T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POISSON DENKLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ

MURAT AYTİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. CENGİZ DANE

Edirne
2011

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POISSON DENKLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ

Murat AYTİN

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 18 / 04 /2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul Edilmiştir.

Yrd.Doç. Dr. Cengiz DANE	**Prof .Dr. Hasan AKBAŞ**	**Prof.Dr. Hülya İŞCAN**
(Danışman)	**(Üye)**	**(Üye)**

ÖZET

Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, Uygulamalı Matematiğin bir dalı olup Temel Bilimlerden Mühendisliğin tüm alanlarında geniş uygulaması vardır.

Fizik ve mühendislik alanında karşılaşılan diferansiyel denklemler, Laplace, Poisson, Helmholtz veya dalga, Schrödinger gibi denklemlerdir. Bu tip denklemlerin ortak özellikleri; doğrusal, ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler olmalarıdır. Bu denklemlerin çözümlerinde seriler, değişkenlerin ayrılması, Green fonksiyonları ve integral dönüşümler sıkça kullanılır. Analitik tekniklerin yetersiz olduğu durumlarda sayısal yöntemlere başvurulur.

Bu çalışmanın I. Bölümünde Diferansiyel Denklemler ile ilgili genel kısa bilgiler verilmiş, Kısmi Diferansiyel Denklemlerle ilgili genel kavramların yanısıra, Laplace, Poisson, Difüzyon, Helmholtz, Dalga Denklemleri kısaca tanıtılmıştır.

II. Bölümde Genel Koordinatlar, Ortogonal Koordinat Sistemleri, Özel Ortogonal Koordinatlar tanıtılarak, Gradyenti, Diverjans, Rotasyonel ve Laplasyen ifadeleri verilmiş, Bessel ve Legendre Fonksiyonlarının temel özellikleri kısaca tanıtılmıştır.

III. Bölümde Poisson Denklemi tanıtılarak Silindirik ve Küresel Koordinatlarda yapılan bazı özel çözümleri gözden geçirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Özel Ortogonal Koordinatlar, Poisson Denklemi, Green Fonksiyonu.

SUMMARY

Partial Differential Equations, a branch of applied Mathematics, have many applications in every branch of engineering in basic science.

Differential Equations that faced in Physics and Engineering are equations as Laplace, Poisson, Helmholtz or wave, Schrödinger equations. Common features of this kind of equations are linear and partial differential equations from second degree. Series, differentiation of variables, Green Functions and integral transformations are often used in solving these equations. In some situations, analytical techniques are inadequate so numerical methods are used.

In this study, in Part I, general and short information about Differential Equations are given, and in addition to general concepts about Partial Differential Equations, Laplace, Poisson, Diffusion, Helmholtz, Wave Equations are shortly introduced.

In Part II, general coordinates, Orthogonal Coordinate Systems, Special orthogonal coordinates are introduced and Gradient, Divergence, Rotational and Laplacian expressions are given and basic features of Bessel and Legendre Functions are shortly introduced.

In Part III, Poisson Equation is introduced and special solutions which are applied in Cylinder and Spherical Coordinates are looked over.

Key Words: Special Orthogonal Coordinates, Poisson Equations, Green Function.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca her türlü yardımını esirgemeyen ve çalışmamın ortaya çıkmasında emeği geçen hocam Yrd.Doç.Dr.Cengiz DANE'ye teşekkürlerimi sunarım.

Hem yardımları hem de manevi destekleriyle yanımda olan başta Prof.Dr. Hülya İŞCAN olmak üzere tüm Matematik Bölümüne şükranlarımı sunarım.

Ayrıca en başından beri beni destekleyen ve daima yanımda olan sevgili eşime, anneme ve ablama en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
ÖZET		i
SUMMARY		ii
ÖNSÖZ		iii
I.	**BÖLÜM / ÖN BİLGİLER**	
1.1 .	Giriş	1
1.2 .	Genel Bilgiler	2
II.	**BÖLÜM / ORTOGONAL KOORDİNATLAR VE ÖZEL KOORDİNATLAR**	
2.1 .	Genel Koordinatlar	10
2.2 .	Ortogonal Koordinat Sistemleri	16
2.3 .	Özel Ortogonal Koordinat Sistemleri	22
2.3.1.	Kartezyen Koordinatlar	22
2.3.2.	Dairesel Silindirik Koordinatlar	25
2.3.3.	Küresel Koordinatlar	28
2.4 .	Legendre Denklemi ve Polinomları	31
2.5 .	Bessel Denklemi	39
2.6 .	Dirac Delta Fonksiyonu	42
III.	**BÖLÜM / POISSON DENKLEMİ VE ÇÖZÜMÜ**	
3.1 .	Poisson Denklemi	44
3.2 .	Poisson Denkleminin Silindirik koordinatlarda çözümü	50
3.3 .	Poisson Denkleminin Küresel koordinatlarda çözümü	61
TARTIŞMA		75
SİMGELER DİZİNİ		76
KAYNAKLAR		77
ÖZGEÇMİŞ		79

I. BÖLÜM

1.1. Giriş

Doğa sistemlerinin matematiksel modellerle ifade edilmesi söz konusu olduğunda genellikle diferansiyel denklem veya diferansiyel denklem sistemleriyle karşılaşırız. Matematiksel modelleme yöntemi; genel olarak, bir gerçek problemin matematik formüllerle ifade edilmesi, yani bir matematiksel modelin kurulması, ortaya çıkan problemin çözümü ve analizi, matematiksel sonuçların, orijinal gerçek olay açısından yorumu, şeklinde özetlenir.

Bir doğa olayının yapısı ile kısmi diferansiyel oluşturmak, uygulamalı matematiğin güç konularından biri ve aynı zamanda analizin klasik bir dalıdır.

Diferansiyel Denklemlerin, Mühendislik Bilimlerinden Sosyal Bilimlere kadar geniş bir uygulama alanı vardır.

Matematik modellerle ifade edilen ve diferansiyel denklemlere dönüştürülen olayların analizi, bu olayları temsil eden diferansiyel denklemlerin çözümü olan fonksiyonların incelenmesi ile yapılır. Eğer basit hareketleri temsil eden diferansiyel denklemler ya da denklem sistemleri ile karşı karşıyaysak bunlar genellikle lineer denklemlerdir ve genel çözümü analitik fonksiyonlardan oluşan bir uzay oluştururlar. Analitik çözümün bulunması demek ele alınan sistemin tamamen bilinmesi demektir. Eğer doğa olayını temsil eden diferansiyel denklemler non-lineer ise genellikle bu tip denklemlerin analitik çözümü azdır veya yoktur. Bu denklemlerin çözümleri nümerik yöntemlerle yaklaşık olarak hesaplanır.[1,2,3,4]

Örneğin, Matematik, Fizik ve Uygulamalı Bilimlerde karşılaşılan Laplace, Poisson, Difüzyon ve Dalga Denklemleri gibi denklemler benzer karakterlere sahip denklemlerdir. Bu denklemler $\nabla^2 U + k^2 U = 0$ formunda yazılan ve Helmholtz Denklemi olarak bilinen ve çözümlerini inceleyebildiğimiz bir özel denkleme dönüştürülebilen denklemlerdir. [20,21,22,23]

Bu çalışmada $\nabla^2\phi = -f(\vec{r})$ Poisson Denkleminin Küresel ve Silindirik Koordinatlarda çözümleri incelenmiştir. Ayrıca koordinat sistemleri, Legendre ve Bessel Fonksiyonları ile ilgili özet bilgi verilmiştir.

1.2. Genel Bilgiler

Bağımsız değişkenleri, bu değişkenlerin fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların türevlerini içeren bağıntılara diferansiyel denklem denir.

Tek bir değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme "Bayağı (Adi) Diferansiyel Denklem" , iki yada daha çok bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren bir denkleme "Kısmi Diferansiyel Denklem" denir.[1]

Bir diferansiyel denklemde en yüksek türevin mertebesine diferansiyel denklemin "Mertebesi" veya "Basamağı", denklemdeki en yüksek mertebeli türevin cebirsel derecesine denklemin "Derecesi" denir.

Diferansiyel denklemlerin; genel, özel ve tekil olmak üzere üç tür çözümünden bahsedilebilir. n. Mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümünde n tane keyfi sabit vardır. Genel çözümlerde sabitlere özel değerler verilerek özel çözümler elde edilir. Bazen diferansiyel denklemi sağlayan ancak genel çözümlerden elde edilemeyen bir veya birkaç çözüm ile karşılaşılabilir. Bu çözümlere de tekil çözümler denir.

U bağımlı, x ,y bağımsız değişkenlerine bağlı bir Kısmi Diferansiyel Denklem genel olarak,

$$F\left(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy},\right) = 0 \qquad (1.2.1)$$

şeklinde ifade edilir.

n bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli, $x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad U = U(x)$ olmak üzere,

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, U, U_{x_1}, ..., U_{x_n}, U_{x_1x_1}, U_{x_1x_2}, ...\right) = 0 \qquad (1.2.2)$$

formundadır.

Bir Kısmi Diferansiyel Denklemdeki bağımlı değişken ve bunların denklemdeki tüm kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme "Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem" denir.

İki bağımsız değişkenli birinci dereceden bir lineer denklem,

$$P(x,y)U_x + Q(x,y)U_y + R(x,y)U = S(x,y) \tag{1.2.3}$$

biçiminde, ikinci mertebeden bir lineer denklem,

$$A(x,y)U_{xx} + B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} + D(x,y)U_x + E(x,y)U_y + F(x,y)U = G(x,y) \tag{1.2.4}$$

şeklinde ifade edilir.

Eğer bir Kısmi Diferansiyel Denklem, o denklemde bulunan en yüksek mertebeli kısmi türevlere göre lineer ise, denkleme "Yarı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem" denir.

Birinci mertebeden iki bağımsız değişkenli yarı lineer denklem,

$$P(x,y,U)U_x + Q(x,y,U)U_y = R(x,y,U) \tag{1.2.5}$$

biçiminde, ikinci mertebeden yarı lineer denklem de,

$$A(x,y,U,U_x,U_y)U_{xx} + B(x,y,U,U_x,U_y)U_{xy} + C(x,y,U,U_x,U_y)U_{yy} + D(x,y,U,U_x,U_y) = 0 \tag{1.2.6}$$

şeklinde gösterilir.

Bir kısmi türevli denklem yarı lineer ise ve denklemde görülen en yüksek mertebeli türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu ise denkleme "hemen hemen Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem" denir.

İkinci mertebeden iki bağımsız değişkenli hemen hemen lineer denklem,

$$A(x,y)U_{xx} + B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} + D(x,y,U,U_x,U_y) = 0 \qquad (1.2.7)$$

şeklindedir.

Bazen bir diferansiyel denklemin keyfi sabitlerini içeren genel çözümünü bulmak yeterlidir. Bazı durumlarda ise diferansiyel denklemin belirli koşulları sağlayan çözümlerinin bulunması gerekir. Bu koşullar genellikle problemin yapısında vardır veya doğrudan denklemle birlikte verilir. Eğer koşullar yalnız bir noktayı kapsayan koşullar ise sınır koşulları olarak adlandırılır.

Başlangıç koşullarına bağlı olarak çözülen problemlere başlangıç değer problemi yada Cauchy problemi, sınır koşullarına bağlı olarak çözülen problemlere sınır değer problemi, sınır koşullarının yanı sıra başlangıç koşulları da verilirse, bu koşullara göre verilen problemlere başlangıç sınır değer problemi denir.

İkinci mertebeden Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler üç temel bölümde sınıflandırılır.

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU = 0 \qquad (1.2.8)$$

Karakteristik denkleminin, sol tarafını dx, dy diferansiyelleri cinsinden bir kuadratik form gibi düşünürsek,

$$Q(dx,dy) = A(dy)^2 - B(dx)(dy) + C(dx)^2 \qquad (1.2.9)$$

elde edilir. Bu formun belirlediği geometrik eğriler yardımıyla ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemleri sınıflara ayırmak mümkündür.

Lineer denklemler için; belirli bir (x,y) noktasında A,B,C katsayıları sabit değerler alır.

$Q(dx,dy) = 1$ olsun. Bu durumda verilen (x,y) noktası ile ilgili olarak Q=1 kuadratik denklemi $dx - dy$ düzleminde konikleri belirler. Yani $x - y$ düzlemindeki her noktaya karşılık $dx - dy$ düzleminde bir konik eğri bulunur. Bu durumda koniğin cinsi $Q(dx,dy)$'nin katsayılarına bağlıdır.

Buna göre,

i) $B^2 - 4AC > 0$ ise kökler reel ve farklıdır ve Q=1 denklemi bir hiperbol belirler.

ii) $B^2 - 4AC = 0$ ise kökler reel ve çakışıktır ve Q=1 denklemi bir parabol belirler.

iii) $B^2 - 4AC < 0$ ise kökler eşlenik kompleks sayılardır ve Q=1 denklemi bir elips belirler.

