T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ KATLI SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

MARIA AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2021
KONYA

Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Maria AYDIN tarafından hazırlanan " Üç Katlı Sumudu Dönüşümü ve Bazı Diferensiyel Denklemlere Uygulanması " adlı tez çalışması 04/02/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI	……..
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER	……..
Üye Doç. Dr. Derya ALTINTAN	……..

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Sait GEZGİN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Maria AYDIN
Tarih: 04.02.2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇ KATLI SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

Maria AYDIN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER

2021, 58+ix Sayfa

Jüri
Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER
Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
Doç. Dr. Derya ALTINTAN

Bu tezde fen ve mühendislik alanlarında karşılaşılan çeşitli mertebelerden diferensiyel denklemlerin çözümleri Sumudu dönüşüm metodu, çift katlı Sumudu dönüşüm metodu ve üç katlı Sumudu dönüşüm metodu ile incelenecektir.

Literatürde yer alan bazı diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi için iki ve üç katlı Sumudu dönüşüm metodu uygulanacaktır.

Anahtar Kelimeler: Laplace dönüşümü, Sumudu dönüşümü, çift katlı Laplace dönüşümü, çift katlı Sumudu dönüşümü, üç katlı Laplace dönüşümü, üç katlı Sumudu dönüşümü, telgraf denklemi, Volterra İntegro-diferensiyel denklemi.

ABSTRACT

M.Sc. THESIS

THE TRIPLE SUMUDU TRANSFORM METHOD AND ITS APPLICATION TO SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS

Maria AYDIN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE OF PHILOSOPHY IN MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Haldun Alpaslan PEKER

2021, 58+ix Pages

Jury
Asst. Prof. Dr. Haldun Alpaslan PEKER
Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
Assoc. Prof. Dr. Derya ALTINTAN

In this thesis, the solutions of differential equations of various orders in the fields of science and engineering will be examined by Sumudu transform method, double Sumudu transform method and triple Sumudu transform method.

Double and triple Sumudu transform method will be applied to obtain analytical solutions of some differential equations in the literature.

Keywords: Laplace transform, Sumudu transform, double Laplace transform, double Sumudu transform, triple Laplace transform, triple Sumudu transform, telegraph equation, Volterra Integro-differential equation.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Çalışma boyunca desteklerini ve ilgilerini benden esirgemeyen, değerli görüşlerini ve önerilerini benimle paylaşan tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmamın her aşamasında manevi desteği ile hep yanımda olan babama, anneme, kardeşim Levent ÖZDEMİR'e, eşim Muhammed AYDIN'a ve kızım Talya AYDIN'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Maria AYDIN
KONYA-2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI **1**

1.1. İntegral Dönüşümü 3
1.2. Bazı İntegral Dönüşüm Örnekleri 4
1.3. Laplace Dönüşümü 6

2. SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ **7**

2.1. Bazı Fonksiyonların Sumudu ve Laplace Dönüşümleri 10

3. SUMUDU DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ **11**

3.1. Sumudu Dönüşümünün Bazı Özellikleri 11
3.2. Laplace Dönüşümü ile Sumudu Dönüşümünün Arasındaki İlişki 13
3.3. Konvolüsyon İntegrali 13
3.4. Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Sumudu ile Çözümü 14
3.5. Sumudu Dönüşümünün Uygulamaları 16

4. ÇİFT KATLI SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ **21**

4.1. Çift Katlı Laplace Dönüşümü 21
4.2. Çift Katlı Sumudu Dönüşümünün Bazı Özellikleri 22
4.3. Çift Katlı Sumudu Dönüşümünün Tablosu 23
4.4. Çift Katlı Sumudu Dönüşümü Uygulamaları 24

5. ÜÇ KATLI SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ **28**

5.1. Ters Üç Katlı Sumudu Dönüşümü 28
5.2. Üç Katlı Sumudu Dönüşümünün Tablosu 31
5.3. Bazı Fonksiyonların Üç Katlı Sumudu Dönüşümü 32
5.4. Üç Katlı Sumudu Dönüşümünün Özellikleri 37
5.5. Üç Katlı Sumudu Dönüşümü ile Üç Katlı Laplace Dönüşümü 49
5.6. Üç Katlı İntegralin Üç Katlı Sumudu Dönüşümünü 50
5.7. Üç Katlı Sumudu Dönüşümünün Uygulamaları 51

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 56

KAYNAKLAR 57

ÖZGEÇMİŞ ..... Error! Bookmark not defined.

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$S\left[f(t) \right]$: f fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$S^{-1}\left[f(t) \right]$: f fonksiyonunun ters Sumudu dönüşümü

$L\left[f(t) \right]$: f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$S_2\left[f(x,y) \right]$: f fonksiyonunun çift katlı Sumudu dönüşümü

$L_2\left[f(x,y) \right]$: f fonksiyonunun çift katlı Laplace dönüşümü

$S_3\left[f(x,y,t) \right]$: f fonksiyonunun üç katlı Sumudu dönüşümü

$L_3\left[f(x,y,t) \right]$: f fonksiyonunun üç katlı Laplace dönüşümü

N : Genel lineer olmayan diferensiyel operatör

L : Lineer diferensiyel operatör

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1. Bazı Fonksiyonların Sumudu ve Laplace Dönüşümlerin Tablosu.....10
Tablo 4.3. Bazı Fonksiyonların Çift Katlı Sumudu Dönüşümünün Tablosu.....23
Tablo 5.2. Bazı Fonksiyonların Üç Katlı Sumudu ve Laplace Dönüşümlerin Tablosu..31

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Doğada hayatımızı etkileyen ve yaşamımıza yön veren birçok fiziksel değişimler, bilimsel olaylar mühendislik ve fizik problemi barındırmaktadır. Bu problemlerin çözüm yöntemleri aşamasında modellemeye ihtiyaç duyulmaktadır. Diferensiyel denklemler, karmaşık olan bu yapıları modelleyip, daha anlaşılabilir duruma getirmekle birlikte olayların doğasına inebilmede kullanılmaktadır. Bu sebeple doğadaki birçok olay bilim insanları tarafından modellenmeye çalışılmaktadır. Özellikle kısmi diferensiyel denklemler ile ısı ve ışık akışı, su, radyo, deprem, elektromanyetik, ses dalgaları, çevrebilim, elektrik, gazların yayılımı gibi birçok fiziksel ve biyolojik olaylar modellenebilmektedir. Oldukça geniş uygulama alanına sahip olmasından dolayı diferensiyel denklemler için birçok analitik ve yaklaşık çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.

İntegral dönüşümleri, yüzyıllar boyunca diferensiyel ve integral denklemleri çözmek için kullanılmış matematiksel araçlardır. Diferensiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık olarak çözümlerinin incelenmesi için pek çok yöntem bulunmuştur ve diferensiyel denklemleri çözmek için yaygınca kullanılan yöntemlerden biri de integral dönüşümleridir (Belgacem ve Silambarasan, 2012). Tipik olarak, Fourier, Kamal, Elzaki, Aboodh ve Mahgoub integral dönüşümleri diferensiyel denklemlerin çözümü için kullanılan integral dönüşümlerine örnek olarak verilebilir.

Bu yöntemlere alternatif olarak 1993 yılında Watugala tarafından literatüre kazandırılan Sumudu dönüşüm yöntemi kullanılmaya başlanmıştır (Watugala, 1993). Sumudu kelimesinin anlamı pürüzsüz demektir. Bu dönüşüm Laplace ve Fourier dönüşümleriyle bağlantılıdır (Belgacem ve ark., 2003).

1994 yılında, Sumudu dönüşüm yöntemi Weerakoon tarafından kısmi diferensiyel denklemlere uygulanmıştır (Weerakoon, 1994).

1998 yılında ise Watugala, Sumudu dönüşüm yöntemini kontrol mühendisliğinde karşılaşılan diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanmıştır (Watugala, 1998). Watugala'nın çalışmaları ardından 1998 yılında Weerakoon kompleks sayılarda ters Sumudu dönüşüm yöntemini literatüre kazandırmıştır (Weerakoon, 1998).

Laplace dönüşüm yöntemi ve Sumudu dönüşüm yöntemi arasında fark olmadığını iddia eden Deakin'a karşı Weerakoon, 1997 yılında Sumudu dönüşüm yöntemi ve Laplace arasındaki farkı ortaya koymuştur (Weerakoon, 1997). Belgacem ve arkadaşları, 2003 yılında Laplace dönüşümü ile bağlantısını çeşitli teoremler yardımı ile kurarak metodun uygulamasını genişletmiştir (Belgacem ve ark., 2003).

Yapılan bu çalışmaların ardından Sumudu dönüşüm yöntemi birçok alanda uygulanarak literatüre yeni özellikler sunulmuştur. Sumudu dönüşümünün yeni gelişmeleri, çift katlı Sumudu dönüşümünü Tchuenche ve Mbare tarafından yapılmıştır. 2007 yılında Tchuenche ve Mbare çift katlı Sumudu dönüşüm yöntemini ve bazı özelliklerini literatüre sunmuştur (Tchuenche ve Mbare, 2007).

Sonraki yıllarda mevcut yöntemlerin birleştirilmesiyle çift katlı Laplace dönüşümü ve çift katlı Sumudu dönüşümü, Eltayeb ve Kılıçman tarafından tanıtılmıştır ve homojen olmayan dalga denklemi çözülmüştür (Eltayeb ve Kılıçman, 2010).

Telgraf denklemleri, bir elektrik iletim hattındaki gerilimi ve akımı mesafe ve zamanla tanımlayan bir çift bağlı, doğrusal kısmi diferensiyel denklemdir. Denklemler 1880 de iletim hattı modelini geliştiren Oliver Heaviside'den gelmektedir. Telgraf problemleri Laplace, Fourier, Mellin ve Elzaki dönüşümleri gibi integral dönüşümlerle çözülmüştür. Bu çalışmada, çift katlı Sumudu dönüşümünü kullanarak telgraf denklemi çözülmüştür.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İlk dört bölümde literatürde mevcut olan ve tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu çalışmanın beşinci bölümünde; literatürde mevcut olan üç katlı Sumudu dönüşümünün tanımı ile temel özelliklerini veren teorem ve ispatlara; ayrıca şu ana kadar literatürde rastlamadığımız üç katlı Sumudu dönüşümünün başka diğer özellikleri ile ilgili teorem ve ispatlara yer verilmiştir. Bu tanımı daha iyi anlayabilmek adına uygulamalar ele alınmıştır. Bu bölümün devamında ise bazı diferensiyel denklemlerin çözümünde nasıl kullanılacağı örnekler ile gösterilmiştir. Bu tezde amacımız Sumudu dönüşümünü, çift katlı Sumudu dönüşümünü ve üç katlı Sumudu dönüşümünü inceleyip uygulamalarını ve özelliklerini araştırmaktır. Ayrıca, Volterra integro-diferensiyel denklemi üç katlı

Sumudu dönüşümü yardımıyla çözülmüştür. Son bölümde ise, çalışmanın önemi ve çalışmaya dair bazı önerilere yer verilmiştir.

1.1. İntegral Dönüşümü

İntegral dönüşümleri, uygulamalı matematik ve mühendislik alanlarında karşılaşılan birçok sınır-değer, başlangıç-değer problemleri, diferensiyel denklemler ve integral denklemlerin çözümlerinde kullanılmaktadır. Bu bağlamda yeni integral dönüşümleri tanımlanmakta ve var olan integral dönüşüm tabloları sürekli genişletilmeye çalışılmaktadır. Bu tezin birinci bölümünde integral dönüşümlerin temel mantığından bahsedilerek çalışmanın ana hatları çizilmiştir. İntegral dönüşümünün genel tanımı verilmiş. Sık kullanılan integral dönüşümlerinin kısaca tarihçesine değinilip tanımları verilmiştir. Uygulamaları matematik, fizik ve mühendislik alanlarında kullanılan bazı integral dönüşümler: Laplace, Fourier, Fourier sinüs, Fourier cosinüs, Mellin, Hankel, Weyl, Widder Potansiyel, Üstel integral dönüşümleridir. Bu dönüşümlerden tablosu en gelişmiş olanları ve en çok bilineni Fourier ve Laplace dönüşümleridir.

İntegral dönüşümleri, yaklaşık iki yüz yıldır uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik problemlerini çözmede kullanılmaktadır. Tarihsel olarak integral dönüşümleri, Laplace (1749-1827) ve Fourier (1768-1830) in çalışmalarına dayanır. Bu konudaki ilk eserler, Laplace'in 1780 de yazdığı kitabı "La Theorie Analytique des Probabilities" ve Fourier'in 1822 de basılan "La Theorie Analytique de la Chaleur" isimli çalışmalarıdır.

