T.C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİNE FONKSİYONLARLA YAKLAŞIK HESAPLAMA

Murat UÇAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Konya, 2018

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SPLİNE FONKSİYONLARLA YAKLAŞIK HESAPLAMA

Murat UÇAR

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Haydar BULGAK

2018, 40 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Haydar BULGAK

Doç. Dr. Rabia AKTAŞ

Doç. Dr. Tuncer ACAR

S.Ü. Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezinde "Graphics Constructor 2.0" yazılımı 2003 te hazırlandı. Bu yazılımda bir fonksiyonunun yaklaşık grafiğinin şekli çizildi ve doğrusal spline fonksiyonlar için uzunluk, x ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanı ve hacim değerleri hesaplandı. Bu çalışmada ise özel kuadratik spline fonksiyonlar için uzunluk, x ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanı ve hacim değerleri hesaplamak için tam formüller verildi. Hermite kübik spline fonksiyonlar için x ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen hacim değerleri hesaplamak için tam formüller verildi. Ayrıca Hermite kübik spline fonksiyonlar için x ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzey alanı ve eğrinin uzunluğunu yamuklar kuralını kullanarak hesaplamasının algoritmaları verildi.

Anahtar Kelimeler : Spline fonksiyonlar, Belirli integral, Hesaplamalar

ABSTRACT

MASTER THESIS

USING SPLINE FUNCTIONS FOR COMPUTING

Murat UÇAR

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Scienceds

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Haydar BULGAK

2018, 40 pages

Jury: Prof. Dr. Haydar BULGAK

Doç. Dr. Rabia AKTAŞ

Doç. Dr. Tuncer ACAR

In 2003, the Research Center of Applied Mathematics of Selçuk University developed an application called "Graphics Constructor 2.0". The application allows to draw an approximate graph of a function defined by a number of separate fixed points, 'knots'. The graph can be calculated as Lagrange interpolation polynomial, a first degree, a special quadratic and a cubic Hermite spline functions.

The application calculates several values, namely 'Integral', 'Curve', 'Area' and 'Volume'. The 'Integral' is the calculated area under the graph. The 'Curve' is the length of the arc of the graph. The "Volume" and "Area" are the calculated volume and area of the solid of revolution of the graph rotated around the X-axis.

The "Integral" is computed for the all spline interpolation functions. But another values are computed only for the first degree spline functions.

In the thesis the exact formulas for these values in case of the special quadratic spline functions are given. The exact formula for compute "Volume" for the Hermite cubic spline is given also. For compute the values "Curve " and "Area" for Hermite cubic spline functions it is suggested to use a trapezoidal rule.

Key words : Spline functions, Definite integral, Computing

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında rehberlik eden, tüm desteği ve yardımları için değerli danışmanım Prof. Dr. Haydar BULGAK hocama; çalışmalarım boyunca bilgi birikimleri ve destekleriyle teşvik edici olan değerli hocalarım Prof. Dr. Kemal AYDIN ve Yrd. Doç. Dr. Ayşe BULGAK'a; Ayrıca Fikirlerimizi Bilgisayar yazılımı haline getiren Dilyaver EMİNOV'a, Yüksek lisans çalışmaları boyunca manevi desteklerini esirgemeyen eşim Zekiye UÇAR, abim Op. Dr. Fikret UÇAR'a ve varlıklarından dolayı mutluluk duyduğum çocuklarıma teşekkürlerimi sunarım.

Murat UÇAR

KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ ..... **iii**

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **….vii**

1. GİRİŞ……..……...……1

2. SPLİNE FONKSİYONLAR……..……..……4

3. İNTEGRALLE İLGİLİ KULLANILACAK BİLGİLER…….……11

4. **ÖZEL KUADRATİK SPLİNE FONKSİYONLAR** 17

4.1. Özel Kuadratik Spline Fonksiyonun Uzunluğu 19
4.2. Özel Kuadratik Spline Fonksiyonun Dönel Yüzey Hacmi 22
4.3. Özel Kuadratik Spline Fonksiyonun Dönel Yüzey Alanı 27

5. HERMİTE KÜBİK SPLİNE FONKSİYONLAR 30

5.1. Hermite Kübik Spline Fonksiyonun Dönel Yüzey Hacmi 30
5.2. Hermite Kübik Spline Fonksiyonun Uzunluğunun ve Dönel Yüzey Alanın Yaklaşık Hesaplanması 33

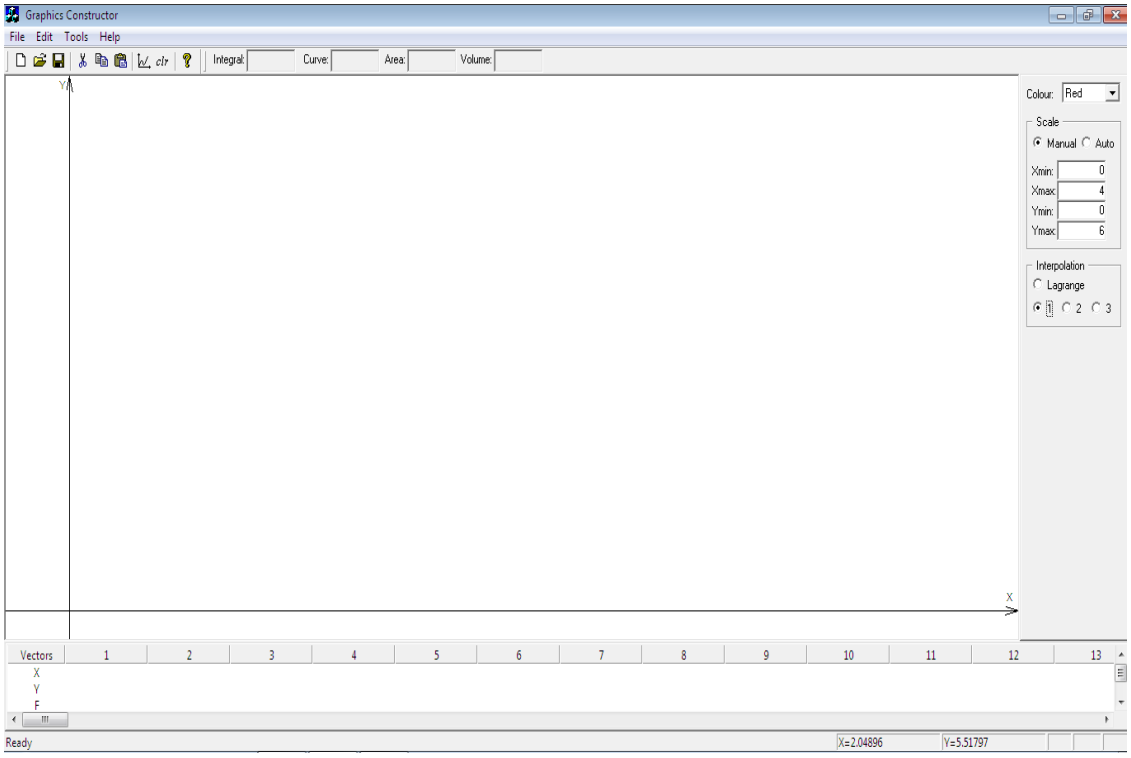
KAYNAKLAR 38

ÖZGEÇMİŞ ……40

1. GİRİŞ

Matematik eğitiminin temel kavramlarından birisi fonksiyonlardır. Öğrenciler fonksiyonları grafik olarak veya diğer inceleme alanlarında öğrenmekte zorluk çekmektedir. Bu zorluğu aşmak için 1994'te Selçuk Üniversitesi'nde Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi kuruldu. Bu merkezin çatısı altında 'Graphics Constructor 2.0' (Bulgak ve Eminov 2003) bilgisayar yazılımı hazırlandı.

Bu yazılımın ana diyalog sayfası Şekil 1.1 ile verildi.



Şekil 1.1

Bu yazılımla doğrusal, özel kuadratik, Hermite kübik spline fonksiyonların grafikleri çizimle birlikte tabloyla yaklaştırılan fonksiyonun belirli integrali de yaklaşık hesaplanır. Bu yazılım tablolu fonksiyonların seçilen dikdörtgen içinde Doğrusal (birinci mertebeden), Özel Kuadratik (ikinci mertebeden) ve Hermite kübik (üçüncü mertebeden) $a < x < b$ aralığında tanımlı f spline fonksiyonların grafiklerinin şekillenmesini sağlıyor. Ayrıca bu fonksiyonların

$$\int_a^b f(x)dx$$

belirli integral değerleri de hesaplanır ve Şekil 1.2'de gösterilen kütük içinde değeri verilir.



Şekil 1.2

Her bir mühendis için matematik el kitabında (Örneğin, (Edwars&Penney,2002))

$y = f(x), a < x < b$

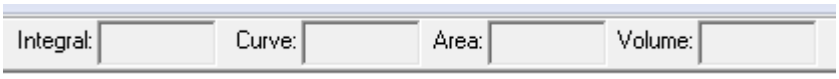
reel fonksiyonun L(uzunluğu), V(x-ekseni etrafında dönel hacim), S(x-ekseni etrafında dönel yüzey alanı) formülleri verildi.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Birinci dereceden spline fonksiyonlar için ayrıca 3 tane ekstra kütük vardır (bak Şekil 1.3).



Şekil 1.3

Curve isimli kütükte *L*-uzunluğu , Area isimli kütükte *S*-dönel yüzey, Volume isimli kütükte V-hacim değerleri bulunuyor.