Böylece (1.2.8) Kısmi Diferansiyel Denklemi,

$B^2 - 4AC > 0$ ise Hiperbolik, $B^2 - 4AC = 0$ ise Parabolik, $B^2 - 4AC < 0$ ise Eliptik olarak sınıflandırılır.[5,6,7,14]

$\nabla^2 U + k^2 U = 0$ Helmholtz Denkleminde $U(x, y, z)$ merkezi orijinde bulunan ve kenar uzunluğu a ve orijindeki değeri

$$U_0 = U(0,0,0) \tag{1.2.10}$$

olan küp içinde tanımlı bir skaler alan olsun. Küpün içindeki bir noktada bu skaler alanın ortalama değeri

$$\overline{U}(x, y, z) = \frac{1}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} U(x, y, z) dx dy dz \tag{1.2.11}$$

ifadesi ile verilir. $U(x, y, z)$, $x_0 = (0,0,0)$ noktası civarında kuvvet serisine açılır ve serinin yüksek mertebeden terimleri ihmal edilerek bulunan açılım (1.2.11) de kullanılırsa

$$\overline{U}(x, y, z) = U(0,0,0) + \frac{a^2}{24} \left\{ \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} \right\}_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ z=0}} \tag{1.2.12}$$

veya

$$\overline{U}(x,y,z) = U_0 + \frac{a^2}{24}\left(\nabla^2 U\right)_0 \tag{1.2.13}$$

bulunur. Bu ifade kısaca

$$\overline{U}(x,y,z) - U(0,0,0) = \frac{a^2}{24}\left\{\nabla^2 U(x,y,z)\right\}_0 \tag{1.2.14}$$

veya

$$\left(\nabla^2 U\right)_0 = \frac{24}{a^2}\left(\overline{U} - U_0\right) \tag{1.2.15}$$

formunda yazılır. Çünkü çok değişkenli fonksiyonlar için

$$f(x_0 + h, y_0 + h, ..., t_0 + l) = f(x_0, y_0, ..., t_0) + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + ... + \frac{\partial}{\partial t}l\right)^r f(x_0, y_0, ..., t_0) + R_n \tag{1.2.16}$$

$(h = x - x_0, k = y - y_0, ..., l = t - t_0)$

şeklinde alınan Taylor Teoremi $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ noktasında $U(x,y,z)$ fonksiyonuna uygulanırsa

$$\begin{aligned} U(x,y,z) = U_0 &+ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_0 z \\ &+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 z^2\right] \\ &+ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)_0 yz + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)_0 xz + ... \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

ifadesi elde edilir. (1.2.17) değerinin (1.2.11)'de yerine konulması ile tek kuvvette olan ifadeler sıfır ve çift kuvvetten ifadeler

$$\frac{1}{a^3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 x^2\,dxdydz=\frac{a^2}{24}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 \quad ; \tag{1.2.18}$$

$$\frac{1}{a^3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 y^2\,dxdydz=\frac{a^2}{24}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 \quad ; \tag{1.2.19}$$

$$\frac{1}{a^3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 z^2\,dxdydz=\frac{a^2}{24}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 \quad ; \tag{1.2.20}$$

şeklini alır. (1.2.18), (1.2.19), (1.2.20) kullanılır ve yüksek mertebeden türevler ihmal edilirse (1.2.11)'den (1.2.15) ifadesi bulunur. (1.2.15) ifadesi $U(x,y,z)$ skaler alanının bir (x,y,z) noktasındaki $\overline{U}(x,y,z)$ ortalama değeri ile $U(0,0,0)$ başlangıç değeri arasındaki farkının, bu skaler alanın başlangıç noktasındaki laplasyeni ile belirleneceğini ifade eder.

(1.2.15) ifadesinin sağ tarafında bulunan $\overline{U}-U_0$ farkının şekline göre uygulamalı bilimlerde çok kullanılan kısmi türevli denklemler elde edilir.
Bunlardan bazıları;

1- Eğer $U(x,y,z)$ skaler alanının bir noktadaki değeri bu nokta civarındaki ortalama değerine eşit ise (1.2.15)'den Laplace Denklemi adı verilen

$$\nabla^2 U=0 \tag{1.2.21}$$

denklemi elde edilir. Buna göre bir skaler alanın, bir noktadaki değeri bu nokta civarındaki ortalama değerine eşit ise bu skaler alan bu noktada (1.2.21) denklemini gerçekler.

2- $U(x,y,z)$ skaler alanın bir noktadaki değeri ile bu nokta komşuluğundaki ortalama değeri arasındaki fark, bir başka $h(\vec{r})$ skaler alanına eşit ise (1.2.15) denklemi

$$\nabla^2 U = h(\vec{r}) \tag{1.2.22}$$

şeklini alır. Bu denklem, ε_0 bir sabit ve $\rho(\vec{r})$ başka bir skaler alan olmak üzere

$$\nabla^2 U = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r}) \tag{1.2.23}$$

şeklinde yazıldığında Poisson Denklemi olarak bilinen denklem elde edilir.

(1.2.23) denkleminde $\rho(\vec{r})$ fonksiyonu sıfıra eşit ise denklem Laplace Denklemine dönüşür. Bu denklemin Mühendislik ve Fizikte geniş bir kullanım alanı vardır.

3- Genellikle (1.2.21) ve (1.2.23) denklemlerini gerçekleyen skaler alanlar $U(x,y,z,t)$ biçiminde de olabilir. Bu durumda alanın bir noktadaki değeri, o nokta komşuluğunda yer alan başka bir noktadaki ortalama değerden farklı değerler alır. Kararlı durumlarda bu fark, zaman sürecinde dengelenir. Bu durum,

$$\left(\overline{U} - U_0\right) \approx \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t} \tag{1.2.24}$$

şeklinde ifade edilir.

$$\nabla^2 U_0 \approx \left(\overline{U} - U_0\right) \tag{1.2.25}$$

şeklinde ifade edildiği göz önüne alınırsa, (1.2.24) ve (1.2.25) ifadelerinden

$$\nabla^2 U_0 \approx \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t} \tag{1.2.26}$$

veya, α bir orantı katsayısı olmak üzere

$$\nabla^2 U(x,y,z,t) \approx \frac{1}{\alpha}\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t} \tag{1.2.27}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem Difüzyon Denklemi olarak bilinir.(1.2.27) denklemindeki α katsayısına geçirgenlik katsayısı denir.

4- Skaler alanın zamana bağlı olduğu durumlarda $(\overline{U} - U_0)$ farkı, fonksiyonun ivmesiyle orantılı ise bu durum,

$$(\overline{U} - U_0) \approx \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{1.2.28}$$

biçiminde ifade edilir. Aynı zamanda $(\overline{U} - U_0)$ farkının $\nabla^2 U_0$'la orantılı olmasından dolayı,

$$\nabla^2 U_0 \approx \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{1.2.29}$$

dır. (1.2.29) ifadesi, c bir orantı sabiti olmak üzere

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{1.2.30}$$

biçiminde ifade edilse, Dalga Denklemi olarak bilinen denklem elde edilir.[3,5,6,7,8,14]

II. BÖLÜM

2.1. Genel Koordinatlar

(x,y,z) bir noktanın kartezyen koordinatları olmak üzere,

$f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z),\ f_3(x,y,z)$ verilmiş bir bölgede x,y,z nin sürekli fonksiyonları olsun.

$$u_1 = f_1(x,y,z),\quad u_2 = f_2(x,y,z),\quad u_3 = f_3(x,y,z) \tag{2.1.1}$$

denklemleri de x,y,z ye göre çözülerek

$$x = g_1(u_1,u_2,u_3),\quad y = g_2(u_1,u_2,u_3),\quad z = g_3(u_1,u_2,u_3) \tag{2.1.2}$$

şeklinde yazılabilsin. Ayrıca g_1,g_2,g_3'de, u_1,u_2,u_3ün fonksiyonları olsun. O zaman bölge içindeki kartezyen koordinatları (x,y,z) olan her P noktasına bir (u_1,u_2,u_3) değer takımı karşılık gelir. Bu u_1,u_2,u_3 fonksiyonlarına P noktasının eğrisel koordinatları, (2.1.1) ve (2.1.2) denklemlerine koordinat dönüşümü denklemleri denir.

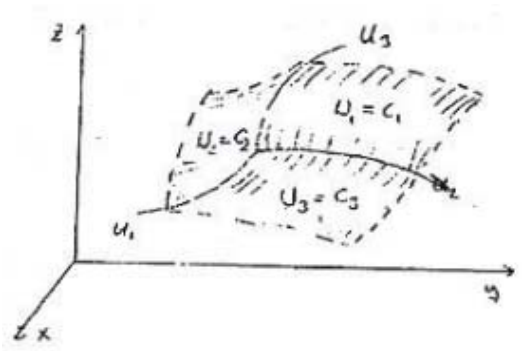
Her (x,y,z) değer takımına tek bir (u_1,u_2,u_3) değer takımı karşı gelmesi için u_1,u_2,u_3'ü x,y,z'nin sürekli ve türevi alınabilen fonksiyonları kabul ediyoruz.

c_1,c_2,c_3 birer sabit olmak üzere her P noktasından koordinat yüzeyleri denilen

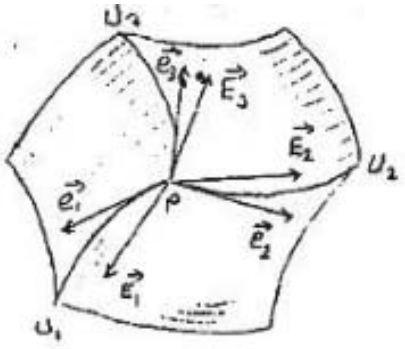
$$u_1 = c_1,\quad u_2 = c_2,\quad u_3 = c_3 \tag{2.1.3}$$

yüzeyleri geçer. Bu üç yüzey ikişer ikişer koordinat eğrileri denilen üç eğri boyunca kesişirler. Şekil (2.1.1)

Her koordinat yüzeyi üzerinde bir koordinat sabit, diğer ikisi değişkendir. Örneğin $u_1 = c_1$ yüzeyi üzerinde her yerde u_1 sabit, u_2 ile u_3 noktadan noktaya değişir. Bir yüzey sabit olan koordinatın adı ile adlandırılır.



Şekil (2.1.1)



Şekil (2.1.2)

Başlangıç noktası değişken $P(x, y, z)$ noktasına birleştiren $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yer vektörü (2.1.2) yardımı ile u_1, u_2, u_3 değişkenlerinin fonksiyonu olarak

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3) \tag{2.1.4}$$

şeklinde yazılır. $\vec{r}$ fonksiyonunun u_1 e göre kısmi türevi, u_2 ve u_3 sabit tutularak, yani P noktası u_1 eğrisi üzerinde değiştirilerek elde edilir. $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$, u_1 eğrisine P noktasında teğet olan bir vektördür. Buna göre u_1'in P noktasındaki teğeti doğrultusundaki birim vektörü $\vec{e}_1$ ile gösterilirse,

$$\vec{e}_1 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right|} \tag{2.1.5}$$

olur. Eğer

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right| = h_1 \tag{2.1.6}$$

ile gösterilirse

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = h_1 \vec{e}_1 \tag{2.1.7}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\vec{e}_2$ ve $\vec{e}_3$ sırasıyla u_2 ve u_3 eğrilerinin P noktasındaki teğetleri yönündeki birim vektörleri gösterirse

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right| = h_2 \qquad \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_{31}}\right| = h_3 \tag{2.1.8}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = h_2 \vec{e}_2 \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = h_3 \vec{e}_3 \tag{2.1.9}$$

şeklinde yazılır. h_1, h_2, h_3 büyüklükleri metrik katsayılar olarak adlandırılır. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birim vektörlerinin yönleri sırasıyla artan u_1, u_2, u_3 yönlerindedir. Şekil (2.1.2)

$\vec{\nabla} u_1$, P noktasında $u_1 = c_1$ yüzeyinin normali doğrultusunda bir vektördür. $u_1 = c_1$ yüzeyi normali doğrultusundaki birim vektörünü $\vec{E}_1$ ile gösterirsek,

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{\nabla} u_1}{\left|\vec{\nabla} u_1\right|} \tag{2.1.10}$$

yazılabilir. Benzer şekilde $u_2 = c_2$ ve $u_3 = c_3$ yüzeylerinin normalleri doğrultusundaki birim vektörleri $\vec{E}_2$ ve $\vec{E}_3$ ile gösterilirse

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{\nabla} u_2}{\left|\vec{\nabla} u_2\right|} \quad \text{ve} \quad \vec{E}_3 = \frac{\vec{\nabla} u_3}{\left|\vec{\nabla} u_3\right|} \tag{2.1.11}$$

yazılır. Gerek $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birim vektörlerinin, gerekse $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ birim vektörlerinin yönleri bu vektör takımları bir sağ el vektör sistemi meydana getirecek şekilde seçilir.

Eğrisel sistemin her keyfi P noktasında, u_1, u_2, u_3 koordinat eğrilerinin teğetleri yönünde olan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ diğeri $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, $u_3 = c_3$ koordinat yüzeylerinin normalleri yönünde olan $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ gibi iki sağ el birim vektör takımı vardır. Genel olarak $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ile $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ vektör takımları birbirinden farklıdır. Ancak eğrisel koordinat sistemi ortogonal olursa bu iki vektör takımı özdeş olur.

Her keyfi $\vec{A}$ vektörü a_1, a_2, a_3 veya A_1, A_2, A_3 bileşenler olmak üzere

$$\vec{A} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \tag{2.1.12}$$

$$\vec{A} = A_1\vec{E}_1 + A_2\vec{E}_2 + A_3\vec{E}_3 \tag{2.1.13}$$

Şeklinde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ veya $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ vektör takımları ayrı ayrı üç boyutlu uzayın genel olarak birbirinden farklı iki bazını oluştururlar.

Keyfi bir $\vec{A}$ vektörünü genel olarak büyüklükleri birim olmayan

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \tag{2.1.14}$$

veya

$$\vec{\nabla} u_1, \vec{\nabla} u_2, \vec{\nabla} u_3 \tag{2.1.15}$$

baz vektörleri cinsinden yazmak mümkündür. (2.1.14) ve (2.1.15) baz vektörlerine üniter baz vektörleri denir. $\vec{A}$ vektörü bu baz vektörleri cinsinden

$$\vec{A} = c_1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} + c_3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = c_1 \vec{\alpha}_1 + c_2 \vec{\alpha}_2 + c_3 \vec{\alpha}_3 \tag{2.1.16}$$

$$\vec{A} = C_1 \vec{\nabla} u_1 + C_2 \vec{\nabla} u_2 + C_3 \vec{\nabla} u_3 = C_1 \vec{\beta}_1 + C_2 \vec{\beta}_2 + C_3 \vec{\beta}_3 \tag{2.1.17}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\vec{\alpha}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \qquad \vec{\alpha}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \qquad \vec{\alpha}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \tag{2.1.18}$$

$$\vec{\beta}_1 = \vec{\nabla} u_1 \qquad \vec{\beta}_2 = \vec{\nabla} u_2 \qquad \vec{\beta}_3 = \vec{\nabla} u_3 \tag{2.1.19}$$

dır. C_1, C_2, C_3 bileşenlerine $\vec{A}$ vektörünün kovaryant, c_1, c_2, c_3 bileşenlerine de $\vec{A}$ vektörünün kontravaryant bileşenleri denir.

Kartezyen koordinatlarda yay uzunluğu denklemini;

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.1.20}$$

şeklinde ifade edilir. Eğrisel koordinatlarda $d\vec{r}$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 = \alpha_1 du_1 + \alpha_2 du_2 + \alpha_3 du_3 \qquad (2.1.21)$$

şeklinde ifade edilir.

$d\vec{r}$ nin bu değerinden

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} du_i du_j \qquad (2.1.22)$$

elde edilir. Burada

$$g_{ij} = \vec{\alpha}_i \vec{\alpha}_j \qquad (2.1.23)$$

dir. g_{ij} ye metrik katsayılar denir $g_{ij} = g_{ji}$ dir, yani g_{ij} simetriktir. (2.1.23) bağıntısı, temel kuadratik form veya metrik form olarak adlandırılır.

