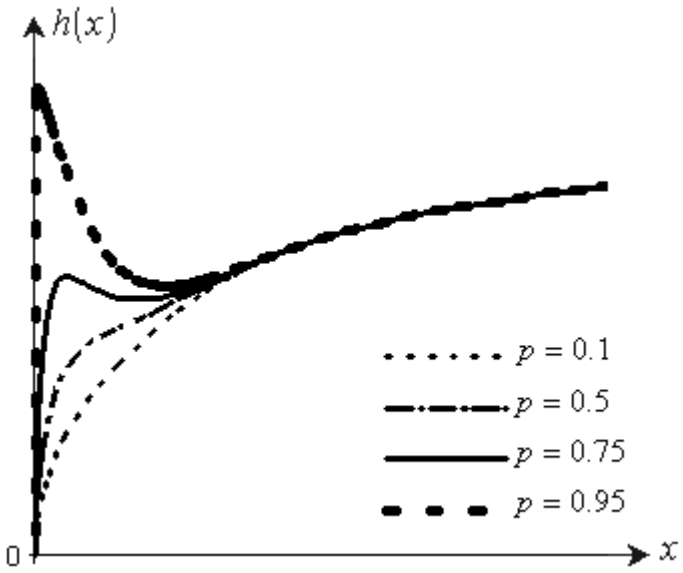
Şekil 4.3 $\beta \le 1$ için WNB dağılımı hazard fonksiyonu grafiği



Şekil 4.4 Farklı $\beta > 1$, $\alpha = 0.5$, $p = 0.5$ ve *k*=1 için WNB dağılımı bozulma oranı fonksiyonu grafiği



Şekil 4.5 Farklı α, $\beta = 2$, $p = 0.5$ ve *k*=3 için WNB dağılımı bozulma oranı grafiği



Şekil 4.6 Farklı p , $\beta = 1.5$, $\alpha = 2$ ve k=1 için WNB dağılımı bozulma oranı fonksiyonu grafiği

4.2 Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahmini

En çok olabilirlik tahmin edicisini bulmak için $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ve $\boldsymbol{\theta} = (\beta, p, k)$ olmak üzere, gözlenen verilerin olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\boldsymbol{\theta};\mathbf{x}) = \left(\beta k (1-p)^k \alpha^\beta\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta-1} \exp\left(-k\alpha^\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^\beta\right) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - p\exp\left\{-(x_i\alpha)^\beta\right\}\right)^{-(k+1)}$$

ve gözlenen verilerin log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ell(\boldsymbol{\theta};\mathbf{x}) = n\log(\beta) + n\log(k) + kn\log(1-p) + n\beta\log(\alpha) + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

$$-k\alpha^\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^\beta - (k+1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(1 - p\exp\left\{-(x_i\alpha)^\beta\right\}\right)$$

şeklindedir. Buradan en çok olabilirlik denklemleri;

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta};\mathbf{x})}{\partial p} = \frac{1}{p}\left\{\frac{n(p-k-1)}{1-p} + (k+1)\right\}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1 - p\exp\left\{-(x_i\alpha)^\beta\right\}}$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta};\mathbf{x})}{\partial \alpha} = \frac{n\beta}{\alpha} + \beta\alpha^{\beta-1}\sum_{i=1}^{n} x_i - (k+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1 - p\exp\left\{-(x_i\alpha)^\beta\right\}}$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta};\mathbf{x})}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + n\log(\alpha) + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i) - k\alpha^{\beta}\log(\alpha)\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$- p\alpha^{\beta}(k+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\beta}\log(x_i\alpha)\exp\left\{-(x_i\alpha)^{\beta}\right\}}{1-p\exp\left\{-(x_i\alpha)^{\beta}\right\}}$$

biçiminde elde edilir.

Elde edilen olabilirlik denklemlerinden doğrudan çözümünü bulmak kolay değildir. Bu yüzden parametrelerin çözümü için iteratif bir yöntem olan EM algoritması uygulanabilir. EM algoritmasına dayalı olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\boldsymbol{\theta};\mathbf{x},\mathbf{z}) = \beta^n\alpha^{n\beta}\left[\prod_{i=1}^{n}z_i\binom{z_i-1}{k-1}\right](1-p)^{nk}\,p^{-nk+\sum_{i=1}^{n}z_i}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\beta-1}\exp\left\{-\alpha^{\beta}\sum_{i=1}^{n}z_i x_i^{\beta}\right\}$$

$$x_i > 0\ ,\ z_i = 1,2,\ldots n\ ,\ p\in(0,1)\ ,k\in N^{+}\ ,\ \beta>0\ \ ,\ \alpha>0\ ,\ i=1,2,\ldots,n$$

