T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL SAYI TİPLERİ İLE TANIMLANAN CAUCHY-TOEPLITZ VE CAUCHY-HANKEL YAPISINDAKİ MATRİSLERİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Mehmet AKBULAK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA
2009

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI ÖZEL SAYI TİPLERİ İLE TANIMLANAN
CAUCHY-TOEPLITZ VE CAUCHY-HANKEL
YAPISINDAKİ MATRİSLERİN NORMLARI İÇİN SINIRLAR

Mehmet AKBULAK
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
2009, 73 sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ
Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Bu çalışmada matris ve sayı dizisi kavramlarını birleştirdik. Bazı sayı dizilerine bağlı olan Toeplitz, Hankel, Circulant, Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel yapısındaki matrisler tanımladık ve bu matrislerin Öklid ve spektral normları için alt ve üst sınırları araştırdık. Elde edilen sınır değerleri ve gerçek norm değerlerini tablolar üzerinde kıyasladık. Ayrıca bu matrislerin determinantını, Öklid ve spektral norm değerlerini hesaplayan Maple (Maple 12) prosedürlerini verdik.

Anahtar Kelimeler: Toeplitz matris; Hankel Matris; Circulant matris; Cauchy-Toeplitz matris; Cauchy-Hankel matris; Fibonacci dizisi; Lucas dizisi, Pell dizisi; Öklid normu; spektral norm.

ABSTRACT

PhD Thesis

BOUNDS FOR NORMS OF MATRICES WHICH DEFINED
WITH SOME SPECIAL NUMBER TYPES
SAME STRUCTURE TO CAUCHY-TOEPLITZ
AND CAUCHY-HANKEL MATRICES

Mehmet AKBULAK
Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Depertment of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
2009, 73 page

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ
Assoc. Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Assist. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

In this study, we combined matrix and integer sequence consepts. We defined Toeplitz, Hankel, Circulant, Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices depending on some integer sequences and investigated upper and lower bounds for the Euclidean and spectral norms of these matrices. We compared these upper and lower bound values with real values on tables. Also, we gave some Maple (Maple 12) procedures, which calculate determinants, Euclidean and spectral norm values of these matrices.

Keywords: Toeplitz matrix; Hankel Matrix; Circulant matrix; Cauchy-Toeplitz matrix; Cauchy-Hankel matrix; Fibonacci sequence; Lucas sequence, Pell sequence; Euclidean norm; spectral norm.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Durmuş BOZKURT yönetiminde hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışma başlıca üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmamızın amaç ve kapsamı açıklanmış, matris normları ve özelikleri verilmiş, sayı dizileri ile çalışmamızda kullandığımız özel tipteki matrisler tanıtılmıştır.

Çalışmamızın esas kısmı olan ikinci bölümde ise bazı özel sayı dizilerine bağlı olan Toeplitz, Hankel, Circulant, Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrisleri tanımlanmış ve bu matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırlar araştırılmıştır. Bu bölümde ayrıca tanımladığımız matrislerin determinant ve norm değerlerini hesaplayan Maple (Maple 12) prosedürleri çalışmamızın bilgisayar uygulaması olarak verilmiş ve matrislerin gerçek norm değerleri ile elde edilen alt ve üst sınır değerleri tablolar üzerinde kıyaslanmıştır.

Üçüncü bölümde çalışmamızla ilgili sonuç ve öneriler paylaşılmıştır.

Çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen başta değerli hocam Sayın Prof. Dr. Durmuş BOZKURT olmak üzere Tez İzleme Komitesinin değerli üyeleri Sayın Prof. Dr. Hasan ŞENAY ve Sayın Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet AKBULAK

Konya, 2009

SEMBOL TABLOSU

$A=[a_{ij}]$: Elemanları a_{ij}'ler olan A matrisi.

A^H : A matrisinin eşlenik transpozesi.

$\|A\|_E$: A matrisinin Euclidean normu.

$\|A\|_2$: A matrisinin spektral normu.

$\|A\|_p$: A matrisinin ℓ_p normu.

g_n^i : Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin i inci dizisinin n inci terimi.

l_n^i : Genelleştirilmiş Lucas dizisinin i inci dizisinin n inci terimi.

$\gcd(a,b)$: a ve b sayılarının en büyük ortak böleni.

$\operatorname{lcm}(a,b)$: a ve b sayılarının en küçük ortak katı.

$r_1(A)$: A matrisinin maksimum satır normu.

$c_1(A)$: A matrisinin maksimum sütun normu.

F_n : n inci Fibonacci sayısı.

L_n : n inci Lucas sayısı.

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi.

$\mathbb{C}$: Karmaşık sayılar cümlesi.

$M_n(\mathbb{F})$: Elemanları $\mathbb{F}$ cisminden alınan $n\times n$ mertebeli matrislerin cümlesi.

$M_{m,n}(\mathbb{F})$: Elemanları $\mathbb{F}$ cisminden alınan $m\times n$ mertebeli matrislerin cümlesi.

$\rho(A)$: A matrisinin spektral yarıçapı.

$A\circ B$: A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı.

İÇİNDEKİLER

Özet	i
Abstract	ii
Önsöz	iii
Sembol Tablosu	iv
İçindekiler	v
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Amaç Ve Kapsam	1
1.2. Normlar	12
1.3. Sayı Dizileri	24
1.4. Circulant, Toeplitz, Hankel, Cauchy-Toeplitz Ve Cauchy-Hankel Matrisleri	34
2. SAYI DİZİLERİNE BAĞLI MATRİSLER VE MAPLE UYGULAMALARI	37
2.1. Özel Sayı Dizilerine Bağlı Olarak Tanımlanan Circulant, Toeplitz Ve Hankel Yapısındaki Matrislerin Normları İçin Sınırlar	37
2.2. Özel Sayı Dizilerine Bağlı Olarak Tanımlanan Cauchy-Toeplitz Ve Cauchy-Hankel Yapısındaki Matrislerin Normları İçin Sınırlar	50
2.3. Maple Uygulamaları	58
2.4. Nümerik Sonuçlar Ve Tablolar	67
3. SONUÇ VE ÖNERİLER	70
Kaynaklar	71

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Amaç Ve Kapsam

Matris kavramı başta Fen ve Mühendislik olmak üzere birçok bilimsel alanda kullanılmaktadır. Kullanıldığı alana göre matrislerin uygulamaları da çeşitlilik göstermektedir.

$A=[a_{ij}]$, $m\times n$ tipinde bir matrisi ve A^H matrisi A matrisinin eşlenik transpozesini göstermek üzere

$$\|A\|_E=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

ve

$$\|A\|_2=\max_i\left\{\sqrt{|\lambda_i|}:\lambda_i\text{'ler}\,(A^HA)\,\text{matrisinin öz değerleri}, i=1,2,\ldots,n\right\}$$

ifadelerine sırasıyla A matrisinin Öklid normu ve spektral normu denir.

Tanımlardan da görüleceği üzere, bir matrisin Öklid normunu hesaplamak genellikle çok zor olmamakla beraber spektral normunu hesaplamak ise oldukça zordur. Bundan dolayı, teorik olarak spektral normun hesaplanamadığı durumlarda, bazı eşitsizlikler yardımı ile bu norm için alt ve üst sınırlar hesaplanmaktadır. Literatürde matris normlarının kullanıldığı birçok çalışma bulunmaktadır. Ağların ve çözümlerin kararlılık analizi, bazı denklemlerin yakınsaklığı ve öz değer ayrışımı, spektral norm kavramının kullanıldığı alanlardan sadece üçüdür.

Diziler ise tanım cümlesi doğal sayılar olan fonksiyonlardır. Dizi kavramı ise özellikle Matematik ve Bilgisayar alanlarında önemli bir yere sahiptir. Bilimsel veritabanlarında, ileride kullanacağımız Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Mersenne, Fermat, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, Modified Pell ve Catalan sayı dizilerini ve bazı uygulamalarını ihtiva eden çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu sayı dizilerinden ardışık iki teriminin oranı sırasıyla "Altın Oran" ve "Gümüş Oran" olarak bilinen Fibonacci ve Pell dizisi oldukça popülerdir.

Bu çalışmada, yukarıda değinilen matris normu ve sayı dizisi kavramları birleştirilmiş ve bazı sayı dizilerine bağlı olan Circulant, Toeplitz, Hankel, Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrisleri tanımlanarak bu matrislerin Öklid ve spektral normları için sınırlar araştırılmıştır.

Aşağıda, çalışmamıza kaynak teşkil eden, bazı özel matrislerin Öklid ve spektral normları ile kullanacağımız sayı dizileri üzerine yapılmış bazı çalışmalar özetlenmiştir.

[43]'de Solak $a_{ij} = F_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ ve $b_{ij} = L_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ olmak üzere, elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarına bağlı olan $n \times n$ mertebeli $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ Circulant matrislerini tanımlamış ve bu matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırlar elde etmiştir.

[23]'de Karaduman, k dizisi [14]'de Er tarafından $1-k \le n \le 0$ için

$$g_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1-n, \\ 0 & \text{diğer}, \end{cases}$$

sınır koşulları ile $n > 0$ ve $1 \le i \le k$ için

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} g_{n-j}^i$$

şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş $k-$Fibonacci sayılarından oluşturulmuş

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplamıştır.

[24]'de Karaduman, k dizisi $1-k \le n \le 0$ için

$$g_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1-n, \\ 0 & \text{diğer}, \end{cases}$$

sınır koşulları ile $n > 0$ ve $1 \le i \le k$ için

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i$$

şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş $k-$Fibonacci sayılarından oluşturulmuş

$$G_m = \begin{bmatrix} g_m^1 & g_m^2 & \cdots & g_m^k \\ g_{m-1}^1 & g_{m-1}^2 & \cdots & g_{m-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m-k+1}^1 & g_{m-k+1}^2 & \cdots & g_{m-k+1}^k \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplamıştır.

[41]'de Solak ve arkadaşları, elemanları Fibonacci sayılarına bağlı olan hemen hemen Toeplitz, Hankel ve GCD matrislerini sırasıyla

$$T=\begin{cases} a & i=j, \\ \dfrac{1}{F_{\gcd(i-j)}} & i\neq j, \end{cases},$$

$$H=\frac{1}{F_{\gcd(i+j)}},$$

ve

$$G=\frac{1}{F_{\gcd(i,j)}}$$

şeklinde tanımlamışlar ve bu matrislerin spektral ve ℓ_p normları için bazı sınırlar elde etmişlerdir.

[11]'de Civciv ve Türkmen

$$C=\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_n \\ L_n & L_1 & \cdots & L_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_2 & L_3 & \cdots & L_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elemanları Lucas saylarına bağlı olan Circulant matrisi tanımlamışlar ve bu matrisin ve Hadamard inversinin Öklid ve spektral normları için alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

[26]'da Kocer Modified Pell, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının bazı özelikleri ile $x\in\mathbb{C}^n$ olmak üzere bu sayı dizilerine bağlı olarak

$$c_{ij}=x_{j-i(\mathrm{mod}\,n)},$$

$$n_{ij}=\begin{cases} x_{j-i(\mathrm{mod}\,n)} & j\geq i \text{ için}, \\ -x_{j-i(\mathrm{mod}\,n)} & j<i \text{ için}, \end{cases}$$

ve

$$s_{ij}=\begin{cases} x_{j-i+1} & j\geq i \text{ için}, \\ 0 & j<i \text{ için}, \end{cases}$$

olmak üzere sırasıyla $C=[c_{ij}]$, $N=[n_{ij}]$ ve $S=[s_{ij}]$ şeklinde tanımladığı Circulant, negacyclic ve semicirculant matrislerin normlarını, öz değerlerini ve determinantlarını araştırmıştır.

[51]'de Yalçıner ve Taşkara $M_0 = 1$ olmak üzere, elemanları

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan Motzkin sayılarına bağlı olan Hankel matrisinin Hadamard inversinin ℓ_p normu için alt ve üst sınır elde etmişlerdir.

[52]'de Yalçıner

$$a_{ij} = \frac{1}{\mathrm{mod}(j-i,n)+1}\binom{n}{\mathrm{mod}(j-i,n)}$$

ve

$$b_{ij} = \mathrm{mod}(j-i,n)\binom{n}{\mathrm{mod}(j-i,n)}$$

olmak üzere elemanları

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

formülü ile verilen Catalan sayılarına bağlı $n \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ circulant matrislerinin spektral normları için alt ve üst sınırlar elde etmiştir.

[48]'de Tyrtyshnikov $T_n = [1/(i-j+1/2)]$ formundaki Cauchy-Toeplitz matrisinin bazı özeliklerini araştırmış ve mertebesinin artmasına rağmen matrisin en küçük singüler değerlerinin sıfıra yakınsadığını göstermiştir.

[5]'de Bozkurt hemen hemen Cauchy-Hankel matris tanımını vermiş ve bu matrisin ℓ_p normu için alt ve üst sınırlar elde etmiştir. Ayrıca bir Hankel matrisi ile hemen hemen Caucy-Toeplitz matrisin Hadamard çarpımının ℓ_p normu için bir üst sınır elde etmiştir.

[6]'da Bozkurt

$$T_n = \left[\frac{2}{1+2(i-j)}\right]_{i,j=1}^{n}$$

formundaki Cauchy-Toeplitz matrisinin $1 < p < \infty$ olmak üzere ℓ_p normu için alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir. Ayrıca $1 \le p,q \le \infty$ olmak üzere bu matrisin ℓ_{pq} normu için bir konjektür vermiştir.

[7]'de Bozkurt sırasıyla

$$T_n = \left[\frac{2}{1+2(i-j)} \right]_{i,j=1}^{n}$$

ve

$$H_n = \left[\frac{2}{1-2(i+j)} \right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklindeki Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin Hadamard çarpımlarının ℓ_p normu için alt ve üst sınırlar elde etmiştir.

[46]'da Türkmen ve Bozkurt $g = 1/k$ ve $h = 1$ olmak üzere $T_n = [1/(g+(i-j)h]_{i,j=1}^{n}$ şeklindeki genel Cauchy-Toeplitz matrisinin spektral normu için bir alt ve üst sınır ile $H_n = [1/(g+(i+j)h]_{i,j=1}^{n}$ formundaki Cauchy-Hankel matrislerinin spektral normu için bir üst sınır elde etmişlerdir. Ayrıca tanımladıkları Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel formundaki matrislerin Hadamard çarpımlarının Öklid normları için de bir alt ve üst sınır elde etmişlerdir.

[39]'da Solak ve Bozkurt $i+j \equiv k \pmod{n}$ olacak şekildeki $k = 0,1,\ldots,n-1$ tamsayıları için

$$H_n = \left[1/\left(g + h\left(i+j \right) \right) \right]_{i,j=1}^{n} \equiv \left[1/\left(g+kh \right) \right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklinde tanımladıkları Cauchy-Hankel matrisin ℓ_p ve spektral normu için sınırlar elde etmişlerdir.

[40]'da Solak ve Bozkurt,

$$T_n = \left[1/\left(a + \left(i-j \right) b \right) \right]_{i,j=1}^{n}$$

formundaki Cauchy-Toeplitz matrisin spektral normu için bir alt ve üst sınır ile

$$H_n = \left[1/\left(a + \left(i+j \right) b \right) \right]_{i,j=1}^{n}$$

formundaki Cauchy-Hankel matrisinin spektral normu için bir üst sınır elde etmişlerdir.

[19]'da Güngör, sırasıyla

$$T_n = \left[1/\left(g + \left(i-j \right) h \right) \right]_{i,j=1}^{n}$$

ve

$$H_n = \left[1/\left(g+\left(i+j\right)h\right)\right]_{i,j=1}^{n}$$

formundaki Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin Öklid ve spektral normları için birer alt sınır elde etmiştir.

[18]'de Güngör ve Türkmen $n\times n$ mertebeli kompleks elemanlı bir A matrisinin en küçük singüler değeri için bir alt sınır ve en büyük singüler değeri için bir üst sınır elde etmişlerdir. Ayrıca sırasıyla

$$H = \left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklindeki Hilbert matrisi ve Hadamard karekökü ile sırasıyla

$$T_n = \left[\frac{1}{g+\left(i-j\right)h}\right]_{i,j=1}^{n}$$

ve

$$H_n = \left[\frac{1}{g+\left(i+j\right)h}\right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklinde tanımlanan Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin en küçük ve en büyük singüler değerleri için birer alt ve üst sınır elde etmişlerdir.