Matematikte çok yaygın kullanım alanı bulmuş ve en eski integral dönüşümü olan Laplace dönüşümünün ilk temel tanımı ve uygulamaları Laplace'in yukarıda adı geçen kitabında verilmiştir. Laplace dönüşümü, pozitif reel eksende Fourier dönüşümünün özel halidir. Öyle ki Laplace dönüşümünün ve kompleks düzlemde bir eğrisel integral aracılığı ile verilen ters Laplace dönüşümünün tanımları modern formda Fourier integral formülünden çıkar.

Laplace ve Fourier'in dönüşümleri 19. yüzyıla kadar biliniyor olsa da İngiliz elektrik mühendisi Heaviside (1850-1925) elektrik akımını ve sistemlerini veren bayağı diferensiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümünü kullanarak operasyonel yöntemi geliştirmiş ve bu dönüşümü popüler hale getirmiştir.

Daha sonra tarihsel gelişim, integral dönüşümlerin matematiksel oluşumunun incelenmesine yönlenmiştir. Fourier ve Laplace dönüşümleri böylece tekrar gündeme gelerek Mellin dönüşümü, Hankel dönüşümü, Hilbert dönüşümü ve Stieltjes dönüşümü gibi pek çok dönüşüm tanımlanmıştır.

Sonuç olarak yukarıda bahsi geçen dönüşümler günümüzde de bayağı diferensiyel denklemler, integral denklemler, başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerinin çözümünde kullanılmaya devam etmektedir.

Bir f fonksiyonunun integral dönüşümü

$$T\left[f\left(t\right)\right]=F\left(s\right)=\int_{a}^{b} k\left(s,t\right) f\left(t\right)dt \tag{1.1}$$

olarak tanımlanır. Bu ifadedeki $k(s,t)$ fonksiyonuna integral dönüşümünün çekirdeği denir. $F(s)$ fonksiyonu verildiğinde $f(t)$ ye ters integral dönüşümü denir ve $T^{-1}\left[F\left(s\right)\right]$ ile gösterilir (Belgacem ve Silambarasan, 2012).

1.2. Bazı İntegral Dönüşüm Örnekleri

Laplace dönüşümü integral dönüşümlerin ilk örneklerinden biridir.
Çekirdek ve sınırlar

$a=0,\ b=\infty$ ve $k\left(s,t\right)=e^{-st}$ ise

$$L\left[f\left(t\right)\right]=F\left(s\right)=\int_{0}^{\infty} e^{-st} f\left(t\right)dt \tag{1.2}$$

olarak tanımlanır (Debnath ve Bhatta, 2007).

Diğer önemli bir integral dönüşümü,

$a=-\infty,\ b=\infty$ ve $k\left(s,t\right)=e^{-ist}$ ise

$$F\left[f\left(t\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f\left(t\right)dt \tag{1.3}$$

ile verilir. Bu tür dönüşüme Fourier dönüşümü denir ve diferensiyel denklemler kuramında önemli bir yer tutar (Debnath ve Bhatta, 2007).

Eğer çekirdek ve sınırlar

$a=0,\ b=\infty$ ve $k(s,t)=t^{s-1}$ ise

o zaman Mellin dönüşümü elde edilir ve

$$M\left[f(t),s\right]=F(s)=\int_0^{\infty} t^{s-1}f(t)\,dt \tag{1.4}$$

şeklinde verilir (Debnath ve Bhatta, 2007).

Başka integral dönüşümünün örneklerinden Kosinüs dönüşümü

$$F_c\left[f(t),s\right]=\int_0^{\infty} \cos(ts)\,f(t)\,dt \tag{1.5}$$

ile benzer şekilde Sinüs dönüşümü

$$F_s\left[f(t),s\right]=\int_0^{\infty} \sin(ts)\,f(t)\,dt \tag{1.6}$$

şeklinde ve Stieltjes dönüşümü

$$\mathbb{S}\left[f(t),s\right]=\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t+s}\,dt \tag{1.7}$$

şeklinde verilir (Debnath ve Bhatta, 2007).

Eğer çekirdek ve sınırlar

$a=0,\ b=\infty$ ve $k(s,t)=\frac{1}{s}e^{-\frac{t}{s}}$ ise o zaman Sumudu dönüşümü elde edilir.

Sumudu dönüşümü

$$S\left[f(t)\right]=\int_0^{\infty}\frac{1}{s}e^{-\frac{t}{s}}f(t)dt \tag{1.8}$$

integrali ile tanımlanır (Belgacem ve Silambarasan, 2012).

1.3. Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü bir integral dönüşümü olup, fizik, mekanik, mühendislik, tıp ve bazı diğer bilim dallarında kullanılan önemli bir yöntemdir. Bu yöntem, diferensiyel denklemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağladığı gibi, fiziğin matematiksel denklemlerinin çözümünde de yararlanılabilen bir yöntemdir.

Laplace dönüşümleri, lineer diferensiyel denklem sistemlerinin yani aynı sayıdaki bilinmeyen fonksiyonla iki yada daha fazla diferensiyel denklem setinin çözümünde kullanışlıdır. Sistemdeki her bir diferensiyel denklemin Laplace dönüşümü alınır, elde edilen ardışık denklemler setinden dönüşmüş bilinmeyen fonksiyonlar cebirsel olarak belirlenir ve ters Laplace dönüşümü yardımıyla hesaplanır (Bronson ve Costa, 2013).

Tanım : $f(t)$, $0 \le t < \infty$ için tanımlı olsun ve s bir reel değişkeni göstersin.
$f(t)$' nin $L\left[f(t)\right]$ veya $F(s)$ ile gösterilen Laplace dönüşümü, genelleştirilmiş integralin yakınsadığı tüm s değerleri için

$$L\left[f(t)\right]=F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt,$$

ile verilir. Yakınsama,

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{R}e^{-st}f(t)dt,$$

limiti var olduğunda elde edilir. Eğer limit yoksa genelleştirilmiş integral ıraksak ve $f(t)$ nin Laplace dönüşümü yoktur (Bronson ve Costa, 2013).

Çift katlı Laplace dönüşümü

$$L_2\left[f(x,y);(p,s)\right]=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(px+sy)}\, f(x,y)\,dxdy,$$

ve üç katlı Laplace dönüşümü

$$L_3\left[f(x,y,t);(p,s,k)\right]=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(px+sy+kt)}\, f(x,y,t)\,dxdydt,$$

şeklinde tanımlanmıştır (Atangana, 2013).

Bu tanımlardan yola çıkarak Sumudu dönüşümü genişletilecektir. Üç katlı Sumudu dönüşümü ile üç katlı Laplace dönüşümünün arasında güçlü bir ilişkinin var olduğu gösterilecektir. Ardından üç katlı Laplace dönüşümü ile çözülen bazı kısmi diferensiyel denklemler üç katlı Sumudu dönüşümü ile çözülecektir.

Diferensiyel denklemler matematik, fizik ve mühendislik gibi uygulamalı birçok alanda kullanılır. Sumudu dönüşümü de bize diferensiyel denklemlerin çözümünde kolaylık sağlayan bir integral dönüşümüdür. Bu nedenle bu konuda yapılan çalışmalar her zaman önem arz etmektedir.

Bu kısımda; öncelikle tezde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlerle birlikte Sumudu dönüşümünün temel özellikleri, daha sonra ise çift katlı Sumudu dönüşümünün tanımı verilecektir. Ardından bu dönüşümü kullanarak telgraf denklemi çözülecektir, son olarak ise üç katlı Sumudu dönüşümünün tanımı verilerek Volterra integro-diferensiyel denklemi çözülecektir.

2. SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ

1993 yılında Watugala tarafından literatüre kazandırılan Sumudu dönüşüm yöntemi kullanılmaya başlanmıştır (Watugala, 1993).

1994 yılında Sumudu dönüşüm yöntemi Weerakoon tarafından kısmi diferensiyel denklemlere uygulanmıştır (Weerakoon, 1994).

1998 yılında ise Watugala Sumudu dönüşüm yöntemini kontrol mühendisliğinde karşılaşılan diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanmıştır (Watugala, 1998).

Watugala'nın çalışmalarının ardından 1998 yılında Weerakoon kompleks sayılarda ters Sumudu dönüşüm yöntemini literatüre kazandırmıştır (Weerakoon, 1998).

Laplace dönüşüm yöntemi ve Sumudu dönüşüm yöntemi arasında fark olmadığını iddia eden Deakin'a karşı Weerakoon, 1997 yılında Sumudu dönüşümü yöntemi ve Laplace arasındaki farkı ortaya koymuştur (Weerakoon, 1997).

Belgacem ve arkadaşları, 2003 yılında Laplace dönüşümü ile bağlantısını çeşitli teoremler yardımı ile kurarak metodun uygulamasını genişletmiştir (Belgacem ve ark., 2003).

Yapılan bu çalışmaların ardından Sumudu dönüşüm yöntemi birçok alanda uygulanarak literatüre yeni özellikler sunulmuştur. Sumudu dönüşümünün yeni gelişmeleri, çift katlı Sumudu dönüşümünü tanımlayan Tchuenche ve Mbare tarafından yapılmıştır. 2007 yılında Tchuenche ve Mbare çift katlı Sumudu dönüşüm yöntemini ve bazı özelliklerini literatüre sunmuştur (Tchuenche ve Mbare, 2007).

Sonraki yıllarda mevcut yöntemlerin birleştirilmesiyle çift katlı Laplace dönüşümü ve çift katlı Sumudu dönüşümü Eltayeb ve Kılıçman tarafından tanıtılmıştır (Eltayeb ve Kılıçman, 2010).

Bir f fonksiyonunun Sumudu dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

A bir fonksiyonlar kümesi

$$A=\left\{ f(t):\exists M,\tau_1,\tau_2>0,\ |f(t)|<M\,e^{|t|/\tau_j},\ t\in(-1)^j\times[0,\infty)\right\}$$

şeklinde verilip *A* kümesinde verilen bir fonksiyon için sabit olan *M* sayısı sonlu sayı olup, τ_1 ve τ_2 sonlu veya sonsuz olabilir. *S* operatörü olarak gösterilen Sumudu dönüşümü, $u\in(-\tau_1,\tau_2)$ olmak üzere

$$S\left[f(t)\right]=\int_0^\infty e^{-t}f(ut)\,dt \tag{2.1}$$

$$S\left[f(t)\right]=\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{t}{u}}f(t)\,dt \tag{2.2}$$

integral denklemleriyle tanımlanır (Belgacem ve ark., 2003).

Ters Sumudu dönüşümü ise

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}F\left(\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s},\ \alpha\in\mathbb{R} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır (Belgacem ve ark., 2003).

Formülde belirtilen integral hesabı bazı fonksiyonlar için oldukça güç ve zaman alıcı olabilir, bu sebepten ters Laplace dönüşümlerinde olduğu gibi ters Sumudu dönüşümünde de sık karşılaşılan fonksiyonların Sumudu dönüşümü tabloları hazırlanmıştır (Belgacem ve ark., 2003).

Verilen bir diferensiyel denklemin Sumudu dönüşümü alınarak cebirsel bir denkleme indirgenir, sonrasında ise bu denklemden bağımlı değişken çekilerek ters Sumudu dönüşümü uygulandığından çözüm elde edilmiş olur.

2.1. Bazı Fonksiyonların Sumudu ve Laplace Dönüşümleri

Bazı fonksiyonların Sumudu ve Laplace dönüşümleri tabloda hazırlanmıştır (Belgacem ve ark., 2003).

Tablo 1. Bazı Fonksiyonların Sumudu ve Laplace Dönüşümleri Tablosu

$f(t)$	$L[f(t)]$	$S[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$	1
t	$\frac{1}{s^2}$	u
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{s^n}$	u^{n-1}
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}, n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{s^n}$	u^{n-1}
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{1}{1-au}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\frac{u}{(1-au)^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{au}{1+a^2u^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{1+a^2u^2}$

3. SUMUDU DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

3.1. Sumudu Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 3.1.1. (Lineerlik özelliği)

$$A=\left\{ f(t), g(t) : \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0,\ |f(t)| < M e^{|t|/\tau_j},\ |g(t)| < M e^{|t|/\tau_j},\ t \in (-1)^j \times [0,\infty) \right\}$$

bir fonksiyonlar kümesi olsun. A kümesinde verilen fonksiyonlar için sabit olan M sayısı sonlu sayı olup, τ_1 ve τ_2 sonlu veya sonsuz olabilir. $f, g \in A$ olmak üzere f, g fonksiyonlarının lineer toplamının Sumudu dönüşümü

$$S[af(t)+bg(t)] = aS[f(t)]+bS[g(t)];\ a,b \in R$$

şeklinde verilir (Belgacem ve Karaballi, 2006).