şeklinde elde edilmiş olup, logolabilirlik fonksiyonu da,

$$\log[L\,f(\mathbf{x},\mathbf{z})] = n\log(\beta) + n\beta\log(\alpha)\log\left[\prod_{i=1}^{n}z_i\binom{z_i-1}{k-1}\right] + nk\log(1-p)$$

$$+\left(-nk+\sum_{i=1}^{n}z_i\right)\log(p) + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\log(x_i) - \alpha^{\beta}\sum_{i=1}^{n}z_i x_i^{\beta}$$

dir. EM algoritmasının E adımı,

$$E\{\log[f(\mathbf{X},\mathbf{Z})]\} = n\log(\beta) + n\beta\log(\alpha) + E\left(\log\left[\prod_{i=1}^{n}Z_i\binom{Z_i-1}{k-1}\right]\middle|\,\mathbf{X}=\mathbf{x},\alpha^{(t)},\,\beta^{(t)},p^{(t)}\right)$$

$$+ nk\log(1-p) + \log(p)E\left(-nk+\sum_{i=1}^{n}Z_i\mid\mathbf{X}=\mathbf{x},\beta^{(t)},p^{(t)}\right)$$

$$+(\beta-1)E\left(\log\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i\right)\middle|\,\mathrm{X}=\mathrm{x},\alpha^{(t)},\,\beta^{(t)},p^{(t)}\right)$$

$$-\alpha^{\beta}E\left(\log\left(\sum_{i=1}^{n}Z_i\mathrm{X}_i^{\beta}\right)\middle|\,\mathrm{X}=\mathrm{x},\alpha^{(t)},\,\beta^{(t)},p^{(t)}\right)$$

şeklindedir. Algoritmanın E adımının tamamlanması için $E(Z\mid X)$ beklenen değerinin hesaplanması gerekmektedir. $X=x$ verildiğinde Z'in koşullu dağılımı

$$f(z \mid x) = \frac{f(x,z)}{f(x)} = \binom{z}{k}\left[p\exp\left\{-(x\alpha)^{\beta}\right\}\right]^{z-k}\left[1-p\exp\left\{-(x\alpha)^{\beta}\right\}\right]^{k+1}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $X = x$ verildiğinde Z 'nin koşullu beklenen değeri;

$$E(Z \mid X = x) = \sum_{z=k}^{\infty} z\binom{z}{k}\left[p\exp\left\{-(x\alpha)^{\beta}\right\}\right]^{z-k}\left[1-p\exp\left\{-(x\alpha)^{\beta}\right\}\right]^{k+1}$$

$$= (k+1)\left[1-p\exp\left\{-(x\alpha)^{\beta}\right\}\right]^{-1} - 1 \qquad (4.4)$$

biçiminde elde edilmiştir. Algoritmanın M adımında tam veri kullanılarak elde edilen en çok olabilirlik tahmin edicileri,

$$\hat{p} = 1 - nk\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^{-1}, \qquad \hat{\alpha} = \sqrt[\beta]{\frac{n}{Z_i X_i^{\beta}}}$$

ve β için

$$n\hat{\beta}^{-1} + n\log(\alpha) + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i) - \alpha^{\hat{\beta}}\left(\log(\alpha)\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i^{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^{n} Z_i X_i^{\hat{\beta}}\log(x_i)\right) = 0$$

lineer olmayan denklemin çözümüdür.

Tam veriyi kullanarak elde edilen en çok olabilirlik tahmin edicisinde kayıp veri olan $Z_i, i = 1,...,n$ 'lerin yerine $E(Z \mid X)$ 'nin (4.4)'deki değeri yazılarak EM algoritması tamamlanır. EM iterasyonları;

$$\hat{p}^{(t+1)} = 1 - nk\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(k + p^{(t)}\exp\left\{-\left(\alpha^{(t)}x_i\right)^{\beta^{(t)}}\right\}\right)}{1 - p^{(t)}\exp\left\{-\left(\alpha^{(t)}x_i\right)^{\beta^{(t)}}\right\}}\right\}^{-1}$$

$$\hat{\alpha}^{(t+1)} = n^{\beta^{(t+1)^{-1}}}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta^{(t+1)}}\frac{\left(k + p^{(t)}\exp\left\{-\left(\alpha^{(t)}x_i\right)^{\beta^{(t)}}\right\}\right)}{1 - p^{(t)}\exp\left\{-\left(\alpha^{(t)}x_i\right)^{\beta^{(t)}}\right\}}\right\}^{-1/\beta^{(t+1)}}$$

$$\frac{n}{\beta^{(t+1)}}+n\log\left(\alpha^{(t)}\right)+\sum_{i=1}^{n}\log\left(x_i\right)-\alpha^{(t)\beta^{(t+1)}}\left\{(k+1)\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta^{(t+1)}}\frac{\log\left(\alpha^{(t)}x_i\right)}{1-p^{(t)}\exp\left\{-\left(x_i\alpha^{(t)}\right)^{\beta^{(t)}}\right\}}\right\}$$

$$+\alpha^{(t)\beta^{(t+1)}}\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta^{(t+1)}}\log\left(x_i\right)+\log\left(\alpha^{(t)}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta^{(t+1)}}\right\}=0$$

gibi elde edilmiştir.

