



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GNSS GÖZLEMLERİNİN ROBUST KESTİRİM VE ROBUSTLUK ANALİZİ YÖNTEMLERİYLE DEĞERLENDİRİLMESİ ÜZERİNE BİR İNCELEME

Mevlüt YETKİN

DOKTORA TEZİ

Harita Mühendisliği Anabilim Dalı

Kasım-2012
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

GNSS GÖZLEMLERİNİN ROBUST KESTİRİM VE ROBUSTLUK ANALİZİ YÖNTEMLERİYLE DEĞERLENDİRİLMESİ ÜZERİNE BİR İNCELEME

Mevlüt YETKİN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Harita Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cevat İNAL

2012, 76 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Cevat İNAL
Prof. Dr. Ş. Hakan KUTOĞLU
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Doç. Dr. Aydın ÜSTÜN
Yrd. Doç. Dr. İsmail ŞANLIOĞLU

İstatistiksel olarak robustluk uyuşumsuz ölçülere karşı duyarsızlık olarak tanımlanır. Genel olarak ölçüyü yapan kişi ve kullanılan aletlerin mükemmel olmayışından kaynaklanan rasgele hatalar herhangi bir fiziksel kurala uymadıkları için matematiksel olasılık yasalarına göre ele alınmakta ve En Küçük Kareler Yöntemi (EKKY) adı verilen istatistiksel bir yaklaşımın konusunu oluşturmaktadırlar. Bununla birlikte EKKY ve duyarlık analizi ağın robustluğu hakkında bilgi vermezler. Oysa kaba hatalar ve sistematik biaslar ağ sonuçlarını olumsuz bir şekilde etkileyebilmektedirler. Bu nedenle uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi ve elemine edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla uyuşumsuz ölçü testleri ve robust kestirim yöntemleri kullanılmaktadır. Güvenirlik analizi ile geometrik güç analizinin bir birleşimi olan robustluk analizi ise data snooping yöntemiyle ortaya konulamayan hataların ağ üzerindeki etkilerini sanal bir deformasyon olarak incelemektedir.

Uydu jeodezisindeki gelişmelere paralel olarak GNSS ağları klasik ağların yerini almaya başlamıştır. GNSS ağlarında gözlenmiş baz vektörleri arasında korelasyon olduğu için uygun güvenirlik ölçütlerinin kullanılması gerekir. Öte yandan klasik güvenirlik teorisi bir tek uyuşumsuz ölçü olduğu varsayımına dayalıdır. Ancak ağda çoğu kez birden çok uyuşumsuz ölçü olabilir. Bu nedenle çoklu uyuşumsuz ölçüler için genelleştirilen güvenirlik ölçütleri kullanılmalıdır. Bu iki nokta robustluk analizi sonuçlarını da önemli ölçüde etkiler. Ayrıca ağdaki nokta ve baz sayısı arttırılarak veya daha presizyonlu gözlemler yaparak ağın robustluğu iyileştirilebilir. Robustluk analizini GNSS ağları gibi jeodezik ağlara uygularken kullanılan istatistiksel test yaklaşımı ile seçilen güven seviyesi ve test gücünün de sonuçlar üzerinde etkisi vardır.

Anahtar Kelimeler: Gerilme, GNSS Ağları, Güvenirlik Teorisi, Hatalar, İstatistiksel Test, Korelasyonlu Gözlemler, Maksimum Belirlenemeyen Hata, Robustluk Analizi.

ABSTRACT

Ph.D. THESIS

A TREATISE CONCERNING THE EVALUATION OF GNSS OBSERVATIONS USING THE ROBUST ESTIMATION AND ROBUSTNESS ANALYSIS METHODS

Mevlüt YETKİN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN GEOMATICS ENGINEERING

Advisor: Prof. Dr. Cevat İNAL

2012, 76 Pages

Jury
Prof. Dr. Cevat İNAL
Prof. Dr. Ş. Hakan KUTOĞLU
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Assoc. Prof. Dr. Aydın ÜSTÜN
Assist. Prof. Dr. İsmail ŞANLIOĞLU

Statistically, robustness means insensitivity to outliers. In general, random errors are the result of human and instrument imperfections. They usually do not follow any physical law and therefore must be dealt with according to the mathematical laws of probability. Random errors are adjusted with the Least Squares Method (LSM) that is a statistical approach. Nevertheless, the LSM and precision analysis do not give any information on the robustness of the network. However, blunders and systematic biases can negatively affect the network results. Therefore, outliers need to be detected and eliminated. For this purpose outlier tests and robust estimation methods have been used. As for robustness analysis, it inspects the effects of errors that cannot be detected by data snooping method on the network as a virtual deformation. Robustness analysis is a combination of reliability analysis and geometrical strength analysis.

GNSS networks have taken traditional networks' place in paralel with the progresses in the satellite geodesy. The observed baseline vectors are correlated thus appropriate reliability measures must be used in GNSS networks. On the other hand, the classical reliability theory assumes that there is only a single outlier. However, there could be more than one outlier. Hence, generalised measures of reliability for multiple outliers should be used. These two points dramatically affect the results of robustness analysis. Moreover, robustness of the network can be improved by enhancing the number of points and observed baseline vectors or by making more precise observations. The used statistical testing approach with the selected confidence level and power of the test have an important role on robustness of the network while performing robustness analysis in geodetic networks such as GNSS networks.

Keywords: Strain, GNSS Networks, Reliability Theory, Errors, Statistical Test, Correlated Observations, Maximum Undetectable Error, Robustness Analysis.

TEŞEKKÜR

Akademik hayata adım atmama vesile olan danışman hocam Prof. Dr. Cevat İNAL'a sağlamış olduğu katkılardan dolayı teşekkür ederim.

Kendisiyle bana Amerika Birleşik Devletlerinde çalışma imkanı veren çok sevdiğim hocam Dr. Mustafa Berber'e ve eşi Duygu Çetin Berber'e minnettarım. Mustafa hocamın vermiş olduğu destekle ve onun yanında yaptığım çalışmalarla bu tezin içeriği gelişmiştir.

Florida Atlantik Üniversitesindeki çalışmalarım boyunca bana hiç yabancılık çektirmeyen üniversite çalışanları Dr. Donald Leone, Ashley Morgan, Loren Gibson ve Dr. Christina Plattner'a teşekkür ederim.

Yardımları için araştırma görevlisi arkadaşlarım Serkan Doğanalp, Osman S. Kırtıloğlu ve Mustafa Zeybek´e çok teşekkür ederim.

Yurtdışı çalışmalarımı yapabilmeme katkı sağlayan değerli hocalarım Prof. Dr. Şefik Bilir ve Doç. Dr. Aydın Üstün´e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) sağlamış oldukları Yurt Dışı Araştırma Bursu için teşekkür ederim.

Son olarak gösterdikleri sabır ve destek için aileme teşekkür ederim.

Mevlüt YETKİN
KONYA-2012

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ ..... **i**

ÖZET ..... **ii**

ABSTRACT ..... **iii**

TEŞEKKÜR ..... **iv**

İÇİNDEKİLER ..... **v**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **vii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Literatür Taraması 4
1.2. Tezin Amacı 6
1.3. Tezin Ana Hatları 7

2. İSTATİSTİKSEL TESTLER **9**

2.1. Gauss-Markov Modeli 9
2.2. Global Model Testi 9
2.3. Uyuşumsuz Ölçüler Testi 10
2.4. İstatistiksel Test Yaklaşımları 12
2.4.1. Out-of-Context Yaklaşımı 12
2.4.2. In-Context Yaklaşımı 12
2.4.2.1. Baarda yöntemi 12

3. GÜVENİRLİK TEORİSİ **15**

3.1. Jeodezik Ağların Güvenirliği 15
3.2. Redundans Sayıları 16
3.3. İç Güvenirlik 17
3.4. Dış Güvenirlik 18
3.5. Çoklu Uyuşumsuz Ölçüler İçin Dış Güvenirlik Ölçütü 18
3.6. Robust Kestirim 19

4. ROBUSTLUK ANALİZİ **21**

4.1. 3D Ağların Robustluk Analizi 21
4.2. Ötelemelerin Hesaplanması 24
4.3. 3D Ağlar İçin Başlangıç Koşullarının Hesaplanması 25
4.4. Robustluk Ölçütleri 29
4.5. Gerilme Değişmezleri 31
4.6. Robustluk Analizinde Singüler Durumlar 34
4.7. Korelasyonlu Gözlemler İçin Robustluk Analizi 35
4.8. Çoklu Uyuşumsuz Ölçüler İçin Robustluk Analizi 36
4.9. Eşik Değerler 37

4.10. Robustluk Analizi İşlem Adımları 38

5. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA 40

5.1. Uygulama I 43
5.2. Uygulama II 44
5.3. Uygulama III 50
5.4. Uygulama IV 53
5.5. Uygulama V 54
5.6. Uygulama VI 54
5.7. Tartışma 57

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 60

6.1. Sonuçlar 60
6.2. Öneriler 63

KAYNAKLAR 65

EKLER 69

EK A. 2D Ağların Robustluk Analizi 69
EK B. FAUNet Ağına Ait Veriler 73
EK C. Gerilme Matrisinin Hesaplanmasına İlişkin Örnek 74

ÖZGEÇMİŞ 75

SİMGELER VE KISALTMALAR

SİMGELER

$\mathbf{A}$: Tasarım matrisi
d_i : Öteleme
d_{ij} : Bağıl öteleme
$\mathbf{E}$: Gerilme matrisi
$\mathbf{H}$: Uyuşumsuz ölçü matrisi
$\mathbf{I}$: Birim matris
I_1, I_2, I_3 : Temel gerilme değişmezleri
Δl_i : Maksimum belirlenemeyen hata
$\bar{\bar{\Delta}} l_i$: Maksimum belirlenemeyen hata (korelasyonlu gözlemler için)
M : Maksimum kesme gerilmesi (3D)
$\mathbf{P}$: Ağırlık matrisi
p_{ii} : Ağırlık matrisinin i. köşegen elemanı (korelasyonlu durum)
$\mathbf{Q}$: Ters ağırlık matrisi
$\mathbf{Q_v}$: Düzeltmelerin kofaktör matrisi
$\mathbf{R}$: Redundans matrisi
r_i : i. ölçünün redundans sayısı
$\bar{r}_i$: i. ölçünün güvenirlik sayısı
$\bar{\bar{r}}_i$: i. ölçünün normalleştirilmiş güvenirlik sayısı
$\mathbf{S}$: Gerilme matrisinin simetrik kısmı
u : x yönündeki öteleme
v : y yönündeki öteleme
w : z yönündeki öteleme
$\Delta\mathbf{x}$: Dış güvenirlik
X_0, Y_0, Z_0 : Başlangıç koşulları
X_i, Y_i, Z_i : Koordinatlar
α : 1. tip hata olasılığı
β : 2. tip hata olasılığı
γ : Toplam kesme
$\sqrt{\lambda_0}$: Dış merkezlik parametresi
μ : Maksimum kesme gerilmesi (2D)
σ : Dilatasyon
σ_{l_i} : *i.* ölçünün standart sapması
$\bar{\rho}_i$: *i.* ölçünün çoklu korelasyon katsayısı
θ : Uyuşumsuz ölçü sayısı
τ : Saf kesme
υ : Basit kesme
ω : Diferansiyel kesme
Γ : Toplam kesme (3D)
Σ : Dilatasyon değişmezi (3D)
Ω : Diferansiyel dönme değişmezi (3D)

KISALTMALAR

m	: metre
mm	: milimetre
ppm	: parts per million
ABD	: Amerika Birleşik Devletleri
CORS	: Continiously Operating Reference Stations
CORSGL	: Continiously Operating Reference Stations Great Lakes
EKKY	: En Küçük Kareler Yöntemi
FAU	: Florida Atlantic University
FAUNet	: Florida Atlantic University Network
GNSS	: Global Navigation Satellite System
GPS	: Global Positioning System
ITRF	: International Terrestrial Reference Frame
LGO	: Leica Geo Office
MBH	: Maksimum Belirlenemeyen Hata
NGS	: National Geodetic Survey
TUSAGA	: Türkiye Ulusal Sabit GPS Ağı
TÜBİTAK	: Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

1. GİRİŞ

Harita üretimi, mühendislik ölçmeleri ve coğrafi bilgi sistemleri gibi geomatik mühendisliği uygulamalarında ilk yapılan işlemlerden birisi yatay/düşey kontrol noktalarından oluşan ağlar kurmaktır. Klasik olarak trilaterasyon veya nivelman gibi tekniklerle ölçülen ağların yerini GNSS teknolojisi başta olmak üzere uydu jeodezisi yöntemleriyle ölçülen ağlar almaktadır. NAVSTAR GPS (ABD), GLONASS (Rusya), Compass Navigasyon sistemi (Çin) ve Galileo konum belirleme sistemi (Avrupa Birliği) başlıca küresel navigasyon uydu sistemleri olarak sayılabilir. Son zamanlarda ABD´de NGS (National Geodetic Survey) kurumu diğer başka kuruluşlarla işbirliği yaparak ulusal CORS (Continiously Operating Reference Station) ağı adı verilen bir sistemin oluşturulmasını sağlamıştır. Kasım 2011 itibari ile CORS ağı 1800´den fazla istasyondan oluşmaktadır. Bu istasyonlar yüksek bir doğruluk ile kendi konum bilgilerine sahip oldukları gibi sürekli olarak GPS verisi toplayan alıcılar ile donatılmışlardır. Toplanan GPS verilerine internet üzerinden erişilebilmektedir. Baz istasyon verisi olarak kullanılabilen bu bilgi CORS istasyonu çevresinde faaliyet gösteren gezici alıcıları desteklemek için kullanılmaktadır. NGS tarafından yürütülen CORS ağı ABD´de üç boyutlu konum belirleme, meteoroloji, uzay ve jeofizik çalışmaları gibi pek çok uygulamaya imkan sağlamak üzere gerekli taşıyıcı faz ve kod ölçülerini sağlayan istasyonlardan oluşmaktadır. Türkiye´de ise İstanbul Kültür Üniversitesinin yürüttüğü TÜBİTAK destekli bir proje çerçevesinde kurulan ağa TUSAGA-Aktif (Türkiye Ulusal Sabit GPS İstasyonları Ağı) veya CORS-TR adı verilmektedir. Bu projeye Harita Genel Komutanlığı ve Tapu Kadastro Genel Müdürlüğü müşteri kurum olarak katılmışlardır.

İster klasik isterse GNSS (GPS) teknikleriyle ölçülmüş olsun jeodezik ölçüleri etkileyen hatalar rasgele hatalar, kaba hatalar ve sistematik hatalar olarak sınıflandırılmaktadır. Bütün teknolojik gelişmelere ve harcanan efora rağmen hatalar ölçüleri kaçınılmaz bir şekilde etkilemektedir. Bu yüzden üretilen harita bilgilerinin güvenilirliği ve bunların sonucunda sağlanacak teknik hizmetlerin kalitesi tam ve doğru bir hata analizi ile sağlanabilir.

Gözlemleri etkileyen hatalar üç farklı nedenden ileri gelmektedir. Bu nedenle doğal hatalar, aletsel hatalar ve kişisel hatalar olarak bir sınıflandırma yapmak mümkündür. Rüzgar, sıcaklık, nem, atmosferik basınç, atmosferik refraksiyon, gravite ve manyetik deklinasyon gibi nedenler ile oluşan hatalar doğal hatalar olarak

adlandırılmaktadır. Aletlerdeki yapı ve denge kusurları ile aletleri oluşturan parçaların hareketleri de hatalara yol açabilmektedir. İnsan duyu organlarındaki sınırlar da kişisel hataların nedenleridir (Ghilani ve Wolf 2008).

Ölçü sırasında genellikle dikkatsizlik sonucu yapılan büyük miktarlı hatalar kaba hatalar (uyuşumsuz ölçüler) olarak adlandırılmaktadır. Daha özenli ölçüler yaparak veya kontrollü ölçü tekrarları ile bu hatalar ortadan kaldırılabilmektedir. En küçük kareler yönteminin (EKKY) yayma etkisi nedeniyle uyuşumsuz ölçü belirleme yöntemlerinin başarısı önemli oranda azaldığı için bu hataların mümkün olduğunca dengelemeden önce elemine edilmesi gerekmektedir. Dengeleme hesabı sonucunda elde edilen düzeltmelerin istatistiksel olarak analiz edilmesiyle kaba hatalı ölçüler ortaya çıkartılabilir. Bu noktada istatistiksel test yöntemleri ve robust (sağlam) kestirim yöntemleri olmak üzere iki farklı yaklaşımdan yararlanılır. Baarda yöntemi (global test ve data snooping) ve Pope testi en yaygın test yöntemleridir (Leick 2004). Öte yandan çok sayıda M-kestirim yöntemi ile L_1 norm minimizasyonu ve işaret zorlamalı robust en küçük kareler kestiricisi başta olmak üzere robust kestirim yöntemleri jeodezik ağlara uygulanmıştır. Normal dağılım teorisine göre büyük miktarlı rasgele hatalar yapma olasılığı düşük olduğu için bu tip hatalar kaba hata sayılır ve bunlar robust yöntemlerle etkisiz hale getirilebilir. Ayrıca bozucu yayma etkisi açısından robust yöntemler EKKY´ne göre daha avantajlı olabilmektedir (Baselga 2007).

Çeşitli aletsel hatalar veya çevresel faktörler nedeniyle oluşabilen ve ölçüleri aynı büyüklük ve aynı işaretle aynı yönde etkileyen kümülatif hatalara sistematik hatalar denilmektedir. Sistematik hatalar belirli fiziksel kurallara göre oluştukları için tahmin edilebilirler. Bu bağlamda alet kalibrasyonları önem kazanmaktadır. Ayrıca uygun ölçü ve hesap metotları tercih edilmelidir. Bias olarak ta bilinen sistematik hata çevre, alet ve gözlemci faktörleri nedeniyle oluşur. Bu üç faktörün oluşturduğu ölçme sistemi koşulları sabit kaldığı sürece sistematik hatalar da sabit kalmaktadır. Aksi takdirde sistematik hataların büyüklükleri de değişmektedir (Ghilani ve Wolf 2008).

Bütün kaba ve sistematik hatalar belirlenip düzeltildikten sonra ölçü ile gerçek değer arasında presizyon deyimi ile ifade edilebilecek küçük miktarlı sapmalar söz konusu olacaktır. Bunun sebebi rasgele hatalardır. Herhangi bir fiziksel kurala uymayan ve ancak matematiksel olasılık yasalarıyla yorumlanabilecek bu hatalar stokastik değişkenlerdir. Ölçülerin doğruluğu kaba ve sistematik hataları elemine ederek arttırılabilir. Presizyonlu ölçüler ise daha küçük rasgele hatalar demektir. Ölçüleri

sadece rasgele hatalar etkilediğinde doğruluk ve presizyon terimleri birbirlerinin yerinin alabilir (Kuang 1996).

Jeodezik ağlar kurulup gerekli ölçüler yapıldıktan sonra nokta koordinatları EKKY ile hesaplanır. EKKY´nin en önemli avantajlarından birisi dengelemeden sonra sonuçların istatistiksel olarak analiz edilebilmesine imkan sağlamasıdır. Ağ sonuçları presizyon veya kovaryans analizi ile elde edilen ölçütlerle rasgele hataların yayılımı yönünden irdelenebilir. Buna ek olarak kaba ve sistematik hataların sonuçların doğruluğu açısından önemi büyüktür. Maksimum Belirlenemeyen Hatalar (MBH) - Baarda yöntemi ile uyuşumsuz ölçü belirleme işlemi yapılmışsa- kolaylıkla hesaplanabilir. Güvenirlik analizi ile MBH değerleri her bir ölçü için elde edilir. Ayrıca bunların ağ sonuçları üzerindeki etkileri de yine güvenirlik analizi (dış güvenirlik) ile ortaya konur (Kuang 1996).

Güvenirlik analizinde redundans sayıları korelasyonlu ve korelasyonsuz gözlemler için farklı şekillerde hesaplanır. GPS ağları gibi korelasyonlu gözlemlerin olduğu ağlarda normalleştirilmiş güvenirlik sayıları kullanılabilir (Schaffrin 1997). Dolayısıyla korelasyonlu durumda MBH değerlerinin hesabında kullanılan eşitlik farklıdır. (MBH)´ların ağ sonuçları üzerindeki etkisi ise her iki durumda da EKKY prensibine göre tahmin edilir. Öte yandan Baarda tarafından sunulan klasik güvenirlik ölçütleri tek bir uyuşumsuz ölçüye dayalı olarak geliştirilmiştir. Diğer bir deyişle ağda bir tek kaba hatalı ölçü olduğu varsayılır. Ancak çoğu kez ağda birden çok belirlenememiş uyuşumsuz ölçünün olabileceği açıktır. Öyleyse çoklu uyuşumsuz ölçülere uygun güvenirlik ölçütleri kullanılmalıdır (Knight ve ark. 2010). Bu iki durum robustluk analizi sonuçlarını da etkileyecektir. Güvenirlik analizinde dikkat edilmesi gereken bir başka konu istatistiksel testleri yaparken uygun 1. tip ve 2. tip hata olasılıklarının seçilmesidir. İstatistiksel test ile uyuşumsuz ölçü araştırması yaparken iyi bir ölçünün kaba hatalı olarak belirlenmesi olasılığı α ile gösterilir. Uyuşumsuz bir ölçünün iyi bir ölçü olarak değerlendirilmesi olasılığı ise β ile belirtilir. İstatistiksel testteki 2. tip hata robustluk analizi açısından oldukça önemlidir. Doğru karar verme olasılıkları ise sırasıyla $1-\alpha$ ve $1-\beta$´dır (Vaníček ve Krakiwsky 1986). Seçilen hata olasılığı değerleri dış merkezlik parametresi ile MBH değerlerini ve robustluk analizi sonuçlarını doğrudan etkileyecektir. Buna ek olarak jeodezik ağlarda istatistiksel test ile uyuşumsuz ölçü belirleme ve yerelleştirme işlemi yaparken uygulanan yaklaşımında (in-context ve out-of-context yaklaşımları) ağ robustluğu üzerinde etkisi olabilir.

Baarda´nın klasik güvenirlik analizinde ağ datumuna bağlı ölçütlerin kullanılması, analiz sonuçlarının yorumlanmasında karşılaşılan güçlükler ve noktasal bazda analiz yapma imkanının olmayışı robustluk analizi adı verilen farklı bir yöntemin geliştirilmesine yol açmıştır. Bu yöntemde MBH´ların etkisi gerilme tekniğini kullanan geometrik güç analizi ile belirlenmektedir. Söz konusu etki ağda sanal bir deformasyon olarak değerlendirilir. Robustluk analizi güvenirlik analizi ile gerilme tekniğini kullanan geometrik güç analizinin bir birleşimidir ve belirlenemeyen hataların etkilerinin analizinde kullanılan güçlü bir yöntemdir. Robustluk analizi yöntemiyle sayısal olarak noktasal bazda ötelemeler, robustluk ölçütleri ve gerilme değişmezleri adı verilen değerler elde edilir (Berber 2006). Bu değerlerin büyüklükleri ağın geometrisine, gözlemlerin doğruluğuna ve güvenirlik analizi sonuçlarına bağlıdır. O halde nokta ve baz sayısı, gözlemlerin presizyonu, gözlemler arasındaki korelasyonların dikkate alınıp alınmaması, α ve β için seçilen değerler, kullanılan test yaklaşımı (in-context ve out-of-context yaklaşımları) ve belirlenemeyen hataların sayısı robustluk analizi sonuçlarını önemli derecede etkilemelidir.