[47]'de Türkmen ve Bozkurt sırasıyla

$$T_n = \left[\frac{2}{1+2\left(i-j\right)}\right]_{i,j=1}^{n}$$

ve

$$H_n = \left[\frac{2}{1-2\left(i+j\right)}\right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklindeki Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin spektral normları için birer üst sınır elde etmişlerdir. Ayrıca bu matrislerin Hadamard çarpımlarının spektral normu ve ℓ_p normu için birer üst sınır elde etmişlerdir.

[12]'de Civciv ve Türkmen

$$H_n = \left[\frac{2}{1+2\left(i+j\right)}\right]_{i,j=1}^{n}$$

formundaki Cauchy-Hankel matrislerinin Khatri-Rao çarpımlarının ℓ_p ve spektral normları için alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

[50]'de Wu sırasıyla

$$T_n = \left[\frac{1}{g + (i-j)h} \right]_{i,j=1}^{n}$$

ve

$$H_n = \left[\frac{1}{g + (i+j)h} \right]_{i,j=1}^{n}$$

formundaki Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerinin Öklid ve spektral normları için alt sınırlar elde etmiştir.

[38]'de Roch ve Silbermann, sonsuz mertebeli genel bir Cauchy-Toeplitz matrisinin $n \times n$ mertebeli bir kısmı olan

$$T_{g,n} = \left[\frac{1}{i-j+g} \right]_{i,j=1}^{n}$$

matrisinin en küçük singüler değerinin asimptotik davranışını araştırmışlardır.

[37]'de Parter, $f(\Theta) \in L_\infty(-\pi, \pi)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $(n+1)\times(n+1)$ mertebeli $T_n[f]$ Toeplitz matrislerinin öz değer dağılımı ile ilgili olarak 1920'de Szegö tarafından ispatlanan sonucu, $f_0(\Theta)$ reel değerli; $R_0(\Theta)$ sürekli, periyodik (2π periyotlu) ve $|R_0(\Theta)| = 1$ olmak üzere $f(\Theta) = f_0(\Theta) R_0(\Theta)$ fonksiyonu ile tanımlanan $T_n[f]$ matrisinin singüler değeleri için genelleştirmiştir.

[42]'de Solak, Türkmen ve Bozkurt

$$H = \left[\frac{1}{i+j-1} \right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklindeki Hilbert matrisinin ve bu matrisin Hadamard karekökünün ℓ_p normları için birer üst sınır elde etmişlerdir. Ayrıca

$$G = \left[\gcd(i,j) \right]_{i,j=1}^{n}$$

ve

$$L=\left[\frac{1}{\operatorname{lcm}(i,j)}\right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklindeki GCD ve reciprocal LCM matrislerinin Öklid normları için birer alt sınır elde etmişlerdir.

[33]'de Merikoski $m\times n$ mertebeli bir kompleks matris için, $\|x\|_E$ ifadesi x vektörünün Öklid normunu göstermek üzere x vektörünü iyi bir şekilde seçerek

$$\|A\|_2=\max\left\{\|Ax\|_E : x\in\mathbb{C}^n, \|x\|_E=1\right\}$$

şeklinde gösterilen spektral norm için basit ve iyi bir alt sınır elde etmiştir.

[2]'de Altınışık, Tuğlu ve Haukkanen, $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ pozitif tamsayılar cümlesi üzerinde tanımlanan ve elemanları

$$s_{ij}=\frac{1}{\operatorname{lcm}\left(x_i,x_j\right)}$$

şeklinde verilen

$$\left[S^{-1}\right]=\left[s_{ij}\right]$$

reciprocal LCM matrisinin bazı normları araştırmışlardır. Ayrıca reciprocal LCM matrisinin bir genelleştirmesinin spektral normu için üst sınır elde etmişlerdir.

[20]'de Haukkanen, i ve j sayılarının en büyük ortak böleni $\gcd(i,j)$ ve en küçük ortak katı $\operatorname{lcm}(i,j)$ ile gösterilmek üzere, elemanları

$$a_{ij}=\frac{\left(\gcd(i,j)\right)^s}{\left(\operatorname{lcm}(i,j)\right)^r}$$

şeklinde tanımlanan $A=[a_{ij}]$ matrisinin ℓ_p normunu araştırmıştır.

[31]'de Mathias $A=[a_{ij}]$ şeklinde verilen herhangi bir matris için $|A|=[|a_{ij}|]$ matrisini tanımlamış ve bu matrisin maksimum satır ve sütun normunlarına bağlı olarak spektral norm için

$$\||A|\|_2=\min\left\{r_1(B)c_1(C) : A=B\circ C\right\}$$

eşitliğini göstermiştir.

[14]'de Er, $1-k\le n\le 0$ için

$$g_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1-n, \\ 0 & \text{diğer}, \end{cases}$$

sınır koşulları ile $n > 0$ ve $1 \le i \le k$ için

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i$$

şeklinde genelleştirilmiş $k-$ıncı mertebeden Fibonacci dizisini tanımlamıştır. Dizinin elemanları için bir matris temsili elde etmiş ve bu temsilden faydalanarak genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için bazı formüller türetmiştir.

[21]'de Horadam Modified Pell sayılarının özeliklerini incelemiş ve bu sayılar için bazı uygulamalar yapmıştır.

[32]'de Melham; Fibonacci, Pell ve Pell-Lucas sayılarına bağlı bazı eşitlikler ve toplam formülleri elde etmiştir.

[9]'da Cahill ve arkadaşları üç bant matrislerin determinantları ve özdeğerleri yardımıyla Chebyshev polinomlarını kullanarak $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere Fibonacci ve Lucas sayıları için

$$F_{n+1} = i^n \frac{\sin\left((n+1)\cos^{-1}\left(-\frac{i}{2}\right)\right)}{\sin\left(\cos^{-1}\left(-\frac{i}{2}\right)\right)}$$

ve

$$L_n = 2i^n \cos\left(n\cos^{-1}\left(-\frac{i}{2}\right)\right)$$

formüllerini elde etmişlerdir.

[4]'de Benoumhani, Lucas sayılarının

$$L(n,k) = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

şeklindeki kombinasyonlu formülünden faydalanarak

$$L(n,x) = \sum_{k\ge 0} L(n,k)\, x^k$$

şeklinde tanımlanan Lucas polinomlarının bütün köklerinin reel olduğunu göstermiş ve Lucas sayılarının bazı özeliklerini incelemiştir.

[29]'da Lee ve arkadaşları Fibonacci matrislerinden elde edilen birinci ve ikinci tür Stirling matrisleri ile Pascal matrisleri üzerinde çalışmışlardır. Ayrıca Fibonacci ve Pascal matrisleri ile birinci ve ikinci tür Strling matrislerinin temsillerinden yola çıkarak kombinasyon içeren eşitlikler elde etmişlerdir.

[30]'da Lee ve Kim $k \geq 2$ için $\{g(k)_n\}$ ile gösterdikleri $k-$Fibonacci dizisini $n > k \geq 2$ için

$$g(k)_1 = \cdots = g(k)_{k-2} = 0, g(k)_{k-1} = g(k)_k = 1$$

ve

$$g(k)_n = g(k)_{n-1} + g(k)_{n-2} + \cdots + g(k)_{n-k}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Genelleştirilmiş sayı dizisine bağlı olarak uygun $k \geq 2$ sayıları için $g_n = g(k)_{n+k-2}$ ve

$$f(k)_{ij} = \begin{cases} g_{i-j+1} & i-j+1 \geq 0, \\ 0 & i-j+1 < 0, \end{cases}$$

olmak üzere, elemanları bu dizinin elemanlarına bağlı olan $n \times n$ mertebeli $k-$Fibonacci matrisini

$$F(k)_n = \left[f(k)_{ij} \right]$$

ve $j \leq 0$ için $q(k)_{ij} = 0$ iken

$$q(k)_{ij} = q(k)\, ji = \begin{cases} \sum_{l=1}^{k} q(k)_{i,j-l} & i+1 \leq j, \\ \sum_{l=1}^{k} q(k)_{i,i-l} + g_1 & i = j, \end{cases}$$

olmak üzere $n \times n$ mertebeli $k-$simetrik Fibonacci matrisini

$$L(k)_n = \left[q(k)_{ij} \right]_n$$

tanımlamışlar ve bu matrislerin özeliklerini araştırmışlardır.

[44]'de Taşçı ve Kılıç $k-$ıncı mertebeden genelleştirilmiş Lucas sayılarının k dizisini $1-k \leq n \leq 0$ için

$$l_n^i = \begin{cases} 2 & i = 2-n, \\ -1 & i = 1-n, \\ 0 & \text{diğer}, \end{cases}$$

sınır koşulları ile $n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$l_n^i = \sum_{j=1}^{k} l_{n-j}^i$$

şeklinde tanımlamışlar ve bu dizinin bir matris temsilini elde etmişlerdir. Elde edilen matrisin determinantını hesaplamışlar ve bu matris temsili ile [23]'da verilen genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin matris temsili arasında bir geçiş elde etmişlerdir.

[36]'da Öcal ve arkadaşları Miles tarafından 1960'da tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için determinant ve permanent temsilleri elde etmişlerdir. Ayrıca bu dizi için Binet formülü türetmişlerdir.

[10]'da Cerin, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının toplamsal ve çarpımsal özelikleri incelemiş ve yeni formüller türetmiştir.

1.2. Normlar

1.2.1. Vektör normları

Tanım 1.2.1.1. V, $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzay olsun. $\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayılar cümlesi olmak üzere,

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$$

dönüşümü

i) **(a)** $\forall x \in V$ için $\|x\| > 0$ **(b)** $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\forall x \in V$ ve $a \in \mathbb{F}$ için $\|ax\| = |a|\|x\|$,

iii) $\forall x, y \in V$ için $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa, negatif olmayan $\|x\|$ sayısına $x \in V$ vektörünün *normu* denir. **(i)-(b)** özeliğini sağlamayan yukarıdaki dönüşüme ise *yarı vektör normu* denir. Tanımdan da görüleceği gibi norm işlemi, bir vektörü bir sayıya dönüştürmektedir.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere bu iki vektörün bir iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n$$

şeklinde tanımlanabilir. Özel olarak $y = x$ seçilirse yukarıdaki eşitlik

$$\langle x, x \rangle = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + \cdots + x_n\overline{x}_n = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \|x\|^2$$

haline gelir ki, bu ifade norm ve iç çarpım arasındaki ilişkiyi gösterir.

Şimdi de iyi bilinen bazı vektör normlarının tanımlarını verelim.

Tanım 1.2.1.2. [15, 35] $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$ vektörü ve $1 \le p < \infty$ için

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan norma x vektörünün $p-normu$ veya *Hölder normu* denir. Bu normun özel durumları olarak

i) $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (toplam veya ℓ_1 normu),

ii) $\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ (Öklid veya ℓ_2 normu),

iii) $\|x\|_\infty = \max\left\{|x_1|, \ldots, |x_n|\right\} = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$ (maksimum norm veya ℓ_∞ normu)

normları verilebilir.

V vektör uzayının herhangi bir $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektörü için yukarıda tanımlanan normları arasında

i) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_2$,

ii) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$,

iii) $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\, \|x\|_1$,

iv) $\frac{1}{n} \|x\|_1 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_1$,

v) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n \|x\|_\infty$,

vi) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$

ilişkileri mevcuttur.

Tanım 1.2.1.3. V bir iç çarpım uzayı olsun. $x, y \in V$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\left|\langle x, y \rangle\right| \le \|x\|_p \, \|y\|_q$$

şeklinde tanımlanan eşitsizliğe *Hölder eşitsizliği* denir.

Teorem 1.2.1.1. V bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in V$ olsun. O halde

i) $\left|\langle x, y \rangle\right| \le \|x\|_2 \, \|y\|_2$ (Schwarz Eşitsizliği),

ii) $\|x + y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$ (Minkowski veya Üçgen Eşitsizliği)

dir.

1.2.2. Matris normları

Tanım 1.2.2.1. $\mathbb{F}$ bir cisim, $M_n(\mathbb{F})$'de elemanları $\mathbb{F}$ cisminden alınan $n \times n$ tipindeki kare matrislerin cümlesi olsun. $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ve $a \in \mathbb{F}$ için

i) $\|A\| \ge 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

ii) $\|aA\| = |a|\|A\|$,

iii) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$,

iv) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

şartlarını sağlayan

$$\|\cdot\| : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{R}^+$$

şeklindeki dönüşüme *matris normu* denir ve bir A matrisinin normu $\|A\|$ ile gösterilen pozitif reel sayıdır.

Yukarıda verilen dört şarttan ilk üçünü sağlayan dönüşüme *genelleştirilmiş matris normu* denir. Dolayısı ile her matris normu bir genelleştirilmiş matris normudur.

Örnek 1.2.2.1. $A \in M_n$ olmak üzere $\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir matris normudur. Bu dönüşümün ilk üç özeliği sağladığı açıktır. Dolayısıyla son özeliği sağlatmamız yeterli olacaktır. $A, B \in M_n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\|AB\|_1 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \le \sum_{i,j,k=1}^{n} |a_{ik} b_{kj}| \\ &\le \left(\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}| \right) \left(\sum_{j,m=1}^{n} |b_{mj}| \right) \\ &= \|A\|_1 \|B\|_1\end{aligned}$$

elde edilir. Bu dönüşüm ℓ_1 normu olarak adlandırılan matris normudur.

Teorem 1.2.2.1. Genelleştirilmiş bir matris normu daima matrisin elemanlarına bağlıdır. Yani, $\varepsilon > 0$ olmak üzere her i, j için $|a_{ij} - b_{ij}| < \varepsilon$ iken $|\|A\| - \|B\|| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

İspat. $n \times n$ tipindeki A ve B kare matrislerini alalım. E_{ij} matrisi $e_{ij} = 1$ ve diğer elemanları sıfır olan $n \times n$ mertebeli bir matris ise

$$A - B = \sum_{i,j} (a_{ij} - b_{ij}) E_{ij}$$

olur. $m = \max_{i,j} \|E_{ij}\|$ olarak seçersek matris normunun (i) aksiyomundan $m > 0$ olacaktır. (ii) ve (iii) aksiyomlarından

$$\|A-B\| \le \sum_{i,j} |a_{ij}-b_{ij}| \|E_{ij}\| \le m \sum_{i,j} |a_{ij}-b_{ij}|$$

elde edilir. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\delta = \varepsilon / mn^2$ seçelim. Eğer A ve B matrislerini $1 \le i, j \le n$ tamsayıları için

$$|a_{ij}-b_{ij}| < \delta$$

olacak şekilde seçersek

$$\|A-B\| < mn^2 \delta = \varepsilon$$

elde ederiz. $|a_{ij}-b_{ij}| < \varepsilon$ ve $\|A-B\| \ge |\|A\|-\|B\||$ olduğundan $|\|A\|-\|B\|| < \varepsilon$ elde edilir.

Tanım 1.2.2.2. $\mathbb{F}$ bir cisim, $M_n(\mathbb{F})$'de elemanları $\mathbb{F}$ cisminden alınan $n \times n$ tipindeki kare matrislerin cümlesi olsun. $A, I \in M_n(\mathbb{F})$ (I birim matris) olmak üzere

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

denkleminin köklerine A matrisinin *öz değerleri* denir.

Tanım 1.2.2.3. $\mathbb{F}$ bir cisim, $M_{m,n}(\mathbb{F})$'de elemanları $\mathbb{F}$ cisminden alınan $m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi olsun. $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ ve A^H, A matrisinin eşlenik transpozesini göstermek üzere $A^H A$ matrisinin öz değerlerinin karekköküne A matrisinin singüler değerleri denir ve A matrisinin tüm singüler değerlerinin cümlesi

$$\sigma(A) = \left\{ \sqrt{|\lambda_i|} : \lambda_i\text{'ler } (A^H A) \text{ matrisinin öz değerleri}, i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.2.4. A, $n \times n$ tipinde bir matris olsun. λ_i'ler A matrisinin öz değerleri olmak üzere, A matrisinin mutlak değerce en büyük öz değerine A matrisinin *spektral yarıçapı* denir ve

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i|\}$$

şeklinde gösterilir.

O halde A matrisinin herhangi bir öz değeri için $|\lambda_i| \le \rho(A)$ olacaktır.

Tanım 1.2.2.5. A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere;

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

ifadesine A matrisinin *maksimum sütun normu*,

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

ifadesine A matrisinin *maksimum satır normu*,

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 (A) \right)^{1/2}, \left(r = \operatorname{rank}(A)\right)$$

ifadesine A matrisinin *Öklid (Schur veya Frobenius) normu*,

$$\|A\|_2 = \max_i \left\{ \sqrt{|\lambda_i|} : \lambda_i\text{'ler } (A^H A) \text{ matrisinin öz değerleri}, i = 1,2,\ldots,n \right\}$$

ifadesine veya

$$\|A\|_2 = \max \left\{ \|Ax\|_E : \|x\|_E = 1 \right\}$$

ifadesine A matrisinin *spektral normu*,

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p}, (1 \le p < \infty)$$

ifadesine ise A matrisinin ℓ_p *normu* denir.

Yukarıdaki tanımdan açık olarak görülmektedir ki, maksimum sütun normu ve Öklid normu ℓ_p normunun $p = 1$ ve $p = 2$ için özel durumlarıdır. Ayrıca

$$\|A\|_p = \max \left\{ \|Ax\|_p : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_p = 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan norma A matrisinin *operatör normu* denir.

Teorem 1.2.2.2. [3] Bir A matrisinin spektral yarıçapı $\rho(A)$ ve herhangi bir normu $\|A\|$ ile gösterilmek üzere

$$\rho(A) \le \|A\|$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 1.2.2.3. [45] $i = 1,2,\ldots,n$ için λ_i'ler bir A matrisinin öz değerleri ve $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_n$'ler ise A matrisinin singüler değerleri ise

$$\sigma_n \le |\lambda_i| \le \sigma_1$$

eşitsizliği vardır.

Tanım 1.2.2.6. $\|\cdot\|$, $M_{m,n}$ cümlesi üzerinde tanımlanmış bir matris normu olsun. $\forall A \in M_{m,n}$ olmak üzere $U \in M_m$ ve $V \in M_n$ üniter matrisleri için $\|A\| = \|UAV\|$ oluyorsa bu norma *ünitarily invaryant matris normu* denir.

Örnek 1.2.2.2. $A \in M_n$ olmak üzere yukarıda tanımlanan Öklid normunu düşünelim. Eğer A matrisinin sütunları $a_i \in \mathbb{C}^n$ $(1 \le i \le n)$ vektörlerinden elde edilmiş ise

$$\|A\|_E^2 = \|a_1\|_E^2 + \cdots + \|a_n\|_E^2$$

yazılabilir. Öklid normu $\mathbb{C}^n$ üzerinde ünitarily invaryant bir norm olup $U \in M_n$ üniter matrisi için

$$\begin{aligned} \|UA\|_E^2 &= \|Ua_1\|_E^2 + \cdots + \|Ua_n\|_E^2 \\ &= \|a_1\|_E^2 + \cdots + \|a_n\|_E^2 \\ &= \|A\|_E^2 \end{aligned}$$

olacaktır. $\forall B \in M_n$ matrisi için $\|B^H\|_E = \|B\|_E$ olduğundan bu bize $\forall U, V \in M_n$ üniter matrisleri için

$$\|UAV\|_E = \|AV\|_E = \|V^H A^H\|_E = \|A^H\|_E = \|A\|_E$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla Öklid normu M_n üzerinde bir ünitarily invaryant matris normudur.

Teorem 1.2.2.4. Tanım 1.2.2.6 ile verilen dönüşüm M_n üzerinde bir matris normudur. Ayrıca $\forall A \in M_n$ ve $x \in \mathbb{C}^n$ için $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ olup I birim matrisi için $\|I\| = 1$'dir.

İspat. $\|A\|$ pozitif değerli fonksiyonların maksimumu olduğundan ve $A = 0$ iken tüm x vektörleri için $\|Ax\| = 0$ olup (i) aksiyomu sağlanır. $c \in \mathbb{C}$ için

$$\|cA\| = \max \|cAx\| = \max |c| \|Ax\| = |c| \max \|Ax\| = |c| \|A\|$$

olduğundan (ii) aksiyomu da sağlanır.

$$\|A + B\| = \max \|(A + B)x\| = \max \|Ax + Bx\| \le \max \|Ax\| + \max \|Bx\| = \|A\| + \|B\|$$

olup (iii) aksiyomunun yani, üçgen eşitsizliğinin de sağlandığı görülür. Son olarak çarpım aksiyomunun sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \\ &= \max \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\le \max \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \max \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &= \|A\|\|B\|\end{aligned}$$

olup (iv) aksiyomu da sağlanmış olur. Dolayısıyla bu dönüşüm bir matris normudur. Bu norm maksimum olarak tanımlandığı için $x \neq 0$ için $\| Ax/\|x\| \| \le \|A\|$ olduğu görülür. Vektör normunun (iv) özeliğinden $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ elde edilir. Bu eşitsizlik $x = 0$ için de sağlanır. Bu norm ifadesine bağlı olarak

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

yazılır.

Herhangi bir $\|\cdot\|$ matris normu için

$$\|A^2\| = \|AA\| \le \|A\|\|A\| = \|A\|^2$$

olduğundan dolayı $A^2 = A$ olacak şekildeki sıfır matrisinden farklı bir A matrisi için $\|A\| \ge 1$ olmalıdır. Dolayısıyla herhangi bir matris normu için $\|I\| \ge 1$ yazılabilir. Eğer A matrisi tersinir ise

$$\|I\| = \|AA^{-1}\| \le \|A\|\|A^{-1}\|$$

olup

$$\|A^{-1}\| \ge \frac{\|I\|}{\|A\|} = \frac{1}{\|A\|}$$

elde edilir.

Tanım 1.2.2.7. $\|\cdot\|$, $\mathbb{C}^n$ üzerinde tanımlanmış bir vektör normu olsun. M_n üzerinde tanımlanan

$$\|A\| \equiv \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

normuna $\|\cdot\|$ *vektör normu ile uyuşan matris normu* veya *vektör normuyla birleştirilmiş operatör normu* denir. $\|Ax\|$, x'in sürekli fonksiyonu ve $B_{\|\cdot\|}$ birim yuvarları kompakt bir cümle olduğundan tanımda kullanılan max kavramı sup kavramından daha uygundur. Bu norm ayrıca

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \\ &= \max_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \\ &= \max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\end{aligned}$$

şeklinde de hesaplanabilir.

Örnek 1.2.2.3. $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ normu ℓ_1 vektör normu ile uyuşan bir matris normudur. $a_i\,(1 \le i \le n)$'ler $A \in M_n$ matrisinin sütunlarını göstermek üzere $A = [a_1 a_2 \dots a_n]$ yazarsak $\|A\|_1 = \max_{1\le i\le n} \|a_i\|_1$ olur. Eğer $x = [x_j]$ ise

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \|x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n\|_1 \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \|x_i a_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|a_i\|_1 \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \left(\max_{1\le k\le n} \|a_k\|_1 \right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|A\|_1 \\ &= \|x\|_1 \|A\|_1\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \le \|A\|_1$$

bulunmuş olur. Eğer $k-$ıncı birim baz vektör olarak $x = e_k$ şeklinde seçilirse, bazı $k = 1, 2, \dots, n$ değerleri için

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \ge \|1 a_k\|_1 = \|a_k\|_1$$

ve

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \ge \max_{1\le k\le n} \|a_k\|_1 = \|A\|_1$$

olur. Dolayısıyla $\|A\|_1$ normu için hem bir alt sınır hem de bir üst sınır elde edilmiş oldu.

Örnek 1.2.2.4. $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ normu ℓ_∞ vektör normu ile uyuşan bir matris normudur. Gerçekten,

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \|x\|_\infty = \|A\|_\infty \|x\|_\infty$$

olup buradan $\max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty$ olur. $A = 0$ ise ispatlanacak bir şey yoktur. O halde $A \neq 0$ kabul edelim. A matrisinin $k-$ıncı satırı sıfırdan farklı olsun ve $z = [z_i] \in \mathbb{C}^n$ vektörü

$$z_i = \begin{cases} \overline{a}_{ki} / |a_{ki}|, & a_{ki} \neq 0 \text{ ise} \\ 1, & a_{ki} = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\|z\|_\infty = 1$, her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $a_{kj} z_j = |a_{kj}|$ ve

$$\max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty \ge \|Az\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \right| \ge \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} z_j \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

olur. Böylece

$$\max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty \ge \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \|A\|_\infty$$

olduğu gösterilmiş olur.

Tanım 1.2.2.8. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ mertebeli iki matris olsun. Elemanları $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$ şeklinde tanımlanan $m \times n$ mertebeli $C = [c_{ij}]$ matrisine A ve B matrislerin Hadamard çarpımı denir ve $C = A \circ B$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.2.9. $m \times n$ tipindeki bir A matrisini göz önüne alalım. Bu matrisin satırlarının ve sütunlarının Euclidean uzunlukları sırasıyla $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için

$$r_1(A) = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

ve

$$c_1(A) = \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.2.2.5. [31] A, B ve C matrisleri $m\times n$ mertebeli matrisler olsun. Eğer $A = B \circ C$ şeklinde yazılabilirse

$$\|A\|_2 \le r_1(B)c_1(C) \tag{1.2.2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

1.2.3. Matris normları arasındaki bağıntılar

A, $m\times n$ tipinde bir matris olmak üzere

i) $\|A\|_2 \le \|A\|_E \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$, (1.2.3.1)

ii) $\|A\|_\Delta \le \|A\|_2 \le \sqrt{mn}\,\|A\|_\Delta$; $\left(\|A\|_\Delta = \max|a_{ij}|\right)$,

iii) $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1\,\|A\|_\infty}$,

iv) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\,\|A\|_\infty$,

v) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\,\|A\|_1$

eşitsizlikleri vardır. Öklid normu ve spektral normun en önemli özeliği ortogonal dönüşümler altında invaryant kalmalarıdır.

$\sigma_1(A) \ge \sigma_2(A) \ge \ldots \ge \sigma_n(A)$ değerleri A matrisinin singüler değerleri olmak üzere (i) ile verilen eşitsizlik kolayca gösterilebilir. Öklid ve spektral norm değerlerinin her ikisi de singüler değerlere bağlı olup

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A)$$

ve

$$\|A\|_E^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \sigma_1(A)\\ &\le \left(\sigma_1^2(A)+\sigma_2^2(A)+\cdots+\sigma_n^2(A)\right)^{1/2}\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2(A)\right)^{1/2} = \|A\|_E\end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\|A\|_E^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2(A)\\ &\le \sigma_1^2(A)+\sigma_1^2(A)+\cdots+\sigma_1^2(A)\\ &= n\sigma_1^2(A)=n\|A\|_2^2\end{aligned}$$

olduğu açıkça görülür. Her iki tarafın karekökü alınarak $\|A\|_E \le \sqrt{n}\|A\|_2$ olduğu hemen görülür. Sonuç olarak $\|A\|_2 \le \|A\|_E \le \sqrt{n}\|A\|_2$ 'dir.

Tanım 1.2.3.1. [28] $\Gamma(x)$ Gamma Fonksiyonu

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

olmak üzere

$$\psi(x)=\frac{d}{dx}\left\{\ln\left[\Gamma(x)\right]\right\}$$

fonksiyonuna *psi (digamma) fonksiyonu* denir. Bu fonksiyonun $m-$inci türevi olan

$$\psi(m,x)=\frac{d^m}{dx^m}\psi(x)=\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d}{dx}\left\{\ln\left[\Gamma(x)\right]\right\}\right)$$

fonksiyonuna ise *polygamma fonksiyonu* denir. Burada $m\ge 0$ 'dır. Eğer $m=0$ ise

$$\psi(0,x)=\psi(x)$$

olur.

Özelik 1.2.3.1. [34] $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ fark operatörü ve $\Delta^{-1}f(x)=\sum_{i=0}^{x-1}f(i)$ ters fark operatörü olmak üzere

$$\psi(m,x)=\frac{d^m}{dx^m}\left(\ln\left[\Gamma(x+1)\right]\right)\ (m>0)$$

eşitsizliğinin her iki tarafına ileri fark operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta\psi(m,x) &= \frac{d^m}{dx^m}\Delta\left(\ln\left[\Gamma(x+1)\right]\right)\\ &= \frac{d^m}{dx^m}\ln\left(\frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+1)}\right)\\ &= \frac{d^m}{dx^m}\ln(x+1)\\ &= \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{1}{x+1}\right)\\ &= \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(x+1)^m}\end{aligned}$$

olur. Her iki tarafa ters fark operatörü uygulanırsa

$$\psi(m,x) = \Delta^{-1}\left(\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(x+1)^m}\right) = (-1)^{m-1}(m-1)!\,\Delta^{-1}\left(\frac{1}{(x+1)^m}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta^{-1}\left(\frac{1}{(x+1)^m}\right) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\psi(m,x)$$

yazılır. Ters fark operatörünün tanımından elde edilen son ifade bir asimptotik serinin polygamma fonksiyonu cinsinden değerini ifade eder.

Özelik 1.2.3.2. [40] $a,n\in\mathbb{Z}^+$ ve $b\in\mathbb{R}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\psi(a,n+b) = 0$$

dır.

Tanım 1.2.3.2. $s>1$ olmak üzere

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

fonksiyonuna *Riemann'ın zeta fonksiyonu* denir.

1.3. Sayı Dizileri

Bu bölümde öncelikle dizi tanımı verilecek ve önceki bölümlerde bahsedilen tamsayı dizilerinin tanımları ve sık kullanılan bazı özelikleri verilecektir.

Tanım 1.3.1. [8] Tanım cümlesi pozitif tamsayılar, değer cümlesi reel sayılar cümlesi olan her fonksiyona *dizi* denir. Dizinin verilebilmesi için her $1,2,\ldots,n,\ldots$ doğal sayılarına $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ reel sayıların karşılık getirilmesi gerekmektedir. $x_1,x_2,\ldots$ sayılarına dizinin terimleri, n doğal sayısına bağlı olan x_n ifadesine ise dizinin genel terimi denir.

Tanım 1.3.2. [27, 49] $F_1=F_2=1$ olmak üzere, $n\geq 1$ için

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi *Fibonacci Dizisi*, bu dizinin terimleri ise *Fibonacci Sayıları* olarak bilinmektedir. Bu dizinin ilk 10 terimi 1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 şeklindedir. Ardışık iki Fibonacci sayısının oranı olan

$$\tau=\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1,618$$

değeri *Altın Oran* olarak bilinmektedir. Rekürans bağıntısı geriye doğru düşünülürse negatif indisli Fibonacci sayıları

$$F_{-n}=(-1)^{n+1}F_n$$

şeklinde verilebilir.

Fibonacci sayı dizisi bilim dünyasında en çok kullanılan tamsayı dizisidir. Mimariden sanata, şifrelemeden mühendislik uygulamalarına ve Fiziğe kadar birçok alanda binlerce bilimsel makaleye konu olmuştur. Bu sayı dizisi ile ilk defa Fibonacci olarak bilinen Leonardo of Pisa (1170 – 1250) ilgilenmiştir. Fibonacci, yeni doğmuş bir çift tavşanın bir ayda olgunlaşıp bir çift tavşan doğurması varsayımı ile problemi ortaya atmıştır. Her yeni doğan tavşan çiftinin bir ay sonra bir çift tavşan doğurduğunu ve tavşanların ölmediğini düşünerek $n-$inci ay sonunda mevcut tavşan sayısının $n-$inci Fibonacci sayısına, yani F_n'e eşit olduğunu göstermiştir.

1718'de Fransız matematikçi Abraham De Moivre (1667 – 1754) $n-$inci Fibonacci sayısını hesaplamak için üreteç fonksiyonu kavramını ortaya atmıştır.

Tanım 1.3.3. [27] $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reel sayıların bir dizisi olsun.

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

fonksiyonuna $\{a_n\}$ dizisinin *üreteç fonksiyonu* denir.

Örneğin, pozitif tamsayıların üreteç fonksiyonu

$$g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

şeklindedir.

Üreteç fonksiyonları genellikle

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2 x^2 + \cdots + a^n x^n + \cdots$$

şeklinde kullanılmaktadır.

Teorem 1.3.1. [27] (Abraham De Moivre): $F_1 = F_2 = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ rekürans bağıntısı ile tanımlanan Fibonacci dizisi verilsin. $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ ve $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

dir.

İspat. Tanım 1.3.3'den Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu

$$g(x) = F_1 x + F_2 x^2 + \cdots + F_n x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$xg(x) = F_1 x^2 + F_2 x^3 + \cdots + F_n x^{n+1} + \cdots$$
$$x^2 g(x) = F_1 x^3 + F_2 x^4 + \cdots + F_n x^{n+2} + \cdots$$

olup

$$g(x) - xg(x) - x^2 g(x) = (1 - x - x^2) g(x)$$
$$= x$$

ede edilir. $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ ve $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ olmak üzere

$$g(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x} \right]$$

yazılabilir. Üreteç fonksiyonu tanımından

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{5}}x^n$$

elde edilir ki istenendir.

Yukarıdaki teoremde üreteç fonksiyonları yardımı ile 1718'de Abraham De Moivre tarafından ispatlanan formül, 1843'de Fransız matematikçi Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786–1856) tarafından farklı bir yoldan ispatlanmıştır. Binet, α ve β sayıları sırasıyla $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin pozitif ve negatif kökleri olmak üzere, $n \geq 1$ için $n-$inci Fibonacci sayısını

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklinde kesin olarak tanımlanmıştır. Şimdi bu tanımı bir teorem olarak verelim.

Teorem 1.3.2. [27, 49] $F_1 = F_2 = 1$ ve $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ ve $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ olmak üzere $n \geq 1$ için $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ Fibonacci rekürans bağıntısının genel çözümü

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir.

İspat. Verilen rekürans bağıntısına (fark denklemine) karşılık gelen karakteristik denklem $x^2 - x - 1 = 0$ şeklindedir ve bu denklemin kökleri $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ ve $\beta = (1-\sqrt{5})/2$'dir. Buradan $\alpha + \beta = 1$ ve $\alpha\beta = -1$ olduğu görülür. Rekürans bağıntısının genel çözümü

$$F_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

şeklinde olup başlangıç şartları kullanılarak

$$F_1 = A\alpha + B\beta = 1$$
$$F_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = 1$$

ifadesi elde edilir. Bu iki denklemden oluşan sistem çözülürse

$$A = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ve benzer olarak

$$B = \frac{\beta}{1+\beta^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

bulunur. Bulunan değerler genel çözümde yerlerine yazılırsa

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olduğu hemen görülür.

Tanım 1.3.4. [27] Teorem 1.3.2 ile verilen formül Fibonacci sayıları için *Binet Formülü* olarak bilinir.

Aşağıda Fibonacci sayıları ile ilgili çok kullanılan bazı özelikler verilmiştir [27, 49].

- $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
- $\sum_{j=0}^{k} F_{i+j} + F_{i+1} = F_{i+k+2}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ (1.3.1)
- $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$
- $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$
- $F_n = F_m F_{n-m+1} + F_{m-1}F_{n-m}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^2 = \frac{3F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+2}^2 - 6F_{2n}F_{2n+2} - 2n - 5}{5}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}^2 = \frac{3F_{2n}^2 + 2F_{2n-1}^2 - 4F_{2n-2}F_{2n} + 2n - 2}{5}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i F_{i+2} = F_{2n+1}F_{2n+2} - 1$

- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}F_{2i+1} = \dfrac{F_{2n+2}^2 + F_{2n+1}^2 - n - 2}{5}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i F_{i-1} = \begin{cases} F_n^2 & n \text{ çift ise,} \\ F_n^2 - 1 & n \text{ tek ise,} \end{cases}$ (1.3.2)
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}^3 = \dfrac{F_{2n}^3 + 3F_{2n}}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^3 = \dfrac{F_{2n+1}^2 - 3F_{2n-1} + 2}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i^3 = \dfrac{F_{n+2}^3 - 3F_{n+1}^3 + 3(-1)^n F_n + 2}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} iF_i^2 = nF_nF_{n+1} - F_n^2 + [1 + (-1)^{n-1}]/2$

Tanım 1.3.5. [27, 49] $L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olmak üzere, $n \geq 1$ için

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Lucas Dizisi*, bu dizinin terimlerine ise *Lucas sayıları* denir. Bu dizinin ilk 10 terimi 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123 şeklindedir. Rekürans bağıntısı geriye doğru düşünülürse negatif indisli Lucas sayıları

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

formülü ile verilebilir.

Fibonacci sayıları kadar olmasa da Lucas sayıları da bilimsel makalelerde sıkça kullanılmaktadır. Literatürde Lucas sayıları ile ilgili çok sayıda makale bulunmaktadır.

Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir. Bu üreteç fonksiyonu yardımı ile $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ ve $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ olmak üzere Lucas sayılarına ait Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Aşağıda Lucas sayıları ile ilgili sık kullanılan bazı özelikler verilmiştir [27, 49].

- $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1$
- $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$ (1.3.3)
- $L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i L_{i-1} = \begin{cases} L_n^2 - 4 & n \text{ çift ise,} \\ L_n^2 + 1 & n \text{ tek ise,} \end{cases}$ (1.3.4)

Aşağıda Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren ve iyi bilinen bazı özelikler verilmiştir [27, 49].

- $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$
- $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$
- $F_{2n} = F_n L_n$
- $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$
- $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$
- $L_{4n} = 5F_{2n}^2 + 2$
- $L_{m+n}^2 - L_{m-n}^2 = 5L_{2m}F_{2n}$
- $F_m L_n + F_n L_m = 2F_{m+n}$

Tanım 1.3.6. [1] p ve q sıfırdan farklı, aralarında asal ve $p^2 + 4q \neq 0$ olacak şekilde tamsayılar olsun. $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri $n \geq 2$ için

$$U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2}, U_0 = 0, U_1 = 1$$
$$V_n = pV_{n-1} + qV_{n-2}, V_0 = 0, V_1 = p$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $p = 2$ ve $q = 1$ alınırsa

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, P_0 = 0, P_1 = 1$$
$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, Q_0 = 0, Q_1 = 2$$

dizileri elde edilir. $\{P_n\}$ ve $\{Q_n\}$ dizilerine sırasıyla *Pell* ve *Pell-Lucas* dizisi denir. Bu dizilerin terimlerine ise sırasıyla *Pell* ve *Pell-Lucas sayıları* denir. Bu dizilerin ilk 10 terimi sırasıyla 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985 ve 2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, 2786 şeklindedir. $\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$, $x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere $n-$inci Pell, Pell-Lucas sayılarının Binet formülleri sırasıyla

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir. Ardışık iki Pell sayısının oranı olan

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1+\sqrt{2} \cong 2,414$$

değeri literatürde *Gümüş Oran* olarak bilinir. Pell dizisinin rekürans bağıntısı geriye doğru düşünülürse negatif indisli Pell sayıları

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$$

formülü ile verilebilir. Benzer olarak Pell-Lucas dizisinin rekürans bağıntısı geriye doğru düşünülürse negatif indisli Pell-Lucas sayıları

$$Q_{-n} = (-1)^n Q_n$$

formülü ile verilebilir.

Tanım 1.3.7. [1] $q_1 = 1$ ve $q_2 = 3$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan diziye *Modified Pell dizisi*, bu dizinin terimlerine ise *Modified Pell sayıları* denir. Bu dizinin ilk 10 terimi 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363 şeklindedir. Modified Pell dizisinin rekürans bağıntısı geriye doğru düşünülürse negatif indisli Modified Pell sayıları

$$q_{-n} = (-1)^n q_n$$

ile verilebilir. $\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$, $x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere $n-$inci Modified Pell sayısının Binet formülü

$$q_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta}$$

şeklindedir.

Aşağıda Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayıları ile ilgili önemli bazı özelikler verilmiştir [1, 27].

- $P_n^2 + P_{n-1}P_{n+1} = \frac{Q_n^2}{4} = q_n^2$
- $Q_n^2 + Q_{n-1}Q_{n+1} = 16P_n^2$
- $q_n = \frac{P_{n+1} + P_{n-1}}{2}$
- $2P_n = \frac{q_{n+1} + q_{n-1}}{2}$
- $P_n = \frac{q_n + q_{n-1}}{2}$
- $q_{n+1}q_{n-1} - q_n^2 = 2(-1)^{n+1}$
- $\sum_{i=1}^{n} q_{2i} = \frac{q_{2n+1} - 1}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} q_{2i-1} = \frac{q_{2n} - 1}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} q_i = P_{n+1} - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} P_i = \frac{-q_{n+1} - 1}{2}$
- $P_{m+n} = P_m P_{n+1} + P_{m-1}P_n$
- $Q_n = 2q_n$
- $Q_n^2 = 2P_n^2 + (-1)^n$
- $Q_{2n} = 2Q_n^2 - (-1)^n$
- $\sum_{k=1}^{n} P_k^2 = \frac{P_n P_{n+1}}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} Q_k^2 = \frac{Q_{2n+1} + 2(-1)^n - 4}{2}$

- $\sum_{k=1}^{n} q_k^2 = \frac{q_{2n+1} + (-1)^n - 2}{4}$

Tanım 1.3.8. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere elemanları

$$M(n) = 2^n - 1$$

bağıntısı ile tanımlanan diziye *Mersenne Dizisi,* bu dizinin terimlerine ise *Mersenne Sayıları* denir. Bu dizinin ilk on terimi 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023 şeklindedir.

Tanım 1.3.9. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere elemanları

$$F(n) = 2^{2^n} + 1$$

bağıntısı ile tanımlanan diziye *Fermat Dizisi,* bu dizinin terimlerine ise *Fermat Sayıları* denir. Bu dizinin ilk beş terimi 5, 17, 257, 65537, 4294967297 şeklindedir.

Tanım 1.3.10. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere elemanları

$$C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

bağıntısı ile tanımlanan diziye *Catalan Dizisi,* bu dizinin terimlerine ise *Catalan Sayıları* denir. Bu dizinin ilk on terimi 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862 şeklindedir.

Tanım 1.3.11. $J_1 = 1$ ve $J_2 = 3$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Jacobsthal dizisi*, bu dizinin terimlerine ise *Jacobsthal sayıları* denir. Bu dizinin ilk on terimi 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683 şeklindedir. Jacobsthal dizisinin genel terimi

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

şeklindedir.

Tanım 1.3.12. $j_1 = 1$ ve $j_2 = 3$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Jacobsthal-Lucas dizisi*, bu dizinin terimlerine ise *Jacobsthal-Lucas sayıları* denir. Bu dizinin ilk on terimi 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, 1025, 2047 şeklindedir. Jacobsthal-Lucas dizisinin genel terimi

$$j_n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir.

1.4. Circulant, Toeplitz, Hankel, Cauchy-Toeplitz Ve Cauchy-Hankel Matrisleri

Tanım 1.4.1. $x_i \neq y_j$ olacak şekildeki x_i ve y_j sayıları için elemanları

$$c_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j}$$

şeklinde tanımlanan $C = [c_{ij}]$ matrisine x_i ve y_j elemanlarına bağlı bir *Cauchy Matrisi* denir.

Tanım 1.4.2. [41] Elemanları karmaşık ya da reel olan ve $t_{ij} = t_{i-j}$ olmak üzere

$$T_n = \left(t_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$

şeklinde tanımlanan matrise $n \times n$ mertebeli *Toeplitz Matrisi* denir. Bu matris açık olarak yazılırsa,

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{2-n} & t_{1-n} \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{3-n} & t_{2-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür ki esas köşegene paralel olan doğrultulardaki elemanlar sabittir.

f, $[-\pi, \pi]$ üzerinde tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon ve $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (n-1)$ olmak üzere yukarıdaki Toeplitz matrisin elemanları

$$t_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-itk} dt$$

şeklinde yazılabilmektedir [17].

Tanım 1.4.3. [41] Elemanları karmaşık ya da reel olan ve $h_{ij} = h_{i+j}$ olmak üzere

$$H_n = \left(h_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$

şeklinde tanımlanan matrise $n \times n$ mertebeli *Hankel Matrisi* denir. Bu matris açık olarak yazılırsa,

$$H_n = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \cdots & h_n & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & \cdots & h_{n+1} & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-2} & h_{2n-1} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \cdots & h_{2n-1} & h_{2n} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Tanım 1.4.4. [43] Elemanları karmaşık ya da reel olan ve $c_{ij} = c_{(j-i) \bmod n}$ olmak üzere

$$C_n = [c_{ij}]_{i,j=1}^{n}$$

şeklinde tanımlanan matrise $n \times n$ mertebeli *Circulant (Dairesel) Matris* denir. Bu matris açık olarak yazılacak olursa

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Dikkat edilirse her Circulant matris aynı zamanda bir Toeplitz matrisidir.

Tanım 1.4.5. [39] $\mathbb{Z}$ tamsayılar cümlesi olmak üzere $(g/h) \notin \mathbb{Z}$ olacak şekildeki g ve $h \neq 0$ sayıları için genel formu

$$H_{g,h} = \left[\frac{1}{g + (i+j)h} \right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklinde olan matrise $n \times n$ mertebeli *Cauchy-Hankel Matris* denir.

Tanım 1.4.6. [48] $\mathbb{Z}$ tamsayılar cümlesi olmak üzere $(g/h) \notin \mathbb{Z}$ olacak şekildeki g ve $h \neq 0$ sayıları için genel formu

$$T_{g,h} = \left[\frac{1}{g + (i-j)h} \right]_{i,j=1}^{n}$$

şeklinde olan matrise $n \times n$ mertebeli *Cauchy-Toeplitz Matrisi* denir.

Hem Cauchy hem de Toeplitz matris özeliğini taşıyan ve Cauchy-Toeplitz matrisi olarak adlandırılan matris ilk defa Tyrtyshnikov tarafından tanımlanmıştır.

Tyrtyshnikov, Cauchy-Toeplitz matrisinde $g = 1/2$ ve $h = 1$ alarak elde ettiği $T_{1/2,1}$ matrisinin spektral normu için bir alt sınır elde etmiştir.

2. SAYI DİZİLERİNE BAĞLI MATRİSLER VE MAPLE UYGULAMALARI

2.1. Özel Sayı Dizilerine Bağlı Olarak Tanımlanan Circulant, Toeplitz Ve Hankel Yapısındaki Matrislerin Normları İçin Sınırlar

Bu bölümde elemanları Bölüm 1.3'de tanımlan sayı dizilerinden bazılarına bağlı olarak Toeplitz, Hankel ve Circulant matrisler tanımlanacak, bu matrislerin Öklid normları ve spektral normları için alt ve üst sınırlar araştırılacaktır.

$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tamsayı dizisi verilsin. Elemanları bu dizinin terimlerine bağlı olan $m\times m$ mertebeli Toeplitz, Hankel ve Circulant matrisleri sırasıyla

$$T_m^u = \left[u_{i-j}\right]_{i,j=1}^{m},$$

$$H_m^u = \left[u_{i+j}\right]_{i,j=1}^{m}$$

ve

$$C_m^u = \left[u_{(j-i)\bmod m}\right]_{i,j=1}^{m}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 2.1.1. $t_{ij}^u = u_{i-j}$ olmak üzere, $m\times m$ mertebeli $T_m^u = [t_{ij}^u]_{i,j=1}^m$ matrisi elemanları $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimlerine bağlı bir Toeplitz matrisi olsun. u_n, dizinin $n-$inci terimi olmak üzere, T_m^u matrisinin spektral normu için aşağıdaki alt ve üst sınırlar mevcuttur.

i) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonacci dizisi olarak seçilirse;

$$\left\|T_m^F\right\|_2 \geq \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{m}F_m^2} & m \text{ çift ise,} \\ \sqrt{\dfrac{2}{m}\left(F_m^2-1\right)} & m \text{ tek ise,} \end{cases}$$

alt sınırı ve

$$\left\|T_m^F\right\|_2 \leq \sqrt{\left(1+F_mF_{m-1}\right)\left(F_mF_{m-1}\right)}$$

üst sınırı vardır.

ii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Lucas dizisi olarak seçilirse;

$$\left\|T_m^L\right\|_2 \geq \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{m}\left(L_m^2-4\right)} & m \text{ çift ise,} \\ \sqrt{\frac{2}{m}\left(L_m^2+1\right)} & m \text{ tek ise,} \end{cases}$$

alt sınırı ve

$$\left\|T_m^L\right\|_2 \leq \sqrt{\left(L_m L_{m-1}-1\right)\left(L_m L_{m-1}+2\right)}$$

üst sınırı vardır.

İspat. T_m^u Toeplitz matrisi açık olarak yazılırsa

$$T_m^u = \begin{bmatrix} u_0 & u_{-1} & \cdots & u_{1-m} \\ u_1 & u_0 & \cdots & u_{2-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m-1} & u_{m-2} & \cdots & u_0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. T_m^u matrisinin Euclidean normunun karesi hesaplanırsa

$$\left\|T_m^u\right\|_E^2 = mu_0^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{i} u_k^2$$

elde edilir. Burada;

i) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonacci dizisi olarak seçilir ve (1.3.1) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \left\|T_m^F\right\|_E^2 &= mF_0^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{i} F_k^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^{m-1} F_i F_{i+1} \\ &= 2\sum_{k=1}^{m} F_k F_{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. (1.3.2) numaralı eşitlik yardımıyla bu matrisin Öklid normu

$$\left\|T_m^F\right\|_E = \begin{cases} \sqrt{2F_m^2} & m \text{ çift ise,} \\ \sqrt{2\left(F_m^2-1\right)} & m \text{ tek ise,} \end{cases}$$

olarak elde edilir. Matris normları arasındaki (1.2.3.1) eşitsizliği kullanılarak elemanları Fibonacci sayılarına bağlı olan Toeplitz matrisin spektral normu için

$$\left\|T_m^F\right\|_2 \geq \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{m}F_m^2} & m \text{ çift ise,} \\ \sqrt{\frac{2}{m}\left(F_m^2-1\right)} & m \text{ tek ise,} \end{cases}$$

alt sınırı elde edilir.

ii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Lucas dizisi olarak seçilir ve (1.3.3) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \left\|T_m^L\right\|_E^2 &= mL_0^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{i} L_k^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^{m-1} L_i L_{i+1} \\ &= 2\sum_{k=1}^{m} L_k L_{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. (1.3.4) numaralı eşitlik yardımıyla bu matrisin Öklid normu

$$\left\|T_m^L\right\|_E = \begin{cases} \sqrt{2\left(L_m^2-4\right)} & m \text{ çift ise,} \\ \sqrt{2\left(L_m^2+1\right)} & m \text{ tek ise,} \end{cases}$$

olarak elde edilir. Matris normları arasındaki (1.2.3.1) eşitsizliğinden, elemanları Lucas sayılarına bağlı olan Toeplitz matrisin spektral normu için

$$\left\|T_m^L\right\|_2 \geq \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{m}\left(L_m^2-4\right)} & m \text{ çift ise,} \\ \sqrt{\frac{2}{m}\left(L_m^2+1\right)} & m \text{ tek ise,} \end{cases}$$

alt sınırı elde edilir.

Şimdi de spektral norm için üst sınırları bulalım.

Elemanları $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine bağlı olan, $m\times m$ mertebeli C_m^u ve D_m^u matrislerini $T_m^u = C_m^u \circ D_m^u$ olmak üzere

$$C_m^u = (c_{ij}^u) = \begin{cases} c_{ij}^u = 1 & j = 1, \\ c_{ij}^u = u_{i-j} & j \neq 1, \end{cases}$$

ve

$$D_m^u = (d_{ij}^u) = \begin{cases} d_{ij}^u = 1 & j \neq 1, \\ d_{ij}^u = u_{i-j} & j = 1, \end{cases}$$

şeklinde seçelim. Bu taktirde

$$r_1(C_m^u) = \max_i \sqrt{\sum_j \left|c_{ij}^u\right|^2} = \sqrt{1+\sum_{k=1}^{m-1} u_{-k}^2}$$

ve

$$c_1(D_m^u) = \max_j \sqrt{\sum_i \left|d_{ij}^u\right|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} u_k^2}$$

elde edilir. (1.2.2.1) eşitsizliğinden T_m^u matrisinin spektral normu için

$$\left\|T_m^u\right\|_2 \le r_1\left(C_m^u\right) c_1\left(D_m^u\right) \tag{2.1.1}$$

üst sınırı elde edilir. (2.1.1) eşitsizliğinde;

i) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonacci dizisi olarak seçilerek (1.3.1) ve (1.3.2) kullanılırsa;

$$r_1(C_m^F) = \max_i \sqrt{\sum_j \left|c_{ij}^F\right|^2} = \sqrt{1+\sum_{k=1}^{m-1} F_{-k}^2}$$
$$= \sqrt{1+\sum_{k=1}^{m-1} F_k^2} = \sqrt{1+F_m F_{m-1}}$$

ve

$$c_1(D_m^F) = \max_j \sqrt{\sum_i \left|d_{ij}^F\right|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} F_k^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{m-1} F_k^2} = \sqrt{F_m F_{m-1}}$$

elde edilir. Buradan elemanları Fibonacci sayılarına bağlı olan Toeplitz matrisin spektral normu için bir üst sınır

$$\left\|T_m^F\right\|_2 \le \sqrt{\left(1+F_m F_{m-1}\right)\left(F_m F_{m-1}\right)}$$

şeklindedir.

ii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Lucas dizisi olarak seçilerek (1.3.3) ve (1.3.4) kullanılırsa;

$$r_1(C_m^L) = \max_i \sqrt{\sum_j \left|c_{ij}^L\right|^2} = \sqrt{1+\sum_{k=1}^{m-1} L_{-k}^2}$$
$$= \sqrt{1+\sum_{k=1}^{m-1} L_k^2} = \sqrt{L_m L_{m-1} - 1}$$

ve

$$c_1(D_m^L) = \max_j \sqrt{\sum_i \left| d_{ij}^L \right|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} L_k^2}$$
$$= \sqrt{4 + \sum_{k=1}^{m-1} L_k^2} = \sqrt{L_m L_{m-1} + 2}$$

elde edilir. Buradan elemanları Lucas sayılarına bağlı olan Toeplitz matrisin spektral normu için bir üst sınır

$$\left\| T_m^L \right\|_2 \le \sqrt{\left(L_m L_{m-1} - 1 \right)\left(L_m L_{m-1} + 2 \right)}$$

şeklindedir. (Bölüm 2.4, Tablo 2.4.1 ve 2.4.2'de nümerik sonuçlar görülebilir.)

[25]'de Kayabaş $k = 2$ için bilinen Fibonacci dizisini veren ve $\{g_n^k\}$ ile gösterilen genelleştirilmiş Fibonacci dizisine bağlı $n \times n$ mertebeli

$$T_n^k = \left(g_{r-s}^k \right)_{r,s=1}^n$$

şeklindeki Toeplitz matrisini tanımlamışlar ve bu matrisin Öklid normu için

$$\left\| T_n^2 \right\|_E \le \left[n\left(F_n F_{n+1} - 1 \right) \right]^{1/2}$$

şeklinde bir üst sınır elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.2. $h_{ij}^u = u_{i+j}$ olmak üzere $m \times m$ mertebeli $H_m^u = [h_{ij}^u]_{i,j=0}^{m-1}$ matrisi, elemanları $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin terimlerine bağlı bir Hankel matris olsun. u_n dizinin $n-$inci terimi olmak üzere, H_m^u matrisinin spektral normu için aşağıdaki alt ve üst sınırlar mevcuttur.

i) $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Fibonacci dizisi olarak seçilirse;

$$\left\| H_m^F \right\|_2 \ge \left[-\frac{1}{2m}\left(F_{4m} - 3F_{2m}^2 - 2F_{2m} + 6F_m^2 - 2 + 2\left(-1\right)^m \right) \right]^{1/2}$$

alt sınırı ve $M = F_{2m-2}F_{2m-3} - F_{m-1}F_{m-2}$ olmak üzere

$$\left\| H_m^F \right\|_2 \le \left[\left(M + F_{2m-2}^2 \right)\left(M + 1 \right) \right]^{1/2}$$

üst sınırı vardır.

ii) $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Lucas dizisi olarak seçilirse

$$\left\| H_m^L \right\|_2 \ge \left[\frac{1}{m}\left(L_{2m-1}^2 - 2L_{m-1}^2 + 1 + 5\left(1 - \left(-1\right)^m \right) \right) \right]^{1/2}$$

alt sınırı ve $N = L_{2m-1}L_{2m-2} - L_{m-1}L_{m-2}$ olmak üzere

$$\left\|H_m^L\right\|_2 \le \left[N\left(N+1-L_{2m-2}^2\right)\right]^{1/2}$$

üst sınırı vardır.

İspat. H_m^u matrisi açık olarak yazılırsa

$$H_m^u = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{m-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m-1} & u_{m-2} & \cdots & u_{2m-2} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Bu matrisin Euclidean normunun karesi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \left\|H_m^u\right\|_E^2 &= \sum_{k=0}^{m-1} u_k^2 + \sum_{k=1}^{m} u_k^2 + \cdots + \sum_{k=m-1}^{2m-2} u_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} u_k^2 + \sum_{k=0}^{m-1} u_{k+1}^2 + \cdots + \sum_{k=0}^{m-1} u_{m+k-1}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-1} u_{k+i}^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} \left\|H_m^u\right\|_E^2 &= \sum_{k=0}^{m-1} u_{k+m}u_{k+m-1} - \sum_{k=0}^{m-1} u_k u_{k-1} \\ &= \sum_{k=m}^{2m-1} u_k u_{k-1} - \sum_{k=0}^{m-1} u_k u_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{2m-1} u_k u_{k-1} - \sum_{k=1}^{m-1} u_k u_{k-1} - \sum_{k=0}^{m-1} u_k u_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{2m-1} u_k u_{k-1} - 2\sum_{k=1}^{m-1} u_k u_{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada;

i) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonacci dizisi olarak seçilirse, (1.3.2) eşitliği kullanılarak

$$\left\|H_m^F\right\|_E^2 = -\frac{1}{2}\left(F_{4m} - 3F_{2m}^2 - 2F_{2m} + 6F_m^2 - 2 + 2(-1)^m\right)$$

elde edilir. O halde bu matrisin Öklid normu

$$\left\|H_m^F\right\|_E = \left[-\frac{1}{2}\left(F_{4m} - 3F_{2m}^2 - 2F_{2m} + 6F_m^2 - 2 + 2(-1)^m\right)\right]^{1/2}$$

olarak elde edilir. Matris normları arasındaki (1.2.3.1) eşitsizliği kullanılarak elemanları Fibonacci sayılarına bağlı olan Hankel matrisinin spektral normu için

$$\left\|H_m^F\right\|_2 \geq \left[-\frac{1}{2m}\left(F_{4m}-3F_{2m}^2-2F_{2m}+6F_m^2-2+2(-1)^m\right)\right]^{1/2}$$

alt sınırı elde edilir.

ii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Lucas dizisi olarak seçilirse, (1.3.4) eşitliği kullanılarak

$$\left\|H_m^L\right\|_E^2 = L_{2m-1}^2 - 2L_{m-1}^2 + 1 + 5\left(1-(-1)^m\right)$$

elde edilir. O halde bu matrisin Öklid normu

$$\left\|H_m^L\right\|_E = \left[L_{2m-1}^2 - 2L_{m-1}^2 + 1 + 5\left(1-(-1)^m\right)\right]^{1/2}$$

olarak elde edilir. Matris normları arasındaki (1.2.3.1) eşitsizliği kullanılarak elemanları Lucas sayılarına bağlı olan Hankel matrisinin spektral normu için

$$\left\|H_m^L\right\|_2 \geq \left[\frac{1}{m}\left(L_{2m-1}^2 - 2L_{m-1}^2 + 1 + 5\left(1-(-1)^m\right)\right)\right]^{1/2}$$

alt sınırı elde edilir.

Şimdi de spektral norm için üst sınırları bulalım.

Elemanları $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine bağlı olan E_m^u ve G_m^u matrislerini $H_m^u = E_m^u \circ G_m^u$ olmak üzere

$$E_m^u = (e_{ij}^u) = \begin{cases} e_{ij}^u = 1 & i \neq m-1, \\ e_{ij}^u = u_{i+j} & i = m-1, \end{cases}$$

ve

$$G_m^u = (g_{ij}^u) = \begin{cases} g_{ij}^u = 1 & i = m-1, \\ g_{ij}^u = u_{i+j} & i \neq m-1, \end{cases}$$

şeklinde seçelim. O halde

$$r_1(E_m^u) = \max_i \sqrt{\sum_j \left|e_{ij}^u\right|^2} = \sqrt{\sum_{k=-1}^{m-2} u_{m+k}^2}$$

ve

$$c_1(G_m^u) = \max_j \sqrt{\sum_i \left|g_{ij}^u\right|^2} = \sqrt{1+\sum_{k=-1}^{m-3} u_{m+k}^2}$$

elde edilir. (1.2.2.1) eşitsizliğinden H_m^u matrisinin spektral normu için

$$\left\|H_m^u\right\|_2 \leq r_1\left(E_m^u\right) c_1\left(G_m^u\right) \qquad (2.1.2)$$

üst sınırı elde edilir. (2.1.2) eşitsizliğinde;

i) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonacci dizisi olarak seçilirse, Binet formülü ile

$$r_1(E_m^F) = \sqrt{F_{2m-2}^2 + F_{2m-2}F_{2m-3} - F_{m-1}F_{m-2}}$$

ve

$$c_1(G_m^F) = \sqrt{F_{2m-2}F_{2m-3} - F_{m-1}F_{m-2} + 1}$$

elde edilir. Buradan elemanları Fibonacci sayılarına bağlı olan Hankel matrisinin spektral normu için bir üst sınır $R = F_{2m-2}F_{2m-3} - F_{m-1}F_{m-2}$ olmak üzere

$$\left\|H_m^F\right\|_2 \le \left[\left(R + F_{2m-2}^2\right)\left(R+1\right)\right]^{1/2}$$

şeklindedir.

ii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Lucas dizisi olarak seçilirse, Binet formülü ile

$$r_1(E_m^L) = \sqrt{L_{2m-1}L_{2m-2} - L_{m-1}L_{m-2}}$$

ve

$$c_1(G_m^L) = \sqrt{L_{2m-1}L_{2m-2} - L_{m-1}L_{m-2} - L_{2m-2}^2 + 1}$$

elde edilir. Buradan elemanları Lucas sayılarına bağlı olan Hankel matrisin spektral normu için bir üst sınır $S = L_{2m-1}L_{2m-2} - L_{m-1}L_{m-2}$ olmak üzere

$$\left\|H_m^L\right\|_2 \le \left[S\left(S + 1 - L_{2m-2}^2\right)\right]^{1/2}$$

şeklindedir. (Bölüm 2.4, Tablo 2.4.3 ve 2.4.4'de nümerik sonuçlar görülebilir.)

[25]'de Kayabaş $k=2$ için bilinen Fibonacci dizisini veren ve $\{g_n^k\}$ ile gösterilen genelleştirilmiş Fibonacci dizisine bağlı $n\times n$ mertebeli

$$H_n^k = \left(g_{r+s}^k\right)_{r,s=1}^n$$

şeklindeki Hankel matrisini tanımlamışlar ve bu matrisin Öklid normu için

$$\left\|H_n^2\right\|_E \le \left[n\left(F_{2n}F_{2n+1} - F_{n+1}F_{n+2}\right)\right]^{1/2}$$

şeklinde bir üst sınır elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.3. $c_{ij}^u = u_{(\mathrm{mod}(j-i,m))}$ olmak üzere, $m\times m$ mertebeli $C_m^u = [c_{ij}^u]_{i,j=0}^{m-1}$ matrisi elemanları $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimlerine bağlı bir Circulant matris olsun. u_n dizinin

$n-$inci terimi olmak üzere, C_m^u matrisinin spektral normu için aşağıdaki alt ve üst sınırlar mevcuttur.

i) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal dizisi seçilirse;

$$\left\|C_m^J\right\|_2 \geq \left[\frac{3J_m^2 + (-1)^m 4J_m + m}{9}\right]^{1/2}$$

alt sınırı ve

$$\left\|C_m^J\right\|_2 \leq \left[\frac{\left(3J_m^2 + (-1)^m 4J_m + m\right)\left(3J_m^2 - (-1)^m 2J_m + 4m + 27\right)}{324}\right]^{1/2}$$

üst sınırı vardır.

ii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal-Lucas dizisi seçilirse;

$$\left\|C_m^j\right\|_2 \geq \left[\frac{j_m^2 - (-1)^m 4j_m + 3m + 4}{3}\right]^{1/2}$$

alt sınırı ve

$$\left\|C_m^j\right\|_2 \leq \left[\frac{\left(j_m^2 - (-1)^m 4j_m + 3m + 4\right)\left(j_m^2 - (-1)^m 6j_m + 12m - 7\right)}{36}\right]^{1/2}$$

üst sınırı vardır.

İspat. C_m^u matrisini açık olarak yazarsak

$$C_m^u = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{m-1} \\ u_{m-1} & u_0 & \cdots & u_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. C_m^u matrisinin Euclidean normunun karesi hesaplanırsa

$$\left\|C_m^u\right\|_E^2 = m\sum_{k=0}^{m-1} u_k^2$$

elde edilir. Burada;

i) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal dizisi olarak seçilerek genel terimi yerine yazılırsa

$$\left\|C_m^J\right\|_E^2 = m\sum_{k=0}^{n-1} J_k^2$$
$$= m\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{2^k-(-1)^k}{3}\right]$$
$$= \frac{m4^m + 2m(-2)^m + 3m^2 - 3m}{27}$$

elde edilir. O halde bu matrisin Öklid normu

$$\left\|C_m^J\right\|_E = \left[\frac{m4^m + 2m(-2)^m + 3m^2 - 3m}{27}\right]^{1/2}$$

olarak elde edilir. Matris normları arasındaki (1.2.3.1) eşitsizliği kullanılarak elemanları Jacobsthal sayılarına bağlı olan Circulant matrisinin spektral normu için

$$\left\|C_m^J\right\|_2 \geq \left[\frac{3J_m^2 + (-1)^m 4J_m + m}{9}\right]^{1/2}$$

alt sınırı elde edilir.

ii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal-Lucas dizisi olarak seçilerek genel terimi yerine yazılırsa

$$\left\|C_m^j\right\|_E^2 = m\sum_{k=0}^{m-1} j_k^2$$
$$= m\sum_{k=0}^{m-1}\left[2^k + (-1)^k\right]^2$$
$$= \frac{m4^m - 2m(-2)^m + 3m^2 + m}{3}$$

elde edilir. O halde bu matrisin Öklid normu

$$\left\|C_m^j\right\|_E = \left[\frac{m4^m - 2m(-2)^m + 3m^2 + m}{3}\right]^{1/2}$$

olarak elde edilir. Matris normları arasındaki (1.2.3.1) eşitsizliği kullanılarak elemanları Jacobsthal-Lucas sayılarına bağlı olan Circulant matrisin spektral normu için

$$\left\|C_m^j\right\|_2 \geq \left[\frac{j_m^2 - (-1)^m 4j_m + 3m + 4}{3}\right]^{1/2}$$

alt sınırı elde edilir.

Şimdi de spektral norm için üst sınırları bulalım.

Elemanları $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine bağlı olan M_m^u ve N_m^u matrislerini $C_m^u = M_m^u \circ N_m^u$ olmak üzere

$$M_m^u = (m_{ij}^u) = \begin{cases} m_{ij}^u = u_{(\mathrm{mod}(j-i,m))} & i = 1, \\ m_{ij}^u = 1 & i \neq 1, \end{cases}$$

ve

$$N_m^u = (n_{ij}^u) = \begin{cases} n_{ij}^u = 1 & i = 1, \\ n_{ij}^u = u_{(\mathrm{mod}(j-i,m))} & i \neq 1, \end{cases}$$

şeklinde seçelim. O halde

$$r_1(M_m^u) = \max_i \sqrt{\sum_j \left| m_{ij}^u \right|^2}$$

ve

$$c_1(N_m^u) = \max_j \sqrt{\sum_i \left| n_{ij}^J \right|^2}$$

elde edilir. (1.2.2.1) eşitsizliğinden C_m^u matrisinin spektral normu için

$$\left\| C_m^u \right\|_2 \leq r_1\left(M_m^u\right) c_1\left(N_m^u\right) \tag{2.1.3}$$

üst sınırı elde edilir. (2.1.3) eşitsizliğinde;

i) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal dizisi olarak seçilerek genel terimi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} r_1(M_m^J) &= \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} J_k^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{2^k - (-1)^k}{3} \right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{4^m + 2(-2)^m + 3m - 3}{27}} \\ &= \frac{\sqrt{3J_m^2 + (-1)^m 4J_m + m}}{3} \end{aligned}$$

ve

$$c_1(N_m^J) = \sqrt{1+\sum_{k=0}^{m-2} J_k^2}$$
$$= \sqrt{1+\sum_{k=0}^{m-2}\left[\frac{2^k-(-1)^k}{3}\right]^2}$$
$$= \sqrt{\frac{4^m-4(-2)^m+12m+84}{108}}$$
$$= \frac{\sqrt{3J_m^2-(-1)^m 2J_m+4m+27}}{6}$$

elde edilir. Buradan elemanları Jacobsthal sayılarına bağlı olan Circulant matrisin spektral normu için bir üst sınır

$$\left\|C_m^J\right\|_2 \le \left[\frac{\left(3J_m^2+(-1)^m 4J_m+m\right)\left(3J_m^2-(-1)^m 2J_m+4m+27\right)}{324}\right]^{1/2}$$

şeklindedir.

ii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal-Lucas dizisi olarak seçilerek genel terimi yerine yazılırsa

$$r_1(M_m^j) = \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} j_k^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1}\left[2^k+(-1)^k\right]^2}$$
$$= \sqrt{\frac{4^m-2(-2)^m+3m+1}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{j_m^2-(-1)^m 4j_m+3m+4}{3}}$$

ve

$$c_1(N_m^j) = \sqrt{1+\sum_{k=0}^{m-2} j_k^2}$$
$$= \sqrt{1+\sum_{k=0}^{m-2}\left[2^k+(-1)^k\right]^2}$$
$$= \sqrt{\frac{4^m+4(-2)^m+12m+4}{12}}$$
$$= \sqrt{\frac{j_m^2+(-1)^m 2j_m+12m+1}{12}}$$

elde edilir. Buradan elemanları Jacobsthal-Lucas sayılarına bağlı olan Circulant matrisin spektral normu için bir üst sınır

$$\left\|C_m^j\right\|_2 \leq \left[\frac{\left(j_m^2-(-1)^m 4j_m+3m+4\right)\left(j_m^2+(-1)^m 2j_m+12m+1\right)}{36}\right]^{1/2}$$

şeklindedir. (Bölüm 2.4, Tablo 2.4.5 ve 2.4.6'da nümerik sonuçlar görülebilir.)

2.2. Özel Sayı Dizilerine Bağlı Olarak Tanımlanan Cauchy-Toeplitz Ve Cauchy-Hankel Yapısındaki Matrislerin Normları İçin Sınırlar

Bu bölümde elemanları Bölüm 1.3'de tanımlan bazı sayı dizilerine bağlı olarak Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel yapısındaki matrisler tanımlanacak ve bu matrislerin Öklid normları ile spektral normları için alt ve üst sınırlar araştırılacaktır.

$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. Elemanları bu dizinin terimlerine bağlı olarak tanımlanan Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel yapısındaki matrisler genel olarak

$$T_m(u)=\left[\frac{1}{g+hu_{i-j}}\right]_{i,j=1}^{m}$$

ve

$$H_m(u)=\left[\frac{1}{g+hu_{i+j}}\right]_{i,j=1}^{m}$$

şeklinde verilebilir.

Teorem 2.2.1 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bir sayı dizisi olmak üzere, elemanları bu sayı dizisine bağlı olan Cauchy-Toeplitz matrisi $2\le k\in\mathbb{Z}$ için $T_{m,u}=\left[1/\left(1/k+u_{i-j(\mathrm{mod}\,m)}\right)\right]_{i,j=1}^{m}$ şeklinde tanımlansın. Bu matrisin Öklid normu için

i) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonacci dizisi için

$$\left\|T_{m,F}\right\|_E\le\frac{1}{2\sqrt{10}}\frac{\sqrt{43mk^4+86mk^2+123mk^2}}{(1+k)},$$

ii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Lucas dizisi için

$$\left\|T_{m,L}\right\|_E\le\sqrt{\frac{49mk^6+96mk^5+72mk^4+24mk^3+3mk^2}{(1+k)^2(1+2k)^2(1+3k)^2}+\frac{mk^2}{50}},$$

iii) Pell dizisi için

$$\left\|T_{m,P}\right\|_E\le\sqrt{\frac{204k^4+612k^3+913k^2+66k+151}{(1+k)^2(1+2k)^2}},$$

iv) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Pell-Lucas dizisi için

$$\left\|T_{m,Q}\right\|_E \le \sqrt{\frac{144mk^6+192mk^5+38088mk^4+14016mk^3+1501mk^2}{\left(1+2k\right)^2\left(1+6k\right)^2}},$$

v) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Modified Pell dizisi için

$$\left\|T_{m,q}\right\|_E \le \sqrt{\frac{19mk^4+14mk^3+3mk^2}{\left(1+k\right)^2\left(1+3k\right)^2}+\frac{55mk^2}{10000}},$$

vi) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal dizisi için

$$\left\|T_{m,J}\right\|_E \le \sqrt{\frac{mk^4+2mk^3+3mk^2}{\left(1+k\right)^2}+\frac{32mk^2}{1000}},$$

vii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal-Lucas dizisi için

$$\left\|T_{m,j}\right\|_E \le \sqrt{\frac{129mk^6+212mk^5+128mk^4+32mk^3+3mk^2}{\left(1+k\right)^2\left(1+2k\right)^2\left(1+5k\right)^2}+\frac{3mk^2}{500}},$$

viii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Mersenne dizisi için

$$\left\|T_{m,M}\right\|_E \le \sqrt{\frac{9mk^6+24mk^5+32mk^4+16mk^3+3mk^2}{\left(1+k\right)^2\left(1+3k\right)^2}+\frac{3mk^2}{50}},$$

ix) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Catalan dizisi için

$$\left\|T_{m,C}\right\|_E \le \sqrt{\frac{9mk^4+10mk^3+3mk^2}{\left(1+k\right)^2\left(1+2k\right)^2}+\frac{mk^2}{100}},$$

x) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fermat dizisi için

$$\left\|T_{m,f}\right\|_E \le \sqrt{\frac{10051mk^6+6020mk^5+1250mk^4+100mk^3+3mk^2}{\left(1+3k\right)^2\left(1+5k\right)^2\left(1+17k\right)^2}+\frac{mk^2}{1000}}$$

üst sınırları mevcuttur.

İspat. $T_{m,u}$ matrisi açık olarak yazılırsa

$$T_{m,u}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1/k+u_0} & \dfrac{1}{1/k+u_{m-1}} & \cdots & \dfrac{1}{1/k+u_1} \\ \dfrac{1}{1/k+u_1} & \dfrac{1}{1/k+u_0} & \cdots & \dfrac{1}{1/k+u_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{1/k+u_{m-1}} & \dfrac{1}{1/k+u_{m-2}} & \cdots & \dfrac{1}{1/k+u_0} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Öklid normunun karesi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \left\|T_{m,u}\right\|_E^2 &= m\left(\left(\frac{k}{1+ku_0}\right)^2+\left(\frac{k}{1+ku_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{k}{1+ku_{m-1}}\right)^2\right) \\ &= mk^2\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{\left(1+ku_i\right)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. İfadenin toplam kısmı

$$\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{\left(1+ku_i\right)^2}=\frac{1}{\left(1+ku_0\right)^2}+\frac{1}{\left(1+ku_1\right)^2}+\frac{1}{\left(1+ku_2\right)^2}+\sum_{i=3}^{m-1}\frac{1}{\left(1+ku_i\right)^2} \qquad (2.2.1)$$

şeklinde yazılabilir. $k\geq 2$ olduğundan sağ taraftaki toplam en büyük değerini $k=2$ için alacaktır. Dolayısıyla sağ taraftaki toplamın en büyük değeri

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=3}^{m-1}\frac{1}{\left(1+2u_i\right)^2}$$

olarak elde edilir. O halde (2.2.1) ile verilen toplam için bir üst sınır

$$\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{\left(1+ku_i\right)^2}\leq\frac{1}{\left(1+ku_0\right)^2}+\frac{1}{\left(1+ku_1\right)^2}+\frac{1}{\left(1+ku_2\right)^2}+\lim_{m\to\infty}\sum_{i=3}^{m-1}\frac{1}{\left(1+2u_i\right)^2}$$

şeklinde verilebilir. Buradan verilen matrisin Öklid normunun karesi için bir üst sınır

$$\left\|T_{m,u}\right\|_E^2 = mk^2 \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\left(1+ku_i\right)^2}$$

$$\leq mk^2 \left(\frac{1}{\left(1+ku_0\right)^2} + \frac{1}{\left(1+ku_1\right)^2} + \frac{1}{\left(1+ku_2\right)^2} + \lim_{m\to\infty} \sum_{i=3}^{m-1} \frac{1}{\left(1+2u_i\right)^2} \right)$$

şeklinde elde edilir. Her iki tarafın karekökü alınarak Öklid normu için bir üst sınır

$$\left\|T_{m,u}\right\|_E \leq k \left[m \left(\frac{1}{\left(1+ku_0\right)^2} + \frac{1}{\left(1+ku_1\right)^2} + \frac{1}{\left(1+ku_2\right)^2} + \lim_{m\to\infty} \sum_{i=3}^{m-1} \frac{1}{\left(1+2u_i\right)^2} \right) \right]^{1/2}$$

olarak elde edilir. Dizilerin genel terimi (Binet formülü) yerlerine yazılır ve gerekli limitler alınırsa;

i) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonacci dizisi için

$$\left\|T_{m,F}\right\|_E \leq \frac{1}{2\sqrt{10}} \frac{\sqrt{43mk^4+86mk^2+123mk^2}}{\left(1+k\right)}$$

üst sınırı,

ii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Lucas dizisi için

$$\left\|T_{m,L}\right\|_E \leq \sqrt{\frac{49mk^6+96mk^5+72mk^4+24mk^3+3mk^2}{\left(1+k\right)^2\left(1+2k\right)^2\left(1+3k\right)^2} + \frac{mk^2}{50}}$$

üst sınırı,

iii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Pell dizisi için

$$\left\|T_{m,P}\right\|_E \leq \sqrt{\frac{204k^4+612k^3+913k^2+66k+151}{\left(1+k\right)^2\left(1+2k\right)^2}}$$

üst sınırı,

iv) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Pell-Lucas dizisi için

$$\left\|T_{m,Q}\right\|_E \leq \sqrt{\frac{144mk^6+192mk^5+38088mk^4+14016mk^3+1501mk^2}{\left(1+2k\right)^2\left(1+6k\right)^2}}$$

üst sınırı,

v) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Modified Pell dizisi için

$$\left\|T_{m,q}\right\|_E \le \sqrt{\frac{19mk^4+14mk^3+3mk^2}{(1+k)^2(1+3k)^2}+\frac{55mk^2}{10000}}$$

üst sınırı,

vi) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal dizisi için

$$\left\|T_{m,J}\right\|_E \le \sqrt{\frac{mk^4+2mk^3+3mk^2}{(1+k)^2}+\frac{32mk^2}{1000}}$$

üst sınırı,

vii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal-Lucas dizisi için

$$\left\|T_{m,j}\right\|_E \le \sqrt{\frac{129mk^6+212mk^5+128mk^4+32mk^3+3mk^2}{(1+k)^2(1+2k)^2(1+5k)^2}+\frac{3mk^2}{500}}$$

üst sınırı,

viii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Mersenne dizisi için

$$\left\|T_{m,M}\right\|_E \le \sqrt{\frac{9mk^6+24mk^5+32mk^4+16mk^3+3mk^2}{(1+k)^2(1+3k)^2}+\frac{3mk^2}{50}}$$

üst sınırı,

ix) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Catalan dizisi için

$$\left\|T_{m,C}\right\|_E \le \sqrt{\frac{9mk^4+10mk^3+3mk^2}{(1+k)^2(1+2k)^2}+\frac{mk^2}{100}}$$

üst sınırı ve

x) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fermat dizisi için

$$\left\|T_{m,f}\right\|_E \le \sqrt{\frac{10051mk^6+6020mk^5+1250mk^4+100mk^3+3mk^2}{(1+3k)^2(1+5k)^2(1+17k)^2}+\frac{mk^2}{1000}}$$

üst sınırı elde edilir.

Teorem 2.2.2. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif elemanlı ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $u_n \ge n$ olacak şekilde bir sayı dizisi olsun. $2\le k\in\mathbb{Z}^+$, $g=1/k$ ve $h=1$ için

$$C_{m,u}=\left[\frac{1}{g+hu_{|i-j|}}\right]_{i,j=1}^{m}$$

şeklinde tanımlanan Circulant Cauchy-Toeplitz matrisinin spektral normu için bir üst sınır

$$\left\|C_{m,u}\right\|_2 \le \left[m\left(\psi\left(1,\frac{1}{k}\right) - \psi\left(1,\frac{1}{k}+m\right)\right)\right]^{1/2}$$

şeklindedir.

İspat. $C_{m,u}$ matrisi açık olarak

$$C_{m,u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1/k+u_0} & \frac{1}{1/k+u_1} & \cdots & \frac{1}{1/k+u_{m-1}} \\ \frac{1}{1/k+u_1} & \frac{1}{1/k+u_0} & \cdots & \frac{1}{1/k+u_{m-2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1/k+u_{m-1}} & \frac{1}{1/k+u_{m-2}} & \cdots & \frac{1}{1/k+u_0} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $u_n \ge n$ olacak bir dizi seçilirse

$$\begin{aligned} \left\|C_{m,u}\right\|_E^2 &= m\left[\sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{\left((1/k)+u_s\right)^2}\right] \le m\left[\sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{\left((1/k)+s\right)^2}\right] \\ &= m\left(\psi\left(1,\frac{1}{k}\right) - \psi\left(1,\frac{1}{k}+m\right)\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\left\|C_{m,u}\right\|_E \le \left[m\left(\psi\left(1,\frac{1}{k}\right) - \psi\left(1,\frac{1}{k}+m\right)\right)\right]^{1/2}$$

elde edilir. (1.2.3.1)'den

$$\left\|C_{m,u}\right\|_2 \le \left\|C_{m,u}\right\|_E$$

olup bu simetrik Toeplitz matrisin spektral normu için bir üst sınır

$$\left\|C_{m,u}\right\|_2 \le \left[m\left(\psi\left(1,\frac{1}{k}\right) - \psi\left(1,\frac{1}{k}+m\right)\right)\right]^{1/2}$$

şeklindedir. (Bölüm 2.4, Tablo 2.4.7'de nümerik sonuçlar görülebilir)

Teorem 2.2.3. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ herhangi bir tamsayı dizisi olsun. $g = 1/k$ ve $h = 1$ olmak üzere

$$H_{m,u}=\left[\frac{1}{g+hu_{i+j}}\right]_{i,j=1}^{m}$$

şeklinde tanımlanan Cauchy-Hankel matrisinin spektral normu için bir üst sınır

$$\left\|H_{m,u}\right\|_2 \le \frac{2\pi}{k\sin\left(\pi/k\right)}$$

şeklindedir.

İspat. $H_{m,u}$ matrisi açık olarak

$$H_{m,u}=\begin{bmatrix} \frac{1}{1/k+u_2} & \frac{1}{1/k+u_3} & \cdots & \frac{1}{1/k+u_{m+1}} \\ \frac{1}{1/k+u_3} & \frac{1}{1/k+u_4} & \cdots & \frac{1}{1/k+u_{m+2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1/k+u_{m+1}} & \frac{1}{1/k+u_{m+2}} & \cdots & \frac{1}{1/k+u_{2m}} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. h_s'ler $H_{m,u}$ matrisinin elemanları olmak üzere $s=2,3,\ldots,2m$ için

$$h_s=\frac{1}{(1/k)+u_s}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-iu_s x}dx$$

olacak şekildeki $g(x)$ fonksiyonunu bulmalıyız. $g(x)=ce^{((1/k)+u_s)ix}$ olarak seçilirse

$$h_s=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ce^{((1/k)+u_s)ix}e^{-iu_s x}dx=\frac{1}{(1/k)+u_s}$$

olur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$c=\frac{\pi}{\left((1/k)+u_s\right)k\sin\left(\pi/k\right)}$$

ve

$$g(x)=\frac{\pi}{\left((1/k)+u_s\right)k\sin\left(\pi/k\right)}e^{((1/k)+u_s)ix}$$

elde edilir. $g_1(x)$ reel değerli, $g_2(x)$ 2π periyotlu fonksiyonlar ve $|g_2(x)|=1$ olmak üzere $g(x)$ fonksiyonu

$$g(x)=g_1(x)g_2(x)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$g_1(x) = \frac{\pi}{\left((1/k)+u_s\right)k\sin(\pi/k)}$$

ve

$$g_2(x) = e^{\left((1/k)+u_s\right)ix}$$

elde edilir. $|g_2(x)| = 1$ olduğundan $\sup g_1(x)$ değerini bulmamız yeterli olacaktır.

$$\left\|H_{m,u}\right\|_2 \le \sup g_1(x)$$

olup ve tüm s pozitif tamsayı değerleri için

$$1 + sk > \frac{k}{2}$$

ve

$$\frac{1}{1+sk} < \frac{2}{k}$$

dir. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ olduğundan bu eşitsizlik her u_s değeri için de sağlanır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{1+u_s k} < \frac{2}{k}$$

olup

$$|g_1(x)| \le \frac{2\pi}{k\sin(\pi/k)}$$

olur. Dolayısıyla

$$\left\|H_{m,u}\right\|_2 \le \frac{2\pi}{k\sin(\pi/k)}$$

elde edilir. (Bölüm 2.4, Tablo 2.4.8'de nümerik sonuçlar görülebilir.)

2.3. Maple Uygulamaları

Bu bölümde Bölüm 2.1 ve Bölüm 2.2'de tanımlanan ve spektral normları için sınırları elde edilen matrislerin Maple 12 prosedürleri verilmiştir. Bu prosedürler yardımıyla matrisin mertebesi ve varsa diğer parametreleri klavyeden girilerek matrisin kendisi yazdırılabilmekte, determinantı, Öklid normu, spektral normu, öz değerleri ve singüler değerleri hesaplanabilmektedir.

Aşağıda Teorem 2.1.1'de tanımlanan Fibonacci sayılarına bağlı Toeplitz matris için bir prosedür verilmiştir. *m* yerine matrisin mertebesi girilerek matrisin determinantı, Öklid normu, spektral normu, öz değerleri ve singüler değerleri hesaplanabilir.

```
> T(m,F):= proc(m)
local alpha, beta, F, n, f, B;
with(LinearAlgebra);
alpha:=(1+sqrt(5))/2:
beta:=(1-sqrt(5))/2:
for n from 0 to m do
F:=[n]->evalf((alpha^n-beta^n)/(alpha-beta)):
od:
for n from 0 to m do
f:=(i,j)->F(i-j):
od:
B:=matrix(m,m,f):
print(B):
print(evalf(det(B))):
print(evalf(norm(B,frobenius))):
print(evalf(norm(B,2))):
print(eigenvalues(B)):
print(singularvals(B)):
end:
> T(m,F)(mertebe);
```

Aşağıda Teorem 2.1.1'de tanımlanan Lucas sayılarına bağlı Toeplitz matris için bir prosedür verilmiştir. Matrisin mertebesi girilerek matrisin determinantı, Öklid normu, spektral normu, öz değerleri ve singüler değerleri hesaplanabilir.

```
> T(m,L):= proc(m)
local alpha, beta, L, n, B, l;
with(LinearAlgebra);
alpha:=(1+sqrt(5))/2:
beta:=(1-sqrt(5))/2:
for n from 0 to m do
L:=[n]->evalf((alpha^n+beta^n)):
od:
for n from 0 to m do
l:=(i,j)->L(i-j):
od:
B:=matrix(m,m,l):
print(B):
print(evalf(det(B))):
print(evalf(norm(B,frobenius))):
print(evalf(norm(B,2))):
print(eigenvalues(B)):
print(singularvals(B)):
end:
> T(m,L)(mertebe);
```

Aşağıda Teorem 2.1.2'de tanımlanan Fibonacci sayılarına bağlı Hankel matrisi için bir prosedür verilmiştir. Matrisin mertebesi girilerek matrisin determinantı, Öklid normu, spektral normu, öz değerleri ve singüler değerleri hesaplanabilir.

```
> H(m,F):= proc(m)
local alpha, beta, F, n, f, B;
with(LinearAlgebra);
alpha:=(1+sqrt(5))/2:
beta:=(1-sqrt(5))/2:
```

```
for n from 0 to m do
F:=[n]->evalf((alpha^n-beta^n)/(alpha-beta)):
od:
for n from 0 to m do
f:=(i,j)->F(i+j-2):
od:
B:=matrix(m,m,f):
print(B):
print(evalf(det(B))):
print(evalf(norm(B,frobenius))):
print(evalf(norm(B,2))):
print(eigenvalues(B)):
print(singularvals(B)):
end:
> H(m,F)(mertebe);
```

Aşağıda Teorem 2.1.2'de tanımlanan Lucas sayılarına bağlı Hankel matrisi için bir prosedür verilmiştir. Matrisin mertebesi girilerek matrisin determinantı, Öklid normu, spektral normu, öz değerleri ve singüler değerleri hesaplanabilir.

```
>H(m,L):= proc(m)
local alpha, beta, L, n, B, l;
with(LinearAlgebra);
alpha:=(1+sqrt(5))/2:
beta:=(1-sqrt(5))/2:
for n from 0 to m do
L:=[n]->evalf(alpha^n+beta^n):
od:
for n from 0 to m do
l:=(i,j)->L(i+j-2):
od:
B:=matrix(m,m,l):
print(B):
```

```
print(evalf(det(B))):
print(evalf(norm(B,frobenius))):
print(evalf(norm(B,2))):
print(eigenvalues(B)):
print(singularvals(B)):
end:
> H(m,L)(mertebe);
```

Aşağıda Teorem 2.1.3'de tanımlanan Jacobsthal sayılarına bağlı Circulant matris için bir prosedür verilmiştir. Matrisin mertebesi girilerek matrisin determinantı, Öklid normu, spektral normu, öz değerleri ve singüler değerleri hesaplanabilir.

```
> C(m,J):= proc(m)
local J, n, E, c;
with(LinearAlgebra);
for n from 0 to m do
J:=[n]->evalf((2^n-(-1)^n)/(3)):
od:
for n from 0 to m do
c:=(i,j)->J(j-i mod m):
od:
E:=matrix(m,m,c):
print(E):
print(det(E)):
print(norm(E,frobenius)):
print(norm(E,2)):
print(eigenvalues(E)):
print(singularvals(E)):
end:
> C(m,J)(mertebe);
```

Aşağıda Teorem 2.1.3'de tanımlanan Jacobsthal-Lucas sayılarına bağlı Circulant matris için bir prosedür verilmiştir. Matrisin mertebesi girilerek matrisin

determinantı, Öklid normu, spektral normu, öz değerleri ve singüler değerleri hesaplanabilir.

```
> C(m,jl):= proc(m)
local jl, n, E, c;
with(LinearAlgebra);
for n from 0 to m do
jl:=[n]->evalf(2^n+(-1)^n):
od:
for n from 0 to m do
c:=(i,j)->jl(j-i mod m):
od:
E:=matrix(m,m,c):
print(E):
print(det(E)):
print(norm(E,frobenius)):
print(norm(E,2)):
print(eigenvalues(E)):
print(singularvals(E)):
end:
> C(m,jl)(mertebe);
```

Aşağıda Teorem 2.2.2'de tanımlanan genel bir sayı dizisine bağlı Circulant Cauchy-Toeplitz matrisi için üç prosedür verilmiştir. Bu prosedürlerde sayı dizisi yerine sırasıyla Fibonacci, Lucas ve Pell sayı dizileri alınmıştır. Matrisin mertebesi ve k parametresi klavyeden girilerek matrisin determinantı, Öklid normu, spektral normu, öz değerleri ve singüler değerleri hesaplanabilir.

```
> C(m,F):= proc(m,k)
local alpha, beta, F, n, f, B;
with(LinearAlgebra);
alpha:=(1+sqrt(5))/2:
beta:=(1-sqrt(5))/2:
for n from 0 to m do
```

```
F:=[n]->evalf((alpha^n-beta^n)/(alpha-beta)):
od:
for n from 0 to m do
f:=(i,j)->(1/(1/k+F(abs(i-j)))):
od:
B:=matrix(m,m,f):
print(B):
print(evalf(det(B))):
print(evalf(norm(B,frobenius))):
print(evalf(norm(B,2))):
print(eigenvalues(B)):
print(singularvals(B)):
end:
> C(m,F)(mertebe,k);

-------------------------------------

> C(m,L):= proc(m,k)
local alpha, beta, L, n, l, B;
with(LinearAlgebra);
alpha:=(1+sqrt(5))/2:
beta:=(1-sqrt(5))/2:
for n from 0 to m do
L:=[n]->evalf(alpha^n+beta^n):
od:
for n from 0 to m do
l:=(i,j)->(1/(1/k+L(abs(i-j)))):
od:
B:=matrix(m,m,l):
print(B):
print(evalf(det(B))):
print(evalf(norm(B,frobenius))):
print(evalf(norm(B,2))):
print(eigenvalues(B)):
```

```
print(singularvals(B)):
end:
> C(m,L)(mertebe,k);

-----------------------------------

> C(m,P):= proc(m,k)
local alpha, beta, P, n, p, B;
with(LinearAlgebra);
alpha:=(1+sqrt(2)):
beta:=(1-sqrt(2)):
for n from 0 to m do
P:=[n]->evalf((alpha^n-beta^n)/(alpha-beta)):
od:
for n from 0 to m do
p:=(i,j)->(1/(1/k+P(abs(i-j)))):
od:
B:=matrix(m,m,p):
print(B):
print(evalf(det(B))):
print(evalf(norm(B,frobenius))):
print(evalf(norm(B,2))):
print(eigenvalues(B)):
print(singularvals(B)):
end:
> C(m,P)(mertebe,k);
```

Aşağıda Teorem 2.2.3'de tanımlanan genel bir sayı dizisine bağlı Cauchy-Hankel matrisi için üç prosedür verilmiştir. Bu prosedürlerde sayı dizisi yerine sırasıyla Fibonacci, Lucas ve Pell sayı dizileri alınmıştır. Matrisin mertebesi ve k parametresi klavyeden girilerek matrisin determinantı, Öklid normu, spektral normu, öz değerleri ve singüler değerleri hesaplanabilir.

```
> H(m,F):= proc(m,k)
local alpha, beta, F, n, f, B;
```

```
with(LinearAlgebra);
alpha:=(1+sqrt(5))/2:
beta:=(1-sqrt(5))/2:
for n from 0 to m do
F:=[n]->evalf((alpha^n-beta^n)/(alpha-beta)):
od:
for n from 0 to m do
f:=(i,j)->(1/(1/k+F(i+j))):
od:
B:=matrix(m,m,f):
print(B):
print(evalf(det(B))):
print(evalf(norm(B,frobenius))):
print(evalf(norm(B,2))):
print(eigenvalues(B)):
print(singularvals(B)):
end:
> H(m,F)(mertebe,k);

-----------------------------------

> H(m,L):= proc(m,k)
local alpha, beta, L, n, l, B;
with(LinearAlgebra);
alpha:=(1+sqrt(5))/2:
beta:=(1-sqrt(5))/2:
for n from 0 to m do
L:=[n]->evalf(alpha^n+beta^n):
od:
for n from 0 to m do
l:=(i,j)->(1/(1/k+L(i+j))):
od:
B:=matrix(m,m,l):
print(B):
```

```
print(evalf(det(B))):
print(evalf(norm(B,frobenius))):
print(evalf(norm(B,2))):
print(eigenvalues(B)):
print(singularvals(B)):
end:
> H(m,L)(mertebe,k);

-------------------------------------

> H(m,P):= proc(m,k)
local alpha, beta, P, n, p, B;
with(LinearAlgebra);
alpha:=(1+sqrt(2)):
beta:=(1-sqrt(2)):
for n from 0 to m do
P:=[n]->evalf((alpha^n-beta^n)/(alpha-beta)):
od:
for n from 0 to m do
p:=(i,j)->(1/(1/k+P(i+j))):
od:
B:=matrix(m,m,p):
print(B):
print(evalf(det(B))):
print(evalf(norm(B,frobenius))):
print(evalf(norm(B,2))):
print(eigenvalues(B)):
print(singularvals(B)):
end:
> H(m,P)(mertebe,k);
```

2.4. Nümerik Sonuçlar Ve Tablolar

Bu bölümde Bölüm 2.2 ve Bölüm 2.3'de sayı dizilerine bağlı olarak tanımladığımız özel matrislerin normları için elde edilen alt ve üst sınırlar sayısal olarak gerçek değerleri ile kıyaslanacaktır. Tablolarda elde edilen sayısal değerler Maple 12 programı ile hesaplanmıştır.

Aşağıdaki tabloda Teorem 2.1.1'de spektral norm için alt ve üst sınır elde edilen Fibonacci sayılarına bağlı Toeplitz matrisinin bazı norm değerleri görülmektedir.

m	Alt sınır	$\left\|T_m^F\right\|_2$	Üst sınır
2	$0,999999992$	$1,000000002$	$1,414213561$
3	$1,414213560$	$1,732050810$	$2,449489738$
5	$3,098386668$	$4,898979501$	$15,49193331$
10	$24,59674764$	$55,00000051$	$1870,499917$
50	$25,17253.10^{8}$	$12,58626.10^{9}$	$97,90533.10^{18}$
100	$50,09495.10^{18}$	$35,42248.10^{19}$	$77,54795.10^{39}$
200	$28,05711.10^{39}$	$28,05711.10^{40}$	$48,65173.10^{81}$

Tablo 2.4.1

Aşağıdaki tabloda Teorem 2.1.1'de spektral norm için alt ve üst sınır elde edilen Lucas sayılarına bağlı Toeplitz matrisinin bazı norm değerleri görülmektedir.

m	Alt sınır	$\left\|T_m^L\right\|_2$	Üst sınır
2	$2,236067972$	$2,236067979$	$3,162277656$
3	$3,366501643$	$5,000000001$	$12,40967362$
5	$6,985699667$	$12,000000001$	$72,48548223$
10	$54,99999973$	$122,9837399$	$9348,499795$
50	$56,28750.10^{8}$	$28,14375.10^{9}$	$48,95266.10^{19}$
100	$11,20157.10^{19}$	$79,20709.10^{19}$	$38,77397.10^{40}$
200	$62,73761.10^{39}$	$62,73763.10^{40}$	$24,32586.10^{82}$

Tablo 2.4.2

Aşağıdaki tabloda Teorem 2.1.2'de spektral norm için alt ve üst sınır elde edilen Fibonacci sayılarına bağlı Hankel matrisinin bazı norm değerleri görülmektedir.

m	Alt sınır	$\left\|H_m^F\right\|_2$	Üst sınır
2	$1,224744868$	$1,618033988$	$1,999999998$
3	$2,708012793$	$4,645751304$	$9,165151355$
5	$15,07978773$	$33,71191436$	$435,5961398$
10	$1322,060874$	$4180,723526$	$6676,25891.10^{3}$
50	$3096,03854.10^{16}$	$2189,22986.10^{17}$	$1830,65896.10^{37}$
100	$1734,02505.10^{37}$	$1734,02505.10^{38}$	$1148,51178.10^{79}$
200	$7692,51548.10^{78}$	yakınsak değil	$4520,55205.10^{162}$

Tablo 2.4.3

Aşağıdaki tabloda Teorem 2.1.2'de spektral norm için alt ve üst sınır elde edilen Lucas sayılarına bağlı Hankel matrisinin bazı norm değerleri görülmektedir.

m	Alt sınır	$\left\|H_m^L\right\|_2$	Üst sınır
2	$2,738612784$	$3,618033985$	$4,472135942$
3	$6,164413992$	$10,58257568$	$43,86342423$
5	$33,73129096$	$75,40867083$	$2175,955864$
10	$2956,217997$	$9348,382002$	$3338,1288.10^{4}$
50	$6922,9526.10^{16}$	$4895,2667.10^{17}$	$9153,2947.10^{37}$
100	$3877,3978.10^{37}$	$3877,3978.10^{38}$	$5742,5589.10^{79}$
200	$1720,0987.10^{79}$	yakınsak değil	$2260,2760.10^{163}$

Tablo 2.4.4

Aşağıdaki tabloda Teorem 2.1.3'de spektral norm için alt ve üst sınır elde edilen Jacobsthal sayılarına bağlı Circulant matrisinin bazı norm değerleri görülmektedir.

m	Alt sınır	$\left\|C_m^J\right\|_2$	Üst sınır
2	$1,000000000$	$1,000000000$	$1,000000000$
3	$1,414213562$	$2,000000000$	$2,000000000$
5	$6,000000000$	$10,00000000$	$20,78460970$
10	$197,2637828$	$341,0000000$	$19401,17132$
50	$2166,79538.10^{11}$	$3752,99969.10^{11}$	$2347,50111.10^{25}$

Tablo 2.4.5

Aşağıdaki tabloda Teorem 2.1.3'de spektral norm için alt ve üst sınır elde edilen Jacobsthal-Lucas sayılarına bağlı Circulant matrisinin bazı norm değerleri görülmektedir.

m	Alt sınır	$\left\|C_m^j\right\|_2$	Üst sınır
2	$2,236067977$	$3,000000000$	$2,236067977$
3	$5,477225575$	$8,000000000$	$17,32050808$
5	$19,18332609$	$32,00000000$	$191,8332609$
10	$590,6377909$	$1023,000000$	$172262,1726$
50	$6500,38614.10^{11}$	$1125,89991.10^{12}$	$2112,75100.10^{26}$

Tablo 2.4.6

Aşağıdaki tabloda Teorem 2.2.2'de spektral norm için bir üst sınır elde edilen sayı dizisine bağlı Circulant Cauchy-Toeplitz matrisinin bazı norm değerleri görülmektedir. (F, L, P değerleri sırasıyla Fibonacci, Lucas ve Pell dizilerini göstermektedir ve $k = 2$ seçilmiştir.)

m	$\left\|C_{m,F}\right\|_2$	$\left\|C_{m,L}\right\|_2$	$\left\|C_{m,P}\right\|_2$	Üst sınır
2	$2,666666666$	$1,066666667$	$2,666666666$	$2,981423969$
3	$3,333333333$	$1,496427829$	$3,163788819$	$3,716629296$
5	$4,321303824$	$2,076984863$	$3,773755764$	$4,865932497$
10	$5,632249506$	$2,778552092$	$4,363751038$	$6,953333909$
50	$6,913818239$	$3,420042943$	$4,747931358$	$15,67610103$
100	$6,998623896$	$3,460967970$	$4,766601646$	$22,19189556$
200	$7,022391956$	$3,472369175$	$4,771576684$	$31,40000705$

Tablo 2.4.7

Aşağıdaki tabloda Teorem 2.2.3'de spektral norm için bir üst sınır elde edilen sayı dizisine bağlı Cauchy-Hankel matrisinin bazı norm değerleri görülmektedir. (F, L, P değerleri sırasıyla Fibonacci, Lucas ve Pell dizilerini göstermektedir ve $k = 2$ seçilmiştir.)

m	$\left\|H_{m,F}\right\|_2$	$\left\|H_{m,L}\right\|_2$	$\left\|H_{m,P}\right\|_2$	Üst sınır
2	$0,9192267951$	$0,444444444$	$0,4821938302$	$3,141592654$
3	$1,043148049$	$0,5010425120$	$0,4977951401$	$3,141592654$
5	$1,113534209$	$0,5329832646$	$0,5010575784$	$3,141592654$
10	$1,126529912$	$0,5385632797$	$0,5011587454$	$3,141592654$
50	$1,126641188$	$0,5386098674$	$0,5011587606$	$3,141592654$
100	$1,126641188$	$0,5386098674$	$0,5011587606$	$3,141592654$
200	$1,126641188$	$0,5386098674$	$0,5011587606$	$3,141592654$

Tablo 2.4.8

3. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bazı sayı dizilerine bağlı Circulant, Toeplitz, Hankel, Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel yapısındaki matrisler tanımlanmıştır. Bu matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Ancak Fermat, Mersenne, Catalan, Motzkin, Bell ve Happy gibi başka sayı dizilerine bağlı matrisler üzerinde çok durulamamıştır. Bu dizilere bağlı özel tipteki matrisler tanımlanarak normları ve diğer özelikleri incelenebilir.

Spektral norm değerleri ve elde edilen sınır değerleri sekizinci bölümde tablolar üzerinde kıyaslanmıştır. Tablolardan bazı alt ve üst sınırların iyi olmadığı görülmektedir. Daha iyi seçimler yapılarak veya varsa daha iyi eşitsizlikler kullanarak gerçek değere daha yakın sınırlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Alptekin E. G., Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell sayıları ile tanımlı circulant ve semicirculant matrisler, Doktora Tezi, S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2005

[2] Altınışık E., Tuğlu N., Haukkanen P., A note on bounds for norms of the reciprocal LCM matrix, Mathematical Inequalities and Applications, 7(4), 491–496, 2004

[3] Belitski G. R., Lyubich Yu. I., Matrix Norms and Their Applications, Translated from the Russian by A. Iacob. Operator Theory: Advances and Applications, 36. Birkhuser Verlag, Basel, 1988

[4] Benoumhani M., A sequence of Binomial coefficients related to Lucas and Fibonacci numbers, Journal of Integer Sequences, Vol 6, Article 03.2.1, 2003

[5] Bozkurt D., On the bounds of the ℓ_p norms of almost Cauchy-Hankel matrices, Proceedings of the Int. Symposium on Mathematical and Computational Applications, 30–36, Manisa, 1996

[6] Bozkurt D., On the ℓ_p norms of Cauchy-Toeplitz matrices, Linear and Multilinear Algebra, 44, 341–346, 1998

[7] Bozkurt D., On the ℓ_p norms of Hadamard product of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices, Linear and Multilinear Algebra, 45, 333–339, 1999

[8] Caferov V., Anadolu Üniversitesi Açık Öğretim Fakültesi Yayınları No: 600, Eskişehir, 1999

[9] Cahill N. D., D'Errico J. R., Narayan D. A., Narayan J. Y., Fibonacci determinants, The College Math. Journal of The Math. Association of America, 33(3), 221–225, 2002

[10] Cerin Z., Sums of squares and products of Jacobsthal numbers**,** Journal. of Integer Sequences, Vol. 10, Article 07.2.5, 2007

[11] Civciv H., Türkmen R., Notes on norms of circulant matrices with Lucas number, International Journal of Information and Systems Sciences, 4(1), 142–147, 2008

[12] Civciv H., Türkmen R., On the bounds for the spectral and ℓ_p norms of the Khatri-Rao product of Cauchy-Hankel matrices, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7(5), Article 195, 2006

[13] Davis P. J.**,** Circulant Matrices**,** John Wiley and Sons, NY, 1979

[14] Er M. C., Sums of Fibonacci numbers by matrix methods, The Fibonacci Quarterly, 22(3), 204–207, 1984

[15] Gloub G. H., Loan C. F. V., Matrix Computations, The John Hopkins University Press, 1989

[16] Gray R. M., Toeplitz and Circulant Matrices: A Review, Now Publishers Inc, 2006

[17] Grenander U., Szegö G.**,** Toeplitz Forms and Their Applications, University of California Press, Berkeley, 1958

[18] Güngör A. D., Türkmen R., Bounds for extreme singular values of a complex matrix and its applications, Mathematical Inequalities and Applications, 9(1), 23–31, 2006

[19] Güngör A. D., Lower bounds for the norms of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices, Applied Mathematics and Computation, 157, 599–604, 2004

[20] Haukkanen P., On the ℓ_p norm of GCD and related matrices, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 5(3), Article 61, 2004
[21] Horadam A. F., Applications of Modified Pell numbers to representations, Ulam Quarterly, 3(1), 34–53, 1994
[22] Horn R., Johnson C. R., Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1991
[23] Karaduman E., An application of Fibonacci numbers in matrices, Applied Mathematics and Computation, 147, 903–908, 2004
[24] Karaduman E., On determinants of matrices with general Fibonacci numbers entries, Applied Mathematics and Computation, 167, 670–676, 2005
[25] Kayabaş H., $k-$Fibonacci dizilerinin uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2006
[26] Kocer E. G., Circulant, negacyclic and semicirculant matrices with the Modified Pell, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 36(2), 133–142, 2007
[27] Koshy T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, John Wiley and Sons, NY, 2001
[28] Kölbig K.S., Complex zeros of two incomplete Riemann zeta functions, Math. Comp. 26, 551–565, 1972
[29] Lee G. Y., Kim J. S., Cho S. H., Some combinatorial identities via Fibonacci numbers, Discrete Applied Mathematics, 130, 527–534, 2003
[30] Lee G. Y., Kim J. S., The linear algebra of the *k*-Fibonacci matrix, Linear Algebra and its Applications, 373, 75–87, 2003
[31] Mathias R.**,** The spectral norm of a nonnegative matrix. Linear Algebra and its Applications, 131, 269–284, 1990
[32] Melham R., Sums involving Fibonacci and Pell numbers, Portugaliae Mathematica, Vol. 56, Fasc. 3, 1999
[33] Merikoski J. K., Kumar R., Lower bounds for the spectral norm, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 6(4), Article 124, 2005
[34] Moenck R., On computing closed forms for summations, in: Proceedings of the MACSYMA User's Conference, 225–236, 1977
[35] Noble B., Applied Linear Algebra, Englewood Cliffs, N. J., Prentince-Hall, 1969
[36] Öcal A. A., Tuğlu N., Altınışık E., On the representation of *k*-generalized Fibonacci and Lucas numbers, Applied Mathematics and Computation, 170, 584–596, 2005
[37] Parter S. V., On the distribution of the singular values of Toeplitz matrices, Linear Algebra and its Applications, 80, 115–130, 1986
[38] Roch S., Silbermann B., A note on singular values of Cauchy-Toeplitz matrices, Linear Algebra and its Applications, Vol. 275–276, 531–536, 1998
[39] Solak S., Bozkurt D., A note on bounds for the norms of Cauchy-Hankel Matrices, Numerical Linear Algebra with Applications, 10(4), 377–382, 2003
[40] Solak S., Bozkurt D., On the spectral norms of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices, Applied Mathematics and Computation, 140, 231–238, 2003
[41] Solak S., Türkmen R., Bozkurt D., On the norms of GCD, Toeplitz and Hankel matrices related to Fibonacci numbers, International Mathematical Journal, 3(2), 195–200, 2003

[42] Solak S., Türkmen R., Bozkurt D., On GCD, LCM and Hilbert matrices and their applications", Applied Mathematics and Computation, 146, 595–600, 2003
[43] Solak S., On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, Applied Mathematics and Computation, 160, 125–132, 2005
[44] Taşçı D., Kılıç E., On the order-*k* generalized Lucas numbers, Applied Mathematics and Computation, 155, 637–641, 2004
[45] Taşçı D., Lineer Cebir, Sel-Ün Vakfı Yayınları, No: 9, Konya, 2001
[46] Türkmen R., Bozkurt D., On the bounds for the norms of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices, Applied Mathematics and Computation, 132, 633–642, 2002
[47] Türkmen R., Bozkurt D., A note for bounds of norms of Hadamard product of matrices, Mathematical Inequalities and Applications, 9(2), 211–217, 2006
[48] Tyrtyshnikov E. E., Cauchy-Toeplitz matrices and some applications, Linear Algebra and its Applications, 149, 1 – 18, 1991
[49] Vajda S.**,** Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section, John Wiley and Sons, NY, 1989
[50] Wu H., On the lower bounds for the norms of Cauchy–Toeplitz and Cauchy–Hankel matrices, Applied Mathematics and Computation 205, 391–395, 2008
[51] Yalçıner A., Taşkara N., On the norms of Hankel matrices with the Motzkin numbers, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 8(1), 9–14, 2007
[52] Yalçıner A., spectral norms of some special circulant matrices, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 3(35), 1733–1738, 2008
[53] Zhang F., Matrix Theory**,** Basic Results and Techniques, Springer-Verlag, NY, 1999