5. UYGULAMA

Uyguluma için ENB, EP, EG, Weibull ve Gamma dağılımları incelenmiştir ve bu dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonları $\theta_1 = (\beta_1, p_1, k)$, $\theta_2 = (\beta_2, \lambda_2)$, $\theta_3 = (\beta_3, p_3)$, $\theta_4 = (\beta_4, \lambda_4)$ ve $\theta_5 = (\beta_5, \lambda_5)$ gösterimiyle sırasıyla aşağıdaki şekildedir.

$$f_1(x;\theta_1) = \beta_1 k(1-p_1)^k \exp(-\beta_1 kx)\{1 - p_1 \exp(-\beta_1 x)\}^{-(k+1)}$$
$$x > 0, \beta_1 > 0, p_1 \in (0,1), k \in N^+$$

$$f_2(x;\theta_2) = \beta_2 \lambda_2 (1 - \exp(-\lambda_2))^{-1} \exp\{-\lambda_2 - \beta_2 x + \lambda_2 \exp(-\beta_2 x)\}$$
$$x > 0,\ \lambda_2 > 0, \beta_2 > 0$$

$$f_3(x;\theta_3) = \beta_3 (1-p_3)\exp(-\beta_3 x)\{1 - p_3 \exp(-\beta_3 x)\}^{-2}$$
$$x > 0\ ,\ \beta_3 > 0\ ,\ p_3 \in (0,1)$$

$$f_4(x;\theta_4) = \beta_4 {\lambda_4}^{-\beta_4} x^{\beta_4 - 1} \exp\left\{-\left(\lambda_4^{-1} x\right)^{\beta_4}\right\} \quad , \quad x > 0\ ,\ \lambda_4 > 0\ ,\ \beta_4 > 0$$

$$f_5(x;\theta_5) = \Gamma^{-1}(\beta_5) {\lambda_5}^{\beta_5} x^{\beta_5 - 1} \exp(-\lambda_5 x) \quad , \quad x > 0\ ,\ \lambda_5 > 0\ ,\ \beta_5 > 0$$

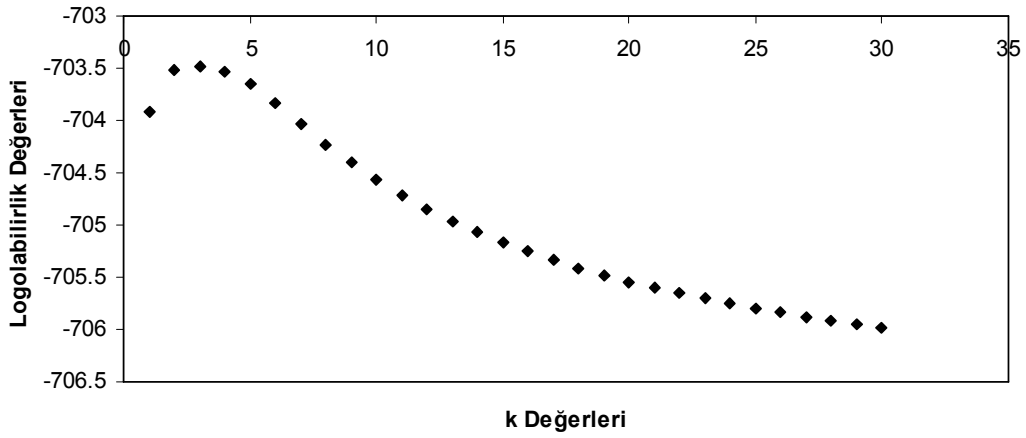
5.1. Grizu Patlaması Verisi

ENB dağılımının reel bir veriyi modelleyebileceğini göstermek amacıyla ilk olarak Cox ve Lewis (1978)'in analiz ettiği İngiltere deki bir kömür madenindeki ardışık patlamalar (kömür madenciliğinde grizu patlaması olarak adlandırılan) arasındaki geçen süreler (gün) ele alınmıştır. Bu verileri aynı zamanda Adamidis ve Loukas (1998) ve Kuş (2007) kullanmışlardır. Veriler Çizelge 5.1 de verilmiştir. Uygulama dağılımları kullanılarak bu reel veri için, P-P plot grafiği çizilerek uyum iyilikleri incelenmiş olup, parametrelerin tahmini için en çok olabilirlik tahmini

kullanılmıştır. SELÇUK STAT paket programı yardımıyla ENB, EP, EG, Weibull ve Gamma dağılımları için P-P plot grafikleri sırasıyla, Şekil 5.2, Şekil 5.3, Şekil 5.4, Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'de verilmiştir. Çizelge 5.2 de ise, parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri ve logolabilirlik fonksiyonu değerleri verilmiştir.