1.1. Literatür Taraması

Baarda (1967) jeodezide istatistiksel kavramlar üzerinde durmuştur. Baarda (1968) jeodezik ağların güvenirlik analizi ve istatistiksel test yöntemleri ile uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi konularının temellerini atmıştır. Data snooping yöntemiyle kaba hataların yerelleştirilmesi konusu ve Baarda yönteminin çoklu uyuşumsuz ölçülere genelleştirilmesi Kok (1984)´de incelenmiştir. Kuang (1996) jeodezik ağların ölçülmesiyle elde edilen dataların işlenmesi, analiz edilmesi ve ağ optimizasyonu ile ilgili temel bilgileri içermektedir. Schaffrin (1997) Baarda´nın güvenirlik ölçütlerini korelasyonlu gözlemlere uyarlamıştır. Böylece GPS ağları gibi korelasyonlu gözlemlerin olabileceği ağlarda güvenirlik analizi yapılabilir hale gelmiştir. Bilindiği gibi GPS baz vektör bileşenleri korelasyonlu olmaktadır. Korelasyonlu gözlemler durumunda güvenirlik analizi Chen ve Wang (1996) tarafından da ele alınmıştır. Öte yandan Knight ve ark. (2010) Baarda´nın tekli uyuşumsuz ölçüler için geliştirilen geleneksel güvenirlik ölçütlerinin çoklu uyuşumsuz ölçülere genelleştirilmesi konusunu ele almaktadır. Ding ve Coleman (1996) gözlemlerin redundans katkılarını değerlendirerek çoklu uyuşumsuz ölçüler testinin etkisini arttırmıştır. GNSS baz ve ağ prosesinde güvenirlik kontrolü konusu Wieser (2004) tarafından araştırılmıştır.

Huber (1964) ile birlikte robust kestirim yöntemleri gerek istatistik gerekse jeodezi literatüründe yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır. Krarup ve ark. (1980); Jørgensen ve ark. (1985); Hekimoğlu (1998); Wieser ve Brunner (2002); Yang ve ark. (2002); Berber ve Hekimoğlu (2003); Hekimoğlu ve Berber (2003); Simkooei (2003); Hekimoğlu ve Erenoğlu (2007); Knight ve Wang (2009); Yetkin ve İnal (2010) ve Yetkin ve İnal (2011) ile robust kestirim yöntemleri jeodezik ağlarda uygulanmıştır. Wieser (2002) robust yöntemlerle parametre kestirimi ve kalite kontrolü konularına bulanık mantık tekniklerini de katarak GPS uygulamaları üzerinde durmuştur. Guo ve ark. (2010) gözlemler arasındaki korelasyonları da dikkate alarak uniform olarak en güçlü test istatistikleri yardımıyla yeniden ağırlıklandırma yapmak suretiyle robust parametre kestiriminin gerçekleştirilmesi konusunu ele almaktadır.

Gerilme tekniğini kullanarak bir jeodezik ağın gücünün analiz edilmesi ile ilgili ilk çalışma New Brunswick Üniversitesinde Thapa (1980) tarafından yapılmıştır. Ardından Vaníček ve ark. (1981), Dare ve Vaníček (1982) ve Dare (1983) ile çalışmalar devam etmiştir. Vaníček ve ark. (1991) güvenirlik analizi ile geometrik güç analizini birleştirerek robustluk analizi yöntemini geliştirmiş ve klasik jeodezik ağlarda uygulamalar yapmıştır. Bu çalışmada ayrıca kovaryans analizi üzerinde de durulmuş ve ismi geçen analiz tekniklerinin bir karşılaştırılması verilmiştir. Robustluk analizi ile ilgili çalışmalar Ong (1993) ile devam etmiştir. Vaníček ve ark. (1996) büyük ağlarda yapılan uygulamaları içermektedir. Krakiwsky ve ark. (1993) istatistik testler için seçilen olasılık seviyelerinin MBH´ların dış merkezlik parametrelerindeki rolünü irdelemiştir. Ayrıca robustluk analizinin uygulamalarında karşılaşılabilecek özel problemler üzerinde durulmuştur. Vaníček ve ark. (2001) yatay kontrol ağlarının robustluk analizi ile ilgili uygulamalara değinmiştir. Robustluk ölçütlerinin 2D ağlarda değişmez (invariant) olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca robustluk analizinin kovaryans analizine olan üstünlüğü de gösterilmiştir. Vaníček ve ark. (2008) 3D ağlar için gerilme değişmezleri tanımlamış ve bunların 2D ağlardaki gerilme değişmezleri ile olan ilişkisine yer vermiştir. Krumm ve Grafarend (2002) ise gerilme değişmezlerini deformasyon analizine uygulamış ve datumdan bağımsız deformasyon ölçütleri kullanmışlardır. Gerilme değişmezlerinin kullanılmasının sebebi sadece ağın şekli ve gözlemlerin doğruluğuna bağlı olarak koordinat sistemi tanımından bağımsız bir robustluk tanımlaması yapmaktır.

3D ve 1D ağların robustluk analizi Berber (2006) tarafından ele alınmıştır. Üçüncü boyutun neden olduğu problemler belirtilmiştir. 2D ve 3D ağlar için eşik

değerler, 1D, 2D ve 3D ağlarda başlangıç koşullarının belirlenmesi, mutlak ve bağıl ötelemelerin hesaplanması, 3D ağlarda gerilme değişmezlerinin hesaplanması ve ağların robustlaştırılması Berber (2006)´da ele alınmıştır. Berber (2006) ayrıca robustluk ölçütlerinin 2D ağlarda değişmez olduğunu göstermiştir. 2D ve 3D ağlardaki gerilme değişmezleri arasındaki ilişki de Berber (2006) tarafından ele alınmıştır.

Berber (2008) jeodezik ağlarda hata analizi konularını EKKY, istatistiksel testler, robust kestirim ve robustluk analizi başlıkları altında ele almaktadır. Berber ve ark. (2008) ise kovaryans analizi, gerilme analizi, güvenirlik analizi, robustluk analizi ve güç analizi konularını incelemektedir. Robustluk analizi ile ilgili olarak hazırlanmış bazı makaleler Berber ve ark. (2006) ve Berber ve ark. (2009)´dur.

1.2. Tezin Amacı

Tez çalışmasının temel amacı robustluk analizi yönteminin GNSS ağlarına uygulanabilirliğinin incelenmesidir. Uygulamada özellikle deformasyon izleme amacı ile kurulan jeodezik ağlarda, belirlenemeyen hatalar yanlışlıkla deformasyon olarak yorumlanabildikleri için bu amaç doğrultusunda kurulan ağların gereken robustluğu sağlamaları gerekmektedir. Bu bakımdan robustluk analizi üzerinde durulması gereken bir konudur. Ayrıca robust kestirim ile bu tür hataların olumsuz etkisi azaltılabilir.

Bu tez çalışması ile belirlenemeyen hataların sayısının arttıkça robustluk analizi sonucu elde edilen gerilme değişmezleri değerlerinin büyüdüğünün gösterilmesi amaçlanmıştır. Daha büyük gerilme değişmezlerinin elde edilmesi ağın daha fazla deformasyona uğraması anlamına gelmektedir. Bu olumsuz durumu ortaya koyabilmesi robustluk analizinin güçlü bir yöntem olduğunu gösterecektir.

GPS ağları gibi korelasyonlu gözlemlerin olduğu ağlarda uygun güvenirlik ölçütlerinin kullanılmaması robustluk analizinde çok farklı ve doğal olarak yanlış sonuçların elde edilmesine yol açabilir. Geleneksel olarak pratikte gözlemler arasındaki korelasyonları dikkate almadan güvenirlik konusunu ele alınmaktadır. Oysa GPS ağlarında baz bileşenleri/bazlar arasında korelasyonlar söz konusudur. Bu nedenle güvenirlik analizi ve devamı olarak robustluk analizinde korelasyonlar dikkate alınmalıdır. Bu nedenle bu tez çalışması ile robustluk analizinin GNSS ağlarına gözlemler arasındaki korelasyonları dikkate alarak uygulanması hedeflenmiştir.

Bu tez çalışmasının amaçlarından bir tanesi korelasyonsuz ve korelasyonlu durumda elde edilen MBH değerleri arasında bir bağıntı çıkarmak ve bu bağıntının

robustluk analizi sonucu elde edilen değerler –söz gelimi öteleme değerleri- için de geçerli olduğu göstermektir.

Korelasyonlu gözlemlerin olduğu bir ağda Baarda´nın redundans sayıları yerine Schaffrin´in normalleştirilmiş redundans sayılarının robustluk analizinde kullanılması ve redundans sayıları gibi normalleştirilmiş güvenirlik sayılarının da ne kadar küçüklerse ağın robustluğunun o kadar kötü olduğunun gösterilmesi tez çalışması kapsamında ele alınan konulardan biridir.

İstatistiksel testler açısından küçük α ve β değerlerinin seçilmesi önemlidir. Yalnız bu durumda sıfır hipotezi ile alternatif hipotez arasındaki dış merkezlik parametresi artacağından MBH´ların değerleri de artacaktır. Bu nedenle robustluk analizi ile elde edilen gerilme değişmezleri daha büyük olur. GNSS ağlarında out-of-context yaklaşımı yerine in-context yaklaşımı kullanılırsa özellikle ölçü sayısı arttıkça aynı hata olasılık seviyelerine karşılık gelen dış merkezlik parametresi değeri büyüyeceği için istatistiksel test ile belirlenebilen hata değeri de artar. Bu da ağın robustluğunun azalmasına neden olur. Söz konusu rizikolu durumun bu çalışmada ortaya konulması hedeflenmiştir.

Nokta sayısı arttırılarak veya gözlemlerin presizyonu iyileştirilerek ağın robustluğu geliştirilebilir. Nokta sayısının arttırılması ölçü (bazlar) sayısını ve dolayısıyla ağın redundansını arttırdığı için daha küçük öteleme ve robustluk ölçütleri veya gerilme değişmezleri elde edilebilir. Ölçülmemiş eksik bazlar var ise sistematik biasların olumsuz etkisi ağı daha fazla etkileyecektir. Öte yandan gözlemlerin doğruluğu arttırılarak robustluk analizi sonuçları daha olumlu hale getirilebilir. Baz bileşenlerinin standart sapmaları ne kadar küçük olursa robustluğun da o kadar iyi olacağı bu tez çalışmasıyla ortaya konulmaya çalışılmıştır. Ayrıca, eğer bir ağda bütün noktalar birbirlerine gözlemlerle bağlıysa robustluk değerleri (robustluk ölçütleri, değişmezler ve ötelemeler) bütün noktalarda aynıdır. Çünkü bu durumda bütün noktaların gerilme matrisi birbirinin aynıdır. Bahsedilen hususlar bu tez çalışması kapsamında ele alınmıştır.

1.3. Tezin Ana Hatları

Tez Giriş bölümü ile birlikte 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm Giriş bölümüdür.

İkinci bölümde Gauss-Markov modeli hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca istatistiksel test yaklaşımları ele alınmıştır. Jeodezik ağlarda kullanılan out-of-context yaklaşımı ile in-context yaklaşımı incelenmiştir. En önemli in-context yaklaşımı olan Baarda yöntemi üzerinde durulmuştur. Bu bölümde global model testi ve uyuşumsuz ölçüler testi konularına da tekli ve çoklu uyuşumsuz ölçüler durumlarına göre değinilmiştir.

Üçüncü bölümde güvenirlik analizinin genel bir incelemesi verilmiştir. İç ve dış güvenirlik ölçütleri, redundans sayıları, güvenirlik sayıları, normalleştirilmiş güvenirlik sayıları, korelasyonlu ölçüler için güvenirlik ölçütleri, çoklu uyuşumsuz ölçüler için dış güvenirlik ölçütü ve robust kestirim konuları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde robustluk analizinin GNSS ağları gibi 3D ağlara uygulanması üzerinde durulmuştur. Gerilme matrisinin elde edilmesi, başlangıç koşullarının, ötelemelerin, robustluk ölçütlerinin, gerilme değişmezlerinin ve eşik değerlerin hesaplanması açıklanmıştır. Robustluk analizi uygulanırken izlenecek işlem adımları verilmiştir. Robustluk analizinde karşılaşılabilen bazı problemli durumlardan bahsedilmiştir. Ayrıca korelasyonlu gözlemler ile belirlenememiş çoklu uyuşumsuz ölçüler durumlarında robustluk analizinin uygulanması konularına değinilmiştir.

Beşinci bölüm sayısal uygulamaları sunmaktadır. Robustluk analizi biri ABD´deki CORS istasyonlarından oluşan bir ağ, diğeri de ABD´de FAU Treasure Coast Kampüsünde kurulan bir ağ olmak üzere 2 adet gerçek GNSS ağına uygulanmıştır. Robust parametre kestiriminin GNSS ağlarına uygulanması da sayısal bir uygulama ile gösterilmiştir. Ayrıca bir tartışma bölümü eklenmiştir.

Altıncı bölümde tez çalışması ile elde edilen sonuçlar ve öneriler yer almaktadır.

EK-A 2D ağların robustluk analizini göstermektedir. 2D ağlarda gerilme matrisinin elde edilmesi, başlangıç koşularının hesaplanması, robustluk ölçütleri ve ötelemeler üzerinde durulmuştur. EK-B FAUNet ağına ait verileri, EK-C ise bir GPS istasyonunda gerilme matrisinin elde edilmesini göstermektedir.

2. İSTATİSTİKSEL TESTLER

2.1. Gauss-Markov Modeli

GNSS ağları da dahil olmak üzere EKKY´ne dayalı parametre kestiriminde kullanılan model Gauss-Markov modelidir (Koch 1999). Gauss Markov modeli EKKY ile dengeleme hesabı ve ardından yapılan uyuşumsuz ölçü testi, robust kestirim, güvenirlik analizi ve robustluk analizinin de temelini oluşturmaktadır.

Doğrusal veya doğrusal hale getirilmiş Gauss-Markov modeli

$$\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{l};\ \mathrm{E}(\mathbf{v})=0 \tag{2.1}$$

şeklinde verilir. **v** düzeltmeler vektörü; **A** $n\times u$ boyutlu ve rankı u olan tasarım matrisi; **l** $n\times 1$ boyutlu ölçüler vektörü; **x** $u\times 1$ boyutlu parametre vektörü; $\mathrm{E}(\cdot)$ beklenen değer operatörüdür. $n\times n$ boyutlu ve pozitif tanımlı varyans-kovaryans matrisi **Σ**

$$D(\mathbf{l})=\mathbf{\Sigma}=\sigma_0^2\mathbf{Q}=\sigma_0^2\mathbf{P}^{-1} \tag{2.2}$$

ile verilir. Burada σ_0^2 önsel varyans faktörü, **P** ağırlık matrisi, **Q** ters ağırlık matrisidir, $D(\cdot)$ kovaryans operatörüdür.

EKKY uygulandıktan sonra kalite kontrolü amacıyla gözlemler incelenir. EKKY ile dengeleme hesabında gözlemlerin normal dağılımda olduğu, gözlemleri kaba ve sistematik hataların etkilemediği ve sadece rasgele hataların söz konusu olduğu varsayılır. Bununla birlikte gözlemler çoğu kez hatalarla yüklü olmakta ve uyuşumsuz ölçüler sonuçları olumsuz bir şekilde etkileyebilmektedir. Bu nedenle EKKY sonuçlarını kullanmadan önce gözlemlerin ve matematiksel modelin istatistiksel olarak incelenmesi gerekir.

2.2. Global Model Testi

Ölçüler ile fonksiyonel ve stokastik model uyuşmazlıkları global model testi ile belirlenebilir. Diğer bir deyişle global model testi uyuşumsuz ölçüleri belirlemek için yapılabilir.

Söz konusu test önsel ve sonsal varyans faktörleri üzerine yapılır. f serbestlik derecesi $(f \geq 1)$ ve $\mathrm{E}\{\cdot\}$ istatistiksel beklenen değer operatörü olmak üzere sıfır hipotezi ve alternatif hipotez

$$\mathrm{H}_0: \mathrm{E}\{f\hat{\sigma}_0^2/\sigma_0^2\} = f \tag{2.3}$$

$$\mathrm{H}_a: \mathrm{E}\{f\hat{\sigma}_0^2/\sigma_0^2\} \neq f \tag{2.4}$$

şeklinde yazılır.

α_g anlamlılık seviyeli global model testinde merkezi olmayan Ki-kare dağılımlı test istatistiği

$$\frac{f\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{\sigma_0^2} = \frac{\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{P}\mathbf{l}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{1-\alpha_g,f} \tag{2.5}$$

olarak verilmektedir. Global model test istatistiğinde geçen düzeltmelerin kofaktör matrisi $\mathbf{Q_v}$

$$\mathbf{Q_v} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} \tag{2.6}$$

eşitliği ile elde edilir. (Knight ve ark. 2010).

2.3. Uyuşumsuz Ölçüler Testi

Global model testinden sonra kaba hataları yerelleştirmek için uyuşumsuz ölçüler testi yapılır. Baarda yaklaşımında bu test data snooping olarak adlandırılır. Uyuşumsuz ölçüler testini yapabilmek için

$$1 \leq \theta \leq f \tag{2.7}$$

eşitliği sağlanmış olmalıdır. θ uyuşumsuz ölçü sayısıdır.

Uyuşumsuz ölçü testi için sıfır ve alternatif hipotezler ise sırasıyla

$$\mathrm{H}_0: \mathrm{E}\{\hat{\mathbf{z}}\} = 0 \tag{2.8}$$

$$\mathrm{H}_a: \mathrm{E}\{\hat{\mathbf{z}}\} \neq 0 \tag{2.9}$$

olarak yazılır (Knight ve ark. 2010).

Uyuşumsuz ölçüler testi ortalama öteleme modelinden elde edilmektedir (Kok 1984):

$$\mathbf{v} = [\mathbf{A} \quad \mathbf{H}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} - \mathbf{l}; \mathrm{E}\{\mathbf{l}\} = 0 \tag{2.10}$$

Ortalama öteleme modelinden **z** uyuşumsuz ölçüler vektörü

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{P}\mathbf{l} \tag{2.11}$$

denklemi ile kestirilir. **H** (n×θ) boyutlu sıfırlardan oluşan bir matristir. Sadece uyuşumsuz ölçü olduğu varsayılan ölçülere karşılık gelen elemanları birdir. $\hat{\mathbf{z}}$ uyuşumsuz ölçü vektörünün kestiriminin varyans-kovaryans matrisi

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}} = \sigma_0^2(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1} \tag{2.12}$$

eşitliği ile hesaplanır.

α_{w^2} anlamlılık seviyeli uyuşumsuz ölçü testinde kullanılan test istatistiği

$$w^2 = \hat{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{-1}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{P}\mathbf{H}(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{P}\mathbf{l}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{1-\alpha_{w^2},\theta} \tag{2.13}$$

şeklinde yazılabilir. **H** matrisi uygun bir şekilde oluşturularak uyuşumsuz ölçü testi tekli veya çoklu uyuşumsuz ölçüler için uygulanabilir hale getirirlir. **H** matrisinin $\binom{n}{\theta}$ kadar kombinasyonu vardır. Bu nedenle w^2 test istatistiğinden de $\binom{n}{\theta}$ kadar hesaplanır. Yinelemeli olarak uygulanan uyuşumsuz ölçü testinde her defasında en büyük w^2 değerini veren ölçü veya ölçülerden şüphelenilir. Test istatistiklerinden birisi tablo değerini aşarsa bir veya daha fazla ölçünün uyuşumsuz olduğuna karar verilir (Knight ve ark. 2010).

2.4. İstatistiksel Test Yaklaşımları

Ölçüler out-of-context ve in-context yaklaşımları olarak iki farklı şekilde test edilebilir. Out-of-context yaklaşımında istatistiksel test geri kalan data dikkate alınmaksızın bir parça data üzerinde yapılır. In-context yaklaşımda ise bir nicelik daha büyük bir setin üyesi olarak test edilmektedir. İki yaklaşımın en büyük farkı lokal test (data snooping) için anlamlılık düzeyinin (α_0) değişik şekillerde seçilmesidir. Bu durum lokal güven bölgelerinin anlamlılık düzeyleri için de geçerlidir (Krakiwsky ve ark. 1999; Berber 2008). Farklı test yaklaşımlarının kullanılması güvenirlik analizi sonuçlarını doğrudan etkilemektedir. O halde tercih edilen test yaklaşımı ile robustluk analizi sonuçları arasında önemli bir bağ vardır.

2.4.1. Out-of-Context Yaklaşımı

Bu yaklaşımın en önemli özelliği global ve lokal testler ile global ve lokal güven bölgelerinin aynı anlamlılık düzeylerini kullanmasıdır. Baarda metodunda global test ve data snooping (lokal test) için aynı anlamlılık düzeyinin kullanılması veya bütün ağ için hesaplanan güven bölgesi ile noktasal güven bölgeleri için aynı anlamlılık düzeylerinin seçilmesi buna örnek olarak verilebilir. Kısacası out-of context yaklaşımda $\alpha = \alpha_0$ eşitliği geçerlidir. α global anlamlılık düzeyi α_0 ise lokal anlamlılık düzeydir. Aynı zamanda $\beta = \beta_0$ ve $\lambda = \lambda_0$ alınır.

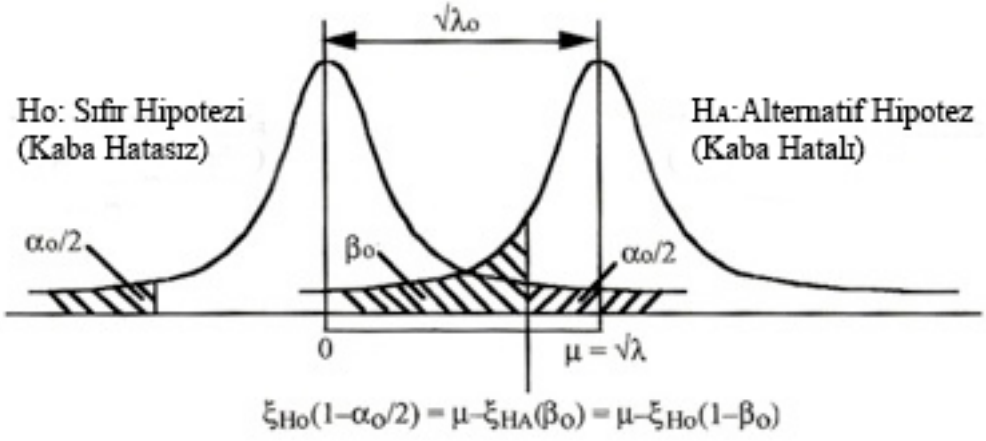
2.4.2. In-Context Yaklaşımı

In-context yaklaşımda global ve lokal anlamlılık düzeyleri birbirinden farklıdır. Global anlamlılık düzeyi seçildikten sonra Baarda yöntemi ile lokal anlamlılık düzeyleri belirlenebilir.

2.4.2.1. Baarda yöntemi

Baarda yöntemi seçilen bir global α değerine karşılık gelen lokal α_0 değerini belirlemeye çalışır. Bilindiği gibi bu yöntemde 1. tip hata (α_0) iyi bir ölçüyü uyuşumsuz olarak reddetme anlamına gelir. 2. tip hata ise (β_0) ise uyuşumsuz bir ölçünün iyi bir ölçü olarak kabul edilmesi anlamını taşımaktadır. Hata olasılıkları ile

sıfır hipotezi ve alternatif hipotezler arasındaki öteleme yani dış merkezlik parametresi arasında Şekil 2.1.´de gösterilen ilişki vardır.



Şekil 2.1. α_0, β_0 ve $\sqrt{\lambda_0}$ arasındaki ilişki (Vaníček ve ark. 2001)

Baarda yönteminde $\beta = \beta_0$ ve $\lambda = \lambda_0$ olarak alınır ve verilen global α ve β değerlerine göre dış merkezlik parametresi λ hesaplanır. α_0 değeri

$$\alpha_0 = \alpha/n \tag{2.14}$$

eşitliği ile hesaplanır. n redundans sayıları sıfırdan farklı (0.0001´den büyük) ölçü sayısıdır. Bu eşitliğe göre aynı global α değeri için in-context yaklaşımında out-of-context yaklaşımına göre lokal testte daha küçük α_0 değerinin kullanılacağı görülmektedir. Ancak bu durumda λ_0 değeri daha büyük olur. λ_0 ise α_0 ve β_0 değerlerine göre oluşturulmuş çizelgelerden belirlenebilir. Daha sonra ağın güvenirlik ve robustluk analizi yapılır. $\alpha = \%\,5$ için farklı β_0 kombinasyonlarına karşılık gelen λ_0 değerleri Çizelge 2.1.´de verilmektedir. Bir jeodezik ağda lokal test yaparken α_0 ve β_0 değerlerini kullanarak dış merkezlik parametresi λ_0

$$\lambda_0 = \xi_{1-\alpha_0/2} + \xi_{1-\beta_0} \tag{2.15}$$

formülü ile hesaplanır (Berber 2008).