Eğer i ile j nin farklı değerleri için $g_{ij} = 0$ ise o zaman koordinat sistemi ortogonaldir. Ortogonal koordinat sistemleri için $i = 1,2,3$ olmak üzere

$$g_{ii} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right) = h_i^{\,2} \qquad (2.1.24)$$

dir. Bu bağıntı h_1, h_2, h_3 metrik katsayıların hesaplanmasında kullanılır.[9,10,11,14]

2.2. Ortogonal Koordinat Sistemleri

Eğer koordinat eğrileri her $P(x,y,z)$ noktasında birbirine dik ise u_1,u_2,u_3 eğrisel koordinatları ortogonaldir denir.

$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ (2.1.5) de tanımlanan birim vektörler ve s_1,s_2,s_3 ; u_1,u_2,u_3 ün pozitif yönde koordinat eğrileri boyunca ölçülen yay uzunluklarını göstermek üzere

$$(ds)^2=(ds_1)^2+(ds_2)^2+(ds_3)^2 \tag{2.2.1}$$

dir. Bu ifade h_1,h_2,h_3 metrik katsayıları cinsinden

$$ds^2=h_1^{\,2}(du_1)^2+h_2^{\,2}(du_2)^2+h_3^{\,2}(du_3)^2 \tag{2.2.2}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca ortogonal koordinat sistemleri için J jakobiyeni

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}x\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right) \\ &= h_1\vec{e}_1\left(h_2\vec{e}_2\,xh_3\vec{e}_3\right) \\ &= h_1h_2h_3.\vec{e}_1\left(\vec{e}_2\,x\,\vec{e}_3\right) \\ &= h_1h_2h_3 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

dir. $\left(\vec{\nabla}u_1,\vec{\nabla}u_2,\vec{\nabla}u_3\right)$ ile $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1},\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2},\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right)$ vektör takımı ters vektör sistemler olduğundan ortogonal koordinat sistemleri için

$$\vec{\nabla u_1} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} x \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[h_2 \vec{e_2}\, x h_3 \vec{e_3}\right] = \frac{\vec{e_1}}{h_1} \tag{2.2.4}$$

$$\vec{\nabla u_2} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} x \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[h_3 \vec{e_3}\, x h_1 \vec{e_1}\right] = \frac{\vec{e_2}}{h_2} \tag{2.2.5}$$

$$\vec{\nabla u_3} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} x \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[h_1 \vec{e_1}\, x h_2 \vec{e_2}\right] = \frac{\vec{e_3}}{h_3} \tag{2.2.6}$$

ve

$$\begin{aligned} \vec{e_1} &= h_2 h_3 \vec{\nabla} u_2 x u_3 \\ \vec{e_2} &= h_3 h_1 \vec{\nabla} u_3 x u_1 \\ \vec{e_3} &= h_1 h_2 \vec{\nabla} u_1 x u_2 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

bağıntıları bulunur.

Bir f skaler fonksiyonunun Gradyenti bir vektördür. Gradyent vektörünün $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ bazındaki bileşenleri f_1, f_2, f_3 ise

$$\vec{\nabla} f = f_1 \vec{e_1} + f_2 \vec{e_2} + f_3 \vec{e_3} \tag{2.2.8}$$

şeklinde ifade edilir.

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1 \vec{e_1} du_1 + h_2 \vec{e_2}\, du_2 + h_3 \vec{e_3}\, du_3 \tag{2.2.9}$$

ve

$$df = \vec{\nabla}.f.d\vec{r} \tag{2.2.10}$$

olduğu göz önüne alınırsa (2.2.8) ve (2.2.9) bağıntıları kullanılarak

$$df = h_1 f_1 du_1 + h_2 f_2 du_2 + h_3 f_3 du_3 \tag{2.2.11}$$

elde edilir, diğer taraftan f fonksiyonu (u_1, u_2, u_3) eğrisel koordinatlarının bir skaler fonksiyonu olduğu dikkate alınarak

$$df = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 \tag{2.2.12}$$

yazılır. (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6) ve (2.2.12) bağıntılarından

$$f_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \qquad \text{i=1,2,3} \tag{2.2.13}$$

elde edilir. Bu değerler (2.2.1) bağıntısıyla yerine konulursa f in gradyenti

$$\vec{\nabla} f = \frac{\vec{e_1}}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\vec{e_2}}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\vec{e_3}}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \tag{2.2.14}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da $\vec{\nabla}$ işlemcisinin dik eğrisel koordinatlardaki ifadesi

$$\vec{\nabla} = \frac{\vec{e_1}}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\vec{e_2}}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\vec{e_3}}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \tag{2.2.15}$$

olarak bulunur.

Eğrisel koordinatlardaki bilişenleri A_1, A_2, A_3 olan

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 \tag{2.2.16}$$

vektör fonksiyonunun diverjansını hesaplamak için (2.2.14) bağıntısı kullanılarak

$$\vec{\nabla}\, f = \vec{\nabla}\left(A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3\right) \tag{2.2.17}$$

den

$$\vec{\nabla}\left(A_1\vec{e}_1\right) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_1h_2h_3\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(A_2\vec{e}_2\right) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_2h_3h_1\right) \tag{2.2.18}$$

$$\vec{\nabla}\left(A_3\vec{e}_3\right) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_3h_1h_2\right)$$

bulunur. $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ özel değeri için (2.2.18) bağıntıları

$$\vec{\nabla}\,\vec{e}_1 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2h_3\right)$$

$$\vec{\nabla}\,\vec{e}_2 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_3h_1\right) \tag{2.2.19}$$

$$\vec{\nabla}\,\vec{e}_3 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1h_2\right)$$

şeklini alır. Böylece keyfi bir $\vec{A}$ vektörünün eğrisel koordinatlardaki diverjansı

$$\vec{\nabla}\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right] \tag{2.2.20}$$

formunda elde edilir. Benzer şekilde keyfi bir $\vec{A}$ vektörünün rotasyoneli için (2.2.4), (2.2.5),(2.2.6) bağıntılarından

$$\vec{\nabla}x(A_1\vec{e}_1)=\frac{\vec{e}_2}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1)+\frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)$$

$$\vec{\nabla}x(A_2\vec{e}_2)=\frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_2)-\frac{\vec{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2) \tag{2.2.21}$$

$$\vec{\nabla}x(A_3\vec{e}_3)=\frac{\vec{e}_1}{h_3h_2}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_3)-\frac{\vec{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3)$$

elde edilir. Böylece $\vec{A}$ vektörünün ortogonal eğrisel koordinatlardaki rotasyoneli;

$$\vec{\nabla}x\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3 \end{vmatrix} \tag{2.2.22}$$

şeklinde de yazabiliriz. (2.2.15) ifadesinden yararlanarak f skaler fonksiyonun ortogonal eğrisel koordinatlardaki Laplasyeninin ifadesi

$$\nabla^2 f=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right] \tag{2.2.23}$$

olarak elde edilir.

Ortogonal eğrisel koordinat sisteminde hacim elemanı,

$$dV = h_1.h_2.h_3.du_1 du_2 du_3 \tag{2.2.24}$$

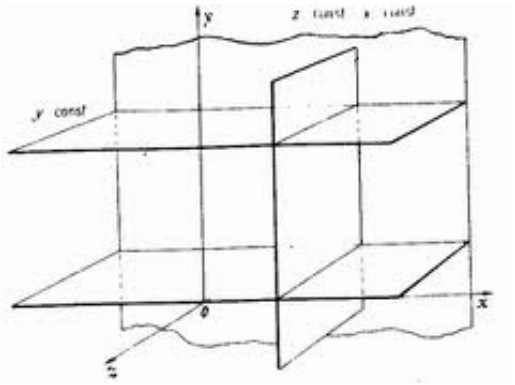
yüzey elemanı,

$$dS = h_1.h_2.du_1 du_2 \tag{2.2.25}$$

şeklidedir.[9,10,11,16]

2.3. Özel Ortogonal Koordinat Sistemleri

2.3.1. Kartezyen koordinatlar



Şekil (2.3.1.1)

Kartezyen koordinatlar;

$$\begin{aligned} u_1 &= x \qquad -\infty < x < +\infty \\ u_2 &= y \qquad -\infty < y < +\infty \\ u_3 &= z \qquad -\infty < z < +\infty \end{aligned} \tag{2.3.1.1}$$

şeklinde ifade edilir. Kartezyen koordinat sisteminde herhangi bir P(x,y,z) noktasının yer vektörü,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{2.3.1.2}$$

olarak yazılır. Metrik ve metrik katsayılar

$$h_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right| = 1 \qquad h_2 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right| = 1 \qquad h_3 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right| = 1 \quad g_{ij} = \delta^i_j \qquad i, j = 1,2,3 \tag{2.3.1.3}$$

dir.

Bu koordinat sisteminde,

$\vec{\nabla}$ $(nabla)$ operatörü,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{2.3.1.4}$$

şeklinde verilir.

$f = f(x,y,z)$ bir skaler fonksiyon ve $\vec{E}$ de kartezyen koordinatlardaki skaler bileşenleri E_X, E_Y, E_Z olan bir vektör olmak üzere

f fonksiyonun Gradyenti;

$$gradf = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \tag{2.3.1.5}$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$div\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{2.3.1.6}$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

$$Rot\vec{E} = \vec{\nabla} x \vec{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \tag{2.3.1.7}$$

f fonksiyonunun Laplasyeni,

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{2.3.1.8}$$

olarak ifade edilir.

Yay elemanı,

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \qquad (2.3.1.9)$$

Hacim elemanı,

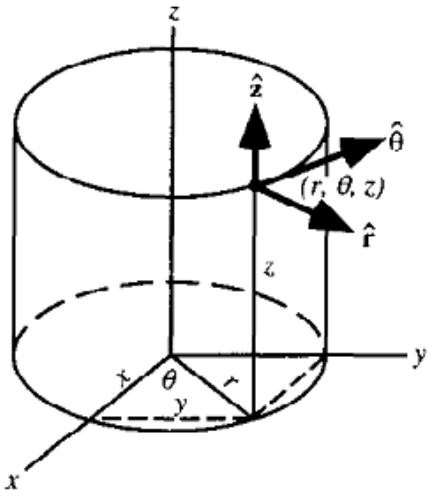
$$dV = dxdydz \qquad (2.3.1.10)$$

Alan elemanı,

$$dA = dxdy \qquad (2.3.1.11)$$

dir.

2.3.2. Dairesel silindirik koordinatlar



Şekil (2.3.2.1)

$P(x,y,z)$ noktasının xy düzlemindeki izdüşümü $P'(u_1,u_2,u_3)$ olsun.

$$\begin{aligned} u_1 &= r \qquad 0 \le r \le \infty \\ u_2 &= \theta \qquad 0 \le \theta < 2\pi \\ u_3 &= z \qquad -\infty < z < \infty \end{aligned} \tag{2.3.2.1}$$

koordinatlarına P noktasının silindirik koordinatları denir. Kartezyen koordinatlar silindirik koordinatlara,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned} \tag{2.3.2.2}$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlar ile Kartezyen Koordinatlar arasında

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad z = z \tag{2.3.2.3}$$

bağıntıları vardır.

$P(x,y,z)$ noktasının $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yer vektörünün silindirik koordinatlardaki ifadesi,

$$\vec{r} = r.\cos\theta.\vec{i} + r.\sin\theta.\vec{j} + z\vec{k} \qquad (2.3.2.4)$$

olmak üzere metrik katsayılar ve r,θ,z nin artan yöndeki birim vektörleri

$$h_1 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = 1 \qquad h_2 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = r \qquad h_3 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right| = 1 \qquad (2.3.2.5)$$

ve

$$\begin{aligned} \vec{e_1} &= \vec{e_r} = \hat{r} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j} \\ \vec{e_2} &= \vec{e_\theta} = \overset{\wedge}{\theta} = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j} \\ \vec{e_3} &= \vec{e_z} = \hat{z} = \vec{k} \end{aligned} \qquad (2.3.2.6)$$

dir.

Bu koordinat sisteminde

$\vec{\nabla}$ $(nabla)$ operatörü,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \qquad (2.3.2.7)$$

şeklindedir.

$f = f(x,y,z)$ bir skaler fonksiyon ve $\vec{E}$ de kartezyen koordinatlardaki skaler bileşenleri E_r, E_θ, E_z olan bir vektör olmak üzere

f fonksiyonun Gradyenti;

$$gradf = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_r} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z} \qquad (2.3.2.8)$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$div\,\vec{E} = \vec{\nabla}\,\vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad (2.3.2.9)$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

$$Rot\,\vec{E} = \vec{\nabla} x \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r.\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & \rho.E_\theta & E_z \end{vmatrix} \qquad (2.3.2.10)$$

f fonksiyonunun Laplasyeni,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.3.2.11)$$

veya

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (2.3.2.12)$$

olarak ifade edilir.

Yay elemanı,

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2 \qquad (2.3.2.13)$$

Hacim elemanı,

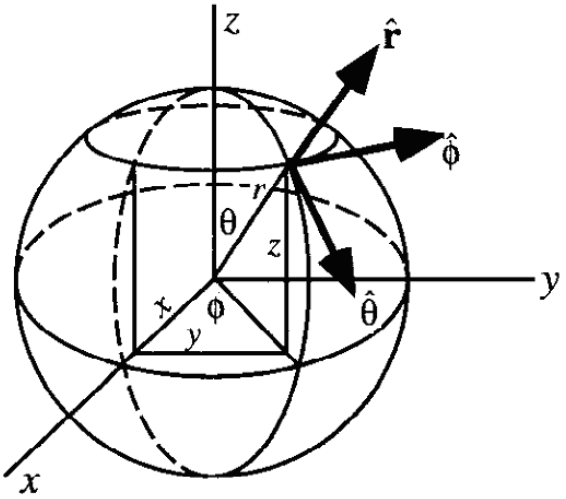
$$dV = rdrd\theta dz \qquad (2.3.2.14)$$

Alan elemanı,

$$dA = rdrd\theta \qquad (2.3.2.15)$$

dır.

2.3.3. Küresel koordinatlar



Şekil (2.3.3.1)

Bir $P(x,y,z)$ noktasının küresel koordinatları, r; P noktasının başlangıç noktasına uzaklığı, θ ; $\vec{OP} = \vec{r}$ vektörünün Z ekseni ile yaptığı açı, ϕ; $\vec{r}$ vektörünün xy düzlemi üzerindeki izdüşümünün ox ekseni ile yaptığı açı olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_1 &= r \qquad 0 \le r \le \infty \\ u_2 &= \theta \qquad 0 < \theta < \pi \\ u_3 &= \phi \qquad 0 \le \phi < 2\pi \end{aligned} \tag{2.3.3.1}$$

koordinatlarına küresel koordinatlar denir. Kartezyen koordinatlar küresel koordinatlara,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi\sin\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{2.3.3.2}$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlar ile Kartezyen Koordinatlar arasında

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2.3.3.3)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

bağıntıları vardır.

$P(x, y, z)$ noktasının $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yer vektörünün küresel koordinatlardaki ifadesi,

$$\vec{r} = r\cos\phi\sin\theta.\vec{i} + r\sin\phi\sin\theta.\vec{j} + r\cos\theta.\vec{k} \qquad (2.3.3.4)$$

dir. metrik katsayılar ve r, θ, ϕ nin artan yöndeki birim vektörleri

$$h_1 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = 1 \qquad h_2 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right| = r \qquad h_3 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = r.\sin\phi \qquad (2.3.3.5)$$

ve

$$\vec{e_1} = \vec{e_r} = \hat{r} = \sin\theta\cos\phi.\vec{i} + \sin\theta\sin\phi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$

$$\vec{e_2} = \vec{e_\theta} = \hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi.\vec{i} + \cos\theta\sin\phi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k} \qquad (2.3.3.6)$$

$$\vec{e_3} = \vec{e_z} = \hat{z} = -r\sin\theta\sin\phi.\vec{i} + r\sin\theta\cos\phi.\vec{j}$$

dir.

Bu koordinat sisteminde

$\vec{\nabla}$ $(nabla)$ operatörü,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_\phi \qquad (2.3.3.7)$$

$f(x,y,z)$ skaler fonksiyon ve $\vec{E}$ de kartezyen koordinatlardaki skaler bileşenleri E_r, E_θ, E_ϕ olan bir vektör olmak üzere

f fonksiyonun Gradyenti;

$$gradf = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi \tag{2.3.3.8}$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$div\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2}{r}E_r\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot\theta}{r}E_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \tag{2.3.3.9}$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

$$Rot\vec{E} = \vec{\nabla} x \vec{E} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r.\vec{e}_\theta & \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ E_r & r.E_\theta & r\sin\theta E_\phi \end{vmatrix} \tag{2.3.3.10}$$

f fonksiyonunun Laplasyeni,

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{2.3.3.11}$$

olarak ifade edilir.

Yay elemanı,

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\phi)^2 \tag{2.3.3.12}$$

Hacim elemanı,

$$dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \tag{2.3.3.13}$$

Alan elemanı,

$$dA = r dr d\theta d\phi \tag{2.3.3.14}$$

olur.[5,9,10,11]

2.4. Legendre Denklemi ve Polinomları

$$\nabla^2\Psi(x,y,z)+k^2\Psi(x,y,z)=0 \tag{2.4.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklem; doğrusal, ikinci mertebeden kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Denklemin çözümlerinde seri çözümler, değişkenlerin ayrılması, Green fonksiyonları ve integral dönüşümler en çok kullanılan yöntemlerdir. Denklemin çözümünde analitik tekniklerin başarısız olduğu durumlarda ise sayısal yöntemlere başvurulur.

(2.4.1) denklemi küresel koordinatlarda ve k parametresinin sadece radyal koordinat r'ye bağlı olduğu durumlarda değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanarak çözülür. İlk etapta $\Psi(r,\theta,\phi)$ çözümünün r ve (θ,ϕ) değişkenlerine bağımlılığını:

$$\Psi(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi) \tag{2.4.2}$$

şeklinde ayrılır. Bu (2.4.1) denkleminde yerine konulursa

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(R(r)Y(\theta,\phi)\right)\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R(r)Y(\theta,\phi)\right)\right)$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(R(r)Y(\theta,\phi))+k^2(r)R(r)Y(\theta,\phi)=0 \tag{2.4.3}$$

bulunur. Bu denklemi

$$\frac{r^2}{R(r)Y(\theta,\phi)} \tag{2.4.4}$$

ile çarpıp, r bağımlılığı sol ve (θ,ϕ) bağımlılığı da sağ tarafta toplanırsa,

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right]+k^2(r)r^2 \tag{2.4.5}$$

$$=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y(\theta,\phi)\right]+\frac{1}{\sin^2\theta Y(\theta,\phi)}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}$$

elde edilir. r ve (θ,ϕ) birbirlerinden bağımsız değerler alabildiklerinden, bu denklem tüm r ve (θ,ϕ) değerleri için sağlanması ancak her iki tarafınında aynı sabite eşit olması ile mümkündür. Bu sabite ayrılma sabiti denir ve λ ile gösterilirse, (2.4.5) denklemi

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right]+r^2k^2(r)R(r)-\lambda R(r)=0 \tag{2.4.6}$$

ve

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda Y(\theta,\phi)=0 \tag{2.4.7}$$

şeklinde iki ayrı denkleme indirgenir. $R(r)$'nin sağladığı (2.4.6) denklemi, sıradan bir diferansiyel denklemdir. İkinci denklemde ise,

$$Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{2.4.8}$$

şeklinde tekrar ayrılabilir bir çözüm dener ve ayrılma sabitine m^2 denerek

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]+\lambda\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2}=m^2 \tag{2.4.9}$$

yazılabilir. Buradan $\Theta(\theta)$ ve $\Phi(\phi)$ için çözülmesi gereken denklemler,

$$\sin^2\theta\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}+\cos\theta\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}+\left[\lambda\sin^2\theta-m^2\right]\Theta(\theta)=0 \qquad (2.4.10)$$

ve

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}+m^2\Phi(\phi)=0 \qquad (2.4.11)$$

olarak bulunurlar. Görüldüğü gibi, kısmi türevli bir diferansiyel denklem olan (2.4.1) denklemi, küresel simetrik problemlerde değişkenlerin ayrılması yöntemi ile, (2.4.6), (2.4.10) ve (2.4.11)' de verilen üç sıradan diferansiyel denkleme dönüşmüştür.

(2.4.1) denkleminin ayrılabilir olması, küresel kutupsal koordinatların kullanılması ile yakından ilgilidir. Bu koordinat sistemi, simetrileri tam olarak yansıtmaktadır. Aynı problem kartezyen koordinatlarda çözme denenseydi, çözüm

$$\Psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılamayacaktı. Verilen kısmi türevli bir diferansiyel denklemin değişkenlerin ayrılması yöntemi ile çözülüp çözülemeyeceği, denklemin simetrileri ile yakından ilgilidir. Kısmi türevli bir diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılamıyorsa, ayrılabileceği bir koordinat sisteminin var olup olmadığını kontrol etmek diferansiyel denklemin simetrilerini araştırmakla mümkündür. Böyle bir koordinat sistemi var ise, onu da sistemin simetrilerinin türeticileri yardımı ile oluşturmak mümkündür.

Bu denklemlerden (2.4.11)'nin genel çözümü

$$\Phi(\phi)=Ae^{im\phi}+Be^{-im\phi} \qquad (2.4.12)$$

dir. m üzerinde henüz bir sıralama yoktur ancak

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \qquad (2.4.13)$$

olarak verilen periyodik sınır şartı kullanılırsa $0,\pm1,\pm2,...$ gibi tamsayı değerleri alması gerektiği görülür. (2.4.10) denklemi

$$x = \cos\theta \qquad (\theta \in [0,\pi], x \in [-1,1]) \tag{2.4.14}$$

gibi yeni bir bağımsız değişken tanımlanarak

$$(1-x^2)\frac{d^2Z(x)}{dx^2} - 2x\frac{dZ(x)}{dx} + \left[\lambda - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right]Z(x) = 0 \tag{2.4.15}$$

şeklinde yazılır. m=0 için bu denkleme Legendre denklemi ve $m \neq 0$ içinde Asosiye Legendre denklemi denir.

Legendre Denkleminin Frobenius Yöntemi ile seri çözümü yapılırsa, $m = 0$ için

$$(1-x^2)\frac{d^2Z(x)}{dx^2} - 2x\frac{dZ(x)}{dx} + \lambda Z(x) = 0 \tag{2.4.16}$$

şeklinde verilen Legendre denkleminin $x = \pm 1$ noktalarında iki tane düzenli tekilliği vardır. Bu noktalar (2.4.16) denkleminin tanım aralığı olan $[-1,1]$ aralığının uç noktaları olduğundan,

$$x = 0 \tag{2.4.17}$$

civarında

$$Z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha} \tag{2.4.18}$$

şeklinde bir seri çözüm aranır. (2.4.18)'ü (2.4.16)'da yerine yazılarak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha+k)(\alpha+k-1)x^{\alpha+k-2}$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty} x^{\alpha+k}\left[(\alpha+k)(\alpha+k-1)+2(\alpha+k)-\lambda\right]a_k = 0 \qquad (2.4.19)$$

bulunur. Buradan birinci seriyi,

$$a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1} + \sum_{k'=2}^{\infty} a_{k'}\left(k'+\alpha\right)\left(k'+\alpha-1\right)x^{k'+\alpha-2} \qquad (2.4.20)$$

şeklinde yazılır ve k' değişkeni

$$k' = k+2 \qquad (2.4.21)$$

olarak yeniden tanımlanırsa, (2.4.19) denklemi

$$a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1}$$
$$+\sum_{k'=2}^{\infty} x^{k+\alpha}\left[a_{k+2}\left(k+2+\alpha\right)\left(k+1+\alpha\right) - a_k(k+\alpha)\left(k+1+\alpha\right) - \lambda\right] = 0 \qquad (2.4.22)$$

şeklini alır. Kuvvet serilerin teknik özelliği kullanılırsa bu denklemi bütün x noktalarında sağlamak, ancak x'in bütün kuvvetlerinin katsayılarının aynı anda sıfıra eşit olması ile mümkün olacağından, (2.4.18) seri çözümünün katsayıları arasında

$$a_0\alpha(\alpha-1) = 0 \qquad (2.4.23)$$

$$a_1\alpha(\alpha+1) = 0 \qquad (2.4.24)$$

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{\left[\left(k+\alpha\right)\left(k+\alpha+1\right)-\lambda\right]}{\left(k+1+\alpha\right)\left(k+\alpha+2\right)} \qquad k = 0,1,2... \qquad (2.4.25)$$

ilişkileri bulunur. Burada x'in en küçük kuvvetinin katsayısının sıfıra eşitlenmesinden elde edilen denkleme indis denklemi denir. İndis denkleminde $a_0 \neq 0$ olduğu varsayılırsa α değerleri

$$\alpha = 0 \quad ve \quad \alpha = 1 \tag{2.4.26}$$

olarak bulunur. (2.4.25) denklemi ise, seri çözümlerdeki katsayılar arasındaki tekrarlama bağıntısını verir. $\alpha = 1$ için tekrarlama bağıntısı

$$a_{k+2} = a_k \frac{(k+1)(k+2) - \lambda}{(k+2)(k+3)} \qquad k = 0,1,2... \tag{2.4.27}$$

olur. $\alpha = 1$ için (2.4.24) denklemi

$$a_1 = 0 \tag{2.4.28}$$

verildiğinden, sıfırdan farklı katsayıları (2.4.27) denklemi yardımıyla bulunur ve $a = 1$ değeri için seri çözümü

$$Z_1(x) = a_0\left[x + \frac{(2+\lambda)}{6}x^3 + \frac{(2+\lambda)(12-\lambda)}{120}x^5 + ...\right] \tag{2.4.29}$$

olur. Aynı şekilde $\alpha = 0$ değeri için seri çözümü (2.4.23) ve (2.4.24)'den

$$a_0 \neq 0 \quad ve \quad a_1 \neq 0 \tag{2.4.30}$$

elde edilir. Tekrarlama bağıntıları ise,

$$a_{k+2} = a_k \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} \qquad k = 0,1,2... \tag{2.4.31}$$

olur. Buradan sıfırdan farklı katsayılar bulunursa $\alpha = 0$ için seri çözüm

$$Z_2(x) = a_0\left[1-\left(\frac{\lambda}{2}\right)x^2+\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left(\frac{6-\lambda}{12}\right)x^4+...\right] + a_1\left[x+\frac{(2-\lambda)}{6}x^3+\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{120}x^5+...\right] \tag{2.4.32}$$

şeklinde olur. Legendre denklemi ikinci mertebeden, sıradan, doğrusal bir diferansiyel denklem olduğundan, iki tane bağımsız çözümü vardır. Görüldüğü gibi a_0 ve a_1 birbirinden bağımsız keyfi değerler alacağından $\alpha = 0$ için bulunan çözüm $\alpha = 1$ çözümünü de içermekte olup iki bağımsız çözümü bir arada vermektedir. Dolayısıyla, Legendre denkleminin sonsuz seri olarak genel çözümü; iki birbirinden bağımsız çözümün lineer birleşimi olarak

$$Z\ (x) = C_0\left[1-\left(\frac{\lambda}{2}\right)x^2+\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left(\frac{6-\lambda}{12}\right)x^4+...\right] + C_1\left[x+\frac{(2-\lambda)}{6}x^3+\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{120}x^5+...\right] \tag{2.4.33}$$

şeklinde verilir. Burada C_0 ve C_1 integral sabitleridir. Bu serilere Legendre serileri adı verilir.

Legendre serilerinin $|x|<1$ değerleri için yakınsaklığı oran testi ile kolayca görülür. Ancak, $x = \pm 1$ değerinde nasıl davrandıklarını anlamak için tekrarlama bağıntısına $k \to \infty$ limitinde bakılırsa,

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} \to 1 \tag{2.4.34}$$

bulunur. Bu; her iki serinin de yeteri kadar büyük k değerinden sonra,

$$Z\ (x) = ... + a_k x^k\left(1+x^2+x^4+...\right) \tag{2.4.35}$$

şeklinde ifade edilir. Parantez içindeki serinin toplamı ise,

$$\frac{1}{1-x^2} \tag{2.4.36}$$

dir. λ değerleri

$$\lambda = l(l+1) \qquad l = 0,1,2... \tag{2.4.37}$$

olarak parametrize edilirse, verilen bir l değeri için Legendre serilerinden birisi sonlu sayıda terimden sonra biter. Diğer serininde önündeki katsayı sıfır alınırsa Legendre denkleminin $P_l(x)$ olarak gösterilen polinom çözümleri de elde edilir.

Yani $Z(x) = P_l(x)$'dir, l nin bazı değerleri için

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(3x^2 + 1\right) \tag{2.4.38}$$

$$P_3 = \frac{1}{5}\left(5x^3 - 3x\right)$$

bulunur.

Genelde Legendre polinomları

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \frac{(-1)^n (2l-2n)!}{2^l\, n!(l-n)!(l-2n)!} x^{l-2n} \tag{2.4.39}$$

olarak yazılabilir. Burada $\left[\frac{l}{2}\right]$ en büyük tamsayı değeridir.

Legendre polinomlarının başka bir tanımı da

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2 - 1\right)^l \tag{2.5.40}$$

şeklinde Rodrigez formülü yardımı ile verilen tanımıdır.[3,12,13,19]

2.5. Bessel Denklemi

Silindirik koordinatlarda Laplace denklemini

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(r,\phi,z) = 0 \tag{2.5.1}$$

olarak yazılır ve

$$\Psi(r,\phi,z) = R(r)\Phi(\phi)Z(z) \tag{2.5.2}$$

şeklinde ayrılabilir bir çözüm aranırsa, çözülmesi gereken denklemleri,

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0 \tag{2.5.3}$$

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2\Phi(\phi) = 0 \tag{2.5.4}$$

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr} + (k^2 - \frac{m^2}{r^2})R(r) = 0 \tag{2.5.5}$$

olarak bulunur. Birinci ve ikinci denklemlerin çözümleri

$$Z(z) = \bar{c}_1 e^{ikz} + \bar{c}_2 e^{-ikz} \tag{2.5.6}$$

$$\Phi(\phi) = c_1 e^{im\phi} + c e^{-im\phi} \tag{2.5.7}$$

dır. (2.5.5) denklemi Bessel denklemi olarak bilinir ve genelde

$$x = kr \ , \ \ R(r) = J_m(x) \tag{2.5.8}$$

dönüşümü ile

$$J_m''(x)+\frac{1}{x}J_m'(x)+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)J_m(x)=0 \tag{2.5.9}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin çözümleri olan $J_m(x)$ fonksiyonları ise, Bessel fonksiyonları olarak bilinir. Bessel denkleminin seri çözümü

$$J_m(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\ \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(m+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r} \tag{2.5.10}$$

olarak bulunur. Bessel denkleminin ikinci çözümü ise,

$$J_{-m}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\ \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-m+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \tag{2.5.11}$$

dir. Ancak bu çözüm sadece m'nin tamsayıdan farklı değerler aldığı zaman birinci çözümden bağımsızdır.Bu durumda, genel çözüm iki çözümün lineer birleşimi olarak verilir. m'nin tamsayı değerler aldığı zaman ise, iki çözüm birbirine

$$J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x) \tag{2.5.12}$$

ilişkisi ile bağlıdır. Bu durumda ikinci bağımsız çözüm

$$N_m(x)=\frac{\cos m\pi J_m(x)-J_{-m}(x)}{\sin m\pi} \tag{2.5.13}$$

şeklinde tanımlanan Neumann fonksiyonudur.

Bazı durumlarda yararlı olan bir başka çözüm seti de

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iN_m(x) \tag{2.5.14}$$

$$H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iN_m(x) \tag{2.5.15}$$

olarak tanımlanan Hankel fonksiyonlarıdır.

$J_m(x)$ fonksiyonları $x \to 0$ limitinde $m \geq 0$ için sonludur ve

$$\lim_{x\to 0} J_m(x) \to \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^m \tag{2.5.15}$$

şeklini alırlar. Diğer fonksiyonların tümü $x \to 0$ limitinde sonsuzdurlar.

$x \to \infty$ limitinde ise,

$$J_m(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.5.16}$$

$$N_m(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.5.17}$$

$$H_m^{(1)}(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[i\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{2.5.18}$$

$$H_m^{(2)}(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[-i\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{2.5.19}$$

fonksiyonlarına dönüşürler. Eğer Bessel fonksiyonlarının değişkeni sanal olarak alınırsa, modifiye (değiştirilmiş) Bessel fonksiyonu olarak bilinen

$$I_m(x) = \frac{J_m(ix)}{i^m} \tag{2.5.20}$$

ve

$$K_m(x) = \frac{\pi i}{2}(i)^m H_m^{(1)}(ix) \tag{2.5.21}$$

fonksiyonları ile karşılaşılır. Bu fonksiyonlar,

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR(x)}{dx} - (1 - \frac{m^2}{x^2})R(x) = 0 \tag{2.5.22}$$

denklemini sağlar.

Bessel fonksiyonlarının seri tanımı kullanılarak

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) \tag{2.5.23}$$

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x) \tag{2.5.24}$$

ve

$$J_{m-1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) + J'_m(x) \tag{2.5.25}$$

$$J_{m+1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J'_m(x) \tag{2.5.26}$$

tekrarlama bağıntıları elde edilir. N_n, $H_m^{(1)}$, $H_m^{(2)}$ fonksiyonları da aynı tekrarlama bağıntılarını sağlar.[12,19]

2.6. Dirac Delta Fonksiyonu

Dirac delta fonksiyonu tek boyutta

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty, & x=x_0\\ 0, & x\neq x_0\end{cases}\} \tag{2.6.1}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu gösterime uyacak bütün matematik temsillerine delta fonksiyonu veya delta fonksiyonunun temsili denir. Delta fonksiyonu n boyuta genellenebilir. Gösterimi ise $\delta^n(\vec{x}-\vec{x}_0)$ şeklindedir. Burada $\vec{x}$ ve $\vec{x}_0$ n boyutlu vektörleridir. Diğer taraftan n boyutta delta fonksiyonu bir boyuttaki delta fonksiyonlarının çarpımı şeklinde de yazılabilir. Örneğin $\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0)$

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \tag{2.6.2}$$

şeklinde yazılabilir. Dirac-Delta fonksiyonu basamak fonksiyonunun türevidir. Yani

$$\delta(x)=\frac{d\theta(x)}{dx} \tag{2.6.3}$$

dir. Burada basamak fonksiyonu $\theta(x)$ ile gösterilir ve

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x\geq x_0\\ 0, & x<x_0\end{cases} \tag{2.6.4}$$

şeklinde verilir. x_i , U(x) fonksiyonunun kökleri olmak üzere Delta fonksiyonu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0) \tag{2.6.5}$$

$$\delta(kx)=\frac{1}{|k|}\delta(x) \tag{2.6.6}$$

$$\delta(u(x))=\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|u'(x_i)|} \tag{2.6.7}$$

özelliklerini sağlar.[3,4,12,24]

III. BÖLÜM

3.1. Poisson Denklemi

Poisson Denklemi homojen olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Sadece uzay koordinatlarına bağlı bir $\phi(x,y,z)$ skaler alanına Laplace operatörü uygulandığında yine bir skaler alan elde edilir, yani $f(\vec{r})$ skaler alan olmak üzere

$$\nabla^2\phi = -f(\vec{r}) \tag{3.1.1}$$

olmaktadır.

$f(\vec{r}) = 0$ olması Laplace denklemi olarak adlandırılan homojen hali temsil etmektedir.

Adi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasında kullanılan, homojen denklemin genel çözümünden hareketle homojen olmayan denklemlerin genel çözümünü bulmaya olanak sağlayan çoğu yöntem temel olarak kısmi türevli diferansiyel denklemler için de geçerlidir. Örneğin Green Fonksiyonu Yöntemi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde de benzer şekilde kullanılabilir. Hatırlanacağı gibi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = -f(x) \tag{3.1.2}$$

diferansiyel denkleminin $y(x)$ fonksiyonunun kendisinin ya da türevlerinin veya her ikisinin birden ilgili aralığının sınırlarında verilen koşullara uyan herhangi bir x' $(x' \in [a,b])$ özel değerindeki çözümü

$$y(x') = \int_a^b g(x/x')f(x)e^{-\{I(x')-I(x)\}}dx$$

$$+\{g(b/x')y'(b)-g'(b/x')y(b)\}e^{-\{I(x')-I(b)\}}$$
$$+\{g(a/x')y'(a)-g'(a/x')y(a)\}e^{-\{I(x')-I(a)\}} \quad (3.1.3)$$

ifadesi ile veriliyor.Buradaki *I(x)* fonksiyonu

$$I(x)=\int_{x'}^{x} p(z)dz \quad (3.1.4)$$

ile verilen bir fonksiyon , $g\left(x/x'\right)$ fonksiyonu ise Green Fonksiyonu olarak adlandırılan ve

$$g''+p(x)g'+q(x)g=-\delta(x-x') \quad (3.1.5)$$

diferansiyel denkleminin genel çözümü olan aşağıdaki ifadeyi gerçekleyen bir fonksiyondur.

$$g\left(x/x'\right)=c_1g_1(x)+c_2g_2(x)+G\left(x/x'\right) \quad (3.1.6)$$

Burada $g_1(x),g_2(x)$ (3.1.5) diferansiyel denkleminin homojen kısmının lineer bağımsız herhangi iki çözümü, c_1,c_2 keyfi sabitler olmak üzere $c_1g_1(x)+c_2g_2(x)$ ifadesi (3.1.5) diferansiyel denkleminin homojen kısmının genel çözümüdür. $G\left(x/x'\right)$ homojen olmayan (3.15.) diferansiyel denkleminin

$$G\left(x/x'\right)=\frac{-g_1(x_<)g_2(x_>)}{W\{g_1,g_2;x'\}} \quad (3.1.7)$$

İfadesini gerçekleyen bir özel çözümdür. Burada $x_<$; x' den küçük olan x değerleri, $x_>$; x' den büyük olan x değerleri anlamında kullanılmaktadır. $W\{g_1,g_2;x'\}$ ise

$$W = \begin{vmatrix} g_1(x') & g_2(x') \\ g_1'(x') & g_2'(x') \end{vmatrix} \tag{3.1.8}$$

eşitliğini sağlayan Wronskian determinantını göstermektedir. Genelde

$$G_0(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \tag{3.1.9}$$

ve

$$G_d = G\left(x \diagup x'\right) \tag{3.1.10}$$

eşitliklerini kullanarak (3.16) eşitliği için

$$G_d\left(x \diagup x'\right) = G_0 + G_d \tag{3.1.11}$$

ifadesi de kullanılır. (3.1.1) Poisson denkleminin çözümü de (3.1.3) dekine benzer olarak (3.1.11) tipinde bir Green fonksiyonu yardımıyla bulunabilir.

$\vec{A}$ bir vektör alanı olmak üzere üç boyuttaki diverjans teoremi

$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{A}.dv = \oint_S \vec{A}.\vec{n}.|d\vec{s}| = \int_S \sum_{k=1}^{n} n_k A_k dS = \int_S A_n dS \tag{3.1.12}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\vec{n}$, S yüzeyinin birim normal vektörüdür. ϕ ve φ iki skaler alan olmak üzere

$$\vec{A} = \phi\vec{\nabla}\varphi \tag{3.1.13}$$

eşitliği kullanılarak

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \nabla\left(\phi\vec{\nabla}\varphi\right) = \phi\nabla^2\varphi + \left(\vec{\nabla}\phi\right)\left(\vec{\nabla}\varphi\right) \tag{3.1.14}$$

$$\vec{A}.\vec{n} = (\phi\vec{\nabla}\ \varphi)\vec{n} = \phi\frac{\partial\varphi}{\partial n} \tag{3.1.15}$$

ifadeleri elde edilir. Burada $\frac{\partial}{\partial n}$, S üzerindeki normal türevdir. (3.1.14) ve (3.1.15) ifadeleri (3.1.12) eşitliğinde yerine yazılırsa Birinci Green Özdeşliği denilen

$$\int_S \left\{\phi\nabla^2\varphi + \left(\vec{\nabla}\phi\right)\left(\vec{\nabla}\varphi\right)\right\}dv = \oint_S \phi\frac{\partial\varphi}{\partial n}|d\vec{s}| \tag{3.1.16}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede ϕ yerine φ ve φ yerine de ϕ yazılırsa

$$\int_S \left\{\varphi\nabla^2\phi + \left(\vec{\nabla}\varphi\right)\left(\vec{\nabla}\phi\right)\right\}dv = \oint_S \varphi\frac{\partial\phi}{\partial n}|d\vec{s}| \tag{3.1.17}$$

bulunur. (3.1.16) eşitliği ile (3.1.17) eşitliği taraf tarafa çıkarıldığında İkinci Green Özdeşliği denilen

$$\int_S \left(\phi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\phi\right)dv = \oint_S \left(\phi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)|d\vec{s}| \tag{3.1.18}$$

ifadesi elde edilir. (3.1.18) ifadesinde

$$\phi = \phi, \qquad \psi = G\left(r/r'\right) \tag{3.1.19}$$

alınırsa $\vec{r} = (x, y, z)$ $d^3|\vec{r}| = dV$ olmak üzere

$$\int_S \left\{\phi\nabla^2 G\left(r/r'\right) - G\left(r/r'\right)\nabla^2\phi\right\}d^3|\vec{r}| = \oint_S \left\{\phi\frac{\partial G\left(r/r'\right)}{\partial n} - G\left(r/r'\right)\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\}|d\vec{s}| \tag{3.1.20}$$

eşitliği elde edilir. Üç boyutlu delta fonksiyonu $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$, Poisson denklemine ait Green fonksiyonu $G\left(r/r'\right)$ olmak üzere $\nabla^2 G\left(r/r'\right)=-\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ ve $\nabla^2\phi=-f(\vec{r})$ ifadeleri (3.1.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_V \left\{\phi[-\delta(\vec{r}-\vec{r}')]-G\left(r/r'\right)[-f(\vec{r})]\right\}d^3|\vec{r}| = \oint_S \left\{\phi\frac{\partial G\left(r/r'\right)}{\partial n}-G\left(r/r'\right)\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\}|d\vec{s}| \qquad (3.1.21)$$

veya

$$\int_V \phi[-\delta(\vec{r}-\vec{r}')]d^3|\vec{r}| + \int_V G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)f(\vec{r})d^3|\vec{r}| = \oint_S \left\{\phi\frac{\partial G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)}{\partial n}-G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\}|d\vec{s}| \qquad (3.1.22)$$

ifadesi elde edilir. (3.1.22) eşitliğin sol tarafındaki ilk integral de δ fonksiyonuna ait

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \qquad (3.1.23)$$

özelliği kullanılırsa yani $f(x)=\phi(\vec{r})$ ve $\delta(x-x_0)=\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ olarak alınırsa

$$\int_V \phi[-\delta(\vec{r}-\vec{r}')]d^3|\vec{r}| = -\phi(\vec{r}') \qquad (3.1.24)$$

bulunur. Bu ifade (3.1.22) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$-\phi(\vec{r}')+\int_V G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)f(\vec{r})d^3|\vec{r}| = \oint_S \left\{\phi\frac{\partial G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)}{\partial n}-G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\}|d\vec{s}| \qquad (3.1.25)$$

veya

$$\phi(\vec{r}') = \int_V G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)f(\vec{r})d^3|\vec{r}| - \oint_S \left\{\phi\frac{\partial G(\vec{r}/\vec{r}')}{\partial n}-G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\}|d\vec{s}| \qquad (3.1.26)$$

ya da

$$\phi(\vec{r}') = \int_V G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right) f(\vec{r}) d^3|\vec{r}| + \oint_S \left\{ G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right) \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)}{\partial n} \right\} |d\vec{s}| \qquad (3.1.27)$$

ifadesi (3.1.2) denkleminin aranan çözümü olarak elde edilir.Burada sağdaki iki yüzey integrali sınır koşullarına bağlı integrallerdir.Bu integraller Dirichlet koşullarının Neumann veya Cauchy koşulları oluşlarına göre hesap edilebilirler.Bu koşullar $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial n}$ veya her ikisine ilişkin koşullar olmalarına rağmen $G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)$ Green fonksiyonunda $\nabla^2 \phi = 0$ denkleminin çözümü olan ϕ'ye ait sınır koşullarını sağlarlar.Burada Poisson denkleminin çözümünün $\vec{r}'$ keyfi noktasında elde edilebilmesi için (3.1.27) ifadesindeki yüzey ve hacim integrali içinde bulunan ve

$$\nabla^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \qquad (3.1.28)$$

kısmi diferansiyel denklemini sağlayan $G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)$ Green fonksiyonunun belirlenmesi gerekmektedir. Yüzey integrali içindeki $\phi(\vec{r})$'ye ait terimler $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ ifadeleri $\nabla^2 \phi = 0$ Laplace denkleminin çözümünden bulunabilir.

$G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)$'nin bulunmasında birçok yöntem kullanılmakla birlikte biz burada en çok kullanılan Değişkenlerin Öz Fonksiyon Açılımlarından Yararlanma Yöntemini ele alacağız. $G\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)$ Green fonksiyonun çözümü olan $G_0(\vec{r})$, $\nabla^2 G = 0$'ı zaten sağladığından $G_g\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)$'nin bulunması $G_d\left(\vec{r}/\vec{r}'\right)$'nin bulunmasına indirgenir.[3,7,8,11,13,20,24,25]

3.2. Poisson Denkleminin Silindirik Koordinatlarda çözümü:

Silindirik koordinatlarda

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z\,,\ 0 < r < \infty, \quad -\pi \le \theta \le +\pi, \quad -\infty < z < +\infty$ ve

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}, \quad z = z\,, \quad |J| = r$$

dir. Bu koordinat sisteminde $\vec{r} = \vec{r}(r,\theta,z)$ ve $\vec{r}' = \vec{r}(r',\theta',z')$ noktaları için

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(z-z')}{|J|} = \frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(z-z')}{r} \tag{3.2.1}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\nabla^2 G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ denklemi

$$\nabla^2 G = -\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')}{r} \tag{3.2.2}$$

denklemine dönüşür. $\nabla^2 G = 0$ 'dan G hesaplanır. Laplace denkleminin çözümü; silindirik koordinatlardaki ifadesi olan,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0 \tag{3.2.3}$$

denkleminde,

$$G(r,\theta,z) = R(r)Q(\theta)Z(z) \tag{3.2.4}$$

dönüşümü yapılıp, (3.2.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$QZ\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{QZ}{r}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{RZ}{r^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2}+RQ\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0 \tag{3.2.5}$$

denklemi elde edilir. (3.2.5) denklemi $\frac{1}{RZQ}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{1}{r^2 Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2}+\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0 \tag{3.2.6}$$

denklemine ulaşılır.(3.2.6) denkleminden

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}-Zk^2=0 \tag{3.2.7}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2}+n^2 Q=0 \tag{3.2.8}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r}+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0 \tag{3.2.9}$$

denklemleri bulunur. (3.2.7) ve (3.2.8) denklemlerinin çözümleri sırasıyla;

$$Z=e^{\pm kz} \tag{3.2.10}$$

$$Q=e^{\pm in\theta} \tag{3.2.11}$$

olarak hesaplanır. (3.2.9) denkleminde $x=k.r$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$x^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+x\frac{\partial R}{\partial r}+\left(x^2-n^2\right)R=0 \tag{3.2.12}$$

Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin,

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{a+j} \tag{3.2.13}$$

şeklinde bir seri çözümü için (3.2.12) denkleminden, $a_0 \neq 0$ olmak üzere,

$$\left(\alpha^2 - n^2\right) = 0 \tag{3.2.14}$$

indis denklemini ve

$$\left[(\alpha + j)^2 - n^2\right] a_j + a_{j-2} = 0 \tag{3.2.15}$$

katsayılar bağıntısı elde edelir. İndis denkleminin kökleri $\alpha = \mp n$ olarak hesaplanır ve (3.2.15)'te $\alpha = n$ değeri yazılırsa, $j \geq 2$ olmak üzere,

$$a_j = \frac{-a_{j-2}}{j(2n + j)} \tag{3.2.16}$$

ifadesi bulunur. (3.2.16) ifadesinde; $a_1 = 0$ olduğundan, tek kuvvetler sıfır olur ve çift kuvvetler içinde

$$a_{2j} = (-1)^j \frac{a_0 \Gamma(n+1)}{2^{2j}\, j! \Gamma(n + j + 1)} \tag{3.2.17}$$

değeri elde edelir. Bu durumda, $a_0 = \dfrac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ seçilerek,

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j! \Gamma(n + j + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \tag{3.2.18}$$

ya da

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!\Gamma(n+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \tag{3.2.19}$$

Birinci çeşit Bessel Fonksiyonuna ulaşılır. Ayrıca $\alpha = -n$ için,

$$J_{-n}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!\Gamma(j-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j-n} \tag{3.2.20}$$

bulunur. Eğer n tamsayı ise (3.2.19) ve (3.2.20) çözümleri lineer bağımlıdır. Bu durumda

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{3.2.21}$$

dir. Denklemin çözümü için ikinci bir lineer bağımsız çözüm bulmamız gerekir.Bu durum için

$$N_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \tag{3.2.22}$$

şeklindeki 2. çeşit Bessel fonksiyonu bulunur. Böylece denklemin genel çözümü,

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 N_n(x) \tag{3.2.23}$$

olur. (3.2.10) ,(3.2.11),(3.2.23)'den (3.2.3) denkleminin çözümü olarak

$$G(r,\theta,z) \approx \left(Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}\right)\left(Ce^{kz} + De^{-kz}\right)\left[EJ_n(kr) + FN_n(kr)\right] \tag{3.2.24}$$

elde edilir. Bu durumda G çözümü için

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_n(kr) e^{i(n\theta+kz)} dk \tag{3.2.25}$$

açılımı kullanılabilir. Burada G , $e^{i(n\theta+kz)}$ öz fonksiyonları cinsinden seriye açılmaktadır. (3.2.1) ifadesinin de aynı öz fonksiyonları cinsinden seriye açılımıyla

$$\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(z-z')}{r} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(r-r')}{r} C_n(k) e^{i(n\theta+kz)} dk \tag{3.2.26}$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemdeki $C_n(k)$ sabit terimlerinin belirlenmesi için (3.2.26) eşitliğinin her iki yanı

$$e^{-i(m\theta+hz)} \tag{3.2.27}$$

ifadesi ile çarpılıp θ ve z üzerinden integral alınırsa,

$$\int_{\theta=-\pi}^{+\pi} \int_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m\theta+hz)} \frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(z-z')}{r} dz d\theta \tag{3.2.28}$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{+\pi} \int_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m\theta+hz)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(r-r')}{r} C_n(k) e^{i(n\theta+kz)} dk dz d\theta$$

veya

$$\frac{\delta(r-r')}{r} \int_{\theta=-\pi}^{+\pi} e^{-im\theta} \delta(\theta-\theta') d\theta \int_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-ihz} \delta(z-z') dz \tag{3.2.29}$$

$$= \frac{\delta(r-r')}{r} \int_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-i(k-h)z} dz \int_{\theta=-\pi}^{+\pi} e^{-i(n-m)\theta} d\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_n(k) dk$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafında Dirac Delta fonksiyonu, sağ tarafında ise

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = 2\pi\delta_{nm} \tag{3.2.30}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-h)\theta} dz = 2\pi\delta(k-h) \tag{3.2.31}$$

olduğu göz önüne alınır ve δ fonksiyonuna ait $\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$ özelliği kullanılırsa (3.2.29) denklemi

$$\frac{\delta(r-r')}{r} e^{-ihz'} e^{-im\theta'} = \frac{\delta(r-r')}{r} \delta(k-h) 4\pi^2 \delta_{nm} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_n(k) dk \tag{3.2.32}$$

şeklinde düzenlenir. (3.2.32) ifadesinde

$$C_n(k) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-i(n\theta' + kz')} \tag{3.2.33}$$

olarak bulunur. (3.2.33) ifadesi (3.2.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(z-z')}{r} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(r-r')}{r} e^{-i(n\theta'+kz')} e^{i(n\theta+kz)} dk \tag{3.2.34}$$

veya

$$\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(z-z')}{r} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(r-r')}{r} e^{[n(\theta-\theta')+k(z-z')]i} dk$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.2.2) ve (3.2.25) ifadelerini kullanarak, $R_n(kr)$'nin belirlenmesini sağlayan ifade

$$\nabla^2 G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr} - \left(k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) R_n \right] e^{i(n\theta+kz)} dk \tag{3.2.35}$$

olarak bulunur. (3.2.35) , (3.2.21) ve (3.2.34) eşitliklerinden ise

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr}-\left(k^2+\frac{n^2}{r^2}\right)R_n\right]e^{i(n\theta+kz)}dk \qquad (3.2.36)$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(r-r')}{r}e^{-i(n\theta'+kz')}e^{i(n\theta+kz)}dk$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikten $e^{i(n\theta+kz)}$ 'nin katsayıları birbirine eşitlersek

$$\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr}-\left(k^2+\frac{n^2}{r^2}\right)R_n=-\frac{1}{4\pi^2}\frac{\delta(r-r')}{r}e^{-i(n\theta'+kz')} \qquad (3.2.37)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. $r\neq r'$ iken $\delta(r-r')=0$ olduğundan (3.2.37) denklemi Modifiye Bessel denklemi olur. $k\neq 0$ için denklemin lineer bağımsız iki çözümü

$$R_n(kr)=A.I_n(kr),\qquad R_n(kr)=B.K_n(kr) \qquad (3.2.38)$$

dir. Burada A ve B iki keyfi sabit , $I_n(kr)$ ve $K_n(kr)$ sırasıyla birinci ve ikinci çeşit Bessel fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar $r=0$ ve $r=\infty$ 'da bulunmadığında Green fonksiyonu $r=0$ ve $r=\infty$ da daima sonlu kalacağından lineer bağımsız iki çözüm

$$R_n(kr)=AI_n(kr)\qquad 0\le r<r' \qquad (3.2.39)$$

$$R_n(kr)=BK_n(kr)\qquad r'<r<\infty \qquad (3.2.40)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.39) ve (3.2.40) çözümlerin $r=r'$ deki sürekliliğinden A ve B sabitleri için

$$AI_n(kr') = BK_n(kr') \tag{3.2.41}$$

bağıntısı bulunur. A ve B nin belirlenmesine ilişkin ikinci bağıntının belirlenmesi için (3.2.37) eşitliğinin her iki yanının $\varepsilon > 0$ olmak üzere r ye göre $r = r' - \varepsilon$ den $r = r' + \varepsilon$ ye kadar integrali alınır. Böylece

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\left(\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr}\right)dr-\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\left(k^2+\frac{n^2}{r^2}\right)R_n dr=\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}-\frac{1}{4\pi^2}\frac{\delta(r-r')}{r}e^{-i(n\theta'+kz')}dr \tag{3.2.42}$$

ya

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)dr-\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\left(k^2+\frac{n^2}{r^2}\right)R_n dr=\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}-\frac{1}{4\pi^2}\frac{\delta(r-r')}{r}e^{-i(n\theta'+kz')}dr \tag{3.2.43}$$

yada

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)dr-\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\left(k^2+\frac{n^2}{r^2}\right)rR_n dr=-\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\frac{1}{4\pi^2}\delta(r-r')e^{-i(n\theta'+kz')}dr \tag{3.2.44}$$

elde edilir. (3.2.44) eşitliğinin sağ tarafındaki integralde δ fonksiyonuna ait $\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$ özelliği kullanılırsa

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}-\frac{1}{4\pi^2}\delta(r-r')e^{-i(n\theta'+kz')}dr=-\frac{1}{4\pi^2}e^{-i(n\theta'+kz')} \tag{3.2.45}$$

bulunur. Bu ifade ile

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr} \right) dr = r\frac{dR_n}{dr}\Bigg|_{r+\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \tag{3.2.46}$$

ifadesi (3.2.44) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$r\frac{dR_n}{dr}\Bigg|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\left(k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) rR_n dr = -\frac{1}{4\pi^2} e^{-i(n\theta'+kz')} \tag{3.2.47}$$

bulunur. $\varepsilon \to 0$ iken (3.2.47) ifadesinin limiti alındığında (3.2.47) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci integral alt ve üst sınırları $\varepsilon \to 0$ için aynı olduğundan ve $R_l^{|m|}$ in $r = r'$ noktasındaki sürekliliğinden dolayı sıfır olur. Böylece

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(kr)\frac{dR_n(kr)}{d(kr)}\Bigg|_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} = -\frac{1}{4\pi^2} e^{-i(n\theta'+kz')} \tag{3.2.48}$$

ifadesi elde edilir. Üst sınır yerine yazılırken (3.2.40) ifadesi, alt sınır yerine yazılırken de (3.2.39) ifadesi ve $x = (kr')$ dönüşümü kullanıldığında,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(kr)\frac{dR_n(kr)}{d(kr)}\Bigg|_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} = B\frac{dK_n(x)}{dx} - A\frac{dI_n(x)}{dx} \tag{3.2.49}$$

bulunur. Böylece (3.2.48) ve (3.2.49) denklemleri bir arada yazılırsa sabitleri belirlemek için ikinci bağıntı

$$AI_n'(x) - BK_n'(x) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-i(n\theta'+kz')} \tag{3.2.50}$$

şeklinde elde edilir. (3.2.41) ve (3.2.50) denklemleri

$$\begin{bmatrix} I_n(x) & -K_n(x) \\ xI_n'(x) & -xK_n'(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{4\pi^2} e^{-i(n\theta'+kz')} \end{bmatrix} \tag{3.2.51}$$

şeklinde homojen olmayan lineer denklem sistemi oluştururlar. Bu sistemin determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} I_n(x) & -K_n(x) \\ xI_n'(x) & -xK_n'(x) \end{vmatrix} = -x\left(I_n K_n' - I_n' K_n\right) \tag{3.2.52}$$

dir. Bu ifade Wronskian determinantı kullanılarak

$$\Delta = -xW\{I_n, K_n; x\} \tag{3.2.53}$$

şeklinde yazılabilir. Wronskian için Abel formülü;

$$W\{y_1, y_2; x\} = W\{y_1, y_2; x_0\} e^{-\int_{x_0}^{x} P(z)dz} \tag{3.2.54}$$

ifadesinde $p(z) = \dfrac{1}{z}$ yazılarak

$$W\{y_1, y_2; x\} = W\{y_1, y_2; x_0\} \frac{x_0}{x} \tag{3.2.55}$$

veya

$$xW\{y_1, y_2; x\} = x_0 W\{y_1, y_2; x_0\} \tag{3.2.56}$$

elde edilir. Bu formülün sağ ve sol tarafları farklı değişkenlere bağlı olduğundan ayrı ayrı bir sabite eşit olmalıdır. Böylece

$$xW\{y_1, y_2; x\} = sabit \tag{3.2.57}$$

bulunur. Buradaki sabitin belirlenmesi için $x \to 0$ veya $x \to \infty$ özel noktalarından biri kullanılabilir. $x \to \infty$ özel noktasında

$$I_n(kr) = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi x}} e^x \tag{3.2.58}$$

$$K_n(kr) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x} \tag{3.2.59}$$

dır. Bu (3.2.58) ve (3.2.59) özel değerleri (3.2.52) de yerine yazılırsa

$$x\left(I_n K_n' - I_n' K_n\right) = x\left[\frac{\pi . e^x}{\sqrt{2\pi x}} \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi . e^x}{\sqrt{2\pi x}}\right)\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}\right]$$

$$= x\left[\frac{\pi e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(-e^{-x}\sqrt{2\pi x} - e^{-x}\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\frac{1}{2\pi x} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}\left(e^x\sqrt{2\pi x} - e^x\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\frac{1}{2\pi x}\right] \tag{3.2.60}$$

$$= x\left[-\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right] = -1$$

veya

$$x\left(I_n K_n' - I_n' K_n\right) = -1 \tag{3.2.61}$$

elde edilir. Buradan da I_n ve K_n in Wronskian determinantı

$$W\{I_n, K_n; x\} = -\frac{1}{x} \tag{3.2.62}$$

olur. Bu ifade (3.2.53) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\Delta = -xW\{I_n, K_n; x\} = 1 \tag{3.2.63}$$

bulunur. (3.2.42) ve (3.2.52) ifadelerinin oluşturduğu denklem sisteminin çözümleri

$$A = K_n(kr')\frac{1}{4\pi^2}e^{-i(n\theta'+kz')} \tag{3.2.64}$$

$$B = I_n(kr')\frac{1}{4\pi^2}e^{-i(n\theta'+kz')} \tag{3.2.65}$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler (3.2.39) ve (3.2.40) denklemlerinde yerlerine yazılırsa

$$R_n = I_n(kr)K_n(kr')\frac{1}{4\pi^2}e^{-i(n\theta'+kz')} \qquad 0 \le r < r' \tag{3.2.66}$$

$$R_n = K_n(kr)I_n(kr')\frac{1}{4\pi^2}e^{-i(n\theta'+kz')} \qquad r' \le r < \infty \tag{3.2.67}$$

çözümü bulunur.Bu iki çözüm $r_<$ ve $r_>$ gösterimi kullanılarak

$$R_n = I_n(kr_<)K_n(kr_>')\frac{1}{4\pi^2}e^{-i(n\theta'+kz')} \tag{3.2.68}$$

şeklinde tek çözümüne dönüşür. R_n in bu değeri (3.2.25) denkleminde yerine yazılarak silindirik koordinatlarda Green Fonksiyonu,

$$G(r,r'/\theta,\theta'/z,z') = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_n(kr_<)K_n(kr_>)e^{in(\theta-\theta')}e^{ik(z-z')}dk \tag{3.2.69}$$

veya

$$G(r,r'/\theta,\theta'/z,z') = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_n(kr_<)K_n(kr_>)e^{in(\theta-\theta')}\cos k(z-z')dk \tag{3.2.70}$$

veya

$$G(r,r'/\theta,\theta'/z,z') = \frac{1}{\pi^2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\cos k(z-z')dk\left[\frac{1}{2}I_0(kr_<)K_0(kr_>)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{\infty}I_n(kr_<)K_n(kr_>)\cos n(\theta-\theta')\right.\right. \qquad (3.2.71)$$

şeklinde elde edilir.[3,7,8,11,12,13,20,24]

3.3. Poisson Denkleminin Küresel Koordinatlarda çözümü:

Küresel koordinatlarda

$x = r\cos\phi\sin\theta, \quad y = r\sin\phi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$

$0 \le r < \infty, \quad -0 < \theta < \pi, \quad -0 < \phi < 2\pi$ ve

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \arccos\left(\frac{z}{r}\right), \quad |J| = r^2\sin\theta$$

olduğundan $\vec{r} = \vec{r}(r,\theta,\varphi)$ ve $\vec{r}\,' = \vec{r}(r',\theta',\varphi')$ için

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')}{|J|} \qquad (3.3.1)$$

dir. Bu ifade $\nabla^2 G = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\nabla^2 G = -\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')}{r^2\sin\theta} \qquad (3.3.2)$$

denklemine ulaşılır. Denklemi çözmek için önce $\nabla^2 G = 0$ 'dan G'yi hesaplayalım. Laplace denkleminin küresel koordinatlardaki ifadesi,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rG)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial G}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (3.3.3)$$

idi. $G(r,\theta,\varphi)=\frac{U(r)}{r}P(\theta)Q(\varphi)$ olarak alınır ve (3.3.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$PQ\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{UQ}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)+\frac{UP}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}=0 \qquad (3.3.4)$$

ifadesi elde edilir. (3.3.4) denklemi $\frac{r^2\sin^2\theta}{UPQ}$ ile çarpılırsa,

$$r^2\sin\theta\left[\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{1}{P.r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}=0 \qquad (3.3.5)$$

ve

$$r^2\sin\theta\left[\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{1}{P.r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)\right]=-\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} \qquad (3.3.6)$$

elde edilir. (3.3.6) denkleminin sol yanı sadece r ve θ değişkenlerinin ve sağ yanıda sadece φ değişkeninin bir fonksiyonudur. Bu nedenle (3.3.6) denkleminin her iki yanında aynı sabite eşit olmalıdır. (3.3.6) denkleminde

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}=-m \qquad (3.3.7)$$

alınarak çözülürse,

$$Q = e^{\pm im\varphi} \tag{3.3.8}$$

genel çözümünü elde edilir. (3.3.8) değeri (3.3.5) denkleminde yerine yazılıp $\sin^2\theta$'ya bölünürse,

$$r^2 \frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0 \tag{3.3.9}$$

ve

$$r^2 \frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} = l(l+1) \tag{3.3.10}$$

alınmak suretiyle

$$\frac{d^2U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}U = 0 \tag{3.3.11}$$

denklemi elde edilir. (3.3.11) denkleminin genel çözümü

$$U = A.r^{l+1} + B.r^{-l} \tag{3.3.12}$$

olarak hesaplanır. Bu durumda (3.3.9) denklemi

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) - \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P = 0 \tag{3.3.13}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemde $x = \cos\theta$ dönüşümü yapılırsa;

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = -\sin\theta\frac{d}{dx} \tag{3.3.14}$$

olacağından, (3.3.13) denklemi

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dP}{dx}\right)+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P=0 \tag{3.3.15}$$

şekline dönüşür. (3.3.15) denklemi $m^2=0$ için,

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dP}{dx}\right)+l(l+1)P=0 \tag{3.3.16}$$

Legendre denklemidir. Bu denklem

$$P(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j x^{\alpha+j} \tag{3.3.17}$$

şeklinde bir kuvvet serisi yardımı ile çözülür. (3.3.17) ifadesinin birinci ve ikinci türevleri alınıp (3.3.16) denkleminde yerine yazılırsa $a_0\neq 0$ için

$$\alpha(\alpha-1)=0 \tag{3.3.18}$$

indis denklemini,

$$(\alpha+j+2)(\alpha+j+1)a_{j+2}-\left[(\alpha+j)(\alpha+j+1)-l(l+1)\right]a_j=0 \tag{3.3.19}$$

katsayılar bağıntısı elde edilir. İndis denkleminin kökleri $\alpha=0$ ve $\alpha=1$ 'dir. (3.3.19)'da $\alpha=0$ değerini yerine yazılırsa, $j\geq 0$ olmak üzere,

$$a_{j+2}=\frac{(j-l)(j+l+1)}{(j+1)(j+2)}a_j \tag{3.3.20}$$

ifadesi bulunur. (3.3.20) ifadesi kullanılarak denklemin genel çözümü

$$y = a_0\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\,\frac{l(l-2)...(l-2j+2)(l+1)(l+3)...(l+2j-1)}{(2j)!}x^{2j}\right\}$$

$$+a_1\left\{x+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\,\frac{(l-1)(l-3)...(l-2j+1)(l+2)(l+4)...(l+2j)}{(2j+1)!}x^{2j+1}\right\} \quad (3.3.21)$$

olarak elde edilir. (3.3.21) ifadesinden

$$P_l(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^r\,\frac{(2l-2r)!}{2^l\,r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r} \quad (3.3.22)$$

Legendre denkleminin çözümü olan Legendre Polinomuna ulaşılır. (3.3.15) denklemine Birleşik Legendre denklemi denir. Seri çözümü yapıldığında

$$P_l^m(x)=P_l^m(\cos\theta) \quad (3.3.23)$$

Birleşik Legendre Polinomları bulunur. Böylece $\nabla^2 G=0$ denkleminin

$$G(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}R_l^{|m|}(r)P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \quad (3.3.24)$$

şeklinde bir genel çözümü elde edilir.

Burada $P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$ açısal kısımlara, $R_l^{|m|}(r)$ radyal kısımlara ait çözümleri belirtmektedirler. m yerine $|m|$ kullanılmasının nedeni R_l^m nin $r=0$ *ve* $r=\infty$ da daima sonlu olmasını sağlamaktır. $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$'nin $P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$ öz fonksiyonları cinsinden değeri (3.3.2) ve (3.3.24)'ten

$$\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')}{r^2\sin\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}C_l^{|m|}(r)P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \quad (3.3.25)$$

olarak elde edilir. Burada $C_l^{|m|}$ 'ler (3.3.2) denkleminin $P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$ öz fonksiyonları cinsinden açılım sabitleridir. $C_l^{|m|}$ 'lerin hesaplanabilmesi için eşitliğin her iki yanı

$$P_\lambda^{|\mu|}(\cos\theta)e^{-i\mu\varphi}\sin\theta d\theta d\varphi \tag{3.3.26}$$

ile çarpılıp ve θ ve φ ye göre birim küre üzerinden integrali alınırsa

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')}{r^2\sin\theta}P_\lambda^{|\mu|}(\cos\theta)e^{-i\mu\varphi}\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}C_l^{|m|}(r)P_l^{|m|}(\cos\theta)P_\lambda^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}e^{-i\mu\varphi}\sin\theta d\theta d\varphi \tag{3.3.27}$$

veya

$$\frac{\delta(r-r')}{r^2}\int_{\theta=0}^{\pi}\delta(\theta-\theta')P_\lambda^{|\mu|}(\cos\theta)d\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}\delta(\varphi-\varphi')e^{-i\mu\varphi}d\varphi$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}C_l^{|m|}P_l^{|m|}(\cos\theta)P_\lambda^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}e^{-i\mu\varphi}\sin\theta d\theta d\varphi \tag{3.3.28}$$

ifadesi elde edilir. $\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)$ özelliği kullanılarak (3.3.28) eşitliğinin sol tarafındaki integraller

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\delta(\theta-\theta')P_\lambda^{|\mu|}(\cos\theta)d\theta=P_\lambda^{|\mu|}(\cos\theta') \tag{3.3.29}$$

ve

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \delta(\varphi-\varphi')e^{-i\mu\varphi}d\varphi = e^{-i\mu\varphi'} \tag{3.3.30}$$

olarak bulunur. Bu durumda (3.3.28)'in sol tarafı

$$\frac{\delta(r-r')}{r^2}\, e^{-i\mu\varphi'}\; P_\lambda^{|\mu|}(\cos\theta') \tag{3.3.31}$$

şekline dönüşür. (3.3.28)'in sağ tarafı düzenlenirse

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(m-\mu)\varphi}d\varphi \int_0^{\pi} P_l^{|m|}(\cos\theta)P_\lambda^{|\mu|}(\cos\theta)\sin\theta d\theta \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_l^{|m|} \tag{3.3.32}$$

elde edilir. Bu ifadede

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(m-\mu)\varphi}d\varphi = 2\pi\delta_{m\mu} \tag{3.3.33}$$

eşitiği kullanılır ve $x=\cos\theta$ dönüşümü yapılırsa,

$$2\pi\delta_{m\mu}\int_{-1}^{1} P_l^{|m|}(x)P_\lambda^{|\mu|}(x)dx \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_l^{|m|} \tag{3.3.34}$$

sonucuna ulaşılır.(3.3.31) ve (3.3.32) sonuçları ile $P_l^{|m|}$'lerin ortogonallik özelliğinden

$$\frac{\delta(r-r')}{r^2}P_l^{|m|}(\cos\theta')e^{-i\mu\varphi'} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} C_l^{|m|}\,\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\delta_{l\lambda}\delta_{m\mu} \tag{3.3.35}$$

olarak bulunur. (3.3.35) ifadesinden

$$C_l^{|m|} = \frac{\delta(r-r')}{4\pi r^2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}(2\ell+1)P_l^{|m|}(\cos\theta')e^{-im\varphi'} \tag{3.3.36}$$

değeri elde edilir. $C_l^{|m|}$ 'in bu değeri (3.3.25) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')}{r^2\sin\theta} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} \frac{\delta(r-r')}{4\pi r^2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}(2\ell+1)P_l^{|m|}(\cos\theta')P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{-im\varphi'}e^{i\mu\varphi} \tag{3.3.37}$$

olur. $\nabla^2 G$ için (3.3.2) eşitliğindeki G 'nin radyal kısmı

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l^{|m|}}{dr}\right) - \left(\frac{l+1}{r^2}\right)R_l^{|m|} \tag{3.3.38}$$

şeklinde bir diferansiyel denklemdir. Diğer taraftan (3.3.38) ifadesi ile (3.3.37) ifadesi (3.3.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l^{|m|}}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l^{|m|}\right]P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\frac{\delta(r-r')}{r^2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}(2l+1)P_l^{|m|}(\cos\theta')P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im(\varphi-\varphi')} \tag{3.3.39}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$ ifadesinin katsayıları eşit alındığında $R_l^{|m|}$ için

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l^{|m|}}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l^{|m|} = -\frac{\delta(r-r')}{4\pi.r^2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}(2l+1)P_l^{|m|}(\cos\theta')e^{-im\varphi'} \tag{3.3.40}$$

bulunur. $r \neq r'$ iken $\delta(r-r')=0$ olduğundan (3.3.40) denklemi

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l^{|m|}}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}R_l^{|m|}=\frac{1}{r^2}\left[2r\frac{dR_l^{|m|}}{dr}+r^2\frac{d^2R_l^{|m|}}{dr^2}\right]-\frac{l(l+1)}{r^2}R_l^{|m|}$$

$$=\frac{2}{r}\frac{dR_l^{|m|}}{dr}+\frac{d^2R_l^{|m|}}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}R_l^{|m|}=0 \qquad (3.3.41)$$

şekline dönüşür. Bu denklem r^2 ile çarpılırsa,

$$2r\frac{dR_l^{|m|}}{dr}+r^2\frac{d^2R_l^{|m|}}{dr^2}-l(l+1)R_l^{|m|}=0 \qquad (3.3.42)$$

diferansiyel denklemi bulunur. Bu bir Cauchy-Euler diferansiyel denklemi olup $r=e^w$ dönüşümü ile

$$\frac{d^2R_l^{|m|}}{dw^2}+\frac{dR_l^{|m|}}{dw}-l(l+1)R_l^{|m|}=0 \qquad (3.3.43)$$

şeklinde yazılır. (3.3.43) denkleminin iki lineer bağımsız çözümü e^{wl} ve $e^{-w(l+1)}$ dir. Böylece $r \neq r'$ için (3.3.40) diferansiyel denkleminin iki lineer bağımsız çözümü

$$R_l^{|m|}=Ar^l \ , \ R_l^{|m|}=Br^{-(l+1)} \qquad (3.3.45)$$

olur. Burada A ve B belirlenmesi gereken sabitlerdir. $r=0$ ve $r=\infty$'da Green foksiyonu sonlu kaldığından $r' \in [0,\infty)$ olmak üzere bu iki çözümü

$$R_l^{|m|}(r)=Ar^l \qquad , \quad 0 \le r < r' \qquad (3.3.46)$$

$$R_l^{|m|}(r)=Br^{-(l+1)} \qquad , \quad r' < r < \infty \qquad (3.3.47)$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer taraftan (3.3.46) ve (3.3.47) fonksiyonlarının $r = r'$ noktasında sürekli olmaları koşulu

$$A(r')^{l} = B(r')^{-(l+1)} \tag{3.3.48}$$

şeklinde A ve B sabitlerinin bulunmasına ilişkin bir koşul verir. Diğer bir koşulu bulmak için;

$$Q = \frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}P_l^{|m|}(\cos\theta')e^{-im\varphi'} \tag{3.3.49}$$

olmak üzere (3.3.40) ifadesi

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l^{|m|}}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l^{|m|} = -Q\frac{\delta(r-r')}{r^2} \tag{3.3.50}$$

şeklinde yazılır ve r^2 ile çarpılırsa

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l^{|m|}}{dr}\right) - l(l+1)R_l^{|m|} = -Q\delta(r-r') \tag{3.3.51}$$

denklemi elde edilir. Böylece A ve B sabitlerinin bulunmasında kullanılacak diğer bir denklem de (3.3.51) ifadesinin $\varepsilon > 0$ olmak üzere r ye göre $r = r' - \varepsilon$ den $r = r' + \varepsilon$ ye kadar integralinin alınmasıyla elde edilir. Gerçekten ;

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l^{|m|}}{dr}\right)dr - l(l+1)\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}R_l^{|m|}dr = -\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon}Q\delta(r-r')dr \tag{3.3.52}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki integralde $\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$ özelliği kullanılırsa

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} Q\delta(r-r')dr = Q \tag{3.3.53}$$

bulunur. (3.3.53) ve

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR_l^{|m|}}{dr}\right)dr = r^2 \frac{dR_l^{|m|}}{dr}\Bigg|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \tag{3.3.54}$$

ifadesi (3.3.52) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR_l^{|m|}}{dr}\right)dr - l(l+1)\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} R_l^{|m|}dr = -Q \tag{3.3.55}$$

olur. $\varepsilon \to 0$ iken (3.3.55) ifadesinin limiti alındığında eşitliğinin sol tarafındaki ikinci integral alt ve üst sınırları $\varepsilon \to 0$ için aynı olacağından ve $R_l^{|m|}$ in $r = r'$ noktasındaki sürekliliğinden dolayı sıfır olur. Böylece

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r^2 \frac{dR_l^{|m|}(r)}{dr}\Bigg|_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} = -Q \tag{3.3.56}$$

ifadesi elde edilir. Alt sınır yerine yazılırken (3.3.46) ifadesini, üst sınır yerine yazılırken de (3.3.47) ifadesini alarak limit hesaplanırsa

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r^2 \frac{dR_l^{|m|}(r)}{dr}\Bigg|_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} B(-l-1)(r'+\varepsilon)^{-l} - \lim_{\varepsilon\to 0} Al(r'+\varepsilon)^{l+1}$$

$$= B(-l-1)(r')^{-l} - Al(r')^{l+1} = -Q$$

ve

$$\left[\frac{d\left[B(r')^{-(l+1)}\right]}{dr'} - \frac{d\left[A(r')^{l}\right]}{dr'}\right] = -Q \tag{3.3.57}$$

veya

$$Al(r')^{l+1} + B(l+1)(r')^{-l} = Q \tag{3.3.58}$$

şeklinde A ve B'ye bağlı ikinci bir denklem bulunur. Böylece (3.3.48) ve (3.3.58) eşitliklerinden A ve B sabitleri

$$A = \frac{Q}{2l+1}(r')^{-(l+1)} \tag{3.3.59}$$

$$B = \frac{Q}{2l+1}(r')^{l} \tag{3.3.60}$$

olarak bulunur. Bu değerler (3.3.46) ve (3.3.47) çözümlerinde yerlerine yazılırsa

$$R_l^{|m|}(r) = \frac{Q}{2l+1}\frac{r^l}{(r')^{l+1}} \qquad ; 0 \le r < r' \tag{3.3.61}$$

$$R_l^{|m|}(r) = \frac{Q}{2l+1}\frac{(r')^l}{(r)^{l+1}} \qquad ; \ 0 \le r < r' \tag{3.3.62}$$

çözümleri elde edilir. Bu çözümler

$$r_< \quad ; \quad r < r'$$

$$r_> \quad ; \quad r' < r$$

olmak üzere (3.3.61) ve (3.3.62)

$$R_l^{|m|}(r) = \frac{Q}{2l+1}\frac{(r_<)^l}{(r_>)^{l+1}} \tag{3.3.63}$$

şeklinde birleştirilebilir. Böylece (3.3.63) ve (3.3.49) ifadeleri (3.3.24) denkleminde yerine yazılırsa $G(\vec{r}/\vec{r}')$ Green fonksiyonu için

$$G = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{(r_<)^l}{(r_>)^{l+1}}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}P_l^{|m|}(\cos\theta)P_l^{|m|}(\cos\theta')e^{im(\varphi-\varphi')} \tag{3.3.64}$$

ifadesi elde edilir. Bazen (3.3.64) gösterimi yerine

$$G(r,r'/\theta,\theta'/\varphi,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(r_<)^l}{(r_>)^{l+1}}\Big[P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')$$

$$+\frac{2(l-|m|)!}{(l+|m|)!}P_l^{|m|}(\cos\theta)P_l^{|m|}(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi')\Big] \tag{3.3.65}$$

ifadesi de kullanılır.[3,4,6,8,9,13,14,18,20,24,25]

TARTIŞMA

Hemen hemen tüm doğa yasaları diferansiyel denklemlerle ifade edilebilirler. Bu nedenle diferansiyel denklemlerin matematiğin yanı sıra tüm uygulamalı bilimler de geniş bir kullanım alanı vardır.

Derleme olarak yapılan bu çalışmada ortogonal ve özel ortogonal koordinat sistemleri ile silindirik ve küresel koordinatlar, Legendre ve Bessel denklemleri ile Dirac Delta fonksiyonu kısaca gözden geçirilerek Poisson Denklemi ve bu denklemin silindirik ve küresel koordinatlarda yapılan çözümleri incelenmiştir.

SİMGELER DİZİNİ

j_m	: Bessel Fonksiyonu
δ	: Dirac Delta Fonksiyonu
G	: Green Fonksiyonu
H_m	: Henkel Fonksiyonu
$\lvert J \rvert$	: Jakobi Determinantı
P_l	: Legendre Polinomları
g_{ij}	: Metrik katsayılar
I_m , K_m , R_n	: Modifiye Bessel Fonksiyonları
N_m	: Neumann Fonksiyonu
W	: Wronskian Determinantı

KAYNAKLAR

1- Güngör, F., 2000, Diferansiyel Denklemler, Basım Yayım Dağıtım A.Ş., İstanbul.

2- Edwards, H.C.,Penney, D.E., 2006 , Bilgisayar Destekli ve Matematiksel Modellemeli Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemi, Çeviri editörü Prof. Dr. Ömer Akın Palme Yayıncılık, Ankara.

3- Bayın, S.,2004, Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, Ders Kitapları Anonim Şirketi, Ankara.

4- Hasanov, E.,Uzungören, G., Büyükaksoy, A., 2002 Diferansiyel Denklemler Teorisi, Papatya Yayıncılık Eğitim Bilgisayar Sis. San. ve Tic. A.Ş., İstanbul.

5- Çağlayan, M., Çelebi, O., 2002, Kısmi Diferansiyel Denklemler, Vipaş A.Ş. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı.

6- Edwards Henry C., Penny David E., 2008, Differantial Equations and Boundary Value Problems. Pearson Education, Inc New Jersey 07458.

7- Anar,İ.E.,2005,Kısmi Diferansiyel Denklemler Palme Yayın dağıtım,pazarlama iç ve dış LTD.ŞTİ, Ankara.

8- Boos, Mary L., 1983, Mathematical Methods in the Physical Sciences. by John Wiley and Sons, Inc. Canada.

9- Baran, A.,1995, Fizikte Matematik Metodllar. T.Ü. Fen Ed. Fak. Fizik Böl. Ders notları, Edirne.

10- Moon, P., Spencer, D.E.,1988, Eleven Coordinate Systems and The Vektor Helmholtz Equation. Newyork Spinger Verlog.

11- Moon P., Spencer, D.E., Field Theory Handbook Including Coordinate Systems Differantial Equations and Their Solutions, Berlin.

12- Bell W.W., 1968, Special Functions for Scientists and Engineers,D. Van Nostrand Company LTD, London.

13- Karaoğlu,B., Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler, Bilgi Tek Yayıncılık, İstanbul.

14- Bitsadze, A.V.,1980, Equations of Mathematical Physics, Mir Publishers, Moscow.

15- Bitsadze, A.V., Kalenizhenko, D.F., A Collection of Problems on the Equations of Mathematical Physics. Mir Publishens, Moscow.

16- Morse, P.M. and Feshbach,H.,1953, Tables of Separable Coordinates in Three Dimensions Methods of Theoretical Physics, Mc Graw-Hill New York.

17- Snedon, I. N., 1957, Elements of Partical Differantial Equations, Mac Graw-Hill, New York- Toronto-London.

18- Habernian, R.,1987, Elemantary Applied Partial Differantial Equations, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersy 07632.

19- Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., 1980, Table of Integrals, Series and Products, Academic Pres Inc., Orlando-London-San Diego.

20- Carslaw, H.S., Jacger J.C., 1973, Conductivity of Heat in Solids, Oxford Un. Press.

21- Jacson, J.D., 1962, Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons.

22- Koca K., 2001, Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.

23- Taylor, R.C., Zaferitos, C.D.,1996, Fizik Ve Mühendislikte Modern Fizik, Arte Bilgi Tek, Ankara.

24- Caurant, R., and Hilbert, D.,1950 , Methods of Mathematical Physics. Newyork Inerscience Publisher.

25- Vladiminov. V.S., 1971, Equations of Mathematical Physics, Marcel Peker Inc., Newyork.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Murat AYTİN

Doğum Yeri : Meriç / EDİRNE

Doğum Tarihi : 28.02.1979

Medeni Hali : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu

İlkokul : Meriç Merkez Büyük Doğanca İlköğretim Okulu

Ortaokul : Meriç Merkez Büyük Doğanca İlköğretim Okulu

Lise : Meriç Lisesi

Lisans : Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi

2001 yılında Edirne Meriç Şehit Öğretmen Aydın Yılmaz İlköğretim Okulu'nda Matematik Öğretmeni olarak atandım. İsteğim üzerine 2003 yılında Edirne Uzunköprü Safvet Buzcu İlköğretim Okulu'na atandım. 2004-2005 yılları arasında askerlik görevini Şanlıurfa Viranşehir Işıldar Köyü İlköğretim Okulu'nda Matematik öğretmeni olarak tamamladım. 2007 yılı şubat ayında Iğdır Endüstri Meslek ve Teknik Lisesine eş durumu özrü ile atandım. Aynı yıl Anadolu Liselerine Öğretmen Seçme sınavı ile Iğdır M.E.V. Anadolu Lisesine atandım. 2009 yılında zorunlu hizmetin tamamlanması ile İstanbul Selimpaşa İMKB Anadolu OTM Lisesine atandım. Halen bu görevi sürdürmekteyim.