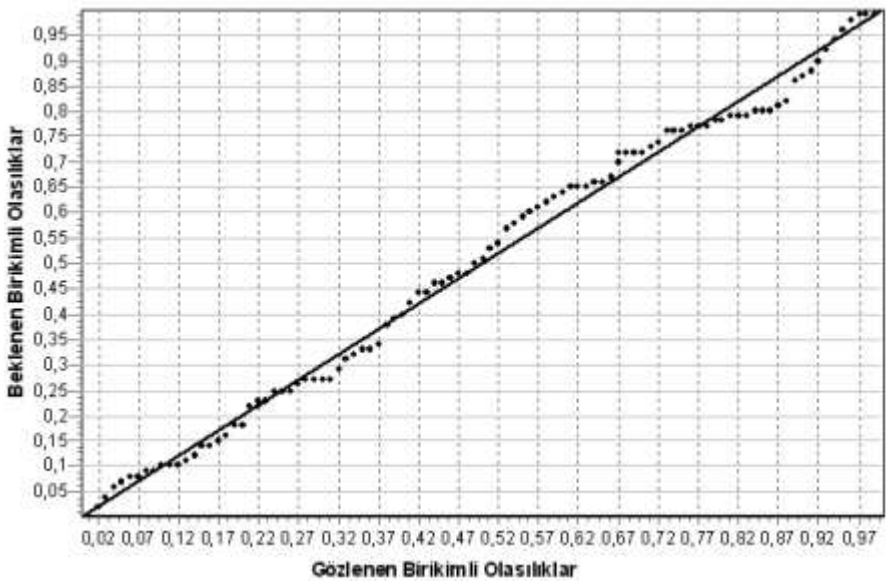
Çizelge 5.1 İngilterede bir kömür madeninde meydana gelen ardışık grizu patlamaları arasında geçen süreler (gün).

378	**59**	**54**	**498**	**217**	**156**
36	**61**	**217**	**49**	**120**	**47**
15	**1**	**113**	**131**	**275**	**129**
31	**13**	**32**	**182**	**20**	**1630**
215	**189**	**23**	**255**	**66**	**29**
11	**345**	**151**	**195**	**291**	**217**
137	**20**	**361**	**224**	**4**	**7**
4	**81**	**312**	**566**	**369**	**18**
15	**286**	**354**	**390**	**338**	**1357**
72	**114**	**58**	**72**	**336**	
96	**108**	**275**	**228**	**19**	
124	**188**	**78**	**271**	**329**	
50	**233**	**17**	**208**	**330**	
120	**28**	**1205**	**517**	**312**	
203	**22**	**644**	**1613**	**171**	
176	**61**	**467**	**54**	**145**	
55	**78**	**871**	**326**	**75**	
93	**99**	**48**	**1312**	**364**	
59	**326**	**123**	**348**	**37**	
315	**275**	**457**	**745**	**19**	



Şekil 5.1 ENB dağılımında *k* parametresinin değerlerine göre logolabilirlik fonksiyonun aldığı değerler.

ENB dağılımında *k* parametresinin seçimi için; *k*=1,…,30 a kadar değerler verilmiş, bu değerler için ayrı ayrı parametre tahmini yapılmış ve logolabilirlik fonksiyonunu en büyük yapan *k* değeri için *k*' nın değeri belirlenmiştir. *k* değerlerine karşı gelen logolabilirlik fonksiyonu grafiği Şekil 5.1' de verilmiştir. Grafikten kolayca görüleceği üzere *k*=3 için logolabilirlik fonksiyonu en büyük değerindedir. Bu nedenle model için *k*=3 alınmıştır.