Çizelge 2.1. Dış merkezlik parametresi değerleri (Berber 2008)

Ölçü sayısı	α_0	λ_0 $\beta_0 = \%\ 2.5$	λ_0 $\beta_0 = \%\ 5$	λ_0 $\beta_0 = \%\ 10$	λ_0 $\beta_0 = \%\ 20$
1	5.0	3.920	3.605	3.242	2.802
10	0.5	4.767	4.452	4.089	3.649
100	0.05	5.441	5.126	4.763	4.323
1000	0.005	6.016	5.701	5.338	4.898
10000	0.0005	6.525	6.210	5.847	5.407
100000	0.00005	6.990	6.675	6.312	5.872
1000000	0.000005	7.452	7.137	6.774	6.334

Berber (2006)´e göre robustluk analizinin konusu Baarda yöntemi (global test ve data snooping) ile belirlenemeyen hataların ağ üzerindeki etkisinin ölçülmesidir. Burada β_0 olasılığı önemlidir. Bu problem jeodezik ağlarda 2. tip hata problemi olarak bilinmektedir. Baarda yöntemi ile hatalı gözlemlerin her zaman belirlenemeyişinin 2 tane nedeni vardır: (i) gözlemin bağımsız diğer gözlemler tarafından yeterince kontrol edilmeyişi; ve, (ii) testin gücünün hatayı belirlemeye yetmemesi.

3. GÜVENİRLİK TEORİSİ

Bu bölümde jeodezik ağların güvenirlik analizi konusu hem korelasyonsuz hem de korelasyonlu gözlemler için incelenmiştir. Ayrıca güvenirlik teorisinde tekli ve çoklu uyuşumsuz ölçü durumları irdelenmiş ve güvenirlik ölçütlerine yer verilmiştir. Son olarak robust parametre kestiriminden bahsedilmiştir.

3.1. Jeodezik Ağların Güvenirliği

Uyuşumsuz ölçü belirleme işlemi jeodezik ağların robustluk analizinde önemli bir rol oynamaktadır. Fakat bir ağda uyuşumsuz ölçü testleri ile belirlenemeyen uyuşumsuz gözlemler olabilir. Test yönteminin uyuşumsuz ölçüleri fark edebilme yeteneği ağ geometrisine göre değişmektedir. Eğer bir gözlem hata ile yüklü ise bu hatanın etkisi ve test ile belirlenebilmesi ağın geometrisine bağlıdır. Örneğin bir gözlemin redundans sayısı sıfır ise bu gözlemde yapılmış olan kaba hata belirlenemez. Uyuşumsuz ölçülerin ne koşullarda belirlenebileceği güvenirlik teorisinin konusudur (Berber ve ark. 2008).

Ağın geometrisi, gözlemlerin doğruluğu ve hatanın büyüklüğü belirlenemeyen uyuşumsuz bir ölçünün ağdaki etkisini belirleyen faktörlerdir. Ayrıca uyuşumsuz bir ölçünün test yöntemi ile belirlenip belirlenemeyeceğini de yine aynı faktörler etkilemektedir. GPS ağlarında nokta ve baz sayısı ağın geometrisini oluştururken baz bileşenlerinin standart sapmaları gözlemlerin doğruluğunu belirlemektedir. Test ile belirlenebilecek hatanın büyüklüğü ise ağdaki uyuşumsuz ölçü sayısına ve güvenirlik analizini uygularken gözlemler arasındaki korelasyonların dikkate alınıp alınmamasına bağlıdır. Ağdaki uyuşumsuz ölçü sayısı birden fazla ise çoklu uyuşumsuz ölçüler için genelleştirilen güvenirlik ölçütleri kullanılmalıdır (Knight ve ark. 2010). Sözü geçen faktörler doğrudan robustluk analizi sonuçlarını etkilemektedir.

Jeodezik ağlarda kullanılmak üzere Baarda (1968) ile sunulan test yöntemi sonuç olarak güvenirlik teorisinin ortaya çıkmasına yol açmış ve ağ analizinde yaygın bir şekilde kullanılır hale gelmiştir. Esas itibariyle redundans matrisi ya da diğer bir ismiyle güvenirlik matrisi dengeleme hesabında küçültülmüş ölçüler ile ölçü düzeltmeleri arasında bir köprü görevi görmektedir (Kuang 1996):

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l} = -\mathbf{R}\mathbf{l} \tag{3.1}$$

burada $\hat{\mathbf{v}}$ düzeltmeler vektörü; $\hat{\mathbf{l}}$ dengelenmiş ölçüler vektörü; $\mathbf{l}$ ölçüler vektörü ve $\mathbf{R}$ güvenirlik (Redundans) matrisidir.

3.2. Redundans Sayıları

Korelasyonsuz gözlemler için redundans sayıları r_i,

$$\mathbf{R}=\mathbf{I}-\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} \tag{3.2}$$

eşitliği ile hesaplanan $\mathbf{R}$ redundans matrisinin köşegen elemanlarıdır ve toplamları ağın serbestlik derecesine eşittir. Eşitlikte $\mathbf{I}_{n\times n}$ birim matris; $\mathbf{A}_{n\times u}$ tasarım matrisi; $\mathbf{P}_{n\times n}$ ağırlık matrisidir. n ölçü sayısı u ise bilinmeyen sayısıdır. Redundans sayıları $0 \leq r_i \leq 1$ aralığındadırlar. Ancak gözlemler arasında korelasyonlar söz konusu olduğunda negatif veya birden büyük redundans sayıları ile karşılaşılabilir (Wang ve Chen 1994; Schaffrin 1997). Wang ve Chen (1994) tarafından korelasyonlu gözlemler için verilen genelleştirilmiş güvenirlik sayıları

$$\bar{r}_i = \mathbf{c}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{P}\mathbf{c}_i \tag{3.3}$$

eşitliği ile hesaplanır. Eşitlikte $\mathbf{c}_i$ i. elemanı bir diğer elemanları sıfır olan $n\times 1$ boyutlu bir vektördür. $\mathbf{Q}$ ters ağırlık matrisidir. Düzelmelerin kofaktör matrisi $\mathbf{Q}_{\mathbf{v}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ eşitliği ile hesaplanır. Genelleştirilmiş güvenirlik sayıları $0 \leq \bar{r}_i \leq \mathbf{c}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{c}_i$ aralığında yer almaktadırlar. Schaffrin (1997) tarafından sunulmuş olan normalleştirilmiş güvenirlik sayıları ise

$$\bar{\bar{r}}_i = \bar{r}_i(1-\bar{\rho}_i^2)^{-1} \tag{3.4}$$

eşitliği ile elde edilirler. Normalleştirilmiş güvenirlik sayıları $0 \leq \bar{\bar{r}}_i \leq 1$ aralığındadır. Bir gözlemin ağdaki diğer gözlemlerle arasında olan korelasyonu ifade eden çoklu korelasyon katsayıları

$$\bar{\rho}_i^2 = \mathbf{q}_{(i)}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{(ii)}^{-1}\mathbf{q}_{(i)}/q_{ii} \tag{3.5}$$

eşitliğinden gelmektedir ve $0 \leq \bar{\rho}_i^2 < 1$ aralığındadırlar. $(n-1)\times 1$ boyutlu $\mathbf{q}_{(i)}$, $\mathbf{Q}$ matrisinin q_{ii} elemine edildikten sonra elde edilen *i.* sütunudur. Benzer şekilde $(n-1)\times(n-1)$ boyutlu $\mathbf{Q}_{(ii)}$ matrisi $\mathbf{Q}$ matrisinden *i.* satır ve *i.* sütun elendikten sonra elde edilen matristir.

3.3. İç Güvenirlik

İç güvenirlik analizi seçilen bir α_0 anlamlılık düzeyinde data snooping yöntemiyle belirlenemeyen hataların maksimum değerlerinin belirlenmesini amaçlar. Bu değer ağdaki her bir ölçü için hesaplanır. Korelasyonsuz gözlemlerde

$$\Delta l_i = \sqrt{\lambda_0}\frac{\sigma_i}{r_i} \tag{3.6}$$

bağıntısı kullanılır (Baarda 1968). σ_i i. ölçünün standart sapmasıdır.

Eğer gözlemler arasındaki korelasyon dikkate alınırsa iç güvenirlik ölçütü

$$\bar{\bar{\Delta}} l_i = \frac{\delta_0 \sigma_0}{\sqrt{p_{ii}\bar{\bar{r}}_i}} \tag{3.7}$$

eşitliği ile hesaplanabilir (Schaffrin 1997). $\delta_0 = \sqrt{\lambda_0}$ ve p_{ii} ağırlık matrisinin ilgili köşegen elemanıdır. σ_0 birim ağırlıklı ölçünün standart sapmasıdır.

İç güvenirlik ölçütlerinin hesaplanmasında kullanılan dış merkezlik parametresi $\sqrt{\lambda_0}$ 1. ve 2. tip hata olasılıklarının bir fonksiyonudur. Bununla birlikte α_0 ve β_0 değerlerini belirlemek kolay değildir. Bu konu Krakiwsky ve ark. (1993) tarafından tartışılmıştır. Baarda $\alpha_0 = \%\,0.1$ değerini kullanmıştır. Fakat bu değerin in-context test yaklaşımında ölçü sayısı arttıkça gerçekleştirilmesi güçtür. Ayrıca makul bir α_0 değeri (söz gelimi $\%\,5$) için β_0 yüksek tutulmalıdır. Yüksek bir β_0 değeri de jeodezik uygulamalar için pratik değildir. $\alpha_0 = \%\,5$ ve $\beta_0 = \%\,5$ genel olarak tercih edilen değerlerdir. Öte yandan β_0 değeri istenildiği gibi değiştirilerek ötelemeler istenen bir seviyeye getirilebilir. Ancak yüksek güven $(1-\alpha_0)$ ve istatistiksel güç $(1-\beta_0)$ seviyeleri daha büyük dış merkezlik parametresine yol açar ve bu da aynı doğruluğu sağlamak için daha iyi bir ağ tasarımı ve redundans gerektirir. Bu da ağın maliyetini olumsuz yönde etkiler (Berber 2006).

3.4. Dış Güvenirlik

Dış güvenirlik ölçütü belirlenemeyen hataların bilinmeyen koordinatların kestirimleri üzerindeki olası etkileridir. İç güvenirlik analizinden gelen Δl_i değerleri ile dış güvenirlik ölçütü hem korelasyonlu hem de korelasyonsuz gözlemler için

$$\Delta \mathbf{x}_i = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{c}_i\Delta\mathbf{l} \tag{3.8}$$

formülüyle hesaplanır (Wieser 2002). $\mathbf{c}_i$ *i.* elamanı bir diğer elemanları sıfır olan bir vektör; $\mathbf{\Delta l}$ ise iç güvenirlik elemanlarından oluşan bir vektördür. Dış güvenirlik vektörü ölçü sayısı kadar hesaplanır. Dış güvenirlik ölçütünün en büyük dezavantajı ağın datumuna bağlı olması ve yorumlanmasının güç olmasıdır (Berber 2008).

3.5. Çoklu Uyuşumsuz Ölçüler İçin Dış Güvenirlik Ölçütü

Baarda (1968) ile geliştirilen güvenirlik teorisinin çoklu uyuşumsuz ölçülere genelleştirilmesi Knight ve ark. (2010) tarafından incelenmiştir. Adı geçen çalışmada belirlenemeyen uyuşumsuz ölçü sayısı arttıkça güvenirlik ölçütlerinin kötüleştiği gösterilmiştir. Çoklu uyuşumsuz ölçüler için uygun güvenirlik ölçütleri geliştirilirken gözlemler arasındaki korelasyonlar da dikkate alınmıştır. Çoklu uyuşumsuz ölçüler durumunda bir ölçünün maksimum iç güvenirliği veya bir parametrenin maksimum dış güvenirliği Rayleigh-Ritz teoremine göre elde edilmektedir. Robustluk analizi doğrudan dış güvenirlik ölçütünü kullandığı için burada çoklu uyuşumsuz ölçüler için dış güvenirlik ölçütü verilecektir. Bu durumda dış güvenirlik ölçütü

$$(\lambda_0\sigma_0^2(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\mathrm{v}}\mathbf{P}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\times\mathbf{c}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_t(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{H}) \tag{3.9}$$

bağıntısıyla verilen bir özdeğer probleminin çözümünden elde edilir. $\mathbf{c}_t$ 1×u boyutlu bir vektördür. Bu vektörün *k.* parametreye karşılık gelen elemanı bir diğer elemanları ise sıfırdır. Belli bir *k* parametresinin dış güvenirlik ölçütü maksimum özdeğer λ_{max} yardımıyla

$$\Delta x_k = \sqrt{\lambda_{max}} \tag{3.10}$$

eşitliği ile elde edilir. Bütün parametreler için hesaplanan değerler tek bir dış güvenirlik vektöründe toplanır. Çoklu uyuşumsuz ölçülere genelleştirilmiş güvenirlik ölçütleri için Knight ve ark. (2010)´a başvurulabilir.

3.6. Robust Kestirim

Huber (1964) ile başlayan robust parametre kestirimi ilerleyen yıllarda hem istatistik hem de jeodezi literatüründe üzerinde önemle durulan bir konu olmuştur. Robust kestirimin amacı uyuşumsuz ölçülerin etkisini azaltmak hatta yok etmektir. Uyuşumsuz ölçüler testi ortalama öteleme modeline dayalı iken varyans artırım modeli robust kestirimin temelini oluşturmaktadır. Bilindiği gibi stokastik model dengelemeye varyans-kovaryans matrisi yada ağırlık matrisi olarak girmektedir (Guo ve ark. 2010).

GPS ağ dengelemesindeki baz vektörleri korelasyonlu olduğu için robust kestirimi uygularken buna dikkat edilmelidir. Varyans-kovaryans matrisi $\mathbf{\Sigma}$

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Lambda C \Lambda} \tag{3.11}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\mathbf{\Lambda}$ köşegen elemanları standart sapmalardan oluşan köşegen bir matristir. Pozitif tanımlı korelasyon matrisi $\mathbf{C} = [\rho_{ij}]$ ise *i.* ve *j.* gözlemler arasındaki korelasyon değerlerini içerir. İki ölçü arasındaki korelasyon katsayısı $\rho_{ij} = \sigma_{ij}/(\sigma_i \sigma_j)$ eşitliği ile hesaplanmaktadır.

Robust parametre kestirimi

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{P}}\mathbf{v} \tag{3.12}$$

şeklinde verilen bir amaç fonksiyonunun minimize edilmesidir. Sonuç olarak bilinmeyen parametreler

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{P}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{P}}\mathbf{l} \tag{3.13}$$

eşitliği ile hesaplanabilir. Eş değer ağırlık matrisi $\overline{\mathbf{P}}$ için

$$\overline{\mathbf{P}} = diag(w_1, w_2, \dots, w_n) \cdot \mathbf{P} \cdot diag(w_1, w_2, \dots, w_n) \tag{3.14}$$

eşitliği verilmiştir. w_i değerleri uniform olarak en güçlü test istatistiklerini kullanarak aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$w_i = \begin{cases} 1 & |\tau_i| \leq u \\ u/|\tau_i| & |\tau_i| > u \end{cases} \tag{3.15}$$

Test istatistiği τ_i

$$\tau_i = \frac{\mathbf{c}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{PV}}{\sigma_i\sqrt{\mathbf{c}_i^{\mathbf{T}}\mathbf{PRc}_i}} \tag{3.16}$$

şeklinde hesaplanabilir. u, $[1.0 \quad 2.0]$ aralığında seçilen bir sabittir. Uniform olarak en güçlü test istatistiklerinin kullanıldığı ağırlık indirgeme stratejisi ile yapılan robust kestirim ile ilgili daha fazla bilgi için Guo ve ark. (2010)´a başvurulabilir.

4. ROBUSTLUK ANALİZİ

Güvenirlik analizi gerilme tekniğini kullanan geometrik güç analizi ile birleştirilerek geliştirilebilir ve böylece robustluk analizi adı verilen tek bir yöntem elde edilir. Fiziksel bir cismin deformasyon analizine tamamen geometrik bir yaklaşım sunan gerilme bir objenin öteleme alanının konuma göre gradyanı (değişim oranı) olarak tanımlanmaktadır (Simkooei 2001). Öte yandan istatistik literatüründe robustluk uyuşumsuz ölçülere karşı duyarsızlık anlamına gelir. Robustluk analizi gerilme ve güvenirliğin doğal bir birleşimi olup ağın iç güvenirlik analizinden gelen en büyük belirlenemeyen hataların neden olduğu deformasyonlara karşı koyma yeteneğini ölçer (Vaníček ve ark. 2001; Berber 2006). Bu tez çalışmasında GPS ağları üzerinde durulduğu için 3D ağların robustluk analizine ağırlık verilecektir.

Jeodezik ağların hata analizinde rasgele hatalara karşı EKKY ve kaba hatalara karşı robust kestirim yöntemleri kullanılırken sistematik hataların etkilerini niceliksel olarak betimlemek için ise robustluk analizinden yararlanılmaktadır. Robustluk analizi istatistiksel güvenirlik tekniği ile geometrik bir yaklaşım olan geometrik güç analizinin bir birleşimidir.

4.1. 3D Ağların Robustluk Analizi

Robustluk analizi gerilme tekniğini kullandığı için dengeleme kısıtlamalarından bağımsız olmakta ve sadece ağın geometrisini ve gözlemlerin doğruluğunu yansıtmaktadır. Robustluk analizi dış güvenirlik ölçütünü lokal öteleme alanı olarak tanımlamaktadır. Bu öteleme alanı bir P_i noktası ile ona gözlemlerle bağlı diğer noktaları kapsar. Bir ağın robustluğunu ölçmek için ağdaki noktaların ötelemelerinin deformasyon derecesi gerilmeyle ölçülür. 3D ağlarda Berber (2006) bir P_i noktasının ötelemesini

$$\Delta\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

şeklinde vermektedir. u_i, x yönündeki öteleme; v_i, y yönündeki öteleme ve w_i, z yönündeki ötelemedir.

Konuma göre tensör gradyanı ise

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} & \frac{\partial u_i}{\partial y} & \frac{\partial u_i}{\partial z} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} & \frac{\partial v_i}{\partial y} & \frac{\partial v_i}{\partial z} \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} & \frac{\partial w_i}{\partial y} & \frac{\partial w_i}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

ile ifade edilir. $\mathbf{E}_i$ ağdaki bir P_i noktasının gerilme matrisidir.

t bağlantı sayısı olmak üzere P_j noktaları (j=0,1,2,...,t) ile $P_i = P_0$ noktasının tanımladığı öteleme alanınında u,v ve w ötelemeleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Berber 2006 ve Berber ve ark. 2009):

$$\begin{aligned} a_i + \frac{\partial u_i}{\partial x}(X_j - X_i) + \frac{\partial u_i}{\partial y}(Y_j - Y_i) + \frac{\partial u_i}{\partial z}(Z_j - Z_i) &= u_j \\ b_i + \frac{\partial v_i}{\partial x}(X_j - X_i) + \frac{\partial v_i}{\partial y}(Y_j - Y_i) + \frac{\partial v_i}{\partial z}(Z_j - Z_i) &= v_j \\ c_i + \frac{\partial w_i}{\partial x}(X_j - X_i) + \frac{\partial w_i}{\partial y}(Y_j - Y_i) + \frac{\partial w_i}{\partial z}(Z_j - Z_i) &= w_j \end{aligned} \tag{4.3}$$

Buradaki bütün kısmi türevler ve a_i, b_i, c_i mutlak terimleri ile X_i, Y_i, Z_i noktaların üç boyutlu kartezyen koordinat değerleri ilgilenilen P_i noktasına ilişkindir. Matris formunda ağdaki her bir nokta için (4.3.)´den

$$\mathbf{K}_i \begin{bmatrix} a_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{K}_i \begin{bmatrix} b_i \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{\partial v_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{K}_i \begin{bmatrix} c_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial w_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{w}_i \tag{4.4}$$

eşitlikleri yazılabilir. $\mathbf{K}_i$ üç boyutlu ağlarda $(t+1)\times 4$ boyutlu bir matris olup $\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 1 & (X_j - X_i) & (Y_j - Y_i) & (Z_j - Z_i) \end{bmatrix}$ şeklinde gösterilebilir. (4.4) ile verilen denklemler EKKY ile çözülürse

$$\begin{bmatrix} a_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{K}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_i\right)^{-1}\mathbf{K}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_i = \mathbf{Q}_i\mathbf{u}_i, \quad \begin{bmatrix} b_i \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{\partial v_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{K}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_i\right)^{-1}\mathbf{K}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_i = \mathbf{Q}_i\mathbf{v}_i,$$

$$\begin{bmatrix} c_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial w_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{K}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_i\right)^{-1}\mathbf{K}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{w}_i = \mathbf{Q}_i\mathbf{w}_i \tag{4.5}$$

eşitliklerine ulaşılır. Her üç eşitlik bir hiper-matris olarak birleştirilirse

$$\begin{bmatrix} a_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial z} \\ b_i \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{\partial v_i}{\partial z} \\ c_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial w_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \\ \mathbf{w}_i \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

eşitliği elde edilir. $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ ve $\mathbf{w}_i$ ötelemeleri (3.8.) eşitliği ile hesaplanan dış güvenirlik ölçütü vektörünün, analizi yapılan nokta ile bu noktaya gözlemler ile bağlı diğer noktalara ilişkin elemanlarıdır. Öteleme vektörü ile gerilme matrisi arasındaki ilişkiyle ilgilendiğimiz için mutlak terimlere gerek yoktur. Bu nedenle $\mathbf{Q}_i$ matrisinin ilk satırı silinirse $\mathbf{T}_i$ indirgenmiş matris olmak üzere bir *i* noktasının gerilme vektörü (dolayısıyla matrisi)

$$\text{vek}(\mathbf{E}_i) = \mathbf{T}_i \Delta \mathbf{x}_i \tag{4.7}$$

eşitliği ile hesaplanır.

4.2. Ötelemelerin Hesaplanması

P_i noktasının ötelemelerini belirlemek için Berber (2006) tarafından geliştirilen X_0, Y_0, Z_0 başlangıç koşullarının belirlenmesi gerekir. Başlangıç koşulları ağın bütün noktalarındaki öteleme vektörlerinin normunu minimum yaparak elde edilen koordinatlar olup ağın deformasyona uğramadan önceki halini ifade etmektedirler. Başlangıç koşullarını elde etmek için ağdaki ötelemelerin minimize edilmesi gerekir. Başlangıç koşulları ağın deformasyona uğramadan önceki konumuna bir yaklaşım sağlar. Başlangıç koşullarının hesaplanması 4.3 bölümünde ele alınacaktır.

P_i noktasının mutlak ötelemesi aşağıda verilen eşitlikle hesaplanır:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} & \frac{\partial u_i}{\partial y} & \frac{\partial u_i}{\partial z} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} & \frac{\partial v_i}{\partial y} & \frac{\partial v_i}{\partial z} \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} & \frac{\partial w_i}{\partial y} & \frac{\partial w_i}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \\ Z_i - Z_0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Ağdaki her bir noktada u,v ve w ötelemeleri hesaplandıktan sonra her bir noktanın ötelemesi

$$d_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2} \tag{4.9}$$

eşitliği ile elde edilir.

P_i ile herhangi bir P_j noktası arasındaki bağıl öteleme ise

$$d_{ij} = \sqrt{(u_j - u_i)^2 + (v_j - v_i)^2 + (w_j - w_i)^2} \tag{4.10}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Öteleme değerleri uygun eşik değerler ile karşılaştırılarak ağın robustluğu hakkında karar verilir. Robust bir ağda bütün öteleme değerleri eşik değerlerden daha küçüktür. Bu nedenle ötelemelerin mümkün olduğunca küçük olması istenir (Berber 2006).

4.3. 3D Ağlar İçin Başlangıç Koşullarının Hesaplanması

Başlangıç koşullarını elde etmek için bütün nokta ötelemelerinin normunun minimum yapılması gerektiği daha önce söylenmişti. Buna göre çözülmesi gereken minimizasyon problemi

$$\min_{(X_0,\underbrace{Y_0,Z_0}\in R)} \sum_{i=1}^{n}(u_i^2+v_i^2+w_i^2) \tag{4.11}$$

olarak ifade edilebilir. Burada başlangıç koşulları ile gerilme parametreleri arasındaki ilişki ile ilgilendiğimiz için mutlak terimlere gerek yoktur. Bu nedenle mutlak terimleri kaldırıp indirgenmiş denklemler kullanılırsa amaç fonksiyonu

$$\min_{(X_0,\underbrace{Y_0,Z_0}\in R)} \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}(X_i-X_0)+\frac{\partial u_i}{\partial y}(Y_i-Y_0)+\frac{\partial u_i}{\partial z}(Z_i-Z_0)\right)^2+\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}(X_i-X_0)+\frac{\partial v_i}{\partial y}(Y_i-Y_0)+\frac{\partial v_i}{\partial z}(Z_i-Z_0)\right)^2+\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}(X_i-X_0)+\frac{\partial w_i}{\partial y}(Y_i-Y_0)+\frac{\partial w_i}{\partial z}(Z_i-Z_0)\right)^2\right] \tag{4.12}$$

şeklinde elde edilir.

Amaç fonksiyonunun X_0´a göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(u_i^2+v_i^2+w_i^2)}{\partial X_0}=0 \tag{4.13}$$

Daha açık bir şekilde

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-2\frac{\partial u_i}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}X_i-\frac{\partial u_i}{\partial x}X_0+\frac{\partial u_i}{\partial y}Y_i-\frac{\partial u_i}{\partial y}Y_0+\frac{\partial u_i}{\partial z}Z_i-\frac{\partial u_i}{\partial z}Z_0\right)-2\frac{\partial v_i}{\partial x}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}X_i-\frac{\partial v_i}{\partial x}X_0+\frac{\partial v_i}{\partial y}Y_i-\frac{\partial v_i}{\partial y}Y_0+\frac{\partial v_i}{\partial z}Z_i-\frac{\partial v_i}{\partial z}Z_0\right)-2\frac{\partial w_i}{\partial x}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}X_i-\frac{\partial w_i}{\partial x}X_0+\frac{\partial w_i}{\partial y}Y_i-\frac{\partial w_i}{\partial y}Y_0+\frac{\partial w_i}{\partial z}Z_i-\frac{\partial w_i}{\partial z}Z_0\right)\right]=0 \quad (4.14)$$

olarak yazılır. Sabitlerle ilgilenmediğimiz için

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial x}-\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial x}-\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)X_0+\left(-\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial y}-\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial y}-\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)Y_0+\left(-\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial z}-\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial z}-\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial z}\right)Z_0+\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)X_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial y}+\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)Y_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial z}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial z}+\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial z}\right)Z_i\right]=0 \quad (4.15)$$

eşitliği yazılabilir. Bu denklem basitleştirme amacıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_1X_0+b_1Y_0+c_1Z_0+d_1)=0 \quad (4.16)$$

Buradan da

$$a_1=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2\right] \quad (4.17)$$

$$b_1=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial y}+\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right) \quad (4.18)$$

$$c_1=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial z}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial z}+\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial z}\right) \quad (4.19)$$

$$d_1=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)X_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial y}+\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)Y_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial z}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial z}+\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial z}\right)Z_i\right] \quad (4.20)$$

terimleri elde edilir.

Eğer aynı denklemin Y_0´a göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(u_i^2+v_i^2+w_i^2)}{\partial Y_0}=0 \tag{4.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial x}-\frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial x}-\frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)X_0+\left(-\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial y}-\frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial y}-\frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)Y_0+\left(-\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial z}-\frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial z}-\frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial z}\right)Z_0+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)X_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial y}+\frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)Y_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial z}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial z}+\frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial z}\right)Z_i\right]=0 \tag{4.22}$$

eşitliği yazılabilir. Bu denklem basitleştirme amacıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_2X_0+b_2Y_0+c_2Z_0+d_2)=0 \tag{4.23}$$

Buradan da

$$a_2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right) \tag{4.24}$$

$$b_2=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)^2\right] \tag{4.25}$$

$$c_2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial z}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial z}+\frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial z}\right) \tag{4.26}$$

$$d_2=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)X_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial y}+\frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)Y_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial z}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial z}+\frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial z}\right)Z_i\right] \tag{4.27}$$

terimleri elde edilir.

Eğer aynı denklemin Z_0´a göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(u_i^2+v_i^2+w_i^2)}{\partial Z_0}=0 \tag{4.28}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial x}-\frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial x}-\frac{\partial w_i}{\partial z}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)X_0+\left(-\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial y}-\frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial y}-\frac{\partial w_i}{\partial z}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)Y_0+\left(-\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial z}-\frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial z}-\frac{\partial w_i}{\partial z}\frac{\partial w_i}{\partial z}\right)Z_0+\left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial z}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)X_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial y}+\frac{\partial w_i}{\partial z}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)Y_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial z}+\frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial z}+\frac{\partial w_i}{\partial z}\frac{\partial w_i}{\partial z}\right)Z_i\right]=0 \tag{4.29}$$

eşitliği yazılabilir. Bu denklem basitleştirme amacıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_3X_0+b_3Y_0+c_3Z_0+d_3)=0 \tag{4.30}$$

Buradan da

$$a_3=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial z}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right) \tag{4.31}$$

$$b_3=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial y}+\frac{\partial w_i}{\partial z}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right) \tag{4.32}$$

$$c_3=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_i}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w_i}{\partial z}\right)^2\right] \tag{4.33}$$

$$d_3=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial z}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)X_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial y}+\frac{\partial w_i}{\partial z}\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)Y_i+\left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial z}+\frac{\partial v_i}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial z}+\frac{\partial w_i}{\partial z}\frac{\partial w_i}{\partial z}\right)Z_i\right] \tag{4.34}$$

terimleri elde edilir.

Başlangıç koşulları elde edilen doğrusal denklemlerin kısa ve özlü bir biçimde çözülmesi ile elde edilir:

$$\begin{bmatrix}X_0\\Y_0\\Z_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Başlangıç koşulları ile ilgili daha fazla bilgi almak için Berber (2006)´ya başvurulabilir.

4.4. Robustluk Ölçütleri

3D ağlarda robustluk ölçütleri her bir nokta için aşağıdaki formüllerle hesaplanır (Berber 2006):

Dilatasyon

$$\sigma_i = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{w}_i}{\partial \mathrm{z}}\right) \tag{4.36}$$

Saf kesme (xy)

$$\tau_{\mathrm{xy}_i} = -\tau_{\mathrm{yx}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \mathrm{y}}\right) \tag{4.37}$$

Saf kesme (xz)

$$\tau_{\mathrm{xz}_i} = -\tau_{\mathrm{zx}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{w}_i}{\partial \mathrm{z}}\right) \tag{4.38}$$

Saf kesme (yz)

$$\tau_{\mathrm{yz}_i} = -\tau_{\mathrm{zy}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{w}_i}{\partial \mathrm{z}}\right) \tag{4.39}$$

Basit kesme (xy)

$$\upsilon_{\mathrm{xy}_i} = -\upsilon_{\mathrm{yx}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \mathrm{x}}\right) \tag{4.40}$$

Basit kesme (xy)

$$\upsilon_{\mathrm{xz}_i} = -\upsilon_{\mathrm{zx}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial \mathrm{z}} + \frac{\partial \mathrm{w}_i}{\partial \mathrm{x}}\right) \tag{4.41}$$

Basit kesme (yz)

$$\upsilon_{\mathrm{yz}_i} = -\upsilon_{\mathrm{zy}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \mathrm{z}} + \frac{\partial \mathrm{w}_i}{\partial \mathrm{y}}\right) \tag{4.42}$$

Diferansiyel dönme (xy)

$$\omega_{\mathrm{xy}_i} = -\omega_{\mathrm{yx}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \mathrm{x}}\right) \tag{4.43}$$

Diferansiyel dönme (xz)

$$\omega_{\mathrm{xz}_i} = -\omega_{\mathrm{zx}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_i}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{w}_i}{\partial \mathrm{x}}\right) \tag{4.44}$$

Diferansiyel dönme (yz)

$$\omega_{\mathrm{yz}_i} = -\omega_{\mathrm{zy}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{w}_i}{\partial \mathrm{y}}\right) \tag{4.45}$$

Toplam kesme (xy)

$$\gamma_{\mathrm{xy}_i} = \sqrt{\tau_{\mathrm{xy}_i}^2 + \upsilon_{\mathrm{xy}_i}^2} \tag{4.46}$$

Toplam kesme (xz)

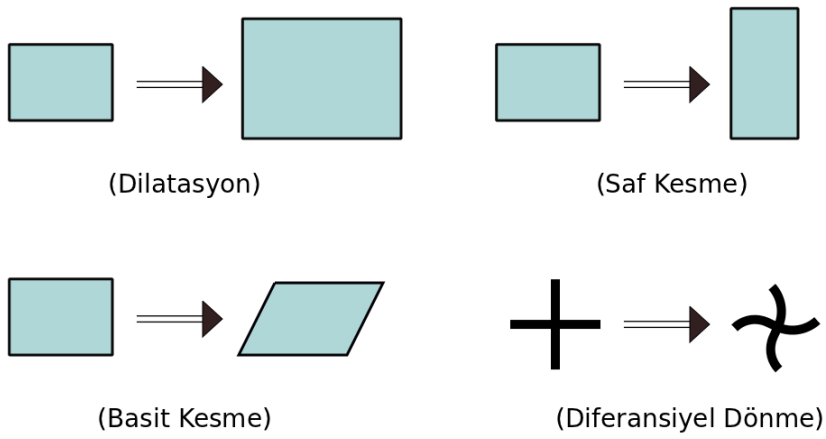
$$\gamma_{\mathrm{xz}_i} = \sqrt{\tau_{\mathrm{xz}_i}^2 + \upsilon_{\mathrm{xz}_i}^2} \tag{4.47}$$

Toplam kesme (yz)

$$\gamma_{\mathrm{yz}_i} = \sqrt{\tau_{\mathrm{yz}_i}^2 + \upsilon_{\mathrm{yz}_i}^2} \tag{4.48}$$

Dilatasyon bir alandaki büyüme veya küçülmeyi ifade eder. Dolayısıyla ölçekteki deformasyon tanımlanmış olur. Toplam kesme şekildeki deformasyonu ifade

etmektedir. Toplam kesme, saf kesme ve basit kesmenin geometrik normudur. Saf kesme deformasyonu bir kareyi dikdörtgene dönüştürür. Basit kesme ise bir dikdörtgenin eşkenar dörtgene dönüşmesidir. İlkinde çizgiler arasındaki ayırım değişirken ikincisinde ise açılar değişmektedir. Toplam kesme şekildeki robustluktur. Diferansiyel dönme ise bir noktadaki burulma olup dönüklükteki robustluğu verir (Krakiwsky ve ark. 1993). Robustluk analizinde her bir noktada ölçü sayısı kadar deformasyon ölçütü hesaplanır. Bunların en büyük değerli olanları ilgili noktada deformasyon tanımlayıcıları (robustluk ölçütleri) olarak kullanılmaktadır. Deformasyon tanımlayıcıları grafik olarak Şekil 4.1.´de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Deformasyon Tanımlayıcıları (Berber ve ark. 2008)

4.5. Gerilme Değişmezleri

Dış güvenirlik ölçütünün en önemli dezavantajlarından bir tanesi ağın datumuna bağlı olmasıdır. Bu nedenle gerilme tekniğine dayalı robustluk analizi yöntemi kullanılmalıdır. Aynı şekilde bir koordinat sisteminin ölçek, öteleme ve dönüklüğünden etkilenmeyen ölçütler kullanılmalıdır. Bunlara gerilme değişmezleri denilmektedir. Berber (2006) ve Vaníček ve ark. (2008) 2D ağlarda saf kesme ve basit kesme hariç diğer bütün robustluk ölçütlerinin değişmez olduğunu göstermiştir. Öte yandan 3D ağlarda 2D ağlardan farklı olarak toplam kesmenin de ağ datumundan etkilendiği

belirtilmiştir. Bu yüzden hem 2D ağlarda hem de 3D ağlarda değişmez olan maksimum kesme gerilmesi tanımlanmıştır.

Robustluk analizinde gerilme değişmezlerinin kullanılmasının nedeni analiz sonuçlarının ağın sadece şekli ve gözlemlerin kalitesine bağlı olarak elde edilmesini sağlamaktır. Bunun için koordinat sistemlerinin olası bir dönüklüğünden etkilenmeyen ölçütler kullanılmalıdır. Öte yandan 2D ve 3D ağlardaki gerilme değişmezleri arasındaki ilişki Berber (2006) ve Vaníček ve ark. (2008) tarafından ortaya konmuştur. Örneğin 2D´de analizi yapılan bir ağın 3D´deki sonuçları kolaylıkla elde edilebilir.

Krumm ve Grafarend (2002) gerilme değişmezlerinin robustluk analizi dışında bazı uygulamalarına yer vermiştir. Bunun en güzel örneği ITRF ağlarında datumdan bağımsız deformasyon analizinin yapılmasıdır.

Temel gerilme değişmezleri $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$ ve I_3 gerilme matrisinin simetrik kısmının elemanlarını kullanarak aşağıdaki formüllerle hesaplanır:

$$\mathrm{I}_1 = \sigma_{\mathrm{xx}} + \sigma_{\mathrm{yy}} + \sigma_{\mathrm{zz}} \tag{4.49}$$

$$\mathrm{I}_2 = \sigma_{\mathrm{xy}}^2 + \sigma_{\mathrm{xz}}^2 + \sigma_{\mathrm{yz}}^2 - \sigma_{\mathrm{xx}}\sigma_{\mathrm{yy}} - \sigma_{\mathrm{xx}}\sigma_{\mathrm{zz}} - \sigma_{\mathrm{yy}}\sigma_{\mathrm{zz}} \tag{4.50}$$

$$\mathrm{I}_3 = \sigma_{\mathrm{xx}}\sigma_{\mathrm{yy}}\sigma_{\mathrm{zz}} + 2\sigma_{\mathrm{xy}}\sigma_{\mathrm{xz}}\sigma_{\mathrm{yz}} - \sigma_{\mathrm{xx}}\sigma_{\mathrm{yz}}^2 - \sigma_{\mathrm{yy}}\sigma_{\mathrm{xz}}^2 - \sigma_{\mathrm{zz}}\sigma_{\mathrm{xy}}^2 \tag{4.51}$$

3D ağlar için geliştirilen gerilme değişmezleri ise aşağıda verilmiştir.

Dilatasyon

Doğrusal bir değişmez olan dilatasyon değişmezi

$$\Sigma = \frac{1}{3}(2\sigma + \sigma_3) \tag{4.52}$$

eşitliği ile hesaplanır. 2 boyutlu dilatasyon σ

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{4.53}$$

eşitliği ile hesaplanırken $\sigma_1 = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}},\ \sigma_2 = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}$ ve $\sigma_3 = \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}}$′dir.

Diferansiyel Dönme

Diferansiyel dönme değişmezi ikinci dereceden (kuadratik) bir değişmezdir. 3D ağlar için

$$\Omega = \sqrt{\omega_{\mathrm{xy}}^2 + \omega_{\mathrm{xz}}^2 + \omega_{\mathrm{yz}}^2} \tag{4.54}$$

ifadesi kullanılır.

Toplam Kesme

3D ağlarda toplam kesme

$$\Gamma = \sqrt{\gamma_{\mathrm{xy}}^2 + \gamma_{\mathrm{xz}}^2 + \gamma_{\mathrm{yz}}^2} \tag{4.55}$$

eşitliği ile hesaplanır. Γ′nın değişmez olmadığı Berber (2006)′da gösterilmiştir. Bu nedenle üçüncü gerilme değişmezi olarak maksimum kesme gerilmesi M sunulmuştur.

Gerilme matrisi **E** aşağıda verilen basit işlemlerle **S** simetrik ve **A** asimetrik olmak üzere iki kısma ayrılabilir:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\mathrm{T}}) \tag{4.56}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\mathrm{T}}) \tag{4.57}$$

Simetrik kısım bir noktadaki dilatasyon ile kesme deformasyonunu tanımlarken asimetrik kısım burulmayı tanımlamaktadır.

3D ağlarda **S** matrisinin özdeğerlerinin değişmez olduğu bilinmektedir. **S** pozitif tanımlı bir matris olduğu için özdeğerlerinin hepsi pozitif ve reeldir. Özdeğerler Λ_1 en

büyük öteleme ve Λ_3 en küçük öteleme olacak şekilde tanımlanıp $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)^{\mathrm{T}}$ olarak sıralanırsa maksimum kesme gerilmesi

$$\mathrm{M} = \Lambda_1 - \Lambda_3 \tag{4.58}$$

eşitliği ile elde edilir. 2D ağlarda ise maksimum kesme gerilmesi

$$\mu = \lambda_1 - \lambda_2 \tag{4.59}$$

eşitliğinden gelir (Vaníček ve ark. 2008).

2D ve 3D ağlardaki gerilme değişmezleri (+ işareti ile gösterilmişlerdir) Çizelge 4.1.´de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Gerilme değişmezleri (Berber 2006)

Robustluk ölçütleri	2D	3D
Dilatasyon	+	+
Saf kesme	–	–
Basit kesme	–	–
Diferansiyel dönme	+	+
Toplam kesme	+	–
Maksimum kesme gerilmesi	+	+

4.6. Robustluk Analizinde Singüler Durumlar

Robustluk analizini uygularken karşılaşabileceğimiz bazı özel problemli durumlar Berber ve ark. (2008) ve Vaníček ve ark. (1991)´de tartışılmıştır. Bunlar sıfır redundans ve zayıf ağ geometrisi olmak üzere ikiye ayrılabilir.

Sıfır redundans: Bir istasyona bağlı bütün gözlemlerin redundans sayısı sıfır ise meydana gelen bir problemdir. Bu durumda istasyon koordinatları minimum sayıda gözlemle belirlenmektedir. Böyle gözlemler uyuşumsuz ölçü testleri ile hiç kontrol edilmediği için bu gözlemlerin hatalarla yüklü olduğu noktasında bir garanti yoktur. Böylesi bir durumda ilgilenilen nokta ağda robustluğu olmayan bir nokta olarak ifade edilir. Bu durumda MBH´lar sonsuzdur.

Zayıf geometri: Eğer analiz edilecek nokta bir tek noktaya bağlı ise ya da bağlı noktalar arasında eş doğrusallık veya yakın eş doğrusallık varsa (bütün noktaların tek

bir dizi halinde sıralanması gibi) zayıf geometri problemi söz konusudur. Bu durumda ilgili noktada robustluk ölçütleri tanımsızdır.

4.7. Korelasyonlu Gözlemler İçin Robustluk Analizi

Robustluk analizi Baarda´nın iç güvenirlik ölçütünü kullanmaktadır. Bu nedenle MBH´ların ve ardından dış güvenirlik vektörünün hesaplanması gözlemler arasındaki korelasyonu ihmal ederek yapılmaktadır. Oysa gerçekçi bir robustluk analizi için özellikle GPS ağlarında gözlemler arasındaki korelasyonlar dikkate alınmalıdır. Bunun nedeni bir GPS ağına ait olan varyans-kovaryans matrisinin köşegen bir matris olmayışıdır. Gerilme matrisinin elemanları normalleştirilmiş güvenirlik sayılarını kullanarak elde edilen MBH değerleri ile hesaplanmalıdır. Buna göre gerilme vektörü her bir noktada

$$\mathrm{vec}(\mathbf{E}_i) = \mathbf{T}_i\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{c}_i^{\mathrm{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Delta l}}} \tag{4.60}$$

formülü ile hesaplanmalıdır. Daha sonra öteleme değerleri korelasyonsuz durumda olduğu gibi elde edilir.

Baarda´nın redundans sayıları ile hesaplanan iç güvenirlik ölçütleri ile Schaffrin´in normalleştirilmiş güvenirlik sayıları ile hesaplanan iç güvenirlik ölçütleri arasında matematiksel bir ilişki ortaya konulabilir. Bu amaçla Δl_i ile $\overline{\overline{\Delta}} l_i$ arasındaki oran

$$\frac{\Delta l_i}{\overline{\overline{\Delta}} l_i} = \frac{\delta_0\sigma_i}{\sqrt{r_i}}\frac{\sqrt{p_{ii}\bar{\bar{r}}_i}}{\delta_0} = \sqrt{\frac{p_{ii}\bar{\bar{r}}_i}{r_i}}\sigma_i = \sqrt{\frac{\bar{\bar{r}}_i}{r_i}p_{ii}\sigma_i^2} \tag{4.61}$$

şeklinde elde edilebilir. Normalleştirilmiş redundans sayıları için $\bar{\bar{r}}_i = \bar{r}_i(1-\bar{\rho}_i^2)$ eşitliği geçerli olduğu için orantı daha sade bir şekilde

$$\frac{\Delta l_i}{\overline{\overline{\Delta}} l_i} = \sqrt{\frac{\bar{r}_i}{r_i}\underbrace{(1-\bar{\rho}_i^2)p_{ii}\sigma_i^2}_{1}} = \sqrt{\frac{\bar{r}_i}{r_i}} \tag{4.62}$$

haline getirilebilir. $\bar{r}_i = \bar{\bar{r}}_i/(1-\bar{\rho}_i^2)$ olduğu için

$$\frac{\Delta l_i}{\overline{\overline{\Delta l}}_i} = \sqrt{\frac{\bar{\bar{r}}_i}{r_i(1-\bar{\rho}_i^2)}} = \sqrt{\frac{\bar{\bar{r}}_i}{r_i}\frac{1}{1-\bar{\rho}_i^2}} \tag{4.63}$$

eşitliğini elde edebiliriz.

Yukarıda elde edilen denkleme göre ρ_i değeri arttıkça redundans sayılarına dayalı Δl_i ile normalleştirilmiş güvenirlik sayılarına dayalı $\overline{\overline{\Delta l}}_i$ değeri arasındaki fark artar. Bu güvenirlik analizini yaparken gözlemler arasındaki korelasyonları dikkate almak gerektiğini göstermektedir. Öte yandan MBH değerlerini kullandığı için robustluk analizi sonuçları da aynı nedenden dolayı aynı oranda değişir.

4.8. Çoklu Uyuşumsuz Ölçüler İçin Robustluk Analizi

Geleneksel olarak robustluk analizinin jeodezik ağlarda yapılan uygulamalarında tek bir uyuşumsuz ölçünün varsayıldığı Baarda (1968)´in klasik güvenirlik teorisi uygulanmıştır. Buna göre global test ve data snooping adımlarından oluşan Baarda testi ile uyuşumsuz ölçü araştırması yaparken her defasında ölçü kümesinde bir tane uyuşumsuz ölçü olabileceği kabul edilerek istatistiksel test yapılmaktadır. Buna paralel olarak iç güvenirlik analizi ile her bir ölçü için sadece ilgili ölçünün kaba hatalı olması durumunda test yöntemi ile belirlenebilecek maksimum hata değeri hesaplanmaktadır. Dış güvenirlik analizinde ise her bir ölçü için sadece ilgili bir tek ölçünün kaba hatalı olması durumunda dengeleme hesabıyla kestirilen parametre değerlerinin ne kadar etkilendiği ortaya konulmaya çalışılmaktadır. Robustluk analizi de bu yöntemlerin devamında bir tane kaba hatalı ölçünün olduğu varsayımıyla yapılmaktadır. Oysa pratikte birden çok kaba hata veya sistematik hatanın ölçüleri etkileyebileceği açıktır. Bu yüzden istatistiksel hipotez testi aynı anda birden fazla uyuşumsuz ölçüyü belirleyebilecek şekilde uygulanabilir. Birden çok kaba hatalı ölçü olduğu zaman ister istemez uyuşumsuz ölçü belirleme testinin etkisi azalır. Bunun sebebi çoklu uyuşumsuz ölçüler durumunda iç güvenirlik ölçütlerinin sayısal olarak artmasıdır. İç güvenirlik ölçütleri arttığı zaman sayısal olarak dış güvenirlik ölçütlerinin büyüyeceği ve bununda ağ sonuçlarının kaba hatalardan daha büyük oranda olumsuz bir şekilde etkileneceği açıktır (Knight ve ark. 2010).

Dış güvenirlik ölçütlerini kullandığı için yukarıda bahsedilen durum robustluk analizi sonuçlarına da benzer şekilde yansımalıdır. Diğer bir deyişle birden çok kaba veya sistematik hatalı ölçü olduğu zaman ağ daha büyük bir deformasyona uğrar.

Güvenirlik analizi çoklu uyuşumsuz ölçüler için yapıldığı zaman ötelemeler, gerilme değişmezleri ve robustluk ölçütleri daha büyük değerler alırlar. Bunun anlamı ağın robustluğunun azaldığıdır. Ne kadar çok belirlenemeyen hata varsa söz konusu sanal deformasyon o kadar fazladır. O halde robustluk analizi çoklu uyuşumsuz ölçülerin yol açtığı deformasyonu ortaya koyabilecek bir hale getirilmelidir. Bunu sağlamak için Knight ve ark. (2010)´da verilen uygun dış güvenirlik ölçütü kullanılabilir. Robustluk analizi çoklu uyuşumsuz ölçüler için genelleştirilen güvenirlik ölçütlerini kullanarak yapıldığı zaman ağın kaç tane belirlenemeyen hataya karşı robust olduğu belirlenebilmektedir.

Robustluk analizi çoklu uyuşumsuz ölçüler için uygulandığında gerilme matrisi

$$\mathrm{vec}(\mathbf{E}_i) = \mathbf{T}_i \Delta \boldsymbol{y}_0^{\theta} \tag{4.64}$$

formülü ile hesaplanır. Eşitlikteki $\Delta \boldsymbol{y}_0^{\theta}$ ilgili elemanları (3.10) eşitliği ile hesaplanan dış güvenirlik değerlerini içeren bir vektördür.

4.9. Eşik Değerler

Jeodezik ağların robustluğunu değerlendirmek için hesaplanan öteleme değerlerinin karşılaştırıldığı eşik değerlere ihtiyaç vardır. Bir noktaya ait öteleme değeri ilgili eşik değerden küçük ise ağ ilgili noktada robusttur yorumu yapılabilir. Robust bir ağda bütün öteleme değerleri ilgili eşik değerlerin altındadır. Eşik değerler sayesinde ağın zayıf ve güçlü bölgeleri kolaylıkla belirlenebilir. Eşik değerler ayrıca ağın istenilen robustlukta tasarımında da kolaylık sağlarlar (Berber 2006).

GPS ağları gibi üç boyutlu ağlarda güven elipsoitleri elemanları yardımı ile eşik değerler hesaplanabilir. a, b ve c standart hata elipsoidinin yarı eksen uzunlukları ve C genişletme çarpanı olmak üzere seçilen bir güven seviyesinde güven elipsoidinin yarı eksen uzunlukları

$$\mathrm{a}_{\%} = \mathrm{aC};\ \mathrm{b}_{\%} = \mathrm{bC};\ \mathrm{c}_{\%} = \mathrm{cC} \tag{4.65}$$

formülü ile hesaplanır. C çarpanı

$$C=\sqrt{\chi^2_{1-\alpha_0,u}} \tag{4.66}$$

formülü ile elde edilir. GPS ağlarında u=3 olarak alınabilir. In-context güven bölgeleri yaklaşımında k doğrusal olarak bağımsız güven elipsoidi sayıları olmak üzere $\alpha_0 = \alpha/k'$dır (Krakiwsky ve ark. 1999).

Üç boyutlu ağlarda eşik değerler

$$\delta_i = \sqrt{a^2_{\%} + b^2_{\%} + c^2_{\%}} \tag{4.67}$$

eşitliği ile hesaplanabilir. Güven bölgeleri ile ilgili bilgi için Kuang (1996) ve Krakiwsky ve ark. (1999) incelenebilir.

4.10. Robustluk Analizi İşlem Adımları

Robustluk analizini bir jeodezik ağa uygularken izlenecek adımlar aşağıda verilmiştir:

1. Global α ve β değerleri seçildikten sonra redundans sayısı sıfırdan büyük gözlemlerin sayısına göre lokal α_0, β_0 ve λ_0 değerleri hesaplanır.
2. Ağ dengelenir.
3. Redundans sayısı sıfırdan büyük $(r_i > 0.0001)$ tüm gözlemlerin iç güvenirlik ölçütleri hesaplanır. İç güvenirlik ölçütlerinin hesaplanmasında gözlemler arasında korelasyon varsa bu durum dikkate alınmalıdır. İç güvenirlik ölçütü korelasyonsuz gözlemler için (3.6) eşitliği ile korelasyonlu gözlemler için ise (3.7) eşitliği ile hesaplanır.
4. Her ölçünün iç güvenirlik ölçütüne karşılık gelen dış güvenirlik vektörü hesaplanır. Eğer analiz çoklu uyuşumsuz ölçüler için yapılacaksa 2. adımdan sonra doğrudan 4. adıma geçilir ve çoklu uyuşumsuz ölçüler için dış güvenirlik vektörü oluşturulur. Dış güvenirlik vektörü hem korelasyonsuz hem de korelasyonlu gözlemler

için (3.8) eşitliği ile hesaplanır. Çoklu uyuşumsuz ölçüler için robustluk analizi yapılacak ise her bir parametre için dış güvenirlik ölçütü (3.10) eşitliği ile hesaplanır. Daha sonra bütün parametrelere ilişkin değerler bir vektör içerisinde toplanır.

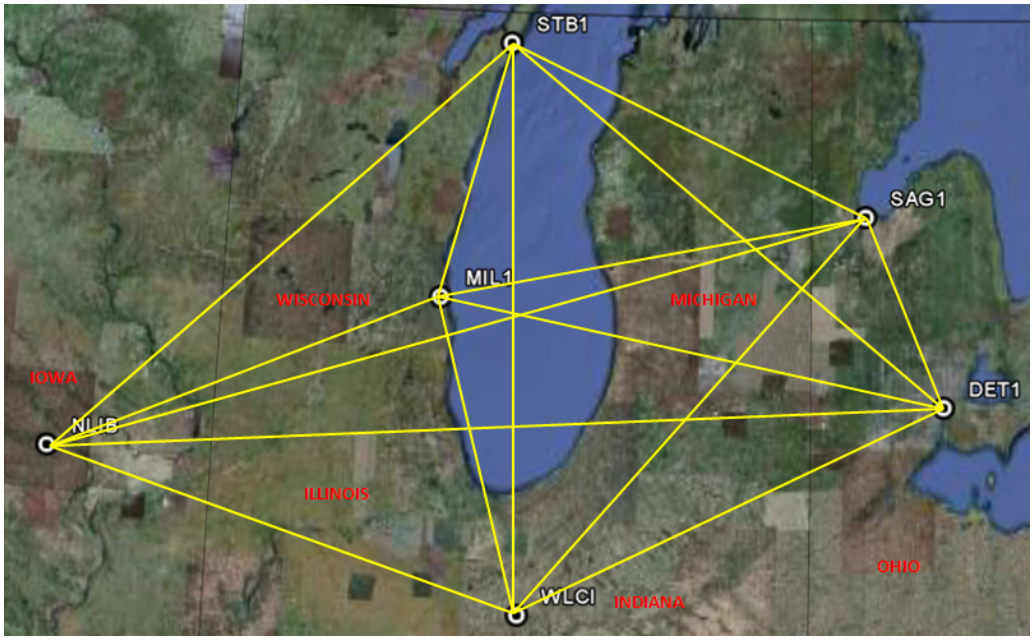
5. Ağdaki her bir nokta için gerilme matrisi hesaplanır. Bunun için ilgili nokta ile bu noktaya gözlemlerle bağlı noktalarına ilişkin dış güvenirlik ölçütlerinden yararlanılır.
6. Mutlak/bağıl ötelemeler, robustluk ölçütleri, gerilme değişmezleri hesaplanır. Robustluk ölçütleri, ötelemeler veya gerilme değişmezleri her bir nokta için ölçü sayısı kadar hesaplanır. Bütün bunların en büyükleri analizde kullanılır.
7. Ötelemeleri karşılaştırmak için eşik değerler hesaplanır. Eşik değerler (4.67) eşitliği ile hesaplanabilir.
8. Analiz sonucunda uygun çizelge ve şekiller hazırlanır.

5. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde robustluk analizi Amerika Birleşik Devletleri (ABD) Great Lakes bölgesinde 6 adet CORS (Continuously Operating Reference Station) istasyonundan oluşan bir GPS ağı ile Florida Atlantic Üniversitesi (FAU) Treasure Coast Kampüsünde kurulan ve GPS tekniği ile ölçülen bir ağa uygulanmıştır. Bu ağlar sırasıyla CORSGL ve FAUNet olarak isimlendirilmiştir. İlk ağa ait veriler Snow (2002)´de bulunabilir. CORSGL ağında DET1 noktası datum noktasıdır. Ağda 15 adet baz yer almaktadır. Ağın serbestlik derecesi $f = n - u + d = 45 - 18 + 3 = 30$´dur.

Treasure Coast kampüsünde kurulan GPS ağı 3 frekanslı Leica GX1230 alıcılarıyla ölçülmüştür. Verilerin işlenmesinde LGO (Leica Geo Office) yazılımı kullanılmıştır.

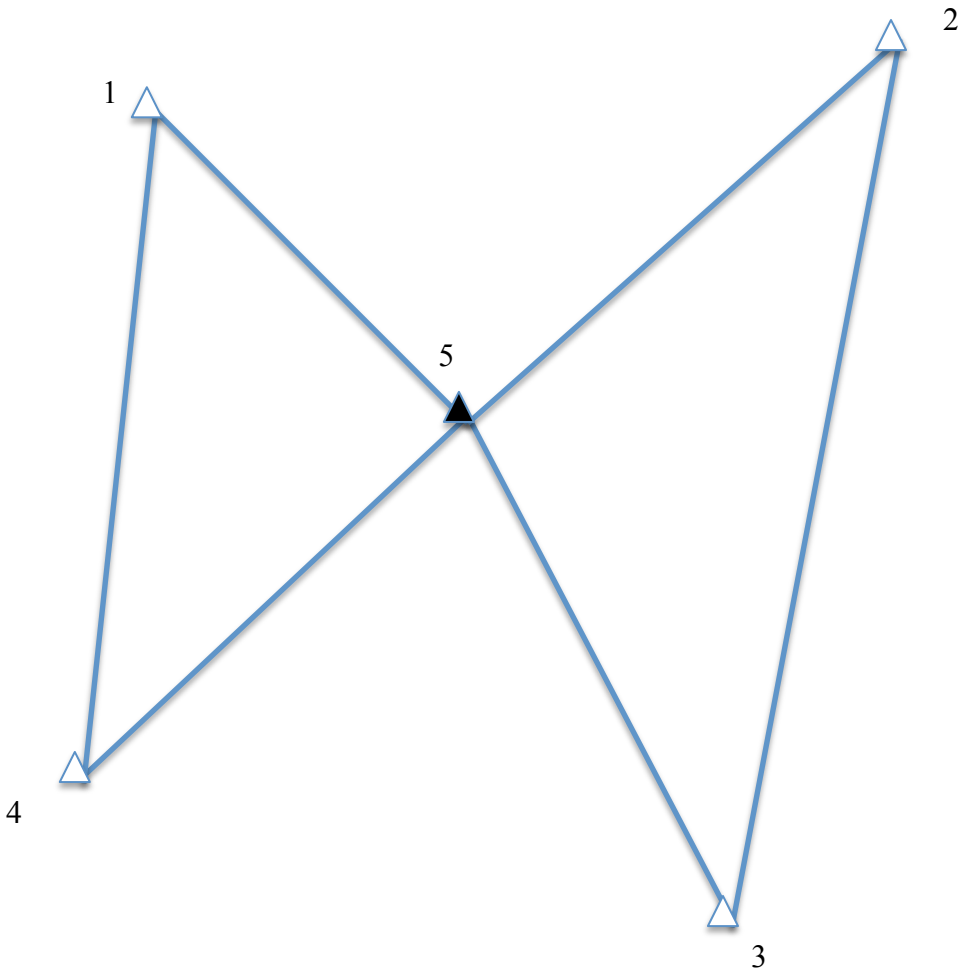
İlk 3 uygulamanın yapıldığı CORSGL ağı Şekil 5.1.´de görülmektedir.



Şekil 5.1. CORSGL ağı

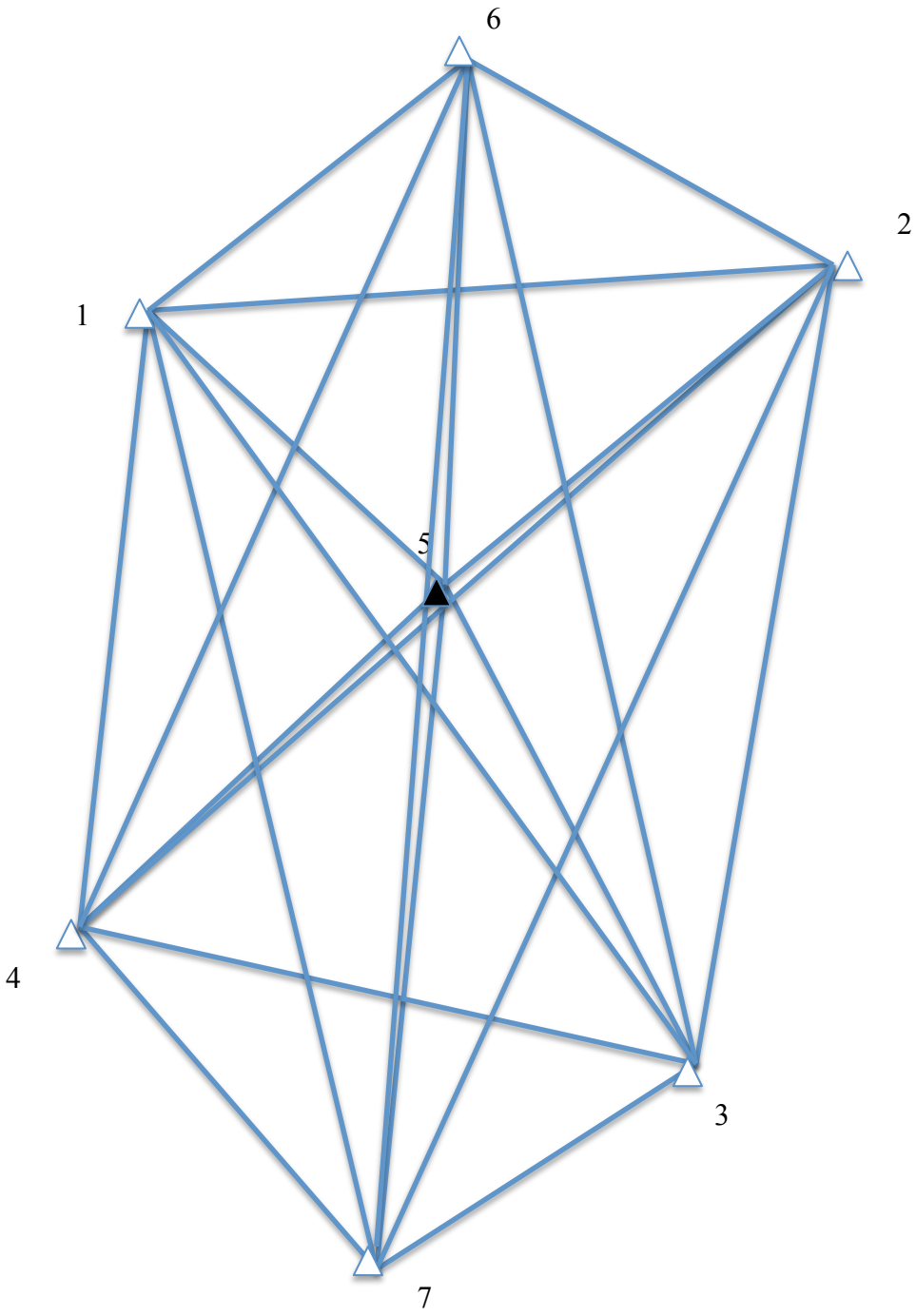
Uygulama IV ve Uygulama V′ in yapıldığı FAUNet ağı Şekil 5.2.′de ve Şekil 5.3.′de görülmektedir.

I. durumda 5 numaralı nokta datum noktası olmak üzere toplam 5 adet nokta ve 6 adet bazdan oluşan bir ağ kurulmuştur. Ağın serbestlik derecesi $f = n - u + d = 12 - 10 + 2 = 4$′dür.



Şekil 5.2. FAUNet ağı (I. Durum)

II. durumda 5 numaralı nokta datum noktası olmak üzere toplam 7 adet nokta ve 21 adet bazdan oluşan bir ağ kurulmuştur. Ağın serbestlik derecesi $f = n - u + d = 42 - 14 + 2 = 30$´dur.



Şekil 5.3. FAUNet ağı (II. Durum)

Son uygulamada ise robust parametre kestirimi CORSGL ağında gerçekleştirilmiştir.

5.1. Uygulama I

Bu uygulamada amaç belirlenemeyen hatalı ölçülerin sayısı arttıkça robustluk analizi ile elde edilen gerilme değişmezlerinin değerlerinin büyüdüğünü göstermektir. GPS ağı 3D bir ağdır. Klasik durum olarak belirlenemeyen hatalı ölçü sayısı bir kabul edilip ağın robustluk analizi yapılırsa elde edilen gerilme değişmezleri Çizelge 5.1.´de 2. satırda gösterilmiştir.

Çizelge 5.1. Gerilme değişmezleri (ppm)

Σ	Ω	M
0.010	0.021	0.038
0.018	0.080	0.090
0.022	0.088	0.103

Ağdaki bütün noktalar birbirlerine gözlemlerle bağlı olduğu için (diğer bir deyişle GPS ağında ölçülmemiş baz yok) gerilme değişmezleri bütün noktalarda aynıdır. Bu durumda geometrik güç analizi (**T** matrisinin elde edilmesi) ve dış güvenirlik ölçütleri aynı olduğu için gerilme matrisi ve dolayısıyla elde edilen gerilme değişmezleri bütün noktalarda aynı çıkmaktadır. Benzer durum robustluk ölçütleri içinde geçerlidir.

Belirlenemeyen hata sayısı iki kabul edilip ağın robustluk analizi yapılırsa elde edilen gerilme değişmezleri Çizelge 5.1.´de 3. satırda verilmiştir. Belirlenemeyen hata sayısı birden çok varsayıldığı için robustluk analizinde çoklu uyuşumsuz ölçüler için geliştirilen dış güvenirlik ölçütü kullanılmıştır.

Çizelge 5.1.´in 2. ve 3. satırları dikkatle incelenirse gerilme değişmezlerinin ikinci durumda daha büyük çıktığı görülmektedir. Belirlenemeyen hata sayısı arttığı için ağ daha fazla deformasyona uğramakta ve robustluk analizi bunu ortaya koyabilmektedir.

Belirlenemeyen hata sayısı bu kez üç kabul edilip ağın robustluk analizi yapılırsa elde edilen gerilme değişmezleri Çizelge 5.1.´de 4. satırda verilmiştir.

Çizelge 5.1.´in 4. satırında görüldüğü üzere ağ en fazla deformasyona üçüncü durumda uğramaktadır. O halde belirlenemeyen hata sayısı arttıkça ağda daha büyük

deformasyonlar oluşmaktadır. Robustluk analizi bunu ortaya koyabildiği için güçlü bir tekniktir.

5.2. Uygulama II

GPS teknolojisinin gelişimi jeodezi bilimine önemli katkılar yapmış ve yer ölçümünde yeni bir çağın başlamasına sebep olmuştur. Bununla birlikte robust kestirim, güvenirlik analizi ve robustluk analizi uygulamalarında gözlemler arasındaki korelasyonların dikkate alınması analiz sonuçlarının daha kesin bir şekilde elde edilmesini sağlayacaktır. Daha öncede belirtildiği gibi robustluk analizinin bugüne kadar ki uygulamalarında güvenirlik analizi Baarda´nın güvenirlik ölçütlerine göre yapıldığı için gözlemler arasındaki korelasyonlar dikkate alınmamıştır.

Bu sayısal uygulamada CORSGL ağının robustluk analizi hem Baarda´nın redundans sayıları ile hesaplanan iç güvenirlik ölçütleri ile hem de Schaffrin´in normalleştirilmiş güvenirlik sayıları ile hesaplanan iç güvenirlik ölçütleri ile yapılmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Redundans sayıları, normalleştirilmiş güvenirlik sayıları ve çoklu korelasyon kaysayıları Çizelge 5.2.´te gösterilmektedir.

Çizelge 5.2. Redundans sayıları, normalleştirilmiş güvenirlik sayıları ve çoklu korelasyon katsayıları

Baz Bileşeni	r_i	$\bar{\bar{r}}_i$	$\bar{\rho}_i$
NLIB-MIL1 (ΔX)	0.7079	0.7047	0.1871
NLIB-MIL1 (ΔY)	0.7696	0.7347	0.9438
NLIB-MIL1 (ΔZ)	0.7156	0.7283	0.9441
NLIB-DET1 (ΔX)	0.8313	0.8312	0.0717
NLIB-DET1 (ΔY)	0.8284	0.7182	0.9486
NLIB-DET1 (ΔZ)	0.6316	0.6986	0.9487
MIL1-DET1 (ΔX)	0.7558	0.7502	0.2699
MIL1-DET1 (ΔY)	0.7153	0.6019	0.9540
MIL1-DET1 (ΔZ)	0.5669	0.5912	0.9531
WLCI-NLIB (ΔX)	0.7084	0.6943	0.1751
WLCI-NLIB (ΔY)	0.5251	0.5956	0.9392
WLCI-NLIB (ΔZ)	0.7229	0.6146	0.9398
WLCI-MIL1 (ΔX)	0.4953	0.4960	0.1567
WLCI-MIL1 (ΔY)	0.5523	0.6000	0.9269
WLCI-MIL1 (ΔZ)	0.6606	0.6188	0.9262
WLCI-DET1 (ΔX)	0.6044	0.5874	0.3541
WLCI-DET1 (ΔY)	0.6738	0.5939	0.9340
WLCI-DET1 (ΔZ)	0.5089	0.5602	0.9369
NLIB-STB1 (ΔX)	0.6776	0.6507	0.3952
NLIB-STB1 (ΔY)	0.7723	0.7122	0.9320
NLIB-STB1 (ΔZ)	0.6985	0.7014	0.9324
NLIB-SAG1 (ΔX)	0.7661	0.7583	0.2376
NLIB-SAG1 (ΔY)	0.6283	0.7162	0.9439
NLIB-SAG1 (ΔZ)	0.8655	0.7420	0.9440
WLCI-STB1 (ΔX)	0.4762	0.4761	0.2817
WLCI-STB1 (ΔY)	0.8014	0.7591	0.8935
WLCI-STB1 (ΔZ)	0.6318	0.7347	0.8903
MIL1-STB1 (ΔX)	0.4652	0.4661	0.2168
MIL1-STB1 (ΔY)	0.4498	0.5879	0.9298
MIL1-STB1 (ΔZ)	0.7857	0.6285	0.9304
STB1-SAG1 (ΔX)	0.7639	0.7495	0.3210
STB1-SAG1 (ΔY)	0.6496	0.6466	0.9434
STB1-SAG1 (ΔZ)	0.7250	0.6622	0.9414
STB1-DET1 (ΔX)	0.8256	0.7784	0.4600
STB1-DET1 (ΔY)	0.6179	0.6725	0.9339
STB1-DET1 (ΔZ)	0.7910	0.7053	0.9278
SAG1-MIL1 (ΔX)	0.7676	0.7450	0.3543
SAG1-MIL1 (ΔY)	0.5661	0.5775	0.9433
SAG1-MIL1 (ΔZ)	0.6288	0.5803	0.9456
SAG1-DET1 (ΔX)	0.5261	0.5169	0.4163
SAG1-DET1 (ΔY)	0.7095	0.6684	0.9281
SAG1-DET1 (ΔZ)	0.5746	0.6532	0.9280
WLCI-SAG1 (ΔX)	0.6285	0.6092	0.3757
WLCI-SAG1 (ΔY)	0.7406	0.6396	0.9237
WLCI-SAG1 (ΔZ)	0.4926	0.5925	0.9281

Çizelge 5.2.´den görüldüğü gibi bazı gözlemler için redundans sayıları ile normalleştirilmiş güvenirlik sayıları arasında büyük farklar olabilmektedir.

MBH´lar her iki durumda hesaplanarak Çizelge 5.3´de gösterilmiştir. Son sütun iki farklı durum için elde edilmiş değerlerin birbirleri ile olan oranını göstermektedir. Bu oran (4.63) eşitliği ile hesaplanabilir.

Çizelge 5.3. İç güvenirlik analizi (m)

Baz bileşenleri	Δl_i	$\overline{\overline{\Delta l}}_i$	$\Delta l_i / \overline{\overline{\Delta l}}_i$
NLIB-MIL1 (ΔX)	0.0017	0.0017	1.02
NLIB-MIL1 (ΔY)	0.0074	0.0025	2.96
NLIB-MIL1 (ΔZ)	0.0068	0.0022	3.06
NLIB-DET1 (ΔX)	0.0024	0.0024	1.00
NLIB-DET1 (ΔY)	0.0075	0.0026	2.94
NLIB-DET1 (ΔZ)	0.0073	0.0022	3.33
MIL1-DET1 (ΔX)	0.0017	0.0016	1.03
MIL1-DET1 (ΔY)	0.0060	0.0020	3.06
MIL1-DET1 (ΔZ)	0.0058	0.0017	3.37
WLCI-NLIB (ΔX)	0.0017	0.0017	1.00
WLCI-NLIB (ΔY)	0.0070	0.0022	3.10
WLCI-NLIB (ΔZ)	0.0055	0.0020	2.70
WLCI-MIL1 (ΔX)	0.0010	0.0010	1.01
WLCI-MIL1 (ΔY)	0.0053	0.0019	2.78
WLCI-MIL1 (ΔZ)	0.0044	0.0017	2.57
WLCI-DET1 (ΔX)	0.0014	0.0013	1.05
WLCI-DET1 (ΔY)	0.0053	0.0020	2.63
WLCI-DET1 (ΔZ)	0.0051	0.0017	3.00
NLIB-STB1 (ΔX)	0.0018	0.0016	1.07
NLIB-STB1 (ΔY)	0.0074	0.0028	2.65
NLIB-STB1 (ΔZ)	0.0069	0.0025	2.77
NLIB-SAG1 (ΔX)	0.0021	0.0020	1.02
NLIB-SAG1 (ΔY)	0.0082	0.0025	3.23
NLIB-SAG1 (ΔZ)	0.0066	0.0024	2.80
WLCI-STB1 (ΔX)	0.0010	0.0010	1.04
WLCI-STB1 (ΔY)	0.0056	0.0026	2.17
WLCI-STB1 (ΔZ)	0.0055	0.0023	2.37
MIL1-STB1 (ΔX)	0.0011	0.0010	1.02
MIL1-STB1 (ΔY)	0.0065	0.0021	3.10
MIL1-STB1 (ΔZ)	0.0049	0.0020	2.44
STB1-SAG1 (ΔX)	0.0017	0.0016	1.05
STB1-SAG1 (ΔY)	0.0067	0.0022	3.01
STB1-SAG1 (ΔZ)	0.0059	0.0021	2.83
STB1-DET1 (ΔX)	0.0020	0.0018	1.09
STB1-DET1 (ΔY)	0.0069	0.0024	2.92
STB1-DET1 (ΔZ)	0.0057	0.0022	2.53
SAG1-MIL1 (ΔX)	0.0016	0.0016	1.05
SAG1-MIL1 (ΔY)	0.0058	0.0019	3.04
SAG1-MIL1 (ΔZ)	0.0050	0.0017	2.95
SAG1-DET1 (ΔX)	0.0015	0.0014	1.09
SAG1-DET1 (ΔY)	0.0056	0.0021	2.61
SAG1-DET1 (ΔZ)	0.0052	0.0018	2.86
WLCI-SAG1 (ΔX)	0.0014	0.0013	1.06
WLCI-SAG1 (ΔY)	0.0050	0.0021	2.43
WLCI-SAG1 (ΔZ)	0.0051	0.0017	2.95

Çizelge 5.2. ve Çizelge 5.3.′den görüldüğü üzere çoklu korelasyon katsayısı büyük olan bir ölçüde iki durumda elde edilen MBH′lar arasındaki oran daha büyük çıkmaktadır.

Çizelge 5.3.′de verilen iç güvenirlik ölçütleri ile GPS ağının robustluk analizi yapılmış ve sonuçlar Çizelge 5.4.′da gösterilmiştir. İkinci sütunda gösterilen değerler klasik güvenirlik analizi sonuçlarını kullanarak yapılan robustluk analizi ile elde edilen değerlerdir. Üçüncü sütunda ise korelasyonlar dikkate alınarak yapılan robustluk analizi sonuçları verilmektedir.

Çizelge 5.4. Ötelemeler (mm)

İstasyonlar	d_i	$\bar{\bar{d}}_i$
MIL1	0.8295	0.2675
WLCI	1.1554	0.4372
NLIB	1.7915	0.5777
STB1	0.8944	0.3776
SAG1	0.9206	0.2848

Çizelge 5.4. robustluk analizi ile elde edilen ötelemelerin gözlemler arasındaki korelasyonların dikkate alınmadığı taktirde ne kadar farklı olabileceğini göstermektedir.

Çoklu korelasyon katsayısı oldukça düşük (0.0717) olan NLIB-DET1 bazının ΔX bileşenine ait MBH değerlerine göre robustluk analizi yapıldığı zaman ağ noktalarının uğrayacağı ötelemeler Çizelge 5.5′de gösterilmiştir.

Çizelge 5.5. Ötelemeler (mm)

İstasyonlar	d_i	$\bar{\bar{d}}_i$	$d_i/\bar{\bar{d}}_i$
MIL1	0.0863	0.0861	1.00
WLCI	0.0528	0.0527	1.00
NLIB	0.2018	0.2013	1.00
STB1	0.0417	0.0416	1.00
SAG1	0.1355	0.1352	1.00

Çizelge 5.5′e göre bu baz bileşenine ait MBH değeri için elde edilen ötelemeler birbirine son derece yakındır ve aralarındaki oran Çizelge 5.3.′de son sütunda verilen iç güvenirlik oranları ile aynıdır. Diğer bir deyişle bir gözlemin çoklu korelasyon katsayısına bağlı olarak robustluk analizi sonuçları değişmekte ve iç güvenirlik ölçütleri arasındaki oran aynı şekilde robustluk analizi ile elde edilen ötelemelere yansımaktadır.

Çoklu korelasyon katsayısı bu kez oldukça yüksek (0.9540) olan MIL1-DET1 bazının ΔY bileşenine ait MBH değerlerine göre robustluk analizi yapıldığı zaman ağ noktalarının uğrayacağı ötelemeler ise Çizelge 5.6.´da gösterilmiştir. Benzer durum burada da görülmektedir. Ancak bu kez öteleme değerleri arasında daha büyük bir fark oluşmaktadır.

Çizelge 5.6. Ötelemeler (mm)

Site	d_i	$\bar{\bar{d}}_i$	$d_i/\bar{\bar{d}}_i$
MIL1	0.5186	0.1695	3.06
WLCI	0.0778	0.0254	3.06
NLIB	0.2138	0.0699	3.06
STB1	0.2107	0.0688	3.06
SAG1	0.5128	0.1676	3.06

Geleneksel olarak gözlemler arasındaki korelasyonları dikkate almadan yapılan robustluk analizinde sonuçlarını etkileyen önemli bir etken redundans sayılarıdır. Redundans sayıları küçüldükçe MBH değerleri büyüdüğü için robustluk analizinde öteleme veya diğer ölçütlerin büyüdüğü bilinmektedir (Berber 2006). Bu durumun korelasyonlu durumda da geçerli olup olmadığını göstermek için dış merkezlik parametresi ve standart sapması bir (etkisiz eleman) olan ve normalleştirilmiş redundans sayısı iki ekstrem durum ($\bar{\bar{r}}_i = 0.9999$ ve $\bar{\bar{r}}_i = 0.0001$) olarak kabul edilen sanal bir gözlem için elde edilen öteleme değerleri Çizelge 5.7.´de verilmektedir. Bu iki ekstrem durum için elde edilen MBH değerleri sırasıyla 1 m ve 100 m´dir. İlk durumda normalleştirilmiş güvenirlik sayısı daha büyük olduğu için gözlemin kontrol edilebilirliği daha büyük olmakta ve dolayısıyla MBH değeri daha küçük çıkmaktadır. Normalleştirilmiş güvenirlik sayısı arttıkça istatistiksel test ile uyuşumsuz ölçü belirleme yeteneğinin artacağı açıktır.

Çizelge 5.7. Ötelemeler (mm)

İstasyonlar	$\bar{\bar{d}}_i$ ($\bar{\bar{r}}_i = 0.9999$)	$\bar{\bar{d}}_i$ ($\bar{\bar{r}}_i = 0.0001$)
MIL1	90.24	9023.53
WLCI	39.46	3945.86
NLIB	195.56	19555.56
STB1	26.31	2631.41
SAG1	53.56	5355.56

Çizelge 5.7.´de açıkça görüldüğü gibi iki farklı durumda elde edilen ötelemelerin oranı MBH değerlerinin oranı kadardır (100 kat). Normalleştirilmiş güvenirlik sayısı büyüdükçe öteleme değerleri küçülmektedir. Öyle ise bu örnekte gösterildiği gibi robustluk analizini GPS ağlarına uygularken korelasyonlar normalleştirilmiş güvenirlik sayılarını kullanarak dikkate alınmalıdır. Bu durumda da robustluk analizi sonuçları klasik ağlardakine benzer şekilde yorumlanabilir.

5.3. Uygulama III

Baarda yöntemiyle uyuşumsuz ölçü analizinde seçilen olasılık seviyeleri iç güvenirlik ölçütlerinin büyüklüklerini etkilediği için robustluk analizi ile elde edilen gerilme değişmezlerinin diğer bir deyişle söz konusu sanal deformasyonun üzerinde önemli bir etkisi olabilir. Bunu ortaya koyabilmek için Çizelge 5.8.´de verilen olasılık seviyeleri ve dış merkezlik parametresine göre ağın robustluk analizi in-context ve out-of-context yaklaşımda yapılarak elde edilen gerilme değişmezleri incelenmiştir. Çizelge 5.8´de gösterildiği gibi aynı α ve β değerleri için in-context yaklaşımında daha büyük dış merkezlik parametreleri söz konusudur. Her iki yaklaşımda da dış merkezlik parametresini küçültmek için α ve β değerlerini büyütmek gerekmektedir.

Çizelge 5.8. Dış merkezlik parametreleri

Kombinasyon No	α	β	$\sqrt{\lambda_0}$ (out-of-context)	$\sqrt{\lambda_0}$ (in-context)
1	0.001	0.001	6.38	7.33
2	0.005	0.005	5.38	6.44
3	0.010	0.010	4.90	6.02
4	0.025	0.025	4.20	5.41
5	0.050	0.050	3.61	4.90
6	0.050	0.100	3.24	4.54
7	0.100	0.100	2.92	4.34
8	0.050	0.200	2.80	4.10
9	0.100	0.200	2.48	3.90

Out-of-context yaklaşımda farklı olasılık kombinasyonlarına göre elde edilen gerilme değişmezleri Çizelge 5.9.´da gösterilmiştir.

Çizelge 5.9. Gerilme değişmezleri (ppm)

Kombinasyon	Σ	Ω	M
1	0.0314	0.0310	0.1035
2	0.0265	0.0262	0.0873
3	0.0241	0.0239	0.0795
4	0.0207	0.0204	0.0681
5	0.0178	0.0176	0.0585
6	0.0160	0.0158	0.0526
7	0.0144	0.0142	0.0474
8	0.0138	0.0136	0.0454
9	0.0122	0.0121	0.0402

In-context yaklaşımda farklı olasılık kombinasyonlarına göre elde edilen gerilme değişmezleri Çizelge 5.10.´ da gösterilmiştir.

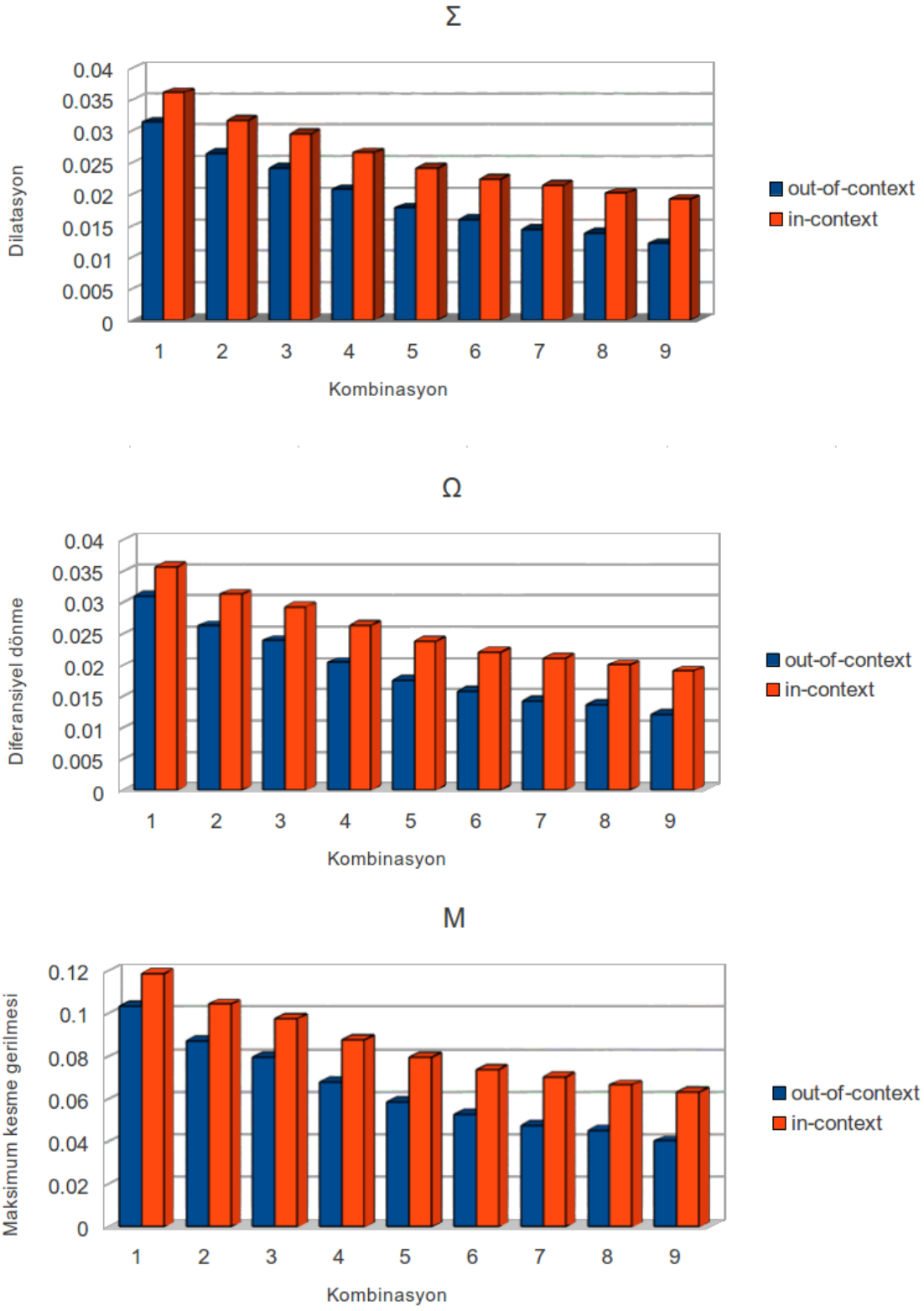
Çizelge 5.10. Gerilme değişmezleri (ppm)

Kombinasyon	Σ	Ω	M
1	0.0361	0.0357	0.1189
2	0.0317	0.0313	0.1044
3	0.0296	0.0293	0.0976
4	0.0266	0.0263	0.0877
5	0.0241	0.0238	0.0795
6	0.0224	0.0221	0.0736
7	0.0214	0.0211	0.0704
8	0.0202	0.0200	0.0665
9	0.0192	0.0190	0.0632

Çizelgelerden görüldüğü gibi ağ in-context yaklaşımda daha fazla deformasyona uğramaktadır. Ayrıca dış merkezlik parametresi küçüldükçe daha küçük gerilme değişmezleri elde edilmektedir. Ancak dış merkezlik parametresini küçük tutabilmek için olasılık seviyeleri büyük seçilmelidir. Bu da istatistiksel test açısından sakıncalıdır. İstatistiksel testleri yaparken bu duruma dikkat edilmelidir.

Out-of-context ve in-context yaklaşımları ile yapılan robustluk analizinde elde edilen gerilme değişmezleri grafik olarak Şekil 5.4.´te gösterilmiştir. Burada aynı kombinasyonlarda in-context yaklaşımının out-of-context yaklaşımına göre daha büyük gerilme değişmezleri verdiği yani ağ robustluğunun azaldığı açıkça görülmektedir. Bunun sebebi belirlenemeyen hata miktarlarının daha büyük olmasıdır. Aynı zamanda hata olasılıkları küçüldükçe daha büyük gerilme değişmezlerinin elde edildiği gösterilmeye çalışılmıştır. Bunun sebebi ise dış merkezlik parametresinin büyümesi ve

bunun bir sonucu olarak da belirlenebilen hata miktarlarının sınır değerlerinin yükselmesidir.



Şekil 5.4. Gerilme değişmezlerinin grafik olarak gösterimi

5.4. Uygulama IV

Nokta sayısı arttırılarak baz sayısı (ölçü sayısı) ve dolayısıyla ağ redundansı arttırılabilir. Böylece ağın robustluğu iyileştirilebilir. FAUNet ağı (Şekil 5.2.) ilk önce 5 nokta ve 6 baz olacak şekilde tasarlanmış ve robustluk analizi yapılmıştır. Ağın ortalama redundans sayısı $\bar{r} = 0.33'$tür. Ağ 2D olarak ele alınmıştır. Elde edilen öteleme değerleri Çizelge 5.11.′de görülmektedir.

Çizelge 5.11. Ötelemeler (mm)

Noktalar	d_i
1	1.68
2	2.46
3	1.82
4	1.69
5	1.15

Çizelge 5.11.′den görüldüğü gibi en küçük öteleme değeri 5 numaralı nokta için elde edilmiştir. Bunun sebebi 5 noktasının daha fazla noktaya gözlemlerle bağlı olması dolayısıyla daha fazla ölçüye sahip olmasıdır.

FAUNet ağı 2 nokta eklenerek 7 nokta ve 21 bazdan oluşan bir ağ haline getirilmiştir (Şekil 5.3.). Ortalama redundans sayısı bu kez $\bar{r} = 0.71'$dir. Ağ 2D olarak ele alınıp robustluk analizi yapılmıştır. Elde edilen öteleme değerleri ise Çizelge 5.12.′de verilmektedir.

Çizelge 5.12. Ötelemeler (mm)

Noktalar	d_i
1	0.24
2	0.38
3	0.26
4	0.22
5	0.05
6	0.32
7	0.28

Çizelge 5.12. dikkatle incelenirse öteleme değerlerinde belirgin bir düşüş olduğu görülecektir. Ağın redundansı iyileştiği için robustluğu artmış ve belirlenemeyen hataların yol açtığı deformasyona daha az uğramıştır. En küçük deformasyon 5 numaralı

noktada elde edilmiştir. 5 numaralı nokta ağın ortasında yer aldığı için daha kolay kontrol edilmektedir.

5.5. Uygulama V

Robustluk analizi ağın şekli ve gözlemlerin presizyonuna bağlıdır. Bir önceki örnekte ağ geometrisinin robustluk üzerindeki etkisi gösterilmişti. Bu bölümde ise gözlemlerin (baz vektör bileşenleri) varyans-kovaryans matrisi dolayısıyla presizyonlarının etkisi gösterilmeye çalışılacaktır. Bunun için Şekil 5.3.´de gösterilen 2D ağın robustluk analizi yapılmış ve robustluk ölçütleri elde edilmiştir. Bunlar Çizelge 5.13.´de 2. satırda gösterilmektedir.

Çizelge 5.13. Robustluk ölçütleri (ppm)

σ	τ	υ	ω	γ
-1.8571	1.5782	2.8002	2.9669	2.8320
-18.5713	15.7824	28.0019	29.6686	28.3205

Gözlemlerin varyans-kovaryans matrisinin 100 ile çarpılarak ağ presizyonunun kötüleştirildiğini varsayalım. Bu durumda elde edilen robustluk ölçütleri Çizelge 5.13.´de 3. satırda verilmiştir.

Çizelge 5.13.´de gözlemlerin presizyonu kötüleştiği zaman ağın robustluğunun da kötüleştiği görülmektedir. Sadece varyans-kovaryans matrisi 100 ile çarpıldığı ve bunun dışında ağda herhangi bir değişiklik yapılmadığı için Presizyondaki kötüleşme oranı robustluk ölçütlerine de yansımış ve ölçütler ilk duruma göre 10 kat daha büyük değerler almışlardır. Burada verilen sayısal uygulama ile GPS ağlarında doğruluk ve duyarlık gibi iki farklı terimin ağ robustluğu için aslında çok yakından ilişkili olduğu gösterilmiştir.

5.6. Uygulama VI

Robust parametre kestiriminin GPS ağlarında uygulanabilirliğini göstermek için uniform olarak en güçlü test istatistiklerini kullanarak yapılan yinelemeli ağırlık indirgeme stratejisi CORSGL ağına uygulanmıştır. Uygulamada gözlemler arasındaki korelasyonlar dikkate alınmıştır.

Ağa ait baz vektör bileşenlerinin değerleri Çizelge 5.14.´de gösterilmektedir. Kaba hatasız gözlemler ile yapılan klasik EKKY dengelemesi ile bulunan nokta koordinatları Çizelge 5.15.´te 2. sütunda gösterilmiştir. EKKY sadece rasgele hatalı gözlemlere uygulandığı zaman en optimal durumu verdiği için bu sütunda verilen koordinat değerleri kaba hatalı gözlemler ile yapılan parametre kestirimi sonucu elde edilen koordinat değerlerinin karşılaştırılması için referans alınmıştır.

NLIB-MIL1 bazının ΔY bileşeni $+5$ m hatalı kabul edilerek 93595.0868 m yerine 93590.0868 m olarak değiştirilmiş ve bu şekilde kirletilmiş gözlem setine EKKY ile robust kestirim yöntemi uygulanmıştır. EKKY ile bulunan koordinat değerleri Çizelge 5.15.´te 3. sütunda verilmiştir. Robust kestirim ile bulunan koordinat değerleri ise aynı çizelgenin 4. sütununda gösterilmiştir.

Çizelge 5.14. Gözlemler (m) (Snow 2002)

BAZLAR	ΔX	ΔY	ΔZ
NLIB-MIL1	303070.4873	**93595.0868**	100953.6848
NLIB-STB1	343370.1879	233532.8082	244499.1146
NLIB-SAG1	627309.4588	164860.1847	151566.7236
NLIB-DET1	698959.2192	71617.0870	43334.1768
WLCI-STB1	-36210.1220	299502.4067	324893.6501
MIL1-STB1	40299.6816	139937.7255	143545.4233
MIL1-DET1	395888.7290	-21978.0055	-57619.5150
STB1-SAG1	283939.2827	-68672.6080	-92932.4050
STB1-DET1	355589.0576	-161915.7376	-201164.9324
SAG1-MIL1	-324238.9628	-71265.1285	-50613.0072
SAG1-DET1	71649.7642	-93243.1321	-108232.5245
WLCI-NLIB	-379580.3089	65969.5692	80394.5595
WLCI-MIL1	-76509.7968	159564.6675	181348.2377
WLCI-SAG1	247729.1634	230829.8005	231961.2424
WLCI-DET1	319378.9265	137586.6704	123728.7143

Kirletilmiş gözlem setine uygulandıklarında hangi yöntemin rasgele hatalı gözlem setine uygulanmış EKKY sonucu elde edilen koordinat değerlerine daha fazla yaklaştığını görmek için elde edilen koordinat değerleri arasındaki farkların karelerinin toplamı hesaplanmış ve Çizelge 5.15.´te son satırda gösterilmiştir. Buradan robust kestirimin optimal duruma daha fazla yaklaştığı açıkça görülmektedir.

Çizelge 5.15. Koordinatlar (m)

Koordinatlar	EKKY (Kaba Hatasız)	EKKY (Kaba Hatalı)	Robust Kestirim (Kaba Hatalı)
X_{MIL1}	172135.99	172136.04	172136.00
Y_{MIL1}	-4668696.64	-4668697.03	-4668696.65
Z_{MIL1}	4327808.33	4327808.27	4327808.32
X_{NLIB}	-130934.51	-130934.53	-130934.52
Y_{NLIB}	-4762291.73	-4762290.96	-4762291.72
Z_{NLIB}	4226854.64	4226854.72	4226854.66
X_{SAG1}	496374.95	496374.96	496374.95
Y_{SAG1}	-4597431.52	-4597431.49	-4597431.51
Z_{SAG1}	4378421.34	4378421.30	4378421.34
X_{STB1}	212435.67	212435.68	212435.67
Y_{STB1}	-4528758.91	-4528758.99	-4528758.92
Z_{STB1}	4471353.75	4471353.81	4471353.75
X_{WLCI}	248645.79	248645.81	248645.79
Y_{WLCI}	-4828261.31	-4828261.26	-4828261.31
Z_{WLCI}	4146460.10	4146460.09	4146460.10
$\sum(m^2)$	0	0.7736	0.0011

Kirletilmiş gözlemler seti ile yapılan parametre kestirimi sonucunda EKKY ve robust kestirim ile bulunan düzeltme değerleri ise Çizelge 5.16.´da gösterilmiştir. Çizelgenin 6. sütununda görüldüğü gibi 5 m´lik hata robust kestirim sonucu ilgili gözlemin düzeltmesine büyük oranda yansımıştır. Oysa 3. sütundan da görüldüğü gibi EKKY ile bulunan düzeltme hata miktarını tam olarak yansıtamamıştır. Bunun sebebi EKKY´nin yayma etkisidir.

Çizelge 5.16. Düzeltmeler (m)

	EKKY (Kaba Hatalı)			Robust Kestirim (Kaba Hatalı)		
Bazlar	ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ
NLIB-MIL1	0.08	***3.85***	-0.14	0.03	***4.98***	-0.03
NLIB-STB1	0.02	-0.84	-0.02	0.01	-0.01	-0.02
NLIB-SAG1	0.02	-0.72	-0.14	0.02	0.02	-0.05
NLIB-DET1	0.03	-0.77	-0.08	0.02	-0.02	-0.02
WLCI-STB1	-0.00	-0.13	0.08	0.00	-0.01	0.01
MIL1-STB1	-0.04	0.32	0.12	-0.01	0.00	0.01
MIL1-DET1	-0.05	0.39	0.06	-0.01	0.01	0.01
STB1-SAG1	-0.01	0.10	-0.11	-0.00	0.01	-0.01
STB1-DET1	-0.02	0.08	-0.07	-0.01	0.01	-0.01
SAG1-MIL1	0.05	-0.41	-0.03	0.01	-0.00	-0.01
SAG1-DET1	-0.00	-0.02	0.04	0.00	0.00	-0.00
WLCI-NLIB	-0.02	0.73	0.08	-0.01	0.03	0.00
WLCI-MIL1	0.03	-0.44	-0.06	0.00	0.00	-0.01
WLCI-SAG1	-0.02	-0.03	-0.03	-0.00	-0.00	0.00
WLCI-DET1	-0.02	-0.06	0.01	0.00	-0.00	0.00

5.7. Tartışma

Tesadüfi hatalar olarak bilinen rasgele hatalar herhangi bir fiziksel kurala uymadıkları için matematiksel olasılık yasaları ile değerlendirilirler. Düzeltmelerin karelerinin toplamını minimum yapan EKKY bilinmeyen parametrelerin olasılığı en yüksek değerlerinin tahmin edilmesini sağlar. EKKY ile rasgele hatalar parametre kestirimlerine yayılır ve duyarlık ölçütleri olan hata elipsleri gibi güven bölgeleri formunda tasvir edilirler. Ölçü sırasında dikkatsizlik eseri yapılan kaba hatalar ne pahasına olursa olsun belirlenmeli ve elemine edilmelidirler. Fakat bu bazen mümkün olmayabilir. Kullanılan yöntemler ister istatistiksel test yöntemi ister robust kestirim yöntemi olsun buna imkan veremeyebilir. Oysa EKKY´nin bu tür hatalara karşı duyarlı olduğu ve parametre kestirimlerinin bundan olumsuz bir şekilde etkilendiği bilinmektedir. Pratikte bunu önlemek için istatistiksel testler veya robust kestirim yöntemleri kullanılır. Öte yandan sistematik hataların veya istatistiksel test (data snooping) ile ortaya konulamamış küçük kaba hataların ağ sonuçları üzerindeki etkisini görmek için robustluk analizi tekniğinden yararlanılır. Ötelemeler, gerilme değişmezleri ve robustluk ölçütleri sistematik hataların noktalar üzerindeki etkilerini tasvir ederler. Kaba hatalar ve sistematik biaslar ağın doğruluğunu tanımlar. Bahsedilen robustluk analizi ölçütleri ağın hem doğruluk hem de duyarlığını tanımlayan ölçütlerdir. Gözlemlerdeki biasların parametre kestirimlerinde ötelemelere yol açtığı bilinmektedir. Bu öteleme ne kadar küçük ise çözüm o kadar doğrudur. Bunu belirleyebilmek için robustluk analizine başvurulabilir. Ancak doğruluğun daima bilinmez olduğu ve robustluk analizi ile bir yaklaşım yapılmaya çalışıldığı unutulmamalıdır.

Jeodezik ağların biaslara karşı reaksiyonları Baarda´nın istatistiksel test yöntemine bağlı olarak güvenirlik teorisi çerçevesinde değerlendirilmektedir. Ağın robustluğunu ifade eden güvenirlik gözlemlerdeki belirlenemeyen hatalara karşı koyma yeteneğidir. Dış güvenirlik ölçütünün datuma bağlı olarak ağ geometrisi ve gözlemlerin doğruluğunu yansıtması robustluk analizi yönteminin geliştirilmesine yol açmıştır. Robustluk analizi güvenirlik ve gerilme tekniklerinin bir birleşimi olan geometrik bir yöntemdir. Robustluk analizi ile belirlenemeyen hataların yol açtığı etki sanal bir deformasyon olarak açıklanmaya çalışılır.

Baarda yöntemini jeodezik ağlara uygularken istatistiksel olarak küçük α ve β değerlerinin seçilmesi istenir. Fakat bu durum $\sqrt{\lambda_0}$ dış merkezlik parametresinin büyümesine yol açar. $\sqrt{\lambda_0}$ büyüdükçe istatistiksel olarak belirlenebilecek hataların alt sınırı büyür. Dolayısıyla MBH değerleri büyür ve ağın robustluğu azalır.

GPS ağlarında gözlemler arasındaki korelasyonların dikkate alınmaması robustluk analizi sonuçlarını dramatik bir şekilde değiştirir. Günümüzde GPS ağları klasik ağların yerini her geçen gün daha fazla aldığı için bu konu robustluk analizini uygularken göz ardı edilmemelidir.

Ekonomik şartlarda göz önünde bulundurularak nokta ve baz sayısı mümkün olduğunca arttırılırsa sistematik biasların etkisi azaltılabilir. Aynı şekilde ölçülerin presizyonu iyileştirilerek de bu etki azaltılır. Tecrübeli bir ölçü ekibi, kaliteli ölçü aletleri ve yöntemleri ile presizyon arttırılabilir.

Jeodezik ağların istatistiksel analizinde gerek uyuşumsuz ölçü testlerini yaparken gerekse de güvenirlik ve robustluk analizini yaparken en fazla bir tane kaba hatalı ölçünün olabileceği farz edilmektedir. Buna karşın özellikle ağ büyüdükçe ve ölçü sayısı arttıkça pratik olarak belirlenemeyen hata sayısının birden fazla olabileceği açıktır. Klasik olarak robustluk analizini yaparak ağımızın bir tane belirlenmemiş hataya karşı robust olduğuna karar vermiş olabileceğimizi düşünelim. Bu durumda ağ sonuçlarını güvenle kullanabileceğimizi söyleyebiliriz. Oysa aslında ağımızda 2 veya daha fazla belirlenmemiş hata olabilir. Ağımız belki 2 hataya karşı da robusttur fakat hata sayısı 3 olduktan sonra bu robustluk ortadan kalkıyor olabilir. O halde tam manası ile bir robustluk analizi yapabilmek için çoklu uyuşumsuz ölçüler için genelleştirilmiş güvenirlik ölçütleri kullanılmalıdır. Yalnız burada dikkate edilecek nokta kaç tane belirlenmemiş hata olabileceği bilinemeyeceği için bu konuda yapılacak tahminin olabildiğince gerçekçi olması gerekir. Örneğin 5 gibi yüksek bir sayıda belirlenmemiş hatanın olabileceğinin kabul edilerek robustluk analizi yapılması ve bunun sonucunda da büyük bir deformasyonun ortaya çıkarılması yanlış yorumlara yol açabilir. Kısacası bir ağda kaç tane belirlenmemiş hata olabileceğine karar vermek oldukça güçtür.

Özetlemek gerekirse bir ağın gözlemlerdeki kaba ve sistematik hatalara karşı koyma yeteneği gerilme yaklaşımına dayalı bir yöntem olan robustluk analizi ile ölçülür. Rasgele hataların yayılımı ve birikimi ise geleneksel kovaryans analizi ile belirlenmektedir. Gerilme yaklaşımı dengeleme kısıtlamalarından bağımsız bir şekilde sadece ağ geometrisi ve gözlemlerin doğruluğunu yansıtarak ağın robustluğunu

değerlendirme imkanını sunmaktadır. Öte yandan robustluk analizi güvenirlik teorisine sıkı sıkıya bağlıdır. Güvenirlik teorisi çerçevesinde çoklu uyuşumsuz ölçüler durumu, gözlemler arasındaki korelasyonların dikkate alınması, istatistiksel test yaklaşımı ve istatistiksel testte 1. ve 2. tip hataları yapma olasılıklarının seçimi robustluk analizi sonuçlarını doğrudan etkilemektedir.

Unutulmaması gereken bir nokta sistematik hataların kesinlikle tamamen ortadan kaldırılamayacağıdır. Kalan sistematik hatalar randomize hatalar olarak ele alınabilir ve bunların varlıkları dengeleme sonrası istatistiksel yöntemle ortaya çıkartılabilir. Ayrıca lokal sistematik hatalarla küçük büyüklüklü kaba hatalar arasında açık bir ayırım yapılamaz. Her iki tür hata gözlemler üzerinde aynı etkiye sahiptir. Bu durum büyük rasgele hatalar ile çok küçük kaba hatalar arasında da söz konusudur (Kuang 1996).

Robust kestirim kaba hataların etkisini azaltarak hatta yok ederek daha doğru bir parametre kestirimi yapmaya çalışırken robustluk analizi Baarda´nın data snooping yöntemi sonucu ortaya çıkartılamayan hataların ağ üzerindeki etkisini ölçmeye yaramaktadır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Geleneksel olarak jeodezik ağlar duyarlık ölçütü olarak kullanılan güven bölgelerine (elipsler) göre sınıflandırılmaktadır. Bununla birlikte güven bölgeleri ağın kullanıcı tarafından seçilmiş bir doğruluk kriterini sağlayıp sağlamadığı hakkında bilgi vermezler. Tahmin edilen parametreler üzerindeki olası toplam hatanın tam bir şekilde karakterize edilmesi için hem duyarlık hem de doğruluğu sağlayan bir ölçütün olması gerekmektedir. Aynı zamanda duyarlık ve güvenirlik ölçütlerine hem mutlak hem de bağıl anlamda ihtiyaç duyulmaktadır. Özellikle datumdan bağımsız ölçütlerin tanımlanmış olması önemlidir.

Gözlemlerdeki hatalar rasgele ve sistematik hatalar olarak sınıflandırılabilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ve gözlemlerin kovaryans matrisi ile karakterize edilen rasgele hatalar için duyarlığı (presizyon) tanımlayan güven bölgeleri kullanılır. Rasgele hataların gerçek değer civarında normal veya Gauss dağılımına uyduğu varsayılır. EKKY ile dengeleme hesabı sonunda tahmin edilen parametrelerin, düzeltmelerin ve dengelenmiş gözlemlerin kovaryans matrisleri duyarlık analizi kapsamında hesaplanmaktadır. Sistematik hatalar ise rasgele hataların dağılımında bir biasa (öteleme) neden olmaktadırlar. Bu nedenle parametrelerin tahmin değerlerinde sistematik bir ötelemeye yol açmaktadırlar. Öteleme ne kadar küçükse ağda doğruluk o kadar yüksektir. Bias doğruluğu ifade eden güvenirlik ve robustluk analizi ile değerlendirilir. Ağı etkileyen bir kaba hata veya sistematik bias olması durumunda doğruluğu ifade etmek için ağın bu etkenlere ne kadar karşı koyabildiği belirlenir. Çeşitli mühendislik projelerinde kullanılacak bir ağın biaslara karşı koyma açısından güçlü olması istenir. Çağdaş istatistiksel terminolojiye bağlı kalmak için bu tip bir güç robustluk olarak adlandırılmıştır. Standart istatistiksel test yöntemiyle (Baarda yöntemi) belirlenebilen bias veya kaba hatanın minimum büyüklüğü ağın robustluğunu değerlendirme açısından önemlidir. Bir ölçüdeki MBH ne kadar büyükse ağ o kadar zayıf diğer bir deyişle daha az robusttur. Rasgele hatalar için güven elipslerinin ifade ettikleri anlam bias ve kaba hatalarda robustluk ölçütleri, gerilme değişmezleri veya ötelemeler ile ifade edilmektedir. Gözlemlerdeki kaba hatalar ile sistematik biaslara ağın vereceği tepkiyi ölçen robustluk analizi istatistiksel bir yaklaşım olan güvenirlik analizi ile geometrik güç analizinin bir birleşimidir. Gerilme tekniğinde deformasyon

tamamen geometrik olarak yorumlanır. Kaba hata veya biasların ağda sanal bir deformasyona yol açtıkları kabul edilir. Deformasyon basitçe ölçek, şekil ve yönelmedeki değişiklik olarak tanımlanır. O yüzden en az üç adet robustluk ölçütü veya gerilme değişmezine gerek duyulmaktadır. Ağ noktalarındaki ötelemelerde deformasyon tanımında yer alırlar.

Ağın robustluğunu niceliksel olarak ortaya koymak için yapılması gereken ilk işlem ağdaki gözlemlerin redundans sayılarını belirlemektir. Redundans sayısı çok küçük olan ölçüler robustluk analizine dahil edilmezler. Redundans sayısı ilgili ölçüde yapılan toplam rasgele ve sistematik hatanın ölçünün düzeltmesine yansıması oranını belirtmektedir. Ancak GPS ağları gibi korelasyonlu gözlemlerin olduğu bir ağda Baarda´nın klasik redundans sayıları yerine güvenirlik sayıları kullanılmaktadır. Schaffrin´in normalleştirilmiş güvenirlik sayıları ise Baarda´nın redundans sayıları gibi kolay bir şekilde yorumlandığı için tercih edilebilir. Redundans sayıları (korelasyonlu durumda normalleştirilmiş güvenirlik sayıları) belirlendikten sonra güvenirlik ölçütleri hesaplanmakta ve ardından robustluk analizi yapılmaktadır. Bu nedenle robustluk analizi GPS ağlarına uygulanırken gözlemler arasındaki korelasyon dikkate alınmalıdır. Bu tez çalışması ile robustluk analizi GPS ağlarına ilk kez korelasyonlar normalleştirilmiş güvenirlik sayılarını kullanılması suretiyle dikkate alınarak uygulanmıştır. Elde edilen sonuçların klasik duruma göre oldukça değişik olması konunun önemini göstermiştir. Öte yandan bir ağda gözlemler arasındaki çoklu korelasyon katsayıları ne kadar büyükse korelasyonu dikkate alan güvenirlik ölçütlerinin kullanılması o kadar önem kazanmaktadır. Gözlemler arasındaki çoklu korelasyon katsayıları eğer bir ağda çok küçük (sıfıra yakın) ise klasik güvenirlik analizi ölçütleri kullanılarak robustluk analizi yapılabilir. Bu tez çalışmasında ayrıca redundans sayılarını kullanarak hesaplanan MBH´lar ile normalleştirilmiş güvenirlik sayılarını kullanarak hesaplanan MBH´lar arasında bir oran çıkartılmıştır. Ayrıca bu bağıntının korelasyonlu ve korelasyonsuz durum için yapılan robustluk analizleri ile elde edilen ötelemeler, deformasyon ölçütleri ve gerilme değişmezleri arasında da geçerli olduğu gösterilmiştir. Öte yandan redundans sayıları gibi normalleştirilmiş güvenirlik sayıları da sıfıra ne kadar yakınsa ağ o kadar zayıf, bire ne kadar yakınsa ağ o kadar robusttur. En büyük öteleme değerleri redundans sayısı (korelasyonlu gözlemler için normalleştirilmiş güvenirlik sayısı) küçük olan gözlemlerden kaynaklanmaktadır.

Robustluk analizinin en önemli yapı taşlarından birisi Baarda tarafından geliştirilen güvenirlik analizidir. Klasik güvenirlik teorisi bir jeodezik ağda sadece bir

tane uyuşumsuz ölçü olduğunu varsayar. Bu kural data snooping yöntemiyle uyuşumsuz ölçü yerelleştirmesi yaparken uygulandığı gibi güvenirlik ölçütlerini hesaplarken de geçerlidir. Bununla birlikte özellikle büyük ağlarda ve doğal olarak GPS ağlarında da birden çok belirlenmemiş hata söz konusu olabilir. Bu durumda bir tek uyuşumsuz ölçü varsayımına dayalı olarak yapılan istatistiksel test ve güvenirlik analizi çoklu uyuşumsuz ölçülere genelleştirilmelidir. Bu tez çalışması kapsamında robustluk analizi çoklu uyuşumsuz ölçüler için geliştirilen güvenirlik ölçütleriyle yapılmış ve gerilme değişmezlerinin birden çok belirlenemeyen hata olduğu zaman daha büyük değerler alabildiğini gösterilmiştir. İstatistiksel test yöntemiyle ağda ne kadar çok sayıda hatalı ölçü belirlenemezse o kadar çok deformasyonun oluşacağı açıktır. Bu olgunun robustluk analizi tarafından ortaya konması onun ne kadar yararlı ve güçlü bir teknik olduğunu gösterir. Öte yandan burada dikkat edilmesi gereken nokta robustluk analizi yaparken belirlenemeyen hata sayısının kaç olarak alınacağıdır. Çünkü ağda ne kadar belirlenmemiş hata olduğu bilinemez. Ağ ne kadar çok sayıda hataya karşı robust ise o oranda iyidir. Belirlenen uygun sayıda bir hataya karşı ağ dayanıklı ise söz konusu ağ sonuçları rahat bir şekilde kullanılabilir.

GPS ağlarında nokta sayısı arttırıldığı zaman ölçü sayısı ve buna bağlı olarak redundans artar bu da ağ noktalarında daha küçük öteleme değerlerinin elde edilmesini sağlar. Ayrıca baz bileşenleri daha presizyonlu bir şekilde ölçülebilirse öteleme değerleri küçültülebilir. Nokta sayısının arttırılması ve ölçü presizyonunun iyileştirilmesi robust bir ağ elde etmek için uygun bir stratejidir.

α_0 ve β_0 olasılıkları $\sqrt{\lambda_0}$ dış merkezlik parametresini belirlediği için robustluk analizi sonuçlarını etkilemektedir. İstatistiksel açıdan bakıldığı zaman α_0 ve β_0 olabildiğince küçük seçilmeye çalışılır. Çünkü bu sayede istatistiksel analizde yanlış karar verme ihtimali düşer. Bununla birlikte ikisini birden düşürmek dış merkezlik parametresinin de daha çok büyümesine yol açar. Bu da MBH değerlerini çok büyütür. Diğer bir deyişle uyuşumsuz ölçü belirleme güçleşir. Ayrıca MBH değerleri büyüdüğü için robustluk analizi ile elde edilen gerilme değişmezleri de daha büyük değerler alırlar. Bunun anlamı ağın robustluğunun azaldığıdır. Bu yüzden α_0 ve β_0 değerleri ile robustluk arasında bir denge kurulmalıdır.

6.2. Öneriler

Pratikte bütün jeodezik ağlar gibi GPS ağları da kovaryans analizi ile değerlendirilmektedir. Bu yaklaşımda gözlemleri sadece normal dağılıma uyan rasgele hataların etkilediği kabul edilmektedir. Oysa sistematik hatalar bizim için son derece tehlikelidir ve bu konunun üzerinde önemle durulmalıdır. Başta GPS ağları olmak üzere jeodezik ağlarda duyarlık ölçütlerine ek olarak güvenirlik ölçütleri de kullanılmalıdır. Sadece duyarlık ölçütlerinin kullanılması yanlış yorumlara neden olabilir. Bunun önemi şu şekilde açıklanabilir. Küçük güven bölgeleri ve robustluk ölçütleri (gerilme değişmezleri ve ötelemeler dahil) ağın hem duyarlı hem de doğruluğunun yüksek olduğu anlamına gelir ve bu durum en iyi durumdur. En kötü durum ise büyük güven bölgeleri ve robustluk ölçütleriyle karşılaşılması durumudur. Bu durumda hem duyarlı hem de doğruluk kötüdür. En tehlikeli durum ise küçük duyarlık ölçütleri ve büyük robustluk ölçütleri yada tam tersi büyük duyarlık ölçütleri ve küçük robustluk ölçütlerinin olmasıdır. Diğer bir deyişle ağ sonuçları hem presizyonlu hem de doğru olmayabilirler. Bu durumlar ancak duyarlık ve robustluk analizi birlikte yapılırsa ortaya konabilir. Robustluk analizi gerilme tekniğini kullandığı için dengeleme kısıtlamalarından bağımsız bir şekilde sadece ağın şekli (geometrisi) ve gözlemlerin kalitesine bağlı olarak belirlenmemiş hataların etkisini tanımlamaya yarayan bir yaklaşımdır.

Gerek CORS ağları gibi büyük alanları kapsayan ağlar olsun gerekse daha küçük alanlarda tesis edilen mikro ağlar olsun bütün GPS ağlarının robustluk analizinin yapılması ağ sonuçlarının doğruluğu hakkında fikir edinme açısından büyük önem taşımaktadırlar. Ülkemizde de bu konuda gerekli çalışmalar yapılmalıdır. CORS TR projesinde robustluk analizi uygulanabilir. Örneğin birkaç CORS noktası ve sıklaştırma noktalarından oluşan ağlarda robustluk analizi yöntemi ile oluşturulan ağın doğruluğu analiz edilebilir. Çeşitli mühendislik projeleri için kurulan GPS ağları da duyarlık analizine ek olarak robustluk analizi yöntemi ile değerlendirilmelidir. Ayrıca ağın zayıf ve güçlü noktaları belirlenip gösterilmelidir. Duyarlı ve robust ağların kullanıldığı mühendislik ölçmelerinin daha güvenilir olacağı açıktır. Robustluk analizi yöntemi harita yapım yönetmeliği dahil ilgili yönetmeliklere girebilir.

GPS ağlarının robustluk analizi yapılırken gözlemler arasındaki korelasyonlar dikkate alınmalıdır. Aynı zamanda uygun yanılma olasılıkları seçilmelidir. Küçük yanılma olasılıkları ağın robustluğunu düşürdüğü için nokta ve baz sayısı veya

gözlemlerin presizyonu arttırılarak ağ robustluğu iyileştirilebilir. Bununla birlikte ağda birden çok belirlenmemiş hatanın olabileceği kabul edilerek robustluk analizi yapılmalıdır. Çoklu uyuşumsuzlara karşı ağın robustluğunu iyileştirmek için de benzer strateji izlenebilir.

Değişik opsiyonlarla GPS ağlarının robustluk analizini yapan bir program geliştirilirse yöntemin yaygın bir şekilde kullanılması sağlanabilir. Bu program dengeleme hesabı, istatistiksel testler, robust kestirim, kovaryans analizi ve güvenirlik analizi uygulamalarına da yer verebilir.

KAYNAKLAR

Baarda, W., 1967, Statistical concepts in geodesy, Publications on Geodesy, New Series, Vol:2, No:4 *Netherlands Geodetic Commission*, Delft, Netherlands.

Baarda, W., 1968, A testing procedure for use in geodetic networks, Publications on Geodesy, New Series, Vol:2, No:5 *Netherlands Geodetic Commission*, Delft, Netherlands.

Baselga, S., 2007, Global optimization solution of robust estimation, *Journal of Surveying Engineering*, 133(3):123-128.

Berber, M., 2006, Robustness analysis of geodetic networks, Ph.D. Dissertation, *University of New Brunswick, Department of Geodesy and Geomatics Engineering*, Technical Report No. 242, Fredericton, NB, Canada.

Berber, M., 2008, Error analysis of geodetic networks, *Shaker-Publishing BV*, Maastricht, Netherlands.

Berber, M. and Hekimoğlu, S., 2003, What is the reliability of conventional outlier detection and robust estimation in trilateration networks, *Survey Review*, 37(290):308-318.

Berber, M., Dare, P. and Vaníček, P., 2006, Robustness analysis of two-dimensional networks, *Journal of Surveying Engineering*, 132(4):168-175.

Berber, M., Vaníček, P. and Dare, P., 2008, Fundamentals of robustness analysis, *Shaker-Publishing BV*, Maastricht, Netherlands.

Berber, M., Vaníček, P. and Dare, P., 2009, Robustness analysis of 3D networks, *Journal of Geodynamics*, 47(1):1-8.

Chen, Y.Q and Wang, J.L., 1996, Reliabiliy measures for correlated observations, *ZFV*, 5:211-219.

Dare, P., 1983, Strength analysis of horizontal networks using strain, *Survey Science* Tech. Rep. 2, University of Toronto, Erindale Campus, Mississauga, Ontario.

Dare, P. and Vaníček, P., 1982, Strength analysis of horizontal networks using strain, *Proceedings of the meeting of FIG study group 5b, Survey Control Networks,* Aalborg University Center, July 7-19, Denmark.

Ding, X. and Coleman, R., 1996, Multiple outlier detection by evaluating redundancy contributions of observations, *Journal of Geodesy*, 70:489-498.

Ghilani, C.D. and Wolf, P.R., 2008, Elementary surveying, an introduction to geomatics engineering, *Pearson Prentice Hall*, Upper Saddle River, NJ.

Guo, J., Ou, J. and Wang, H., 2010, Robust estimation for correlated observations: two local sensitivity-based downweighting strategies, *Journal of Geodesy*, 84, 243-250.

Hekimoğlu, S., 1998, Application of equiredundancy design to m-estimation, *Journal of Surveying Engineering*, 124(3), 103-124.

Hekimoğlu, S. and Berber, M., 2003, Effectiveness of robust methods in heterogeneous linear models, *Journal of Geodesy*, 76:706-713.

Hekimoğlu, S. and Erenoğlu, R.C., 2007, Effect of heteroscedasticity and heterogeneousness on outlier detection for geodetic networks, *Journal of Geodesy*, 81(2):137-148.

Huber, P.J., 1964, Robust estimation of a location parameter, *Ann Math Statist*, 35:73-101.

Jørgensen, P.C., Kubik, K., Frederiksen, P. and Weng, W., 1985, Ah, robust estimation!, *Australian journal of geodesy, photogrammetry and surveying*, 42, 19-32.

Knight, N.L. and Wang, J., 2009, A comparison of outlier detection procedures and robust estimation methods in GPS positioning, *Journal of Navigation,* Royal Institute of Navigation, 62(4):699-709.

Knight, N.L., Wang, J. and Rizos, C., 2010, Generalised measures of reliability for multiple outliers, *Journal of Geodesy*, 84:625-635.

Koch, K.R., 1999, Parameter estimation and hypothesis testing in linear models, 2nd edn., *Springer*, Berlin.

Kok, J.J., 1984, On data snooping and multiple outlier testing, NOAA Technical report, NOS NGS. 30, *U.S. Department of Commerce*, Rockville, Maryland.

Krakiwsky, E.J., Vaníček, P. and Szabo, D., 1993, Further development and testing of robustness analysis, *Geomatics Canada, Geodetic Survey Division*, Ottawa, Contract Report No. 93-001.

Krakiwsky, E.J., Szabo, D., Vaníček, P. and Craymer, M.R., 1999, Development and testing of in-context confidence regions for geodetic survey networks, Contract Report*, Geomatics Canada, Geodetic Survey Division*, Ottawa.

Krarup, T., Kubik, K. and Juhl, J., 1980, Götterdämmerung over least squares, *14th Congress of the International Society of Photogrammetry*, Hamburg, 370-378.

Krumm, F. and Grafarend, E.W., 2002, Datum-free deformation analysis of ITRF networks, *Artificial Satellites,* 37, 75-84.

Kuang, S., 1996, Geodetic network analysis and optimal design: concepts and applications, *Ann Arbor Press*, Ann Arbor, MI.

Leick, A., 2004, GPS satellite surveying. *Wiley*, New Jersey.

Ong, P.J., 1993, Robustness analysis for geodetic networks, Master Thesis, *University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering*, Fredericton, NB, Canada.

Schaffrin, B., 1997, Reliability measures for correlated observations, *Journal of Surveying Engineering*, 123(3), 126-137.

Simkooei, A.A, 2001, Comparison of reliability and geometrical strength criteria in geodetic networks, *Journal of Geodesy*, 75, 227-233.

Simkooei, A.A, 2003, Formulation of L1 norm minimization in Gauss-Markov models, *Journal of Surveying Engineering*, 129(1), 37-43.

Snow, K.B., 2002, Applications of parameter estimation and hypothesis testing to GPS network adjustments, *PhD Dissertation*, Ohio State University, Geodetic and GeoInformatic Science, Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science, Columbus, OH, Report No. 465.

Thapa, K., 1980, Strain as a diagnostic tool to identify inconsistent observations and constraints in horizontal geodetic networks, *University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering*, Fredericton, NB, Canada, Technical Report No. 68.

Vaníček, P., Thapa, K. and Schneider, D., 1981, The use of strain to identify incompatible observations and constraints in horizontal geodetic networks, *Manuscripta Geodaetica*, 6: 257-281.

Vaníček, P. and Krakiwsky, E.J., 1986, Geodesy: the concepts. *Elsevier Science Publishers B.V.,* Amsterdam.

Vaníček, P., Krakiwsky, E.J., Craymer, M.R., Gao, Y. and Ong P., 1991, Robustness analysis, *Geomatics Canada, Geodetic Survey Division*, Ottawa, Contract Report No. 91-002.

Vaníček, P., Ong, P., Krakiwsky, E.J. and Craymer M.R., 1996, Application of robustness analysis to large geodetic networks, *Geomatics Canada, Geodetic Survey Division*, Ottawa, Contract Report No. 96-001.

Vaníček, P., Craymer, M. R. and Krakiwsky, E.J., 2001, Robustness analysis of geodetic horizontal networks, *Journal of Geodesy*, 75, 199-209.

Vaníček, P., Grafarend, E. and Berber, M., 2008, Short note: strain invariants, *Journal of Geodesy*, 82, 263-268.

Wang, J. and Chen, Y., 1994, On the reliability measure of observations, *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, English edition, 42-51.

Wieser, A., 2002, Robust and fuzzy techniques for parameter estimation and quality assessment in GPS, PhD Dissertation, TU Graz, Ingenieurgeodäsie, *Shaker Verlag,* Aachen, Germany, ISBN 3-8265-9807-5.

Wieser, A., 2004, Reliability checking for GNSS baseline and network processing, *GPS Solutions*, 8, 55-66.

Wieser, A. and Brunner, F.K., 2002, Short static GPS sessions: robust estimation results, *GPS Solutions*, 5/3, 70-79.

Yang, Y., Song, L. and Xu, T., 2002, Robust estimator for correlated observations based on bifactor equivalent weights, *Journal of Geodesy*, 76, 353-358.

Yetkin, M. ve İnal, C., 2010, Jeodezik ağlarda L1 norm minimizasyonu: yükseklik ağı örneği, *Harita Dergisi*, 143:13-18.

Yetkin, M. and Inal, C., 2011, L1 norm minimization in GPS networks, *Survey Review*, 43(323):523-532.

EKLER

EK A. 2D Ağların Robustluk Analizi

Berber (2006)´da 2D ağların robustluk analizi aşağıdaki gibi açıklanmıştır.

Bir P_i noktasının ötelemeleri

$$\Delta\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

olarak gösterilsin. u x yönündeki öteleme v ise y yönündeki ötelemedir. Buradan konuma göre tensör gradyanı (gerilme matrisi)

$$E_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} & \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} & \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

olarak verilir. P_i noktası ile bu noktaya gözlemlerle bağlı P_j noktaları için u ve v ötelemeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$a_i + \frac{\partial u_i}{\partial x}(X_j - X_i) + \frac{\partial u_i}{\partial y}(Y_j - Y_i) = u_j \tag{A.3}$$

$$b_i + \frac{\partial v_i}{\partial x}(X_j - X_i) + \frac{\partial v_i}{\partial y}(Y_j - Y_i) = v_j \tag{A.4}$$

Matris formunda ağın her bir noktası için aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\mathbf{K}_i \begin{bmatrix} a_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} \end{bmatrix} = u_i \tag{A.5}$$

$$\mathbf{K}_i \begin{bmatrix} b_i \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{bmatrix} = v_i \tag{A.6}$$

Eğer bu denklemler EKKY ile çözülürse her bir ağ noktası için

$$\begin{bmatrix} a_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{K}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_i\right)^{-1}\mathbf{K}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_i = \mathbf{Q}_i\mathbf{u}_i \tag{A.7}$$

$$\begin{bmatrix} b_i \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{K}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_i\right)^{-1}\mathbf{K}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_i = \mathbf{Q}_i\mathbf{v}_i \tag{A.8}$$

Son iki denklem tek bir matris olarak genelleştirilirse ağın her bir noktası için

$$\begin{bmatrix} a_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ b_i \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

Öteleme vektörü ile gerilme matrisi arasındaki ilişkiye bakıldığı için mutlak terimlere gerek yoktur. Bu nedenle $\mathbf{Q}_i$ matrisinin ilk satırı silinebilir. İndirgenmiş matrsi $\mathbf{T}_i$ ile gösterilirse her bir ağ noktası için

$$\mathrm{vek}(\mathbf{E}_i) = \mathbf{T}_i\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_i \tag{A.10}$$

eşitliği elde edilir. Baarda´nın dış güvenirlik ölçütü de hesaba katılırsa her bir ağ noktasında

$$\mathrm{vek}(\mathbf{E}_i) = \mathbf{T}_i(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{c}_i\Delta\mathbf{l} \tag{A.11}$$

eşitliği ile gerilme matrisinin elemanları belirlenmiş olur.

P_i noktasının ötelemeleri ise 3D ağlara benzer bir şekilde

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} & \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} & \frac{\partial v_i}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \end{bmatrix} \quad \text{(A.12)}$$

ve

$$d_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2} \quad \text{(A.13)}$$

denklemleri ile hesaplanır.

Robustluk ölçütleri

Dilatasyon

$$\sigma_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y}\right) \quad \text{(A.14)}$$

Saf kesme

$$\tau_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\partial v_i}{\partial y}\right) \quad \text{(A.15)}$$

Basit kesme

$$\upsilon_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) \quad \text{(A.16)}$$

Diferansiyel dönme

$$\omega_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y}\right) \quad \text{(A.17)}$$

Toplam kesme

$$\gamma_i = \sqrt{\tau_i^2 + \upsilon_i^2} \quad \text{(A.18)}$$

2D ağlarda başlangıç koşulları 3D ağlarda olduğu gibi hesaplanır. Burada sadece gerekli olan formüller doğrudan verilecektir.

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 \right] \tag{A.19}$$

$$b_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \tag{A.20}$$

$$c_1 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 \right) X_i + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) Y_i \right] \tag{A.21}$$

$$a_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) \tag{A.22}$$

$$b_2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2 \right] \tag{A.23}$$

$$c_2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) X_i + \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2 \right) Y_i \right] \tag{A.24}$$

denklemleri ile bulunan değerler yardımıyla başlangıç koşulları

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{A.25}$$

eşitliği ile hesaplanır.

EK B. FAUNet Ağına Ait Veriler

Çizelge B.1. XYZ Koordinatları (m)

Nokta	X	Y	Z
1	945799.3576	-5590865.1222	2910496.9217
2	945900.5006	-5590847.8213	2910495.9650
3	945890.3064	-5590951.1609	2910303.2687
4	945816.4358	-5590952.9393	2910323.3610
5	945833.8501	-5590910.8822	2910397.6715
6	945813.9891	-5590819.8310	2910577.3446
7	945845.8979	-5590988.7175	2910245.0698

Çizelge B.2. Baz Vektörlerine İlişkin Kofaktör Elemanları

Baz	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	Q_{22}	Q_{23}	Q_{33}
5-1	12e-8	-2e-8	4e-8	50e-8	-18e-8	20e-8
5-2	13e-8	-1e-8	2e-8	74e-8	-37e-8	49e-8
5-3	8e-8	-1e-8	1e-8	49e-8	-24e-8	29e-8
5-4	11e-8	-2e-8	4e-8	46e-8	-17e-8	17e-8
4-1	13e-8	-2e-8	4e-8	52e-8	-19e-8	20e-8
3-2	13e-8	-1e-8	2e-8	74e-8	-37e-8	49e-8
5-6	18e-8	-16e-8	9e-8	122e-8	-69e-8	57e-8
5-7	20e-8	-17e-8	11e-8	134e-8	-76e-8	65e-8
6-7	14e-8	-9e-8	6e-8	65e-8	-28e-8	21e-8
6-1	20e-8	-29e-8	15e-8	92e-8	-38e-8	32e-8
6-2	21e-8	-28e-8	15e-8	92e-8	-38e-8	33e-8
1-2	7e-8	-8e-8	4e-8	33e-8	-11e-8	9e-8
7-3	12e-8	-9e-8	4e-8	77e-8	-41e-8	35e-8
7-4	12e-8	-10e-8	4e-8	74e-8	-38e-8	33e-8
4-3	8e-8	-6e-8	2e-8	54e-8	-30e-8	27e-8
7-1	13e-8	-13e-8	5e-8	61e-8	-18e-8	14e-8
7-2	15e-8	-15e-8	6e-8	71e-8	-21e-8	17e-8
6-3	9e-8	-6e-8	3e-8	32e-8	-13e-8	11e-8
6-4	18e-8	-12e-8	6e-8	86e-8	-38e-8	28e-8
1-3	13e-8	-12e-8	8e-8	53e-8	-28e-8	29e-8
2-4	12e-8	-11e-8	7e-8	48e-8	-22e-8	23e-8

EK C. Gerilme Matrisinin Hesaplanmasına İlişkin Örnek

CORSGL ağındaki MIL1 istasyonuna ait **K**, **Q** ve **E** matrisleri aşağıda verilmiştir.

$\mathbf{K}_{\mathrm{MIL1}}$;

1	0	0	0
1	395888.73	-21978.00	-57619.52
1	-303070.50	-93595.08	-100953.69
1	324238.96	71265.12	50613.01
1	40299.68	139937.73	143545.42
1	76509.80	-159564.67	-181348.23

$\mathbf{Q}_{\mathrm{MIL1}}$;

2.27541e-6	-4.39856e-7	-3.46178e-6	-3.05423e-8	-2.24155e-7	1.88092e-6
-5.34269e-5	3.09218e-5	4.65461e-5	1.44049e-5	-3.75652e-6	-3.46894e-5
4.93686e-5	-2.92510e-5	-4.31995e-5	-1.23337e-5	6.15654e-6	2.92590e-5

$\mathbf{T}_{\mathrm{MIL1}}$;

$\mathbf{Q}_{\mathrm{MIL1}}$	$0_{3\times6}$	$0_{3\times6}$
$0_{3\times6}$	$\mathbf{Q}_{\mathrm{MIL1}}$	$0_{3\times6}$
$0_{3\times6}$	$0_{3\times6}$	$\mathbf{Q}_{\mathrm{MIL1}}$

$\mathbf{E}_{\mathrm{MIL1}}$;

1.60339e-9	-2.49610e-8	2.31229e-8
4.97523e-11	2.05457e-9	-1.86279e-9
-1.66325e-10	4.49255e-10	-3.79416e-10

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Mevlüt YETKİN
Uyruğu	**:**	T. C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Konya-04.04.1982
Telefon	**:**	(332) 223 1930
Faks	**:**	(332) 241 06 35
e-mail	**:**	myetkin@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Konya Lisesi, Meram, Konya	1999
Lisans	:	Selçuk Ü., Jeod. ve Foto. Müh., Selçuklu, Konya	2005
Yüksek Lisans	:	Selçuk Ü., Jeod. ve Foto. ABD., Selçuklu, Konya	2008
Doktora	:	Selçuk Ü., Harita Müh. ABD., Selçuklu, Konya	2012

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2005-…	Selçuk Ü., Harita Müh., Ölçme T. ABD.	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI

Ölçme Tekniği, Robust Kestirim, Robustluk Analizi, Optimizasyon, Belirsizlik Çözümü

YABANCI DİLLER

İngilizce (ÜDS: 85, KPDS: 84)

YAYINLAR

1. **Yetkin, M.**, İnal, C. (2011). L1 Norm Minimization in GPS Networks. *Survey Review*, 43(323):523-532. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır)
2. **Yetkin, M.**, İnal, C., Yiğit, C.Ö. (2011). The Optimal Design of Baseline Configuration in GPS Networks by using the Particle Swarm Optimisation Algorithm. *Survey Review*, 43(323):700-712. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır)
3. Alçay, S., İnal, C., Yiğit, C.Ö., **Yetkin, M.** (2012). Comparing GLONASS-Only with GPS-Only and Hybrid Positioning in Various Length of Baselines. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 47(1):1-12.
4. Berber, M., Üstün, A., **Yetkin, M.** (2012). Comparison of Accuracy of GPS Techniques. *Measurement*, 45(7):1742-1746.
5. **Yetkin, M.**, İnal, C., Yiğit, C.Ö. (2009). Use of the Particle Swarm Optimization Algorithm for Second-Order Design of Leveling Networks. *Journal of Applied Geodesy*, 3(3): 171-178.

6. Yiğit, C.Ö., Li, X., İnal, C., Ge, L., **Yetkin, M.** (2010). Preliminary Evaluation of Precise Inclination Sensor and GPS for Monitoring Full-Scale Dynamic Response of a Tall Reinforced Concrete Building. *Journal of Applied Geodesy*, 4(2): 103-113.
7. **Yetkin, M.**, İnal, C., Yiğit, C.Ö. (2008). Optimal Design of Deformation Monitoring Networks by using PSO Algorithm. LNEC, 13th FIG Symposium on Deformation Measurement and Analysis, 4th IAG Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering, 12-15 Mayıs 2008, Lisbon-Portugal.
8. Yiğit, C.Ö., İnal, C., **Yetkin, M.** (2008). Monitoring of Tall Buildings Dynamic Behaviour using Precision Inclination Sensors. LNEC, 13th FIG Symposium on Deformation Measurement and Analysis, 4th IAG Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering, 12-15 Mayıs, 2008 Lisbon-Portugal.
9. **Yetkin, M.** (2009). Global Optimization Solution of Robust Regression using the Simulated Annealing Algorithm. 23rd European Conference on Operational Research, 5-8 Temmuz 2009, Bonn-Germany.
10. Yiğit, C.Ö., Li, X., İnal, C., Ge, L., **Yetkin, M.**, Arslan, M.H. (2010). Analysis of Wind-Induced Response of Tall Reinforced Concrete Building Based on Data Collected by GPS and Precise Inclination Sensor. XXIV FIG International Congress, 11-16 Nisan 2010, Sydney-Australia.
11. **Yetkin, M.**, İnal, C. (2011). Optimal Design of Deformation Monitoring Networks using the Global Optimization Methods. QuGOMS`11, 1st International Workshop on the Quality of Geodetic Observation and Monitoring Systems, 13-15 Nisan 2011, Munich-Germany.
12. **Yetkin, M.**, Berber, M. (2012). Preliminary Results of the Sign-Constrained Robust Least Squares Method in a Leveling Network. CSCE 2012 Annual Conference, 6-9 Haziran 2012, Edmonton-Alberta-Canada.
13. İnal, C., **Yetkin, M**. (2007). Robust Yöntemlerler Uyuşumsuz Ölçülerin Belirlenmesi. *Selçuk Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 21(3-4).
14. **Yetkin, M.**, İnal, C., Yiğit, C.Ö. (2009). Ölçülerin Korelasyonlu Olması Durumunda Robust Kestirim. *HKM Jeodezi Jeoinformasyon ve Arazi Yönetimi Dergisi*, 1:100(21-26).
15. **Yetkin, M.**, İnal, C. (2010). Jeodezik Ağlarda L1 Norm Minimizasyonu: Yükseklik Ağı Örneği. *Harita Dergisi*, 143:13-18.
16. **Yetkin, M.**, İnal, C. (2010). GNSS Taşıyıcı Faz Ölçmelerinde Belirsizlik Çözümü için LAMBDA Yöntemi. *HKM Jeodezi Jeoinformasyon ve Arazi Yönetimi Dergisi*, 2(103): 15-24.
17. **Yetkin, M.**, İnal, C. (2010). Robust Kestirimin GPS Ağlarında Kullanılabilirliği. *HKM Jeodezi Jeoinformasyon ve Arazi Yönetimi Dergisi*, 2(103): 3-8. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır).