



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LAPLACE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Muhibe AKYÜZ

YÜKSEK LİSANS

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

LAPLACE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Muhibe AKYÜZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ozan ÖZKAN

2019, 37+x Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Ozan ÖZKAN
.
.

Bu tez çalışmasında; kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu sunuldu. Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu, Laplace Dönüşümünün ve Diferensiyel Dönüşüm Metodunun birleştirilmiş şeklidir. Önerilen yöntemle elde edilen sayısal çözümler, yaklaşımın uygulanmasının kolay ve etkili olduğunu göstermektedir. Bu sonuçlar, önerilen yöntemin kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için gelecek vaat eden bir araç olduğunu ortaya koymaktadır.

Anahtar Kelimeler: Kısmi diferensiyel denklemler, Laplace dönüşümü, Laplace diferensiyel dönüşüm yöntemi, Seri çözümler.

ABSTRACT

MS THESIS

ON SOLUTİON OF PARTİAL DİFFERENTİAL EQUATİONS VİA LAPLACE DİFFERENTİAL TRANSFORMS METHOD

Muhibe AKYÜZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY

THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATİCS

Advisor: Assoc. Dr. Ozan ÖZKAN

2019, 37+x Pages

Jury

.

Assoc. Dr. Ozan ÖZKAN (Advisor)

.

In this thesis; the Laplace Differential Transform Method is introduced to give solutions of the partial differential equations. The Laplace Differential Transform Method is a combined form of the Laplace transform and Differential Transform Method. The numerical solutions obtained by the proposed method indicate that the approach is easy to implement and effective. These results reveal that the proposed method is a promising toll for solving partial differential equations.

Keywords: Partial differential equations, Laplace transform, Laplace Differential Transform Method, Series solutions.

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ozan ÖZKAN danışmanlığında hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans Tezi içerik olarak beş bölümden oluşmaktadır. Giriş birinci bölümde; literatür özetleri ise ikinci bölümdedir. Üçüncü bölümde; Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu (LDDM) ile metodun kısmi türevli diferensiyel denklemler ve denklem sistemlerine nasıl uygulanabileceğini gösteren prosedürler ele alınmıştır. Dördüncü bölümde; üçüncü bölümde sunulan yöntemin çeşitli problemlere uygulanışına yer verilmiştir. Son olarak; sonuç ve öneriler bölümü yer almaktadır.

Tez çalışması seçimi ve yürütülmesi sürecinde yardımlarından ve yönlendirmelerinden dolayı değerli hocam sayın Doç. Dr. Ozan Özkan'a, her zaman yanımda olan sevgili annem Ayşe AKYÜZ'e ve babam Fuat AKYÜZ'e teşekkürlerimi sunarım.

Muhibe AKYÜZ
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **ix**

TABLOLAR DİZİNİ ..... **x**

1. GİRİŞ **1**

2. MATERYAL VE YÖNTEM **5**

2.1. Temel Tanımlar 5
Tanım 2.1 5
Tanım 2.2 5
Tanım 2.3 5
Tanım 2.4 6
Tanım 2.5 6
2.2. Laplace Dönüşümü 7
2.2.1. Laplace Dönüşümünün Bazı Önemli Özellikleri 7
2.3. Ters Laplace Dönüşümü 11
2.3.1. Ters Laplace Dönüşümünün Bazı Önemli Özellikleri 11
2.4. Türevlerin Dönüşümleri 13
2.4.1. Genelleştirme 13
2.5. İki Değişkenli Fonksiyonlarda Laplace Dönüşümü 14
2.6. Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM) 15

3. LAPLACE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU (LDDM) **19**

3.1. Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler için LDDM 19
3.2. Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem Sistemleri için LDDM 22

4. UYGULAMALAR **24**

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **34**

KAYNAKLAR **35**

ÖZGEÇMİŞ **37**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$B(x,y)$	: Beta Fonksiyonu
$\Gamma(n)$	: Gamma Fonksiyonu
$£\{f(t)\} = \bar{f}(s) = F(s)$	: $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$\bar{u}(x,s) = £[u(x,t)]$	: İki değişkenli fonksiyonlar için Laplace dönüşümü
$£^{-1}\left\{\bar{f}(s)\right\}$	: $\bar{f}(s)$ nin ters Laplace dönüşümü
$£^{-1}\left[\bar{u}(x,s)\right] = u(x,t)$	: $\bar{u}(x,s)$ nin ters Laplace dönüşümü
E_n	: Mutlak hata

Kısaltmalar

DDM	: Diferensiyel Dönüşüm Metodu
LDDM	: Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu
KTDD	: Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem
KTDDS	: Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem Sistemi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 Örnek 4.1' in *u(x,t)* çözüm yüzeyi ……25
Şekil 4.2 Örnek 4.2' nin *u(x,t)* çözüm yüzeyi ……27
Şekil 4.3 Örnek 4.3' ün *u(x,t)* çözüm yüzeyi ……..29
Şekil 4.4 Örnek 4.3 için hata fonksiyonu ……30
Şekil 4.5 Örnek 4.4'ün *u(x,t)* ve *v(x,t)* çözüm yüzeyleri ……..…32
Şekil 4.6 Örnek 4.5' in *u(x,t)* ve *v(x,t)* çözüm yüzeyleri ……...…33

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 2.1: Laplace Dönüşüm Tablosu…….10
Tablo 2.2: Diferensiyel Dönüşüm Tablosu……..18
Tablo 3.1: KTDD'ler için LDDM Döngüsü …….22
Tablo 3.2: KTDDS için LDDM Döngüsü ……..**.....**23

1. GİRİŞ

Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM) kavramı literatürde ilk olarak Zhou (1986) nun çalışmasında geçmektedir. Zhou (1986) bu çalışmasında metodu ayrıntılı bir şekilde anlattıktan sonra, elektrik akım analizinin doğrusal ve doğrusal olmayan başlangıç değer probleminin çözümünde metodu kullanmıştır. Zhou (1986) nun önermiş olduğu DDM literatürdeki diğer benzer yöntemlerle karşılaştırıldığında metodun en önemli ve ayırt edici özelliklerinden biri diferensiyel denklemlerin basit bir dönüşüm yardımıyla, cebirsel denklemlere dönüşüyor olmasıdır. Problemlerin cebirsel denklemlere dönüştürülmelerinden sonra geriye cebirsel forma indirgenmiş bir problemin çözümünün bulunması problemi kalmaktadır. Bu durum özellikle analitik çözümü bilinmeyen doğrusal olmayan problemlerin çözümü için büyük bir kolaylıktır. Daha sonraki dönemde metot birçok araştırmacının ilgisini çekip, onların yapmış oldukları çalışmalara ilham olmuştur. Örneğin; Hassan (2002) Sturm-Liouville özdeğer probleminde, özdeğer ve normalleştirilmiş özdeğer fonksiyonunun bulunmasında DDM' nu kullanmıştır. Chen ve Ho (1999) kısmi türevli diferensiyel denklemlerin DDM ile çözümü için iki boyutlu DDM'yi ilk kez bu çalışmalarında sunmuşlardır. Jang ve ark. (2001)' nın çalışmasında ise iki boyutlu DDM biraz daha geliştirildikten sonra ve sırasıyla parabolik, hiperbolik, eliptik ve doğrusal olmayan tipteki kısmi türevli diferensiyel denklemler DDM kullanılarak çözülmüşlerdir. Kanth ve Aruna (2008) çalışmalarında doğrusal ve doğrusal olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünü DDM ile yapmışlardır.

DDM' nun tarihsel geçmişi 1986 yılına dayansa da literatüre bakıldığında günümüzde de hala popüler bir metot olduğu ve bir çok bilim insanı tarafından çok sayıda bilimsel çalışmada kullanılmakta olduğu kolaylıkla görülebilir. Örneğin; Paripour ve ark. (2017) DDM' nu Volterra'nın nüfus artışı probleminin çözümünde, Kadkhoda ve ark. (2018) DDM' nu Fuzzy diferensiyel denklemlerinin çözümünde, Shehu ve ark. (2017) DDM' nu bira fermantasyon sürecinin optimal kontrolünde, Cansu-Kurt ve Özkan (2018) DDM ve Pade yaklaşımını beraber kullanarak bazı kısmi türevli diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmede kullanmışlardır.

Matematik dünyasında integral dönüşümleri olarak adlandırılan dönüşümlerin bazıları Laplace, Fourier, Mellin, Hankel, Hilbert dönüşümleri olsa da, integral dönüşümü denildiğinde akla ilk gelen ve bilim insanları tarafından en çok kabul gören dönüşüm Laplace (de Laplace, 1814) dönüşümü olduğunu söylemek mümkündür.

Literatür incelendiğinde bulunan en eski ve en yaygın kullanılan integral dönüşümlerinden biri olan Laplace dönüşümünün bazı temel sonuçlarını ilk olarak Laplace'ın ***The´orie Analytique des Probabilities*** *(Olasılık Analitik Teorisi)* (1820) adlı klasik incelemesinde bulmak mümkündür. Bu çalışmada Laplace dönüşümünün ilk olarak olasılık teorisi ve astronomi mekaniği için kurgulanmış olduğunu görmek mümkündür. Ancak o günden bu güne kadar Laplace dönüşümü ve özelliklerinin uygulanmadığı bilim alanı neredeyse yoktur (Spiegel, 1965). Bunu en iyi şekilde Spiegel (1965)' in *Laplace Dönüşümleri* adlı eserinde ayrıntılı bir şekilde görmek mümkündür.

Doğrusal olmayan diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması bilim dünyası için yadsınamaz derecede önemlidir. Lakin durum böyle olsa bile bilim insanları çeşitli nedenlerden dolayı geliştirmiş oldukları yöntemler ile elde etmiş oldukları çözümler ile yetinmemişlerdir. Çünkü problemlerin doğasına uygun olarak özellikle analitik çözümü olmayan problemlerin sayısal ve yarı analitik çözümlerinde problemin çözüm hızı, ele alınan metodun bilgisayar ortamında kolay bir algoritma ile ifade edilebilmesi, elde edilen yaklaşık çözümün yakınsaklığı ve yakınsaklık aralığı gibi konular, bilim insanlarının dikkatini hep çekmiştir. Bilim insanları bu konulara cevap aramayı yıllardır sürdürmektedir. Bu tür sorulara cevap verebilmek adına bazen birden çok metodu birleştirilerek yeni hibrit metotları üretmişlerdir. Bu tür hibrit yöntemlere son yıllarda oldukça sık rastlanılmaktadır. Örneğin; Haq ve ark. (2017) Laplace dönüşümü ve Adomian Ayrışım Yöntemini birleştirerek kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanmışlardır. Morales-Delgado ve ark. (2016) "*Laplace homotopy analysis method"* adını verdikleri ve Laplace dönüşüm ile Homotopy analiz yönteminin birleştirilmesinden oluşan yöntemi doğrusal kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanmışlardır. Li ve ark. (2016) da Laplace dönüşüm ile Homotopy analiz yönteminin birleştirilmesinden oluşan yöntemin üzerinde bazı değişikler yaparak kesirli mertebeden KdV denkleminin çözümlerini elde etmişlerdir. Yang ve ark. (2015) ise "*Laplace variational iteration method"* adını verdikleri metotlarında bu kez Laplace dönüşümü ile varyasyonel iterasyon yöntemini beraber kullanmayı tercih etmişlerdir. Bu tez çalışmasına ilham kaynağı olan çalışma ve çalışmalar da yukarıda sadece birkaçını saydığımız ama daha birçoğunun var olduğunu bildiğimiz çalışmalardır. Bu tez çalışmasına ilham veren şey; sorduğumuz şu soru olmuştur: " *Son yıllarda yapılan bir çok çalışmada hem adi hem de kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için etkin bir yöntem olduğu bilinen Diferensiyel*

Dönüşüm Metodu (DDM) da Laplace Dönüşümü ile birleştirilebilir mi? Eğer cevap evet ise bu durumda bu yeni hibrit yöntem ne tür problemlerin çözümlerine katkı sağlar? " Bu sorunun cevabı kısmen Alquran ve ark. (2012) ve Kumari ve ark. (2015) tarafından cevaplanmaya çalışılmıştır. Bu tez çalışması mevcut hali ile 2012 yılında Alquran ve ark. (2012) tarafından yapılan çalışma ile aynıdır ancak Alquran ve ark. (2012) çalışmasında ele aldıkları problemlerdeki türev mertebeleri üzerine bir takım kısıtlamalar koymuşlardır. Bu tez çalışmasında yukarıda bahsedilen diferensiyel denklemlerin mertebeleri üzerine konulan kısıtlamalar ile çözüm esnasında kullanılan bazı kabullere gerek kalmadan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümü ele alınmıştır. Kumari ve ark. (2015)' de yapmış oldukları çalışmada LDDM kavramını kullanmışlardır. Adı geçen çalışmada anlatılan bu yöntem bazı kısıtlamalara sahip olsa da bu çalışmada ele alınan yöntem ile benzerdir. K. Kumari ve arkadaşları adı geçen çalışmada sadece Dirichlet ve Neumann sınır değer problemleri ile ilgilenmişlerdir. Bu tez çalışmasında ise ele alınan problemler karışık sınır değer problemleridir. K. Kumari ve arkadaşlarının yapmış oldukları çalışmanın bir diğer dezavantajı ise ele alınan diferensiyel denklemde DDM nu uygulayabilmesi için gerekli olan başlangıç spektrumlarının bazılarını bilmedikleri için bunları bazı varsayımlar üzerine kurmuş olmalarıdır. Ayrıca adı geçen çalışmada yapılan varsayımlar için genel bir kural mevcut değildir. Bu çalışmada ise bu tür kabullere gerek kalmamaktadır. Kumari ve ark. (2016) önceki çalışmalarından bir yıl sonra yapmış oldukları bu çalışmada ise bu kez karışık sınır değer problemlerini ele almışlardır. Böylelikle ilk çalışmadaki bir eksikliği kısmen gidermişlerdir. Yalnız bu sefer de ele aldıkları kısmi türevli diferensiyel denklemdeki doğrusal olmayan operatöre ikinci mertebeden kısıtlama koymuşlardır.

Ayrıca ulaşabildiğimiz kaynaklardan edindiğimiz bilgiye göre bu çalışmada önerilen metot şimdiye kadar kısmi türevli denklem sistemleri için hiç denenmemiştir. Bu yüzden, bu tez çalışmasında kısmi türevli denklem sistemleri için de ayrı bir LDDM uygulama prosedürü sunulmuş, ardından önerilen prosedür çeşitli örnekler üzerinde de uygulanmıştır.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; literatür özeti sunulmuştur. İkinci bölümde; Diferensiyel dönüşüm Metodu ile Laplace Dönüşümü kısaca özetlenmiştir. Aynı zamanda tezin orijinal bölümü olan üçüncü bölümde ise; önce kısmi türevli diferensiyel denklemler sonra ise kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri için *"Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu"* adını verdiğimiz hibrid yöntem tanıtılmıştır. Beşinci bölümde ise; 4. Bölümde verilen yöntemin uygulaması

örnekler üzerinde yapılmıştır. 5. Bölümde ise tezden elde edilen sonuçlar ve ileriye dönük önerilerden bahsedilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tez çalışmasının diğer bölümlerinde yer alan kısımların daha iyi anlaşılabilmesi için literatürde mevcut olan ve tezin diğer bölümlerinde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanan $\Gamma(n)$ fonksiyonuna *Gamma fonksiyonu* adı verilir. Bu fonksiyona genelleştirilmiş Gamma fonksiyonu da denir. Bu genelleştirilmiş integralin her $n>0$ için yakınsak olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gamma fonksiyonu ve bu fonksiyonun özellikleri ayrıntılı biçimde literatürde mevcuttur (Ross, 1984) .

Tanım 2.2

Beta fonksiyonu,

$$B(x,y)=\int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\quad \mathrm{Re}(x)>0,\mathrm{Re}(y)>0\,, \tag{2.2}$$

integrali ile tanımlıdır. Beta fonksiyonu tanımı ile ortaya çıkan ilginç özelliklerden birisi de Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasındaki ilişkiyi veren

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

eşitliğidir (Spiegel, 1965) .

Tanım 2.3

Bağımsız bir değişken ile bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme *adi diferensiyel denklem* denir ve bir bağımlı değişkenli diferensiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde gösterilir. $y^{(n)}$; y 'nin x 'e göre n. mertebeden türevidir. Daha açık formda

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{2.4}$$

biçiminde ifade edilir. Eğer diferensiyel denklemde birden çok bağımsız değişken varsa bu denkleme *kısmi türevli diferensiyel denklem* denir.

Tanım 2.4

n. mertebeden

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$$

diferensiyel denklemi için *başlangıç değer problemi*, $x_0 \in A$ ve $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ verilmiş sabitler olmak üzere *A* aralığındaki bir x_0 noktasında bu diferensiyel denklem

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0 \\ &\frac{dy}{dx}(x_0) = y_1 \\ &\vdots \\ &\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklindeki n tane başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümünün bulunması problemidir.

Tanım 2.5

x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= A_{11}(x)y_1 + A_{12}(x)y_2 + ... + A_{1i}(x)y_i + f_1(x) \\ y_2' &= A_{21}(x)y_1 + A_{22}(x)y_2 + ... + A_{2i}(x)y_i + f_2(x) \\ &\vdots \\ y_i' &= A_{i1}(x)y_1 + A_{i2}(x)y_2 + ... + A_{ii}(x)y_i + f_i(x) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

şeklindeki bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişkenin sadece bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklem sistemine doğrusal *diferensiyel denklem sistemi* denir. $k, j = 1, 2, ...i$ olmak üzere $f_k(x)$ ve $A_{kj}(x)$ bilinen fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığında

tanımlı olduğu kabul edilmiştir. Burada tüm $f_k(x)=0$ ise (2.6) sistemine *homojen sistem*, en az bir $f_k(x)\neq 0$ ise bu sisteme *homojen olmayan sistem* denir.

2.2. Laplace Dönüşümü

$f(t)$, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı herhangi bir fonksiyon, s ise genelde *reel*[1] değerler alabilen bir parametre olsun.

Tanım 2.6 $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ improper(has olmayan) integraline $f(t)$ fonksiyonunun *Laplace*[2] dönüşümü denir ve $£\{f(t)\}$ ile gösterilir

$$£\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\,. \tag{2.7}$$

Görüldüğü gibi, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, improper integral olup s parametresine bağlı bir fonksiyondur. Bu dönüşümün özelliklerini incelemeden önce $f(t)$ ve s'ye bağlı olarak, $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ özel olmayan integrali, s'nin herhangi bir s_0 değeri için yakınsak ise $\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,s_0$ değeri her s için yakınsaktır. Bu durum bizim için $f(t)$ fonksiyonunun varlığını ispat eder (Spiegel, 1965).

2.2.1. Laplace Dönüşümünün Bazı Önemli Özellikleri

Laplace dönüşümünün bazı temel özellikleri aşağıda ispatsız olarak verilmiştir (Spiegel, 1965) .

Teorem 2.1 ***(Doğrusallık Özelliği)*** c sabit olmak üzere $s>a$ için f, f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri mevcut olsun. O halde $s>a$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$£\{f_1+f_2\}=£\{f_1\}+£\{f_2\} \tag{2.8}$$
$$£\{cf\}=c£\{f\}$$

1:Buradaki s reel değerli olarak ele alınmıştır. Ancak s kompleks değerli de olabilir. Kompleks değerli laplace dönüşümleri için Wilbur R. LePage tarafından yazılan Complex Variables and the Transformfor Engineers kitaplarına bakılabilir. (Le Page, 1980) E.B.Saff ve A.D.Snider in çalışmalarına bakılabilir.

2: Pierre Simon de Laplace (1749-1827) - Fransız matematikçi

'dir. Bu sonuç kolayca ikiden fazla fonksiyona genelleştirilebilir.

Teorem 2.2 *(s de öteleme)* $s > a$ için $£\{f\}(s) = F(s)$ şeklindeki Laplace dönüşümü var ise $s > a + a$ için

$$£\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a) \tag{2.9}$$

eşitliği sağlanır. Yani bu bize bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ ise fonksiyonun a birim ötelenmiş halinin Laplace dönüşümü $F(s-a)$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.3 *(İkinci Kaydırma Özelliği)*

$£\{f(t)\} = F(s)$ ve $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$ ise

$$£\{g(t)\} = e^{-as} F(s) \tag{2.10}$$

'dir.

Teorem 2.4 *(Skala Değiştirme Özelliği)*

$£\{f(t)\} = F(s)$

$$£\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{2.11}$$

'dır.

Teorem 2.5 *(Türevin Laplace Dönüşümü)*

$f(t)$, $[0,\infty)$ aralığında sürekli, $f'(t)$, $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve her ikiside α mertebeden üstel olsun. Bu durumda $s > \alpha$ için

$$£\{f'\}(s) = s£\{f\}(s) - f(0) \tag{2.12}$$

olur.

Teorem 2.6 *(Yüksek Mertebeden Türevlerin Laplace Dönüşümü)*

$f(t), f'(t), ..., f^{(n-1)}(t)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde sürekli, $f^{(n)}(t)$, $[0,\infty)$ üzerinde parçalı sürekli ve bu fonksiyonların tümü α mertebeden üstel fonksiyon olsunlar. Bu durumda $s > a$ için

$$£\{f^{(n)}\}(s) = s^n £\{f\}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0) \tag{2.13}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.7 *(Laplace Dönüşümünün Türevleri)*

$£\{f\}(s) = F(s)$ olsun. $f(t)$ ise $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve α mertebeden üstel fonksiyon olsun. Bu durumda $s > \alpha$ için

$$£\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s) \tag{2.14}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 2.8 *(İntegrallerin Laplace Dönüşümleri)*

$£\{f(t)\} = F(s)$ ise

$f(t)$ fonksiyonu üstel mertebeden ve parçalı sürekli ise integrali de üstel mertebedendir ve Laplace dönüşümü

$$£\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{2.15}$$

şeklinde alınır.

Teorem 2.9 *(t^n ile Çarpma)*

$£\{f(t)\} = F(s)$ ise

$$£\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s) \tag{2.16}$$

'dir.

Teorem 2.10 *(t ile Bölme)*

$£\{f(t)\} = F(s)$ ve $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ mevcut ise

$$£\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du \tag{2.17}$$

'dir.

Laplace Dönüşüm Tablosu

	***f(t)* fonksiyonu**	***f(t)* fonksiyonunun Laplace dönüşümü**	
	$f(t)=\pounds^{-1}F(s)$	$\pounds\{f(t)\}=F(s)$	D(F)
1.	1	$\frac{1}{s}$	s>0
2.	$t^n \ \ (n\in\mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	s>0
3.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$s>\alpha$
4.	$\cos(\beta t)$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$s>0$
5.	$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$s>0$
6.	$\cosh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$	$s>\lvert\beta\rvert$
7.	$\sinh(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$	$s>\lvert\beta\rvert$
8.	$t^n e^{\alpha t} \ \ (n\in\mathbb{N})$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$s>\alpha$
9.	$e^{\alpha t}\cos(\beta t)$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$s>\alpha$
10.	$e^{\alpha t}\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$s>\alpha$
11.	$t\cos(\beta t)$	$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$s>0$
12.	$t\sin(\beta t)$	$\frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$	$s>0$
13.	$te^{\alpha t}\cos(\beta t)$	$\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{\left[(s-\alpha)^2+\beta^2\right]^2}$	$s>\alpha$
14.	$te^{\alpha t}\sin(\beta t)$	$\frac{2\beta(s-\alpha)}{\left[(s-\alpha)^2+\beta^2\right]^2}$	$s>\alpha$

Tablo 2.1. Laplace Dönüşüm Tablosu

2.3. Ters Laplace Dönüşümü

$F(s)$ verilen bir fonksiyon olmak üzere eğer $f(t)$, $[0,\infty)$ üzerinde sürekli ve

$$£\{f(t)\} = F(s)$$

sağlanıyor ise $f(t)$ fonksiyonuna $F(s)$'nin ters Laplace dönüşümü denir ve

$$f(t) = £^{-1}\{F(s)\}$$

ile gösterilir (Spiegel, 1965).

2.3.1. Ters Laplace Dönüşümünün Bazı Önemli Özellikleri

Aşağıda ters Laplace dönüşümünün bazı önemli özellikleri belirtilmiştir (Spiegel,1965).

Teorem 2.11 *(Dönüşümün Doğrusallığı)* c seçilen keyfi sabit, $£^{-1}\{F\}$, $£^{-1}\{F_1\}$ ve $£^{-1}\{F_2\}$ var ve $[0,\infty)$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda

$$£^{-1}\{(F_1+F_2)(s)\} = £^{-1}\{F_1(s)\} + £^{-1}\{F_2(s)\} \tag{2.18}$$

$$£^{-1}\{cF(s)\} = c£^{-1}\{F(s)\} \tag{2.19}$$

eşitliği sağlanır. Bu özellik ikiden fazla fonksiyona kolaylıkla genelleştirilebilir. Bu özelliğinden dolayı $£^{-1}$'e doğrusal operatör veya doğrusallık özelliği olan bir operatör denir.

Teorem 2.12 *(Birinci Kaydırma Özelliği)*

$£^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ise

$$£^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t) \tag{2.20}$$

'dir.

Teorem 2.13 *(İkinci Kaydırma Özelliği)*

$£^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ise

$$£^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \tag{2.21}$$

'dır.

Teorem 2.14 *(Skala Değiştirme Özelliği)*

$£^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ise

$$£^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) \tag{2.22}$$

'dir.

Teorem 2.15 *(Türetilmiş Fonksiyonların Ters Laplace Dönüşümleri)*

$£^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

$$£^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = £^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t) \tag{2.23}$$

'dir.

Teorem 2.16 *(İntegrallerin Ters Laplace Dönüşümleri)*

$£^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ise

$$£^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t} \tag{2.24}$$

dir.

Teorem 2.17 (s^n ile Çarpma)

$£^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ve $f(0) = 0$ ise

$$£^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) \tag{2.25}$$

'dir. Görüldüğü gibi s ile çarpmanın $f(t)$'yi türetme biçiminde etkisi olmaktadır.

$f(0) \neq 0$ ise $\delta(t)$, delta Dirac fonksiyonu veya birim basamak fonksiyonu olmak üzere,

$$£^{-1}\{sF(s) - f(0)\} = f'(t) \tag{2.26}$$

$$£^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + f(0)\delta(t) \tag{2.27}$$

'dir.

Teorem 2.18 *(s ile Bölme)*

$£^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ise

$$£^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du \tag{2.28}$$

'dur. Görüldüğü gibi s ile bölmenin veya $\frac{1}{s}$ ile çarpmanın $f(t)$'yi 0'dan t'ye kadar integre etme biçiminde etkisi görülmektedir.

2.4. Türevlerin Dönüşümleri

Laplace dönüşümünün diferensiyel denklemlere uygulamalarında bir fonksiyonun türevinin Laplace dönüşümü formülüne gerek duyacağız. Kısmi integrasyon ile bir kez integre ederek

$$£\{f'(t)\} = \left[f(t)e^{-st} \right]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{2.29}$$

yazabiliriz. $f(t)$'nin Laplace dönüşümünün varlığı için gerek koşul

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$$

olmasıdır. O halde, $t > 0$ için $f(t)$'yi sürekli varsayarsak

$$£\{f'(t)\} = s£\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0) \tag{2.30}$$

dönüşüm formülü çıkar. Bu işleme devam edersek sürekli türetilebilen bir $f(t)$ için

$$£\{f''(t)\} = s^2£\{f''(t)\} - sf(0) - f'(0) \tag{2.31}$$

olduğunu görebiliriz.

2.4.1. Genelleştirme

$t \geq 0$ için $f, f', ..., f^{(n-1)}$ sürekli ve $t > 0$ için f^n parça parça sürekli ve üstel mertebeden ise, tümevarım ile

$$£\{f^{(n)}(t)\} = s^n£\{f^n(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0) \tag{2.32}$$

olduğu gösterilebilir.

Eğer $f(t)$ fonksiyonu reel eksen üzerinde yalnızca parça parça sürekli ise, yukarıdaki formülün değiştirilmesi gerekir. Örneğin $f(t)$'nin $t = a$'da sonlu bir sıçrama süreksizliği varsa

$$\begin{aligned} £\{f'(t)\} &= \int_0^{a^-} e^{-st} f'(t)dt + \int_{a^+}^{\infty} e^{-st} f'(t)dt \\ &= \left[f(t)e^{-st} \right]_0^{a^-} + s\int_0^{a^-} e^{-st} f(t)dt + \left[f(t)e^{-st} \right]_{a^+}^{\infty} + s\int_{a^+}^{\infty} e^{-st} f(t)dt \end{aligned} \tag{2.33}$$

ve $f(t)$'nin a'daki sıçramasının uzunluğu

$$\left[f(t) \right]_a = f(a^+) - f(a^-)$$

ile gösterilirse

$$£\left\{ f'(t) \right\} = s£\left\{ f(t) \right\} - f(0) - e^{-as}\left[f(t) \right]_a \tag{2.34}$$

bulunur.

2.5. İki Değişkenli Fonksiyonlarda Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümünün kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulamalarında Spiegel (1965) hem uzay hem de zaman değişkenlerine bağlı çok değişkenli fonksiyonların kısmi türev dönüşümlerinin bilinmesi gerekmektedir. Örneğin iki değişkenli $u(x,t)$ fonksiyonu için Laplace dönüşümü tanımına göre (t dönüşüm değişkeni olmak üzere)

$$£\left\{ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right\} = s\bar{u}(x,s) - u_0(x) \tag{2.35}$$

eşitliği yazılabilir. Burada,

$$\bar{u}(x,s) = £\left\{ u(x,t) \right\}, \quad u_0(x) = u(x,0) \tag{2.36}$$

olarak tanımlanan fonksiyonlardır. Daha genel olarak,

$$£\left\{ \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} \right\} = s^n \bar{u}(x,s) - \sum_{r=0}^{n} s^{n-r-1} u_r(x), \qquad u_r(x) = \frac{\partial^r u(x,t)}{\partial t^r}\Big|_{t=0} \tag{2.37}$$

eşitliği geçerlidir. Zaman değişkenine göre türevleri içermeyen kısmi türevler için ise

$$£\left\{ \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n} \right\} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} £\left\{ u(x,t) \right\} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \bar{u}(x,s) \tag{2.38}$$

formülü geçerli olacaktır. Çünkü bu durumda x'e göre kısmı türevlerle t'ye göre integral yer değiştirirler. Karışık türevler için ise

$$£\left\{ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} £\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = s\frac{\partial \bar{u}(x,s)}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{2.39}$$

'dir.

2.6. Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM)

Bu bölümde, diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan ve diğer metotlara nazaran daha yeni kabul edilen Diferensiyel Dönüşüm Metodunu (DDM) tanıtılacaktır. Bu metodun tanımı ve tüm özellikleri literatürde mevcut olduğu için metoda ait bazı önemli teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.7 Bir değişkenli $u(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olmak üzere $u(x)$ ' in diferensiyel dönüşümü,

$$U(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \tag{2.40}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.8 $U(k)$ dönüşüm fonksiyonunun ters diferensiyel dönüşümü,

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x-x_0)^k \tag{2.41}$$

biçiminde tanımlanır.

(2.40) eşitliği (2.41) de kullanılırsa

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}(x-x_0)^k \tag{2.42}$$

olur. (2.42) eşitliğinden DDM' nun Taylor seri açılımı kavramından türetildiği söylenebilir.

Değişik yıllarda DDM üzerine yapılan bilimsel çalışmalarda aşağıdaki teoremler ispatlanmış ardından da bu teoremler birçok bilimsel çalışmada kullanılmıştır. İspatları literatürde mevcut olduğundan bu teoremler ispatsız olarak aşağıda sunulmuştur (Chen ve Ho, 1996; Jang ve Chen, 1997; Chen ve Ho, 1999; Jang ve ark., 2001; Hassan, 2002).

Teorem 2.19 $u(x)=w(x)\mp v(x)$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$U(k)=W(k)\mp V(k) \tag{2.43}$$

ile ifade edilir (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 2.20 $c \in \mathbb{R}$ sabit değer olmak üzere $u(x) = c.v(x)$ biçimindeki bir fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = c.V(k) \tag{2.44}$$

'dır (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 2.21 $u(x) = \frac{dv(x)}{dx}$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = (k+1).V(k+1) \tag{2.45}$$

ile ifade edilir (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 2.22 Bir fonksiyonun $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$u(x) = \frac{d^n v(x)}{dx^n}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = \frac{(k+n)!}{k!} V(k+n) \tag{2.46}$$

biçimindedir (Jang ve Chen, 1997).

Teorem 2.23 $u(x) = v(x).w(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü, $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$U(k) = \sum_{r=0}^{k} V(r)W(k-r) \tag{2.47}$$

eşitliği ile verilir (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 2.24 $u(x) = v(x).w(x).z(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü; r, $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$U(k) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{t=0}^{k-r} V(r)W(t)Z(k-r-t) \tag{2.48}$$

ile ifade edilir (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 2.25 $u(x) = u_1(x).u_2(x)....u_n(x)$ şeklindeki n tane fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^{k} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} ... \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} U_1(k_1)U_2(k_2-k_1)U_3(k_3-k_2)...U_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})U_n(k-k_{n-1}) \tag{2.49}$$

ile ifade edilir (Arikoglu ve Ozkol, 2005).

Teorem 2.26 $u(x) = v(x)\dfrac{dw(x)}{dx}$ şeklindeki birinci mertebeden türevi ile çarpımının diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = \sum_{r=0}^{k} (k-r+1)V(r)W(k-r+1) \tag{2.50}$$

eşitliği ile verilir.

Teorem 2.27 $u(x) = \dfrac{dv(x)}{dx}.\dfrac{dw(x)}{dx}$ şeklindeki fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = \sum_{r=0}^{k} (r+1)(k-r+1)V(r+1)W(k-r+1) \tag{2.51}$$

ile ifade edilir.

Teorem 2.28 $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $u(x) = e^{\lambda x}$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$U(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \tag{2.52}$$

İle ifade edilir (Jang ve Chen, 1997).

Teorem 2.29 $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u(x) = x^n$ şeklindeki kuvvet fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \tag{2.53}$$

ile verilir (Chen ve Ho, 1996).

Aşağıdaki Tablo 2.2'de bazı özel fonksiyonların diferensiyel dönüşümleri verilmiştir. Tablo; literatürdeki çalışmalardan kolaylıkla elde edilebilir (Chen ve Ho, 1996; Jang ve Chen, 1997; Chen ve Ho, 1999; Jang ve ark., 2001; Hassan, 2002; Jang ve Chen, 1997).

Fonksiyon	**Diferensiyel Dönüşümü**
$u(x)=v(x)+w(x)$	$U(k)=V(k)+W(k)$
$u(x)=cv(x)$	$U(k)=cV(k)$
$u(x)=\frac{dv(x)}{dx}$	$U(k)=(k+1)V(k+1)$
$u(x)=\frac{d^n v(x)}{dx^n}$	$U(k)=(k+1)(k+2)...(k+n)V(k+n)=\frac{(k+n)!}{k!}V(k+n)$
$u(x)=v(x).w(x)$	$U(k)=\sum_{r=0}^{k}V(r)W(k-r)$
$u(x)=v(x)w(x)z(x)$	$U(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}V(r)W(t)Z(k-r-t)$
$u(x)=v(x)\frac{dw(x)}{dx}$	$U(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)V(r)W(k-r+1)$
$u(x)=v(x)\frac{d^2 w(x)}{dx^2}$	$U(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+2)(k-r+1)V(r)W(k-r+2)$
$u(x)=\frac{dv(x)}{dx}\frac{dw(x)}{dx}$	$U(k)=\sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)V(r+1)W(k-r+1)$
$u(x)=v(x)w(x)\frac{d^2 z(x)}{dx^2}$	$U(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}(k-r-t+2)^2(k-r+1)V(r)W(t)Z(k-r-t+2)$
$u(x)=e^{\lambda x}$	$U(k)=\frac{\lambda^k}{k!}$
$u(x)=e^{\lambda x+b}$	$U(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^b$
$u(x)=x^m$	$U(k)=\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$
$u(x)=\sin(ax+b)$	$U(k)=\frac{a^k}{k!}\sin(\frac{\pi k}{2}+a)$
$u(x)=\cos(ax+b)$	$U(k)=\frac{a^k}{k!}\cos(\frac{\pi k}{2}+a)$
$u(x)=\frac{v(x)}{w(x)}$	$U(k)=\frac{1}{W(0)}\left[V(k)-\sum_{m=0}^{k-1}Z(m)W(k-m)\right]$
$u(x)=\left[v(x)\right]^b$	$U(k)=\begin{cases}V(0), & k=0\\ \sum_{m=0}^{k}\frac{(b+1)m-k}{kV(0)}V(m)W(k-m), & k\geq 1\end{cases}$
$u(x)=\int_{x_0}^{x}v(x)dx$	$U(k)=\frac{V(k-1)}{k}, \quad k\geq 1$

Tablo 2.2. Diferensiyel Dönüşüm Tablosu

3. LAPLACE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU (LDDM)

Bu bölümde, Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu (LDDM) diye adlandırılan; Laplace Dönüşümü ile Diferensiyel Dönüşüm Metodunun birleşiminden oluşan, bu iki metodun peşi sıra uygulanması ile elde edilen hibrit metot sunulacaktır. Bu hibrit metot sayesinde kısmi türevli diferensiyel denklemler (KTDD) için verilen başlangıç sınır değer problemlerinin çözümleri alternatif bir çözüm prosedürü ile çözülmüş olacaktır. Aynı zamanda önerilen yöntemin KTDD sistemlerinde de uygulanabileceği gösterilmiştir. Bu tür birden çok metodun birleşiminden oluşan yöntemlere literatürde ***hibrit (melez) yöntemler*** de denilmektedir (Haq ve ark., 2017; Morales-Delgado ve ark., 2016; Li ve ark., 2016).

3.1. Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler için LDDM

İlk olarak metodun mantığını anlayabilmek adına aşağıdaki en genel doğrusal olmayan ve homojen olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemi başlangıç koşulları ile beraber ele alalım.

$$\mathbf{D}\left[u(x,t)\right]+\mathbf{R}\left[u(x,t)\right]+\mathbf{N}\left[u(x,t)\right]=f(x,t), t\in\mathbb{R}_0^+, x\in\mathbb{R} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &u(x,0)=\mathrm{g}_0(x), u_t(x,0)=\mathrm{g}_1(x), u^{(2)}{}_t(x,0)=\mathrm{g}_2(x),\ldots,u^{(\mathrm{n}-1)}{}_t(x,0)=\mathrm{g}_{n-1}(x) \\ &u(0,t)=h_0(t), u_x(0,t)=h_1(t), u^{(2)}{}_x(0,t)=h_2(t),\ldots,u^{(\mathrm{n}-1)}{}_x(0,t)=h_{n-1}(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.1) eşitliği ile verilen KTDD'de $\mathbf{D}$, t değişkenine göre n. mertebeden doğrusal diferensiyel operatör, $\mathbf{R}[.]$ mertebesi $\mathbf{D}$'den küçük lineer diferensiyel operatör, $\mathbf{N}[.]$ lineer olmayan genel operatör, $f(x,t)$ ise kaynak terim olup, $u(x,t)$ aranan fonksiyonu göstermektedir. Uygulanacak olan çözüm prosedüründe yazım kolaylığı olması bakımından yukarıda (3.2) eşitlikleri ile verilen başlangıç değerleri aşağıda anlatılacak olan her adıma dahil edilmeyecektir. Böyle olsa bile göz ardı edilen bu başlangıç değerlerinin de benzer süreçten geçtiği kabulü ile aşağıdaki adımların uygulanacağı gerçeği unutulmamalıdır. Şimdi (3.1)-(3.2) başlangıç değer probleminin LDDM ile çözümünü veren altı adımı sıralayalım:

1. Adım: (3.1) eşitliği ile verilen kısmi türevli diferensiyel denklemin her iki yanının t değişkenine göre Laplace dönüşümü alınır ise,

$$£\left[\mathbf{D}\left[u(x,t)\right]\right]+£\left[\mathbf{R}\left[u(x,t)\right]\right]+£\left[\mathbf{N}\left[u(x,t)\right]\right]=£\left[f(x,t)\right] \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir.

2. Adım: Elde edilen (3.3) eşitliğinde, 2. Bölümde verilen türevin Laplace dönüşümü özelliği ile yukarıdaki (3.2) denklemindeki başlangıç değerleri kullanılır ve ardından gerekli düzenlemeler yapılır ise,

$$D\bar{u}(x,s)+R\bar{u}(x,s)=h(x,s) \tag{3.4}$$

eşitliği ile verilen ve bağımsız değişkeni x olan bir adi diferensiyel denklem elde edilir. Elde edilen bu yeni diferensiyel denklemde; $\bar{u}(x,s)=£\left[u(x,t)\right]$ biçiminde tanımlanmakta olup, sırasıyla D, x değişkenine göre n. Mertebeden doğrusal diferensiyel operatör, R mertebesi D'den küçük doğrusal diferensiyel operatör, $h(x,s)$ ise bilinen analitik bir fonksiyonun Laplace dönüşümünü göstermektedir. Bu adımda (3.4) denklemi elde edilirken, aynı zamanda yazım kolaylığı olması bakımından ihmal edilen (3.2) başlangıç değerlerinin de t değişkenine göre Laplace dönüşümünün alındığının ve elimizde mevcut olduğu varsayımımızın unutulmaması gerekmektedir.

3. Adım: (3.4) denklemi ile verilen adi türevli diferensiyel denkleme 2. Bölümde verilen DDM'nun ilgili dönüşümleri uygulanırsa aşağıdaki yineleme bağıntısı kolaylıkla elde edilir.

$$\frac{(k+n)!}{k!}U(k+n)+F(k)=H(k) \tag{3.5}$$

$$U(k),k=0,1,\ldots,n-1 \tag{3.6}$$

Buradaki $F(k)$ ve $H(k)$ ise sırasıyla, diferensiyel denkleme DDM uygulandıktan sonra elde edilen $R\bar{u}(x,s)$ ve $h(x,s)$'nin diferensiyel dönüşümleridir. (3.6) ise, önceki adımlarda bahsettiğimiz ama yazar iken ihmal ettiğimiz için açık olarak şimdiye kadar yazmadığımız başlangıç koşullarına sırasıyla Laplace dönüşümü ve DDM uygulandığında elde edilen $\bar{u}(x,s)$'nin $U(k)$ spektrum değerleridir. LDDM şeklinde adlandırılan hibrit yönteminin bu adımında kullanılan DDM'nun (3.5)-(3.6) eşitlikleri ile verilen formdaki adi diferensiyel denklemlerin yarı analitik çözümleri için etkili bir

yöntem olduğu literatürdeki bir çok çalışma ve onların referanslarından kolaylıkla görülebilir (Chen ve Ho, 1996; Chen ve Liu, 1998).

4. Adım: Yukarıdaki (3.6) eşitliği ile verilen $U(k), k = 0,1,...,n-1$ spektrum değerlerinin (3.5) yineleme bağıntısında yazılmasıyla, $\bar{u}(x,s)$ diğer spektrumları olan $U(k), k = n, n+1, n+2,...$ değerleri kolaylıkla elde edilir. Çözümün bu aşamasında aranan fonksiyonun analitik fonksiyon olması kabulü nedeniyle adım sayısının belirlenmesi tamamen problemin doğasına uygun olarak uygulayıcı tarafından belirlenir. Yani; rekürans bağıntısındaki iterasyon sayısı istenildiği kadar tekrarlanarak $\bar{u}(x,s)$'nin istenen sayıdaki $U(k)$ spektrumları elde edilir.

5. Adım: 4. Adımda elde edilen $\bar{u}(x,s)$'lerin spektrumları 2. Bölümde verilen (2.42) eşitliğinde olduğu gibi yerlerine yazıldıklarında (3.4) probleminin DDM ile elde edilen çözümü

$$\bar{u}(x,s) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k) x^k \tag{3.7}$$

formunda elde edilir.

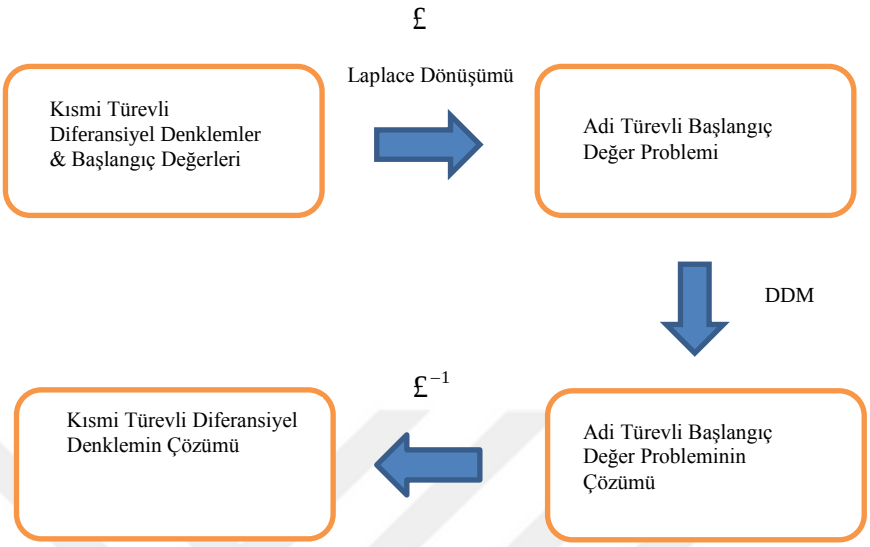
6. Adım: Son adım olarak sıra, ilk başta verilen (3.1)-(3.2) probleminin çözümüne ulaşabilmek için (3.7) eşitliğinin her iki yanının s dönüşüm değişkenine göre ters Laplace dönüşümü alınmasındadır. Bu işlem yapıldığında ise,

$$u(x,t) = £^{-1}\left\{\bar{u}(x,s)\right\} = £^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} U(k) x^k\right\} \tag{3.8}$$

çözüm fonksiyonuna ulaşılır.

Altı adım sonrasında elde edilen (3.8)'deki $u(x,t)$ fonksiyonu ilk başta ele alınan (3.1)-(3.2) başlangıç değer probleminin ***Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu (LDDM)*** ile çözümü olarak adlandırılır. Alquran ve ark. (2012) yapmış oldukları çalışmalarında benzer bir algoritma verilmiş olsa da, adı geçen algoritma sadece ikinci mertebeden KTDD'ler için tanımlanmış olup biz bunu *n.* mertebeden diferensiyel

denklemlere genelleştirmiş olduk. Metodun işleyişini anlayabilme adına yukarıda altı adımda özetlemeye çalıştığımız LDDM, aşağıdaki Tablo 3.1'de resmedilmiştir.



Tablo 3.1 KTDD'ler için LDDM ile çözüm döngüsü

3.2. Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem Sistemleri için LDDM

Yukarıdaki altı adım; KTDD için başlangıç değer problemlerinin LDDM yöntemi ile nasıl çözüleceğini kısaca özetlemektedir. Bölüm 3.1'de aktarılan bu prosedürün kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri içinde uygulanabilir olduğu sezgisel olarak açık olmakla beraber, durumun böyle olduğunu kısaca aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür.

Bunun için Bölüm 3.1'deki ***1. Adım*** ile verilen (3.1) denklemi yerine aşağıdaki (3.9) eşitliği ile verilen kısmi türevli diferensiyel denklem sistemini ele aldığımızı varsayalım.

$$D_t u_i(x,t) = A_i\left(u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t)\right), \quad i=\overline{1,n} \tag{3.9}$$

Burada ki D_t t değişkenine göre diferensiyel operatör, A_i'ler lineer olmayan diferensiyel operatörler $u_i(x,t)$'ler ise verilen kısmi türevli diferensiyel denklem sisteminin bilinmeyen fonksiyonlarıdır. Yazım kolaylığı olması bakımından (3.9) ile beraber verilmemiş olsalar da Bölüm 3.1'de olduğu gibi (3.9) denklem sistemi ile beraber başlangıç değerlerin verilmiş olduğu varsayımı burada da geçerlidir. Bölüm

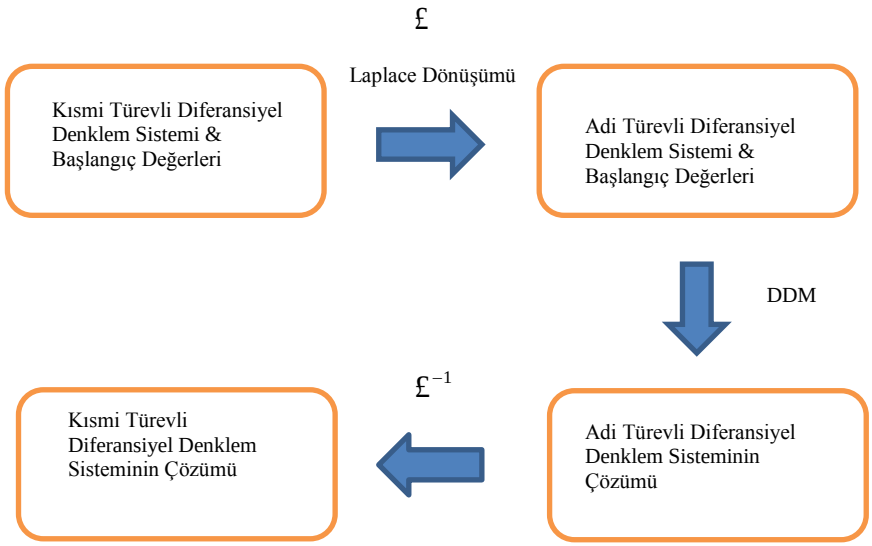
3.1'deki birinci adımda olduğu gibi (3.9) sisteminin Laplace dönüşümü alınırsa (t dönüşüm değişkenine göre)

$$£\left[D_t u_i(x,t)\right] = £\left[A_i(u_1(x,t),...,u_n(x,t)\right],\ \ i=\overline{1,n} \tag{3.10}$$

biçiminde verilen adi türevli diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Yine Bölüm 3.1'deki Adım 3'te olduğu gibi (3.10) eşitliğinde türevin Laplace dönüşümü kurallarına göre ihmal edilen başlangıç değerleri yerlerine yazılır ise (3.10) sisteminden; DDM ile çözülebilirliği literatürde kanıtlanmış olan aşağıdaki gibi bir adi türevli diferensiyel denklem sistemi elde edilir (Ayaz, 2004).

$$s£\left[u_i(x,t)\right] - \sum_{k=0}^{m_i-1} s^{-k-1} u_i^k(x,0) = £\left[D_t u_i(x,t)\right] = £\left[A_i(u_1(x,t),...,u_n(x,t)\right] \tag{3.11}$$

işlemlerin bu adımında da (3.9) verilir iken beraber ihmal edilen ama Bölüm 3.1'de olduğu gibi yukarıdaki süreçlerden geçen başlangıç değerlerinin de mevcut olduğu unutulmamalıdır. Elde edilen (3.11) sistemine Bölüm 3.1'de özetlenen 3. Adım ile 6. Adım arasındaki prosedür aynen uygulandığında (3.9) ile verilen kısmi türevli diferensiyel denklem sisteminin çözüm takımının ***Laplace Diderensiyel Dönüşüm Metodu (LDDM)*** ile çözümü elde edilmiş olunur. Aşağıdaki Tablo 3.2'de anlatılan çözüm prosedürü gösterilmektedir.



Tablo 3.2 KTDDS için LDDM ile çözüm döngüsü

4. UYGULAMALAR

Bu bölümde kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için verilen yukarıdaki algoritmanın uygulanabilirliği bazı örnekler üzerinde gösterilecektir. Ele alınan örneklerdeki tüm hesaplamalar Mapple 13 paket programı kullanılarak elde edilmiştir.

Örnek 4.1.

İlk olarak Alquran ve ark. (2012) tarafından çözülmüş olan aşağıdaki (4.1) homojen olmayan denklemin (4.2) ile verilen koşulları gerçekleyen çözümünü bulma problemini ele alalım (Alquran ve ark., 2012):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 2t + 2x^2 + 2,\ x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = x^2, u(0,t) = t^2, u_x(0,t) = 0 \tag{4.2}$$

(4.1) eşitliğinin her iki yanının t dönüşüm değişkenine göre Laplace dönüşümünün alınması ve elde edilen eşitlikte (4.2)'deki $u(x,0) = x^2$ başlangıç koşulunun yazılması ile kullanılmayan diğer koşulların da Laplace dönüşümünün alınmasından,

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + x\frac{d\bar{u}}{dx} + s\bar{u} = x^2 + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{2x^2}{s} \tag{4.3}$$

$$\bar{u}(0,s) = \frac{2}{s^3},\ \bar{u}_x(0,s) = 0 \tag{4.4}$$

elde edilir. Burada $\bar{u}(x,s) = £[u(x,t)]$ eşitliği ile verilen u fonksiyonunun Laplace dönüşümü anlatılmakta olduğu unutulmamalıdır. Adi türevli (4.3)-(4.4) başlangıç değer probleminin çözümü için (4.3) ve (4.4)'e diferensiyel dönüşüm metodu (DDM) uygulanır ise sırasıyla aşağıdaki (4.5) ve (4.6) eşitlikleri elde edilir.

$$U(k+2) = \frac{-1}{(k+2)(k+1)}\left[\sum_{r=0}^{k}(r+1)U(r+1)\delta(k-r-1) + sU(k) - \left(\frac{2}{s^2} + \frac{2}{s}\right)\delta(k) - \left(\frac{2}{s} + 1\right)\delta(k-2)\right] \tag{4.5}$$

$$U(0) = \frac{2}{s^3},\ U(1) = 0 \tag{4.6}$$

(4.6)'daki değerler (4.5)'de yazılarak tekrarlanan işlemlerden sonra $\bar{u}(x,s)$'nin

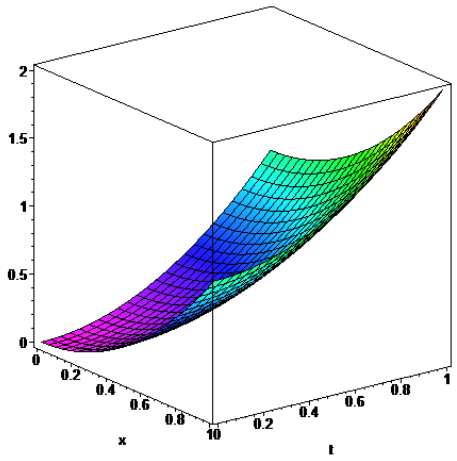
$U(2)=\frac{1}{s}, U(3)=U(4)=\ldots=0$ spektrum değerleri DDM için verilen (2.42) eşitliğinde yazılırsa,

$$\bar{u}(x,s)=\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s}x^2 \tag{4.7}$$

eşitliği elde edilir. Son olarak, (4.7)'nin her iki yanının s dönüşüm değişkenine göre ters Laplace dönüşümü alındığında ise (4.1)-(4.2) probleminin,

$$u(x,t)=\pounds^{-1}\left[\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s}x^2\right]=t^2+x^2 \tag{4.8}$$

biçiminde verilen LDDM çözümü elde edilir. Bu çözüm aynı zamanda (4.1)-(4.2) probleminin tam çözümü olup, grafiği aşağıdaki gibidir (Alquran ve ark., 2012).



Şekil 4.1. Örnek 4.1' nin *u(x,t)* çözüm yüzeyi

Örnek 4. 2.

Aşağıdaki (4.9) eşitliği ile verilen kısmi türevli diferensiyel denklemini

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+u(x,t)-e^{-x}(1+2t)=0 \tag{4.9}$$

ve bu denklem ile beraber verilen

$$u(x,0)=x, u(0,t)=t, u_x(0,t)=e^{-t}-t \tag{4.10}$$

başlangıç değerlerinden oluşan (4.9)-(4.10) başlangıç değer problemini ele alalım. Bu problemin tam çözümü $u(x,t) = te^{-x} + xe^{-t}$ dir.

Bölüm 3.1'de özetlenen algoritmada olduğu gibi birinci adım olarak (4.9) eşitliğinin her iki yanının t dönüşüm değişkenine göre Laplace dönüşümü alınırsa,

$$s\pounds\left[u(x,t)\right] - u(x,0) + \pounds\left[u_{xx} + u - e^{-x}(1+2t)\right] = 0 \tag{4.11}$$

eşitliği elde edilir. (4.11) eşitliğinde (4.10)'da verilen $u(x,0) = x$ başlangıç koşulu yazılır ve (4.10)'un kullanılmayan diğer başlangıç koşullarının Laplace dönüşümü alınırsa aşağıdaki (4.12)-(4.13) adi türevli başlangıç değer problemi elde edilir.

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + (s+1)\bar{u} = x + e^{-x}\left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}\right) \tag{4.12}$$

$$\bar{u}(0,s) = \frac{1}{s^2}, \frac{d\bar{u}}{dx}(0,s) = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}. \tag{4.13}$$

Yukarıda $\bar{u}(x,s) = \pounds\left[u(x,t)\right]$ eşitliği ile; verilen u fonksiyonunun Laplace dönüşümü anlatılmaktadır. DDM (4.12)-(4.13) problemine uygulanır ise,

$$U(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[-(s+1)U(k) + \delta(k-1) + \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}\right)\right] \tag{4.14}$$

$$U(0) = \frac{1}{s^2}, U(1) = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} \tag{4.15}$$

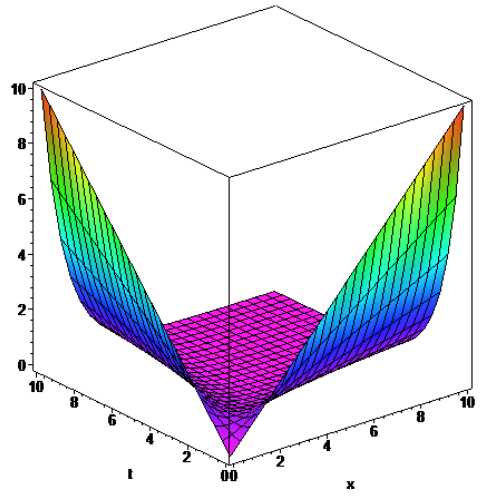
eşitlikleri elde edilir. Bu adımda aranan $\bar{u}$ fonksiyonunun bilinmeyen spektrumları olan $U(k)$, $k = 2,3,...$ değerleri, (4.15)'deki ifadelerin (4.14)'deki yineleme bağıntısında kullanılmasıyla kolaylıkla elde edilir. Burada işlemler istenilen sayıda tekrarlanır. Elde edilen spektrumlar (2.42)'deki yerlerine yazılırsa,

$$\bar{u}(x,s) = \frac{1}{s^2}\left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + ...\right) + x\frac{1}{s+1} \tag{4.16}$$

bulunur. Elde edilen bu (4.16) çözümü aynı zamanda (4.12)-(4.13) ile verilen başlangıç değer probleminin DDM çözümü olarak adlandırılır. Bu çözüm tabii ki ilk başta verilen (4.9)-(4.10) probleminin çözümü değildir. (4.9)-(4.10) probleminin çözümü için Bölüm 3.1'deki 6. adımda olduğu gibi yukarıda elde edilen (4.16) çözümünün s değişkenine göre ters Laplace dönüşümünün alınması gereklidir. Bu işlem yapıldığında ise

$$u(x,t) = L^{-1}\left[\bar{u}(x,s)\right] = t(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + ...) + xe^{-t} \qquad (4.17)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen (4.17) çözümü ilk başta verilen (4.9)-(4.10) kısmi türevli başlangıç değer probleminin çözümüdür. (4.17)'deki serinin kapalı formu $u(x,t) = te^{-x} + xe^{-t}$ olup, bu fonksiyon aynı zamanda problemi tam çözümüdür. Ele alınan bu örnekte de görüldüğü gibi bu tez çalışmasında önerilen hibrit yöntem bu tür problemlerin varsa tam çözümlerinin elde edilmesini mümkün kılmaktadır.



Şekil 4.2. Örnek 4.2' nin *u(x,t)* çözüm yüzeyi

Örnek 4. 3.

Aşağıdaki (4.18) eşitliği ile verilen homojen kısmi türevli diferensiyel denklemini

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + u(x,t) \qquad (4.18)$$

ve bu denklem ile beraber verilen

$$u(x,0) = e^{-x}, u(0,t) = e^{t}, u_x(0,t) = -e^{-t} \qquad (4.19)$$

başlangıç değerinden oluşan (4.18)-(4.19) başlangıç değer problemini ele alalım.

Önceki örneklerde olduğu gibi, ilk adım olarak (4.18) eşitliğinin her iki yanının t dönüşüm değişkenine göre Laplace dönüşümü alınırsa,

$$s\pounds\left[u(x,t)\right]-u(x,0)=\pounds\left[u_{xx}+u_x+u\right] \tag{4.20}$$

eşitliği elde edilir. (4.20) eşitliğinde (4.19) da verilen $u(x,0)=e^{-x}$ başlangıç koşulu yazılır ve Bölüm 3.1'de anlatıldığı gibi (4.19)'un kullanılmayan diğer başlangıç koşullarının Laplace dönüşümü alınırsa aşağıdaki (4.21)-(4.22) problemi elde edilir.

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}+\frac{d\bar{u}}{dx}+(1-s)\bar{u}=-e^{-x} \tag{4.21}$$

$$\bar{u}(0,s)=\frac{1}{s-1},\frac{d\bar{u}}{dx}(0,s)=-\frac{1}{s-1}. \tag{4.22}$$

Önceki örneklerde olduğu gibi burada da $\bar{u}(x,s)=\pounds\left[u(x,t)\right]$ eşitliği u fonksiyonunun Laplace dönüşümü anlamında kullanılmaktadır. DDM (4.21)-(4.22) problemine uygulanır ise,

$$U(k+2)=\frac{-1}{(k+1)(k+2)}\left[(k+1)U(k+1)+(1-s)U(k)+\frac{(-1)^k}{k!}\right] \tag{4.23}$$

$$U(0)=\frac{1}{s-1},U(1)=-\frac{1}{s-1} \tag{4.24}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu adımda aranan $\bar{u}$ fonksiyonunun bilinmeyen $U(k)$, $k=2,3,...$ spektrumları, (4.24)'deki $U(0),U(1)$ değerlerinin (4.23)'deki yineleme bağıntısında kullanılmasıyla kolaylıkla elde edilir. Burada iterasyon istenilen sayıda tekrarlanır. Elde edilen spektrumların (2.42) denkleminde yerlerine yazılmasıyla aşağıdaki (4.25) çözümüne kolaylıkla ulaşılır.

$$\bar{u}(x,s)=\frac{1}{s-1}(1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+...) \tag{4.25}$$

(4.18)-(4.19) probleminin çözümü için Bölüm 3.1'deki 6. adımda anlatıldığı gibi yukarıda elde edilen (4.25) çözümünün s değişkenine göre ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$u(x,t)=L^{-1}\left[\bar{u}(x,s)\right]=e^t(1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+...) \tag{4.26}$$

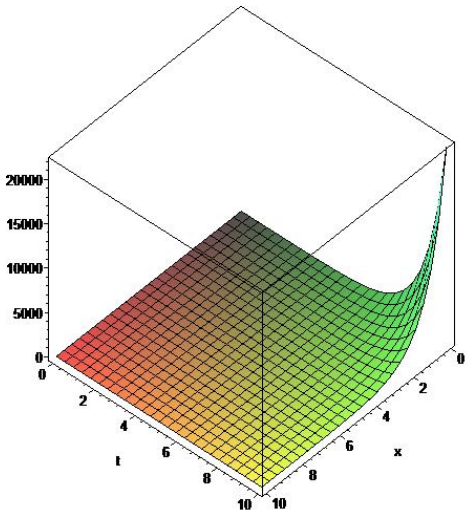
eşitliği elde edilir. Elde edilen (4.26) çözümü ilk başta verilen (4.18)-(4.19) homojen kısmi türevli başlangıç değer probleminin çözümüdür. (4.26)'daki serinin kapalı formu

$u(x,t)=e^{-x+t}$ olup, bu aynı zamanda (4.18)-(4.19) probleminin tam çözümüdür. Ele alınan örnekte görüldüğü gibi bu tez çalışmasında önerilen hibrit yöntem bu tür problemlerin varsa kapalı çözümlerinin elde edilmesini mümkün kılmaktadır. (4.26)'daki serinin yakınsaklığı ve doğruluğu değişik yöntemlerle incelenebilir. Örneğin;

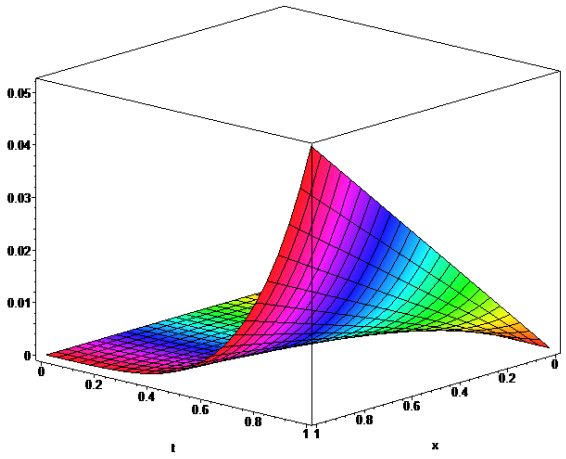
E_n mutlak hatayı göstermek üzere $n \in N$ için E_n'yi

$$E_n = \left| u_{tam}(x,t) - u_n(x,t) \right| \tag{4.27}$$

biçiminde bir mutlak hata fonksiyonu olarak tanımlayalım. (4.27) hata fonksiyonunda elde edilen yaklaşık çözümler $u_i(x,t)=\sum_{k=0}^{i}\sum_{h=0}^{i}U(k,h)t^k x^k, i \in \mathbb{N}$ eşitliği ile, gerçek çözüm ise $u_{tam}(x,t)$ ile gösterilmektedir. Aşağıdaki Şekil 4.3'de elde edilen $u_5(x,t)$ yaklaşık çözümünün E_5 mutlak hatası verilmektedir. Bu Şekil 4.3'den de görüleceği üzere n'ler büyüdükçe E_n'ler küçülmektedir. Bu durum aynı zamanda metodun güvenilirliğini göstermektedir. Yani sayısal olarak metodun yakınsaklığı ümit vericidir. Tabi ki yakınsaklık için daha farklı yöntemler kullanılabilir ama bu çalışmada böyle bir analize yer verilmeyecektir.



Şekil 4.3. Örnek 4.3'ün *u(x,t)* çözüm yüzeyi



Şekil 4.4. Örnek 4.3 için $E_5 = \left|u_{tam}(x,t) - u_5(x,t)\right|$

Şimdiye kadar ele alınan tüm problemlerde önerilen LDDM metodu sadece kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanıldı. Metodun aynı zamanda kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri için verilen başlangıç sınır değer problemleri için de güvenilir bir metot olduğu Bölüm3.2'de ifade edilmiş idi. Aşağıdaki örnekler kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri için de metodun doğruluğunu göstermek için verilmiştir.

Örnek 4. 4.

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u_x(x,t) - 2v(x,t) = 0, \\ v_t(x,t) + v_x(x,t) + 2u(x,t) = 0, \end{cases} \tag{4.28}$$

Kısmi türevli diferensiyel denklem sisteminin,

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \sin(x), v(x,0) = \cos(x), u(0,t) = \sin(t), v(0,t) = \cos(t) \\ &u_t(0,t) = \cos(t), v_t(0,t) = -\sin(t) \end{aligned} \quad . \tag{4.29}$$

koşullarını gerçekleyen çözümünü bulma problemi ele alalım (Ayaz, 2004).

Bu sistemin t dönüşüm değişkeni olmak üzere Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\begin{cases} s\bar{u}(x,s) - u(x,0) + \dfrac{d\bar{u}(x,s)}{dx} - 2\bar{v}(x,s) = 0 \\ s\bar{v}(x,s) - v(x,0) + \dfrac{d\bar{v}(x,s)}{dx} + 2\bar{u}(x,s) = 0 \end{cases} \tag{4.30}$$

olur. (4.30) sisteminde (4.29)'daki $u(x,0) = \sin(x), v(x,0) = \cos(x)$ koşulları yazılır ve elde edilen eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{u}(x,s)}{dx} + s\bar{u}(x,s) - 2\bar{v}(x,s) = \sin x \\ \dfrac{d\bar{v}(x,s)}{dx} + s\bar{v}(x,s) + 2\bar{u}(x,s) = \cos x \end{cases} \tag{4.31}$$

adi türevli diferensiyel denklem sistemi elde edilir. (4.29)'da kullanılmayan diğer koşulların Laplace dönüşümü alındığında ise,

$$\bar{u}(0,s) = \frac{1}{s^2+1}, \bar{v}(0,s) = \frac{s}{s^2+1}, \bar{u}_t(0,s) = \frac{s}{s^2+1}, \bar{v}_t(0,s) = -\frac{1}{s^2+1} \tag{4.32}$$

eşitliklerini elde ederiz. Böylelikle (4.31)-(4.32) problemine ulaşmış olduk. Bu tür problemlerin DDM ile çözümleri kolaylıkla elde edilebilir (Chen ve Liu, 1998). (4.31) ve (4.32) eşitliklerinin diferensiyel dönüşümleri alınırsa,

$$\begin{cases} U(k+1) = \dfrac{-1}{(k+1)}\left[sU(k) + 2V(k) - \dfrac{1}{k!}\sin(\dfrac{\pi k}{2}) \right] \\ V(k+1) = \dfrac{-1}{(k+1)}\left[sV(k) - 2U(k) - \dfrac{1}{k!}\cos(\dfrac{\pi k}{2}) \right] \end{cases} \tag{4.33}$$

$$U(0) = \frac{1}{s^2+1}, U(1) = \frac{s}{s^2+1}, V(0) = \frac{s}{s^2+1}, V(1) = -\frac{1}{s^2+1} \tag{4.34}$$

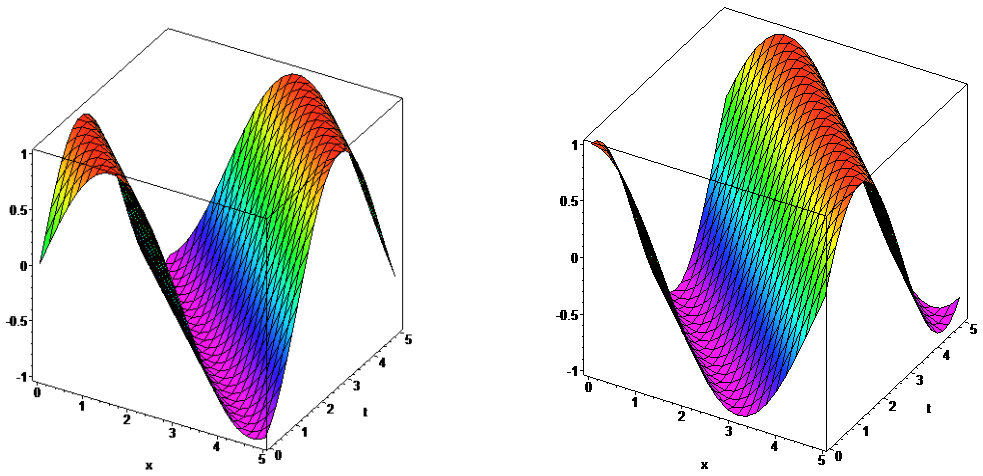
olur. (4.34)'deki değerler (4.33) yineleme bağıntısında kullanıldığında ve elde edilen spektrum değerleri (2.42)'deki yerlerine yazıldıktan sonra ise,

$$\bar{u}(x,s) = (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...)\frac{s}{s^2+1} + (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ...)\frac{1}{s^2+1} \tag{4.35}$$

$$\bar{v}(x,s) = (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ...)\frac{s}{s^2+1} - (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...)\frac{1}{s^2+1} \tag{4.36}$$

çözüm takımına ulaşılır. (4.35) ve (4.36)'nın ters Laplace dönüşümleri alındığında ise (4.28)-(4.29) probleminin LDDM ile elde edilen çözüm takımı aşağıdaki gibi bulunur.

$$u(x,t) = \sin(x+t), \quad v(x,t) = \cos(x+t) \tag{4.37}$$



Şekil 4.5. Örnek 4.4'ün *u(x,t)* ve *v(x,t)* çözüm yüzeyleri

Örnek 4.5

$$\begin{cases} u_t(x,t)-v_x(x,t)+v(x,t)+u(x,t)=0, \\ v_t(x,t)-u_x(x,t)+v(x,t)+u(x,t)=0, \end{cases} \tag{4.38}$$

$$u(x,0)=\sinh(x), v(x,0)=\cosh(x), u(0,t)=\sinh(-t), v(0,t)=\cosh(-t). \tag{4.39}$$

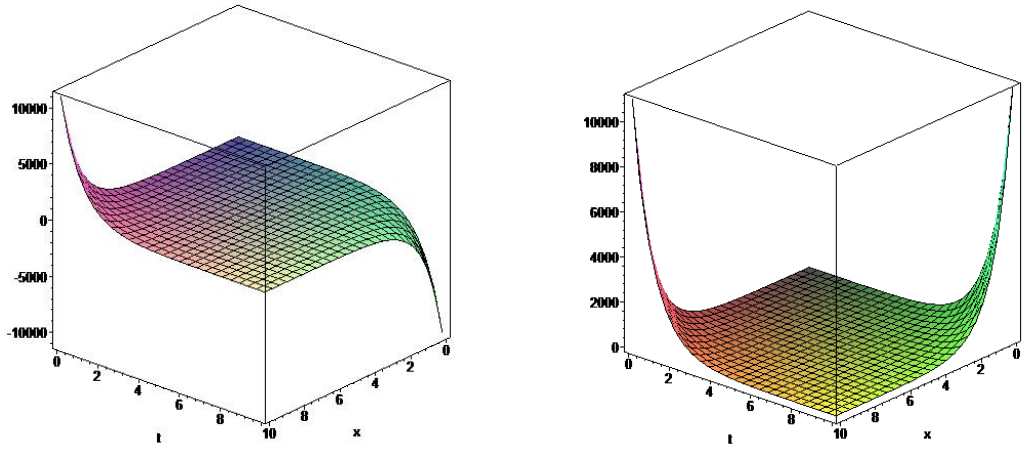
biçiminde verilen (4.38)-(4.39) başlangıç sınır değer problemini ele alalım. Bu sistemin t dönüşüm değişkeni olmak üzere Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{v}}{dx}-\bar{v}-(s+1)\bar{u}=\sinh(x) \\ \dfrac{d\bar{u}}{dx}-(s+1)\bar{v}-\bar{u}=\cosh(x) \end{cases} \tag{4.40}$$

$$\bar{u}(0,s)=-\frac{1}{s^2-1}, \bar{v}(0,s)=-\frac{s}{s^2-1} \tag{4.41}$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem DDM ile çözülüp ardından önceki örnekte uygulanan diğer adımlar takip edilirse, (4.38)-(4.39) probleminin LDDM ile elde edilen çözüm takımı (4.42)'deki gibi bulunur.

$$u(x,t)=\sinh(x-t), v(x,t)=\cosh(x-t) \tag{4.42}$$



Şekil 4.6. Örnek 4.5'in *u(x,t)* ve *v(x,t)* çözüm yüzeyleri

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmasında; Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu (LDDM) olarak adlandırılan metot sunulmuştur. Aslında metot Laplace dönüşümünün ve diferensiyel dönüşüm metodunun ardışık olarak bir kısmi türevli diferensiyel denkleme (veya denklem sisteminin) uygulanmasından oluşan hibrit bir yöntemdir. Bu hibtit çözüm prosedürü sayesinde ele alınan kısmi türevli diferensiyel denklem (veya denklem sistemi) Laplace dönüşümü yardımıyla bir adi türevli diferensiyel denkleme dönüşmekte, elde edilen yeni denklemin, diferensiyel dönüşüm metodu ile yarı-analitik bir çözümü bulunmakta ve ardından da ters Laplace dönüşümü kullanılarak ilk baştaki KTDD'ler (veya denklem sistemleri) için verilen başlangıç sınır değer probleminin yarı-analitik çözümüne ulaşıla bilinmektedir. Verilen yöntem uygulanabilirlik ve işlem zorluğu açısından gayet basit ve kolaydır. Yöntemin daha önce uygulanmadığı problemler örneğin kısmi türevli integro diferensiyel denklemler ile fizik ve mühendislikteki bazı özel problemler için geliştirilip böyle problemlere de uygulanabilirliğinin araştırılmasının, bilim dünyası ve bilim insanları için önemli olacağı kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

Alquran, M., Al-Khaled, K., Ali, M. ve Ta'any, A., 2012, The combined Laplace transform-differential transform method for solving linear non-homogeneous PDEs, *Journal of Mathematical and Computational Science*, 2 (3), 690-701.

Arikoglu, A. ve Ozkol, I., 2005, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Applied mathematics and computation*, 168 (2), 1145-1158.

Ayaz, F., 2004, Solutions of the system of differential equations by differential transform method, *Applied mathematics and computation*, 147 (2), 547-567.

Cansu-Kurt, Ü. ve Özkan, O., 2018, Exact solutions of some partial differential equations using the Modified Differential Transform Method, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 42 (1), 89-96.

Chen, C.-K. ve Ho, S.-H., 1996, Application of differential transformation to eigenvalue problems, *Applied mathematics and computation*, 79 (2-3), 173-188.

Chen, C.-L. ve Liu, Y.-C., 1998, Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems, *Applied Mathematics and Computation*, 95 (2-3), 155-164.

Chen, C. o. K. ve Ho, S. H., 1999, Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method, *Applied mathematics and computation*, 106 (2-3), 171-179.

de Laplace, P. S., 1814, Théorie analytique des probabilités, Mme. Ve. Courcier, p.

Haq, F., Shah, K., Khan, A., Shahzad, M. ve Rahman, G., 2017, Numerical solution of fractional order epidemic model of a vector born disease by Laplace Adomian decomposition method, *Punjab Univ. j. math*, 49 (2), 13-22.

Hassan, I. A.-H., 2002, On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation, *Applied mathematics and computation*, 127 (1), 1-22.

Jang, M.-J. ve Chen, C.-L., 1997, Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transformation technique, *Applied mathematics and computation*, 88 (2-3), 137-151.

Jang, M.-J., Chen, C.-L. ve Liu, Y.-C., 2001, Two-dimensional differential transform for partial differential equations, *Applied mathematics and computation*, 121 (2-3), 261-270.

Kadkhoda, N., Roushan, S. S. ve Jafari, H., 2018, Differential Transform Method: A Tool for Solving Fuzzy Differential Equations, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 4 (1), 33.

Kanth, A. R. ve Aruna, K., 2008, Differential transform method for solving linear and non-linear systems of partial differential equations, *Physics Letters A*, 372 (46), 6896-6898.

Kumari, K., Shanker, G. ve Gupta, P. K., 2015, Approximate Analytical Solution of Liner Boundary Value Problems by Laplace-Differential Transform Method, *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, 7 (2), 99-108.

Kumari, K., Gupta, P. ve Shanker, G., 2016, Coupling of Laplace Transform and Differential Transform for Wave Equations, *Physical Science International Journal*, 9 (4).

Le Page, W. R., 1980, Complex variables and the Laplace transform for engineers, Courier Corporation, p.

Li, C., Kumar, A., Kumar, S. ve Yang, X.-J., 2016, On the approximate solution of nonlinear time-fractional KdV equation via modified homotopy analysis Laplace transform method, *J. Nonlinear Sci. Appl*, 9, 5463-5470.

Morales-Delgado, V. F., Gómez-Aguilar, J. F., Yépez-Martínez, H., Baleanu, D., Escobar-Jimenez, R. F. ve Olivares-Peregrino, V. H., 2016, Laplace homotopy analysis method for solving linear partial differential equations using a fractional derivative with and without kernel singular, *Advances in Difference Equations*, 2016 (1), 164.

Paripour, M., Karimi, L. ve Abbasbandy, S., 2017, Differential transform method for Volterra's population growth model, *Nonlinear Studies*, 24 (1).

Ross, S. L., 1984, Differential Equations. New York: John Wiley&Sons, Inc.

Shehu, M., Jiya, M., Elebute, K. ve Ahmed, H., 2017, Optimal Control of Beer Fermentation Process Using Differential Transform Method, *Journal of Applied Sciences and Environmental Management*, 21 (4), 751-758.

Spiegel, M. R., 1965, Laplace transforms, McGraw-Hill New York, p.

Yang, A.-M., Zhang, Y.-Z. ve LIa, J., 2015, Laplace Variational Iteration Method for the Two-Dimensional Diffusion Equation in Homogeneous Materials, *Thermal Science*, 19, S163-S168.

Zhou, J., 1986, Differential transformation and its applications for electrical circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Muhibe AKYÜZ
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Selçuklu / 14.10.1988
Telefon : 05314998414
Faks :
e-mail : muhibe.akyuz@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Muhittin Güzelkılınç Süper Lisesi	2008
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi	2012

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2013-	MEB	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER

İngilizce

Yayın:

AKYÜZ Muhibe, **ÖZKAN** Ozan (2017); ***A novel solution procedure for PDEs by Laplace Differential Transform Method***, 3rd International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress (IRSYSC 2017), 264. (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)