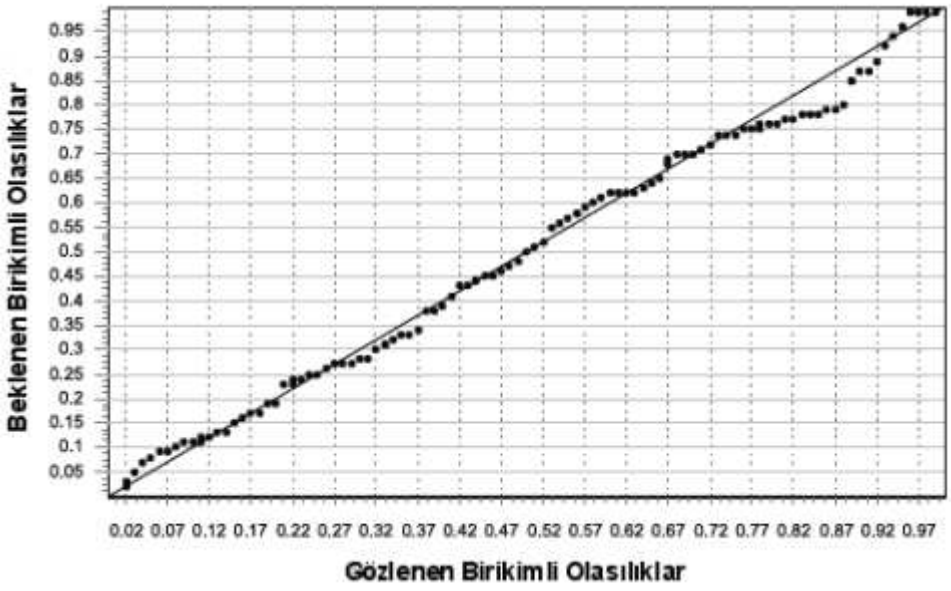
Şekil 5.2 ENB Dağılımı P-P Plot Grafiği



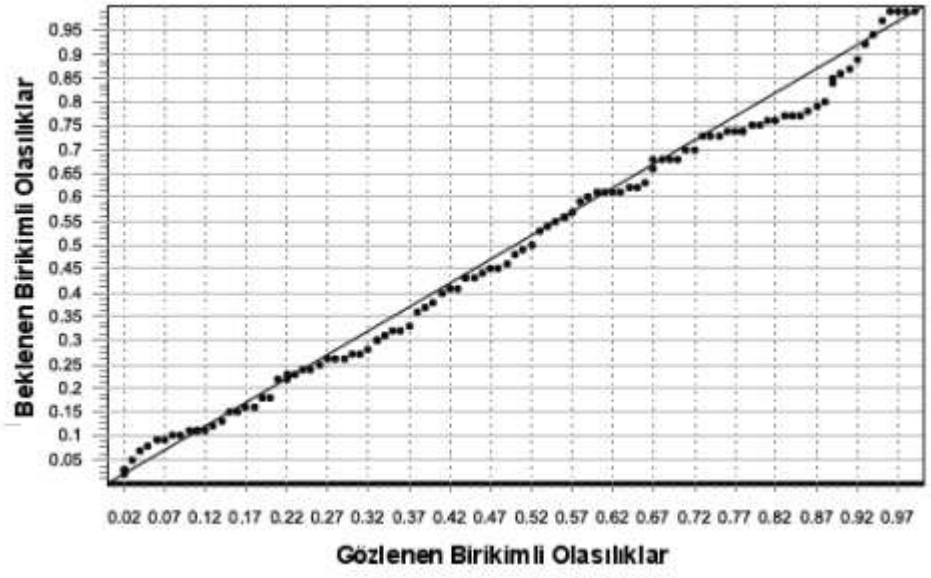
Şekil 5.3 EP Dağılımı P-P Plot Grafiği



Şekil 5.4 EG Dağılımı P-P Plot Grafiği



Şekil 5.5 Weibull Dağılımı P-P Plot Grafiği

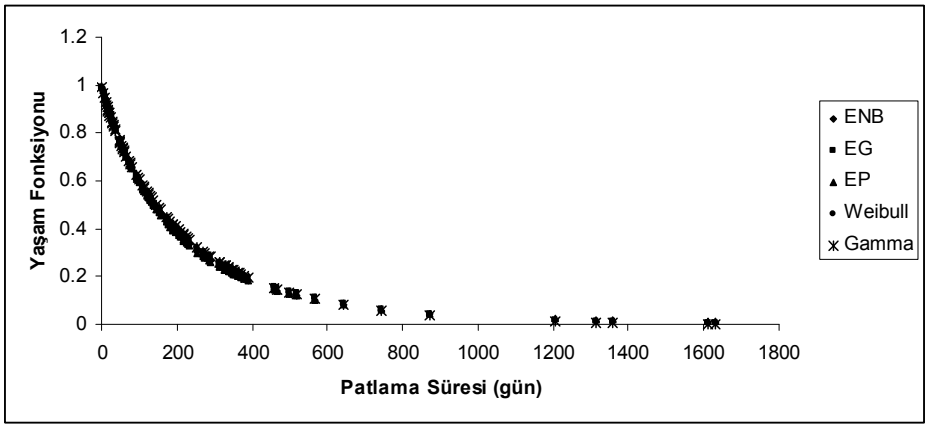


Şekil 5.6 Gamma Dağılımı P-P Plot Grafiği

Çizelge 5.2 Uygulama modellerine ait
Logolabilirlik değerleri ve Parametre Tahminleri