Verilen yüksek lisans tez çalışmasında hedefimiz özel kuadratik ve Hermite kübik spline fonksiyonlar için de Curve, Area ve Volume değerlerini hesaplamak,mümkünse tam formüllerini vermek yoksa yaklaşık hesaplama algoritması oluşturmaktır.

Kuadrik yüzeyler, süperkuadrikler, polinom ve üstel fonksiyonlar; bütün eğrilerin oluşturulmasına yetmemektedir. Bir eğriyi bütün olarak ifade etmek yerine belli kontrol noktaları boyunca parçalara ayırarak ifade etmek, eğrinin matematiksel olarak gösterimini kolaylaştırmaktadır.

Spline fonksiyonu; parçalı tanımlanan, sürekli ve yeterince düz (her basamaktan türevlenebilir) bir polinom fonksiyondur. Spline tabirinin Türkçe karşılığı yoktur.

Spline eğrisi, çokgen kontrol noktaları üzerinde interpolasyonla veya yaklaşımla belirlenmiş sürekli eğri parçalarından oluşur.

Spline yüzeyi, düz bir yüzey üzerinde eşleştirilen iki (veya daha fazla) spline eğrisinin bir kümesidir.

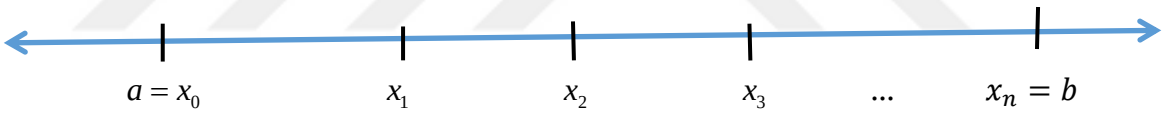
İnterpolasyonla noktaları belirlenen eğriler kontrol noktalarından geçmek zorundadır.

Yaklaşımla noktaları belirlenen eğriler kontrol noktalarınca yönlendirilmekle beraber, noktalardan geçmek zorunda değildir.

2. SPLİNE FONKSİYONLAR

Mühendislikte en çok kullanılan fonksiyon tipi spline fonksiyonlardır. Örneğin (Cheney ve Kincaid, 1980) geniş lisans öğrenci topluluğuna hitap eden ders kitabından spline fonksiyonların yaklaşımla ilgili uygulamalarına bir bölüm ayırtılmıştır. (Gerald, 1978)'te de bir ders kitabında bu konuya bir bölüm ayırtmıştır. Spline fonksiyonlarıyla hiperbolik denklemlerin çözümünü (Çağlar, 1985) ve (Sinan ve Bulgak , 2016)'de incelemişler. (Aydın ve ark, 2003) ders kitabında matematik eğitimi sırasında spline fonksiyonunun ana fonksiyon olarak işlenmesi gerekliliği vurgulandı. Ayrıca birçok konuda "Graphics Constructor 2.0" yazılımı okurlara bilgi verir (bak Bulgak ve Eminov, 2003).

Spline fonksiyonlarda aralık, önceden seçilen a < b reel sayılar arasında "düğüm noktaları" (knots) olarak bilinen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ noktalarıdır (Çağlar, 1985). Görsel olarak bu Şekil 2.1' le gösterildi.



Şekil 2.1

(Çağlar, 1985) Doktora tezinde spline fonksiyonunun farklı tanımlarını kaynaklara dayanarak irdeledi. Bunlardan birisi (Gerald, 1978) atıfta aşağıdaki şekilde verildi. Buna göre her $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralığında farklı olan spline fonksiyonları ,

$$S(x) = c_{0i} + c_{1i}(x - x_i) + c_{2i}(x - x_i)^2 + \cdots + c_{mj}(x - x_j)^m \qquad (2.1)$$

gibi düşünülmüştür. m sayısı spline fonksiyonun derecesi olarak bilinir.

Bu tanıma denk olan yazı sitili

$$f:[a,b] \to R, j = 0,1,2,\dots,n-1;$$

$$f(x) = a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}x^2 + \cdots + a_{(m-1)i}x^{m-1} + a_{mj}x^m \qquad (2.2)$$

olarak da kullanılır (Aydın ve ark. 2003).

Örneğin, (Cheney ve Kincaid, 1980)'de birinci dereceden spline fonksiyonları karakterize eden özellikler aşağıdaki biçimde verilmiştir.

1. $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[x_0, x_n]$ aralığıdır.

2. $y = f(x)$ fonksiyonu $[x_0, x_n]$ aralığında süreklidir.

3. $[x_0, x_n]$ aralığının $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$ biçimindeki her $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralıklarında y fonksiyonu doğrusal bir fonksiyondur.

Spline fonksiyonu daha görsel tanıtmak için bir tablo aşağıdaki şekilde verilebilir. Üç tane satır ve n+2 tane sütundan oluşan bir tablo alalım (bak Tablo 2.1) . İlk sütunda satırların başlıkları ; *no*, *x*, *y*. İlk satır düğüm noktalarını numara ile verir, ikinci satır düğüm noktalarını sırayla verir. Üçüncü satır düğüm noktalarında fonksiyonun değerlerini verir.

no	0	1	2	3	…	*n*
x	x_0	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Tablo 2.1

Bu tabloda spline fonksiyonun derecesi belirtilmedi. Eğer Tablo 2.1 ile *m*-inci dereceden spline fonksiyonu tanımlanıyorsa bu (2.1) veya (2.2) şeklinde verilen fonksiyonlarıdır.

Verilen tablo bazen dördüncü (bak Tablo 2.2) veya daha fazla satırlarla tamamlanabilir. Dördüncü satır "düğüm" noktalarında spline fonksiyonunun türevlerini verir. Bu

satır birinci dereceden spline fonksiyonlar için anlamsızdır. Özel kuadratik spline fonksiyonun sadece ilk elemanı keyfi olarak seçilebilir. Hermite kübik spline fonksiyonunun "düğüm" noktalarda türevleri verilir.

no	0	1	2	3	…	n
x	x_0	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_3	…	y_n
y'	f_0	f_1	f_2	f_3	…	f_n

Tablo 2.2

Hermite spline fonksiyonu uygulamalarda kararlı olarak bilinir. Birkaç örnekle yukarıdaki ifadeleri açıklayalım.

no	1	2	3
x	1	3	4
y	1	5	2

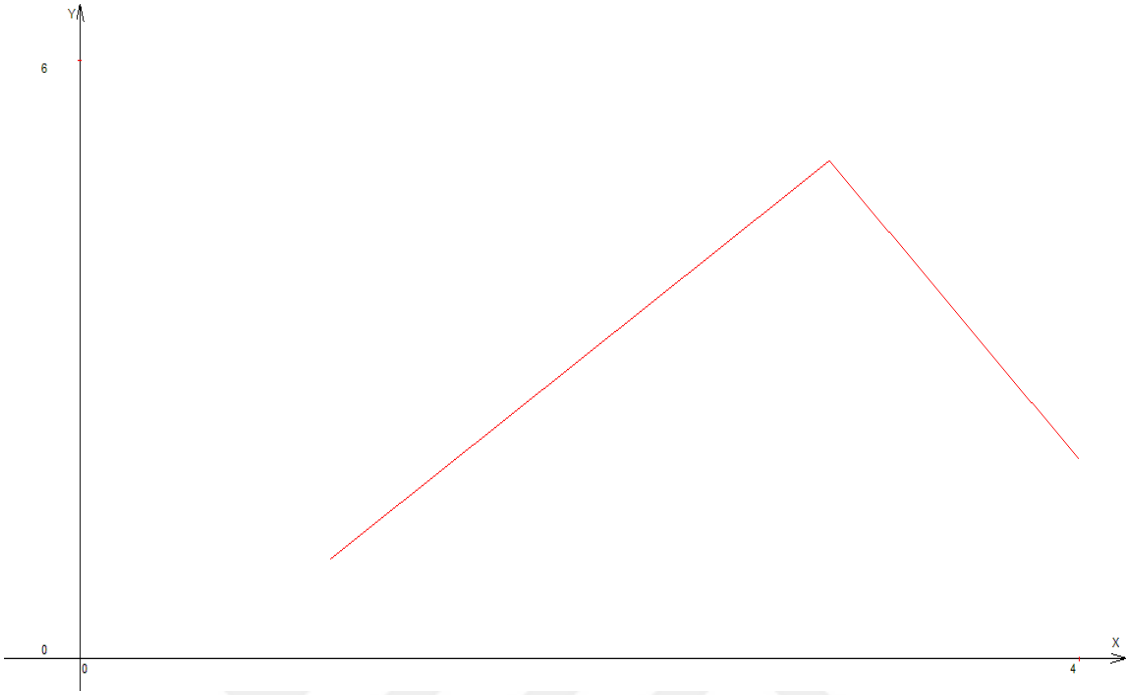
Tablo 2.3

Tablo 2.3.'u sağlayan 1 tane doğrusal spline fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & 1 \le x \le 3 \\ -3x + 14, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

olduğu açıktır. Bu fonksiyonun "Graphics Constructor 2.0" yazılım yardımıyla

$0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 6$ dikdörtgen içinde çizilen grafiğinin şekli Şekil 2.2 de verilmektedir.