Teorem 3.1.2.

$F(u)$, f fonksiyonunun Sumudu dönüşümü olmak üzere, f fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin Sumudu dönüşümü

$$S\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \frac{1}{u}\left[F(u) - f(0)\right]$$

şeklindedir (Belgacem ve Karaballi, 2006).

Teorem 3.1.3.

f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevinin Sumudu dönüşümü

$$S\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = \frac{1}{u^2}\left[F(u) - f(0) - u\frac{df(t)}{dt}\Big|_{t=0}\right]$$

şeklindedir (Belgacem ve Karaballi, 2006).

Teorem 3.1.4.

f fonksiyonunun n. mertebeden türevinin Sumudu dönüşümü

$$S\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right)=\frac{1}{u^n}\left[F(u)-\sum_{k=0}^{n-1}u^k \frac{d^n f(t)}{dt^n}|_{t=0}\right]$$

olarak verilir (Belgacem, 2006).

Teorem 3.1.5.

$F(u)$, f fonksiyonunun Sumudu dönüşümü olmak üzere

$$S\left[t\frac{df(t)}{dt}\right]=u\frac{dF(u)}{du}$$

olur (Belgacem ve Karaballi, 2006).

Teorem 3.1.6. (Öteleme özelliği)

$F(u)$, f fonksiyonun Sumudu dönüşümü olmak üzere, $e^{at}f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[e^{at}f(t)\right]=\frac{1}{1-au}F\left(\frac{u}{1-au}\right)$$

olur (Belgacem ve Karaballi, 2006).

Teorem 3.1.7. (Görüntü fonksiyonunun türetilmesi)

$F(u)$, f fonksiyonunun Sumudu dönüşümü olmak üzere, $tf(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[tf(t)\right]=u\frac{d\left(uF(u)\right)}{du}$$

şeklindedir (Belgacem ve Karaballi, 2006).

Teorem 3.1.8.

$F(u)$, f fonksiyonunun Sumudu dönüşümü ve $F_n(u)$, $F(u)$'nun u'ya göre n. türevi olmak üzere, $t^n f^{(n)}(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[t^n f^{(n)}(t)\right]=u^n F_n(u)$$

şeklindedir (Belgacem ve Karaballi, 2006).

3.2. Laplace Dönüşümü ile Sumudu Dönüşümünün Arasındaki İlişki

Sumudu dönüşümü, Laplace dönüşümüne çok benzer. Laplace dönüşümü ile çözülebilen diferensiyel denklem Sumudu dönüşümü ile de çözülebilir.
A bir fonksiyonlar kümesi

$$A=\left\{f(t):\exists M,\tau_1,\tau_2>0,\ |f(t)|<M e^{|t|/\tau_j},\ t\in(-1)^j\times[0,\infty)\right\}$$

şeklinde verilip A kümesinde verilen bir fonksiyon için sabit olan M sayısı sonlu sayı olup, τ_1 ve τ_2 sonlu veya sonsuz olabilir.

$f(t)\in A$ olsun. $F(s)$, f fonksiyonun Laplace dönüşümü ve $G(u)$, f nin Sumudu dönüşümü olmak üzere

$$G(u)=\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u}, \tag{3.1}$$

şeklinde verilir (Belgacem ve ark., 2003).

3.3. Konvolüsyon İntegrali

f ve g fonksiyonlarının sırasıyla Sumudu dönüşümü $M(u)$ ve $N(u)$ olsun. f ve g konvolüsyon çarpımı için Sumudu dönüşümü,

$$(f*g)(t)=\int_0^\infty f(t)g(t-\tau)d\tau, \tag{3.2}$$

olup,

$$S\left[(f*g)(t)\right]=uM(u)N(u), \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilir (Belgacem ve ark., 2003).

3.4. Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Sumudu Dönüşümü ile Çözümü

Lineer ve homojen olmayan (3.4) diferensiyel denklemini ele alalım.

$$LU(x)+RU(x)+NU(x)=h(x), \tag{3.4}$$

Burada L ve R lineer, N ise lineer olmayan operatörü göstermektedir. L verilen denkleminin en yüksek mertebeden türevi ve $h(x)$ kaynak terimi olsun.

1.Adım: Verilen denklemin her iki tarafının Sumudu dönüşümü alınırsa

$$S[LU(x)]+S[RU(x)]+S[NU(x)]=S[h(x)], \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{u^n}S\left[U(x)\right]-\frac{1}{u^n}U(0)-\frac{1}{u^{n-1}}U'(0)-\ldots-\frac{U^{n-1}(0)}{u}+S\left[RU(x)\right]+S\left[NU(x)\right]=S\left[h(x)\right],$$

$$S\left[U(x)\right]=U(0)+uU'(0)+\ldots+u^{n-1}U^{n-1}(0)-u^nS\left[RU(x)\right]-u^n\left[NU(x)\right]+u^nS\left[h(x)\right],$$

ifadesi elde edilir.

2. Adım: Verilen denklemin çözümünün sonsuz seri şeklinde olduğunu kabul edersek,

$$U(x)=\sum_{i=0}^{\infty}U_i(x), \tag{3.6}$$

olur.
Lineer olmayan terim için, (A_i ; Adomian polinomları (Adomian, 1994))

$$NU(x)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i, \tag{3.7}$$

U_0 ,U_1,U_2 ,...,U_n terimleri

$$A_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left[N\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i U_i \right]_{\lambda=0}, \quad i=0,1,2,... \tag{3.8}$$

formu kullanarak kolayca hesaplanır.

$$A_0 = N(U_0)$$

$$A_1 = U_1 N'(U_0)$$

$$A_2 = U_2 N'(U_0) + \frac{1}{2!}U_1^2 N''(U_0)$$

$$A_3 = U_3 N'(U_0) + U_1 U_2 N''(U_0) + \frac{1}{3!}U_1^3 N'''(U_0)$$

$$\vdots$$

$$S\left[\sum_{i=0}^{\infty}U_i(x)\right] = U(0) + uU'(0) + \ldots + u^{n-1}U^{n-1}(0) - u^n S[RU(x)] - u^n S\left[\sum_{i=0}^{\infty}A_i\right] + u^n S[h(x)] \tag{3.9}$$

$$S[U_0(x)] = U(0) + uU'(0) + \ldots + u^{n-1}U^{n-1}(0) + u^n S[h(x)] \tag{3.10}$$

$$S[U_1(x)] = -u^n S[RU_0(x)] - u^n S[A_0] \tag{3.11}$$

$$S[U_2(x)] = -u^n S[RU_1(x)] - u^n S[A_1] \tag{3.12}$$

Genel olarak

$$S[U_{i+1}(x)] = -u^n S[RU_i(x)] - u^n S[A_i], \; i \geq 0 \tag{3.13}$$

3. Adım: Ters Sumudu alınarak;

$$U_0(x)=K(x), \tag{3.14}$$

$$U_{i+1}(x)=-S^{-1}\left[u^n S\left[RU_i(x)\right]+u^n S\left[A_i\right]\right];\ i\geq 0, \tag{3.15}$$

verilen diferensiyel denkleminin çözümüne ulaşmış oluruz (Eltayeb ve Kılıçman, 2012).

3.5. Sumudu Dönüşümünün Uygulamaları

Bu bölümde, bazı diferensiyel denklemlerin Sumudu dönüşümü ile çözümleri araştırılacaktır.

Örnek 3.5.1. (Goswami ve Alqahtani, 2016) :

$$\frac{d^2v}{dt^2}+v=0 \tag{3.16}$$
$$v(0)=2,\ v'(0)=3$$

başlangıç koşullu diferensiyel denkleminin çözümünü Sumudu dönüşümü metoduyla bulalım.

Çözüm :

Verilen denklemin her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{1}{u^2}\left[S\left[v(t)\right]-v(0)-uv'(0)\right]=-S\left[v(t)\right]$$

$$S\left[v(t)\right]=2+3u-u^2S\left[v(t)\right]$$

elde edilip, bu ifadenin de ters Sumudu dönüşümü alınırsa,

$$v(t)=S^{-1}\left[2+3u-u^2S\left[v(t)\right]\right]$$

$$v_0(t)=v(0)=2$$

$$v_1(t)=S^{-1}\left[2+3u-u^2S\left[v_0(t)\right]\right]$$

$$v_1(t)=S^{-1}\left[2+3u-u^2S[2]\right]$$

$$=S^{-1}\left[2+3u-2u^2\right]$$

$$=2+3t-\frac{2t^2}{2!}$$

$$v_2(t)=S^{-1}\left[2+3u-u^2S\left[v_1(t)\right]\right]$$

$$v_2(t)=S^{-1}\left[2+3u-u^2S\left[2+3t-\frac{2t^2}{2!}\right]\right]$$

$$=S^{-1}\left[2+3u-u^2\left(2+3u-2u^2\right)\right]$$

$$=S^{-1}\left[2+3u-2u^2-3u^3+2u^4\right]$$

$$=2+3t-2\frac{t^2}{2!}-3\frac{t^3}{3!}+2\frac{t^4}{4!}$$

$$\vdots$$

$$v(t)=v_0(t)+v_1(t)+v_2(t)+\cdots$$

$$v(t)=\ 2+3t-2\frac{t^2}{2!}-3\frac{t^3}{3!}+2\frac{t^4}{4!}+\cdots=2(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots)+3(t-\frac{t^3}{3!}+\cdots)$$

$$v(t)=2\cos(t)+3\sin(t)$$

bulunur, böylece verilen denklemin çözümüne ulaşmış oluruz.

Örnek 3.5.2. (Eltayeb ve Abdeldaim, 2017) :

$$u'(t)=1-2u^2\left(\frac{t}{2}\right),\ u(0)=0 \qquad (3.17)$$

başlangıç koşullu diferensiyel denklemin çözümünü Sumudu dönüşüm metoduyla bulunuz.

Çözüm :

Verilen denklemin her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$S\left[u'(t)\right]=S[1]-S\left[2u^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

tablodaki bilgiler kullanılıp ters Sumudu alınarak,

$$u(t)=t-S^{-1}\left[uS\left[2u^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\right]$$

$$u_0(t)=t$$

$$u_{n+1}(t)=-S^{-1}\left[uS\left[2A_n\right]\right]$$

$$A_0=u_0^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$A_1=2u_0\left(\frac{t}{2}\right)u_1\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$A_2=2u_2\left(\frac{t}{2}\right)u_0\left(\frac{t}{2}\right)+u_1^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$u_1(t)=-S^{-1}\left[uS\left[2u_0^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\right]$$

$$=-S^{-1}\left[uS\left[2\frac{t^2}{4}\right]\right]$$

$$=-S^{-1}\left[u^3\right]$$

$$=-\frac{t^3}{3!}$$

$$u_2(t)=-S^{-1}\left[uS\left[2A_1\right]\right]$$

$$u_2(t)=-S^{-1}\left[uS\left[2\left(2u_0\left(\frac{t}{2}\right)u_1\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]\right]$$

$$=-S^{-1}\left[uS\left(\frac{4t}{2}\frac{-t^3}{48}\right)\right]$$

$$=S^{-1}\left[uS\left(\frac{t^4}{4!}\right)\right]$$

$$=\frac{t^5}{5!}$$

$$\vdots$$

$$u(t)=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots$$

$$=\sin(t)$$

elde edilir.

Örnek 3.5.3.

$$u'-u=0\ ,\ u(0)=1 \tag{3.18}$$

diferensiyel denkleminin çözümünü $u(t)=e^t$ olduğunu Sumudu dönüşümünü kullanarak gösterelim.

Verilen denkleme Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S[u'(t)]-S[u(t)]=S[0]$$

$$\frac{1}{u}\left[S[u(t)]-1\right]=S[u(t)],$$

$$S[u(t)]=1+uS[u(t)],$$

bulunur. Şimdi ters Sumudu dönüşümü alınarak,

$$u(t)=S^{-1}[1]+S^{-1}\left[uS[u(t)]\right]$$

$$u_0(t)=1$$

$$u_1(t)=S^{-1}\left[uS[u_0(t)]\right]=t,$$

$$u_2(t)=S^{-1}\left[uS[u_1(t)]\right]=\frac{t^2}{2!},$$

$$u_3(t)=S^{-1}\left[uS[u_2(t)]\right]=\frac{t^3}{3!},$$

$$\vdots$$

$$u(t)=e^t$$

elde edilir.

4. ÇİFT KATLI SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ

A bir fonksiyonlar kümesi

$$A=\left\{ f\left(x,y\right):\exists M,\tau_1,\tau_2>0,\ \left|f\left(x,y\right)\right|<M\,e^{\left|x+y\right|/\tau_j},\ x,y\in\left(-1\right)^j\times\left[0,\infty\right)\right\}$$

olmak üzere A kümesinde verilen bir fonksiyon için sabit olan M sayısı sonlu sayı olup, τ_1 ve τ_2 sonlu veya sonsuz olabilir. $f(x,y)\in A$ fonksiyonunun S_2 operatörü ile gösterilen çift katlı Sumudu dönüşümü,

$$S_2\left[\,f\left(x,y\right);\left(u,v\right)\right]=\frac{1}{uv}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\right)}\,f\left(x,y\right)dxdy$$

$$=F\left(u,v\right) \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır (Eltayeb ve Kılıçman, 2010).

4.1. Çift Katlı Laplace Dönüşümü

Bir $f(x,y);\ x,y\in R^+$ fonksiyonu olmak üzere çift katlı Laplace dönüşümü,

$$L_2\left[\,f\left(x,y\right);\left(p,s\right)\right]=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(px+sy\right)}\,f\left(x,y\right)dxdy, \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Eltayeb ve Kılıçman, 2010).

Çift katlı Sumudu dönüşümü ile çift katlı Laplace dönüşümünün arasında güçlü bir ilişki vardır ve bu ilişki

$$S_2\left[\,f\left(x,y\right);\left(u,v\right)\right]=\frac{L_2\left[\,f\left(x,y\right);\left(\frac{1}{u},\frac{1}{v}\right)\right]}{uv}, \tag{4.3}$$

şeklinde ifade edilir (Eltayeb ve Kılıçman, 2010).

4.2. Çift Katlı Sumudu Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 4.2.1.

$F(u,v)$, f fonksiyonunun çift katlı Sumudu dönüşümünü göstermek üzere, f fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevinin çift katlı Sumudu dönüşümü

$$S_2\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x};(u,v)\right]=\frac{1}{u}F(u,v)-\frac{1}{u}F(0,v),$$

olarak ifade edilir (Tchuenche ve Mbare, 2007).

Benzer şekilde,

$$S_2\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y};(u,v)\right]=\frac{1}{v}F(u,v)-\frac{1}{v}F(u,0),$$

elde edilir (Tchuenche ve Mbare, 2007).

Teorem 4.2.2.

İkinci mertebeden kısmi türevlerin çift katlı Sumudu dönüşümleri

$$S_2\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2};(u,v)\right]=\frac{1}{u^2}F(u,v)-\frac{1}{u^2}F(0,v)-\frac{1}{u}\frac{\partial F(0,v)}{dx},$$

$$S_2\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2};(u,v)\right]=\frac{1}{v^2}F(u,v)-\frac{1}{v^2}F(u,0)-\frac{1}{v}\frac{\partial F(u,0)}{\partial y},$$

şeklindedir (Tchuenche ve Mbare, 2007).

4.3. Çift Katlı Sumudu Dönüşümü Tablosu

Bazı fonksiyonların çift katlı Sumudu dönüşümleri tabloda gösterilmiştir (Eltayeb ve Kılıçman, 2010).

Tablo 2. Bazı Fonksiyonların Çift Katlı Sumudu Dönüşümünün Tablosu

$f(x,y)$	$S_2[f(x,y);(u,v)]$
1	1
e^{ax+by}	$\frac{1}{(1-au)(1-bv)}$
xy	uv
$\frac{x^m y^n}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}$	$u^m v^n$
$x^m y^n$	$m!n!u^m v^n$
$\cos(x)\cos(y)$	$\frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)}$
$\cos(ax)\cos(by)$ $a,b\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{(1+a^2u^2)(1+b^2v^2)}$
$\sin(x)\sin(y)$	$\frac{uv}{(1+u^2)(1+v^2)}$
$\frac{\sin(ax)\sin(by)}{ab}$ $a,b\in\mathbb{R}$	$\frac{uv}{(1+a^2u^2)(1+b^2v^2)}$

4.4. Çift Katlı Sumudu Dönüşümünün Uygulamaları

Aşağıdaki örnekler, Elzaki ve Hilal'in 2012 deki çalışmasından alınmış olup bahsi geçen çalışmada bu örnekler Elzaki dönüşümü ile çözülmüş olup bu çalışmada aynı örnekler çift katlı Sumudu dönüşümü ile çözülmüştür.

Örnek 4.4.1. :

$$U_{xx} = U_{tt} + U_t + U, \tag{4.4}$$

lineer telgraf denklemi

$U(0,t)=e^{-t}$, $U_x(0,t)=e^{-t}$ sınır koşulları ve

$U(x,0)=e^{x}$, $U_t(x,0)=-e^{x}$ başlangıç koşulları ile verilmiş olsun (Elzaki ve Hilal, 2012).

Çözüm :

(4.4) denklemin her iki tarafına çift katlı Sumudu dönüşümü uygulanır ise

$$\frac{1}{u^2}F(u,v)-\frac{1}{u^2}F(0,v)-\frac{1}{u}\frac{\partial F(0,v)}{\partial x}=\frac{1}{v^2}F(u,v)-\frac{1}{v^2}F(u,0)-\frac{1}{v}\frac{\partial F(u,0)}{\partial t}+\frac{1}{v}F(u,v)$$
$$-\frac{1}{v}F(u,0)+F(u,v)$$

elde edilir ve

$$U(0,t)=e^{-t}\Rightarrow F(0,v)=\frac{1}{1+v}$$

$$U_x(0,t)=e^{-t}\Rightarrow \frac{\partial F(0,v)}{\partial x}=\frac{1}{1+v}$$

$$U(x,0)=e^{x}\Rightarrow F(u,0)=\frac{1}{1-u}$$

$$U_t(x,0) = -e^x \Rightarrow \frac{\partial F(u,0)}{\partial t} = -\frac{1}{1-u}$$

olur. Sınır ve başlangıç koşullarını kullanarak

$$F(u,v)\left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v} - 1\right] = \frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{1+v}\right) + \frac{1}{u}\left(\frac{1}{1+v}\right) - \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{1-u}\right) - \frac{1}{v}\left(-\frac{1}{1-u}\right) - \frac{1}{v}\left(\frac{1}{1-u}\right)$$

$$F(u,v)\left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v} - 1\right] = \frac{v^2(1-u) + uv^2(1-u) - u^2(1+v) + vu^2(1+v) - u^2v(1+v)}{u^2v^2(1+v)(1-u)}$$

$$F(u,v) = \frac{v^2 - uv^2 + uv^2 - u^2v^2 - u^2 - u^2v}{u^2v^2(1+v)(1-u)} \times \frac{u^2v^2}{v^2 - u^2 - u^2v - u^2v^2}$$

$$F(u,v) = \frac{1}{(1+v)(1-u)}$$

bulunur. Ele alınan telgraf denklemin çözümünün elde edilebilmesi için eşitliğinin her iki tarafının ters çift katlı Sumudu dönüşümü alınırsa,

$$S^{-1}\left[F(u,v)\right] = S^{-1}\left[\frac{1}{(1+v)(1-u)}\right]$$

$$U(x,t) = e^{x-t}$$

elde edilir.

Örnek 4.4.2. :

$$U_{xx} = U_{tt} + 4U_t + 4U, \tag{4.5}$$

telgraf denklemi

$U(0,t)=1+e^{-2t}$, $U_x(0,t)=2$ sınır koşulları ve

$U(x,0)=1+e^{2x}$, $U_t(x,0)=-2$ başlangıç koşulları ile verilmiş olsun (Elzaki ve Hilal, 2012).

Çözüm :

(4.5) denklemin her iki tarafına çift katlı Sumudu dönüşümü uygulanır ise

$$\frac{1}{u^2}F(u,v)-\frac{1}{u^2}F(0,v)-\frac{1}{u}\frac{\partial F(0,v)}{\partial x} = \frac{1}{v^2}F(u,v)-\frac{1}{v^2}F(u,0)-\frac{1}{v}\frac{\partial F(u,0)}{\partial t}+\frac{4}{v}F(u,v) -\frac{4}{v}F(u,0)+4F(u,v)$$

elde edilir ve sınır ve başlangıç koşulları kullanarak

$$U(0,t)=1+e^{-2t} \Rightarrow F(0,v)=1+\frac{1}{1+2v}$$

$$U_x(0,t)=2 \Rightarrow \frac{\partial F(0,v)}{\partial x}=2$$

$$U(x,0)=1+e^{2x} \Rightarrow F(u,0)=1+\frac{1}{1-2u}$$

$$U_t(x,0)=-2 \Rightarrow \frac{\partial F(u,0)}{\partial t}=-2$$

olur. Sınır ve başlangıç koşulları kullanarak,

$$F(u,v)\left[\frac{1}{u^2}-\frac{1}{v^2}-\frac{4}{v}-4\right] = \frac{1}{u^2}\left(1+\frac{1}{1+2v}\right)+\frac{2}{u}-\frac{1}{v^2}\left(1+\frac{1}{1-2u}\right)-\frac{1}{v}(-2)-\frac{4}{v}\left(1+\frac{1}{1-2u}\right)$$

$$F(u,v)\left[\frac{v^2-u^2-4u^2v-4u^2v^2}{u^2v^2}\right] =$$

$$\frac{v^2(1-2u)(1+2v)-u^2(1+2v)(1-2u)+2uv^2(1-2u)(1+2v)-2vu^2(1+2v)(1-2u)}{u^2v^2(1+2v)(1-2u)}$$

$$+\frac{v^2(1-2u)-u^2(1+2v)-4u^2v(1+2v)}{u^2v^2(1+2v)(1-2u)}$$

$$F(u,v) = \frac{u^2v^2}{v^2-u^2-4u^2v-4u^2v^2}$$

$$\times\frac{\left[v^2(1-2u)-u^2-4u^2v+2uv^2(1-2u)\right](1+2v)+\left[v^2-u^2(1+2v)-2vu^2(1+2v)\right](1-2u)}{u^2v^2(1+2v)(1-2u)}$$

$$F(u,v) = \frac{u^2v^2}{v^2-u^2-4u^2v-4u^2v^2}$$

$$\times\frac{\left[v^2-u^2-4u^2v-4u^2v^2-2uv^2+2uv^2\right](1+2v)+\left[v^2-u^2-4u^2v-4u^2v^2\right](1-2u)}{u^2v^2(1+2v)(1-2u)}$$

$$F(u,v) = \frac{(1+2v)+(1-2u)}{(1+2v)(1-2u)}$$

$$F(u,v) = \frac{(1+2v)}{(1+2v)(1-2u)}+\frac{(1-2u)}{(1+2v)(1-2u)}$$

$$F(u,v) = \frac{1}{(1-2u)}+\frac{1}{(1+2v)}$$

bulunur. Ele alınan telgraf denklemin çözümünün elde edilebilmesi için eşitliğinin her iki tarafına ters çift katlı Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S^{-1}\left[F(u,v)\right] = S^{-1}\left[\frac{1}{(1-2u)}\right] + S^{-1}\left[\frac{1}{(1+2v)}\right]$$

$$U(x,t) = e^{2x} + e^{-2t}$$

elde edilir ki bu da verilen denkleminin çözümüdür.

5. ÜÇ KATLI SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ

A bir fonksiyonlar kümesi

$$A = \left\{ f(x,y,t) : \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, \left| f(x,y,t) \right| < M\, e^{\frac{|x+y+t|}{\tau_j}},\ x,y,t \in (-1)^j \times [0,\infty) \right\}$$

olmak üzere bu kümede verilen bir fonksiyon için sabit olan *M* sayısı sonlu sayı olup, τ_1 ve τ_2 sonlu veya sonsuz olabilir. $f(x,y,t) \in A$ fonksiyonunun S_3 operatörü ile gösterilen üç katlı Sumudu dönüşümü,

$$S_3\left[f(x,y,t);(u,v,w) \right] = \frac{1}{uvw} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} f(x,y,t)\, dxdydt$$
$$= F(u,v,w) \qquad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır (Mechee ve Naeemah, 2020).

5.1. Ters Üç Katlı Sumudu Dönüşümü

$$f(x,y,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{px} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{sy} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{kt} F\left(\frac{1}{p},\frac{1}{s},\frac{1}{k}\right) \frac{dk}{k} \right] \frac{ds}{s} \right] \frac{dp}{p};\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Formülde belirtilen integral hesabı bazı fonksiyonlar için oldukça güç ve zaman alıcı olabilir, bu sebepten ters üç katlı Laplace dönüşümlerinde olduğu gibi ters üç katlı

Sumudu dönüşümünde de sık karşılaşılan fonksiyonların üç katlı Sumudu dönüşümü tablosu hazırlanmıştır.

Teorem 5.1.1.

A bir fonksiyonlar kümesi

$$A=\left\{ f(x,y,t), g(x,y,t) : \exists M,\tau_1,\tau_2>0, \left|f(x,y,t)\right| < M e^{\frac{|x+y+t|}{\tau_j}}, \left|g(x,y,t)\right| < M e^{\frac{|x+y+t|}{\tau_j}}, x,y,t \in (-1)^j \times [0,\infty) \right\}$$

olup bu kümede verilen fonksiyonlar için sabit *M* sayısı sonlu sayı olmalıdır. τ_1 ve τ_2 sonlu veya sonsuz olabilir.

$f(x,y,t) \in A$ ve $g(x,y,t) \in A$ sürekli fonksiyonlar olsun. $x,y,t \geq 0$ olmak üzere $F(u,v,w)$ ve $G(u,v,w)$ sırasıyla f ve g nin üç katlı Sumudu dönüşümünü göstersin. Eğer $F(u,v,w) = G(u,v,w)$ ise $f(x,y,t) = g(x,y,t)$ olur.

İspat:

Ters üç katlı Sumudu dönüşümünün tanımından

$$f(x,y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{px}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{sy}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{kt}F\left(\frac{1}{p},\frac{1}{s},\frac{1}{k}\right)\frac{dk}{k}\right]\frac{ds}{s}\right]\frac{dp}{p}$$

$p=\frac{1}{u}$, $s=\frac{1}{v}$ ve $k=\frac{1}{w}$ değişimi yapılarak

$$f(x,y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\frac{x}{u}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{\frac{y}{v}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\frac{t}{w}}F(u,v,w)\,dw\right]dv\right]du$$

olur. *F(u,v,w) = G(u,v,w)* olduğundan

$$f(x,y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\frac{x}{u}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{\frac{y}{v}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\frac{t}{w}}G(u,v,w)\,dw\right]dv\right]du$$

olur.

$p=\frac{1}{u}$, $s=\frac{1}{v}$ ve $k=\frac{1}{w}$ değişimi yapılarak

$$f(x,y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{px}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{sy}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{kt}G\left(\frac{1}{p},\frac{1}{s},\frac{1}{k}\right)\frac{dk}{k}\right]\frac{ds}{s}\right]\frac{dp}{p}$$

$$=g(x,y,t)$$

elde edilip, teorem ispatlanır.

5.2. Üç Katlı Sumudu Dönüşümünün Tablosu

Bazı fonksiyonların üç katlı Sumudu dönüşümleri üç katlı Laplace dönüşümleriyle birlikte tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3. Bazı Fonksiyonların Üç Katlı Sumudu ve Üç Katlı Laplace Dönüşümlerin Tablosu

$f(x,y,t)$	$S_3\left[f(x,y,t);(u,v,w)\right]$	$L_3\left[f(x,y,t);(p,s,k)\right]$
1	1	$\frac{1}{psk}$
$e^{ax+by+ct}$	$\frac{1}{(1-au)(1-bv)(1-cw)}$	$\frac{1}{(p-a)(s-b)(k-c)}$
xyt	uvw	$\frac{1}{p^2s^2k^2}$
$\frac{x^m y^n t^l}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)\Gamma(l+1)}$	$u^m v^n w^l$	$\frac{1}{p^{m+1}s^{n+1}k^{l+1}}$
$x^m y^n t^l$	$m!n!l!u^m v^n w^l$	$\frac{m!n!l!}{p^{m+1}s^{n+1}k^{l+1}}$
$\cos(x)\cos(y)\cos(t)$	$\frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)(1+w^2)}$	$\frac{psk}{(1+p^2)(1+s^2)(1+k^2)}$
$\cos(ax)\cos(by)\cos(ct)$ $a,b,c\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{(1+a^2u^2)(1+b^2v^2)(1+c^2w^2)}$	$\frac{psk}{(a^2+p^2)(b^2+s^2)(c^2+k^2)}$
$\sin(x)\sin(y)\sin(t)$	$\frac{uvw}{(1+u^2)(1+v^2)(1+w^2)}$	$\frac{1}{(1+p^2)(1+s^2)(1+k^2)}$
$\frac{\sin(ax)\sin(by)\sin(ct)}{abc}$ $a,b,c\in\mathbb{R}$	$\frac{uvw}{(1+a^2u^2)(1+b^2v^2)(1+c^2w^2)}$	$\frac{1}{(a^2+p^2)(b^2+s^2)(c^2+k^2)}$

5.3. Bazı Fonksiyonların Üç Katlı Sumudu Dönüşümü

- $f(x,y,t)=1$ olmak üzere

verilen fonksiyonunun üç katlı Sumudu dönüşümü

$$S_3\left[f(x,y,t);(u,v,w)\right]=\frac{1}{uvw}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}dxdydt$$

$$=\frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^\infty\frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}dx\right]e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}dydt$$

şeklinde olup Sumudu dönüşümünün özelliğinden

$$\int_0^\infty\frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}dx=1$$

$$=\frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}dydt$$

$$=\frac{1}{w}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty\frac{1}{v}e^{-\frac{y}{v}}dy\right]e^{-\frac{t}{w}}dt$$

$$=\frac{1}{w}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{w}}dt$$

$$=1$$

bulunur.

- $f(x,y,t)=e^{ax+by+ct}$ ise

$$S_3\left[e^{ax+by+ct}\right]=\frac{1}{uvw}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}e^{ax+by+ct}dxdydt$$

$$=\frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}e^{ax}dx\right]e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}e^{(by+ct)}dydt$$

elde edilir. Sumudu dönüşümünden

$$\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}e^{ax}dx=\frac{1}{1-au}$$

$$=\frac{1}{w}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{v}e^{-\frac{y}{v}}e^{by}dy\right]\frac{1}{1-au}e^{-\frac{t}{w}}e^{ct}\,dt$$

olur. Sumudu dönüşümünden

$$\int_0^\infty \frac{1}{v}e^{-\frac{y}{v}}e^{by}dy=\frac{1}{1-bv}$$

$$=\frac{1}{1-au}\frac{1}{1-bv}\int_0^\infty \frac{1}{w}e^{-\frac{t}{w}}e^{ct}dt$$

elde edilir. Sumudu dönüşümünün özelliğinden

$$\int_0^\infty \frac{1}{w}e^{-\frac{t}{w}}e^{ct}dt=\frac{1}{1-cw},$$

olup buradan

$$S_3\left[e^{ax+by+ct}\right]=\frac{1}{(1-au)(1-bv)(1-cw)},$$

elde edilir.

- $f(x,y,t)=xyt$ fonksiyonunu ele alalım.

$$S_3[xyt] = \frac{1}{uvw}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} xyt\,dxdydt$$

$$= \frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}xdx\right] e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} ytdydt$$

$$= \frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty [u]e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} yt\,dydt$$

$$= \frac{u}{w}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{v}e^{-\frac{y}{v}}ydy\right] e^{-\frac{t}{w}}tdt$$

$$= \frac{u}{w}\int_0^\infty [v]e^{-\frac{t}{w}}tdt$$

$$= uv\int_0^\infty \frac{1}{w}e^{-\frac{t}{w}}tdt$$

$$= uvw$$

olarak bulunur.

- Benzer şekilde, $f(x,y,t)=x^m y^n t^l$ fonksiyonu için üç katlı Sumudu dönüşümü,

$$S_3[f(x,y,t);(u,v,w)] = \frac{1}{uvw}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} x^m y^n t^l dxdydt$$

$$= \frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}x^m dx\right] e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} y^n t^l dydt$$

$$= \frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty [m!u^m]e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} y^n t^l dydt$$

$$= \frac{m!u^m}{w}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{v}e^{-\frac{y}{v}}y^n dy\right]e^{-\frac{t}{w}}t^l dt$$

$$= \frac{m!u^m}{w}\int_0^\infty \left[n!v^n\right]e^{-\frac{t}{w}}t^l dt$$

$$= m!n!u^m v^n\int_0^\infty \frac{1}{w}e^{-\frac{t}{w}}t^l dt$$

$$= m!n!l!u^m v^n w^l$$

şeklinde olur.

- $f(x,y,t) = \cos(ax)\cos(by)\cos(ct)$ fonksiyonunu ele alalım.

Üç katlı Sumudu dönüşümünü uygularsak,

$$S_3\left[\cos(ax)\cos(by)\cos(ct)\right] = \frac{1}{uvw}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\cos(ax)\cos(by)\cos(ct)\,dxdydt$$

$$= \frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}\cos(ax)dx\right]e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\cos(by)\cos(ct)\,dydt$$

bulunur. Sumudu dönüşümünün özelliğinden,

$$= \frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+a^2u^2}\right]e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\cos(by)\cos(ct)\,dydt$$

$$= \frac{1}{1+a^2u^2}\times\frac{1}{w}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{v}e^{-\frac{y}{v}}\cos(by)dy\right]e^{-\frac{t}{w}}\cos(ct)\,dt$$

$$= \frac{1}{\left(1+a^2u^2\right)\left(1+b^2v^2\right)} \int_0^{\infty} \frac{1}{w} e^{-\frac{t}{w}} \cos\left(ct\right) dt$$

$$= \frac{1}{\left(1+a^2u^2\right)\left(1+b^2v^2\right)\left(1+c^2w^2\right)} \text{ , } (a,b,c \in R)$$

olur.

Eğer $a=b=c=1$ alırsak,

$$S_3\left[\cos\left(x\right)\cos\left(y\right)\cos\left(t\right)\right] = \frac{1}{\left(1+u^2\right)\left(1+v^2\right)\left(1+w^2\right)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $f\left(x,y,t\right) = \sin\left(x\right)\sin\left(y\right)\sin\left(t\right)$ fonksiyonu için üç katlı Sumudu dönüşümünü kolayca hesaplanır.

- $f\left(x,y,t\right) = \sin\left(x\right)\sin\left(y\right)\sin\left(t\right)$ fonksiyonunu ele alalım ve üç katlı Sumudu dönüşümünü uygulayalım.

$$S_3\left[\sin\left(ax\right)\sin\left(by\right)\sin\left(ct\right)\right] = \frac{1}{uvw} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} \sin\left(ax\right)\sin\left(by\right)\sin\left(ct\right) dxdydt$$

$$= \frac{1}{vw} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-\frac{x}{u}} \sin\left(ax\right) dx\right] e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} \sin\left(by\right)\sin\left(ct\right) dydt$$

bulunur. Sumudu dönüşümünün özelliğinden,

$$= \frac{1}{vw} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \left[\frac{au}{1+a^2u^2}\right] e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} \sin\left(by\right)\sin\left(ct\right) dydt$$

$$= \frac{au}{1+a^2u^2} \times \frac{1}{w} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{v} e^{-\frac{y}{v}} \sin\left(by\right) dy\right] e^{-\frac{t}{w}} \sin\left(ct\right) dt$$

$$= ab\frac{uv}{\left(1+a^2u^2\right)\left(1+b^2v^2\right)}\int_0^{\infty}\frac{1}{w}e^{-\frac{t}{w}}\sin\left(ct\right)dt$$

$$= abc\frac{uvw}{\left(1+a^2u^2\right)\left(1+b^2v^2\right)\left(1+c^2w^2\right)},\ (a,b,c\in R)$$

olur.

Eğer $a=b=c=1$ alırsak,

$$S_3\left[\sin\left(x\right)\sin\left(y\right)\sin\left(t\right)\right]=\frac{uvw}{\left(1+u^2\right)\left(1+v^2\right)\left(1+w^2\right)}$$

bulunur.

5.4. Üç Katlı Sumudu Dönüşümünün Özellikleri

Teorem 5.4.1.

f, g fonksiyonlarının üç katlı Sumudu dönüşümü

$$S_3\left[af\left(x,y,t\right)+bg\left(x,y,t\right)\right]=aS_3\left[f\left(x,y,t\right)\right]+bS_3\left[g\left(x,y,t\right)\right];\ a,b\in R$$

lineerlik özelliğine sahiptir.

İspat:

$$S_3\left[af\left(x,y,t\right)+bg\left(x,y,t\right)\right]=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{uvw}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\left[af\left(x,y,t\right)+bg\left(x,y,t\right)\right]dxdydt$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\frac{a}{uvw}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}f\left(x,y,t\right)+\frac{b}{uvw}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}g\left(x,y,t\right)\right]dxdydt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a}{uvw} e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} f(x,y,t)\,dxdydt + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{b}{uvw} e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} g(x,y,t)\,dxdydt$$

$$= a\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{uvw} e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} f(x,y,t)\,dxdydt + b\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{uvw} e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} g(x,y,t)\,dxdydt$$

$$= aS_3\left[f(x,y,t)\right] + bS_3\left[g(x,y,t)\right]$$

olur.

Teorem 5.4.2.

$F(u,v,w)$, f fonksiyonunun üç katlı Sumudu dönüşümü olmak üzere, f fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevinin üç katlı Sumudu dönüşümü

$$S_3\left[\frac{df(x,y,t)}{dx}\right] = \frac{1}{u}\left[F(u,v,w) - F(0,v,w)\right]$$

şeklindedir.

İspat:

$$S_3\left[\frac{df(x,y,t)}{dx}\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{uvw} e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} \frac{df(x,y,t)}{dx}\,dxdydt$$

$$= \frac{1}{vw}\int_0^\infty \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-\frac{x}{u}} \frac{df(x,y,t)}{dx}\,dx\right] e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} dydt$$

olup parantezin içindeki ifade için birinci mertebeden türevin Sumudu dönüşümünün özelliğinden,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-\frac{x}{u}} \frac{df(x,y,t)}{dx} dx = \frac{1}{u}\left[F(u,y,t) - f(0,y,t)\right]$$

olup,

$$= \frac{1}{vw}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{u}\left[F(u,y,t) - f(0,y,t)\right]\right] e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} dydt$$

$$= \frac{1}{w}\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{v}\left[\frac{1}{u}\left[F(u,y,t) - f(0,y,t)\right]\right] e^{-\frac{y}{v}} dy\right] e^{-\frac{t}{w}} dt$$

$$= \frac{1}{w}\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{uv} F(u,y,t) e^{-\frac{y}{v}} dy - \int_0^{\infty} \frac{1}{uv} f(0,y,t) e^{-\frac{y}{v}} dy\right] e^{-\frac{t}{w}} dt$$

$$= \frac{1}{w}\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{u}\left[F(u,v,t) - F(0,v,t)\right]\right] e^{-\frac{t}{w}} dt$$

$$= \frac{1}{u}\int_0^{\infty} \frac{1}{w}\left[F(u,v,t) - F(0,v,t)\right] e^{-\frac{t}{w}} dt$$

$$= \frac{1}{u}\left[F(u,v,w) - F(0,v,w)\right]$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$S_3\left[\frac{df(x,y,t)}{dy}\right] = \frac{1}{v}\left[F(u,v,w) - F(u,0,w)\right]$$

$$S_3\left[\frac{df(x,y,t)}{dt}\right] = \frac{1}{w}\left[F(u,v,w) - F(u,v,0)\right]$$

ifadeleri de elde edilir.

Teorem 5.4.3.

$F(u,v,w)$, f fonksiyonunun üç katlı Sumudu dönüşümü olmak üzere, f fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevinin üç katlı Sumudu dönüşümü

$$S_3\left[\frac{d^2 f(x,y,t)}{dx^2}\right] = \frac{1}{u^2}\left[F(u,v,w) - F(0,v,w) - u\frac{dF(0,v,w)}{dx}|_{x=0}\right]$$

şeklindedir.

İspat:

$$S_3\left[\frac{d^2 f(x,y,t)}{dx^2}\right] = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uvw} e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} \frac{d^2 f(x,y,t)}{dx^2} dxdydt$$

$$= \frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-\frac{x}{u}} \frac{d^2 f(x,y,t)}{dx^2} dx\right] e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} dydt$$

olup, parantezin içindeki ifade için ikinci mertebeden türevin Sumudu dönüşümünün özelliğinden

$$\int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-\frac{x}{u}} \frac{d^2 f(x,y,t)}{dx^2} dx = \frac{1}{u^2}\left[F(u,y,t) - f(0,y,t) - u\frac{df(0,y,t)}{dx}|_{x=0}\right]$$

olup,

$$= \frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{1}{u^2}\left[F(u,y,t) - f(0,y,t) - u\frac{df(0,y,t)}{dx}|_{x=0}\right]\right] e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} dydt$$

$$= \frac{1}{w}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{v}\left[\frac{1}{u^2}F(u,y,t) - \frac{1}{u^2} f(0,y,t) - \frac{1}{u}\frac{df(0,y,t)}{dx}|_{x=0}\right] e^{-\frac{y}{v}} dy\right] e^{-\frac{t}{w}} dt$$

$$= \frac{1}{w}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{vu^2}F(u,y,t)e^{-\frac{y}{v}}dy - \int_0^\infty \frac{1}{vu^2}f(0,y,t)e^{-\frac{y}{v}}dy - \int_0^\infty \frac{1}{vu}\frac{df(0,y,t)}{dx}|_{x=0}\, e^{-\frac{y}{v}}dy\right]e^{-\frac{t}{w}}dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{w}\left[\frac{1}{u^2}F(u,v,t) - \frac{1}{u^2}F(0,v,t) - \frac{1}{u}\frac{dF(0,v,t)}{dx}|_{x=0}\right]e^{-\frac{t}{w}}dt$$

$$= \frac{1}{u^2}F(u,v,w) - \frac{1}{u^2}F(0,v,w) - \frac{1}{u}\frac{dF(0,v,w)}{dx}|_{x=0}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$S_3\left[\frac{d^2f(x,y,t)}{dy^2}\right] = \frac{1}{v^2}\left[F(u,v,w) - F(u,0,w) - v\frac{dF(u,0,w)}{dy}|_{y=0}\right]$$

$$S_3\left[\frac{d^2f(x,y,t)}{dt^2}\right] = \frac{1}{w^2}\left[F(u,v,w) - F(u,v,0) - w\frac{dF(u,v,0)}{dt}|_{t=0}\right]$$

şeklinde bulunur.

Bunlara ilaveten,

$$S_3\left[\frac{d^3f(x,y,t)}{dx^3}\right] = \frac{1}{u^3}\left[F(u,v,w) - F(0,v,w) - u\frac{dF(0,v,w)}{dx}|_{x=0} - u^2\frac{d^2F(0,v,w)}{dx^2}|_{x=0}\right]$$

$$S_3\left[\frac{d^3f(x,y,t)}{dy^3}\right] = \frac{1}{v^3}\left[F(u,v,w) - F(u,0,w) - v\frac{dF(u,0,w)}{dy}|_{y=0} - v^2\frac{d^2F(u,0,w)}{dy^2}|_{y=0}\right]$$

$$S_3\left[\frac{d^3f(x,y,t)}{dt^3}\right] = \frac{1}{w^3}\left[F(u,v,w) - F(u,v,0) - w\frac{dF(u,v,0)}{dt}|_{t=0} - w^2\frac{d^2F(u,v,0)}{dt^2}|_{t=0}\right]$$

şeklindedir (Mechee ve Naeemah, 2020).

Teorem 5.4.4.

$F(u,v,w)$, f fonksiyonunun üç katlı Sumudu dönüşümü olmak üzere, f fonksiyonunun $n.$ mertebeden kısmi türevinin üç katlı Sumudu dönüşümü

$$S_3\left(\frac{d^n f(x,y,t)}{dx^n}\right)=\frac{1}{u^n}\left[F(u,v,w)-\sum_{k=0}^{n-1}u^k\,\frac{d^n F(0,v,w)}{dx^n}|_{x=0}\right]$$

$$S_3\left(\frac{d^n f(x,y,t)}{dy^n}\right)=\frac{1}{v^n}\left[F(u,v,w)-\sum_{k=0}^{n-1}v^k\,\frac{d^n F(u,0,w)}{dy^n}|_{y=0}\right]$$

$$S_3\left(\frac{d^n f(x,y,t)}{dt^n}\right)=\frac{1}{w^n}\left[F(u,v,w)-\sum_{k=0}^{n-1}w^k\,\frac{d^n F(u,v,0)}{dt^n}|_{t=0}\right]$$

olur.

İspat:

$$S_3\left[\frac{d^n f(x,y,t)}{dx^n}\right]=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uvw}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\frac{d^n f(x,y,t)}{dx^n}dxdydt$$

$$=\frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}\frac{d^n f(x,y,t)}{dx^n}dx\right]e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}dydt$$

parantezin içindeki ifade için n. mertebeden kısmi türevin Sumudu dönüşümünün özelliğinden

$$\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}\frac{d^n f(x,y,t)}{dx^n}dx=\frac{1}{u^n}\left[F(u,y,t)-\sum_{k=0}^{n-1}u^k\,\frac{d^n f(0,y,t)}{dx^n}|_{x=0}\right]$$

olup,

$$=\frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{1}{u^n}\left[F(u,y,t)-\sum_{k=0}^{n-1}u^k\,\frac{d^n f(0,y,t)}{dx^n}|_{x=0}\right]\right]e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}dydt$$

$$= \frac{1}{w}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{v}\left[\frac{1}{u^n}\left[F(u,y,t)-\sum_{k=0}^{n-1}u^k \frac{d^n f(0,y,t)}{dx^n}|_{x=0}\right]\right]e^{-\frac{y}{v}}dy\right]e^{-\frac{t}{w}}dt$$

$$= \frac{1}{w}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{u^n v}F(u,y,t)e^{-\frac{y}{v}}dy-\int_0^\infty \frac{1}{u^n v}\left[\sum_{k=0}^{n-1}u^k \frac{d^n f(0,y,t)}{dx^n}|_{x=0}\right]e^{-\frac{y}{v}}dy\right]e^{-\frac{t}{w}}dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{w}\left[\frac{1}{u^n}\left[F(u,v,t)-\sum_{k=0}^{n-1}u^k \frac{d^n F(0,v,t)}{dx^n}|_{x=0}\right]\right]e^{-\frac{t}{w}}dt$$

$$= \frac{1}{u^n}\left[F(u,v,w)-\sum_{k=0}^{n-1}u^k \frac{d^n F(0,v,w)}{dx^n}|_{x=0}\right]$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$S_3\left(\frac{d^n f(x,y,t)}{dy^n}\right) = \frac{1}{v^n}\left[F(u,v,w)-\sum_{k=0}^{n-1}v^k \frac{d^n F(u,0,w)}{dy^n}|_{y=0}\right]$$

$$S_3\left(\frac{d^n f(x,y,t)}{dt^n}\right) = \frac{1}{w^n}\left[F(u,v,w)-\sum_{k=0}^{n-1}w^k \frac{d^n F(u,v,0)}{dt^n}|_{t=0}\right]$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 5.4.5.

$F(u,v,w)$, f fonksiyonunun üç katlı Sumudu dönüşümü olmak üzere,

$$S_3\left[\frac{d^3 f(x,y,t)}{dxdydt}\right] = \frac{1}{uvw}\left[F(u,v,w)-F(u,v,0)-F(u,0,w)+F(u,0,0)-F(0,v,w)+F(0,v,0)+F(0,0,w)-F(0,0,0)\right]$$

şeklindedir.

İspat:

$$S_3\left[\frac{d^3 f(x,y,t)}{dxdydt}\right]=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uvw}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\left[\frac{d^3 f(x,y,t)}{dxdydt}\right]dxdydt$$

$$=\frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}\frac{d^3 f(x,y,t)}{dxdydt}dx\right]e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}dydt$$

$$=\frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d^2}{dydt}\left[\frac{1}{u}\left[F(u,y,t)-f(0,y,t)\right]\right]e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}dydt$$

$$=\frac{1}{vw}\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{1}{u}\left[\frac{d^2F(u,y,t)}{dydt}-\frac{d^2 f(0,y,t)}{dydt}\right]\right]e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}dydt$$

$$=\frac{1}{uw}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \frac{1}{v}\left[\frac{d^2F(u,y,t)}{dydt}-\frac{d^2 f(0,y,t)}{dydt}\right]e^{-\frac{y}{v}}dy\right]e^{-\frac{t}{w}}dt$$

$$=\frac{1}{uw}\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\int_0^\infty \frac{1}{v}\frac{dF(u,y,t)}{dy}e^{-\frac{y}{v}}dy-\int_0^\infty \frac{1}{v}\frac{df(0,y,t)}{dy}e^{-\frac{y}{v}}dy\right]e^{-\frac{t}{w}}dt$$

$$=\frac{1}{uw}\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{v}\left[F(u,v,t)-F(u,0,t)\right]-\frac{1}{v}\left[F(0,v,t)-F(0,0,t)\right]\right]e^{-\frac{t}{w}}dt$$

$$=\frac{1}{uv}\left[\int_0^\infty \frac{1}{w}\frac{dF(u,v,t)}{dt}e^{-\frac{t}{w}}dt-\int_0^\infty \frac{1}{w}\frac{dF(u,0,t)}{dt}e^{-\frac{t}{w}}dt-\int_0^\infty \frac{1}{w}\frac{dF(0,v,t)}{dt}e^{-\frac{t}{w}}dt+\int_0^\infty \frac{1}{w}\frac{dF(0,0,t)}{dt}e^{-\frac{t}{w}}dt\right]$$

$$=\frac{1}{uvw}\left[F(u,v,w)-F(u,v,0)-F(u,0,w)+F(u,0,0)-F(0,v,w)+F(0,v,0)+F(0,0,w)-F(0,0,0)\right]$$

Teorem 5.4.6. (Öteleme özelliği)

$F(u,v,w)$, f fonksiyonun üç katlı Sumudu dönüşümü olmak üzere, $e^{ax+by+ct}f(x,y,t)$ fonksiyonun üç katlı Sumudu dönüşümü

$$S_3\left[e^{ax+by+ct} f(x,y,t)\right] = \frac{1}{(1-au)(1-bv)(1-cw)} F\left(\frac{u}{1-au}, \frac{v}{1-bv}, \frac{w}{1-cw}\right),$$

olur.

İspat:

$$S_3\left[e^{ax+by+ct} f(x,y,t)\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{uvw} e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} e^{ax+by+ct} f(x,y,t)\, dxdydt$$

$$= \frac{1}{vw} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-\frac{x}{u}+ax} f(x,y,t)\, dx\right] e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} e^{by+ct} dydt$$

olup parantezin içindeki ifade için Sumudu dönüşümünün özelliğinden,

$$= \frac{1}{vw} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{1}{1-au} F\left(\frac{u}{1-au}, y, t\right)\right] e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)} e^{by+ct} dydt$$

$$= \frac{1}{w} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{v}\left[\frac{1}{1-au} F\left(\frac{u}{1-au}, y, t\right)\right] e^{-\frac{y}{v}+by} dy\right] e^{-\frac{t}{w}} e^{ct} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{w}\left[\frac{1}{(1-au)(1-bv)} F\left(\frac{u}{1-au}, \frac{v}{1-bv}, t\right)\right] e^{-\frac{t}{w}} e^{ct} dt$$

$$= \frac{1}{(1-au)(1-bv)} \int_0^\infty \frac{1}{w} F\left(\frac{u}{1-au}, \frac{v}{1-bv}, t\right) e^{-\frac{t}{w}} e^{ct} dt$$

$$= \frac{1}{(1-au)(1-bv)(1-cw)} F\left(\frac{u}{1-au}, \frac{v}{1-bv}, \frac{w}{1-cw}\right)$$

elde edilir.

Teorem 5.4.7. (Görüntü fonksiyon türetilmesi)

$F(u,v,w)$, f fonksiyonunun üç katlı Sumudu dönüşümü olmak üzere, $xyt \cdot f\left(x,y,t\right)$ fonksiyonunun üç katlı Sumudu dönüşümü

$$S_3\left[xyt \cdot f\left(x,y,t\right)\right] = \frac{u^2v^2w^2d^3F\left(u,v,w\right)}{dudvdw} + \frac{uv^2w^2d^2F\left(u,v,w\right)}{dvdw} + \frac{u^2vw^2d^2F\left(u,v,w\right)}{dudw}$$

$$+ \frac{u^2v^2wd^2F\left(u,v,w\right)}{dudv} - \frac{uvw^2dF\left(u,v,w\right)}{dw} - \frac{uv^2wdF\left(u,v,w\right)}{dv}$$

$$- \frac{u^2vwdF\left(u,v,w\right)}{du} + uvwF\left(u,v,w\right)$$

şeklinde olur.

İspat:

$$\frac{d^3F\left(u,v,w\right)}{dudvdw} = \frac{d^3}{dudvdw}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uvw}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}f\left(x,y,t\right)dxdydt$$

$$= \frac{d^2}{dudv}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uv}\left[\int_0^\infty \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{w}e^{-\frac{t}{w}}f\left(x,y,t\right)\right)dt\right]e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\right)}dxdy$$

$$= \frac{d^2}{dudv}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uv}\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{w^3}te^{-\frac{t}{w}} - \frac{1}{w^2}e^{-\frac{t}{w}}\right)f\left(x,y,t\right)dt\right]e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\right)}dxdy$$

$$= \frac{d^2}{dudv}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uv}\left(\frac{1}{w^3}te^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}f\left(x,y,t\right)dxdydt\right)$$
$$- \frac{d^2}{dudv}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uv}\left(\frac{1}{w^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}f\left(x,y,t\right)dxdydt\right)$$

elde edilir. Bu denklemin ilk integrali için

$$\frac{d^2}{dudv}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uv}\left(\frac{1}{w^3}te^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}f(x,y,t)\,dxdydt\right)=$$

$$\frac{d}{du}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uw^3}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{t}{w}\right)}\left[\int_0^\infty \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v}e^{-\frac{y}{v}}t\,f(x,y,t)\,dy\right)\right]dxdt$$

$$=\frac{d}{du}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uw^3}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{t}{w}\right)}\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{v^3}ye^{-\frac{y}{v}}-\frac{1}{v^2}e^{-\frac{y}{v}}\right)t\,f(x,y,t)\,dy\right]dxdt$$

$$=\frac{d}{du}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{1}{uw^3v^3}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}yt\,f(x,y,t)-\frac{1}{uw^3v^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}t\,f(x,y,t)\right]dxdydt$$

$$=\frac{d}{du}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uw^3v^3}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}yt\,f(x,y,t)\,dxdydt$$

$$-\frac{d}{du}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uw^3v^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}t\,f(x,y,t)\,dxdydt$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{w^3v^3}e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\left(\frac{1}{u^3}xe^{-\frac{x}{u}}-\frac{1}{u^2}e^{-\frac{x}{u}}\right)yt\,f(x,y,t)\,dxdydt$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{w^3v^2}e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\left(\frac{1}{u^3}xe^{-\frac{x}{u}}-\frac{1}{u^2}e^{-\frac{x}{u}}\right)t\,f(x,y,t)\,dxdydt$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{w^3v^3u^3}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}xyt\,f(x,y,t)\,dxdydt$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{w^3v^3u^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}yt\,f(x,y,t)\,dxdydt$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{w^3v^2u^3}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}xt\,f(x,y,t)\,dxdydt$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{w^3v^2u^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}t\,f(x,y,t)\,dxdydt$$

bulunur. Şimdi denklemin ikinci integrali için

$$-\frac{d^2}{dudv}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uv}\left(\frac{1}{w^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}f(x,y,t)\,dxdydt\right)=$$

$$-\frac{d}{du}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uw^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{t}{w}\right)}\left[\int_0^\infty \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v}e^{-\frac{y}{v}}f(x,y,t)\,dy\right)\right]dxdt$$

$$=-\frac{d}{du}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uw^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{t}{w}\right)}\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{v^3}ye^{-\frac{y}{v}}-\frac{1}{v^2}e^{-\frac{y}{v}}\right)f(x,y,t)\,dy\right]dxdt$$

$$=-\frac{d}{du}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uv^3w^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}yf(x,y,t)\,dxdydt$$

$$+\frac{d}{du}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{uv^2w^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}f(x,y,t)\,dxdydt$$

$$=-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{v^3w^2}e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}\right)yf(x,y,t)\,dxdydt$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{v^2w^2}e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}e^{-\frac{x}{u}}\right)f(x,y,t)\,dxdydt$$

$$=-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{v^3w^2}e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\left(\frac{1}{u^3}xe^{-\frac{x}{u}}-\frac{1}{u^2}e^{-\frac{x}{u}}\right)yf(x,y,t)\,dxdydt$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{v^2w^2}e^{-\left(\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}\left(\frac{1}{u^3}xe^{-\frac{x}{u}}-\frac{1}{u^2}e^{-\frac{x}{u}}\right)f(x,y,t)\,dxdydt$$

$$=-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{u^3v^3w^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}xyf(x,y,t)\,dxdydt$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{u^2v^3w^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}yf(x,y,t)\,dxdydt$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{u^3v^2w^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}xf(x,y,t)\,dxdydt$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{u^2v^2w^2}e^{-\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{t}{w}\right)}f(x,y,t)\,dxdydt$$

elde edilir. Bu ifadeler denklemde yerine yazılırsa,

$$S_3\left[xyt\cdot f\left(x,y,t\right)\right]=\frac{u^2v^2w^2d^3F\left(u,v,w\right)}{dudvdw}+\frac{uv^2w^2d^2F\left(u,v,w\right)}{dvdw}+\frac{u^2vw^2d^2F\left(u,v,w\right)}{dudw}$$

$$+\frac{u^2v^2wd^2F\left(u,v,w\right)}{dudv}-\frac{uvw^2dF\left(u,v,w\right)}{dw}-\frac{uv^2wdF\left(u,v,w\right)}{dv}$$

$$-\frac{u^2vwdF\left(u,v,w\right)}{du}+uvwF\left(u,v,w\right)$$

olarak bulunur.

5.5. Üç Katlı Sumudu Dönüşümü ile Üç Katlı Laplace Dönüşümü Arasındaki İlişki

Üç katlı Laplace dönüşümü,

$$L_3\left[f\left(x,y,t\right);\left(p,s,k\right)\right]=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(px+sy+kt\right)}f\left(x,y,t\right)dxdydt \tag{5.3}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Atangana, 2013).

Teorem 5.5.1.

Üç katlı Sumudu dönüşümü ile üç katlı Laplace dönüşümünün arasında

$$S_3\left[f\left(x,y,t\right);\left(u,v,w\right)\right]=\frac{L_3\left[f\left(x,y,t\right);\left(\frac{1}{u},\frac{1}{v},\frac{1}{w}\right)\right]}{uvw} \tag{5.4}$$

şeklinde bir ilişki vardır (Kılıçman ve Gadain, 2010).

İspat:

$$F\left(u,v,w\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x+y+t\right)}f\left(ux,vy,wt\right)dxdydt$$

olup $p = ux$, $s = vy$ ve $k = wt$ alınarak

$$F(u,v,w) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{p}{u}+\frac{s}{v}+\frac{k}{w}\right)} f(p,s,k) \frac{dp}{u} \frac{ds}{v} \frac{dk}{w}$$

$$= \frac{1}{uvw} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{p}{u}+\frac{s}{v}+\frac{k}{w}\right)} f(p,s,k)\, dpdsdk$$

$$= \frac{L_3\left[f(x,y,t); \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}\right)\right]}{uvw}$$

elde edilir (Kılıçman ve Gadain, 2010).

5.6. Üç Katlı İntegralin Üç Katlı Sumudu Dönüşümü

Teorem 5.6.1.

$F(u,v,w)$ ve $G(p,q,s)$, f fonksiyonunun sırasıyla üç katlı Sumudu ve üç katlı Laplace dönüşümleri olsun. f fonksiyonun üç katlı integrali

$$\psi(x,y,t) = \int_0^x \int_0^y \int_0^t f(\mu,\tau,\nu)\, d\mu d\tau d\nu \tag{5.5}$$

şeklinde tanımlansın.

Üç katlı integralin üç katlı Sumudu dönüşümü

$$S_3\left[\psi(x,y,t)\right] = uvwF(u,v,w) \tag{5.6}$$

şeklindedir (Kılıçman ve Gadain, 2010).

İspat:

Üç katlı integralin üç katlı Laplace dönüşümü

$$L_3\left[\psi(x,y,t)\right] = \frac{G(p,q,s)}{pqs}$$

şeklindedir.

Üç katlı Sumudu dönüşümü ile üç katlı Laplace dönüşümünün arasındaki ilişkiden

$$S_3\left[\psi(x,y,t)\right] = \frac{G\left(\frac{1}{u},\frac{1}{v},\frac{1}{w}\right)}{uvw} = uvwF(u,v,w)$$

elde edilir (Kılıçman ve Gadain, 2010).

5.7. Üç Katlı Sumudu Dönüşümünün Uygulamaları

Bu kısımda, Mousa ve Elzaki'nin 2019 daki çalışmalarında ele aldıkları üç örnek burada üç katlı Sumudu dönüşümüyle çözülecektir.

Örnek 5.7.1. Başlangıç koşulları

$f(x,y,0) = x,\ f(x,0,t) = x\cos t,\ f(0,y,t) = 0,\ f(0,0,t) = 0,\ f(x,0,0) = 0,\ f(0,y,0) = 0$ ve $f(0,0,0) = 0$

olan Volterra integro-diferensiyel denklemi

$$\frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial x \partial y \partial t} + f(x,y,t) = x\cos t - \frac{x^2 y \sin t}{2} + \int_0^x \int_0^y \int_0^t f(k,r,s)\,dk\,dr\,ds \qquad (5.7)$$

şeklinde verilsin.

Çözüm :

Verilen denklemin iki tarafına üç katlı Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S_3\left[\frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial x\partial y\partial t}+f(x,y,t)\right]=S_3\left[x\cos t-\frac{x^2 y\sin t}{2}+\int_0^x\int_0^y\int_0^t f(k,r,s)\,dkdrds\right]$$

elde edilir. Başlangıç koşullarından,

$$F(u,v,0)=u,\ F(u,0,w)=\frac{u}{1+w^2},\ F(0,v,w)=0\ ,\ F(0,0,w)=0\ ,\ F(u,0,0)=0\ ,\ F(0,v,0)=0$$

ve $F(0,0,0)=0$

ifadelerini denklemde yazarsak

$$\frac{1}{uvw}\left[F(u,v,w)-u-\frac{u}{1+w^2}+u\right]+F(u,v,w)=\frac{u}{1+w^2}-\frac{2u^2vw}{2(1+w^2)}+uvwF(u,v,w)$$

$$\frac{1}{uvw}\left[F(u,v,w)-\frac{u}{1+w^2}\right]+F(u,v,w)-uvwF(u,v,w)=\frac{u}{1+w^2}-\frac{2u^2vw}{2(1+w^2)}$$

$$F(u,v,w)\left[\frac{1}{uvw}+1-uvw\right]=\frac{u}{uvw(1+w^2)}+\frac{u}{1+w^2}-\frac{u^2vw}{(1+w^2)}$$

$$F(u,v,w)\left[\frac{1}{uvw}+1-uvw\right]=\frac{u}{1+w^2}\left[\frac{1}{uvw}+1-uvw\right]$$

$$F(u,v,w)=\frac{u}{1+w^2}$$

ifadesi bulunur. Şimdi bulunan bu ifadenin üç katlı ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$f(x,y,t)=x\cos t$$

ifadesi elde edilir ki bu da verilen denklemin çözümüdür.

Örnek 5.7.2. Başlangıç koşulları

$$f(x,y,0)=0,\ f(x,0,t)=0,\ f(0,y,t)=0$$

olan Volterra integro-diferensiyel denklemi

$$\frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial x\partial y\partial t}+f(x,y,t)=xyt+1-\frac{x^2y^2t^2}{8}+\int_0^x\int_0^y\int_0^t f(k,r,s)\,dkdrds \tag{5.8}$$

şeklinde verilsin.

Çözüm :

Verilen denklemin iki tarafına üç katlı Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S_3\left[\frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial x\partial y\partial t}+f(x,y,t)\right]=S_3\left[xyt+1-\frac{x^2y^2t^2}{8}+\int_0^x\int_0^y\int_0^t f(k,r,s)\,dkdrds\right]$$

ifadesi bulunur. Başlangıç koşullarından,

$$F(u,v,0)=0,\ F(u,0,w)=0,\ F(0,v,w)=0$$

ifadelerini denklemde yazarsak

$$\frac{1}{uvw}F(u,v,w)+F(u,v,w)=uvw+1-\frac{2!2!2!u^2v^2w^2}{8}+uvwF(u,v,w)$$

$$\frac{1}{uvw}F(u,v,w)+F(u,v,w)-uvwF(u,v,w)=uvw+1-u^2v^2w^2$$

$$F(u,v,w)\left[\frac{1}{uvw}+1-uvw\right]=uvw+1-u^2v^2w^2$$

$$F(u,v,w)\left[\frac{1}{uvw}+1-uvw\right]=uvw\left[\frac{1}{uvw}+1-uvw\right]$$

$$F(u,v,w)=uvw$$

bulunur. Şimdi bulunan bu ifadenin üç katlı ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$f(x,y,t)=xyt$$

ifadesi elde edilir ki bu da verilen denklemin çözümüdür.

Örnek 5.7.3. Başlangıç koşulları

$$f(x,y,0)=x+y,\ f(x,0,t)=x+t,\ f(0,y,t)=y+t,\ f(0,0,t)=t,\ f(x,0,0)=x,\ f(0,y,0)=y$$

ve $f(0,0,0)=0$

olan Volterra integro-diferensiyel denklemi

$$\frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial x\partial y\partial t}+f(x,y,t)=\frac{x^2yt}{2}+\frac{xy^2t}{2}+\frac{xyt^2}{2}+x+y+t-\int_0^x\int_0^y\int_0^t f(k,r,s)\,dkdrds \qquad (5.9)$$

şeklinde verilsin.

Çözüm :

Verilen denklemin iki tarafına üç katlı Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$S_3\left[\frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial x\partial y\partial t}+f(x,y,t)\right]=S_3\left[\frac{x^2yt}{2}+\frac{xy^2t}{2}+\frac{xyt^2}{2}+x+y+t-\int_0^x\int_0^y\int_0^t f(k,r,s)\,dkdrds\right]$$

olur. Başlangıç koşullarından,

$$F(u,v,0)=u+v,\ F(u,0,w)=u+w,\ F(0,v,w)=v+w,\ F(0,0,w)=w,\ F(u,0,0)=u,$$

$F(0,v,0)=v$ ve $F(0,0,0)=0$

ifadelerini denklemde yazarsak

$$\frac{1}{uvw}\left[F(u,v,w)-u-v-w\right]+F(u,v,w)=\frac{2u^2vw}{2}+\frac{2uv^2w}{2}+\frac{2uvw^2}{2}+u+v+w-uvwF(u,v,w)$$

$$\frac{1}{uvw}F(u,v,w)+uvwF(u,v,w)+F(u,v,w)=u^2vw+uv^2w+uvw^2+u+v+w+\frac{u+v+w}{uvw}$$

$$F(u,v,w)\left[\frac{1}{uvw}+1+uvw\right]=u(uvw)+v(uvw)+w(uvw)+u+v+w+\frac{u}{uvw}+\frac{v}{uvw}+\frac{w}{uvw}$$

$$F(u,v,w)\left[\frac{1}{uvw}+1+uvw\right]=u\left[\frac{1}{uvw}+1+uvw\right]+v\left[\frac{1}{uvw}+1+uvw\right]+w\left[\frac{1}{uvw}+1+uvw\right]$$

$$F(u,v,w)=u+v+w$$

bulunur. Şimdi bulunan bu ifadenin üç katlı ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$f(x,y,t)=x+y+t$$

ifadesi elde edilir ki bu da verilen denklemin çözümüdür.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümüne alternatif bir metot olan Sumudu dönüşüm metodu ve özellikleri verildi. Sumudu dönüşüm metodu ile lineer ve lineer olmayan, belirli başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte verilen adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümleri elde edilebilir. Sumudu dönüşüm metodu, başlangıç koşullarıyla birlikte verilmiş olan diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için karmaşık hesaplamalara gerek kalmadan kullanılabilmektedir. Metot uygulanırken karşılaşılan denklemlerin çözümüne ulaşabilmek için ters Sumudu dönüşümleri kullanılmıştır.

Sumudu dönüşüm metodu kolay ve hızlı bir şekilde analitik çözüm vermesi bakımından önemli bir yere sahiptir. Bu metot sayesinde ele alınan adi veya kısmi diferensiyel denklemlerin eğer mevcut ise analitik çözümlerinin seri açılımları elde edilmiş olur. Tabii ki yaklaşık çözümdeki terim sayısı artırıldıkça yakınsama daha net görülmektedir. Bu sebepten dolayı Sumudu dönüşüm metodu, uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik alanlarındaki problemlerin çözümlerini elde etmek ve yapısını anlamak için oldukça elverişli yöntemlerden biridir.

Bu tez çalışmasında; son yıllarda birçok bilim adamının ilgisini çekmiş ve çok sayıda bilimsel çalışmaya konu olan Sumudu integral dönüşümü konusu ele alınmıştır. Sumudu dönüşümünün özellikleri ve diferensiyel denklemlere uygulaması verilmiştir. Ayrıca çift katlı Sumudu dönüşümü, üç katlı Sumudu dönüşümü ve özellikleri ifade ve ispat edilmiş, bu tanım ve özellikler kullanılarak doğa bilimlerinin alt dalları olan mühendislik, fizik vb. alanlarda karşılaşılan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için alternatif bir metot incelenmiştir. Yapılan çalışmada görüldüğü gibi üç katlı Sumudu dönüşümü oldukça etkili, anlaşılabilir ve uygulanabilirdir. Üç katlı Sumudu dönüşümü, kullanmak ve üzerine çalışmak isteyen kişilere yol gösterici olacak, doğa ve fen bilimleri alanında çalışma yapan bilim insanlarının elde ettiği matematiksel problemlerin tam çözümlerini bulmak için etkili bir alternatif araç haline gelecektir.

KAYNAKLAR

Adomian, G., 1994, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer.

Atangana, A., 2013, A Note on the Triple Laplace Transform and Its Applications to Some Kind of Third-Order Differential Equation, *Hindawi Publishing Corporattion Abstract And Applied Analysis* (ID 769102), 10 pages.

Belgacem, F. B. M., Karaballi, A. A. and Kalla, S. L., 2003, Analytical Investigations on The Sumudu Transform and Applications to Integral Production Equations, *Mathematical Problems in Engineering*, 103-118.

Belgacem, F. B. M., 2006, Introducing and Analyzing Deeper Sumudu Properties, *Non-linear Studies*, 13(1), 23-41.

Belgacem, F. B. M. and Karaballi, A. A., 2006, Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations and Applications, *International Journal of Stochastic Analysis*, ID 91083, 1–23.

Belgacem, F. B. M. and Silambarasan, R., 2012, Theory of Natural Transform, *Mathematics in Engineering Science and Aerospace*, 3, 99-124.

Bronson, R. ve Costa, G., 2013, Diferansiyel Denklemler, Nobel Akademik Yayıncılık.

Debnath, L. and Bhatta, D., 2007, Integral Transforms and Their Applications, Second Edition. Taylor and Francis Group, LLC.

Eltayeb, H. and Kılıçman, A., 2010, On Double Sumudu Transform and Double Laplace Transform, *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 4, 17-30.

Eltayeb, H. and Kılıçman, A., 2012, Application of Sumudu Decomposition Method to Solve Nonlinear System of Partial Differential Equation, *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, ID 412948*, 13 pages.

Eltayeb, H. and Abdeldaim, E., 2017, Sumudu Decomposition Method for Solving Fractional Delay Differential Equations, *Research in Applied Mathematics*, 1, *ID 101268*, 13 pages.

Elzaki, T. M. and Hilal, E. M. A., 2012, Solution of Telegraph Equation by Modified of Double Sumudu Transform "Elzaki Transform, *Mathematical Theory and Modeling*, 2, No. 4, 95-103.

Goswami, P. and Alqahtani, R. T., 2016, Solution of Fractional Differential Equations by Sumudu Transform and Variational Iteration Method, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 1944–1951.

Kılıçman, A. and Gadain, H. E., 2010, On The Applications of Laplace and Sumudu Transforms, *Journal of the Franklin Institute*, 347, 848-862.

Mechee, M. S. and Naeemah, A. J., 2020, A Study of Triple Sumudu Transform for Solving Partial Differential Equations with Some Applications, *Multidisciplinary European Academic Journal*, Vol. 2.

Mousa, A. and Elzaki, T. M., 2019, Solution of Volterra Integro-Differential Equations By Triple Laplace Transform, *Irish Interdisciplinary Journal of Science & Research (Quarterly International Journal)*, 3(4), 67-72.

Tchuenche, J. M. and Mbare, N. S., 2007, An Application of The Double Sumudu Transform, *Applied Mathematical Sciences*, 1, 31-39.

Watugala, G. K., 1993, Sumudu Transform: A New Integral Transform to Solve Differential Equation and Control Engineering Problems, *International Journal of mathematical Education in Science and Technology*, 24, 35-43.

Watugala, G. K., 1998, Sumudu Transform-A New Integral Transform to Solve Differential Equations and Control Engineering Problems, *Mathematical Engineering in Industry*, 6, 319-329.

Weerakoon, S., 1994, Application of Sumudu Transform to Partial Differential Equation, *International Journal of mathematical Education in Science and Technology*, 25, 277-283.

Weerakoon, S., 1997, The Sumudu Transform and The Laplace Transform-Reply, *International Journal of mathematical Education in Science and Technology*, 28, 159-160.

Weerakoon, S., 1998, Complex Inversion Formula for Sumudu Transform, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29, 618-621.