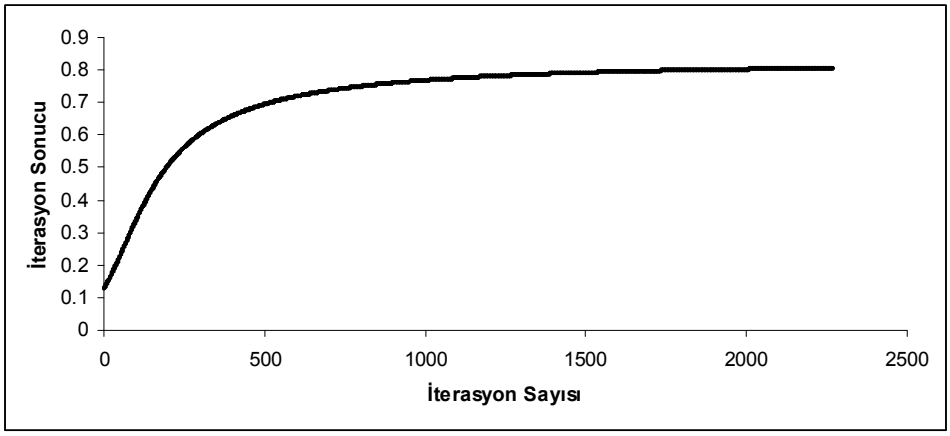
Dağılım	Logolabilirlik	Tahminler
ENB	-703.4900	$\hat{\theta}_1 = \left(3.55\times10^{-4}, 0.806015, 3\right)$
EP	-703.3710	$\hat{\theta}_2 = \left(3.2148, 1.67\times10^{-3}\right)$
EG	-703.9165	$\hat{\theta}_3 = \left(2.65\times10^{-3}, 0.5602\right)$
Weibull	-704.6367	$\hat{\theta}_4 = \left(4.5\times10^{-3}, 0.8650\right)$
Gamma	-705.4496	$\hat{\theta}_5 = \left(3.44\times10^{-3}, 0.8280\right)$

Delphi 5.0 programlama dili yardımıyla yapılan parametre tahmini sonuçları Çizelge 5.2 deki gibidir. ENB dağılımı için iterasyon başlangıç değerleri $\beta^{(0)} = 1$ ve $p^{(0)} = 0.1$ seçilmiştir. 2269 iterasyon sonucunda 10^{-5} hata derecesi ile tahmin değerlerine yakınsama sağlanmıştır. İterasyon sonucu parametrelerin aldığı değerler ve iterasyon sayısına göre grafikleri Şekil 5.8 ve 5.9'de verilmiştir. Modeller için verilen P-P Plot grafiklerine bakılarak modellerin veri setine uygun olduğu görülmekte ve bu veriyi modelleyebileceği görülmektedir. Logolabilirlik fonksiyonunun aldığı değerlere göre EP dağılımı en iyi tahmin yapmış olup ENB dağılımı ise en iyi ikinci tahmini yapmıştır ve en az diğer dağılımlar gibi veriyi modellemiştir.

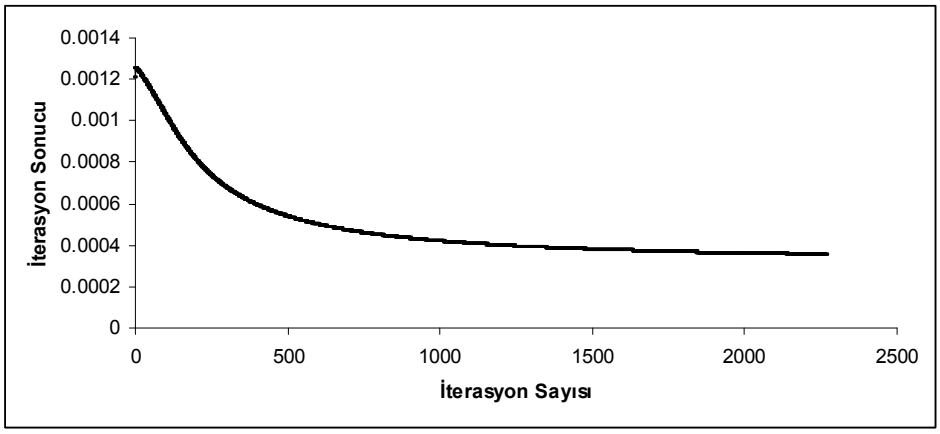


Şekil 5.7 Grizu patlamaları arasındaki geçen sürelere dayalı en çok olabilirlik tahmin edicileri kullanılarak elde edilen ENB, EG, EP, Weibull ve Gamma dağılımlarının yaşam fonksiyonları grafiği

Şekil 5.7'ye bakıldığında $x<156$ durumunda ENB dağılımı yaşam fonksiyonu, EG, EP, Weibull ve Gamma dağılımlarının yaşam fonksiyonlarından daha güvenilir olmaktadır. $156 \le x \le 871$ durumlarında EP dağılımı yaşam fonksiyonu hariç ENB, EG, Weibull ve Gamma dağılımlarının yaşam fonksiyonları beraber gitseler de $x>871$ durumlarında ENB dağılımı yaşam fonksiyonu daha iyi uyum sağlamıştır.



Şekil 5.8 p parametresinin iterasyonlar sonucu aldığı değerler



Şekil 5.9 β parametresinin iterasyonlar sonucu aldığı değerler

Şekil 5.8 ve Şekil 5.9'dan görüleceği üzere p parametresi artarken β parametresi azalmaktadır. İki parametre arasındaki Pearson korelasyon katsayısı

-0.998 olarak bulunmuştur. Parametreler arasındaki doğrusal ilişki ölçüsünün ters olduğu açıkça gözükmektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, yaşam zamanı ile ilgili mevcut dağılımlara alternatif ve Adamidis ve Loukas (1998)'in önerdiği EG dağılımının genel hali olan ENB isimli ve ENB dağılımının genel hali olan WNB isimli yeni iki yaşam dağılımı önerilmiştir. Bu iki dağılımın elde edilişi üzerinde durulmuştur. Dağılımların dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu, bozulma oranı fonksiyonu, r. momentleri, beklenen değerleri, varyansı ve EM algoritması ile en çok olabilirlik parametre tahminleri hesaplanmıştır. Ayrıca ENB dağılımı için iki tane simülasyon algoritması verilmiştir.

Uygulama kısmında ENB dağılımı, EG, EP, Weibull ve Gamma dağılımları ile kıyaslama yapılmıştır ve logolabilirlik değerlerine göre ENB dağılımının reel olan uygulama verisi için en iyi ikinci tahmin yaptığı sonucuna varılmıştır. Böylece ENB dağılımının reel bir veriyi en az diğerleri kadar modelleyebileceği gösterilmiştir. WNB dağılımı için herhangi bir uygulama yapılmamıştır.

Bölüm 3 ve Bölüm 4'teki yeni yaşam zamanı dağılımı elde edilmesindeki dağılım birleştirme yöntemi farklı dağılımlar için de uygulanabilir. Ayrıca WNB dağılımının reel bir veriyi modelleyip modellemeyeceği konusu üzerinde durulabilir.

7. KAYNAKLAR

Adamidis K., Loukas S., 1998. A Life Time Distribution with Decreasing Failure Rate. Statistics&Probability Letters 39, 35-42.

Adamidis, K., Dimitrakopoulou, T., Loukas, S., (2005). On an extension of the exponential-geometric distribution. Statist. Probab. Lett. 73, 259-269.

Barlow, R. E., Marshall, A. W., Proschan, F., 1963. Properties of Probability Distributions with Monotone Hazard Rate. Annals of Mathematical Statistic 34 375-389.

Barlow, R. E., Marshall, A. W., 1964. Bounds For Distributions with Monotone Hazard Rate I And II. Annals of Mathematical Statistics 35 1234-1274.

Barlow, R. E., Marshall, A. W., 1965. Tables of Bounds For Distributions with Monotone Hazard Rate. J. Amer. Statist. Assoc. 60 872-890.

Başar, E., 1993. Yaşam Tabloları Analizinde Kullanılan Bazı İstatistiksel Tekniklerin Böbrek Nakli Verilerine Uygulanması. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Bebbington, M., Lai, C.D., Zitikis, R., 2008. Estimating the turning point of a bathtub-shaped failure distribution. Journal of Statistical Planning and Inference 138, 1157-1166.

Carrasco, J.,M.,F., Ortega, E.,M.,M., Cardeiro, G.,M., 2008. A Generalized Modified Weibull distribution for life time modelling. Comput. Statist. & Data Analy. Volume 53, Issue 2, 450-462.