Şekil 2.2

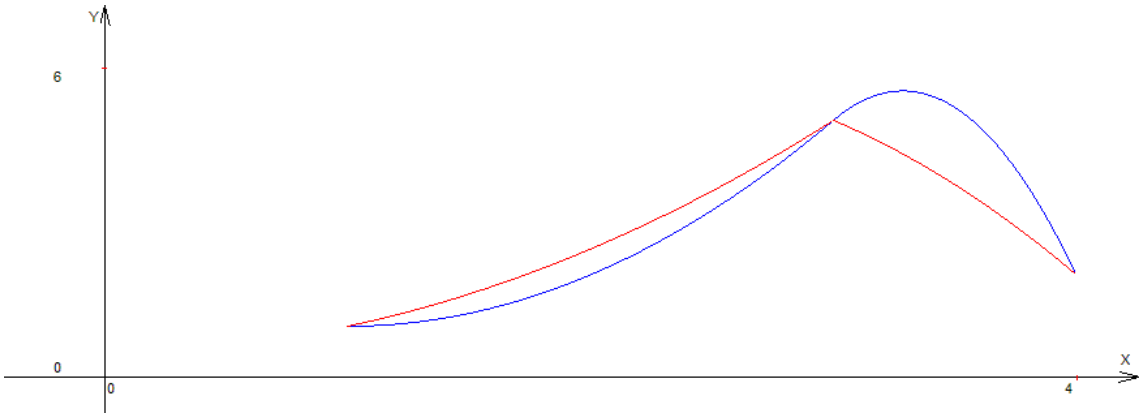
Tablo 2.3 sağlayan birden fazla ikinci dereceden spline fonksiyonları vardır.

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x^2 + 0.5, & 1 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 4x + 2, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

ve

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & 1 \leq x \leq 3 \\ -7x^2 + 46x - 70, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Bunlar Tablo 2.3'ü sağlayan farklı kuadratik spline fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların "Graphics Costructor 2.0" yazılım yardımıyla $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 6$ dikdörtgeni içinde çizilen grafik şekilleri Şekil 2.3'te verilmektedir.



Şekil 2.3

f fonksiyonunun $x = 3$ noktasında türevi yoktur. Ancak g fonksiyonu türetilebilen bir fonksiyondur.

"Graphics Costructor 2.0" yazılımında türetilebilen kuadratik spline fonksiyonu bulmak için genişletilmiş tablo kullanılır. Bu tabloda 0 "düğüm" noktasına karşılık $y'(x_0 + 0)$ değeri tanımlanır. Bu şartı sağlayan tek bir kuadratik spline fonksiyonu vardır. Kısaca böyle spline fonksiyonları özel kuadratik spline fonksiyonu adı altında kullanacağız. Bunu sıradaki örnekle açıklayalım.

no	1	2	3
x	1	3	4
y	1	5	2
y'	1		

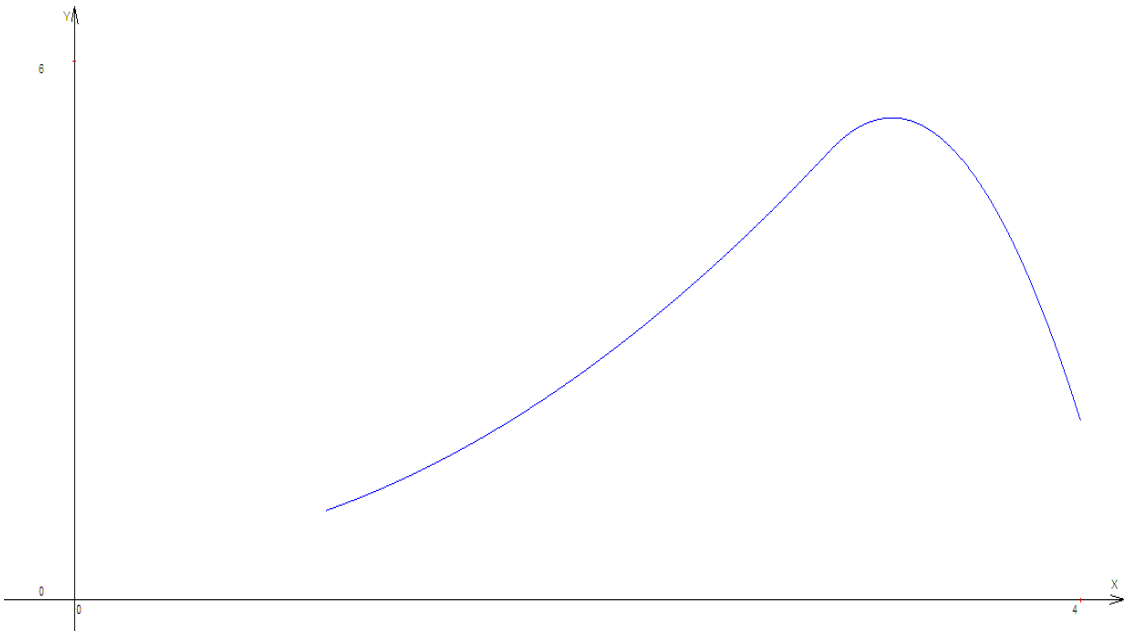
Tablo 2.4

Tablo 2.4'ü sağlayan özel kuadratik spline fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x^2 + 0.5, & 1 \le x \le 3; \\ -6x^2 + 39x - 58, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

dir.

Bu özel kuadratik spline fonksiyonunun “Graphics Constructor 2.0” yazılımı yardımıyla $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 6$ dikdörtgen içinde çizilen grafiğinin şekli Şekil 2.5 ile verilmiştir.



Şekil 2.5

Benzer şekilde “Graphics Costructor 2.0” yazılımında kübik Hermite spline fonksiyonu bulmak için genişletilmiş tablo kullanılır. Bu tabloda 0 “düğüm” noktasına karşılık $y'(x_0 + 0)$, iç “düğüm” noktalarda $y'(x_j)$ değerleri ve sağ sınırında $y'(x_n - 0)$ değeri tanımlanır. Bu şartları sağlayan tek bir Hermite kübik spline fonksiyonu vardır. Örneğin, Tablo 2.5’i sağlayan Hermite kübik spline fonksiyonu

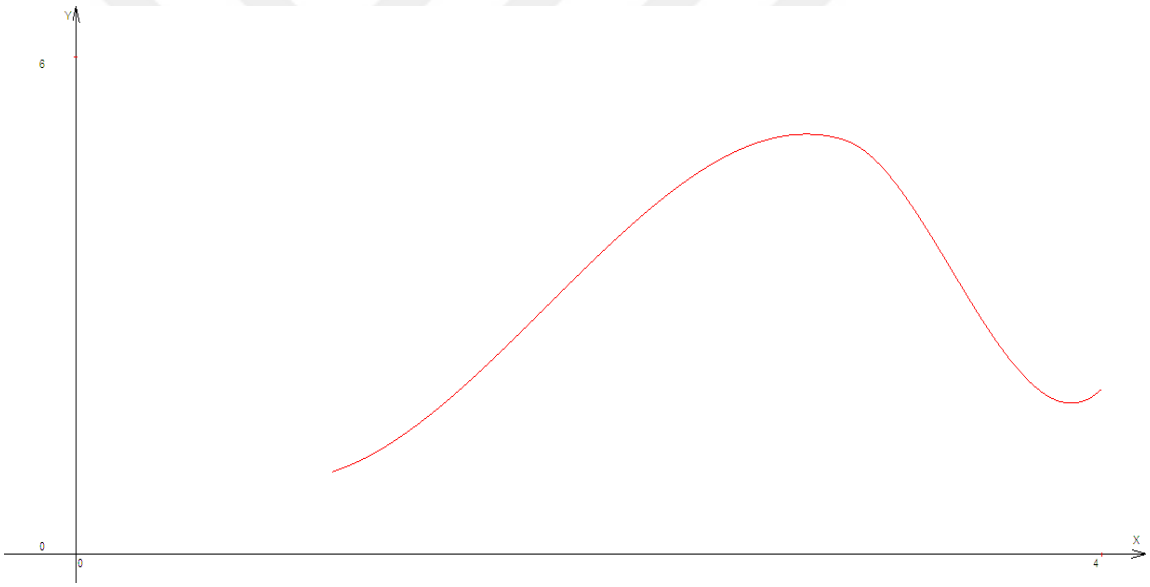
$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 5.5x^2 - 7x + 3.5, & 1 \leq x \leq 3; \\ 8x^3 - 82x^2 + 275x - 298, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

dir.

no	1	2	3
x	1	3	4
y	1	5	2
y'	1	-1	3

Tablo 2.5

Bu Hermite kübik spline fonksiyonunun “Graphics Constructor 2.0” yazılımı yardımıyla $0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 6$ dikdörtgen içinde çizilen grafiğinin şekli Şekil 2.6 ile verilmiştir.



Şekil 2.6

3. İNTEGRALLE İLGİLİ GENEL BİLGİLER

Belirli integrallerin yaklaşık hesaplama problemi matematiğin uygulamalarında ve matematiğin eğitiminde iyi işlenen bir problemdir. “Trapezoid” kuralı (bak (Cheney ve Kincaid, 1980)), “The trapezoidal” kuralı (bak (Gerald, 1978)) Türkiye’deki “Nümerik Analiz” ders kitaplarında bazen “Yamuklar Yöntemi” adı altında kullanılır (bak (Amirali ve Duru, 2002)). Bu yöntemler esasen bir fonksiyonunun yerine birinci dereceden spline fonksiyonun integralini hesaplar.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

belirli integralini yaklaşık hesaplamak için Yamuklar yöntemini (Gerald, 1978) esere uygun olarak tanıtalım.

