T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN THETA METODU YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Metin KARACADAĞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2022

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN THETA METODU YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Metin KARACADAĞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2022

Doç. Dr. Mahmut MODANLI danışmanlığında, "**Üçüncü Mertebeden Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Theta Metodu Yardımıyla Nümerik Çözümü"** konulu bu çalışma 28/11/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Mahmut MODANLI ……

Üye : Prof. Dr. ALİ AKGÜL ……

Üye : Prof. Dr. Haydar ALICI ……

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalı'nda Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET i
ABSTRACT i
TEŞEKKÜR iii
ŞEKİLLER DİZİNİ iv
ÇİZELGELER DİZİNİ v
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ ..... vı
1.GİRİŞ 1
1.1. Temel kavramlar 2
1.2. Üçüncü mertebeden kesirli diferansiyel denklemlerin tam çözümü için Laplace dönüşüm metodu 4
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 13
3. MATERYAL ve YÖNTEM 15
3.1. Materyal 15
3.2. Yöntem 15
3.2.1. Theta metodu 15
3.2.2. Üçüncü mertebeden diferansiyel denklem kararlılığı için Von-Neumann analiz metodu 17
4.ARAŞTIMA BULGULARI ve TARTIŞMA 21
4.1. Nümerik Sonuçlar 21
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 32
5.1. Sonuçlar 32
5.2. Öneriler 32
KAYNAKLAR 33
ÖZGEÇMİŞ 35

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN THETA METODU YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Metin KARACADAĞ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mahmut MODANLI
Yıl:2022, Sayfa:35

Bu çalışmada, üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denklemin çözümü theta metodu ile elde edildi. Çözüm için theta metodu oluşturuldu. Bu metot için kararlılık kestirimleri ispatlandı. Bu metot kullanılarak üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denkleme ait örnek problemler üzerinde denklemlerin yaklaşık çözümü hesaplandı ve tam çözüm ile karşılaştırıldı. Bu problem için kullanılan yaklaşık çözüm kararlılık koşulları sağlanmak şartıyla etkili ve kullanışlı olduğu görüldü. Matlab programı kullanılarak da tam ve yaklaşık çözümler için grafikler verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denklem, Theta metodu, Kararlılık kestirimleri, Tam çözüm, Yaklaşık çözüm

ABSTRACT

MSc Thesis

NUMERICAL SOLUTION OF THIRD-ORDER FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THETA METHOD

Metin KARACADAĞ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mahmut MODANLI
Year: 2022, Page:35

In this study, the solution of the third order fractional partial differential equation is obtained by the theta method. Theta method is created for the solution. Stability estimates for this method have been proven. Using this method, the approximate solution of the equations was calculated a the sample problems of the third-order fractional partial differential equation and compared with the exact solution. The approximate solution used for this problem was found to be effective and useful provided the stability conditions were met. Graphs were given for exact and approximate solutions using the Matlab program.

KEY WORDS: Third-order fractional partial differential equation, Theta method, Stability estimates, exact solution, approximate solution

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında değerli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile her daima bana yol gösterici ve destek olan kıymetli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mahmut MODANLI' ya, çalışmam boyunca manevi olarak büyük fedakarlık gösterip bu zorlu süreçte benim moral ve motivasyonumu yüksek tutmaya çalışan sevgili eşim Güldemet KARACADAĞ ve kayınbabam Mehmet KARDAŞ başta olmak üzere canım aileme çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 4.1 (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$ aralığı ve $\alpha = 0.5,\ \theta = 0, N = 900, M = 30$ için tam çözüm ile yaklaşık çözüm grafiğini verir 24
Şekil 4.2 (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0.5, \theta = 0.5,\ N = 900,\ M = 30$ tam çözüm ile yaklaşık çözüm grafiğini verir..... …25
Şekil 4.3 (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$ aralığı ve $\alpha = 0.5, \theta = 1,\ N = 900, M = 30$ tam çözüm ile yaklaşık çözüm grafiğini verir ..... …25
Şekil 4.4 (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq \pi$ aralığı ve $\alpha = 0.5, \theta = 1,\ N = 900,$ $M = 30$ yaklaşık çözüm grafiğini verir..... …26
Şekil 4.5 (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq \pi$ aralığındaki tam çözüm grafiğini verir ..... …26
Şekil 4.6 (4.2) probleminin $0 \leq t \leq 1$ aralığı ve $\alpha = 0.5, \theta = 0,\ N = 900, M = 30$ için tam çözüm ile yaklaşık çözüm grafiğini verir ..... …29
Şekil 4.7. (4.2) probleminin $0 \leq t \leq 1,$ aralığı ve $\alpha = 0.5, \theta = 0.5,\ N = 900, M = 30$ için tam ve yaklaşık çözüm grafiğini verir..... …29
Şekil 4.8. ((4.2) probleminin $0 \leq t \leq 1,$ aralığı ve $\alpha = 0.5, \theta = 1,\ N = 900, M = 30$ için tam ve yaklaşık çözüm grafiğiniverir..... …30
Şekil 4.9. (4.2) probleminin $0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1$ aralıkları ve $\alpha = 0.5, \theta = 1, N = 900,$ $M = 30$ için yaklaşık çözüm grafiğini verir…….....30
Şekil 4.10. (4.2) probleminin $0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1$ aralıkları için tam çözüm grafiğini verir……..……....31

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 3.1. Kararlılık Kestirimi Analizi Tablosu.....20
Çizelge 4.1. Hata Analizi Tablosu.....23
Çizelge 4.2. Hata Analizi Tablosu.....28

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

C	Karmaşık Sayılar
${}_0^C D_t^\alpha$	α. mertebeden Caputo türev operetörü
KDD	Kısmi diferansiyel denklemler
$\mathcal{L}$	Laplace Dönüşüm Metodu
$\mathcal{L}^{-1}$	Ters Laplace Dönüşüm Metodu
R	Gerçek sayılar
RDTM	Reduced Differential Transform Method
Z	Tam sayılar

1.GİRİŞ

Kesirli ve kısmi diferansiyel denklemleri farklı anabilim dallarında uygulama alanına sahiptirler. Örneğin; sismoloji, mühendislik, fizik, elastik teorisi, termodinamik, viskoelastisite, elektrot-elektrolit polarizasyonu, finans, ısı iletimi, elektromanyetik dalgalar, difüzyon denklem sıvı akışkanları ve hidrodinamik gibi bilim dallarında yaygın olarak uygulamalara sahiptir (Çelik ve Duman, 2012). Bu tür diferansiyel denklemler uzay ve zaman ve uzay değişkenlerine göre çözümleri bulunabilir (Tadjeran ve ark., 2006). Uygulamalı bilimlerde, kesirli mertebeden türevlerden oluşan adi ve kısmi diferansiyel denklemler çeşitli sistemleri modellemek için kullanılır. Kesirli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için farklı yöntemler kullanılmaktadır. Zaman kesirli adveksiyon dağılım denklemi matris metodu kullanılarak yakınsaklığı ve karalılığı çalışıldı (Karatay ve ark., 2014). Theta metodu kullanılarak zaman kesirli mertebeli diferansiyel difüzyon denklemin yaklaşık çözümünü hesaplandı (Aslefallah ve ark., 2014). Awasthi, Srivastava ve Tamsir zaman değişkenine bağlı Caputo kesirli mertebeden telegraf denkleminin yaklaşık değerleri (Reduced Differential Transform Method) RDTM metodunu kullanarak buldu (Srivastava ve ark., 2013).

Özellikle çok yakın zamanda sonlu fark yöntemleri kullanılarak çok popüler ve çok sayıda çalışma yayınlandı. Ashyralyev ve Dal iterasyon ve sonlu fark yöntemlerini kullanarak $\alpha = 1/2$mertebeli Neumann koşuluna bağlı kesirli mertebeden hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü çalıştı (Ashyralyev ve Dal, 2012). (Hashemi ve ark., 2017) de değişken mertebeden kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri verildi. (Fanhai ve Changpin, 2013) makalesinde kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü sonlu fark yöntemiyle elde edildi. İkinci mertebeden sabit ve değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü reproducing kernel ve sonlu fark şeması yöntemleri ile yapıldı (Modanli ve Akgul, 2017). Üçüncü mertebeden Caputo türev operatörüne bağlı kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç-sınır değer problemine bağlı tam çözümü ile sonlu fark metodu ile yaklaşık çözümü elde edildi (Modanli, 2019).

Bu tezde, Caputo kesirli türevine bağlı üçüncü mertebeden sabit katsayılı kısmi diferansiyel denkleminin tam ve yaklaşık çözümleri incelenecektir. Tam çözümü Laplace dönüşüm metodu ve yaklaşık çözüm için de theta sonlu fark şeması ile hesaplanacaktır.

Şimdi bu tezde kullanılan temel tanım ve teoremleri verelim.

1.1. Temel kavramlar

Tanım 1.1: "$f(t)$, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{1.1}$$

integrali ile tanımlanan F fonksiyonu olup;

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$$

ile gösterilir." İntegralin mevcut olduğu bütün s değerleri F fonksiyonunun tanım kümesini oluşturur (Podlubny, 1999).

Tanım 1.2: (Türevin Laplace Dönüşümü): "Bir fonksiyonun n. mertebeden türevinin Laplace dönüşümü:

$f(t)$, $f'(t)$, ... $f^{(n-1)}(t)$fonksiyonları [0,∞) aralığı üzerinde sürekli, $f^n(t)$, $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve bu fonksiyonların hepsi α üstel mertebeden olsunlar." Bu durumda $s>\alpha$ için

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\}=s^n\,L\{f(t)\}-s^{n-1}\,f(0)-s^{n-2}\,f'(0)-\cdots-\,f^{(n-1)}(0) \tag{1.2}$$

olur. Özel olarak $n=2$ olması durumunda

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}=s^2\,L\{f(t)\}-s\,f(0)\;\;-f'(0) \tag{1.3}$$

ve $n = 3$ için ise

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\, L\{f(t)\} - s^2\, L\{f(0)\} - s\, f'(0) \;\; - f''(0) \tag{1.4}$$

bağıntınları kolayca elde edilebilir (Podlubny, 1999).

Tanım 1.3: "$f(t)$, $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve $L\{f(t)\} = F(s)$ olsun. $f(t)$ fonksiyonuna $F(s)$ nin ters Laplace dönüşümü denir. Ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{1.5}$$

ile gösterilir."

Tanım 1.4: "$z \neq 0, -1, -2, \ldots$ kompleks sayıları için gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.6}$$

olarak tanımlanır" (Podlubny, 1999).

Tanım 1.5: "Zamana bağlı α ıncı mertebeden $D_t^\alpha u(t,x)$ Caputo kesirli türevi $n-1 < \alpha < n$ için

$${}_0^C D_t^\alpha u(t,x) \; = \frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-p)^{\alpha-n+1}} \frac{\partial^n u(p,x)}{\partial p^n} dp \tag{1.7}$$

ve $\alpha = n \in N$ için

$${}_0^C D_t^\alpha u(t,x) \; = \frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n}$$

olarak tanımlanır (Podlubny, 1999)."

Tanım 1.6: "$\beta, n \in N,\ n-1 < \alpha \leq n\ ,\ ve\ \beta \geq [\![\alpha]\!]$ olmak üzere; α. mertebeden x^β polinomunun Caputo türevi

$$D^{\alpha}\left(x^{\beta}\right)=\frac{x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\Gamma(\beta+1) \tag{1.8}$$

olarak tanımlanır (Podlubny, 1999).”

Tanım 1.7: “Zamana bağlı α ıncı mertebeden ${}_0^C D_t^{\alpha} u(t,x)$ Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü $n-1<\alpha\leq n$ için

$$\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^{\alpha} u(t,x)\}=s^{\alpha}u(s,x)-\sum_{j=0}^{n-1}s^{\alpha-j-1}u_t^{(k)}(0,x), \tag{1.9}$$

olarak tanımlanır (Podlubny, 1999).”

1.2. Üçüncü mertebeden mesirli diferansiyel denklemlerin tam çözümü için Laplace dönüşüm metodu

Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini hesaplamak için farklı metotlar vardır. En önemli bilinen metotlar; Laplace dönüşümü, Fourier dönüşümü, Değişkenlerine ayırma metodu ve Fourier seri çözümü metotları olarak bilinir. Aşağıda verilen örneklerin analitik çözümünü Laplace dönüşüm metodu ile bulalım.

Örnek 1.1. Aşağıdaki üçüncü mertebeden Caputo kesirli türevine bağlı kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümünü

$$\begin{cases} v_{ttt}(t,x)+v_{tt}(t,x)+{}_0^C D_t^{\alpha}v(t,x)+v(t,x)=v_{xx}(t,x)+f(t,x), \\ f(t,x)=\left(6t+6+6\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+2(t^3-1)\right)sinx, \\ 0<x<\pi,\ 0<t<1,\ 0<\alpha\leq 1, \\ v(0,x)=-sinx,\ v_t(0,x)=0,\ v_{tt}(0,x)=0,\ 0\leq t\leq 1, \\ v(t,0)=v(t,\pi)=0,\ 0\leq x\leq\pi \end{cases} \tag{1.10}$$

Laplace dönüşüm metodu ile bulmaya çalışalım.

Çözüm: $v(s,x) = \mathcal{L}(v(t,x)$ olsun. (1.10) probleminin her tarafının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{L}\big(v_{ttt}(t,x)\big) + \mathcal{L}\big(v_{tt}(t,x)\big) + \mathcal{L}\Big({}_0^C D_t^{\alpha} v(t,x)\Big) - \mathcal{L}\big(v_{xx}(t,x)\big) + \mathcal{L}(v(t,x) = \mathcal{L}\big(f(t,x)\big)$$

olur. $f(t,x)$ değeri yerine yazılırsa

$$\mathcal{L}\big(v_{ttt}(t,x)\big) + \mathcal{L}\big(v_{tt}(t,x)\big) + \mathcal{L}\Big({}_0^C D_t^{\alpha} v(t,x)\Big) - \mathcal{L}\big(v_{xx}(t,x)\big) + \mathcal{L}(v(t,x = \mathcal{L}\left(6t + 6 + 6\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + 2(t^3 - 1)\right) sinx \tag{1.11}$$

elde edilir. (1.3), (1.4), (1.7) ve (1.8) denklemleri kullanılırsa, (1.11) denklemi

$$s^3 v(s,x) - s^2 v(0,x) - s v_t(0,x) - v_{tt}(0,x) + s^2 v(s,x) - s v(0,x) - v_t(0,x) + s^{\alpha} v(s,x) - s^{\alpha-1} v(0,x) - v_{xx}(s,x) = \left(6\frac{1}{s^2} + 6\frac{\Gamma(4-\alpha)}{s^{4-\alpha}\Gamma(4-\alpha)} + \frac{6}{s^4} + \frac{4}{s}\right) sinx,$$

olarak bulunur. (1.10) problemindeki başlangıç değerleri kullanılırsa

$$s^3 v(s,x) + s^2 sinx + s^2 v(s,x) + s sinx + s^{\alpha} v(s,x) + s^{\alpha-1} sinx - v_{xx}(s,x) + v(s,x) = \left(6\frac{1}{s^2} + 6\frac{1}{s^{4-\alpha}} + \frac{12}{s^4} + \frac{4}{s}\right) sinx$$

olup bu denklem de

$$-v_{xx}(s,x) + v(s,x)(s^3 + s^2 + s^{\alpha} + 1) = \left(6\frac{1}{s^2} + 6\frac{1}{s^{4-\alpha}} + \frac{12}{s^4} + \frac{4}{s} - s^2 - s - s^{\alpha-1}\right) \tag{1.12}$$

olarak yazılır. (1.12) denklemini çözmek için

$$v(s,x) = v^h(s,x) + v^p(s,x) \tag{1.13}$$

formülünü kullanalım. Burada, $v^h(s,x)$ (1.12) denkleminin homojen kısmı ve $v^p(s,x)$ de (1.12) denkleminin homojen olmayan kısmının çözümüdür. Homojen kısmı

$$(s^3+s^2 + s^\alpha + 1)v(s,x) - v_{xx}(s,x) = 0 \tag{1.14}$$

şeklindedir. Homojen kısmın çözümü için

$$v^h(s,x) = e^{mx}$$

şeklinde genel çözümü arayalım. Bu denklemin türevleri de

$$v_x^h(s,x) = m\, e^{mx}$$
$$v_{xx}^h(s,x) = m^2 e^{mx}$$

şeklinde olur. Bulunan ifadeler (1.14) denklemde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$(s^3+s^2 + s^\alpha + 1) - m^2 = 0$$
$$(s^3+s^2 + s^\alpha + 1) = m^2$$

bulunur. Bu son ikinci dereceden denklemin çözümünden

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{s^3+s^2 + s^\alpha + 1}$$

kökleri elde edilir. Bu durumda (1.14) denkleminin homojen kısmın çözümü için bu kökler kullanılarak

$$v^h(s,x) = c_1 e^{x\sqrt{s^3+s^2+s^\alpha+1}} + c_2 e^{-x\sqrt{s^3+s^2+s^\alpha+1}} \tag{1.15}$$

çözümü elde edilir. (1.12) denkleminin homojen olmayan kısmının özel çözümü için

$$v^p(s,x) = A(s)sinx$$

alınır ve denkleminde türevleri de alınırsa

$$v_x^p(s,x) = A(s)cosx$$
$$v_{xx}^p(s,x) = -A(s)sinx$$

olup bulunan bu ifadeler (1.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$(s^3+s^2+s^\alpha+2)A(s)sinx = \left(6\frac{1}{s^2}+6\frac{1}{s^{4-\alpha}}+\frac{12}{s^4}+\frac{4}{s}-s^2-s-s^{\alpha-1}\right)sinx$$

olarak bulunur. Bu denklemde $sinx$ sadeleştirilip gerekli işlemler yapılırsa

$$(s^3+s^2+s^\alpha+2)A(s) = \left(6\frac{1}{s^2}+6\frac{1}{s^{4-\alpha}}+\frac{12}{s^4}+\frac{6}{s}-s^2-s-s^{\alpha-1}-\frac{2}{s}\right)$$
$$= \frac{6}{s^4}\left(s^3+s^2+s^\alpha+2\right)-\frac{1}{s}(s^3+s^2+s^\alpha+2\Big)$$

olarak elde edilir. Buradan da

$$A(s) = \frac{6}{s^4}-\frac{1}{s}$$

bulunur. Bu son denklemden homojen olmayan kısmın çözümü

$$v^p(s,x) = (\tfrac{6}{s^4}-\tfrac{1}{s})sinx \qquad (1.16)$$

şeklinde olur. (1.15) ve (1.16) denklemleri (1.13) denkleminde yazılırsa

$$v(s,x) = c_1e^{x\sqrt{s^3+s^2+s^{\alpha+1}}}+c_2e^{-x\sqrt{s^3+s^2+s^{\alpha+1}}}+(\tfrac{6}{s^4}-\tfrac{1}{s})sinx \qquad (1.17)$$

ve (1.10) denkleminin sınır değer koşulları kullanılırsa (1.17) denkleminde $c_1 = c_2 = 0$ olduğu görülür. Böylece

$$v(s,x) = \left(\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s}\right) sinx$$

çözümü bulunur. Bu son denklemin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$v(t,x) = \mathcal{L}^{-1}\big(v(s,x)\big) = L^{-1}\left(\left(\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s}\right)\sin(x)\right) = (t^3 - 1)\sin x$$

olup denklemin tam çözümü

$$v(t,x) = (t^3 - 1)\sin x$$

olarak bulunur.

Örnek 1.2. Aşağıdaki üçüncü mertebeden verilen kesirli kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümünü

$$\begin{cases} v_{ttt}(t,x) + v_{tt}(t,x) + {}_0^C D_t^{\alpha} v(t,x) + v(t,x) = v_{xx}(t,x) + f(t,x), \\ f(t,x) = \left(5 + 7t - t^2 + t^3 + 6\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - 2\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)(x - x^2) \\ +2(t^3 - t^2 + t - 1), \\ 0 < x < 1,\ 0 < t < 1,\ \ 0 < \alpha \le 1, \\ v(0,x) = -(x - x^2),\ \ v_t(0,x) = (x - x^2), \\ v_{tt}(0,x) = -2(x - x^2)\ ,\ 0 \le t \le 1, \\ v(t,0) = v(t,1) = 0,\ \ 0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{1.18}$$

bulmaya çalışalım.

Çözüm: Her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L}\big(v_{ttt}(t,x)\big)+\mathcal{L}\big(v_{tt}(t,x)\big)+\mathcal{L}\Big({}_0^C D_t^{\alpha} v(t,x)\Big)-\mathcal{L}\big(v_{xx}(t,x)\big)+\mathcal{L}\big(v(t,x)\big)=\mathcal{L}\big(f(t,x)\big)$$

olur. (1.18) denklemindeki $f(t,x)$ yerine yazılırsa

$$\mathcal{L}\big(v_{ttt}(t,x)\big)+\mathcal{L}\big(v_{tt}(t,x)\big)+\mathcal{L}\Big({}_0^C D_t^{\alpha} v(t,x)\Big)-\mathcal{L}\big(v_{xx}(t,x)\big)+\mathcal{L}\big(v(t,x)\big)$$
$$=\mathcal{L}\left(\left(5+7t-t^2+t^3+6\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}-2\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)\right)(x-x^2)+\mathcal{L}(2(t^3-t^2+t-1))$$

elde edilir. Bu denklemden de

$$s^3v(s,x)-s^2v(0,x)-sv_t(0,x)-v_{tt}(0,x)+s^2v(s,x)-sv(0,x)-v_t(0,x)+s^{\alpha}v(s,x)-s^{\alpha-1}v(0,x)-v_{xx}(s,x)+v(s,x)=\left(\frac{5}{s}+\frac{7}{s^2}-\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^4}+\frac{6}{s^{4-\alpha}}-\frac{2}{s^{3-\alpha}}+\frac{1}{s^{2-\alpha}}\right)(x-x^2)+2\left(\frac{6}{s^4}-\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\right),$$

bulunur. (1.18) problemindeki başlangıç değerleri kullanılırsa

$$s^3v(s,x)+s^2(x-x^2)-s(x-x^2)+2(x-x^2)+s^2v(s,x)+s(x-x^2)-(x-x^2)+s^{\alpha}v(s,x)+s^{\alpha-1}(x-x^2)+v(s,x)-v_{xx}(s,x)=\left(\frac{5}{s}+\frac{7}{s^2}-\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^{4-\alpha}}-\frac{2}{s^{3-\alpha}}+\frac{1}{s^{2-\alpha}}\right)(x-x^2)+2\left(\frac{6}{s^4}-\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\right),$$

olup bu denklem de

$$-v_{xx}(s,x)+v(s,x)(s^3+s^2+s^{\alpha}+1)=\left(\frac{5}{s}+\frac{7}{s^2}-\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^4}+\frac{6}{s^{4-\alpha}}-\frac{2}{s^{3-\alpha}}+\frac{1}{s^{2-\alpha}}-s^2-s^{\alpha-1}-1\right)(x-x^2)+2\left(\frac{6}{s^4}-\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\right) \quad (1.19)$$

olarak yazılır. (1.19) denklemini çözmek için

$$v(s,x) = v^h(s,x) + v^p(s,x) \tag{1.20}$$

formülünü kullanalım. Homojen kısmın çözümü için

$$v^h(s,x) = e^{mx}$$

şeklinde genel çözümü arayalım. Bu denklemin türevleri de

$$v_x^h(s,x) = m\, e^{mx}$$
$$v_{xx}^h(s,x) = m^2\, e^{mx}$$

şeklinde olur. Bulunan ifadeler (1.19) denklemde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$(s^3+s^2 + s^\alpha + 1)v(s,x) - v_{xx}(s,x) = 0 \tag{1.21}$$

olur. Buradan

$$(s^3+s^2 + s^\alpha) - m^2 = 0$$
$$(s^3+s^2 + s^\alpha) = m^2$$

bulunur. Bu son ikinci dereceden denklemin çözümünden

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{s^3+s^2 + s^\alpha + 1}$$

kökleri elde edilir. Bu durumda (1.20) denkleminin homojen kısmın çözümü için bu kökler kullanılarak

$$v^h(s,x) = c_1 e^{x\sqrt{s^3+s^2+s^\alpha+1}} + c_2 e^{-x\sqrt{s^3+s^2+s^\alpha+1}} \tag{1.22}$$

çözümü elde edilir. (1.19) denkleminin homojen olmayan kısmının çözümü için

$$v^p(s,x) = (Kx^2 + Mx + N)$$

alınır ve bu denkleminde x e göre türevleri de alınırsa

$$v_x^p(s,x) = (2Kx + M),$$
$$v_{xx}^p(s,x) = -2K$$

olup bulunan bu ifadeler (1.19) denkleminde yerine yazılırsa

$$-2K + (Kx^2 + Mx + N)(s^3+s^2 + s^\alpha + 1) = \left(\frac{5}{s} + \frac{7}{s^2} - \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^{4-\alpha}} - \frac{2}{s^{3-\alpha}} + \frac{1}{s^{2-\alpha}} - s^2 - s^{\alpha-1} - 1\right)(x - x^2) + 2\left(\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)$$

olarak bulunur. Buradan da

$$K(s^3+s^2 + s^\alpha + 1) = -(s^3+s^2 + s^\alpha + 1)\left(\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right),$$
$$M(s^3+s^2 + s^\alpha + 1) = (s^3+s^2 + s^\alpha + 1)\left(\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right),$$
$$-2K + (s^3+s^2 + s^\alpha + 1)N = 2\left(\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)$$

yazılır. Bu son denklemden de

$$K = -\left(\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right),\ M = \left(\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right),\ N = 0$$

olduğu görülür. Buradan da homojen olmayan kısmın çözümü

$$v^p(s,x) = \left(\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)(x - x^2) \tag{1.23}$$

şeklinde olur. (1.22) ve (1.23) denklemleri (1.20) denkleminde yazılırsa

$$v(s,x) = c_1 e^{x\sqrt{s^3+s^2+s^\alpha+1}} + c_2 e^{-x\sqrt{s^3+s^2+s^\alpha+1}} + \left(\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)(x - x^2)$$

ve (1.18) denkleminin $v(t,0) = v(t,1) = 0$ sınır değer koşulları kullanılırsa $c_1 = c_2 = 0$ olduğu görülür. Böylece

$$v(s,x) = \left(\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)(x - x^2)$$

çözümü elde edilir. Bulunan bu son denklemin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\big(v(s,x)\big) = L^{-1}\left(\left(\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)(x - x^2)\right)$$
$$= (t^3 - t^2 + t - 1)(x - x^2)$$

olup buradan da denklemin tam çözümü

$$v(t,x) = (t^3 - t^2 + t - 1)(x - x^2)$$

olarak bulunur. Bu iki örnekte de görüldüğü gibi lineer üçüncü mertebeden Caputo türevli kesirli kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü için Laplace dönüşüm metodu yeterli başlangıç değer koşulları verilmek şartıyla oldukça kullanışlı bir metottur. Bu örneklerin yaklaşık çözümlerini hesaplamak için theta fark şeması metodu kullanılacaktır. Sonlu fark metotlarının en genel metodu theta fark metodudur, bu metot telegraf kısmi diferansiyel denklemine uygulandı (Modanli ve Akgul, 2017).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kısmi denklemler mekanik, termodinamik, elastistik, biyoloji modelleri ve fiziğin çeşitli alanlarında önemli bir uygulama alanlarına sahiptir. Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörlü üçüncü mertebeden diferansiyel denklem için yerel olmayan sınır değer problemi incelendi (Ashyralyev ve Şimşek, 2017). Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için sonlu fark metodu (Modanli, 2018), en küçük kareler yöntemiyle birleştirilmiş üçüncü dereceden B-spline metodu (Çağlar ve ark., 2010), sonlu elemanlar yöntemi (He, 2003). Ve son olarak Homotopy pertürbasyon metodu (HPM) (He, 2005) kullanılmıştır. Şimdi bu çalışmada kullanılan temel tanımları açıklayalım.

Tamamen lineer olmayan üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemler (KDD) sınıfı olarak kabul edilir. Bu sınıf, literatürde son zamanlarda ortaya çıkan ve oldukça sıra dışı seyahat eden dalga çözümlerinin verildiği birkaç örneği içerir. Bu çözümler esasen üstellerin toplamından oluşur; Bu üstellerin oluşumunu, ilerleyen dalga indirgemesinde bir faktör olarak görünen lineer bir alt denklemin varlığını takip eder (Ashyralyev ve ark, 2017).

Lineer olmayan üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemler sınıfının simetri indirgemeleri üzerinde çalışıldı (Clarkson ve ark., 1997). Öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörlü bir Hilbert uzayında zaman gecikmeli üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemi incelendi (Ashyralyev ve ark., 2018).

Kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için Laplace dönüşüm metodu, Değişkenlere ayırma metodu, Fourier dönüşüm metodu, kuvvet serisi çözüm metodu kullanılır. Bu denklemlerin yaklaşık çözümlerini hesaplamak için çok farklı metotlar geliştirilmiştir. Bu metotlar; sonlu fark metodu (Modanli, 2018), sonlu elemanlar metodu (Cheng ve Chi-Wang, 2008), B-spline method (Çağlar ve ark., 2010), Sumudo dönüşüm metodu (Rana ve ark., 2007).

Lineer olmayan bilimlerin hızlı gelişimi ile birlikte, çeşitli bilim adamları tarafından birçok analitik ve sayısal teknik geliştirilmiştir. Geliştirilen tekniklerin çoğu, sınırlı yakınsama, farklı sonuçlar, lineerleştirme, ayrıklaştırma, gerçekçi olmayan varsayımlar ve fiziksel problemlerin çok yönlülüğü ile uyumsuzluk gibi sınırlamalara sahiptir. Geniş bir lineer olmayan problem sınıfını çözmek için bir dizi verimli ve güvenilir teknik geliştirildi. Bu nispeten yeni fakat çok güçlü yöntemlerin fiziksel problemlerin karmaşıklıkları ile tamamen senkronize olduğu kanıtlanmıştır, Homotopy pertürbasyon Yöntemi (HPM), Lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılmıştır (Mohyud-Din ve ark., 2009). Bunlarla beraber (Modanli ve Akgul, 2017) de kesirli mertebeden telegraf kısmi diferansiyel denklemin tam çözümünü theta metodunu kullanarak hesapladı.

Bu çalışmada, başlangıç-sınır değer koşullarına bağlı üçüncü mertebeden kesirli diferansiyel denkleminin

$$\begin{cases} v_{ttt}(t,x) + v_{tt}(t,x) + {}_0^C D_t^{\alpha} v(t,x) = v_{xx}(t,x) + f(t,x), \\ 0 < x < L,\ 0 < t < T,\ 0 \le \alpha < 1, \\ v(0,x) = a_1(x),\ v_t(0,x) = a_2(x),\ v_{tt}(0,x) = a_3(x),\ 0 \le t \le T, \\ v(t,0) = v(t,L) = 0,\ 0 \le x \le L \end{cases} \tag{2.1}$$

tam çözümü Laplace metodu ve yaklaşık çözümü de Theta metodu ile incelendi. Atangana-Baleanu Caputo türev operatörüyle tanımlı bu problemin yaklaşık çözümü Crank-Nicholson şeması metodu ile (Modanli ve Akgül, 2019) da çalışıldı. Burada $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$ ve $f(t,x)$ bilinen fonksiyonlar ve $v(t,x)$ bilinmeyen fonksiyondur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu tezimde daha ayrıntılı bir çalışma sunmak için konuyla ilgili daha önceden yayınlanmış makalelere, dergilere ve yapılan yüksek lisans tezlerine ulaşılıp gerekli literatür taramaları yapıldı.

3.2. Yöntem

Üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili geçmişte ve günümüzde yapılan çalışmalar incelendi. theta metodu kullanılarak üçüncü mertebeden tanımlı kesirli kısmi diferansiyel denklemler için tam ve yaklaşık çözümler bulundu. Yaklaşık çözüm ve tam çözümler karşılaştırılarak ait hata analiz çizelgesi oluşturuldu. Matlab programı kullanılarak tam çözüm ve yaklaşık çözüme ait simülasyonlar çizildi.

3.2.1. Theta metodu

Theta metodu (Aslefallah ve ark., 2014) çalışmasında zaman kesirli diferansiyel difüzyon denklemin yaklaşık çözümününü ve (Modanli ve Akgul, 2017) çalışmasında kesirli mertebeden telegraf denklemin yaklaşık çözümünü hesaplamak için uygulandı.

x ekseni için $h = \frac{L}{M}$ ve y ekseni için $\tau = \frac{T}{N}$ düzgün aralıkları verilsin. Bu nedenle, $n = 1,2,\dots,M$ için $x_n = nh$, ve $k = 1,2,\dots,N$ için $t_k = k\tau$ dır.

(1.6) formülünün hesaplanması için birinci mertebeden fark şeması yaklaşımı

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} v(t_k, x_n) \cong s_{\alpha,\tau} \sum_{j=0}^{k} w_j^{(\alpha)} (v_n^{k-j+1} - v_n^{k-j}) \qquad (3.1) $$

dır. Burada $s_{\alpha,\tau} = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ ve $w_j^{(\alpha)} = (j+1)^{1-\alpha} - (j)^{1-\alpha}$ dır. (Podlubny, 1998) makalesinde metot kullanılırsa (3.1) denklemi

$$\frac{\partial^\alpha v(t_k,x_n)}{\partial t^\alpha} = s_{\alpha,\tau} \sum_{j=0}^{k} (w_{k-j+1}^{(\alpha)} - w_{k-j}^{(\alpha)}) v_n^j \tag{3.2}$$

olarak yazılabilir. Taylor açılımı kullanılırsa

$$v(t_{k+1},x_n) = v(t_k,x_n) + \tau v_t(t_k,x_n) + \frac{\tau^2}{2} v_{tt}(t_k,x_n) + O(\tau^3) \tag{3.3}$$

$$v(t_{k-1},x_n) = v(t_k,x_n) - \tau v_t(t_k,x_n) + \frac{\tau^2}{2} v_{tt}(t_k,x_n) - O(\tau^3) \tag{3.4}$$

formülleri yazılabilir. (3.3) ve (3.4) formülleri taraf tarafa toplanır küçük terimler ihmal edilirse

$$v_{tt}(t_k,x_n) \cong \frac{v_n^{k+1} - 2v_n^k + v_n^{k-1}}{\tau^2}, \tag{3.5}$$

formülü yazılır. Benzer şekilde Taylor açılımından

$$v_{ttt}(t_k,x_n) \cong \frac{v_n^{k+2} - 3v_n^{k+1} + 3v_n^k - v_n^{k-1}}{\tau^3}, \tag{3.6}$$

$$v_{xx}(t_k,x_n) \cong \frac{1}{h^2}\{[\theta[v_{n+1}^{k+1} - 2v_n^{k+1} + v_{n-1}^{k+1}] + (1-\theta)[v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k]\} \tag{3.7}$$

formülleri elde edilebilir. (3.7) formülünün sonlu farkı θ ya bağlı olduğundan bu metot theta fark şeması metodu olarak bilinir. (3.1), (3.5), (3.6) ve (3.7) formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{v_n^{k+2}-3v_n^{k+1}+3v_n^k-v_n^{k-1}}{\tau^3}+\frac{v_n^{k+1}-2v_n^k+v_n^{k-1}}{\tau^2}+s_{\alpha,\tau}\sum_{j=1}^{k}w_j^{(\alpha)}\left(v_n^{k-j+1}-v_n^{k-j}\right)\\
&-\frac{1}{h^2}\theta\left\{\left(v_{n+1}^{k+1}-2v_n^{k+1}+v_{n-1}^{k+1}\right)+(1-\theta)v_{n+1}^k-2v_n^k+v_{n-1}^k\right\}\\
&+\theta v_n^{k+1}+(1-\theta)v_n^k=\theta f_n^{k+1}+(1-\theta)f_n^k \qquad (3.8)\\
&,\\
&v_n^0=a_1(x_n),\frac{v_n^1-v_n^0}{\tau}=a_2(x_n),\ \ \frac{v_n^2-2v_n^1+v_n^0}{\tau^2}=\ a_3(x_n),\\
&v_0^k=v_M^k=0,\ 0\le k\le N
\end{aligned}$$

fark şeması denklemi elde edilir.

Şimdi bu (3.8) fark şeması denkleminin kararlı olduğunu gösterelim.

3.2.2. Üçüncü mertebeden kesirli diferansiyel denklemin kararlılığı için Von-Neumann analiz metodu

Şimdi (2.1) denkleminin kararlılığı için Von-Neumann Analiz metodunu uygulayalım. Von-Neumann analiz formülü

$$u_n^k=r^k e^{in\varphi} \qquad (3.9)$$

olduğu biliniyor. Burada k zaman indeksi ve n de uzay indeksidir. (3.9) denklemi (3.8) denkleminde yerine yazılırsa üçüncü dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemin kökleri r olmak üzere; $|r|\le 1$ ise (3.6) denklemi kararlı, aksi takdirde (3.6) denklemi kararsızdır denir. (3.7) formülü (3.6) probleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{cases}
\frac{r^{k+2}e^{in\varphi}-3r^{k+1}e^{in\varphi}+3r^k e^{in\varphi}-r^{k-1}e^{in\varphi}}{\tau^3}+\frac{r^{k+1}e^{in\varphi}-2r^k e^{in\varphi}+r^{k-1}e^{in\varphi}}{\tau^2}\\
+s_{\alpha,\tau}\sum_{j=0}^{k}w_j^{(\alpha)}\left(r^{k-j+1}e^{in\varphi}-r^{k-j}e^{in\varphi}\right)\\
-\frac{1}{h^2}\{\theta r^{k+1}\left(e^{i(n+1)\varphi}-2e^{in\varphi}+e^{i(n-1)\varphi}\right)\\
+\theta r^{k+1}e^{in\varphi}+(1-\theta)r^k e^{in\varphi}\\
+(1-\theta)r^k\left((e^{i(n+1)\varphi}-2e^{in\varphi}+e^{i(n-1)\varphi}\right)\}=f_n^k
\end{cases} \qquad (3.10)$$

denklemi elde edilir. (3.10) denkleminde $k = 1$ ve $n = 0$ alınır (3.8) denkleminde yerine yazılırsa ve (3.8) problemindeki başlangıç değerleri kullanılırsa $f_0^1, f_0^2 \to 0$ olduğu görülebilir. Bu durumda (3.10) denklemi

$$\begin{cases} \frac{r^3-3r^2+3r-1}{\tau^3} + \frac{r^2-2r+1}{\tau^2} + s_{\alpha,\tau}[(r-1)(2^{1-\alpha}-1) \\ +(r^2-r)] - \frac{\theta r^2}{h^2}\left(e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}\right) + \theta r^2 \\ +(1-\theta)r - \frac{(1-\theta)r}{h^2}\left(e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}\right) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

elde edilir. Buradan üçüncü dereceden denklemine dönüşür

$$\begin{cases} P(r) = r^3 + \tau^3\left(-\frac{3}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^2} + s_{\alpha,\tau} + 4\,\frac{\theta}{h^2} sin^2\frac{\varphi}{2} + \theta\right) r^2 \\ +\tau^3\left(\frac{3}{\tau^3} - \frac{2}{\tau^2} + 2(2^{-\alpha}-1)s_{\alpha,\tau} + 4\,\frac{1-\theta}{h^2} sin^2\frac{\varphi}{2} + 1 - \theta\right) r \\ +\tau^3\left(-\frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^2} - (2^{1-\alpha}-1)s_{\alpha,\tau}\right) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

olarak yazılabilir. Şimdi bu denklemin köklerini bulalım. (3.12) denkleminde

$$a = 1,$$

$$b = \tau^3\left(-\frac{3}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^2} + s_{\alpha,\tau} + 4\,\frac{\theta}{h^2} sin^2\frac{\varphi}{2} + \theta\right),$$

$$c = \tau^3\left(\frac{3}{\tau^3} - \frac{2}{\tau^2} + 2(2^{-\alpha}-1)s_{\alpha,\tau} + 4\,\frac{1-\theta}{h^2} sin^2\frac{\varphi}{2} + 1 - \theta\right),$$

$$d = \tau^3\left(-\frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^2} - (2^{1-\alpha}-1)s_{\alpha,\tau}\right)$$

dır.

Lemma 3.1. $m = \sqrt{27d^2 + 4b^3d - 18bdc + 4c^3 - (bc)^2}$,

$$n = \frac{m}{6\sqrt{3}} - \frac{27d - 9bc + 2b^3}{54}$$

olmak üzere (3.12) denklemi aşağıdaki köklere sahiptir:

$$r_1 = \sqrt[3]{n} + \frac{b^2 - 3c}{9\sqrt{n}} - \frac{b}{3} \tag{3.13}$$

$$r_2 = r_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{3.14}$$

$$r_3 = r_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{3.15}$$

Bir sonlu fark şemasında kararlılık kestirimlerinin sağlanması oldukça büyük öneme sahiptir. Bir sonlu fark şeması kararlı olması problemin yaklaşık çözümü tam çözüme yakın olmasını ve metodun da uygun ve elverişli olduğu anlamına gelir. Bunun için aşağıdaki teoremin karalılık kestirimi verilecektir.

Teorem 3.1. (3.12) denkleminin kökleri koşulsuz olarak $|r_1| \leq 1,\ |r_2| \leq 1,\ |r_3| \leq 1$ olacağından (3.8) sonlu fark şeması kararlıdır.

İspat: Teoremin ispatını (3.13) denkleminin köklerinin alabileceği maksimum değerleri için Matlab programını kullanarak hesaplanırsa aşağıdaki kararlılık kestirim tablosu elde edilir.

(3.13), (3.14) ve (3.15) denklemlerinin mutlak değeri alınırsa,

$$|r_1| = |r_2| = |r_3|$$

olduğu görülür. Çünkü,

$$\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1 \text{ ve } \left|-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

dır.

Çizelge 3.1. Hata Analizi

$\tau,h,\varphi,\alpha,\theta$	$\lvert r_1\rvert = \lvert r_2\rvert = \lvert r_3\rvert$
τ=h=0.5,φ=π, α=1, θ=0	0.1619
τ=h=0.5,φ=π, α=0, θ=0	0.2132
τ=h=0.5,φ=π, α=1, θ=0.5	0.0586
τ=h=0.5,φ=π, α=0,θ=0.5	0.0030
τ=h=0.5,φ=π, α=1,θ=1	0.1619
τ=h=0.5,φ=π, α=0,θ=1	0.2132

Çizelge 3.1 de elde edilen sonuçlar $\tau,\ h$ ve φ değerlerinin maksimumu ile θ nın alabileceği tüm değerleri için hesaplanmıştır. $\alpha,\ \ 0<\alpha\leq 1$ aralığında olmasına rağmen, (3.12) denkleminin köklerini test edilmesi için hem 0 hem de 1 değerleri için hesaplanmıştır. Bu iki değer için de (3.13) denkleminin elde edilen kökleri yine 1 den küçük olduğu için $|r_1|\leq 1,\ |r_2|\leq 1,\ |r_3|\leq 1$ sağlandığı görülür. Dolayısıyla, (3.12) sonlu fark şeması denklemi bütün değerler için kararlı olduğundan koşulsuz kararlıdır denilebilir.

Theta metodu sonlu fark metotlarının en genel metodudur. Bu metot özel olarak; $\theta=0$ için ileri (Implicit) fark şeması, $\theta=\frac{1}{2}$ için Crank-Nicholson fark şeması metodu ve θ=1 için geri (Explicit) fark şeması metodu adını alır.

4.ARAŞTIMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde üçüncü mertebeden bir kesirli kısmi diferansiyel denklemin çözümünü theta metodunu kullanarak bir örnek problem üzerinde test edeceğiz. Şimdi theta metodunu kullanılarak örnek problemi çözmeye çalışalım. Bunun için başlangıç sınır değer koşullarına bağlı aşağıdaki üçüncü mertebeden problemini ele alalım.

Örnek 4.1. Üçüncü mertebeden verilen kesirli kısmi diferansiyel denklemi

$$\begin{cases} v_{ttt}(t,x)+v_{tt}(t,x)+{}_0^C D_t^{\alpha} v(t,x)+v(t,x)=v_{xx}(t,x)+f(t,x), \\ f(t,x)=\left(6t+6+6\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+2(t^3-1)\right)sinx, \\ 0<x<\pi,\ 0<t<1,\ 0<\alpha\leq 1, \\ v(0,x)=sinx,\ v_t(0,x)=0, v_{tt}(0,x)=0,\ 0\leq t\leq 1, \\ v(t,0)=v(t,\pi)=0,\ 0\leq x\leq \pi \end{cases} \tag{4.1}$$

veriliyor. (4.1) denkleminin tam çözümünün $0<\alpha\leq 1$ aralığındaki bütün α değerleri için

$$u(t,x)=(t^3-1)sinx$$

olduğu birinci bölümden bilinir. (4.1) denklem için theta metodu için fark şeması

$$\begin{cases} \frac{v_n^{k+2}-3v_n^{k+1}+3v_n^k-v_n^{k-1}}{\tau^3}+\frac{v_n^{k+1}-2v_n^k+v_n^{k-1}}{\tau^2}+\theta v_n^{k+1}+(1-\theta)v_n^{k+1} \\ +\sum_{j=1}^{k} w_j^{(\alpha)}\left(v_n^{k-j+1}-v_n^{k-j}\right) \\ -\frac{1}{h^2}\theta\left\{\left(v_{n+1}^{k+1}-2v_n^{k+1}+v_{n-1}^{k+1}\right)+(1-\theta)(v_{n+1}^k-2v_n^k+v_{n-1}^k)\right\}=f_n^k, \\ f_n^k=\theta f_n^{k+1}+(1-\theta)f_n^k \\ =\theta\left(6t_{k+1}+6+6\frac{{t_{k+1}}^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+2({t_{k+1}}^3-1)\right)sinx_n \\ +(1-\theta)\left(6t_k+6+6\frac{{t_k}^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+2({t_k}^3-1)\right)sinx_n, \\ v_n^0=sin(x_n),\ \frac{v_n^1-v_n^0}{\tau}=0,\ \ \frac{v_n^2-2v_n^1+v_n^0}{\tau^2}=\ 0,\ 0\le n\le M, \\ v_0^k=v_M^k=0,\ 0\le k\le N \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklinde elde edlilir. (4.2) problemi

$$\left(-\frac{1-\theta}{h^2}\right)v_{n+1}^k+\left(-\frac{\theta}{h^2}\right)v_{n+1}^{k+1}+\left(-\frac{1-\theta}{h^2}\right)v_{n-1}^k+\left(-\frac{\theta}{h^2}\right)v_{n-1}^{k+1}+\left(-\frac{1}{\tau^3}+\frac{1}{\tau^2}\right)v_n^{k-1}+\left(\frac{3}{\tau^3}-\frac{2}{\tau^2}-s_{\alpha,\tau}+\frac{2(1-\theta)}{h^2}+1-\theta\right)v_n^k+\left(-\frac{3}{\tau^3}+\frac{1}{\tau^2}+s_{\alpha,\tau}+\frac{2\theta}{h^2}+\theta\right)v_n^{k+1}+\left(\frac{1}{\tau^3}\right)v_n^{k+1}=\theta\left(6t_{k+1}+6+6\frac{{t_{k+1}}^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+2({t_{k+1}}^3-1)\right)sinx_n+(1-\theta)\left(6t_k+6+6\frac{{t_k}^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+2({t_k}^3-1)\right)sinx_n \tag{4.3}$$

olarak yeniden yazılabilir. (4.3) denklemi

$$Av_{n+1}+Bv_n+Cv_{n-1}=D\varphi_n, 1\le n\le M-1$$

formunda yazılır. Burada,

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & r & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}=C,$$

$$\text{B=K+}s_{\alpha,\tau}F,$$

$$K=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & c & d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -w_2 & w_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -w_{k-2} & w_{k-2}-w_{k-3} & w_{k-3}-w_{k-4} & \cdots & 0 & 0 \\ -w_{k-1} & w_{k-1}-w_{k-2} & w_{k-2}-w_{k-3} & \cdots & w_1 & 0 \\ -w_k & w_k-w_{k-1} & w_{k-1}-w_{k-2} & \cdots & w_2-w_1 & w_1 \end{bmatrix}$$

ve D de birim matrisdir. A, B, C ve D matrisleri $(N+1)\times(N+1)$ boyutunda matrislerdir. Bu problemin yaklaşık çözümünü bulmak için Modifiye Gauss Eliminasyon yöntemi kullanıldı. Birinci mertebeden olan doğruluk fark şeması uygulanarak N ve M için farklı simülasyonlar Matlab yardımıyla elde edildi. $v(t,x)$ analitik çözümü ve $v(t_k,x_n)$ yaklaşık çözüm olmak üzere,

$$E_M^N = \underbrace{max}_{1\le k\le N-1, 1\le n\le M-1} |v(t_k,x_n)-v_n^k|$$

formüllü kullanılarak Çizelge 4.1 deki gibi aşağıdaki nümerik hesaplamalar elde edildi.

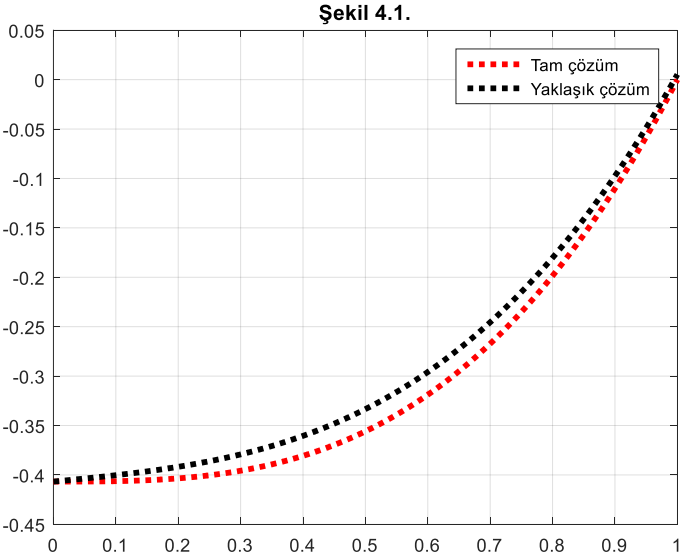
Çizelge 4.1. Hata Analizi

N, M, α, θ	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata Analizi($\in$)
$N=100$, $M=10$, $\alpha=0.5$, $\theta=0$	0	0.122591468414181	0.137343522212274
$N=400$, $M=20$, $\alpha=0.5$, $\theta=0$	0	0.029088600267763	0.067304086180687
$N=900$, $M=30$, $\alpha=0.5$, $\theta=0$	0	0.012944099799000	0.056730423511723
$N=100$, $M=10$, $\alpha=0.5$, $\theta=0.5$	0	0.106502249870666	0.122777991778533
$N=400$, $M=20$, $\alpha=0.5$, $\theta=0.5$	0	0.025492446641738	0.064454640844925
$N=900$, $M=30$,	0	0.011375698601308	0.055531741604991

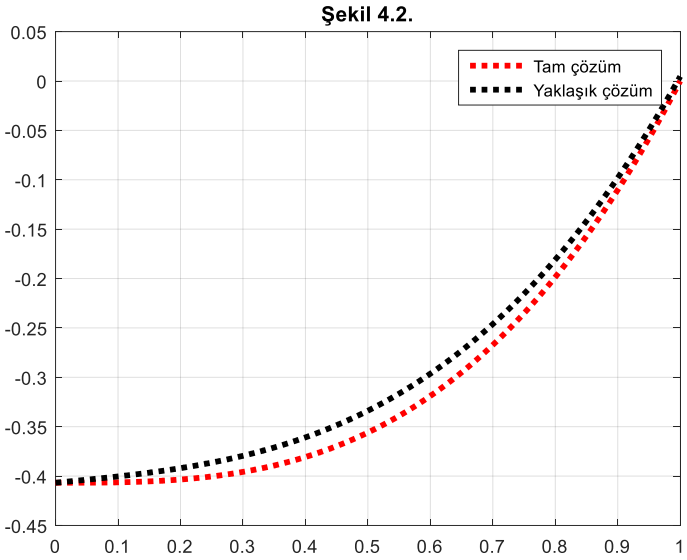
$\alpha = 0.5,$ $\theta = 0.5$			
$N = 100,$ $M = 10,$ $\alpha = 0.5,$ $\theta = 1$	0	0.090431195791485	0.108447887978181
$N = 400,$ $M = 20,$ $\alpha = 0.5,$ $\theta = 1$	0	0.021896458975482	0.061629641391932
$N = 900,$ $M = 30,$ $\alpha = 0.5,$ $\theta = 1$	0	0.009807383020594	0.054338371263852

Bulunan nümerik ve tam çözümler için sonuçlar aşağıdaki grafiklerle verilmiştir.

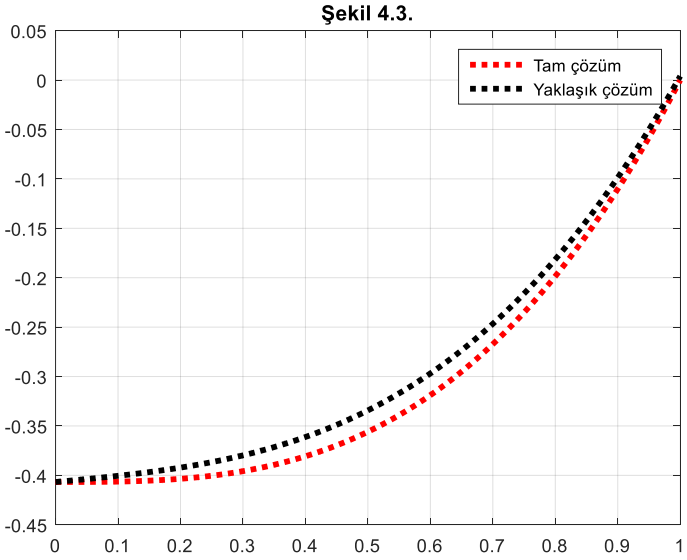
Şekil 4.1.



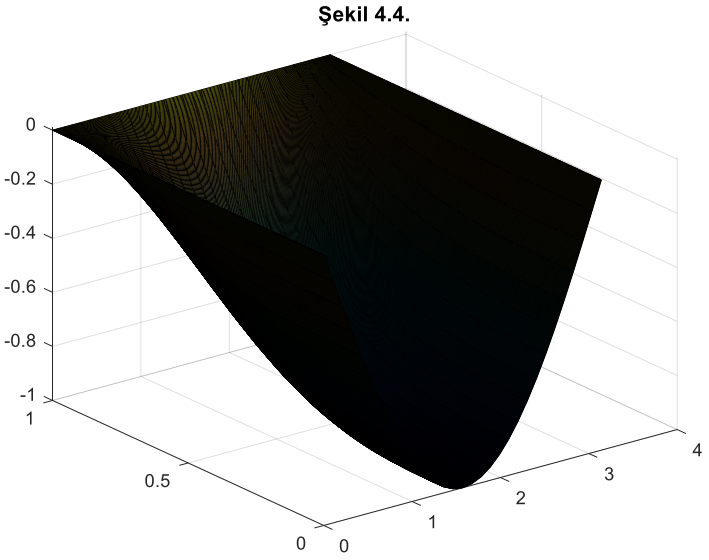
Şekil 4.1. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$ aralığı ve $\alpha = 0.50,\ \theta = 0,\ N = 900, M = 30$ için tam çözüm ile yaklaşık çözüm grafiğidir.



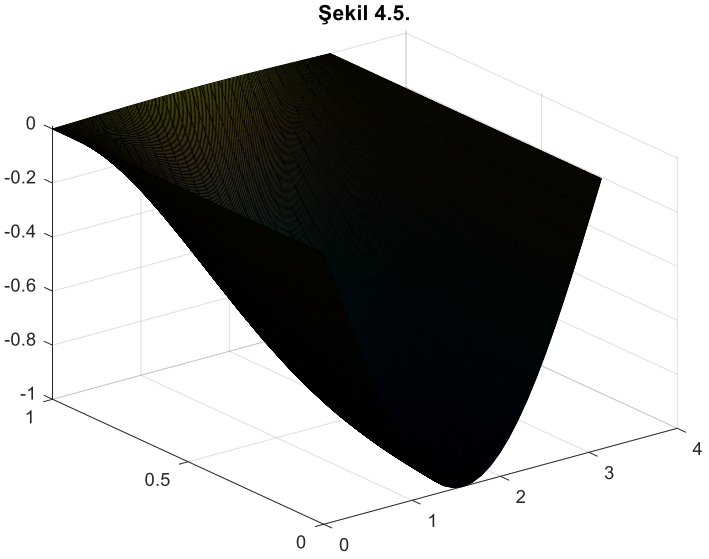
Şekil 4.2. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0.50, \theta = 0.5,\ N = 900,\ M = 30$ tam çözüm ile yaklaşık çözüm grafiğidir.



Şekil 4.3. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1$ aralığı ve $\alpha = 0.5, \theta = 1,\ N = 900, M = 30$ tam çözüm ile yaklaşık çözüm grafiğidir.



Şekil 4.4. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq \pi$ aralığındaki tam çözüm grafiğidir.



Şekil 4.5. (4.1) probleminin $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq \pi$ aralığı ve $\alpha = 0.5, \theta = 1,\ N = 900,\ M = 30$ yaklaşık çözüm grafiğidir.

Örnek 4.2. Aşağıdaki üçüncü mertebeden verilen Caputo kesirli türeviyle tanımlı kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümünü

$$\begin{cases} v_{ttt}(t,x)+v_{tt}(t,x)+{}_0^C D_t^{\alpha} v(t,x)+v(t,x)=v_{xx}(t,x)+f(t,x), \\ f(t,x)=\left(5+7t-t^2+t^3+6\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}-2\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)(x-x^2) \\ +2(t^3-t^2+t-1), \\ 0<x<1,\ 0<t<1,\ 0<\alpha\le 1, \\ v(0,x)=-(x-x^2),\ v_t(0,x)=(x-x^2), \\ v_{tt}(0,x)=-2(x-x^2),\ 0\le t\le 1, \\ v(t,0)=v(t,1)=0,\ 0\le x\le 1 \end{cases} \tag{4.4}$$

(4.4) denkleminin tam çözümünün $0<\alpha\le 1$ aralığındaki bütün α değerleri için

$$v(t,x)=(t^3-t^2+t-1)\,(x-x^2)$$

olduğu birinci bölümden bilinir.

(4.4) denklem için theta metodu için fark şeması

$$\begin{cases} \frac{v_n^{k+2}-3v_n^{k+1}+3v_n^k-v_n^{k-1}}{\tau^3}+\frac{v_n^{k+1}-2v_n^k+v_n^{k-1}}{\tau^2}+s_{\alpha,\tau}\sum_{j=1}^{k} w_j^{(\alpha)}\left(v_n^{k-j+1}-v_n^{k-j}\right) \\ -\frac{1}{h^2}\theta\left\{\left(v_{n+1}^{k+1}-2v_n^{k+1}+v_{n-1}^{k+1}\right)+(1-\theta)(v_{n+1}^k-2v_n^k+v_{n-1}^k)\right\} \\ +\theta v_n^{k+1}+(1-\theta)v_n^k=f_n^k=\theta f_n^{k+1}+(1-\theta)f_n^k, \\ v_n^0=-(x_n-{x_n}^2),\frac{v_n^1-v_n^0}{\tau}=(x_n-{x_n}^2), \\ \frac{v_n^2-2v_n^1+v_n^0}{\tau^2}=-2(x_n-{x_n}^2),\ 0\le n\le M, \\ u_0^k=u_M^k=0,\ 0\le k\le N \end{cases} \tag{4.5}$$

şeklinde elde edlilir. (4.5) problemi

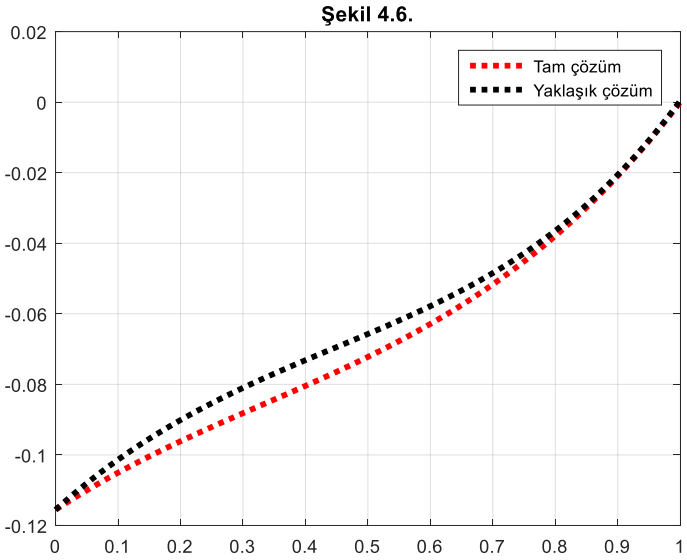
$$\left(-\frac{1-\theta}{h^2}\right)v_{n+1}^k+\left(-\frac{\theta}{h^2}\right)v_{n+1}^{k+1}+\left(-\frac{1-\theta}{h^2}\right)v_{n-1}^k+\left(-\frac{\theta}{h^2}\right)v_{n-1}^{k+1}+\left(-\frac{1}{\tau^3}+\frac{1}{\tau^2}\right)v_n^{k-1}+\left(\frac{3}{\tau^3}-\frac{2}{\tau^2}-s_{\alpha,\tau}+\frac{2(1-\theta)}{h^2}\right)v_n^k+\left(-\frac{3}{\tau^3}+\frac{1}{\tau^2}+s_{\alpha,\tau}+\frac{2\theta}{h^2}\right)v_n^{k+1}+\left(\frac{1}{\tau^3}\right)v_n^{k+1}=\theta f_n^{k+1}+(1-\theta)f_n^k \tag{4.6}$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu örnek için tam ve yaklaşık çözümler karşılaştırılarak aşağıdaki hata analiz tablosu elde edilmiştir.

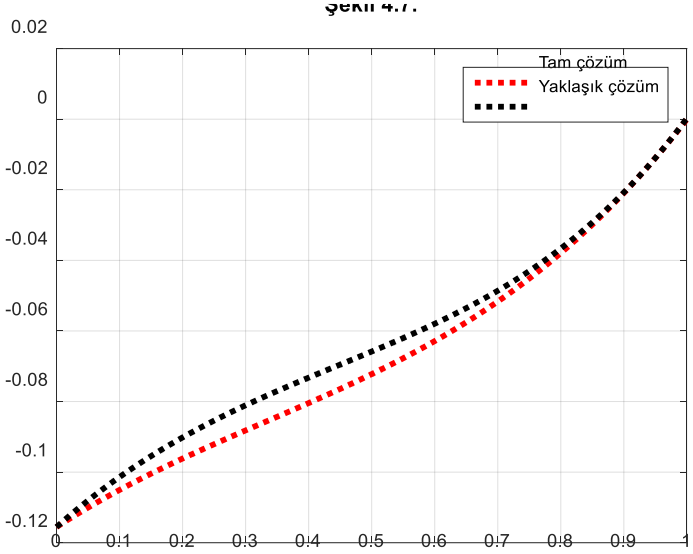
Çizelge 4.2. Hata Analizi

N, M, α, θ	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata Analizi($\in$)
$N = 100,$ $M = 10,$ $\alpha = 0.5$ $\theta = 0$	0	0.009801640320197	0.021322909962077
$N = 400,$ $M = 20,$ $\alpha = 0.5$ $\theta = 0$	0	0.001683740185138	0.019267016178064
$N = 900,$ $M = 30,$ $\alpha = 0.5$ $\theta = 0$	0	7.7586×10^{-4}	0.019047713141854
$N = 100,$ $M = 10,$ $\alpha = 0.5$ $\theta = 0.5$	0	0.008716584655492	0.019122474631422
$N = 400,$ $M = 20,$ $\alpha = 0.5,$ $\theta = 0.5$	0	0.001105850001069	0.018593845476237
$N = 900,$ $M = 30,$ $\alpha = 0.5,$ $\theta = 0.5$	0	5.1889×10^{-4}	0.018498856064677
$N = 100,$ $M = 10,$ $\alpha = 0.5,$ $\theta = 1$	0	0.008314292349835	0.017177488058076
$N = 400,$ $M = 20,$ $\alpha = 0.5,$ $\theta = 1$	0	5.2300×10^{-4}	0.017026433342427
$N = 900,$ $M = 30,$ $\alpha = 0.5,$ $\theta = 1$	0	2.6079×10^{-4}	0.016851522798635

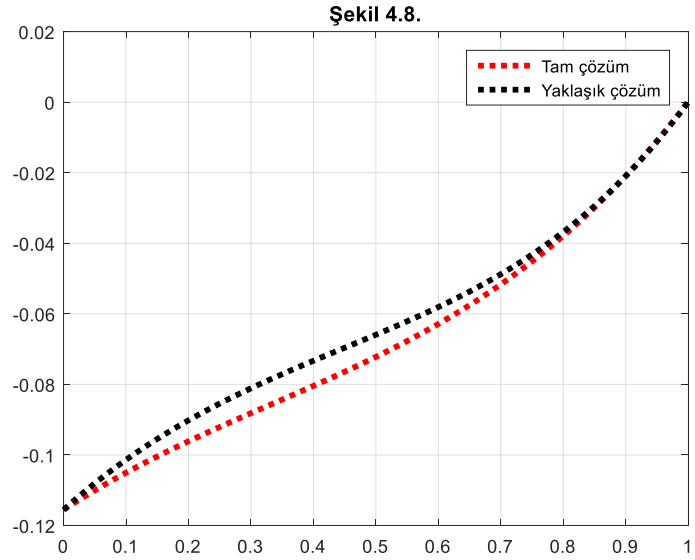
Örnek 4.2 için Theta metodu kullanılarak Matlab programı yardımıyla aşağıdaki grafikler elde edilir.



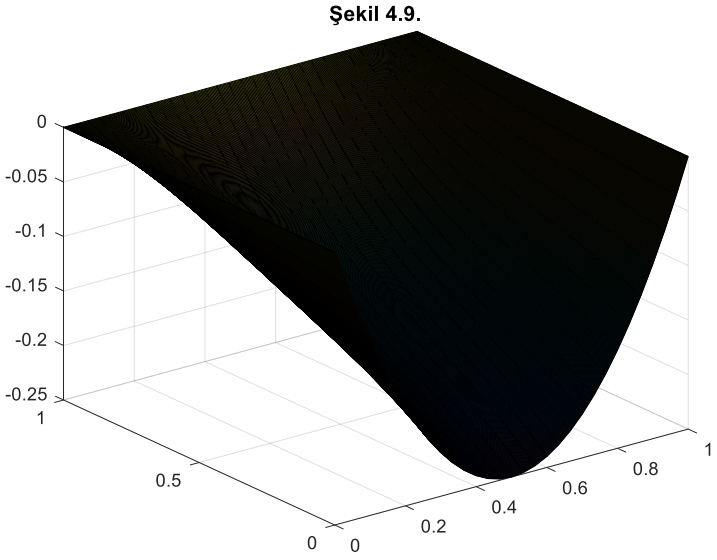
Şekil 4.6. (4.2) probleminin $0 \leq t \leq 1$ aralığı ve $\alpha = 0.5, \theta = 0,\ N = 900, M = 30$ için tam çözüm ile yaklaşık çözüm grafiğidir.



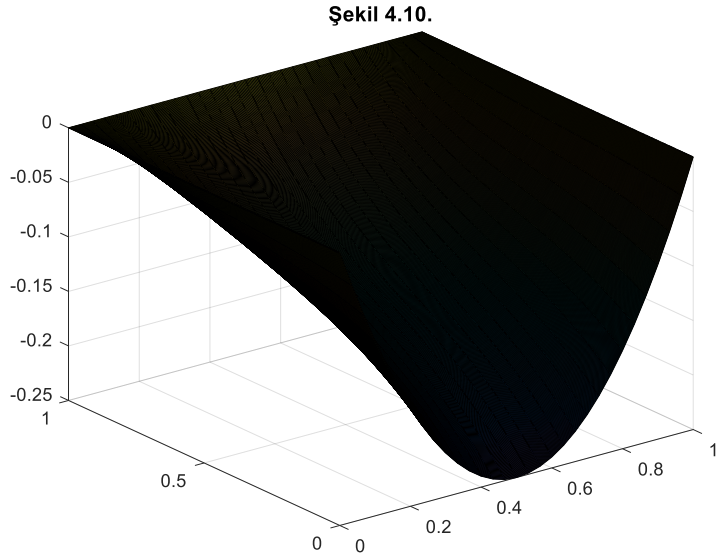
Şekil 4.7. (4.2) probleminin $0 \leq t \leq 1$ aralığı ve $\alpha = 0.5, \theta = 0.5, N = 900, M = 30$ için tam ile yaklaşık çözüm grafiğidir.



Şekil 4.8. (4.2) probleminin $0 \leq t \leq 1$ aralığı ve $\alpha = 0.5, \theta = 1, N = 900, M = 30$ için tam çözüm ile yaklaşık çözüm grafiğidir.



Şekil 4.9. (4.2) probleminin $0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1$ aralıklarındaki tam çözüm grafiğidir.



Şekil 4.10. (4.2) probleminin $0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1$ aralıkları ile $\alpha = 0.5$, $\theta = 1, N = 900$, $M = 30$ için yaklaşık tam çözüm grafiğidir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, üçüncü mertebeden verilen kesirli kısmi diferansiyel denklemin çözümü theta metodu kullanılarak elde edildi. Bu problem için uygulama alanları giriş kısmında verildi. Theta metodu için sonlu fark şemaları kuruldu. Bu fark şemaları ile oluşturulan Theta metodunun karalı olduğu gösterildi. Theta metodunun sonlu fark şeması metotlarının en genel yöntemi olduğu ifade edildi. Bu metot iki örnek problem üzerinde test edildi. Matlab programı kullanılarak bu örnek problemlerin tam ve yaklaşık çözümler için grafikler çizildi. Tam ve yaklaşık çözüm grafikleri karşılaştırılarak kararlılık bölgesi için kestirimler yapıldı.

5.2. Öneriler

Laplace Dönüşüm Kolokasyonu Metodu (LDKM) üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için uygulanabilir.

KAYNAKLAR

ASHYRALYEV, A. and DAL, F., 2012. Finite difference and iteration methods for fractional hyperbolic partial differential equations with the Neumann condition. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2012, 2012.

ASHYRALYEV, A., and SIMSEK, S. N., 2017. An operator method for a third order partial differential equation. Numerical Functional Analysis and Optimization, *38*(10), 1341-1359.

ASHYRALYEV, A., BELAKROUM, K., and GUEZANE-LAKOUD, A., 2017. Stability of boundary-value problems for third-order partial differential equations. Electronic Journal of Differential Equations, 2017(53), 1-11.

ASHYRALYEV, A., HINCAL, E. and IBRAHIM, S., 2018. August. Stability of the third order partial differential equations with time delay. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1997, No. 1, p. 020086). AIP Publishing LLC.

ASLEFALLAH, M., ROSTAMY, D. and HOSSEINKHANI, K., 2014. Solving time-fractional differential diffusion equation by theta-method. *Int. J. Adv. Appl. Math. Mech*, 2014, 2.1: 1-8.

CAGLAR, H., CAGLAR, N., ÖZER, M., VALARISTOS, A. and ANAGNOSTOPOULOS, A.N., 2010. B-spline method for solving Bratu's problem. International Journal of Computer Mathematics, 87(8), 1885-1891.

ÇELIK, C. and DUMAN, M., 2012. Crank–Nicolson method for the fractional diffusion equation with the Riesz fractional derivative. *Journal of computational physics*, 2012, 231.4: 1743-1750.

CLARKSON, P. A., MANSFIELD, E. L. and PRIESTLEY, T.J., 1997. Symmetries of a class of nonlinear third-order partial differential equations. Mathematical and Computer Modelling, 25(8-9), 195-212.

FANHAI, Z. and CHANGPIN, L. I., 2013. High-order finite difference methods for time-fractional subdiffusion equation. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2013, 30.4: 491.

HASHEMI, M. S., AKGUL, A., INC, M., MUSTAFA, I. S., and BALEANU, D., 2017. Solving the Lane–Emden equation within a reproducing kernel method and group preserving scheme. *Mathematics*, *5*(4), 77.

HE, J. H., 2005. Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations. Chaos, Solitons and Fractals, 26(3), 695-700.

HE, J.H., 1999. Homotopy perturbation technique, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 178, 257.

HE, J.H., 2000. A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, Int. J. Non-linear Mech. 35 (1): 37-43.

HE, J.H., 2003. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. Applied Mathematics and computation, 135(1), 73-79.

KARATAY, I., KALE, N., and ERGUNER, S. R. B., 2014. Stability and convergence of a finite difference scheme for fractional partial differential equations by matrix method. In: *International Mathematical Forum*. 2014. p. 1757-1765.

MODANLI, M. and AKGÜL, A., 2017. Numerical solution of fractional telegraph differential equations by theta-method. *The European Physical Journal Special Topics*, 2017, 226.16: 3693-3703.

MODANLI, M. and AKGÜL, A., 2017. On solutions to the second-order partial differential equations by two accurate methods. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2018, 34.5: 1678-1692.

MODANLI, M., 2019. On the numerical solution for third order fractional partial differential equation by difference scheme method. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA), 9*(3), 1-5.

MODANLI, M., 2018. Two numerical methods for fractional partial differential equation with nonlocal boundary value problem. Advances in Difference Equations, 2018.1: 1-19.

MODANLI, M. ve EŞ, H., 2021. Üçüncü Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemin Homotopy Pertürbasyon Metodu ile Çözümü. Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 10(4), 1527-1534.

MOHYUD-DIN, S.T., NOOR, M. A. and NOOR, K. I., 2009. Some relatively new techniques for nonlinear problems. Mathematical Problems in Engineering, 1-25.

PODLUBNY, L., 1999. Fractional Differential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, San Diego, Calif., USA, 1-281.

RANA, M. A., SIDDIQUI, A. M., GHORI, Q. K., and QAMAR, R., 2007. Application of He's homotopy perturbation method to Sumudu transform. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8(2), 185-190.

SRIVASTAVA, V. K., AWASTHI, M. K., CHAURASIA, R. K., and TAMSIR, M., 2013. The telegraph equation and its solution by reduced differential transform method. *Modelling and Simulation in Engineering, 2013*.

TADJERAN, C., MEERSCHAERT, M. and SCHEFFLER, HP., 2006. A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation. *Journal of computational physics*, 2006, 213.1: 205-213.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : METİN KARACADAĞ

Uyruğu : T.C.

Doğum Yeri : Siverek/Şanlıurfa

Doğum Tarihi : 31.01.1991

e-mail : karacadagmetin@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Mustafa Kemal Lisesi, Siverek	2004
Üniversite	: Erzincan Üniversitesi, Merkez, Erzincan	2013
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi, Merkez, Şanlıurfa	2022

UZMANLIK ALANI

Uygulamalı Matematik

MODANLI, M. ve KARACADAĞ, M., 2022. Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemin theta metodu ile çözümü. IV. INTERNATIONAL HALICH CONGRESS ON MULTIDISCIPLINARY SCIENTIFIC RESEARCH August 4-5, 2022 / Istanbul, Türkiye, FARABI Publishing House, 185-192.