Chahkandi, M., Ganjali, M., 2009. On Some lifetime distributions with decreasing failure rate. . Comput. Statist. & Data Analy. Volume 53, Issue 12, 4433-4440.

Chen, Z., (2000). A new two-parameters lifetime distribution with bathtub-shape or increasing failure rate function. Statis. & Probab. Lett. 49, 155-161.

Dahiya R.C., Gurland J., 1972. Goodness of Fit Tests For the Gamma And Exponential Distributions. Technometrics 14 791-801.

Dempster A.P., Laird N.M., Rubin D.B., 1977. Maximum Likelihood From Incomplete Data via the EM Algorithm (With Discussion). Journal of the Royal Statistical Society B 39 1-38.

Dimitrakopoulou, T., Adamidis, K., Loukas, S., 2007. A lifetime Distribution with an upside-down bathtub-shaped hazard function. IEEE Transactions on Reliability, Vol. 56, No. 2.

Finkelstein, M., S., Esaulova, V., 2001. Why the mixture failure rate decreases. Reliability Engineering and System Safety 71, 173-177.

Finkelstein, M., S., Esaulova, V., 2006. Asimptotic Behavior Of A General Class Of Mixture Failure Rates. Appl. Probab. 38, 244-262

Frank, M., V., 2005. Investigation into the effect of decreasing failure rate on long duration mission reliability estimates. Europan Space Agency (special publication) ESA SP Issue 599, pp. 303-308

Glaser, R.E., 1980. Bathtub and related failure rate characterizations. Journal of the American Statistical Association 75, 371. 667-672.

Gleser, L. J., 1989. The Gamma Distribution As A Mixture of Exponential Distributions. The American Statistician 43 115-117.

Gurland, J., Sethuraman, J., 1994. Reversal of Increasing Failure Rates When Pooling Failure Data. Technometrics 36 416-418.

Hjorth, U., (1980). A reliability distribution with increasing, decrasing, canstant and bathtub-shaped failure rates. Technometrics, Volume 22, No. 1.

Kuş, C., (2004). Bazı yaşam zamanı dağılımlarının parametrelerinin tam ve sansürlü verilere dayalı tahmini. S.Ü. Fen Bilimleri Enst. Matematik ABD. Doktora tezi, Konya.

Kuş, C., (2007). A new lifetime distribution. Comput. Statist. & Data Anal. 51 (9), 4497-4509.

Lawless, J.F., 1982. Statistical models and methods for lifetime data, Wiley, New York

Leemis L., M., 1986. , Lifetime Distribution identities. IEEE Trans. Reliability 35, pp. 170-174.

Little R.J.A. Ve Rubin D.B., 1987. Statistical Analaysis with Missing Data. Wiley, New York.

Lomax, K. S., 1954. Business Failure: Another Example of the Analysis of Failure Data. J. Amer. Statist. Assoc. 49, 847-852.

Marshall A.W., Proschan F., 1965. Maximum Likelihood Estimates For Distributions with Monotone Failure Rate. Annals of Mathematical Statistics 36 69-77.

Mclachlan G.J., Krishnan T., 1997. The EM Algorithm And Extension. Wiley, New York.

Mcnolty, F., Doyle, J., Hansen, E., 1980. Properties of the Mixed Exponential Failure Process. Technometrics 22 555-565.

Mudholkar, G.S., Srivastava, D.K., 1993. Exponentiated Weibull family for analysing bathtub failure data. IEEE Transactions on Reliability 42, 299-302.

Nassar ,M.,.M., 1988. Two Properties of Mixtures of Exponential Distributions. IEEE Trans. Raliab. 37 4 383-385.

Nelson, W., 1982. Applied Life Data Analysis, Wiley, New York.

Proschan F., 1963. Teoratical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate. Technometrics 5 375-383.

Roussas, G.G., 1973. A First Course in Mathematical Statistics. Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A.

Saunders S.C., Myhre J.M., 1983. Maximum Likelihood Estimation For Two-Parameter Decreasing Hazard Rate Distributions Using Censored Data. J. Amer. Statist. Assoc. 78 664-673.

Tahmasbi, R., Rezaei, S., 2008. A two-parameter lifetime distribution with decrasing failure rate. Comput. Statist. & Data Anal. 52, 3389-3901.

Weibull, W., 1939. The Phenomenon of Rupture in Solids. Ingenior Vetenskaps Akademiens Handlingar, 153 2.

Weibull, W., 1951. Statistical Distribution Function of Wide Applicability. J. Appl. Mech.. 18, 293-297

Xie, M., Tang, Y., Goh, T.N. (2002). A modified Weibull extension with bathtub-shaped failure rate function. Reliability Engineering & System Safety, 76, 279-285.