ADIM 1. Bir M doğal sayısı ele alalım.

ADIM 2. $h = \frac{b-a}{M}$’yi hesaplayalım.

ADIM 3. $(a + kh, f(a + kh), k = 0, 1, \ 2, \dots, M$ hesaplayalım.

ADIM 4. Elde edilen $M + 1$ noktanın birinci dereceden spline fonksiyonu kullanılarak I_M “İntegral” değeri hesaplanır.

$|I_M - I\ |$ değeri (Gerald,1978) de “Global Error of Trapezoidal Rule” adı altında aşağıda verilmektedir.

$$|I_M - I\ | \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 |f''(\xi)|, a < \xi < b$$

Bu eşitsizlik $f''(x)$ verilen ve $a <$ x $< b$ aralığında sürekli fonksiyonlar için geçerlidir.

İleride dört yardımcı teorem kullanacağız.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem 3.1 ve Yardımcı Teorem 3. 2 (Demidovich, 1977)’de 1819 ve 1820 nolu alıştırma olarak cevapla birlikte verildi.

Yardımcı Teorem 3.1. $a \geq 0$ olmak üzere

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + a}) \, , x \in \mathbb{R}$$

ise

$$F'(x) = \sqrt{x^2 + a}$$

dır.

İspat. $u = \sqrt{x^2 + a}$ ise bu taktirde

$$u' = \frac{x}{u}; \; \frac{a}{u+x} = u - x \, .$$

sağlanır dolayısıyla

$$F(x) = \frac{1}{2}xu + \frac{a}{2}\ln(u + x)$$

ve

$$F'(x) = \frac{1}{2}xu' + \frac{1}{2}u + \frac{a}{2}\frac{u' + 1}{u + x}$$

$$= \frac{1}{2}xu' + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(u' + 1)(u - x)$$

$$= \frac{1}{2}xu' + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(u'u + u - u'x - x) = u = \sqrt{x^2 + a}$$

olup yardımcı teorem ispatlanır.

Yardımcı Teorem 3.2.

$$F(x) = \frac{1}{8}x(2x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \, , x \in \mathbb{R}$$

ise

$$F'(x) = x^2\sqrt{x^2 + a^2}$$

dir.

İspat. $u = \sqrt{x^2 + a^2}$ ise bu taktirde

$$u' = \frac{x}{u}; \; \frac{a^2}{u+x} = u - x \, .$$

dir. Dolayısıyla

$$F(x)=\frac{1}{4}xu^3-\frac{a^2}{8}xu-\frac{a^4}{8}\ln(u+x)$$

ve

$$F'(x)=\frac{3}{4}xu^2u'+\frac{1}{4}u^3-\frac{a^2}{8}u-\frac{a^2}{8}xu'-\frac{a^4}{8}\frac{u'+1}{u+x}$$

$$=\frac{3}{4}x^2u+\frac{1}{4}(x^2+a^2)u-\frac{a^2}{8}u-\frac{a^2}{8}xu'-\frac{a^2}{8}(u'+1)(u-x)$$

$$=x^2u+\frac{a^2}{8}u-\frac{a^2}{8}xu'-\frac{a^2}{8}u'u-\frac{a^2}{8}u+\frac{a^2}{8}xu'+\frac{a^2}{8}x=x^2u=x^2\sqrt{x^2+a^2}$$

elde edilir ki, bu da yardımcı teoremi ispatlar.

Yardımcı Teorem 3.3.

$$F(x)=\frac{1}{4a}\Big\{(2ax+b)\sqrt{1+(2ax+b)^2}$$
$$+\ln(\sqrt{1+(2ax+b)^2}+2ax+b)\Big\},x\in\mathbb{R}$$

ise

$$F'(x)=\sqrt{1+(2ax+b)^2}$$

dir.

İspat. $u=2ax+b$ ise

$$F(x)=\frac{1}{4a}\Big\{u\sqrt{1+u^2}+\ln(\sqrt{1+u^2}+u\,)\Big\}$$

olup

$$F'(x)=\frac{1}{4a}\left\{u'\sqrt{1+u^2}+\frac{u^2u'}{\sqrt{u^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{u^2+1}+u}\left(u'+\frac{uu'}{\sqrt{u^2+1}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4a}\left\{\frac{(2u^2+1)u'}{\sqrt{u^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{u^2+1}+u}\left(\frac{u+\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{u^2+1}}\right)u'\right\}$$

$$= \frac{1}{4a}\left\{\frac{(2u^2+1)u'}{\sqrt{u^2+1}} + \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}\right\} = \frac{1}{2a}\left\{\frac{(u^2+1)u'}{\sqrt{u^2+1}}\right\} = \frac{u'}{2a}\sqrt{u^2+1} = \sqrt{u^2+1}$$

$$= \sqrt{(2ax+b)^2+1}$$

dir. Bu da Yardımcı Teorem 3.3'ü ispatlar,

Yardımcı Teorem 3.4. $a \neq 0, b, c$ reel sayılar ve

$$ax^2 + bx + c \neq 0\ , a \neq 0\ \ \alpha < x < \beta$$

ise bu taktirde

$$I(\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} (ax^2+bx+c)\sqrt{1+(2ax+b)^2}dx$$

$$= \frac{(4ac-b^2)}{16a^2}\big(G(2a\beta+b) - G(2a\alpha+b)\big)$$
$$+ \frac{4(4ac-b^2)-1}{64a^2}\big(H(2a\beta+b) - H(2a\alpha+b)\big)$$
$$+ \frac{1}{64a^2}\big(g(\,2a\beta+b) - g(2a\alpha+b)\big)$$

dir. Burada

$$G(u) = u\sqrt{1+u^2};$$

$$H(u) = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right);$$

$$g(u) = u(2u^2+1)\sqrt{1+u^2}$$

ile verilir.

İspat.

$$I(\alpha,\beta) = a\int_{\alpha}^{\beta}\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)\sqrt{1+(2ax+b)^2}dx$$

$$= a\int_{\alpha}^{\beta}\left((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\sqrt{1+(2ax+b)^2}dx$$

$$=\frac{1}{8a^2}\int_{\alpha}^{\beta}((2ax+b)^2+4ac-b^2)\sqrt{1+(2ax+b)^2}d(2ax+b)$$

$$=\frac{1}{8a^2}\int_{2a\alpha+b}^{2a\beta+b}(u^2+4ac-b^2)\sqrt{1+u^2}du$$

$$=\frac{1}{8a^2}\int_{2a\alpha+b}^{2a\beta+b}u^2\sqrt{1+u^2}du+\frac{4ac-b^2}{8a^2}\int_{2a\alpha+b}^{2a\beta+b}\sqrt{1+u^2}du$$

Yardımcı Teorem 3.2'ye göre

$$\int_{2a\alpha+b}^{2a\beta+b}u^2\sqrt{1+u^2}du=\left(\frac{1}{8}u(2u^2+1)\sqrt{u^2+1}-\frac{1}{8}\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right)\Big|_{2a\alpha+b}^{2a\beta+b}$$

$$=\left(\frac{1}{8}g(u)-\frac{1}{8}H(u)\right)\Big|_{2a\alpha+b}^{2a\beta+b}$$

$$=\frac{1}{8}(g(2a\beta+b)-g(2a\alpha+b)-H(2a\beta+b)+H(2a\alpha+b))$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1' e göre

$$\int_{2a\alpha+b}^{2a\beta+b} \sqrt{1+u^2}du = \left(\frac{1}{2}u\sqrt{u^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right)\Big|_{2a\alpha+b}^{2a\beta+b}$$

$$= \left(\frac{1}{2}G(u)+\frac{1}{2}H(u)\right)\Big|_{2a\alpha+b}^{2a\beta+b}$$

$$= \frac{1}{2}(G(2a\beta+b)-G(2a\alpha+b)+H(2a\beta+b)-H(2a\alpha+b))$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$I(\alpha,\beta) = \frac{1}{64a^2}\big(g(2a\beta+b)-g(2a\alpha+b)-H(2a\beta+b)+H(2a\alpha+b)\big)$$

$$+\frac{(4ac-b^2)}{16a^2}(G(2a\beta+b)-G(2a\alpha+b)+H(2a\beta+b)-H(2a\alpha+b))$$

$$= \frac{(4ac-b^2)}{16a^2}\big(G(2a\beta+b)-G(2a\alpha+b)\big)$$

$$+\frac{4(4ac-b^2)-1}{64a^2}\big(H(2a\beta+b)-H(2a\alpha+b)\big)$$

$$+\frac{1}{64a^2}\big(g(\,2a\beta+b)-g(2a\alpha+b)\big)$$

olarak bulunur. Böylece Yardımcı Teorem 3.4 ispatlanmış olur.

4. ÖZEL KUADRATİK SPLİNE FONKSİYONLAR

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n
y'	f_0		…	

Tablo 4.1

Tablo 4.1'i sağlayan tek özel kuadratik spline fonksiyonu vardır;

$$P(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j, x_j < x < x_{j+1}, j = 0,1,2, \dots, n-1.$$

Burada $a_j, b_j, c_j, (j = 0,1,2, \dots, n-1)$ reel sayılar aşağıdaki sistemlerin tek çözümleridir;

$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ P'(x_0 + 0) = f_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} P(x_j) = y_j \\ P(x_{j+1}) = y_{j+1} \quad , j = 1,2, \dots, n-1. \\ P'(x_j + 0) = P'(x_j - 0) \end{cases}$$

Teorem 4.1. Tablo 4.1 ile tanımlanan özel kuadratik spline fonksiyonu var ve tektir.

İspat. Teoremin ispatı için Tablo 4.2'yi sağlayan tek kuadratik spline fonksiyonun olduğunu göstermek yeterlidir.

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1
y'	f_0	

Tablo 4.2

Keyfi $x_0 < x_1, y_0, y_1, f_0$ için (4.1)'e göre

$$\begin{cases} a_0x_0^2 + b_0x_0 + c_0 = y_0 \\ a_0x_1^2 + b_0x_1 + c_0 = y_1 \\ 2a_0x_0 + b_0 = f_0 \end{cases}$$

denklem sistemini sağlayan tek a_0, b_0, c_0 olduğunu göstermeliyiz.

Açıktır ki

$$\begin{cases} a_0(x_1^2 - x_0^2) + b_0(x_1 - x_0) = y_1 - y_0 \\ \\ 2a_0x_0 + b_0 = f_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_0(x_1^2 - x_0^2 - 2x_0(x_1 - x_0)) = y_1 - y_0 - f_0(x_1 - x_0)$$

$$\Rightarrow a_0(x_1 - x_0)^2 = y_1 - y_0 - f_0(x_1 - x_0)$$

sağlanır. Buradan

$$a_0 = \frac{y_1 - y_0 - f_0(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)^2};$$

$$b_0 = f_0 - 2a_0x_0;\ c_0 = y_0 - a_0x_0^2 - b_0x_0$$

elde edilir ki bu da Tablo 4.2'yi sağlayan tek a_0, b_0, c_0'ın varlığını gösterir.

Bu sonuçları kullanarak $P'(x_1 - 0)$ tek olarak hesaplanır. Özel Kuadratik spline fonksiyonun "düğüm" noktalarda türetilebilen şartından

$$P'(x_1 - 0) = P'(x_1 + 0)$$

olmak zorundadır. Dolayısıyla sıradaki (x_1, x_2) aralığında Tablo 4.1 den Tablo 4.3 elde edilir.

x	x_1	x_2
y	y_1	y_2
y'	$P'(x_1 - 0)$	

Tablo 4.3

Önceki işlemlere göre bunu sağlayan tek a_1, b_1, c_1 sayıları vardır. Bu işlemleri tekrarlayarak Tablo 4.2 ile tanımlanan kuadratik spline fonksiyonunun var ve tek olduğu ispatlanmış olur.

Uyarı 4.1. Tablo 4.2 sabit fonksiyon veya doğrusal fonksiyon olabilir.

Gerçekten Tablo 4.4 ile tanımlanan spline fonksiyonunun $y(x) = 2x - 1,\ x \in [1,3]$ fonksiyonu ve Tablo 4.5 ile tanımlanan $y(x) = 4,\ x \in [1,3]$ fonksiyonu olduğu açıktır.

x	1	3
y	1	5
y'	2	

Tablo 4.4

x	1	3
y	1	1
y'	0	

Tablo 4.5

4.1. Özel Kuadratik Spline Fonksiyonun Uzunluğu

$y = f(x),\ a < x < b$ ile tanımlanan eğrinin uzunluğu

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

şeklindedir (Aydın ve Ark., 2003). Komşu "düğüm" noktalarla tanımlı aralıklarda spline fonksiyonun uzunluğu

$$L_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sqrt{1 + (P'(x))^2}dx,$$

$$P(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j, x_j < x < x_{j+1}, j = 0,1,2, \dots, n-1.$$

Bu durumda

$$L_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sqrt{1 + (2a_j x + b_j)^2}dx$$

şeklindedir.

Burada doğal olarak iki durum karşımıza çıkar; $a_j = 0$ ve $a_j \neq 0$

Açıktır ki $a_j = 0$ ise bu takdirde

$$L_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sqrt{1 + b_j^2}dx = (x_{j+1} - x_j)\sqrt{1 + b_j^2}$$

dir. Aksi halde, Yardımcı Teorem 3.3'e göre

$$\sqrt{1+(2a_j x+b_j)^2}$$

fonksiyonun ilkel fonksiyonu

$$F_j(x)=\frac{1}{4a_j}\Big\{\big(2a_jx+b_j\big)\sqrt{1+\big(2a_jx+b_j\big)^2}+\ln\big(\sqrt{1+\big(2a_jx+b_j\big)^2}+2a_jx+b_j\big)\Big\}$$

olduğundan $L_j=F_j\big(x_{j+1}\big)-F_j\big(x_j\big)$ olduğu açıktır.

n adımdan sonra istenilen uzunluk

$$L=L_1+L_2+\cdots+L_n$$

olarak elde edilir. Verilen hesaplama formüllerini kullanarak aşağıda bilgisayar hesaplamasına uygun bir algoritma verelim.

ALGORİTMA 4.1.1. **($j=0,1,\dots,n-1$)**

IF $|a_j|<10^{-14}$ **THEN** $L_j=(x_{j+1}-x_j)\sqrt{1+b_j^2}$ **ELSE**

BEGIN

$$F_j(x)=\frac{1}{4a_j}\Big\{\big(2a_jx+b_j\big)\sqrt{1+\big(2a_jx+b_j\big)^2}+\ln\big(\sqrt{1+\big(2a_jx+b_j\big)^2}+2a_jx+b_j\big)\Big\};$$

$$L_j=F_j\big(x_{j+1}\big)-F_j\big(x_j\big).$$

END

Verilen algoritmayı Tablo 4.1.1'e uygun özel kuadratik spline fonksiyonuna uygulayalım. İstenilen spline fonksiyonu

$$P(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & 1 < x < 3 \\ 10x^2 - 63x + 99, & 3 < x < 4 \end{cases} \qquad (4.1.1)$$

olduğu açıktır. Bu fonksiyonunun grafiğinin şekli "Graphics Constructor 2.0" yazılımıyla çizildi (bak Şekil 4.1.1). Bu örnekte

$$n = 2, \qquad x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 4,$$

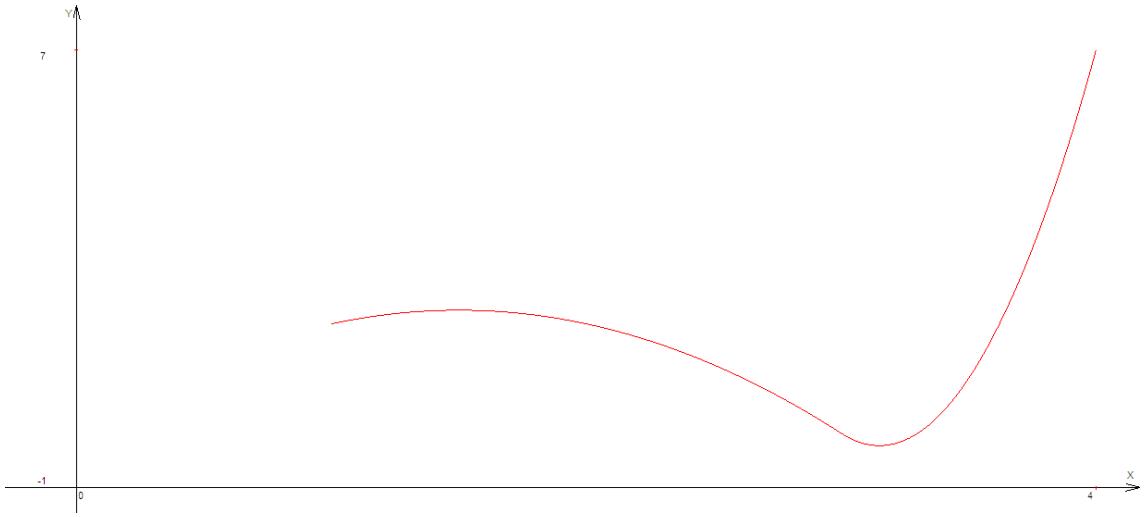
$$a_0 = -1, b_0 = 3, c_0 = 0;$$

$$a_1 = 10, b_1 = -63, c_1 = 99$$

dir.

no	1	2	3
x	1	3	4
y	2	0	7
y'	1		

Tablo 4.1.1



Şekil 4.1.1

$j = 0$ ile başlayalım.

Bu durumda yardımcı fonksiyon

$$F_0(x) = -\frac{1}{4}\left\{(-2x+3)\sqrt{1+(-2x+3)^2} + \ln(\sqrt{1+(-2x+3)^2} - 2x + 3)\right\}$$

ve dolayısıyla,

$$F_0(1) = -\tfrac{1}{4}\left\{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right\},\ F_0(3) = \tfrac{1}{4}\left\{3\sqrt{10} - \ln\left(\sqrt{10}-3\right)\right\}$$

olduğundan

$$L_0 = \frac{1}{4}\left\{3\sqrt{10} - \ln\left(\sqrt{10}-3\right)\right\} + \frac{1}{4}\left\{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right\}$$

dir.

$j = 1$ ile devam edelim.

Bu durumda yardımcı fonksiyon

$$F_1(x) = \frac{1}{40}\Big\{(20x-63)\sqrt{1+(20x-63)^2} + \ln(\sqrt{1+(20x-63)^2} + 20x - 63)\Big\}$$

Ve dolayısıyla

$$F_1(3) = \frac{1}{40}\left\{-3\sqrt{10} + \ln\left(\sqrt{10}-3\right)\right\}$$

$$F_1(4) = \frac{1}{40}\left\{17\sqrt{290} + \ln\left(\sqrt{290}+17\right)\right\}$$

olduğundan

$$L_1 = F_1(4) - F_1(3) = \frac{1}{40}\left\{17\sqrt{290} + \ln\left(\sqrt{290}+17\right) + 3\sqrt{10} - \ln\left(\sqrt{10}-3\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{40}\left\{17\sqrt{290} + 3\sqrt{10} + \ln\left((\sqrt{290}+17)(\sqrt{10}+3)\right)\right\}$$

olur.

Yapılan işlemlerin sonucunda istenilen uzunluk

$$L = L_0 + L_1 = \frac{1}{4}\{3\sqrt{10} - \ln(\sqrt{10} - 3)\} + \frac{1}{4}\{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\}$$
$$+ \frac{1}{40}\{17\sqrt{290} + 3\sqrt{10} + \ln((\sqrt{290} + 17)(\sqrt{10} + 3))\} \approx 11.0085$$

dir.

4.2. Özel Kuadratik Spline Fonksiyonun Hacmi

$y = f(x), a < x < b$ ile tanımlanan eğrinin x-ekseni etrafında 360 derece döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmi,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

şeklindedir (Aydın ve Ark.,2003). Komşu "düğüm" noktalarla tanımlı aralıklarda spline fonksiyonun hacmi

$$V_j = \pi \int_{x_j}^{x_{j+1}} P^2(x)dx$$

dir.

$$P(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j, x_j < x < x_{j+1}, j = 0,1,2, \dots, n-1.$$

Dolayısıyla

$$V_j = \pi \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(a_j x^2 + b_j x + c_j\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{x_j}^{x_{j+1}} (a_j^2 x^4 + 2a_j b_j x^3 + (2a_j c_j + b_j^2)x^2 + 2c_j b_j x + c_j^2)dx$$

dir. Bu integralinin ilkel fonksiyonu

$$F_j(x) = \frac{1}{5}a_j^2 x^5 + \frac{1}{2}a_j b_j x^4 + \frac{1}{3}(2a_j c_j + b_j^2)x^3 + c_j b_j x^2 + c_j^2 x$$

olduğundan

$$V_j = \pi(F(x_{j+1}) - F(x_j))$$

olduğu açıktır ve istenilen hacim $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$ dir.

Verilen formülleri Tablo 4.1.1 ile tanımlanan (4.1.1) ile gösterilen özel kuadratik spline fonksiyonuna uygulayalım. Bu spline fonksiyonunun *x*-ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulalım.

Verilere göre

$n = 2,\ x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 4,$

$a_0 = -1, b_0 = 3, c_0 = 0;$

$a_1 = 10, b_1 = -63, c_1 = 99$

dur. Bu taktirde

$$F_0(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 3x^3$$

olduğundan

$$F_0(1) = \frac{1}{5} - \frac{3}{2} + 3 = 1.7;\ F_0(3) = \frac{243}{5} - \frac{243}{2} + 81 = 8.1$$

olur. Dolayısıyla $V_0 = \pi(F_0(3) - F_0(1)) = 6.4\pi.$

$j = 1$ durumunda

$$F_1(x) = 20x^5 - 315x^4 + 1983x^3 - 6237x^2 + 9801x$$

olduğundan $F_1(3) = 6156; F_1(4) = 6164$ olur. Dolayısıyla

$V_1 = \pi\big(F_1(4) - F_1(3)\big) = 8\pi$ dir.

Sonuç olarak

$$V = V_0 + V_1 = 14.4\pi \approx 45.2389$$

istenilen hacimdir.

4.3. Özel Kuadratik Spline fonksiyonun dönel yüzey alanı

Negatif olmayan $y = f(x), a < x < b$ ile tanımlanan eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen yüzey alanı

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

şeklindedir (Aydın ve Ark., 2003), (Thomas ve Finney, 2001). Komşu "düğüm" nokta-noktalarla tanımlı aralıklarda spline fonksiyonun dönel yüzey alanı

$$S_j = 2\pi \int_{x_j}^{x_{j+1}} |P(x)|\sqrt{1 + (P'(x))^2}dx$$

$$P(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j, x_j < x < x_{j+1}, j = 0,1,2,\dots,n-1$$

olup, spline fonksiyonunun dönel yüzey alanını $x_j < x < x_{j+1}$ aralığında hesaplayalım.

$$S_j = 2\pi \int_{x_j}^{x_{j+1}} |a_j x^2 + b_j x + c_j|\sqrt{1 + (2a_j x + b_j)^2}dx$$

şeklindedir.

Dönel yüzey alanı hesaplamak için aşağıdaki yardımcı fonksiyonlarımıza ihtiyaç vardır;

$$G(u) = u\sqrt{1+u^2};$$

$$H(u) = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right);$$

$$g(u) = u(2u^2+1)\sqrt{1+u^2}$$

$$I_j(\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(a_j x^2 + b_j x + c_j\right)\sqrt{1+\left(2a_j x + b_j\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{(4a_j c_j - b_j^2)}{16a_j^2}\Big(G\big(2a_j\beta + b_j\big) - G\big(2a_j\alpha + b_j\big)\Big)$$

$$+ \frac{4\big(4a_j c_j - b_j^2\big) - 1}{64a_j^2}\Big(H\big(2a_j\beta + b_j\big) - H\big(2a_j\alpha + b_j\big)\Big)$$

$$+ \frac{1}{64a_j^2}\Big(g\big(\,2a_j\beta + b_j\big) - g\big(2a_j\alpha + b_j\big)\Big)$$

S_j değerini hesaplamak için aşağıdaki algoritma önerilir.

ALGORİTMA 4.3.1. $(j = 0,1,2,\dots,n-1)$

IF $abs(a_j) < 10^{-14}$ **THEN**

BEGIN

(x_j,y_j) , (x_{j+1j},y_{j+1}) noktalarıyla tanımlı birinci mertebeden spline fonksiyonu ile tanımlanan eğrinin x-eksenin etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını (S_j) hesaplayalım.

END **hesaplama sonuçlandı**

z=$b_j^2 - 4a_j c_j$

IF $z > 0$

THEN BEGİN(1)

$$s = sqrt(z)$$

IF$a_j > 0$ **THEN BEGIN** $t_j = \frac{-b_j - s}{2a_j}; T_j = \frac{-b_j + s}{2a_j}$ **END**

ELSE BEGIN $T_j = \frac{-b_j - s}{2a_j}; t_j = \frac{-b_j + s}{2a_j}$ **END**

IF $t_j < x_j < T_j < x_{j+1}$ **THEN**

$S_j = 2\pi[abs\left(I_j(x_j, T_j)\right) + abs\left(I_j(T_j, x_{j+1})\right)]$ **hesaplama sonuçlandı**

IF $x_j < t_j$ **AND** $T_j < x_{j+1}$ **THEN**

$S_j = 2\pi[abs\left(I_j(x_j, t_j)\right) + abs\left(I_j(t_j, T_j)\right) + abs\left(I_j(T_j, x_{j+1})\right)]$

hesaplama sonuçlandı

IF $x_j < t_j < x_{j+1} < T_j$ **THEN**

$S_j = 2\pi[abs\left(I_j(x_j, t_j)\right) + abs\left(I_j(t_j, x_{j+1})\right)]$ **hesaplama sonuçlandı**

IF $x_j = t_j$ **AND** $T_j < x_{j+1}$ **THEN**

$S_j = 2\pi[abs\left(I_j(x_j, T_j)\right) + abs\left(I_j(T_j, x_{j+1})\right)]$ **hesaplama sonuçlandı**

IF $x_j < t_j$ **AND** $T_j = x_{j+1}$ **THEN**

$S_j = 2\pi[abs\left(I_j(x_j, t_j)\right) + abs\left(I_j(t_j, x_{j+1})\right)]$ **hesaplama sonuçlandı**

END(1)

$S_j = 2\pi abs\left(I_j(x_j, x_{j+1})\right)$ **hesaplama sonuçlandı**

n adımdan sonra istenilen alan $S = S_1 + S_2 + ... + S_n$ olarak elde edilir.

Verilen algoritmanın Tablo 4.1.1 ile tanımlanan özel kuadratik spline fonksiyonuna uygulanması sonucunda $S \approx 185.096$ elde edilir.

no	1	2
x	0	3
y	2	2
y	–3	

Tablo 4.3.1

Verilen algoritmayı Tablo 4.3.1 ile tanımlanan özel kuadratik spline fonksiyonuna uygulayalım. Söz konusu spline fonksiyonu

$$P(x) = x^2 - 3x + 2\,, \qquad 0 < x < 3$$

olduğu açıktır. Bu fonksiyonun grafiği "Graphics Constructor 2.0" yazımı yardımıyla çizilmiştir (bak Şekil 4.3.1).

Burada $x_0 = 0, x_1 = 3$ tür. Seçilen aralıkta 2 kök vardır; $t = 1, T = 2$.

$$S = 2\pi \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| \sqrt{1 + (2x-3)^2}\, dx$$

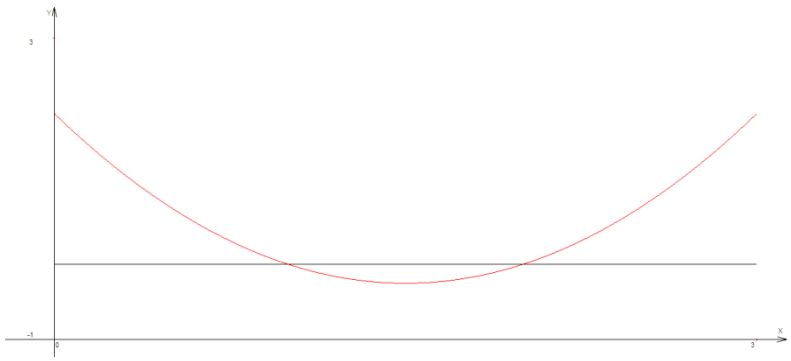
$$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\sqrt{1 + (2x-3)^2}\, dx - 2\pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\sqrt{1 + (2x-3)^2}\, dx$$
$$+ 2\pi \int_2^3 (x^2 - 3x + 2)\sqrt{1 + (2x-3)^2}\, dx$$

$$S = 2\pi \left[\frac{45}{32}\sqrt{10} + \frac{1}{16}\sqrt{2} - \frac{5}{32}\ln\left(3 + \sqrt{10}\right) + \frac{5}{16}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{45}{16}\sqrt{10} + \frac{1}{8}\sqrt{2} - \frac{5}{16}\ln\left(3 + \sqrt{10}\right) + \frac{5}{8}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right].$$

$$\ln\left(3 + \sqrt{10}\right) \approx 1.81845;\ \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 0.881374$$

olduğundan $S \approx \mathbf{28.4417}$ olarak bulunur.



Şekil 4.3.1

Şekil 4.3.1 ile verilen parabolünün ve $y = 0$ doğrusunun grafikleri verildi.

Birinci dereceden spline fonksiyonunu $(x_k = k/10,\ y_k = x_k^2 - 3x_k + 2),\ k = 0, 1, 2, \dots, 30$ tabloyu kullanarak çizerken yaklaşık dönel uzeyin alanı **28.4397** olarak verildi.

5. HERMİTE KÜBİK SPLİNE FONKSİYONLAR

Önceki bölümlerde Hermite kübik spline fonksiyonun tanımını hatırlattık. Şöyle ki Tablo 2.2'yi sağlayan Hermite kübik spline var ve tektir. Bu fonksiyon $a_j, b_j, c_j, d_j, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ reel sayılarına bağlıdır.

$$P(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j, \qquad x_j \le x \le x_{j+1};$$

$$\begin{cases} P(x_j) = y_j;, \\ P'(x_j) = f_j; \\ P(x_{j+1}) = y_{j+1}; \\ P'(x_{j+1}) = f_{j+1} \end{cases}$$

Bunu Tablo 2.4'ün devamında ayrıntılı olarak açıkladık. Hermite kübik spline fonksinu diferensiyel denklemlerin hesaplanması için kullanılır (bak, örneğin, (Birkhoff ve ark., 1968), (Sinan ve Bulgak, 2016).

Bu bölümde önce Hermite kübik spline fonksiyonun hacmini veren formülü verelim. Sonra sırasıyla uzunluğunu ve dönel yüzeyinin alanını yamuklar yöntemini kullanarak elde edeceğiz. Kısaca elde edilen Hermite kübik spline fonksiyonun her $x_j \le x \le x_{j+1}; j = 0,1, \dots, n-1$ aralığını M eşit alt aralığa bölüp, birinci dereceden spline fonksiyonuna karşılık gelen integralleri hesaplayacağız.

5.1. Hermite Kübik Spline Fonksiyonun Dönel Hacmi

$y = f(x), a < x < b$ ile tanımlanan fonksiyonun x-ekseni etrafında 360 derece döndürülmesiyle elde edilen hacim

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

şeklindedir (Aydın ve Ark., 2003). Komşu "düğüm" noktalarla tanımlı aralıklarda spline fonksiyonun hacmi

$$V_j = \pi \int_{x_j}^{x_{j+1}} P^2(x)dx$$

$$P(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j, x_j < x < x_{j+1}, j = 0,1,2, \dots, n-1.$$

formundadır. Dolayısıyla

Dolayısıyla

$$V_j = \pi \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{x_j}^{x_{j+1}} (a_j^2 x^6 + 2a_j b_j x^5 + \left(2a_j c_j + b_j^2\right)x^4 + \left(2a_j d_j + 2c_j b_j\right)x^3 + \left(2b_j d_j + c_j^2\right)x^2 + 2c_j d_j x + d_j^2)dx$$

dir. Bu integralin ilkel fonksiyonu

$$F(x) = \frac{1}{7}a_j^2 x^7 + \frac{1}{3}a_j b_j x^6 + \frac{1}{5}\left(2a_j c_j + b_j^2\right)x^5 + \frac{1}{2}\left(a_j d_j + c_j b_j\right)x^4$$

$$+\frac{1}{3}\left(2b_j d_j + c_j^2\right)x^3 + c_j d_j x^2 + d_j^2 x$$

olduğundan

$$V_j = \pi(F\left(x_{j+1}\right) - F\left(x_j\right))$$

olduğu açıktır ve istenilen hacim $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$ dir.

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_n} P^2(x)dx$$

no	1	2	3
x	0	1	2
y	1	2	1
y'	0	3	-6

Tablo 5.1.1

Tablo 5.1.1'e karşılık gelen Hermite kübik spline fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & 0 < x < 1 \\ -x^3 + 6x - 3 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

dir. Bu taktirde

$$V_0 = \pi\big(F_0(x_1) - F_0(x_0)\big) = \pi(\frac{1}{7} + 1.5)$$

ve

$$V_1 = \pi\big(F_1(x_2) - F_1(x_1)\big) = \pi(\tfrac{1}{7} + 5.1).$$

olduğundan istenilen hacim

$$V = V_0 + V_1 = \pi\left(\frac{2}{7} + 6.6\right) \approx 21.6321$$

olur.

5.2. Hermite Kübik Spline Fonksiyonun Uzunluğunun ve Dönel Yüzey Alanının Yaklaşık Hesaplanması

Komşu "düğüm" noktalarla tanımlı aralıklarda Hermite kübik spline fonksiyonun uzunluğu

$$L_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sqrt{1 + (P'(x))^2}\,dx,$$

$$P(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j, x_j < x < x_{j+1}, j = 0,1,2, \dots, n-1$$

ve bu eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen yüzeyin alanı

$$S_j = 2\pi \int_{x_j}^{x_{j+1}} |P(x)|\sqrt{1 + (P'(x))^2}\,dx.$$

dir.

L_j ve S_j değerlerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

ADIM 1. $M > 4$ doğal bir sayı seçelim.

ADIM 2. $h_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{M}$ hesaplayalım.

ADIM 3. $g_{k,j} = g_j(x_j + \mathrm{k}h_j), k = 0, 1, 2, \dots, M$ hesaplayalım.

Virtual Tablo 5.2.1 için birinci dereceden spline fonksiyonunun $L_j(M)$ ve $S_j(M)$ değerleri elde edilir.

no	0	1	2	…	M
x	x_j	$x_j + h_j$	$x_j + 2h_j$	…	x_{j+1}
y	$g_{0,j}$	$g_{1,j}$	$g_{2,j}$	…	$g_{M,j}$

Tablo 5.2.1

$j = 0,1, \dots, n-1$ adımlarından sonra

$$L(M) = L_0(M) + L_1(M) + \cdots + L_{n-1}(M);$$

$$S(M) = S_0(M) + S_1(M) + \cdots + S_{n-1}(M)$$

değerleri istenilen L ve S yaklaşık değerleridir.

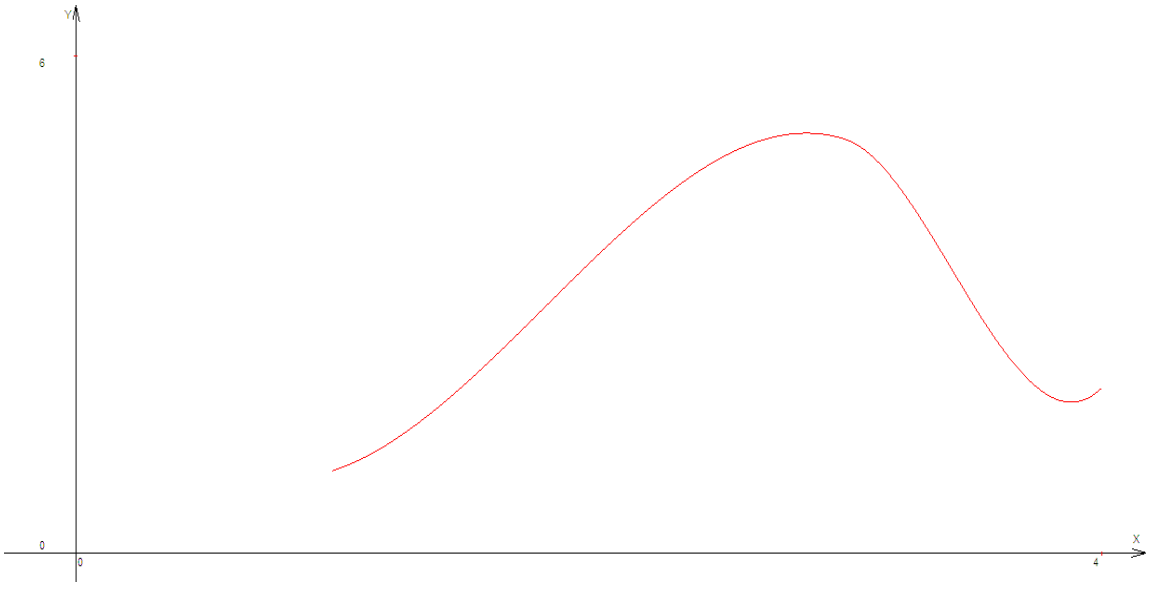
Bir örnek verelim. Tablo 5.2.2'yi sağlayan Hermite kübik spline fonksiyonu

$$P(x) = \begin{cases} -x^3 + 5.5x^2 - 7x + 3.5, & 1 \le x \le 3; \\ 8x^3 - 82x^2 + 275x - 298, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

dir.

no	1	2	3
x	1	3	4
y	1	5	2
y'	1	-1	3

Tablo 5.2.2



Şekil 5.2.1

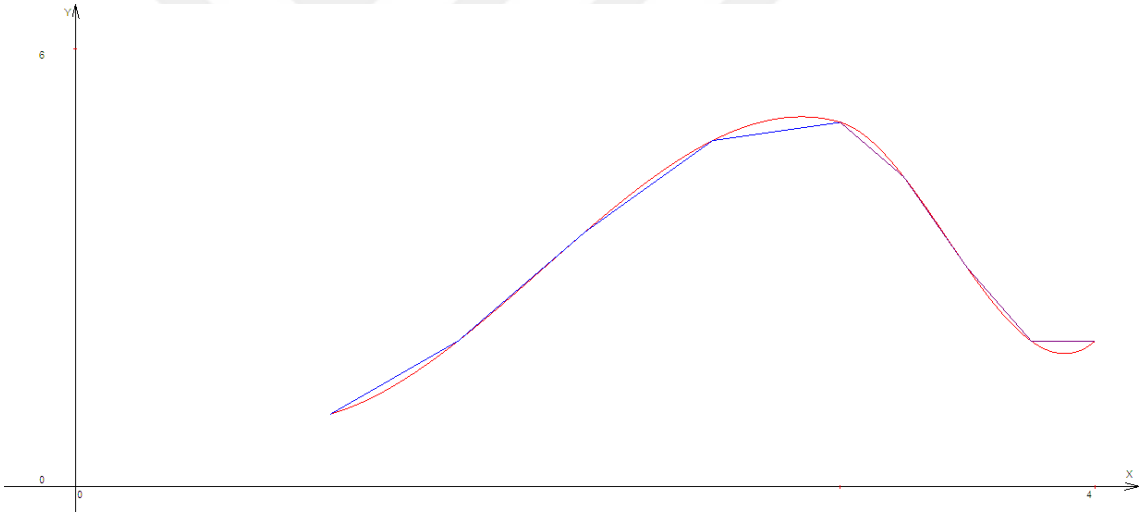
$M = 4$ olarak seçilsin, bu durumda iki tablo elde edilir (bak Tablo 5.2.3 ve Tablo 5.2.4).

x	1	1.5	2	2.5	3
y	1	2	3.5	4.75	5

Tablo 5.2.3

x	3	3.25	3.5	3.75	4
y	5	4.25	3	2	2

Tablo 5.2.4



Şekil 5.2.2

Tablo 5.2.3 kullanarak birinci interval için Interpolation 1 rejimde hesap edersek

Curve 4.60448 Area 89.8737

bulunur.

Bu ise aşağıdaki değerleri verir.

$L_0(4) = 4.60448$ Area $S_0(4) = 89.8737$

Tablo 5.2.4 kullanarak ikinci interval için Interpolation 1 rejimde hesap edersek

Curve 3.3461 Area 71.3412

bulunur.

Bu ise aşağıdaki değerleri verir.

$L_1(4) = 3.3461$ Area $S_1(4) = 71.3412$

Sonuç olarak istenilen değerler aşağıdaki şekilde olur.

$L(4) = L_0(4) + L_1(4)$ =4.60448+3.3461 = 7.95058

$S(4) = S_0(4) + S_0(4) = 89.8737+71.3412 = 161.215$

Elde edilen yaklaşık fonksiyonun grafiği spline fonksiyonun grafiği ile birlikte Şekil 5.2.2 de verildi.

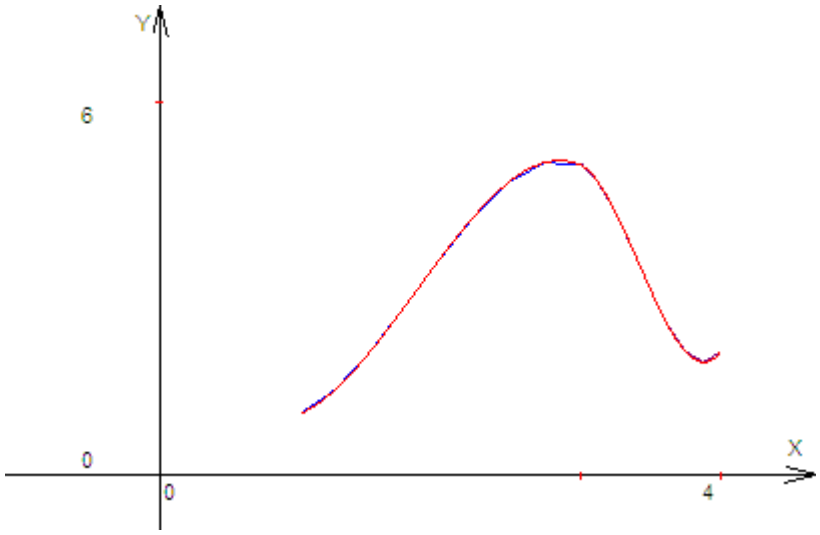
Şimdi de $M = 8$ seçelim. Bu durumda iki tablo elde edilir (bak Tablo 5.2.5 ve Tablo 5.2.6).

x	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3
y	1	1.39062	2	2.73438	3.5	4.20312	4.75	5.04688	5

Tablo 5.2.5

x	3	3.125	3.25	3.375	3.5	3.625	3.75	3.875	4
y	5	4.73438	4.25	3.64062	3	2.42188	2	1.82812	2

Tablo 5.2.6



Şekil 5.2.3

Tablo 5.2.5 kullanarak birinci interval için Interpolation 1 rejimde hesap edersek

Curve 4.69364 Area 92.7582

bulunur.

Bu ise aşağıdaki değerleri verir

$L_0(8) = 4.69364$ $S_0(8) = 92.7582$

Tablo 5.2.6 kullanarak ikinci interval için Interpolation 1 rejimde hesap edersek

Curve 3.52512 Area 73.4337

bulunur.

Bu ise aşağıdaki değerleri verir.

$L_1(8) = 3.52512$ $S_1(8) = 73.4337$

Sonuç olarak istenilen değerler aşağıdaki şekilde olur;

$L(8) = L_0(8) + L_1(8) = 4.69364+3.52512 = 8.21876$

$S(8) = S_0(8) + S_1(8) = 92.7582+73.4337 = 166.192$

Elde edilen yaklaşık fonksiyonun grafiği spline fonksiyonun grafiği ile birlikte Şekil 5.2.3 de verildi.

KAYNAKLAR

Aktop U., 2010, Belirli İntegrallerin Spline Fonksiyonlarla Yaklaşık Hesaplanması, Yüksek Lisans tezi , *Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,* KONYA, 37 s.

Amirali G. ve Duru H., 2002, Nümerik Analiz, Pegem A Yayıncılık, Ankara.

Atalay Çağlar N., 1993, Çok noktalı lineer sınır değer problemlerinde Spline Fonksiyonu, Doktora tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul

Aydın K., Bulgak A., Bulgak H., 2000, Analiz, SelÜn Vakfı, Konya

Aydın K., Bulgak A., Bulgak H., 2003, Bilgisayarla Matematik Analiz, SelÜn Vakfı,, Konya

Birkhoff G., Schultz M.H., Varga R.S. 1968, Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations Numerische Mathematik, 11:232. https://doi.org/10.1007/BF02161845

Bulgak A., Eminov D., 2003, Graphics Constructor 2.0, Selçuk Journal of Applied Mathematics , Volume 4, no. 1, pp. 42-57

Cheney W. , Kincaid D., 1980, Numerical Mathematics and Computing , Cole Publishing Company, Monterey , California

Çağlar B., 1985, Hiperbolik kısmi türevli denklemlerin kübik spline fonksiyonları yardımıyla nümerik çözümü, Doktora Tezi *,Yıldız Teknik Üniversitesi FBD*, İstanbul

Edwards C., Penney D., 2001, Matematik Analiz ve Analitik Geometri, Cilt 1,Akın Ö., *Gazi Üniversitesi,*Ankara

Gerald C.F., 1978, Applied Numerical Analysis, Second Edition, Addison –Wesley

Publishing Company, Massachusetts

Pruess S., 1987, Splines and Their Applications. Department of Mathematical and Computer Sciences Colorado School of Mines , Golden, Colorado 80401

Sinan O., Bulgak A., 2016, Visualisation of Cauchy problem solution for linear t-Hyperbolic *PDE*, *Konuralp Journal of Mathematics*, Vol. 4, N.1.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Murat UÇAR
Uyruğu	**:**	TC
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	EREĞLİ- 01/01/1976
Telefon	**:**	05057405742
Faks	**:**	
e-mail	**:**	murfly.mur@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Düziçi Anadolu Lisesi/Düziçi/Adana	1994
Üniversite	:	Amasya Eğitim Fakültesi/Amasya	1999
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
1999-2018	Milli Eğitim	Öğretmen

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR*