LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ PARABOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

TUĞRUL CÖMERT

ARALIK 2022

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ PARABOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

TUĞRUL CÖMERT

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

ARALIK 2022

DİYARBAKIR

LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ PARABOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

Tuğrul CÖMERT tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü** _____

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Danışman, **Matematik Bölümü** _____

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Hasan BULUT **(*)**
Matematik Bölümü, Fırat Üniversitesi _____

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN **(**)**
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi _____

Prof. Dr. Alaattin ESEN
Matematik Bölümü, İnönü Üniversitesi _____

Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi _____

Dr. Öğr. Üyesi Muhammet Ali ARSERİM
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Dicle Üniversitesi _____

ONAY

Savunma Tarihi: 21 / 12 / 2022

(*) Sınav Jürisi kısmının birinci satırına Jüri Başkanının bilgilerini yazınız.
(**) Sınav Jürisi kısmının ikinci satırına Tez Danışmanının bilgilerini yazınız.

Aileme…

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılayıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Tuğrul CÖMERT

İmza: …….

TEŞEKKÜR

Öncelikle danışmanım Prof. Dr. Erhan PİŞKİN hocama çalışmanın daha fikir aşamasından tezin oluşumuna kadar gösterdikleri destek ve sabırdan dolayı teşekkür ederim. Jüri üyelerime de bu tezin daha nitelikli bir hale gelmesi için yaptıkları öneri ve eleştiri için teşekkür ederim.

En kıymetlisi, bu zorlu süreçte hep yanımda olan, desteklerini esirgemeyen ve beni motive eden aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR v

İÇİNDEKİLER vi

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ viii

ÖZET ix

ABSTRACT x

1. GİRİŞ 1

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 2

3. ÖN BİLGİLER 6

3.1 Yakınsaklık 6

3.2 Lebesgue Uzayı 8

3.3 Sobolev Uzayı 8

3.4 Bazı Önemli Eşitlikler ve Eşitsizlikler 9

3.5 Çözümlerin Üstel Büyümesi 11

3.6 Genelleştirilmiş Komornik Lemması 12

3.7 Faedo-Galerkin Metodu 13

3.6 Potansiyel Kuyu Metodu 13

4. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ KİRCHHOFF TİPLİ PARABOLİK DENKLEM 15

4.1 Giriş 15

4.2 Lokal Varlık 21

4.3 Global Varlık ve Üstel Azalma 27

4.4 Patlama 32

5. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ p-BİHARMONİC PARABOLİK DENKLEM 36

5.1 Giriş 37

5.2 Global Varlık ve Polinomal Azalma 40

6. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ YÜKSEK MERTEBEDEN PARABOLİK DENKLEM 46
6.1 Giriş 47
6.2 Global Varlık ve Üstel Azalma 49
6.3 Üstel Büyüme (Sonsuzdaki Patlama) 55
6.4 Patlama 58
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 64
KAYNAKLAR 65
ÖZGEÇMİŞ 69

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
R^n	n-boyutlu Euclid Uzayı
Ω	R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	p. mertebeden Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev Uzayı
$H^m(\Omega)$	Hilbert Uzayı
∇	Nabla operatörü (Gradiyent)
Δ	Laplace operatörü

ÖZET

LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ PARABOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

Cömert, Tuğrul
Doktora, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Erhan Pişkin
Aralık 2022, 79 sayfa

Kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili 19. ve 20. yüzyılda yapılan çalışmalarda bir yandan kısmi diferansiyel denklemlerin matematiğin diğer dallarıyla ilişkisi araştırılırken diğer yandan mühendislik ve diğer uygulamalı bilimler ile olan bağlantısı ortaya konmaya çalışılmıştır. Bu nedenle bu tipten denklemlerin çalışılması sadece problemlerin teorik olarak çözümlerinin ortaya konmasını değil aynı zamanda matematiksel modellemesi yapılan birçok mühendislik, kimya, fizik vb. olayların çalışılmasına da zemin hazırlamaktadır. Doğada karşılaşılan olaylar matematiksel olarak birer problem teşkil etmektedir. Bu problemlere bir yaklaşım olarak matematiksel modeller oluşturmak teorik açıdan bilimin gelişmesine katkı sağlayacaktır. Doğadaki olayların matematiksel olarak ifade edilebilmesi ve anlaşılması için öne sürülen modeller genellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin her zaman açık çözümü bulunamayabilir. Çözümü bulunamayan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerde yaklaşık bir çözüm bulmak veya çözümün davranışıyla ilgili bir fikre sahip olmak için denklemin bazı şartlar ile sınırlandırılması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu problemlerde tam olarak çözüm bulunamasa da hangi şartlar altında ve hangi zamanda çözümün var olup olmadığının araştırılması matematikte önemli bir çalışma alanı oluşturmaktadır. Bu tezin ilk bölümünde mühendislik ve fen gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan evolüsyon denklemlere kısaca değinilmiştir. İkinci bölümünde logaritmik kaynak terimli denklemlerle ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmaların tarihi gelişimi ele alınmıştır. Üçüncü bölümünde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, lemma, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümünde logaritmik kaynak terimli Kirchhoff tipli parabolik denklem çözümlerinin lokal varlığı, global varlığı, üstel azalması ve patlaması çalışılmıştır. Beşinci bölümünde logaritmik kaynak terimli p-biharmonik parabolik denklem çözümlerinin global varlığı ve polinomal azalması çalışılmıştır. Altıncı bölümünde logaritmik kaynak terimli yüksek mertebeden parabolik denklem çözümlerinin global varlığı, üstel azalması, sonsuzdaki patlaması ve sonlu zamanda patlaması çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Logaritmik kaynak terim, Parabolik denklem, Varlık-teklik, Enerji azalması, Patlama.

ABSTRACT

MATHEMATICAL BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF PARABOLIC TYPE EQUATIONS WITH LOGARITHMIC SOURCE TERMS

Cömert, Tuğrul
PhD in Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Erhan Pişkin
December 2022, 79 pages

In the 19th and 20th century studies on partial differential equations, on the one hand, the relationship of partial differential equations with other branches of mathematics was investigated, on the other hand, its connection with engineering and other applied sciences was tried to be revealed. For this reason, the study of this type of equations not only helps to reveal the theoretical solutions of the problems, but also to many engineering, chemical, physics, etc. mathematical modeling. It also lays the groundwork for the study of events. Events encountered in nature pose a mathematical problem. Creating mathematical models as an approach to these problems will contribute to the development of science in theory. Models proposed for expressing and understanding the phenomena in nature mathematically are generally based on nonlinear partial differential equations. Explicit solutions of nonlinear partial differential equations may not always be found. In order to find an approximate solution or to have an idea about the behavior of the solution in nonlinear partial differential equations whose solution cannot be found, it has become necessary to limit the equation to some conditions. Although there is no exact solution to these problems, investigating under what conditions and at what time a solution exists or not constitutes an important field of study in mathematics. In the first part of this thesis, the evolution equations that emerged in applied sciences such as engineering and science are briefly mentioned. In the second part, the historical development of the studies on the equations with logarithmic source terms is discussed. In the third chapter, the basic definition, lemma, theorem and inequalities that will be used throughout the thesis are given. In the fourth chapter, local existence, global existence, exponential decay and blow up of Kirchhoff type parabolic equation solutions with logarithmic source terms are studied. In the fifth chapter, the global existence and polynomial decay of p-biharmonic parabolic equation solutions with logarithmic source terms are studied. In the sixth chapter, the global existence, exponential decay, blow up at infinity and blow up at finite time of higher order parabolic equation solutions with logarithmic source term are studied.

Keywords: Logarithmic source term, Parabolic equation, Existence-uniqueness, Decay, Blow up.

1. GİRİŞ

Bağımsız değişkenlerden biri zaman (t) olan kısmi türevli denklemlere evolüsyon denklemler denir. Evolüsyon denklemler genellikle parobolik tipten ve hiperbolik tipten denklemler olarak ikiye ayrılır. Bu denklemler sadece matematiğin değil, aynı zamanda fizik, mekanik ve mühendislik bilimi gibi diğer bilim dallarında da büyük önem taşımaktadır. Örneğin, kuantum mekaniğinden doğrusal olmayan Klein-Gorden denklemleri ve lineer olmayan Kirchhoff denklemleri, ısı transferi ve biyolojik bilimlerden lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklemleri, akışkanlar mekaniğinden Navier-Stokes ve Euler denklemleri bu tip özel denklemlerdir.

1960'lardan bu yana, çözümlerin global varlığı sorusuna çok daha fazla dikkat edildi. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bildiğimiz gibi, doğrusal ve doğrusal olmayan denklemler arasında önemli bir fark vardır. Doğrusal bir adi diferansiyel denklem için, çoğu zaman tüm $t > 0$ için global olarak tanımlanmış bir çözüm bulabiliriz, ancak doğrusal olmayan bir denklem için bu her zaman mümkün değildir. Bu, adi diferansiyel denklemlerden açıkça daha karmaşık olan doğrusal olmayan evolüsyon denklemleri için de geçerlidir.

Evolüsyon denklemlerinde global varlığı ve tekliği kanıtlamak için önemli bir yöntem, lokal varlık ve teklik sonucunu kestirimlerle birleştirmektir. Lokal varlık sonucu şu şekilde elde edilebilir: Önce doğrusallaştırılmış problem çözülür, daha sonra bu doğrusallaştırılmış problem kullanılarak orijinal problem sabit nokta problemine dönüştürülür. Son olarak, uygun bir sabit nokta teoremi sonucu verecektir. Bu tür sonuçlar lokaldir, çünkü sabit nokta teoremleri genellikle küçük zaman aralıkları için çalışır. Doğrusal olmayan problemin özel yapısından yararlanılması gerektiğinden, çözümlerin global varlığı için kestirimler elde etmek genellikle ispatta ayrı bir adımdır. Yukarıdaki şemanın tipik bir örneği, adi diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremidir.

Kısmi diferansiyel denklem için verilen bir problemin çözümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa iyi konulmuş problem olarak adlandırılır:

- çözümü var;
- bu çözüm tek; ve

• çözüm, sürekli olarak problemde verilen verilere bağlıdır.

Başlangıç-sınır koşulları ile verilen bir kısmi diferansiyel denklemi çözmek için, yukarıdaki üç koşulun sağlandığını göstermeyi amaçlıyoruz. Başka bir deyişle, bir çözüm için, denklemde yer alan tüm türevlerin var olmasını ve tanım kümesinin her noktasında başlangıç-sınır koşullarıyla denklemi sağlamasını isteriz. Böyle bir çözüme klasik çözüm denir. Isı denklemi gibi belirli kısmi diferansiyel denklemler klasik anlamda çözülebilir; ama eğer koruma yasalarını incelemek ve temeldeki fiziği kurtarmak istiyorsak, sürekli türevlenemeyen ve hatta sürekli olmayan çözümlere ihtiyaç duymaktayız. Korunum yasalarında olduğu gibi, bazı denklemler daha zayıf formlarda tanımlanabilir ve yeterince düzgün olmayan fonksiyonlarla karşılanabilir. Ayrıca, düzgün başlayan bir çözüm, şok dalgalarında olduğu gibi sonunda tekil hale gelebilir. Bu zorluğun üstesinden gelmek için genelleştirilmiş veya zayıf çözümlere ihtiyaç duymaktayız.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Fizik ve mühendislikte bazı olayların modellenmesi ile logaritmik kaynak terimli denklemler ortaya çıkmıştır. Logaritmik kaynak terime sahip denklemler özellikle nükleer fizik, kuantum mekaniği, optik, enflasyon kozmolojisi ve süpersimetrik alan teorileri gibi fiziğin birçok alanında kullanılmaktadır. Günümüze kadar bu alanda araştırmalar ve çalışmalar yapılmaktadır. Ayrıca literatür araştırması yapıldığında hala çok sayıda açık problem bulunduğu gözlemlenmektedir. Buradan yola çıkarak tezde logaritmik kaynak terime sahip denklemleri ele aldık. Tezin dördüncü, beşinci ve altıncı bölümü özgün problemlerden oluşmaktadır.

Tezin dördüncü bölümünde

$$u_t - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \Delta u_t = |u|^{q-2}\, u \ln |u|$$

logaritmik kaynak terime sahip Kirchhoff denklemini ele aldık. Potansiyel derinlik metodu kullanarak bu denklemin çözümlerinin lokal varlığını, global varlığını ve sonlu zamanda patlamasına çalıştık. Tezin beşinci bölümünde

$$u_t + \Delta\left(|\Delta u|^{p-2}\,\Delta u\right) - \Delta u_t = u\,|u|^{q-2} \ln |u|$$

logaritmik kaynak terime sahip p-biharmonik denkleminin logaritmik Sobolev eşitsizliği ve potansiyel derinlik metodu kullanarak çözümlerinin global varlığını ve polinomal azalmasını çalıştık. Tezin altıncı bölümünde

$$u_t + (-\Delta)^m u = u^{r-2} u \ln |u| \tag{2.1}$$

logaritmik kaynak terime sahip yüksek mertebeden parabolik denklemin global varlığı, üstel azalması ve $r = 2$ iken sonsuzdaki patlamasını inceledik. Ayrıca, (2.1) denklemine $-\Delta u_t$ ekleyerek sonlu zamanda patlamasını inceledik.

Şimdi logaritmik kaynak terimli parabolik denklemlerle ilgili daha önce yapılmış çalışmaları ele alalım.

Chen vd., (2015)

$$u_t - \Delta u = u \ln |u|$$

logaritmik kaynak terime sahip yarı lineer parabolik denkleminin çözümlerinin global varlığı, enerji azalması ve sonsuzda patlamasına çalıştılar.

Chen ve Tian (2015)

$$u_t - \Delta u - \Delta u_t = u \ln |u|$$

logaritmik kaynak terime sahip yarı lineer parabolik denkleminin çözümlerinin global varlığına ve sonsuzda patlamasına çalıştılar.

Nhan ve Truong (2017)

$$u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = |u|^{p-2} u \ln |u|$$

logaritmik kaynak terime sahip denklemin global zayıf çözümlerinin varlığı ya da yokluğu ile ilgili sonuçlar elde ettiler.

Cao ve Liu (2018)

$$u_t - k\Delta u_t - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = |u|^{p-2} u \ln |u|$$

logaritmik kaynak terime sahip lineer olmayan evolüsyon denklemin başlangıç sınır değer probleminin global zayıf çözümlerinin varlığına çalıştılar.

Li ve Liu (2018)

$$u_t + \Delta^2 u = |u|^{p-2} u \ln |u|$$

logaritmik kaynak terime sahip parabolik denklemin çözümlerinin global varlığına ve sonlu zamanda patlamasına çalıştılar.

Peng ve Zhou (2019)

$$u_t - \Delta u = |u|^{p-2} u \ln |u|$$

logaritmik kaynak terime sahip yarı lineer ısı denkleminin çözümlerinin global varlığına ve sonlu zamanda patlamasına çalıştılar. Ayrıca, patlama zamanının üst sınırının uygun koşullar altında gösterdiler.

Wang ve Liu (2019)

$$u_t + \Delta\left(|\Delta u|^{p-2}\,\Delta u\right) = |u|^{q-2}\,u\ln|u|$$

logaritmik kaynak terime sahip p-biharmonic denklemin çözümlerinin lokal varlığını, global varlığını ve sonlu zamanda patlamasına çalıştılar.

Ayrıca, bazı yazarlar parabolik tipten denklemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği, patlaması ve enerji azalması ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir (Galaktionov, 2003; Ishige, vd., 2020; Xiao ve Li, 2021; Ye, 2010; Zhou, 2012).

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, önce fonksiyonel analiz ve diferansiyel denklemler ile ilgili bazı önemli tanımlar verilecek, sonrasında Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı ve bazı önemli eşitlikler ve eşitsizliklere değinilecektir (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Pişkin, 2013; Pişkin, 2017; Pişkin, 2018; Polat, 2005).

3.1. Yakınsaklık

Tanım 3.1.1. $(a_n), (V, \|.\|)$ normlu uzayına ait bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\forall n, m \geq N_\varepsilon$ olduğunda

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε na bağlı en az bir N_ε doğal sayısı varsa (a_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.1.2. (a_n) , $(V, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$$

olacak şekilde bir $a \in V$ varsa (a_n) dizisine yakınsaktır denir ve $a_n \to a$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.3. Bir V normlu uzayında her Cauchy dizisi V uzayının bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya tam uzay denir. $(V, \|.\|)$ uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 3.1.4. V vektör uzayı üzerinde tanımlanmış iki norm $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $K > 0$, $L > 0$ pozitif sabitleri için

$$K \|a\|_1 \leq \|a\|_2 \leq L \|a\|_1$$

eşitsizliği V uzayındaki her a noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına *denk normlar* denir.

Tanım 3.1.5. Bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayın bir öğesine yakınsak ise bu uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 3.1.6. V bir normlu uzay olsun. V üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi V uzayının *dual uzayını* oluşturur. V' veya V^* ile gösterilen bu uzay

$$\|f\|_{V'} = \sup_{a\in V, a\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|a\|_V} < \infty$$

normuyla bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.1.7. V normlu uzayına ait bir dizi (a_n) olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - a\|_V = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $a \in V$ varsa (a_n) dizisine *güçlü yakınsak* dizi denir ve bu yakınsama $a_n \to a$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.8. (a_n), V normlu uzayında bir dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \to f(a), \quad \forall f \in V'$$

sağlayan bir $a \in V$ varsa (a_n) dizisine *zayıf yakınsak dizi* denir. Bu yakınsama $a_n \rightharpoonup a$ veya $a_n \xrightarrow{z} a$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.9.

(a) V normlu uzayında sınırlı lineer fonksiyonellerin bir dizisi (f_n) olmak üzere

$$\|f_n - f\| \to 0$$

sağlayan bir $f \in V'$ varsa (f_n) dizisine *güçlü yakınsaktır* denir ve $f_n \to f$ ile gösterilir.

(b) Her $a \in V$ için

$$f_n(x) \to f(x)$$

sağlayan bir $f \in V'$ varsa (f_n) dizisine *zayıf* yakınsaktır* denir ve $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde gösterilir.

3.2. Lebesgue Uzayı $(L^p(\Omega))$

Tanım 3.2.1. Ω, R^n de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ω bölgesinde tanımlı tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının sınıfı

$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$

koşulunu sağlıyorsa $L^p(\Omega)$ *uzayı* olarak adlandırılır. Böylece, bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Teorem 3.2.2 (Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi). h, Ω bölgesi üzerinde integrallenebilir fonksiyon ve $\{g_n\}$, Ω bölgesi üzerinde $|g_n| \leq h$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Hemen hemen her yerde $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ ise

$$\int_\Omega g dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n dx$$

dir.

Tanım 3.2.3. V_1 ve V_2 normlu iki uzay olsun. Eğer
(i) V_1 uzayının tüm elemanları V_2 uzayında ise ve
(ii) α dan bağımsız bir β sabiti ve her $a \in V_1$ için

$\|a\|_{V_2} \leq \beta \|a\|_{V_1}$

oluyorsa V_1 uzayı V_2 uzayına gömülür denir ve $V_1 \hookrightarrow V_2$ şeklinde gösterilir.

3.3. Sobolev Uzayı $(W^{m,p}(\Omega))$

Tanım 3.3.1. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. *zayıf türevi* denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^{\alpha}u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^{\alpha}u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Tabii ki $D^{\alpha}u$, sadece klasik anlamda değil zayıf anlamda da olabilir.

Tanım 3.3.2. Ω, R^n de bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. Bu uzay $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L_{\infty}(\Omega)}$$

normları ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir. Açıkça görülür ki $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır ve $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır. m herhangi bir pozitif tamsayısı olmak üzere

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

3.4. Bazı Önemli Eşitlikler ve Eşitsizlikler

Lemma 3.4.1 (Cauchy eşitsizliği). $a, b \in R$ ve $\varepsilon > 0$ ise

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.4.2 (Young eşitsizliği). $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\varepsilon > 0$ ve $m, n \in R$ ise

$$|mn| \leq \frac{|m|^p}{p} + \frac{|n|^q}{q}$$

eşitsizliği ya da

$$|mn| \leq \varepsilon m^p + C(\varepsilon) n^q$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.4.3 (**Hölder eşitsizliği**). $p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u \in L^p(\Omega)$ ve $v \in L^q(\Omega)$ ise $uv \in L^1(\Omega)$ uzayının elemanı olup

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca, $p = q = 2$ olduğunda bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği adı verilir.

Lemma 3.4.4 (**Minkowski eşitsizliği**). $u, v \in L^p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olsun. O halde

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.4.5 (İnterpolasyon eşitsizliği). $0 < \lambda < 1$ ve $1 \leq p \leq q \leq r$ için $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ olmak üzere $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ise $u \in L^q(\Omega)$ uzayının elamanı olur ve bu da

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L^r(\Omega)}$$

şeklinde sağlanabilir.

Lemma 3.4.6 $u \in H_0^1(\Omega)$, $p \geq 1$ ve $r \geq 1$ için

$$\|u\|_q \leq C \|\nabla u\|_p^{\theta} \|u\|_r^{1-\theta}$$

eşitsizliği vardır. Burada

$$\theta = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$$

ve $p \geq n = 1$ için $r \leq q \leq \infty$; $n > 1$;

$p < n$ için, eğer $r < p_*$ ise $q \in [r, p_*]$, eğer $r \geq p_*$ ise $q \in [p_*, r]$;

$p = n > 1$ için $r \leq q \leq \infty$;

$p > n > 1$ için $r \leq q \leq \infty$ dir.

Burada C sabiti n, p, q ve r ye bağlıdır (Ladyzhenskaya, 1967).

Lemma 3.4.7 (Green özdeşliği). $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ olsun. O halde

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

şeklinde yazılabilir. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n\nabla u$ dır.

Lemma 3.4.8 (Logaritmik Sobolev eşitsizliği). $u \in H^1(\Omega)$ ve μ herhangi bir pozitif sayı olmak üzere

$$p\int_\Omega |u(x)|^p \ln\left(\frac{|u(x)|}{\|u(x)\|_{L^p(\Omega)}}\right) dx + \frac{n}{p}\ln\left(\frac{p\mu e}{n\mathcal{L}_p}\right)\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \leq \mu \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\, dx \tag{3.4.8.1}$$

dir ve

$$\mathcal{L}_p = \frac{p}{n}\left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1} \pi^{-\frac{p}{2}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\frac{p-1}{p}+1\right)}\right]^{\frac{p}{n}}$$

olarak tanımlanır (Chen vd., 2015; Gross, 1975).

Lemma 3.4.9 (Poincare eşitsizliği).

$$\begin{cases} 2 \leq r < \infty, & n \leq 2m, \\ 2 \leq r \leq \frac{2n}{n-2m}, & n > 2m \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\forall u \in H_0^m(\Omega)$ için

$$\|u\|_r \leq C \left\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u\right\|$$

dir.

3.5. Çözümlerin Üstel Büyümesi (Logaritmik Konvekslik)

Çözümlerin patlama olayı sonlu zamanda çözümlerin sonsuza ıraksaması ($t \to T^-$ iken $v \to \infty$) genel kanı olmasına rağmen bazı olaylarda çözümler sonsuz zamanda sonsuza ıraksayabilir ($t \to \infty$ iken $v \to \infty$). İlk durum çözümlerin sonlu bir zamanda patlamasını, ikinci durum ise çözümlerin üstel büyümesi ya da sonsuzdaki

patlama olarak adlandırılır. Logaritmik konvekslik metodu çözümlerin sonsuzdaki patlaması ile ilgili kullanılan metotlardan biridir. Burada metodu kullanırken konkavlık metodundaki

$$\eta''(t)\,\eta(t) \geq (1+\beta)\,(\eta'(t))^2 \tag{3.5.1}$$

ifadesinde $\beta \to 0$ için limiti olarak yorumlanabilir. Böylece, (3.5.1) eşitsizliği

$$\eta''(t)\,\eta(t) \geq (\eta'(t))^2 \tag{3.5.2}$$

şeklinde yazılabilir. $\eta(t) > 0$ için (3.5.2) eşitsizliğinin her iki tarafı $\eta^2(t)$ ile bölünürse

$$\frac{\eta''(t)\,\eta(t)}{\eta^2(t)} \geq \frac{(\eta'(t))^2}{\eta^2(t)}$$

ve buradan düzenlenirse

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\ln \eta(t)\right] \geq 0 \tag{3.5.3}$$

şeklinde bulunur. Böylece, $\eta(t)$ nin t ye bağlı logaritmik konveks bir fonksiyon olduğu gözlemlenir. (3.5.3) deki ifadenin integrali alınırsa $(0,t)$ aralığında

$$\eta(t) \geq \eta(0)\, e^{\frac{\eta'(0)t}{\eta(0)}}$$

ifadesi elde edilir. Son olarak $t \to \infty$ için limit alınırsa $\eta(t) \to \infty$ olur (Straughan, 1998; Pişkin, 2021).

3.6. Genelleştirilmiş Komornik Lemması

$f : R^+ \to R^+$ artmayan fonksiyon ve σ negatif olmayan sabit bir sayı olsun, öyle ki

$$\int_t^{+\infty} f^{1+\sigma}(s)ds \leq \frac{1}{\omega} f^{\sigma}(0) f(t), \quad \forall t \geq 0$$

dir. Burada $t \geq 0$ için

(a) $\sigma = 0$ olduğunada $f(t) \leq f(0)e^{1-\omega t}$ olur,

(b) $\sigma > 0$ olduğunda $f(t) \leq f(0)\left(\frac{1+\sigma}{1+\omega\sigma t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ olur (Martinez, 1999).

3.7. Faedo-Galerkin Metodu

Bu metot çözümlerin varlığının ispatında kullanılan önemli metotlardan biridir. Ayrılabilir bir V Hilbert uzayında tanımlı bir fonksiyon uzayında, bir (P) probleminin çözümlerinin varlığını bulmak isteyelim. Bu (P) probleminin tek bir çözümü u olsun. V nin bir V_n Galerkin yaklaşımını seçtikten sonra, sonlu boyutlu (V_n) uzayında, tek bir (u_n) çözümüne sahip yaklaşık bir (P_n) probleminin tanımlanması gereklidir. Daha sonra aşağıdaki adımlar uygulanır:

Adım 1: (P_n) probleminin çözümü u_n olsun.

Adım 2: u_n nin düzgün sınırlı olduğunu göstermek için u_n üzerinde kestirimler oluştururuz.

Adım 3: u_n nin düzgün sınırlı olmasından dolayı, 2. adımdaki kestirimleri içeren uzayın zayıf topolojisinde, bir limite sahip, $\{u_n\}_{n\in N^*}$ dizisinin bir $\{u_n'\}_{n\in N^*}$ alt dizisini seçmek mümkündür. Elde edilen limit u olsun.

Adım 4: (P) probleminin çözümünün u olduğunu gösteririz.

Adım 5: Böylece, güçlü yakınsaklık sonuçları elde edilir.

Yaklaşım sürecinin oluşturulmasının esas amacı, bir çözümün varlığının elde edilmesini sağlamaktır, bu süreç $u_n(x,t)$ ya, $(x,t)\in\Omega\times[0;T]$ için

$$u_n(x,t)=\sum_{i=1}^{n} r_{in}(t)\,w_i$$

olacak şekilde w_i tabanlarının fonksiyonlarının doğrusal bir kombinasyonu olarak yaklaşmaya tekabül eder. Başka bir deyişle, bir problem için yaklaşık bir problem tanımlanır. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, ele alınan yaklaşık sistemin, doğrusal olmayan terimleri düzgün olduğundan Zorn Lemması kullanılarak maksimal bir $[0,t_m)$ aralığına genişletilecek şekilde tek bir lokal çözüme sahiptir. Sonraki adım olarak bazı kestirimler elde edilir. Böylece tüm $t>0$ için tanımlı bir çözüm elde etmek için aralık $[0,t_m)$ dışına genişletilebilir (Lions, 1969).

3.8. Potansiyel Kuyu Metodu

Bu metot genel olarak denklemlerin varlığının ispatında kullanılır. Diferansiyel denklemlerin toplam enerjisi, kinetik ve potansiyel enerjinin toplamından oluşur. Potansiyel enerjinin skaler fonksiyonları bulunduğu küme boyunca incelenirse,

potansiyel enerjide çukur veya kuyu olarak adlandırabileceğimiz bir d yüksekliği olduğu görülür. d yüksekliği pozitif olduğundan, kuyuda yer alan başlangıç verilerine bağlı çözümler için, çözümün potansiyel enerjisinin kuyuyu aşamayacağı görülür. Genelde, kaynak terimden gelen enerjinin toplam enerjinin büyüklüğünün sonlu zamanda sonsuza gitmesine (patlamasına) yol açabilir. Fakat kuyunun büyük bir bölümü zamanla sınırlı olan potansiyel enerji ile sınırlı kalır. Böylece, çözümün toplam enerjisi herhangi bir zaman aralığında sınırlı kalır ve bu da global varlığını gösterir (Payne ve Sattinger, 1975; Sattinger, 1968).

4. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ KİRCHHOFF TİPLİ PARABOLİK DENKLEM

Bu bölümde

$$\begin{cases} u_t - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \Delta u_t = |u|^{q-2}\, u \ln |u|\,, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

başlangıç sınır değer problemini ele alacağız (Pişkin ve Cömert, 2020; Pişkin ve Cömert, 2022). Burada Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. $s \geq 0$ olmak üzere $M(s)$ fonksiyonunu

$$M(s) = 1 + s^{\gamma}, \ \gamma > 0$$

ve q parametresini

$$\begin{cases} 2\gamma + 2 \leq q \leq +\infty, & n = 1, 2, \\ 2\gamma + 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$$

şeklinde seçeceğiz.

4.1. Giriş

Bu kısımda teoremimizin ispatı için kullanılacak lemmalardan ve tanımdan oluşmaktadır.

Lemma 4.1.1. (4.1) probleminin enerji fonksiyoneli $J(t)$ olsun. O halde

$$\frac{d}{dt} J(t) = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 \, dx \tag{4.1.1}$$

şeklinde elde edilir.

İspat. (4.1) probleminin ilk denklemi u_t ile çarpılıp, Ω bölgesinde integral alınırsa

$$\int_{\Omega} u_t u_t dx + \int_{\Omega} M(\|\nabla u\|^2)\Delta u u_t dx - \int_{\Omega} \Delta u_t u_t dx = \int_{\Omega} |u|^{q-2}\, u \ln u u_t dx$$

elde edilir ve bu ifade de soldan ikinci ve üçüncü terimlerde Green özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2}\|u\|_q^q - \frac{1}{q}\int_{\Omega} |u|^q \ln u dx\right] \\ = \; & -\frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx \end{aligned}$$

bulunur. Burada (4.1) probleminin enerji fonksiyoneli

$$J(t) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2}\|u\|_q^q - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q \ln u dx$$

ve

$$\frac{d}{dt}J(t) = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int_0^t J'(s)ds = -\int_0^t \left[\frac{1}{2}\|\nabla u_s\|^2 + \frac{1}{2}\|u_s\|^2\right] ds$$

olur. Ayrıca $t \geq 0$ için

$$J(t) - J(u_0) = -\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds$$

dır. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

$H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ uzayında J enerji fonksiyonelini

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2}\|u\|_q^q - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q \ln|u| dx \tag{4.1.2}$$

ve Nehari fonksiyonelini

$$I(u) = \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \int_\Omega |u|^q \ln|u| dx \tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlayalım. (4.1.2) ve (4.1.3) den

$$J(u) = \frac{1}{q}I(u) + \frac{q-2}{2q}\|\nabla u\|^2 + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2}\|u\|_q^q \tag{4.1.4}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : I(u) = 0\}$$

Nehari manifoldu olsun. Ayrıca,

$$d = \inf_{u\in\mathcal{N}} J(u) \tag{4.1.5}$$

olarak tanımlayabiliriz.

Lemma 4.1.2. $\lambda > 0$ için $j : \lambda \to J(\lambda u)$ fonksiyonunu seçelim. Her $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ için

(i) $\lim_{\lambda\to 0^+} j(\lambda) = 0$ ve $\lim_{\lambda\to+\infty} j(\lambda) = -\infty$ dur;

(ii) Bir tek $\lambda^* > 0$ vardır öyle ki, $j'(\lambda^*) = 0$ dır;

(iii) $j(\lambda)$, $0 < \lambda < \lambda^*$ aralığında artan, $\lambda^* < \lambda < +\infty$ aralığında azalan ve $\lambda^* = \lambda$ noktasında maksimum değere sahiptir;

(iv) $0 < \lambda < \lambda^*$ aralığında $I(\lambda u) > 0$, $\lambda^* < \lambda < +\infty$ aralığında $I(\lambda u) < 0$ ve $\lambda^* = \lambda$ noktasında $I(\lambda^* u) = 0$ dır.

İspat. $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ için $j(\lambda)$ fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned} j(\lambda) &= \frac{1}{2}\|\nabla(\lambda u)\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla(\lambda u)\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \frac{1}{q^2}\|\lambda u\|_q^q - \frac{1}{q}\int_\Omega |\lambda u|^q \ln|\lambda u|\, dx \\ &= \frac{\lambda^2}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{\lambda^{2(\gamma+1)}}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{\lambda^q}{q^2}\|u\|_q^q \\ &\quad - \frac{\lambda^q}{q}\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx - \frac{\lambda^q}{q}\int_\Omega |u|^q \ln\lambda dx \\ &= \frac{\lambda^2}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{\lambda^{2(\gamma+1)}}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{\lambda^q}{q^2}\|u\|_q^q \\ &\quad - \frac{\lambda^q}{q}\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx - \frac{\lambda^q}{q}\ln\lambda\,\|u\|_q^q \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

elde edilir. $\int_\Omega |u|^q\, dx \neq 0$ olduğundan $\lim_{\lambda\to 0^+} j(\lambda) = 0$ ve $\lim_{\lambda\to+\infty} j(\lambda) = -\infty$ olduğu açıktır. $j(\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre türevini alırsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}j(\lambda) &= \lambda\|\nabla u\|^2 + \lambda^{2\gamma+1}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{\lambda^{q-1}}{q}\|u\|_q^q \\ &\quad - \lambda^{q-1}\ln\lambda\,\|u\|_q^q - \lambda^{q-1}\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx - \frac{\lambda^{q-1}}{q}\|u\|_q^q \\ &= \lambda\|\nabla u\|^2 + \lambda^{2\gamma+1}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \lambda^{q-1}\ln\lambda\,\|u\|_q^q - \lambda^{q-1}\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx \\ &= \lambda\left(\|\nabla u\|^2 + \lambda^{2\gamma}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \lambda^{q-2}\ln\lambda\,\|u\|_q^q - \lambda^{q-2}\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(\lambda) = \lambda^{-1}j'(\lambda)$ olarak seçelim. Burada

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \lambda^{-1}j'(\lambda) \\ &= \lambda^{-1}\lambda\left(\|\nabla u\|^2 + \lambda^{2\gamma}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \lambda^{q-2}\ln\lambda\,\|u\|_q^q - \lambda^{q-2}\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx\right) \\ &= \|\nabla u\|^2 + \lambda^{2\gamma}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \lambda^{q-2}\ln\lambda\,\|u\|_q^q - \lambda^{q-2}\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx \end{aligned}$$

olur. $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun λ ya göre türevini alırsak

$$\begin{aligned}\varphi'(\lambda) &= 2\gamma\lambda^{2\gamma-1}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \lambda^{q-3}\|u\|_q^q \\ &\quad -(q-2)\lambda^{q-3}\ln\lambda\|u\|_q^q - (q-2)\lambda^{q-3}\int_\Omega |u|^q \ln|u|\,dx\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan bir tek $\lambda^* > 0$ vardır öyle ki $(0,\lambda^*)$ aralığında $\varphi'(\lambda) > 0$, $(\lambda^*,+\infty)$ aralığında $\varphi'(\lambda) < 0$ ve λ^* noktasında $\varphi'(\lambda^*) = 0$ dır. Böylece, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonu $(0,\lambda^*)$ aralığında artan, $(\lambda^*,+\infty)$ aralığında azalandır. $\lim_{\lambda\to 0^+}\varphi(\lambda) = \|\nabla u\|^2 > 0$ ve $\lim_{\lambda\to+\infty}\varphi(\lambda) = -\infty$ olduğu için bir tek $\lambda^* > 0$ vardır öyle ki $\varphi(\lambda^*) = 0$ dır, yani $j'(\lambda^*) = 0$ dır. Ayrıca, $j'(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$ fonksiyonu $(0,\lambda^*)$ aralığında pozitif, $(\lambda^*,+\infty)$ aralığında negatiftir. Böylece, $j(\lambda)$ fonksiyonu $0 < \lambda < \lambda^*$ aralığında artan, $\lambda^* < \lambda < +\infty$ aralığında azalan ve $\lambda^* = \lambda$ noktasında maksimum değere sahiptir. Ayrıca, (4.1.3) ten

$$\begin{aligned}I(\lambda u) &= \|\nabla(\lambda u)\|^2 + \|\nabla(\lambda u)\|^{2(\gamma+1)} - \int_\Omega |\lambda u|^q \ln|\lambda u|\,dx \\ &= \lambda^2\|\nabla u\|^2 + \lambda^{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \lambda^q\int_\Omega |u|^q\ln\lambda dx - \lambda^q\int_\Omega |u|^q\ln|u|\,dx \\ &= \lambda^2\|\nabla u\|^2 + \lambda^{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \lambda^q\ln\lambda\|u\|_q^q - \lambda^q\int_\Omega |u|^q\ln|u|\,dx\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada λ parantezine alınırsa

$$\begin{aligned}I(\lambda u) &= \lambda\left(\lambda\|\nabla u\|^2 + \lambda^{2\gamma+1}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \lambda^{q-1}\ln\lambda\|u\|_q^q - \lambda^{q-1}\int_\Omega |u|^q\ln|u|\,dx\right) \\ &= \lambda j'(\lambda)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $0 < \lambda < \lambda^*$ aralığında $I(\lambda u) > 0$, $\lambda^* < \lambda < +\infty$ aralığında $I(\lambda u) < 0$ ve $\lambda^* = \lambda$ noktasında $I(\lambda^* u) = 0$ dır. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 4.1.3. (4.1.5) te tanımlanan d pozitiftir ve $u \in \mathcal{N}$ olacak sekilde bir pozitif fonksiyon vardır, yani $J(u) = d$ dir.

İspat. $\{u_k\}_k^\infty \subset \mathcal{N}$, J fonksiyoneli için bir alt dizisi olsun. Buradan

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = d \tag{4.1.7}$$

olur. Ayrıca $\{|u_k|\}_k \subset \mathcal{N}$ dizisi $|u_k| \in \mathcal{N}$ ve $J(|u_k|) = J(u_k)$ dan dolayı J fonksiyoneli için bir alt dizisi olduğu açıkça görülür. Bu nedenle, tüm $k \in N$ için Ω

bölgesinde olmak üzere $u_k > 0$ olduğunu varsayabiliriz. Diğer taraftan, J fonksiyonelinin $\mathcal{N}$ üzerinde olduğunu zaten gözlemledik, bu da $\{u_k\}_k^\infty$ dizisinin $H_0^1(\Omega)$ da sınırlı olduğu anlamına gelir. $\mu > 0$ yeterince küçük olsun öyle ki $q + \mu < \frac{2n}{n-2}$ olur. $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+\mu}(\Omega)$ kompakt olduğundan, bir u fonksiyonu ve $\{u_k\}_k^\infty$ nin bir alt dizisi vardır, öyle ki

$u_k \rightharpoonup u$, $H_0^1(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsak,

$u_k \to u$, $L^{q+\mu}(\Omega)$ uzayında güçlü yakınsak,

$u_k(x) \to u(x)$, Ω bölgesinde hemen hemen her yerde yakınsak

olur. Dolayısıyla, Ω bölgesinde olmak üzere $u \geq 0$ dır. İlk önce, $u \neq 0$ olduğunu kanıtlayacağız. Baskın yakınsama teoremini kullanarak

$$\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k|^q \ln|u_k|\, dx \tag{4.1.8}$$

ve

$$\int_\Omega |u|^q\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k|^q\, dx \tag{4.1.9}$$

olarak bulunur. $H_0^1(\Omega)$ in zayıf alt yarı sürekliliği ile

$$\|\nabla u\|^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|^2 \tag{4.1.10}$$

$$\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \leq \lim_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|^{2(\gamma+1)}$$

elde edilir. (4.1.2), (4.1.7), (4.1.8), (4.1.9) ve (4.1.10) dan

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2}\|u\|_q^q - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|\nabla u_k\|^2 + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u_k\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{q^2}\|u_k\|_q^q - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{q}\int_\Omega |u_k|^q \ln|u_k|\, dx \\ &= \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|\nabla u_k\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u_k\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2}\|u_k\|_q^q - \frac{1}{q}\int_\Omega |u_k|^q \ln|u_k|\, dx \right) \\ &= \liminf_{k\to\infty} J(u_k) = d \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

olur. Ayrıca, (4.1.3), (4.1.8) ve (4.1.10) dan

$$\begin{aligned} I(u) &= \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|^2 - \lim_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|^{2(\gamma+1)} - \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k|^q \ln|u_k|\, dx \\ &= \liminf_{k\to\infty} \left(\|\nabla u_k\|^2 - \|\nabla u_k\|^{2(\gamma+1)} - \int_\Omega |u_k|^q \ln|u_k|\, dx \right) \\ &= \liminf_{k\to\infty} I(u_k) = 0. \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

olduğu görülür. $u_k \in \mathcal{N}$ olduğundan $I(u_k) = 0$ dır. Buradan, $x \geq 1$ için $x^{-\mu} \ln x \leq (e\mu)^{-1}$ ifadesini ve Sobolev gömülme eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|\nabla u_k\|^2 + \|\nabla u_k\|^{2\delta+2} &= \int_\Omega |u_k|^q \ln|u_k|\, dx \\ &\leq (e\mu)^{-1} \int_\Omega |u_k|^{q+\mu}\, dx \\ &\leq (e\mu)^{-1} \|u_k\|_{q+\mu}^{q+\mu} \\ &\leq C \|\nabla u_k\|_2^{q+\mu} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada C pozitif sabittir. Buradan

$$\int_\Omega |u_k|^q \ln|u_k|\, dx = \|\nabla u_k\|^2 + \|\nabla u_k\|^{2(\gamma+1)} \geq C$$

olur. (4.1.8) ile bu eşitsizlikten

$$\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx \geq C$$

elde edilir. Böylece, $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ dir. Eğer $I(u_k) < 0$ için Lemma 4.1.2 den bir λ^* vardır öyle ki $I(\lambda^* u) = 0$ ve $0 < \lambda^* < 1$ dir. O halde, $\lambda^* u \in \mathcal{N}$ dir. (4.1.4), (4.1.5), (4.1.9) ve (4.1.10) dan

$$\begin{aligned} d &\leq J(\lambda^* u) \\ &= \frac{1}{q} I(\lambda^* u) + \frac{q-2}{2q} \|\nabla(\lambda^* u)\|^2 + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q} \|\nabla(\lambda^* u)\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2} \|\lambda^* u\|_q^q \\ &= \frac{q-2}{2q} \|\nabla(\lambda^* u)\|^2 + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q} \|\nabla(\lambda^* u)\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2} \|\lambda^* u\|_q^q \\ &= (\lambda^*)^2 \left(\frac{q-2}{2q}\right) \|\nabla u\|^2 + (\lambda^*)^{2(\gamma+1)} \left(\frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q}\right) \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + (\lambda^*)^q \left(\frac{1}{q^2}\right) \|u\|_q^q \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $(\lambda^*)^2$ parantezine alınırsa

$$\begin{aligned} d &\leq (\lambda^*)^2 \left[\frac{q-2}{2q} \|\nabla u\|^2 + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2} \|u\|_q^q \right] \\ &\leq (\lambda^*)^2 \liminf_{k\to\infty} \left[\frac{q-2}{2q} \|\nabla u\|^2 + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2} \|u\|_q^q \right] \\ &= (\lambda^*)^2 \liminf_{k\to\infty} J(u_k) \\ &= (\lambda^*)^2 d \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $d > 0$ için $\lambda^* \geq 1$ olduğunu görülür. Bu da $0 < \lambda^* < 1$ ile çelişir. O halde, (4.1.12) den $I(u) = 0$ dır. Bu nedenle, $u \in \mathcal{N}$ dir. (4.1.7) den $J(u) \geq d$ dır ve (4.1.11) den $J(u) \leq d$ dır. Böylece $J(u) = d$ olur.

Tanım 4.1.1. (Zayıf Çözüm). $u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ olsun. Bu durumda $[0,T]$ aralığında $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ fonksiyonunu $u_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ ile (4.1) probleminin bir zayıf çözümü olarak tanımlarız. Burada, $w \in H_0^1(\Omega)$ ve $t \in [0,T]$ için

$$\langle u_t, w\rangle + \langle \nabla u, \nabla w\rangle + \left\langle \|\nabla u\|^{2\gamma} \nabla u, \nabla w \right\rangle + \langle \nabla u_t, \nabla w\rangle = \int_\Omega |u|^{q-2} u \ln|u| \, w dx$$

dir.

4.2. Lokal Varlık

Bu kısımda (4.1) probleminin çözümlerinin lokal varlığı ile ilgili teorem ifade edilecek ve ispatı yapılacaktır.

Teorem 4.2.1. $u_0 \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ olsun. Böylece, $T > 0$ için $u(0) = u_0$ eşitliğini sağlayan (4.1) probleminin bir tek u zayıf çözümü vardır. Ayrıca, u çözümü $0 \leq t \leq T$ için

$$\int_0^t \|u_s(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds + J(u(t)) \leq J(u_0) \tag{4.2.1}$$

enerji eşitsizliğini sağlanır.

İspat. Bu ispat 3 adımda yapılacaktır.

1. adım (Lokal varlık).

Bu adımda yaklaşık çözümü elde etmek için Faedo-Galerkin metodunda yararlanacağız. $\{w_j\}_{j=1}^\infty$, $H_0^1(\Omega)$ uzayında ortogonal bir bazı olsun ve

$$V_m = span\{w_1, w_2, ..., w_m\}$$

olarak alalım. u_{0m}, V_m nin bir elemanı olsun ve $m \to \infty$ için

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} a_{mj} w_j \to u_0 \tag{4.2.2}$$

$H_0^1(\Omega)$ da güçlü yakınsak alalım. Buradan (4.1) probleminin $u_m(x,t)$ yaklaşık çözümünü

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} a_{mj}(t) w_j(x) \tag{4.2.3}$$

şeklinde bulabiliriz. Burada, a_{mj} $(1 \leq j \leq m)$ katsayıları $a_{mj}(0) = a_{mj}, \quad j \in \{1,2,...,m\}$ başlangıç koşullarına sahip, $i \in \{1,2,...,m\}$ için

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u_{mt} w_i dx + \int_\Omega \nabla u_m \nabla w_i dx \\ & + \int_\Omega \|\nabla u_m\|^{2\gamma} \nabla u_m \nabla w_i dx \ + \int_\Omega \nabla u_{mt} \nabla w_i dx \\ = & \int_\Omega |u_m|^{q-2} u_m \ln(|u_m|) w_i dx \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

adi diferansiyel denklemleri sağlar. Peano'nun teoreminden (4.2.4) eşitliğinin a_{mj} lokal bir çözümü olduğunu ve $T_m > 0$ ın pozitif olduğunu buluruz, öyle ki $a_{mj} \in C^1([0,T_m]; H_0^1(\Omega))$. (4.2.4) teki $i.$ denklemi $a_{mj}(t)$ ile çarpıp düzenlersek

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u_{mt} u_m dx + \int_\Omega \nabla u_m \nabla u_m dx \\ & + \int_\Omega \|\nabla u_m\|^{2\gamma} \nabla u_m \nabla u_m dx + \int_\Omega \nabla u_{mt} \nabla u_m dx \\ = & \int_\Omega |u_m|^q \ln(|u_m|)\, dx \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

şeklinde buluruz. (4.2.5) in her iki tarafının integrali alınırsa

$$S_m(t) \leq S_m(0) + \int_0^t \int_\Omega |u_m(x,s)|^q \ln(|u_m(x,s)|) dx ds \tag{4.2.6}$$

olur ve burada

$$S_m(t) = \frac{1}{2} \|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}(t) + \int_0^t \left(\int_\Omega \nabla u_m \nabla u_m dx + \int_\Omega \|\nabla u_m\|^{2\gamma} \nabla u_m \nabla u_m dx \right) \tag{4.2.7}$$

dir. $\mu > 0$, $x \geq 1$ için $x^{-\mu} \ln x \leq (e\mu)^{-1}$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_m(t)|^q \ln(|u_m(t)|)\, dx &\leq \int_{\Omega_1} |u_m(t)|^q \ln(|u_m(t)|)\, dx \\ &\quad + \int_{\Omega_2} |u_m(t)|^q \ln(|u_m(t)|)\, dx \\ &\leq (e\mu)^{-1} \int_{\Omega_2} |u_m(t)|^{q+\mu}\, dx \\ &\leq (e\mu)^{-1} \|u_m(t)\|_{q+\mu}^{q+\mu} \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

elde edilir. Burada $0 < \mu < 2 + \frac{4}{n} - q$ ve

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u_m(t)| \leq 1\} \text{ ve } \Omega_2 = \{x \in \Omega : |u_m(t)| \geq 1\}$$

şeklindedir. Lemma 3.4.5 ve (4.2.8) den

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_m(t)|^q \ln(|u_m(t)|)\, dx &\leq (e\mu)^{-1} \int_\Omega |u_m(t)|^{q+\mu}\, dx \\ &\leq (e\mu)^{-1} C \|\nabla u_m\|_2^{(q+\mu)\theta} \|u_m\|_2^{(q+\mu)(1-\theta)} \\ &\leq \varepsilon \|\nabla u_m\|_2^2 + C(\varepsilon) \|u_m\|_2^{\frac{2(q+\mu)(\theta-1)}{\theta(q+\mu)-2}} \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

elde ederiz. Burada $\varepsilon \in (0,1)$ dir ve Lemma 3.4.5 ten ($p = r = 2$ için)

$$\theta = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+\mu}\right)$$

bulunur. $0 < \mu < 2 + \frac{4}{n} - q$ seçildiğinden $\theta(q+\mu) < 2$ olarak bulunur. $\alpha > 1$ olacak şekilde

$$\alpha = \frac{(q+\mu)(\theta-1)}{\theta(q+\mu)-2}$$

seçelim. Böylece, (4.2.2), (4.2.6), (4.2.7) ve (4.2.9) dan

$$S_m(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t S_m^\alpha(s) ds \tag{4.2.10}$$

elde edilir. Burada C_1 ve C_2, m den bağımsız pozitif sabitlerdir. Gronwall-Bellman-Bihari tip integral eşitsizliği kullanılarak ve (4.2.10) ile birleştirildiğinde pozitif bir T sabiti vardır öyle ki $t \in [0,T]$ için

$$S_m(t) \leq C_T \tag{4.2.11}$$

bulunur. Şimdi, (4.2.4) eşitliğini a'_{mi} ile çarparsak ve $[0,t]$ zaman değişkenine göre integral alırsak $0 \leq t \leq T$ için

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2\, ds + J(u_m(t)) \leq J(u_{0m}) \tag{4.2.12}$$

elde ederiz. J fonksiyonunun sürekliliğini ve (4.2.2) den $C > 0$ sabitinin var olduğu sonucunu çıkarıyoruz öyle ki

$$J(u_{0m}) \leq C \tag{4.2.13}$$

dir. (4.1.2), (4.2.9), (4.2.11), (4.2.12), (4.2.13) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
C &\geq J(u_m(t)) \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u_m(t)\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad + \frac{1}{q^2}\|u_m(t)\|_q^q - \frac{1}{q}\int_\Omega |u_m(t)|^q \ln|u_m(t)|\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u_m(t)\|^2 - \frac{1}{q}\int_\Omega |u_m(t)|^q \ln|u_m(t)|\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u_m(t)\|^2 - \frac{\varepsilon}{q}\|\nabla u_m(t)\|^2 - \frac{C(\varepsilon)}{q}\|u_m(t)\|^{\frac{2(q+\mu)(\theta-1)}{\theta(q+\mu)-2}} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{q}\right)\|\nabla u_m(t)\|^2 - \frac{C(\varepsilon)}{q}\|u_m(t)\|^{\frac{2(q+\mu)(\theta-1)}{\theta(q+\mu)-2}} \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{q}\right)\|\nabla u_m(t)\|^2 - \frac{C(\varepsilon)}{q}(C_T)^{\frac{2(q+\mu)(\theta-1)}{\theta(q+\mu)-2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik ve (4.2.12) den

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)} \leq C \tag{4.2.14}$$

ve

$$\|u_{mt}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \tag{4.2.15}$$

elde ederiz. (4.2.14) ve (4.2.15) dan u fonksiyon ve $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ in bir alt dizisi olduğu görülür öyle ki

$$u_m \to u, \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ uzayında zayıf yakınsak,} \tag{4.2.16}$$

$$u_{mt} \to u_t, \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ uzayında zayıf yakınsak} \tag{4.2.17}$$

olur. (4.2.16), (4.2.17) ve Aubin-Lions lemmasından

$$u_m \to u, \quad C([0,T];L^2(\Omega)) \text{ da güçlü yakınsak}$$

dır. Böylece, $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ iken $u_m \to u$ dir. Yani $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ ise $|u_m|^{q-2}u_m \ln|u_m| \to |u|^{q-2}u\ln|u|$ olur. $2 < q < 2 + \frac{4}{n}$ olduğundan $\mu > 0$ seçilirse

$1 < \frac{q(q-1+\mu)}{q-1} < \frac{2n}{n-2}$ elde edilir. Buradan, Sobolev gömülme eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\varphi_m(x,t)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx &= \int_{\Omega_1} |\varphi_m(x,t)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx + \int_{\Omega_2} |\varphi_m(x,t)|^{\frac{q}{q-1}}\,dx \\ &\leq (e(q-1))^{-\frac{q}{q-1}}\,|\Omega| + (e\mu)^{-\frac{q}{q-1}} \int_{\Omega_2} |u_m(t)|^{\frac{q(q-1+\mu)}{q-1}}\,dx \\ &\leq C_1 + C_2\,\|\nabla u_m(t)\|_2^{\frac{q(q-1+\mu)}{q-1}} \leq C \qquad (4.2.18)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varphi_m(x,t) = |u_m(x,t)|^{q-1}\ln|u_m(x,t)|$, $\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u_m(x,t)| \leq 1\}$ ve $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |u_m(x,t)| \geq 1\}$ dir. Ayrıca (4.2.18) ve Aubin-Lions lemmasından

$$|u_m|^{q-2}\,u_m \ln(|u_m|) \to |u|^{q-2}\,u\ln(|u|) \qquad (4.2.19)$$

$L^\infty(0,T;L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega))$ da zayıf* yakınsak olarak elde edilir. $m \to +\infty$ alınırsa, (4.2.16), (4.2.17) ve (4.2.19) dan u nun $u(0) = u_0$ başlangıç koşulunu sağladığını görüyoruz ve $w \in H_0^1(\Omega)$ ve $t \in [0,T]$ için

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_t(t)w dx + \int_\Omega \nabla u(t)\nabla w dx \\ &+ \int_\Omega \|\nabla u(t)\|^{2\gamma}\,\nabla u(t)\nabla w dx + \int_\Omega \nabla u_t(t)\nabla w dx \\ = &\int_\Omega |u(t)|^{q-2}\,u(t)\ln(|u(t)|)w dx \qquad (4.2.20)\end{aligned}$$

elde edilir. Yani u, (4.1) probleminin istenen bir çözümüdür.

2. adım (Teklik).

En az bir $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ için (4.2.20) den

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_t(t)v dx + \int_\Omega \nabla u(t)\nabla v dx \\ &+ \int_\Omega \|\nabla u(t)\|^{2\gamma}\,\nabla u(t)\nabla v dx + \int_\Omega \nabla u_t(t)\nabla v dx \\ = &\int_\Omega |u(t)|^{q-2}\,u(t)\ln|u(t)|\,v dx \qquad (4.2.21)\end{aligned}$$

elde edilir. Kabul edelim ki (4.1) problemi için u_1 ve u_2 olmak üzere iki çözüm olsun. Let $w = u_1 - u_2$ olsun, buradan $w(0) = 0$ ve

$$w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ w_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

olur.

$$v(s) = \begin{cases} u_1(s) - u_2(s), & s \in [0,t], \\ 0, & s \in [t,T] \end{cases}$$

olsun. (4.2.21) den

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega w_s w dxds + \int_0^t \int_\Omega |\nabla w|^2 dxds \\
&+ \int_0^t \int_\Omega \|\nabla w\|^{2\gamma} |\nabla w|^2 dxds + \int_0^t \int_\Omega \nabla w_s \nabla w dxds \\
= &\int_0^t \int_\Omega \left(|u_1|^{q-2} u_1 \ln |u_1| - |u_2|^{q-2} u_2 \ln |u_2| \right) w dxds
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

ve buradan

$$\int_0^t \int_\Omega w_s w dxds \leq \int_0^t \int_\Omega \left(|u_1|^{q-2} u_1 \ln |u_1| - |u_2|^{q-2} u_2 \ln |u_2| \right) w dxds \tag{4.2.23}$$

bulunur. Burada bir $f : R^* \to R$, $f(a) = |a|^{q-2} a \ln |a|$ fonksiyonu oluşturalım. Böylece, pozitif bir C sabiti olduğu bulunur öyle ki

$$\left| |u_1|^{q-2} u_1 \ln |u_1| - |u_2|^{q-2} u_2 \ln |u_2| \right| \leq C |w| \tag{4.2.24}$$

dir. (4.2.23) ve (4.2.24) ten

$$\int_0^t \int_\Omega w_s w dxds \leq C \int_0^t \int_\Omega w^2 dxds$$

bulunur. $w(0) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_\Omega w^2 dx &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega w(0)^2 dx + C \int_0^t \int_\Omega w^2 dxds \\
&\leq C \int_0^t \int_\Omega w^2 dxds
\end{aligned}$$

olur. Gronwall eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_\Omega w^2 dx = 0$$

elde edilir. Böylece, teklik sağlanır.

3. Adım (Enerji Eşitsizliği).

Son olarak (4.2.1) i göstereceğiz. $\phi \in C([0,T])$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Buradan, (4.2.12) den

$$\int_0^T \phi(t) dt \int_0^t \|u_{ms}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^T J(u_m(t)) \phi(t) dt = \int_0^T J(u_m(0)) \phi(t) dt \tag{4.2.25}$$

dir. $m \to \infty$ iken (4.2.25) in sağ tarafı

$$\int_0^T J(u_0) \phi(t) dt$$

yakınsar. Sol tarafındaki ikinci terim $\int_0^T J(u_m(t))\phi(t)dt$, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ nin zayıf topolojisine göre yarı süreklidir. Böylece

$$\int_0^T J(u(t))\phi(t)dt \leq \liminf_{m\to+\infty} \int_0^T J(u_m(t))\phi(t)dt$$

bulunur. Bu nedenle, (4.2.25) ten

$$\int_0^T \phi(t)dt \int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds + \int_0^T J(u(t))\phi(t)dt \leq \int_0^T J(u_0)\phi(t)dt$$

elde edilir. ϕ keyfi negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan $0 \leq t \leq T$ için

$$\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds + J(u(t)) \leq J(u_0)$$

enerji esitsizliği elde edilir. Böylece Teorem 4.2.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi, Payne (1975) deki olduğu gibi aşağıdaki kümeleri ele alalım:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1 &= \{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : J(u) < d\}, \quad \mathcal{W}_2 = \{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : J(u) = d\},\\
\mathcal{W}_1^+ &= \{u \in \mathcal{W}_1 : I(u) > 0\}, \qquad \mathcal{W}_2^+ = \{u \in \mathcal{W}_2 : I(u) > 0\},\\
\mathcal{W}_1^- &= \{u \in \mathcal{W}_1 : I(u) < 0\}, \qquad \mathcal{W}_2^- = \{u \in \mathcal{W}_2 : I(u) < 0\},\\
\mathcal{W} &= \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2, \quad \mathcal{W}^+ = \mathcal{W}_1^+ \cup \mathcal{W}_2^+, \quad \mathcal{W}^- = \mathcal{W}_1^- \cup \mathcal{W}_2^-
\end{aligned}$$

4.3. Global Varlık ve Üstel Azalma

Bu kısımda (4.1) probleminin çözümlerinin global varlık ile ilgili teorem ifade edilecek ve ispatı yapılacak, ayrıca çözümlerin üstel azalması gösterilecektir.

Teorem 4.3.1. $u_0 \in \mathcal{W}^+$ olsun. Bu durumda, $u(0) = u_0$ sağlayan (4.1) probleminin bir tek u zayıf çözümü vardır. Buradan, $u(t) \in \mathcal{W}^+$ tüm $0 \leq t < +\infty$ için sağlar ve enerji kestirimi

$$\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds + J(u(t)) \leq J(u_0)$$

şeklindedir. Ayrıca, $u_0 \in \mathcal{W}_1^+$ sağlayan çözümü üstel azalır.

İspat. İlk önce $u_0 \in \mathcal{W}_1^+$ başlangıç koşulu durumunu ele alalım.
Teorem 4.2.1 in ispatında olduğu gibi $u_0 \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ olduğundan bir dizi yaklaşık çözüm $u_m \in C^1([0,T_{\max}];H_0^1(\Omega))$ alabiliriz, öyle ki $m \to \infty$ iken

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \tag{4.3.1}$$

$H_0^1(\Omega)$ uzayında güçlü yakınsak ve $0 \leq t \leq T$ için

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds + J(u_m(t)) \leq J(u_{0m}) \tag{4.3.2}$$

dir. $T_{\max}$, $u_m(t)$ çözümün maksimal varlık zamanıdır. $T_{\max} = \infty$ olduğunu kanıtlayalım.

$J(u_0) < d$ ve J fonksiyoneli sürekliliğinden m yeterince büyük seçilirse

$$J(u_{0m}) < d$$

şeklindedir. Bu nedenle, (4.3.2) den $0 \leq t \leq T_{\max}$ için

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds + J(u_m(t)) < d \tag{4.3.3}$$

olur. Sonra, m yeterince büyük seçilirse $t \in [0, T_{\max})$ için

$$u_m(t) \in \mathcal{W}_1^+ \tag{4.3.4}$$

çalışacağız. (4.3.4) ün geçerli olmadığını varsayalım ve $u_m(t_0) \notin \mathcal{W}_1^+$ olacak şekilde en küçük bir t_0 zamanı olduğunu ele alalım. O halde $u_m(t_0) \in \partial\mathcal{W}_1^+$ dir. Böylece

$$J(u_m(t_0)) = d \tag{4.3.5}$$

ya da

$$I(u_m(t_0)) = 0 \tag{4.3.6}$$

olur. Bununla birlikte, (4.3.5) in (4.3.3) tarafından oluşamayacağı açıktır. Eğer (4.3.6) sağlarsa d nin tanımı gereği

$$J(u_m(t_0)) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) = d$$

olur. Bu da (4.3.3) ile çelişir. Bu nedenle (4.3.4) ü almalıyız, öyle ki m yeterince büyük seçilirse en az bir $t \in [0, T_{\max})$ için $J(u_m(t)) < d$ ve $I(u_m(t)) > 0$ dir. Buradan, (4.1.4) ten

$$\begin{aligned} d &> J(u_m(t)) \\ &= \frac{1}{q} I(u_m(t)) + \frac{q-2}{2q} \|\nabla u_m(t)\|^2 + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q} \|\nabla u_m(t)\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2} \|u_m(t)\|_q^q \\ &\geq \frac{q-2}{2q} \|\nabla u_m(t)\|^2 + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q} \|\nabla u_m(t)\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2} \|u_m(t)\|_q^q \\ &\geq \frac{q-2}{2q} \|\nabla u_m(t)\|^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle, (4.3.3) ten

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds + \frac{q-2}{2q}\,\|\nabla u_m(t)\|^2 < d$$

sonucu çıkarılır. Bu eşitsizlik $T_{\max} = +\infty$ anlamına gelir. Sonra Teorem 4.2.1 in ispatında olduğu gibi devam ederek, (4.1) probleminin $t \in [0,\infty)$ için

$$\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds + J(u(t)) \le J(u_0) \tag{4.3.7}$$

enerji eşitsizliğini sağlayan bir tek $u(t) \in \mathcal{W}_1^+$ global zayıf çözümü olduğu sonucuna varabiliriz.

Şimdi $u_0 \in \mathcal{W}_2^+$ başlangıç koşulu durumunu ele alalım. (4.1) probleminin global varlık sonucunu kanıtlamak için, önce bir $\{\rho_m\}_{m=1}^{\infty} \subset (0,1)$ dizisi seçelim, öyle ki $\lim_{j\to\infty} \rho_m = 1$ dir. Sonra $u_{0m} = \rho_m u_0$ olacak şekilde

$$\begin{cases} u_t - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \Delta u_t = |u|^{q-2}\, u \ln|u|\,, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_{0m}(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.3.8}$$

problemi ele alalım. $I(u_0) > 0$ ve Lemma 4.1.2 den bir $\lambda^* > 1$ var olduğu görülür. Buradan

$$I(u_{0m}) = I(\rho_m u_0) > 0$$

ve

$$J(u_{0m}) = I(\rho_m u_0) < J(u_0) = d$$

elde edilir, bu da $u_{0m} \in \mathcal{W}_1^+$ anlamına gelir. Önceki duruma benzer argümanları kullanarak, (4.3.8) probleminin bir u_m global zayıf çözümü kabul ettiği görülür. Buradan, $H_0^1(\Omega)$ uzayında $u_m(0) = u_{0m} \to u_0$ başlangıç şartlarına sahip

$$u_m \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)), \quad u_{mt} \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$$

sağlar. Böylece, en az bir $w \in H_0^1(\Omega)$ ve hemen hemen her $t \in [0,\infty)$ için

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u_{mt} w dx + \int_\Omega \nabla u_m \nabla w dx \\ & + \int_\Omega \|\nabla u_m\|^{2\gamma} \nabla u_m \nabla w dx + \int_\Omega \nabla u_{mt} \nabla w dx \\ = & \int_\Omega |u_m|^{q-2}\, u_m \ln|u_m|\, w dx \end{aligned}$$

sağlar. Ayrıca $t \in [0,\infty)$ için

$u_m(t) \in \mathcal{W}_1^+$

ve

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds + J(u_m(t)) \leq J(u_{0m}) < d$$

dir. İspatın geri kalanı önceki durum gibi yapılabilir.

Üstel Azalma

Son olarak, çözümlerin üstel azalması sonuçlarını ele alalım. $u_0 \in \mathcal{W}_1^+$ olduğundan, ilk duruma benzer şekilde, en az bir $t \in [0,\infty)$ için $u(t) \in \mathcal{W}_1^+$ elde edilir. (4.1.4) ve (4.3.7) den

$$\begin{aligned} J(u_0) &> J(u(t)) \\ &= \frac{1}{q} I(u(t)) + \frac{q-2}{2q}\|\nabla u(t)\|^2 \\ &\quad + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q}\|\nabla u(t)\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2}\|u(t)\|_q^q \\ &\geq \frac{q-2}{2q}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q}\|\nabla u(t)\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2}\|u(t)\|_q^q \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

elde edilir. $I(u(t)) > 0$, (4.1.5) ve Lemma 4.1.2 den bir $\lambda^* > 1$ vardır, öyle ki $I(\lambda^* u(t)) = 0$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} d &\leq J(\lambda^* u(t)) \\ &= \frac{1}{q} I(\lambda^* u(t)) + \frac{q-2}{2q}\|\nabla(\lambda^* u(t))\|^2 \\ &\quad + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q}\|\nabla(\lambda^* u(t))\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2}\|\lambda^* u(t)\|_q^q \\ &= \frac{q-2}{2q}\|\nabla(\lambda^* u(t))\|^2 + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q}\|\nabla(\lambda^* u(t))\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \frac{1}{q^2}\|\lambda^* u(t)\|_q^q \\ &= (\lambda^*)^2\left(\frac{q-2}{2q}\right)\|\nabla u(t)\|^2 + (\lambda^*)^{2(\gamma+1)}\left(\frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q}\right)\|\nabla u(t)\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + (\lambda^*)^q\left(\frac{1}{q^2}\right)\|u(t)\|_q^q \\ &\leq (\lambda^*)^q\left(\frac{q-2}{2q}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q}\|\nabla u(t)\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q^2}\|u(t)\|_q^q\right) \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

bulunur. (4.3.9) ve (4.3.10) dan

$d \leq (\lambda^*)^q J(u_0)$

olur. Buradan

$$\lambda^* \geq \left(\frac{d}{J(u_0)}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.3.11}$$

bulunur. (4.1.3) ten

$$\begin{aligned}
0 &= I(\lambda^* u(t)) \\
&= \|\nabla(\lambda^* u(t))\|^2 + \|\nabla(\lambda^* u(t))\|^{2(\gamma+1)} - \int_\Omega |\lambda^* u(t)|^q \ln|\lambda^* u(t)|\, dx \\
&= (\lambda^*)^2 \|\nabla u(t)\|^2 + (\lambda^*)^{2(\gamma+1)} \|\nabla u(t)\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad -(\lambda^*)^q \int_\Omega |u(t)|^q \ln|u(t)|\, dx - (\lambda^*)^q \ln(\lambda^*) \|u(t)\|_q^q \\
&= (\lambda^*)^q I(u(t)) + (\lambda^*)^2 \|\nabla u(t)\|^2 + (\lambda^*)^{2(\gamma+1)} \|\nabla u(t)\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad -(\lambda^*)^q \|\nabla u(t)\|^2 - (\lambda^*)^q \|\nabla u(t)\|^{2(\gamma+1)} - (\lambda^*)^q \ln(\lambda^*) \|u(t)\|_q^q \\
&= (\lambda^*)^q I(u(t)) + \left[(\lambda^*)^2 - (\lambda^*)^q\right] \|\nabla u(t)\|^2 \\
&\quad + \left[(\lambda^*)^{2(\gamma+1)} - (\lambda^*)^q\right] \|\nabla u(t)\|^{2(\gamma+1)} - (\lambda^*)^q \ln(\lambda^*) \|u(t)\|_q^q
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

elde edilir. (4.3.11) ve (4.3.12) den

$$\begin{aligned}
(\lambda^*)^q I(u(t)) &= \left[(\lambda^*)^q - (\lambda^*)^2\right] \|\nabla u(t)\|^2 + \left[(\lambda^*)^q - (\lambda^*)^{2(\gamma+1)}\right] \|\nabla u(t)\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad +(\lambda^*)^q \ln(\lambda^*) \|u(t)\|_q^q \\
&\geq \left[(\lambda^*)^q - (\lambda^*)^2\right] \|\nabla u(t)\|^2
\end{aligned}$$

bulunur, öyle ki

$$I(u(t)) \geq \left[1 - (\lambda^*)^{2-q}\right] \|\nabla u(t)\|^2 \tag{4.3.13}$$

olur. (4.3.11) ve (4.3.13) ten

$$\begin{aligned}
I(u(t)) &\geq \left[1 - (\lambda^*)^{2-q}\right] \|\nabla u(t)\|^2 \\
&\geq \left[1 - \left(\frac{d}{J(u_0)}\right)^{\frac{2-q}{q}}\right] \|\nabla u(t)\|^2 \\
&\geq C\left[1 - \left(\frac{d}{J(u_0)}\right)^{\frac{2-q}{q}}\right] \|u(t)\|^2
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

olur, burada C sabittir. Dolayısıyla, (4.3.14) ten

$$\begin{aligned}
I(u(t)) &\geq \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{d}{J(u_0)}\right)^{\frac{2-q}{q}}\right] \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2} C\left[1 - \left(\frac{d}{J(u_0)}\right)^{\frac{2-q}{q}}\right] \|u(t)\|^2 \\
&\geq C_1 \left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2\right) \\
&= C_1 \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

elde edilir, burada

$$C_1 = \max\left\{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{d}{J(u_0)}\right)^{\frac{2-q}{q}}\right], \frac{C}{2}\left[1-\left(\frac{d}{J(u_0)}\right)^{\frac{2-q}{q}}\right]\right\}$$

şeklindedir. $I(u(s))$, (t,T) aralığında s ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}\int_t^T I(u(s))ds &= -\int_t^T\int_\Omega u_s(s)u(s)dxds - \int_t^T\int_\Omega \nabla u_s(s)\nabla u(s)dxds \\ &= \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C_2\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

elde edilir. (4.3.15) ve (4.3.16) dan $\forall t \in [0,T]$ için

$$\int_t^T C_1\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds \leq C_2\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \tag{4.3.17}$$

bulunur. (4.3.17) de $T \to +\infty$ iken

$$\int_t^\infty \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds \leq C_3\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

bulunur. 3.6 dan

$$\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,e^{1-\frac{t}{C_3}}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik u çözümünün üstel azaldığını gösterir.

4.4. Patlama

Bu kısımda (4.1) probleminin çözümlerinin patlama ile ilgili teorem ifade edilecek ve ispatı yapılacaktır.

Teorem 4.4.1. Kabul edelim ki $u_0 \in W_1^-$ olsun ve $u(t)$, (4.1) probleminin bir tek zayıf çözümü olsun. O halde $u(t)$ sonlu bir zamanda patlar, yani $T_* > 0$ vardır öyle ki

$$\lim_{t\to T_*}\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \infty$$

olur.

İspat. $u_0 \in W_1^-$ olduğundan

$$\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds + J(u(t)) \leq J(u_0) < d, \quad 0 \leq t \leq T_{\max}$$

enerji eşitsizliğini sağlayan (4.1) probleminin bir tek $u(t)$ zayıf çözümü elde edilir, burada $T_{\max}$, $u(t)$ çözümünün maksimal varlık zamanıdır.

Önce, $t \in [0, T_{\max}]$ için $u_0 \in W_1^-$ olduğunu kanıtlayalım. $u(t)$, $t = t_0$ zamanında W_1^+ ayrıldığını varsayalım. Buradan bir $\{t_n\}$ dizisi vardır öyle ki $t_n \to t_0^-$ iken $I(u(t_n)) \leq 0$ dir. $H_0^1(\Omega)$ uzayının alt yarı sürekliliğinden

$$I(u(t_0)) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u(t_n)) \leq 0$$

olur. $u(t_0) \notin W_1^+$ a göre $I(u(t_0)) = 0$ vardır. Fakat, enerji eşitsizliği ve d nin tanımından

$$d = \inf_{u\in\mathcal{N}} J(u) \leq J(u(t_0)) < d$$

olacak şekilde bir çelişkiye yol açar. O halde, $t \in [0, T_{\max}]$ için $u(t) \in W_1^-$ dir.

Şimdi, $u(t)$ nin sonlu bir zamanda patladığını kanıtlayalım. Çelişki yöntemi kullanarak $u(t)$ nin global çözüm olduğunu varsayalım. Bunun için $\Gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu

$$\Gamma(t) = \int_0^t \|u(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds \tag{4.4.1}$$

seklinde tanımlayalım. Buradan

$$\begin{aligned}
\Gamma'(t) &= \|u(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&= 2\int_0^t \int_\Omega (\nabla u_s \nabla u + u_s u)\, dxds
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

bulunur. (4.1.3) ve (4.4.2) den

$$\begin{aligned}
\Gamma''(t) &= 2\int_\Omega (\nabla u_s \nabla u + u_s u)\, dx \\
&= 2\int_\Omega u\,(u_s - \Delta u_s)\, dx \\
&= -2\int_\Omega M(\|\nabla u\|^2) u\Delta u dx + 2\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx \\
&= -2\int_\Omega (1 + \|\nabla u\|^{2\gamma})(\nabla u)^2 dx + 2\int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx \\
&= -2I(u)
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

elde edilir. (4.4.3) ve $I(u) < 0$ dan $\Gamma''(t) > 0$ olur, bu da

$$\Gamma'(t) > \Gamma'(0) = \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0 \tag{4.4.4}$$

olarak bulunur. Hölder eşitsizliği ve (4.4.3) ten

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\Gamma'(t)-\Gamma'(0)\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(\int_0^t \Gamma''(s)ds\right)^2 \\ &= \left(\int_0^t\int_\Omega \left(\nabla u_s \nabla u + u_s u\right)dxds\right)^2 \\ &\leq \int_0^t \|u(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds \int_0^t \|u_s\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds \qquad (4.4.5)\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.4) ve (4.4.3) ten

$$\begin{aligned}\Gamma''(t) &= -2I(u) \\ &= -2qJ(u)+(q-2)\|\nabla u\|^2+\frac{q-2\gamma-2}{\gamma+1}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}+\frac{2}{q}\|u\|_q^q \\ &\geq -2qJ(u_0)+2q\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds \\ &\quad +(q-2)\|\nabla u\|^2+\frac{q-2\gamma-2}{\gamma+1}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}+\frac{2}{q}\|u\|_q^q \qquad (4.4.6)\end{aligned}$$

olur. $t\in[0,T]$ iken $u(t)\in W_1^-$ olduğundan $I(u)<0$ dır. Lemma 4.1.2 den bir $\lambda^*\in(0,1)$ vardır öyle ki $I(\lambda^* u(t))=0$ dır. Böylece, d nin tanımından

$$\begin{aligned}d &= \inf_{u\in\mathcal{N}} J(u)\leq J(\lambda^* u(t)) \\ &\leq \frac{q-2}{2q}\|\nabla u\|^2+\frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}+\frac{1}{q^2}\|u\|_q^q \qquad (4.4.7)\end{aligned}$$

elde edilir. (4.4.6) ve (4.4.7) den

$$\begin{aligned}\Gamma''(t) &\geq -2qJ(u_0)+2q\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds \\ &\quad +(q-2)\|\nabla u\|^2+\frac{q-2\gamma-2}{\gamma+1}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}+\frac{2}{q}\|u\|_q^q \\ &= -2qJ(u_0)+2q\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds \\ &\quad +2q\left[\frac{q-2}{2q}\|\nabla u\|^2+\frac{q-2\gamma-2}{2q\gamma+2q}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}+\frac{1}{q^2}\|u\|_q^q\right] \\ &\geq 2q\left(d-J(u_0)\right)+2q\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds \qquad (4.4.8)\end{aligned}$$

bulunur. (4.4.1), (4.4.5) ve (4.4.8) kullanılarak

$$\begin{aligned}\Gamma(t)\Gamma''(t) &\geq 2q\int_0^t \|u(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds+2q\left(d-J(u_0)\right)\Gamma(t) \\ &\geq 2q\left(d-J(u_0)\right)\Gamma(t)+\frac{q}{2}\left(\Gamma'(t)-\Gamma'(0)\right)^2 \qquad (4.4.9)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, bir $t_0 > 0$ alalım, (4.4.4) ten $\forall t \geq t_0$ için

$$\Gamma(t) \geq \Gamma(t_0) \geq \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} t_0 > 0 \tag{4.4.10}$$

dir. Dolayısıyla, (4.4.9) ve (4.4.10) dan $\forall t \geq t_0$ için

$$\Gamma(t)\Gamma''(t) - \frac{q}{2}\left(\Gamma'(t) - \Gamma'(0)\right)^2 \geq 2q\left(d - J(u_0)\right)\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} t_0 > 0 \tag{4.4.11}$$

elde edilir. Yeterince büyük $T > t_0$ seçelim ve $\forall t \in [0, T]$ için

$$\psi(t) = \Gamma(t) + (T - t)\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} t_0$$

olsun. Buradan $\psi(t) \geq \Gamma(t) > 0$, $\psi'(t) = \Gamma'(t) - \Gamma'(0)$ ve $\psi''(t) = \Gamma''(t) > 0$ dır. (4.4.11) den $t \in [t_0, T]$ için

$$\begin{aligned} \psi(t)\psi''(t) - \frac{q}{2}\psi'(t)^2 &\geq \Gamma(t)\Gamma''(t) - \frac{q}{2}\left(\Gamma'(t) - \Gamma'(0)\right)^2 \\ &\geq 2q\left(d - J(u_0)\right)\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} t_0 > 0 \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

bulunur. Şimdi, $y(t) = \psi(t)^{-\frac{q-2}{2}}$ olsun. Böylece

$$y'(t) = -\frac{q-2}{2}\psi(t)^{-\frac{q}{2}}\psi'(t) \tag{4.4.13}$$

olur. (4.4.12) ve (4.4.13) den $\forall t \in [t_0, T]$ için

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{q(q-2)}{4}\psi(t)^{-\frac{q+2}{2}}\psi'(t)^2 - \frac{q-2}{2}\psi(t)^{-\frac{q}{2}}\psi''(t) \\ &= \frac{q-2}{2}\psi(t)^{-\frac{q+2}{2}}\left[\frac{q}{2}\psi'(t)^2 - \psi(t)\psi''(t)\right] < 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu, yeterince büyük herhangi bir $T > t_0$ için, $y(t)$ nin $[t_0, T]$ de bir içbükey fonksiyon olduğunu gösterir. Buradan bir T_* sonlu zamanı vardır öyle ki

$$\lim_{t \to T_*^-} y(t) = 0$$

olur ve

$$\lim_{t \to T_*^-} \psi(t) = \infty$$

dur. Dolayısıyla,

$$\lim_{t \to T_*^-} \int_0^t \|u(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds = \infty$$

dur ve

$$\lim_{t \to T_*^-} \|u(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \infty$$

bulunur. Bu da $u(t)$ nin global çözüm olmasıyla çelişir.

5. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ P-BİHARMONİC PARABOLİK DENKLEM

Bu bölümde

$$\begin{cases} u_t + \Delta\left(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\right) - \Delta u_t = u\,|u|^{q-2}\ln|u|\,, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,t) = \Delta(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

lineer olmayan logaritmik kaynak terime sahip p-biharmonic parabolik denklemin global varlığına ve enerji azalmasına çalıştık (Cömert ve Piskin, 2022a). Burada Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. p, q pozitif sabit, $2 < p < q < p\left(1 + \frac{4}{n}\right)$ ve $u_0 \in \left(W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)\right) \setminus \{0\}$ dir. $\Delta\left(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\right)$ terimi bir p-biharmonic operator olarak adlandırılır. Ayrıca, $\left(W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)\right) \setminus \{0\}$ belirtmek için X_0 notasyonu ve $W^{2,p}(\Omega)$ uzayının dual uzayı için $W^{-2,p'}(\Omega)$ şeklinde kullanacağız, burada $p > 1$ için p' Hölder eşlenik fonksiyonelidir.

X_0 da enerji fonksiyoneli

$$J(u) = \frac{1}{p}\|\Delta u\|_p^p - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q \ln|u|\,dx + \frac{1}{q^2}\|u\|_q^q \tag{5.2}$$

ve Nehari fonksiyoneli

$$I(u) = \|\Delta u\|_p^p - \int_\Omega |u|^q \ln|u|\,dx \tag{5.3}$$

olarak tanımlayalım. (5.2) ve (5.3) ten

$$J(u) = \frac{1}{q}I(u) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|\Delta u\|_p^p + \frac{1}{q^2}\|u\|_q^q \tag{5.4}$$

elde edilir. Nehari manifoldu

$$\mathcal{N} = \{u \in X_0 : I(u) = 0\}$$

olsun. Ayrıca,

$$d = \inf_{u\in\mathcal{N}} J(u) \tag{5.5}$$

potansiyel derinlik olarak alalım. d pozitiftir ve bazı $u \in \mathcal{N}$ tarafından elde edilir. O zaman açıktır ki

$$M = \frac{1}{p^2}\left(\frac{p^2 e}{n\mathcal{L}_p}\right)^{\frac{n}{p}} \tag{5.6}$$

dir. Nhan ve Troung (2017) den $d \geq M$ olduğu bilinir.

5.1. Giriş

Bu kısımda teoremimizin ispatı için kullanılacak lemmalar ve tanımdan oluşmaktadır.

Lemma 5.1.1. $J(t)$, $t \geq 0$ için artmayan fonksiyon ve

$$J'(u) = -\int_{\Omega} \left(u_t^2 + |\nabla u_t|^2\right) dx \leq 0 \tag{5.1.1}$$

bulunur.

İspat. (5.1) denklemini u_t ile çarpıp Ω üzerinde integral alınırsa

$$\int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta u|^{p-1} \Delta u_t dx + \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx = \int_{\Omega} u^{q-1} u_t \ln |u| dx$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{p} \|\Delta u\|_p^p + \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx = \frac{1}{q} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^q \ln |u| dx - \frac{1}{q^2} \|u\|_q^q$$

ve

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p} \|\Delta u\|_p^p - \frac{1}{q} \int_{\Omega} |u|^q \ln |u| dx + \frac{1}{q^2} \|u\|_q^q\right) = -\int_{\Omega} \left(u_t^2 + |\nabla u_t|^2\right) dx \tag{5.1.2}$$

elde edilir. (5.2) ve (5.1.2) den

$$\frac{d}{dt} J(u) = -\int_{\Omega} \left(u_t^2 + |\nabla u_t|^2\right) dx \tag{5.1.3}$$

olur. Ayrıca, (5.1.3) eşitliğini $[0, t]$ üzerinde t ye göre integral alınırsa

$$J(u(t)) + \int_0^t \|u_s(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\tau = J(u_0) \tag{5.1.4}$$

elde edilir.

Lemma 5.1.2 $u \in X_0$ ve $j(\lambda) = J(\lambda u)$ olsun. O halde

(i) $\lim_{\lambda \to 0^+} j(\lambda) = 0$ ve $\lim_{\lambda \to +\infty} j(\lambda) = -\infty$ dur;

(ii) Bir tek $\lambda^* > 0$ öyle ki $j'(\lambda^*) = 0$ dır;

(iii) $j(\lambda)$ fonksiyonu $(0,\lambda^*)$ arasında artan, $(\lambda^*,+\infty)$ aralığında azalan ve λ^* noktasında maksimum değere sahiptir;

(iv) $0<\lambda<\lambda^*$ için $I(\lambda u)>0$, $\lambda^*<\lambda<+\infty$ için $I(\lambda u)<0$ ve $\lambda^*=\lambda$ için $I(\lambda^* u)=0$ dır.

İspat $u\in X_0$ için j fonksiyon tanımından

$$\begin{aligned} j(\lambda) &= \frac{1}{p}\left\|\Delta\left(\lambda u\right)\right\|_p^p+\frac{1}{q^2}\left\|\lambda u\right\|_q^q-\frac{1}{q}\int_\Omega|\lambda u|^q\ln|\lambda u|\,dx \\ &= \frac{\lambda^p}{p}\left\|\Delta u\right\|_p^p+\frac{\lambda^q}{q^2}\left\|u\right\|_q^q+\frac{\lambda^q}{q}\ln\lambda\left\|u\right\|_q^q-\frac{\lambda^q}{q}\int_\Omega|u|^q\ln|u|\,dx \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

elde edilir. $\int_\Omega|u|^q\,dx\neq 0$ dan dolayı *(i)* sağladığı açıkça görülür. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}j(\lambda) &= \lambda^{p-1}\left\|\Delta u\right\|_p^p-\lambda^{q-1}\ln\lambda\left\|u\right\|_q^q-\lambda^{q-1}\int_\Omega|u|^q\ln|u|\,dx \\ &= \lambda^{p-1}\left(\left\|\Delta u\right\|_p^p-\lambda^{q-p}\ln\lambda\left\|u\right\|_q^q-\lambda^{q-p}\int_\Omega|u|^q\ln|u|\,dx\right) \end{aligned}$$

bulunur. $\varphi(\lambda)=\lambda^{1-p}j'(\lambda)$ olarak seçelim. Buradan

$$\varphi'(\lambda)=-\lambda^{q-p-1}\left((q-p)\ln\lambda\left\|u\right\|_q^q+(q-p)\int_\Omega|u|^q\ln|u|\,dx+\left\|u\right\|_q^q\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla bir tek

$$\lambda^*=\exp\left(\frac{(p-q)\int_\Omega|u|^q\ln|u|\,dx-\left\|u\right\|_q^q}{(q-p)\left\|u\right\|_q^q}\right)>0$$

vardır, öyleki $(0,\lambda^*)$ aralığında $\varphi'(\lambda)>0$, $(\lambda^*,+\infty)$ aralığında $\varphi'(\lambda)<0$ ve λ^* noktasında $\varphi'(\lambda)=0$. Böylece, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonu $(0,\lambda^*)$ aralığında artan, $(\lambda^*,+\infty)$ aralığında azalandır. $\lim_{\lambda\to 0^+}\varphi(\lambda)=\left\|\nabla u\right\|^2>0$ ve $\lim_{\lambda\to+\infty}\varphi(\lambda)=-\infty$ olduğu için bir tek $\lambda^*>0$ öyle ki $\varphi(\lambda^*)=0$ dır, yani $j'(\lambda^*)=0$ dır. Böylece *(ii)* sağlanır. Ayrıca $j'(\lambda)=\lambda\varphi(\lambda)$ fonksiyonu $(0,\lambda^*)$ aralığında pozitif, $(\lambda^*,+\infty)$ aralığında negatiftir. Böylece, $j(\lambda)$ fonksiyonu $(0,\lambda^*)$ aralığında artan, $(\lambda^*,+\infty)$ aralığında azalan ve λ^* noktasında maksimum değere sahiptir. Böylece *(iii)* sağlanır. (5.3) ten

$$\begin{aligned} I(\lambda u) &= \left\|\Delta\left(\lambda u\right)\right\|_p^p-\int_\Omega|\lambda u|^q\ln|\lambda u|\,dx \\ &= \lambda^p\left\|\Delta u\right\|_p^p-\lambda^q\ln\lambda\left\|u\right\|_q^q-\lambda^q\int_\Omega|u|^q\ln|u|\,dx \\ &= \lambda j'(\lambda) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $0 < \lambda < \lambda^*$ için $I(\lambda u) > 0$, $\lambda^* < \lambda < +\infty$ için $I(\lambda u) < 0$ ve $\lambda^* = \lambda$ için $I(\lambda^* u) = 0$ olur. Böylece *(iv)* sağlar. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi

$$R := \left(\frac{p^2 e}{n\mathcal{L}_p}\right)^{n/p^2}$$

olduğu gösterelim.

Lemma 5.1.3.

(i) Eğer $I(u) > 0$ için $0 < \|u\|_p < R$ dir,

(ii) eğer $I(u) < 0$ için $\|u\|_p > R$ dir,

(iii) eğer $I(u) = 0$ için $\|u\|_p \geq R$ dir.

İspat. $I(u)$ fonksiyoneli tanımından

$$\begin{aligned} I(u) &= \|\Delta u\|_p^p - \int_\Omega |u|^q \ln|u|\, dx \\ &\geq \|\Delta u\|_p^p - \int_\Omega |u|^p \left(\ln\frac{|u|}{\|u\|_p} + \ln\|u\|_p\right) dx \\ &\geq \left(1 - \frac{\mu}{p}\right)\|\Delta u\|_p^p + \left(\frac{n}{p^2}\ln\left(\frac{p\mu e}{n\mathcal{L}_p}\right) - \ln\|u\|_p\right)\|u\|_p^p \end{aligned}$$

bulunur. $\mu = p$ seçelim. Buradan

$$I(u) \geq \left(\frac{n}{p^2}\ln\left(\frac{p^2 e}{n\mathcal{L}_p}\right) - \ln\|u\|_p\right)\|u\|_p^p$$

olur. *(i)* Eğer $I(u) > 0$ ise

$$\ln\|u\|_p < \ln\left(\frac{p^2 e}{n\mathcal{L}_p}\right)^{\frac{n}{p^2}}$$

dır, bu da

$$\|u\|_p < \left(\frac{p^2 e}{n\mathcal{L}_p}\right)^{\frac{n}{p^2}} = R$$

anlamına gelir. *(ii)* Eğer $I(u) < 0$ ise

$$\|u\|_p > \left(\frac{p^2 e}{n\mathcal{L}_p}\right)^{\frac{n}{p^2}} = R$$

dir. *(iii)* ün ispatını *(ii)* nin ispatına benzer şekilde yapılır. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi, Payne (1975) deki gibi aşağıdaki kümeleri ele alalım:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1 &= \{u \in X_0 : J(u) < d\}, & \mathcal{W}_2 &= \{u \in X_0 : J(u) = d\},\\
\mathcal{W}_1^+ &= \{u \in \mathcal{W}_1 : I(u) > 0\}, & \mathcal{W}_2^+ &= \{u \in \mathcal{W}_2 : I(u) > 0\},\\
\mathcal{W}_1^- &= \{u \in \mathcal{W}_1 : I(u) < 0\}, & \mathcal{W}_2^- &= \{u \in \mathcal{W}_2 : I(u) < 0\},\\
\mathcal{W} &= \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2, \qquad \mathcal{W}^+ = \mathcal{W}_1^+ \cup \mathcal{W}_2^+, \qquad \mathcal{W}^- = \mathcal{W}_1^- \cup \mathcal{W}_2^-
\end{aligned}$$

Tanım 5.1.1. (Zayıf çözüm). $u(0) = u_0 \in X_0$ başlanğıç koşulunu sağlıyorsa $[0,T]$ aralığında $u \in L^\infty(0,T;X_0)$ fonksiyonunu $u_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ ile (5.1) probleminin bir zayıf çözümü olarak tanımlayabiliriz. Burada, $w \in X_0$ ve $t \in [0,T]$ için

$$\langle u_t, w\rangle + \left\langle |\Delta u|^{p-1}, \Delta w\right\rangle + \langle \nabla u_t, \nabla w\rangle = \int_\Omega u\,|u|^{q-2}\ln(|u|)\,w dx$$

dir.

5.2. Global Varlık ve Polinomal Azalma

Bu kısımda (5.1) probleminin çözümlerinin global varlık ile ilgili teorem ifade edilecek ve ispatı yapılacak, ayrıca çözümlerin polinomal azaldığı gösterilecektir.

Teorem 5.2.1. $u_0 \in \mathcal{W}^+$, $0 < J(u_0) < M$ ve $I(u) > 0$ olsun. $u(0) = u_0$ koşulunu sağlayan (5.1) probleminin bir tek u global zayıf çözümü vardır. Buradan, $u(t) \in \mathcal{W}^+$ tüm $0 \le t < +\infty$ için sağlar ve enerji kestirimi

$$\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,ds + J(u(t)) \le J(u_0)$$

şeklindedir. Ayrıca, $u_0 \in \mathcal{W}_1^+$ sağlayan çözüm polinomal azalır.

İspat. Teoremin ispatı için Faedo-Galerkin metodunu kullanacağız. $\{w_j\}_{j=1}^\infty$, $W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ uzayında sonlu ortogonal bir bazı olsun ve

$$V_m = span\{w_1, w_2, ..., w_m\}$$

olarak alalım. u_{0m}, V_m nin bir elemanı olsun, öyle ki $m \to \infty$ için

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} a_{mj} w_j \to u_0, \ W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \text{ da güçlü yakınsak} \tag{5.2.1}$$

alalım. Burada, (5.1) probleminin $u_m(x,t)$ yaklaşık çözümünü

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} a_{mj}(t) w_j(x) \tag{5.2.2}$$

şeklinde bulabiliriz. Burada, a_{mj} $(1 \leq j \leq m)$ katsayıları $a_{mj}(0) = a_{mj}, \quad j \in \{1,2,...,m\}$ başlangıç koşullarına sahip $i \in \{1,2,...,m\}$ için

$$\int_\Omega u_{mt} w_i dx + \int_\Omega |\Delta u_m|^{p-1} \Delta w_i dx + \int_\Omega \nabla u_{mt} \nabla w_i dx = \int_\Omega u |u_m|^{q-2} \ln(|u_m|) w_i dx \tag{5.2.3}$$

adi diferansiyel denklemleri sağlar. (5.2.3) ün her iki tarafı a'_{mi} $(i = 1,...,m)$ ile çarpılıp, $[0,t]$ aralığında integral alınırsa

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds + J(u_m(t)) \leq J(u_{0m}), \quad 0 \leq t \leq T_{\max} \tag{5.2.4}$$

elde edilir. Burada $T_{\max}$, $u_m(t)$ çözümünün maksimal varlık zamanıdır. $T_{\max} = +\infty$ olduğunu kanıtlayalım. (5.2.1), (5.2.4) ve J fonksiyoneli sürekliliğinden

$$m \to \infty \text{ için } J(u_m(0)) \to J(u_{0m}) \tag{5.2.5}$$

olur. $J(u_0) < d$, J fonksiyoneli sürekliliği ve (5.2.5) ten m yeterince büyük seçilirse

$$J(u_{0m}) < d$$

bulunur. Bu nedenle, (5.2.4) ten

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds + J(u_m(t)) < d, \quad 0 \leq t \leq T_{\max} \tag{5.2.6}$$

elde edilir. Şimdi, m yeterince büyük iken

$$u_m(t) \in \mathcal{W}_1^+, \quad t \in [0, T_{\max}) \tag{5.2.7}$$

olduğunu gösterelim. (5.2.7) nin geçerli olmadığını varsayalım ve $u_m(t_0) \notin \mathcal{W}_1^+$ olacak şekilde yeterince küçük t_0 zamanı olduğunu ele alalım. O halde $u_m(t_0) \in \partial\mathcal{W}_1^+$ dir. Böylece

$$J(u_m(t_0)) = d \tag{5.2.8}$$

ya da

$$I(u_m(t_0)) = 0 \tag{5.2.9}$$

olur. Yine de, d tanımından (5.2.8) in (5.2.6) tarafından oluşamayacağı açıktır. Eğer (5.2.9) sağlarsa

$$J(u_m(t_0)) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) = d$$

olur. Bu da (5.2.6) ile çelişir. Bu nedenle (5.2.7) sağlar öyle ki m yeterince büyük iken $t \in [0, T_{\max})$ için $I(u_m(t)) > 0$ ve $J(u_m(t)) < d$ dir. Böylece, (5.4) ten

$$\begin{aligned} d &> J(u_m(t)) \\ &= \frac{1}{q} I(u_m) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|\Delta u_m\|_p^p + \frac{1}{q^2} \|u_m\|_q^q \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|\Delta u_m\|_p^p + \frac{1}{q^2} \|u_m\|_q^q \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\|u_m(t)\|_q^q < q^2 d \tag{5.2.10}$$

ve

$$\|\Delta u_m\|_p^p < \frac{pq}{q-p} d \tag{5.2.11}$$

olur. $u_m(x,t) \in \mathcal{W}_1^+$ olduğundan (5.4) ten $J(u_m) \geq 0$ dir. Buradan (5.2.6) dan

$$\int_0^t \|u_{ms}(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \, ds < d \tag{5.2.12}$$

olur. (5.2.11) den

$$T_{\max} = +\infty$$

olduğu bilinir. (5.2.10) ve (5.2.12) den $u \in X_0$ vardır ve $\{u_m\}_{j=1}^{\infty}$ bir alt dizisine sahipir, öyle ki $m \longrightarrow \infty$ iken

$$u_m \to u, \quad L^\infty(0, \infty; W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)) \text{ da zayıf* yakınsak,} \tag{5.2.13}$$

$$u_{mt} \to u_t, \quad L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \text{ da zayıf yakınsak,} \tag{5.2.14}$$

$$|\Delta u|^{p-2} \Delta u \to \chi, \; L^\infty\left(0, \infty; W^{-2,p'}(\Omega)\right) \text{ da zayıf yakınsak}$$

olur. (5.2.13), (5.2.14) ve Aubin-Lions lemmasından

$u_m \to u, \quad C([0,+\infty]; L^2(\Omega))$ güçlü yakınsak

olur. Buradan $(x,t) \in \Omega \times (0,+\infty)$ için

$$u_m \left|u_m\right|^{q-2} \ln \left|u_m\right| \to u \left|u\right|^{q-2} \ln \left|u\right| \tag{5.2.15}$$

olur. Ayrıca

$\beta > 1$ için $\beta^{q-1} \ln \beta = -(e\,(q-1))^{-1}$

ve

$\beta > 0$ için $\ln \beta = 2 \ln \left(\beta^{\frac{1}{2}}\right) \leq 2\beta^{\frac{1}{2}}$

olduğu bilinir. (5.2.10) dan

$\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u_m(t)| \leq 1\}$ ve $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |u_m(t)| \geq 1\}$

için

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|u_m(t)|^{q-1} \ln |u_m(t)|\right)^{\frac{2q}{2q-1}} dx &= \int_{\Omega_1} \left(|u_m(t)|^{q-1} \ln |u_m(t)|\right)^{\frac{2q}{2q-1}} dx \\
&\quad + \int_{\Omega_2} \left(|u_m(t)|^{q-1} \ln |u_m(t)|\right)^{\frac{2q}{2q-1}} dx \\
&\leq [e\,(q-1)]^{-\frac{2q}{2q-1}} |\Omega| \\
&\quad + 2^{\frac{2q}{2q-1}} \int_{\Omega_2} |u_m(t)|^{\frac{2q\left(q-1+\frac{1}{2}\right)}{2q-1}} dx \\
&= [e\,(q-1)]^{-\frac{2q}{2q-1}} |\Omega| + 2^{\frac{2q}{2q-1}} \int_{\Omega_2} |u_m(t)|^q dx \\
&\leq C_d := [e\,(q-1)]^{-\frac{2q}{2q-1}} |\Omega| \\
&\quad + 2^{\frac{2q}{2q-1}} q^2 d
\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

bulunur. Böylece, (5.2.15) ve (5.2.16) dan

$u_m \left|u_m\right|^{q-2} \ln \left|u_m\right| \to u \left|u\right|^{q-2} \ln \left|u\right|$

$L^\infty(0,+\infty; L^{\frac{2q}{2q-1}}(\Omega))$ da zayıf* yakınsak olur. (5.2.3), $t \in [0,\infty)$ aralığında t ye göre integral alınırsa

$$\langle u_t, w\rangle + \langle \chi(t), \Delta w\rangle + \langle \nabla u_t, \nabla w\rangle = \int_\Omega u \left|u\right|^{p-2} \ln\left(|u|\right) w dx$$

bulunur. Burada $w \in W_0^{2,p}(\Omega)$ dir. Son olarak, monoton operatörler teorisinin iyi bilinen argümanları

$$\chi = |\Delta u|^{p-2} \Delta u$$

ima eder ve buradan

$$\langle u_t, w \rangle + \left\langle |\Delta u|^{p-1}, \Delta w \right\rangle + \langle \nabla u_t, \nabla w \rangle = \int_\Omega u |u|^{p-2} \ln |u| \, w dx$$

elde edilir. Böylece, (5.1) probleminin bir $u_0 \in \mathcal{W}_1^+$ global zayıf çözümü vardır.

Polinomal Azalma

Son olarak, enerji azalmasını gösterelim. $u_0 \in \mathcal{W}_1^+$ olduğundan (5.2.4) ten $t \in [0,T]$ için

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|\Delta u\|_p^p + \frac{1}{q^2} \|u\|_q^q \leq J(u(t)) \leq J(u_0)$$

olur. (5.4) ve Lemma 3.4.8 den $p\left(\frac{J(u_0)}{M}\right)^{\frac{p}{n}} < \mu < p$ seçildiğinde

$$\begin{aligned} I(u(t)) &\geq \left(1 - \frac{\mu}{p}\right) \|\Delta u\|_p^p + \left(\frac{n}{p^2} \ln\left(\frac{p\mu e}{n\boldsymbol{\mathcal{L}}_p}\right) - \ln \|u(t)\|_p\right) \|u(t)\|_p^p \\ &\geq \left(1 - \frac{\mu}{p}\right) \|\Delta u\|_p^p + \frac{1}{p} \ln\left(\frac{M}{J(u_0)} \left(\frac{\mu}{p}\right)^{\frac{n}{p}}\right) \|u(t)\|_p^p \\ &= C_1 \|u(t)\|_{W^{2,p}(\Omega)}^p \end{aligned}$$

elde edilir. $I(u(s))$, (t,T) üzerinde s ya göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_t^T I(u(s)) ds &= -\int_t^T \int_\Omega u_s(s) u(s) dx ds - \int_t^T \int_\Omega \nabla u_s(s) \nabla u(s) dx ds \\ &= \frac{1}{2} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|u(T)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C_2 \|u(t)\|_{W^{2,p}(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

elde edilir. Burada C_2, $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ gömülme sabitidir. (5.2.17) den $\forall t \in [0,T]$ için

$$\int_t^T \|u(t)\|_{W^{2,p}(\Omega)}^p ds \leq \frac{1}{\omega} \|u(t)\|_{W^{2,p}(\Omega)}^2 \tag{5.2.18}$$

bulunur. (5.2.18) de $T \to +\infty$ iken

$$\int_t^\infty \|u(t)\|_{W^{2,p}(\Omega)}^p ds \leq \frac{1}{\omega} \|u(t)\|_{W^{2,p}(\Omega)}^2$$

3.6 dan $t \geq 0$ için

$$\|u(t)\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \|u_0\|_{W^{2,p}(\Omega)} \left(\frac{p}{2 + \omega \|u_0\|^{p-2}_{W_0^{2,p}(\Omega)} (p-2)\, t} \right)^{\frac{1}{p-2}}$$

elde edilir. Burada $\sigma = \frac{p}{2} - 1$, $f(t) = \|u(t)\|^2_{W^{2,p}(\Omega)}$, $f(0) = 1$ dir. Böylece, u çözümü polinomal azalır.

6. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ YÜKSEK MERTEBEDEN PARABOLİK DENKLEM

Bu bölümde

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{P}u = u^{r-2}u\ln|u|, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ D^{\gamma}u(x,t) = 0, \quad |\gamma| \leq m-1, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

yüksek mertebeden parabolik denklemin çözümlerinin davranışını ele alacağız (Cömert ve Piskin, 2022b). Burada $\mathcal{P} = (-\Delta)^m,\ m \geq 1$ a pozitif tamsayı, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ çoklu index, γ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ pozitif tamsayılar, $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n$, $D^{\gamma} = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} ... \partial x_n^{\gamma_n}}$ türev operatörü, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ Laplace operatörü ve r parametresi

$$\begin{cases} 2 \leq r \leq +\infty, & n \leq 2m, \\ 2 \leq r \leq \frac{2n}{n-2m}, & n > 2m \end{cases}$$

şeklindedir.

$H^m(\Omega)$ uzayının normu $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\gamma| \leq m} \|D^{\gamma}u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$, $L^r(\Omega)$ uzayının normu $\|.\|_r$ ve $L^2(\Omega)$ uzayının normu $\|.\|$ şeklinde olsun. Ayrıca $H_0^m(\Omega)$ uzayı $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının $H^m(\Omega)$ uzayındaki kapanışını göstersin.

$u \in H_0^m(\Omega) \backslash \{0\}$ için enerji fonksiyoneli

$$J(u) = \frac{1}{2} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{1}{r^2} \|u\|_r^r - \frac{1}{r} \int_{\Omega} |u|^r \ln|u| \, dx \tag{6.2}$$

ve Nehari fonksiyoneli

$$I(u) = \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 - \int_{\Omega} |u|^r \ln|u| \, dx \tag{6.3}$$

şeklinde tanımlayalım. (6.2) ve (6.3) ten

$$J(u) = \frac{1}{r} I(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{1}{r^2} \|u\|_r^r \tag{6.4}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) \tag{6.5}$$

potansiyel derinlik ve

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^m(\Omega) \backslash \{0\} : I(u) = 0\}$$

Nehari manifold olarak seçelim.

6.1. Giriş

Bu kısımda teoremimizin ispatı için kullanılacak lemmalardan oluşmaktadır.

Lemma 6.1.1. $J(t)$, $t \geq 0$ için artmayan fonksiyon ve

$$J'(u) = -\int_\Omega u_t^2 dx \leq 0 \tag{6.1.1}$$

bulunur.

İspat. (6.1) denklemini u_t ile çarpıp Ω üzerinde integral alınırsa

$$\int_\Omega u_t^2 dx + \int_\Omega \mathcal{P} u u_t dx = \int_\Omega u^{r-1} u_t \ln|u| \, dx$$

elde edilir. Buradan

$$\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u\right\|^2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^r \ln|u| \, dx - \frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}\|u\|_r^r$$

ve

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u\right\|^2 + \frac{1}{r^2}\|u\|_r^r - \frac{1}{r}\int_\Omega |u|^r \ln|u| \, dx\right) = -\int_\Omega u_t^2 dx \tag{6.1.2}$$

elde edilir. (6.2) ve (6.1.2) den

$$\frac{d}{dt}J(u) = -\int_\Omega u_t^2 dx \tag{6.1.3}$$

olur. Ayrıca, $[0, t]$ üzerinde t ye göre (6.1.3) ü integral alınırsa

$$J(u(t)) + \int_0^t \|u_s(\tau)\|^2 d\tau = J(u_0) \tag{6.1.4}$$

elde edilir.

Lemma 6.1.2. $u \in H_0^m(\Omega) \backslash \{0\}$ ve $j(\lambda) = J(\lambda u)$ olsun. O halde

(i) $\lim_{\lambda\to 0^+} j(\lambda) = 0$ ve $\lim_{\lambda\to+\infty} j(\lambda) = -\infty$ dur;

(ii) Bir tek $\lambda^* > 0$ öyle ki $j'(\lambda^*) = 0$ dır;

(iii) $j(\lambda)$ fonksiyonu $(0, \lambda^*)$ aralığında artan $(\lambda^*, +\infty)$ aralığında azalan ve λ^* noktasında maksimum değere sahiptir;

(iv) $\lambda \in (0, \lambda^*)$ için $I(\lambda u) > 0$, $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ için $I(\lambda u) < 0$ ve $I(\lambda^* u) = 0$ dır.

İspat. $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ için j fonksiyonu tanımından

$$j(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{\lambda^r}{r^2}\|u\|_r^r - \frac{\lambda^r}{r}\ln\lambda\,\|u\|_r^r - \frac{\lambda^r}{r}\int_\Omega |u|^r \ln|u|\,dx \tag{6.1.5}$$

elde edilir. (6.1.5) ten

$$\frac{d}{d\lambda}j(\lambda) = \lambda\left(\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \lambda^{r-2}\ln\lambda\,\|u\|_r^r - \lambda^{r-2}\int_\Omega |u|^r\ln|u|\,dx\right)$$

bulunur. $\phi(\lambda) = \lambda^{-1}j'(\lambda)$ olarak seçelim. Buradan

$$\phi(\lambda) = \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \lambda^{r-2}\ln\lambda\,\|u\|_r^r - \lambda^{r-2}\int_\Omega |u|^r\ln|u|\,dx$$

olur ve $\phi(\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre türevini alırsak

$$\phi'(\lambda) = -\lambda^{r-3}\|u\|_r^r - (r-2)\lambda^{r-3}\ln\lambda\,\|u\|_r^r - (r-2)\lambda^{r-3}\int_\Omega |u|^r\ln|u|\,dx$$

elde edilir. Buradan bir tek $\lambda^* > 0$ vardır öyle ki $(0, \lambda^*)$ aralığında $\phi'(\lambda) > 0$, $(\lambda^*, +\infty)$ aralığında $\phi'(\lambda) < 0$ ve λ^* noktasında $\phi'(\lambda) = 0$ dır. Böylece, $\phi(\lambda)$ foksiyonu $(0, \lambda^*)$ aralığında artan, $(\lambda^*, +\infty)$ aralığında azalandır. $\lim_{\lambda\to 0^+}\phi(\lambda) > 0$ ve $\lim_{\lambda\to+\infty}\phi(\lambda) = -\infty$ olduğu için bir tek $\lambda^* > 0$ vardır öyle ki $\phi(\lambda^*) = 0$ dır, yani $j'(\lambda^*) = 0$ dır. Ayrıca, $j'(\lambda) = \lambda\phi(\lambda)$ fonksiyonu $(0, \lambda^*)$ aralığında pozitif, $(\lambda^*, +\infty)$ aralığında negatiftir. Böylece, $j(\lambda)$ fonksiyonu $(0, \lambda^*)$ aralığında artan, $(\lambda^*, +\infty)$ aralığında azalan ve λ^* noktasında maksimum değere sahiptir. (6.3) ten

$$\begin{aligned} I(\lambda u) &= \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}(\lambda u)\right\|^2 - \int_\Omega |\lambda u|^r \ln|\lambda u|\,dx \\ &= \lambda^2\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \lambda^r\ln\lambda\,\|u\|_r^r - \lambda^r\int_\Omega |u|^r\ln|u|\,dx \\ &= \lambda j'(\lambda) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $\lambda \in (0, \lambda^*)$ için $I(\lambda u) > 0$, $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ için $I(\lambda u) < 0$ ve $I(\lambda^* u) = 0$. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi (Payne, 1975) deki gibi aşağıdaki kümeleri ele alalım:

$$\mathcal{W}_1 = \{u \in H_0^m(\Omega)\backslash\{0\} : J(u) < d\}, \qquad \mathcal{W}_2 = \{u \in H_0^m(\Omega)\backslash\{0\} : J(u) = d\},$$
$$\mathcal{W}_1^+ = \{u \in \mathcal{W}_1 : I(u) > 0\}, \qquad \mathcal{W}_2^+ = \{u \in \mathcal{W}_2 : I(u) > 0\},$$
$$\mathcal{W}_1^- = \{u \in \mathcal{W}_1 : I(u) < 0\}, \qquad \mathcal{W}_2^- = \{u \in \mathcal{W}_2 : I(u) < 0\},$$
$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2, \qquad \mathcal{W}^+ = \mathcal{W}_1^+ \cup \mathcal{W}_2^+, \qquad \mathcal{W}^- = \mathcal{W}_1^- \cup \mathcal{W}_2^-$$

6.2. Global Varlık ve Üstel Azalma

Bu kısımda (6.1) probleminin çözümlerinin global varlık ile ilgili teorem ifade edilecek ve ispatı yapılacak, ayrıca çözümlerin üstel azalması gösterilecektir.

Teorem 6.2.1. $u_0 \in \mathcal{W}^+$ olsun. Bu durumda (6.1) probleminin bir tek u zayıf çözümü vardır. Buradan, $u(t) \in \mathcal{W}^+$ tüm $t \in [0, +\infty)$ için sağlar ve enerji kestirimi

$$J(u(t)) + \int_0^t \|u_s(s)\|^2 \, ds \leq J(u_0)$$

şeklindedir. Ayrıca, $u_0 \in \mathcal{W}_1^+$ sağlayan çözüm üstel azalır.

İspat. İspatı iki durumda inceleyeceğiz:

İlk önce $u_0 \in \mathcal{W}_1^+$ durumunu ele alalım. Teoremin ispatında Faedo-Galerkin metodunu kullanalım. $H_0^m(\Omega)$ uzayında $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ bazını alalım ve

$$V_s = span\{w_1, w_2, ..., w_s\}$$

sonlu ortogonal uzayını tanımlayalım. u_{0s}, V_s uzayının bir elemanı olsun öyle ki $s \to \infty$ iken

$$H_0^m(\Omega) \text{ uzayında } u_{0s} = \sum_{j=1}^{s} a_{sj} w_j \to u_0 \tag{6.2.1}$$

olur. Buradan, (6.1) probleminin $u_s(x,t)$ yaklaşık çözümünü

$$u_s(x,t) = \sum_{j=1}^{s} a_{sj}(t) w_j(x) \tag{6.2.2}$$

şeklinde seçelim. Burada a_{sj} $(1 \leq j \leq s)$ katsayıları $a_{sj}(0) = a_{sj}, \quad j \in \{1, 2, ..., s\}$ başlangıç koşullarına sahip, $i \in \{1, 2, ..., s\}$ için

$$\int_\Omega u_{st} w_i dx + \int_\Omega \mathcal{P} u_s w_i dx = \int_\Omega |u_s|^{r-2} u_s \ln |u_s| \, w_i dx \tag{6.2.3}$$

adi diferansiyel denklemleri sağlar. (6.2.3) eşitliğini a'_{si} $(i = 1, ..., s)$ ile çarpıp $[0, t]$ üzerinde zaman değişkenine göre integral alırsak

$$J(u_s(t)) + \int_0^t \|u_{s\tau}(\tau)\|^2 \, d\tau \leq J(u_{0s}), \quad 0 \leq t \leq T_{\max} \tag{6.2.4}$$

elde edilir. Burada $T_{\max}$, $u_s(t)$ çözümünün maksimal varlık zamanıdır. $T_{\max} = +\infty$ olduğunu kanıtlayalım. (6.2.1), (6.2.4) ve J fonksiyoneli sürekliliğinden $s \to \infty$ iken

$$J(u_s(0)) \to J(u_{0s}) \tag{6.2.5}$$

olur. $J(u_0) < d$, J fonksiyoneli sürekliliği ve (6.2.5) ten

$$J(u_{0s}) < d$$

bulunur. Bu nedenle, s yeterince büyük seçilirse (6.2.4) ten

$$J(u_s(t)) + \int_0^t \|u_{s\tau}(\tau)\|^2 \, d\tau < d, \quad 0 \leq t \leq T_{\max} \tag{6.2.6}$$

elde edilir. Şimdi, s yeterince büyük iken

$$u_s(t) \in \mathcal{W}_1^+, \quad t \in [0, T_{\max}) \tag{6.2.7}$$

olduğunu gösterelim. (6.2.7) nin geçerli olmadığını varsayalım ve $u_s(t_0) \notin \mathcal{W}_1^+$ olacak şekilde yeterince küçük t_0 zamanı olduğunu ele alalım. O halde $u_s(t_0) \in \partial\mathcal{W}_1^+$ dir. Böylece

$$J(u_s(t_0)) = d \tag{6.2.8}$$

ya da

$$I(u_s(t_0)) = 0 \tag{6.2.9}$$

olur. Yine de, d tanımından (6.2.8) in (6.2.6) tarafından oluşamayacağı açıktır. Eğer (6.2.9) sağlarsa

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) \leq J(u_s(t_0))$$

olur. Bu da (6.2.6) ile çelişir. Bu nedenle (6.2.7) sağlar öyle ki s yeterince büyük iken $t \in [0, T_{\max})$ için $J(u_s(t)) < d$ ve $I(u_s(t)) > 0$ dir. Böylece, (6.4) ten

$$\begin{aligned} d &> J(u_s(t)) \\ &= \frac{1}{r} I(u_s(t)) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u_s(t) \right\|^2 + \frac{1}{r^2} \|u_s(t)\|_r^r \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u_s(t) \right\|^2 + \frac{1}{r^2} \|u_s(t)\|_r^r \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\|u_s(t)\|_r^r < r^2 d \tag{6.2.10}$$

ve

$$\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u_s(t) \right\|^2 < \frac{2r}{r-2} d \tag{6.2.11}$$

olur. $u_s(x,t) \in \mathcal{W}_1^+$ olduğundan (6.4) ten $J(u_s) \geq 0$ dir. Buradan (6.2.6) dan

$$\int_0^t \|u_{s\tau}(\tau)\|^2 \, d\tau < d \tag{6.2.12}$$

olur. (6.2.11) den

$T_{\max} = +\infty$

olduğu bilinir. Diğer yandan her s için (6.2.10) ve (6.2.12) elde edebiliriz. Ayrıca, $\{u_s\}_{j=1}^{\infty}$ bir alt dizine sahip, öyle ki $s \longrightarrow \infty$ iken

$u_s \to u, \quad L^\infty(0, \infty; H_0^m(\Omega))$ da zayıf* yakınsak, (6.2.13)

$u_{st} \to u_t, \quad L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$ da zayıf yakınsak (6.2.14)

olur. (6.2.13), (6.2.14) ve Aubin-Lions lemmasından

$u_s \to u, \quad C([0, +\infty]; L^2(\Omega))$ da güçlü yakınsak

olur. Buradan, $(x,t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ için

$$|u_s|^{r-2} u_s \ln |u_s| \to |u|^{r-2} u \ln |u| \tag{6.2.15}$$

olur. Ayrıca

$\beta > 1$ için $\beta^{r-1} \ln \beta = -(e\,(r-1))^{-1}$

ve

$\beta > 0$ için $\ln \beta = 2 \ln \left(\beta^{\frac{1}{2}} \right) \leq 2\beta^{\frac{1}{2}}$

olduğu bilinir. (6.2.10) den

$\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u_s(t)| \leq 1\}$ ve $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |u_s(t)| \geq 1\}$

için

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(|u_s(t)|^{r-1} \ln |u_s(t)| \right)^{\frac{2r}{2r-1}} dx &= \int_{\Omega_1} \left(|u_s(t)|^{r-1} \ln |u_s(t)| \right)^{\frac{2r}{2r-1}} dx \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \left(|u_s(t)|^{r-1} \ln |u_s(t)| \right)^{\frac{2r}{2r-1}} dx \\ &\leq [e(r-1)]^{-\frac{2r}{2r-1}} |\Omega| \\ &\quad + 2^{\frac{2r}{2r-1}} \int_{\Omega_2} |u_s(t)|^{\frac{2r\left(r-1+\frac{1}{2}\right)}{2r-1}} dx \\ &= [e(r-1)]^{-\frac{2r}{2r-1}} |\Omega| + 2^{\frac{2r}{2r-1}} \int_{\Omega_2} |u_s(t)|^r dx \\ &\leq C_d := [e(r-1)]^{-\frac{2r}{2r-1}} |\Omega| \\ &\quad + 2^{\frac{2r}{2r-1}} r^2 d \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

bulunur. Böylece, (6.2.15) ve (6.2.16) dan $L^\infty(0, +\infty; L^{\frac{2r}{2r-1}}(\Omega))$ uzayında

$|u_s|^{r-2} u_s \ln |u_s| \to |u|^{r-2} u \ln |u|$

zayıf* yakınsak olur. (6.2.3) ifadesi $0 \leq t < \infty$ aralığında t ye göre integral alınırsa

$\langle u_t, w_i \rangle + \left\langle \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u, \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} w_i \right\rangle = \left\langle |u|^{r-2} u \ln |u|, w_i \right\rangle$

bulunur. Böylece, (6.1) probleminin bir $u_0 \in \mathcal{W}_1^+$ global zayıf çözümü vardır.

Şimdi $u_0 \in \mathcal{W}_2^+$ durumunu ele alalım. Önce bir $\{\omega_s\}_{s=1}^\infty \subset (0,1)$ dizisi seçelim öyle ki $\lim_{s\to\infty} \omega_s = 1$ dir. Sonra, $u_{0s} = \omega_s u_0$ olacak şekilde

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{P}u = u^{r-2} u \ln |u|, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ D^\gamma u(x,t) = 0, \quad |\gamma| \leq m-1, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_{0s}(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{6.2.17}$$

problemini ele alalım. $I(u_0) > 0$ ve Lemma 6.1.2 den bir $\lambda^* > 1$ var olduğu görülür. Ayrıca, $J(u_{0s}) = J(\omega_s u_0) < J(u_0) = d$ ve $I(u_{0s}) = I(\omega_s u_0) > 0$

sağlanır. Bu da, $u_0 \in \mathcal{W}_2^+$ anlamına gelir. Önceki duruma benzer argümanları kullanarak, (6.2.17) problemini bir u_s global zayıf çözümü kabul ettiği görülür. Buradan $H_0^m(\Omega)$ uzayında $u_s(0) = u_{0s} = \omega_s u_0 \to u_0$ başlangıç şartlarına sahip

$$u_s \in L^\infty(0,\infty; H_0^m(\Omega)), u_{st} \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$$

sağlar. Böylece en az bir $w \in H_0^m(\Omega)$ ve her $0 \leq t < \infty$ için

$$\int_\Omega u_{st} w dx + \int_\Omega \mathcal{P} u_s w dx = \int_\Omega |u_s|^{r-2} u_s \ln |u_s| \, w dx \tag{6.2.18}$$

sağlar. Ayrıca,

$$u_s(t) \in \mathcal{W}_2^+, \quad t \in [0,\infty)$$

ve

$$J(u_s(t)) + \int_0^t \|u_{s\tau}(\tau)\|^2 d\tau \leq J(u_{0s}) < d$$

olur. Diğer yandan her s için (6.2.11), (6.2.12) ve (6.2.16) elde edebiliriz. Ayrıca, $\{u_s\}$ bir alt dizine sahiptir, öyle ki $s \longrightarrow \infty$ iken

$u_s \to u$, $L^\infty(0,\infty; H_0^m(\Omega))$ da zayıf* yakınsak,

$u_{st} \to u_t$, $L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$ da zayıf yakınsak,

$|u_s|^{r-2} u_s \ln |u_s| \to |u|^{r-2} u \ln |u|$, $L^\infty(0,+\infty; L^{\frac{2r}{2r-1}}(\Omega))$ da zayıf* yakınsak

dır. (6.2.18) $t \in [0,\infty)$ aralığında t ye göre integral alınırsa

$$\langle u_t, w\rangle + \left\langle \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u, \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} w \right\rangle = \left\langle |u|^{r-2} u \ln |u|, w \right\rangle$$

elde edilir. Bu nedenle, (6.1) probleminin bir global zayıf çözümü $u_0 \in \mathcal{W}_2^+$ vardır.

Üstel Azalma

$u_0 \in \mathcal{W}_1^+$ olduğundan (6.4) ten

$$\begin{aligned} J(u_0) &> J(u(t)) \\ &= \frac{1}{r} I(u(t)) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u(t)\right\|^2 + \frac{1}{r^2} \|u(t)\|_r^r \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u(t)\right\|^2 + \frac{1}{r^2} \|u(t)\|_r^r \end{aligned} \tag{6.2.19}$$

sonucunu çıkarabiliriz. Lemma 6.1.2, (6.5) ve $I(u(t)) > 0$ den bir $\lambda^* > 1$ vardır öyle ki $I(\lambda^* u(t)) = 0$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} d &\leq J(\lambda^* u(t)) \\ &= (\lambda^*)^r \left((\lambda^*)^{2-r} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u(t) \right\|^2 + \frac{1}{r^2} \|u(t)\|_r^r \right) \\ &\leq (\lambda^*)^r \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u(t) \right\|^2 + \frac{1}{r^2} \|u(t)\|_r^r \right) \end{aligned} \tag{6.2.20}$$

bulunur. (6.2.19) ve (6.2.20) den

$$d \leq (\lambda^*)^r J(u_0)$$

olur. Buradan

$$\lambda^* \geq \left(\frac{d}{J(u_0)} \right)^{\frac{1}{r}} \tag{6.2.21}$$

bulunur. (6.3) ten

$$\begin{aligned} 0 &= I(\lambda^* u(t)) \\ &= \left[(\lambda^*)^2 - (\lambda^*)^r \right] \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u(t) \right\|^2 \\ &\quad -(\lambda^*)^r \ln(\lambda^*) \|u(t)\|_r^r + (\lambda^*)^r I(u(t)) \end{aligned} \tag{6.2.22}$$

elde edilir. (6.2.21), (6.2.22) ve Lemma 6.1.1 den

$$\begin{aligned} I(u(t)) &\geq \left[1 - (\lambda^*)^{2-r} \right] \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u(t) \right\|^2 \\ &\geq \left[1 - \left(\frac{d}{J(u_0)} \right)^{\frac{2-r}{r}} \right] \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u(t) \right\|^2 \\ &\geq C_1 \|u(t)\|^2 \end{aligned} \tag{6.2.23}$$

bulunur. Burada C_1 bir pozitif sabittir. $I(u(\tau))$, (t, T) üzerinde τ ya göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_t^T I(u(\tau)) d\tau &= -\int_t^T \int_\Omega u_\tau(\tau) u(\tau) dx d\tau \\ &\leq \frac{C_2}{2} \|u(t)\|^2 \end{aligned} \tag{6.2.24}$$

elde edilir. Burada C_2 bir pozitif sabittir. (6.2.23) ve (6.2.24) ten $\forall t \in [0, T]$ için

$$\int_t^T C_1 \|u(t)\|^2 ds \leq \frac{C_2}{2} \|u(t)\|^2 \tag{6.2.25}$$

bulunur. (6.2.25) de $T \to +\infty$ iken

$$\int_t^{\infty} \|u(t)\|^2 \, ds \leq C_3 \|u(t)\|^2$$

olur, burada $C_3 = \frac{C_2}{2C_1}$ şeklindedir. 3.6 dan $t \in [0, \infty)$ için

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{1-\frac{t}{C_3}}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

6.3. Üstel Büyüme (Sonsuzda Patlama)

Bu kısımda (6.1) probleminde $r = 2$ seçelim. O halde problemimiz

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{P}u = u \ln |u| , & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ D^{\gamma} u(x,t) = 0, \quad |\gamma| \leq m-1, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_{0s}(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{6.3.1}$$

dönüşür. Şimdi (6.3.1) probleminin $u(t)$, zayıf çözümünün $+\infty$ patladığını gösterelim.

Teorem 6.3.1. Kabul edelim ki $u_0 \in H_0^m(\Omega)\backslash\{0\}$, $J(u_0) < d$ ve $I(u_0) < 0$ olsun. $u(t)$, (6.3.1) probleminin bir zayıf çözümü olsun. O halde, $u(t)$, $+\infty$ da patlar öyle ki

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t)\|^2 = \infty$$

olur.

İspat. $u(t)$, (6.3.1) probleminin zayıf çözümü, $u_0 \in H_0^m(\Omega)\backslash\{0\}$, $J(u_0) < d$ ve $I(u_0) < 0$ olsun. $\eta : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$

$$\eta(t) = \int_0^t \|u(s)\|^2 \, ds \tag{6.3.2}$$

olacak sekilde bir fonksiyon seçelim. Buradan

$$\eta'(t) = \|u(t)\|^2 \tag{6.3.3}$$

ve

$$\begin{aligned} \eta''(t) &= 2 \int_{\Omega} u u_t dx \\ &= -2 \int_{\Omega} \mathcal{P}u^2 dx + 2 \int_{\Omega} u^2 \ln |u| \, dx \\ &= -2I(u) \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

bulunur. (6.3.3) ve (6.3.4) ten

$$\begin{aligned}\eta'(t)\ln\eta'(t)-\eta''(t) &= 2I(u)+\|u(t)\|^2\ln\|u(t)\|^2\\ &= 2\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2-2\int_\Omega |u|^2\ln|u|\,dx+2\|u(t)\|^2\ln\|u(t)\|\\ &\geq 0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$(\ln\eta'(t))'\leq \ln\eta'(t)$$

ve

$$\ln\eta'(t)\leq e^t\ln\eta'(0)=e^t\ln\|u_0\|^2$$

olduğu görülür. Böylece, $\forall t\geq 0$ için

$$\|u(t)\|^2\leq\|u_0\|^{e^t}$$

olur, bu da $u(t)$ nin sonlu zamanda patlamadığını gösterir.

Diğer yandan, Hölder eşitsizliğini kullanarak ve (6.3.4) ten

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\eta'(t))^2 &= \frac{1}{4}\left(\int_0^t \eta\prime\prime(s)ds\right)^2\\ &= \left(\int_0^t\int_\Omega uu_s dxds\right)^2\\ &\leq \int_0^t\|u(s)\|^2 ds\int_0^t\|u_s\|^2 ds \qquad (6.3.5)\end{aligned}$$

elde edilir. (6.3.4) ten

$$\begin{aligned}\eta''(t) &= -2I(u)\\ &= -4J(u)+\|u\|^2\\ &\geq -4J(u_0)+4\int_0^t\|u_s(s)\|^2 ds+\|u\|^2 \qquad (6.3.6)\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 6.1.2 den bir $\lambda^*\in(0,1)$ vardır, öyle ki $I(\lambda^*u(t))=0$ dır. Buradan, d nin tanımından

$$\begin{aligned}d &= \inf_{u\in\mathcal{N}}J(u)\\ &\leq J(\lambda^*u(t))\\ &= \frac{1}{4}\|\lambda^*u(t)\|^2+\frac{1}{2}I(\lambda^*u(t))\\ &= \frac{(\lambda^*)^2}{4}\|u(t)\|^2+\frac{1}{2}I(\lambda^*u(t))\\ &\leq \frac{1}{4}\|u(t)\|^2 \qquad (6.3.7)\end{aligned}$$

bulunur. (6.3.6) ve (6.3.7) den

$$\begin{aligned}\eta''(t) &\geq -4J(u_0) + 4\int_0^t \|u_s(s)\|^2\, ds + \|u\|^2 \\ &\geq 4\left(d - J(u_0)\right) + 4\int_0^t \|u_s(s)\|^2\, ds \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

elde edilir. (6.3.2), (6.3.5) ve (6.3.8) den

$$\begin{aligned}\eta(t)\eta''(t) &\geq 4\left(d - J(u_0)\right)\eta(t) + 4\int_0^t \|u(s)\|^2 \|u_s(s)\|^2\, ds \\ &\geq 4\left(d - J(u_0)\right)\eta(t) + \left(\eta'(t)\right)^2 \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

bulunur. Buradan

$$\eta(t)\eta''(t) - \left(\eta'(t)\right)^2 \geq 4\left(d - J(u_0)\right)\eta(t)$$

olduğu görülür. $J(u_0) < d$ ve $I(u) < 0$ olduğundan

$$\eta(t)\eta''(t) - \left(\eta'(t)\right)^2 > 0$$

dir. Buradan

$$\left(\ln \eta(t)\right)' = \frac{\eta'(t)}{\eta(t)} \tag{6.3.10}$$

ve

$$\left(\ln \eta(t)\right)'' = \frac{\eta(t)\eta''(t) - \left(\eta'(t)\right)^2}{\left(\eta(t)\right)^2} > 0 \tag{6.3.11}$$

olduğu kolayca görülür. (6.3.11) den $\left(\ln \eta(t)\right)'$ nin t ye göre artan olduğu bilinir. Bu gerçeği kullanarak (6.3.10) eşitliğini t_0 dan t ye integral alırsak

$$\left(\ln \eta(t)\right)' = \left(\ln \eta(t_0)\right)' + \int_{t_0}^t \frac{\eta(s)\eta''(s) - \left(\eta'(s)\right)^2}{\left(\eta(s)\right)^2} ds$$

ve $0 \leq t_0 \leq t$ için

$$\begin{aligned}\ln \eta(t) - \ln \eta(t_0) &= \int_{t_0}^t \left(\ln \eta(s)\right)' ds \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} ds \\ &\geq \frac{\eta'(t_0)}{\eta(t_0)}\left(t - t_0\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\eta(t) \geq \eta(t_0) \exp\left(\frac{\eta'(t_0)}{\eta(t_0)}\left(t - t_0\right)\right)$$

olur. $\eta(0) = 0$ ve $\eta'(0) > 0$ olduğundan t_0 ı yeterince küçük seçersek $\eta'(t_0) > 0$ ve $\eta(t_0) > 0$ alabiliriz. Buradan t yeterince büyük seçilirse $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2 &= \eta'(t) \\
&\geq \frac{\eta'(t_0)}{\eta(t_0)}\eta(t) \\
&\geq \eta'(t_0)\exp\left(\frac{\eta'(t_0)}{\eta(t_0)}(t-t_0)\right) \\
&= \|u(t_0)\|^2\exp\left(\frac{\eta'(t_0)}{\eta(t_0)}(t-t_0)\right) \\
&\geq \|u_0\|^2\exp\left(\frac{\eta'(t_0)}{\eta(t_0)}(t-t_0)\right)
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(t)\|^2 = +\infty$$

bulunur. Bu da (6.3.1) probleminin $u(t)$ zayıf çözümünün $+\infty$ da patladığını gösterir.

6.4 Patlama

Bu kısımda (6.1) probleminde güçlü damping terim ekleyelim. O halde problemimiz

$$\begin{cases}
u_t + \mathcal{P}u - \Delta u_t = |u|^{r-2}u\ln|u|, & x\in\Omega, \quad t>0; \\
D^\gamma u(x,t) = 0, \quad |\gamma| \leq m-1, & x\in\partial\Omega, \quad t>0; \\
u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega
\end{cases} \tag{6.4.1}$$

dönüşür. Buradan u zayıf çözümün sonlu zamanda patladığını ve patlama zamanının üst sınırını gösterelim.

Teorem 6.4.1 Kabul edelim ki $u_0 \in H_0^m(\Omega)\backslash\{0\}$, $J(u_0) < d$ ve $I(u_0) < 0$ olsun. $u(t)$ çözümü

$$\lim_{t\to T_*}\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \infty$$

$T_* > 0$ olmak üzere sonlu zamanda patlar. Ayrıca, T_* patlama zamanı

$$T_* \leq \frac{4\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)^2(d-J(u_0))}$$

şeklinde üst sınırı vardır.

İspat. $t \in [0, T_{\max}]$ için $u(t) \in W_1^-$ olsun. $u(t)$ çözümünün sonlu zamanda patladığını kanıtlayalım. Çelişki yöntemi kullanarak $u(t)$ nin global çözüm olduğunu varsayalım. Bunun için $F : [0, T) \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$F(t) = \int_0^t \|u(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds + (T_* - t) \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \phi \left(t + \psi\right)^2, \quad t \in [0, T) \tag{6.4.2}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada, ϕ, ψ daha sonra belirtilecek olan iki pozitif sabittir. Buradan basit hesaplamayla

$$\begin{aligned} F'(t) &= \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2\phi \left(t + \psi\right) \\ &= 2 \int_0^t \int_\Omega \left(u_s u + \nabla u_s \nabla u\right) dx ds + 2\phi \left(t + \psi\right) \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

ve

$$\begin{aligned} F''(t) &= 2 \int_\Omega \left(u_s u + \nabla u_s \nabla u\right) dx + 2\phi \\ &= 2 \int_\Omega u \left(u_s - \Delta u_s\right) dx + 2\phi \\ &= 2 \int_\Omega |u|^r \ln |u| - 2 \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + 2\phi \\ &= -2I(u) + 2\phi \end{aligned} \tag{6.4.4}$$

şeklinde bulunur. (6.4.4) ve $I(u) < 0$ dan $F''(t) > 0$ olduğu açıktır. (6.4.4) ten

$$\begin{aligned} F''(t) &= -2I(u) + 2\phi \\ &\geq -2rJ(u) + (r-2) \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{2}{r} \|u\|_r^r \\ &\geq -2rJ(u_0) + 2r \int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds + (r-2) \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{2}{r} \|u\|_r^r \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

bulunur. $u(t) \in W_1^-$ olduğundan $I(u) < 0$ dır. d nin tanımından

$$\begin{aligned} d &= \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) \leq J(\overline{\beta}_1 u(t)) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{1}{r^2} \|u\|_r^r \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

elde edilir. (6.4.5) ve (6.4.6) dan

$$\begin{aligned} F''(t) &\geq -2rJ(u_0) + 2r \int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds + (r-2) \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{2}{r} \|u\|_r^r \\ &= -2rJ(u_0) + 2r \int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds + 2r \left[\frac{r-2}{2r} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{1}{r^2} \|u\|_r^r \right] \\ &\geq 2r \left(d - J(u_0)\right) + 2r \int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds \end{aligned} \tag{6.4.7}$$

bulunur. Böylece $t \in [0, T_*]$ için

$$F(t) \geq F(0) > 0$$

olur.

$$\rho(t) := \left(\int_0^t \|u(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma(t) := \left(\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde seçelim. Burada Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left[\int_0^t \|u(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds + \phi \, (t+\psi)^2 \right] \left[\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds + \phi \right] \\
&\quad - \left[\frac{1}{2} \left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right) + \phi \, (t+\psi) \right]^2 \\
&= \left[\rho^2(t) + \phi \, (t+\psi)^2 \right] \left[\sigma^2(t) + \phi \right] - \left[\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds + \phi \, (t+\psi) \right]^2 \\
&\geq \left[\rho^2(t) + \phi \, (t+\psi)^2 \right] \left[\sigma^2(t) + \phi \right] - \left[\int_0^t \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|u_s\|_{H_0^1(\Omega)} \, ds + \phi \, (t+\psi) \right]^2 \\
&= \left[\sqrt{\phi} \rho(t) \right]^2 - 2\phi \, (t+\psi) \, \rho(t) \sigma(t) + \left[\sqrt{\phi} \, (t+\psi) \, \sigma(t) \right]^2 \\
&= \left[\sqrt{\phi} \rho(t) - \sqrt{\phi} \, (t+\psi) \, \sigma(t) \right]^2 \geq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.4.3) ten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \left(F'(t) \right)^2 &= \left[\frac{1}{2} \left(\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right) + \phi \, (t+\psi) \right]^2 \\
&= \left[\frac{1}{2} \left(\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right) + \phi \, (t+\psi) \right]^2 \\
&\quad + \left(\int_0^t \|u(\tau)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, d\tau + \phi \, (t+\psi)^2 \right) \left(\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds + \phi \right) \\
&\quad - \left[F(t) - (T_* - t) \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right] \left(\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds + \phi \right) \\
&\leq F(t) \left(\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds + \phi \right) \qquad (6.4.8)
\end{aligned}$$

bulunur. (6.4.7) ve (6.4.8) de

$$\begin{aligned}
F(t)F''(t) - \frac{r}{2} \left(F'(t) \right)^2 &\geq F(t) \left[F''(t) - 2r \left(\int_0^t \|u_s(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, ds + \phi \right) \right] \\
&\geq F(t) \left[2r \left(d - J(u_0) \right) - 2r\phi \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. ϕ yeterince küçük seçelim, öyle ki

$$\phi \in \left(0, \frac{\mu}{2r} \right] \qquad (6.4.9)$$

olsun. Buradan

$$\mu := 2r\left(d - J(u_0)\right) > 0$$

seklinde seçelim. O halde

$$F(t)F''(t) - \frac{r}{2}\left(F'(t)\right)^2 \geq 0$$

olur. $t \in [t_0, T]$ için $\omega(t) = F(t)^{-\frac{r-2}{2}}$ olsun ve $F(t) > 0$, $F'(t) > 0$, $r > 2$ olduğundan

$$\omega'(t) = -\frac{r-2}{2}F(t)^{-\frac{r}{2}}F'(t) \tag{6.4.10}$$

bulunur. (6.4.10) dan

$$\begin{aligned}\omega''(t) &= \frac{r(r-2)}{4}F(t)^{-\frac{r+2}{2}}F'(t)^2 - \frac{r-2}{2}F(t)^{-\frac{r}{2}}F''(t) \\ &= \frac{r-2}{2}F(t)^{-\frac{r+2}{2}}\left[\frac{r}{2}F'(t)^2 - F(t)F''(t)\right] < 0\end{aligned} \tag{6.4.11}$$

elde edilir. Bu yeterince büyük herhangi bir $T > t_0$ için, $\omega(t)$ nin $[t_0, T]$ de bir içbükey fonksiyon olduğunu gösterir. Buradan bir T_* sonlu zamanı vardır öyle ki

$$\lim_{t \to T_*^-} \omega(t) = 0$$

olur ve

$$\lim_{t \to T_*^-} F(t) = \infty$$

dur. Dolayısıyla,

$$\lim_{t \to T_*^-} \|u(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \infty$$

bulunur. Bu da $u(t)$ nin global çözüm olmasıyla çelişir.

Şimdi, T_* ın üst sınır tahminini göstereceğiz. (6.4.11) ve $\omega''(t) \leq 0$ den

$$\omega(T) - \omega(0) = T\int_0^1 \omega'(\theta T)d\theta \leq \omega'(0)T \tag{6.4.12}$$

bulunur. (6.4.2) ve $\omega(t)$ nin tanımından

$$\omega(0) = F(0)^{-\frac{r-2}{2}} > 0,$$
$$\omega(T) = F(T)^{-\frac{r-2}{2}} > 0,$$
$$\omega'(0) = -\frac{r-2}{2}F(0)^{-\frac{r}{2}}F'(0) < 0$$

bulunur. (6.4.12) den

$$\begin{aligned} T &\leq \frac{\omega(T)-\omega(0)}{\omega'(0)} \\ &< -\frac{\omega(0)}{\omega'(0)} \\ &= \frac{2F(0)}{(r-2)\,F'(0)} \end{aligned} \tag{6.4.13}$$

elde edilir. (6.4.2) ve (6.4.3) ten

$$F(0) = T\left\|u_0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \phi\psi^2$$

ve

$$F'(0) = 2\phi\psi$$

bulunur. (6.4.13) ten $T \in [0, T_*)$ için

$$T_* \leq \frac{T\left\|u_0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)\,\phi\psi} + \frac{\psi}{(r-2)} \tag{6.4.14}$$

elde edilir. Buradan, $T \to T_*$ alırsak

$$T_* \leq \frac{\left\|u_0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)\,\phi\psi} T_* + \frac{\psi}{(r-2)}$$

olur. ψ yeterince küçük seçelim öyle ki

$$\psi \in \left(\frac{\left\|u_0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)\,\phi}, +\infty\right) \tag{6.4.15}$$

olsun. (6.4.14) ten

$$T_* \leq \frac{\phi\psi^2}{(r-2)\,\phi\psi - \left\|u_0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}}$$

bulunur. (6.4.9) ve (6.4.15) ten

$$\begin{aligned} \varphi &= \left\{(\phi,\psi) : \phi \in \left(0, \frac{\mu}{2r}\right], \psi \in \left(\frac{\left\|u_0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)\,\phi}, +\infty\right)\right\} \\ &= \left\{(\psi,\phi) : \psi \in \left(\frac{2r\left\|u_0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)\,\mu}, +\infty\right), \phi \in \left(\frac{\left\|u_0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)\,\psi}, \frac{\mu}{2r}\right]\right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanabilir ve buradan

$$T_* \leq \inf \frac{\phi\psi^2}{(r-2)\,\phi\psi - \left\|u_0\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}}$$

şeklinde alalım. $\eta = \phi\psi$ olsun ve

$$f(\psi,\eta) := \frac{\eta\psi}{(r-2)\,\eta - \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}}$$

şeklinde alalım. $f(\psi,\eta)$ nin η ile azaldığı görülür ve

$$\begin{aligned} T_* &\leq \inf_{\psi\in\left(\frac{2r\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)\mu},+\infty\right)} f\left(\psi,\frac{\mu\psi}{2r}\right) \\ &= \inf_{\psi\in\left(\frac{2r\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)\mu},+\infty\right)} \frac{\mu\psi^2}{(r-2)\,\mu\psi - 2r\,\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \\ &= \frac{\mu\psi^2}{(r-2)\,\mu\psi - 2r\,\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}}\Big|_{\psi=\frac{4r\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)\mu}} \\ &= \frac{8r\,\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)^2\,\mu} \end{aligned} \tag{6.4.16}$$

bulunur. Böylece, (6.4.16) ve μ nin tanımından

$$T_* \leq \frac{4\,\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(r-2)^2\,(d-J(u_0))}$$

bulunur.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Logaritmik kaynak terime sahip denklemler, başta matematik olmak üzere fizik ve mühendislik gibi alanlarda her geçen gün daha yaygın olarak kullanılmaktadır. Buradan, denklemlerin güncel olduğunu ve literatür taraması yapıldığında hala çok sayıda açık problemlerin olduğunu gözlemledik. Buradan yola çıkarak tezin dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerinde logaritmik kaynak terime sahip parabolik tipten üç farklı problemi ele alarak problemlerin çözümlerinin davranışlarını inceledik.

Tezin dördüncü bölümünde Kirchhoff tipli parabolik denklemin çözümlerinin lokal ve global varlığı Faedo-Galerkin metodu ve potansiyel kuyu metodu kullanılarak ispatlandı. Problem çözümlerinin üstel olarak azaldığı ispatlandı. Problemin çözümlerinin sonlu zamanda patladığı konkavlık metodu kullanılarak gösterildi. Tezin beşinci bölümünde logaritmik kaynak terimli p-biharmonik parabolik problemin çözümlerinin global varlığı logaritmik Sobolev eşitsizliği ve potansiyel kuyu metodu kullanılarak gösterildi. Ayrıca, problemin çözümlerinin polinomal olarak azalması elde edildi. Tezin altıncı bölümünde ise yüksek mertebeden parabolik problemin global varlığının ispatı potensiyel kuyu metoduna kullanılarak elde edildi. Problem çözümlerinin üstel olarak azaldığı ispatlandı. Altıncı bölümündeki problemde $r = 2$ alınarak çözümlerinin sonsuzda patladığı gösterildi. Ayrıca, altıncı bölümündeki probleme $-\Delta u_t$ eklenerek sonlu zamanda patladığı ve patlama zamanının üst sınırı gösterildi.

Çalışmamızda logaritmik kaynak terimi kullandık. Kaynak terimi farklı şekilde seçilerek yeni problemler seçilebilir. Ayrıca, ele aldığımız problem sınırlı bölgedeydi. Bölgeyi sınırsız ya da farklı sınır koşulları ile seçerekte çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Adam, R. A. ve Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York.

Ames, K. ve Starughan, B. (1997). *Non-standard and improperly posed problems*. Academic Press, New York.

Aubin, J. P. (1963). Un théoreme de compacite. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, Juin, 256, 5042-5044.

Bialynicki-Birula, I. ve Mycielski, J. (1976). Nonlinear wave mechanies. *Annals Physics*, 100(1-2), 62-93. doi: 10.1016/0003-4916(76)90057-9.

Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations*, Springer, New York.

Cao, Y. ve Liu, C. (2018). Initial boundary value problem for a mixed pseudo-parabolic p-Laplacian type equation with logarithmic nonlinearity, *Electronic Journal of Differential Equations*, 116, 1-19.

Chen, H., Luo, P., Liu, G. (2015). Global solution and blow up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 422(1), 84-98. doi: 10.1016/j.jmaa.2014.08.030.

Chen, H. ve Tian, S. (2015). Initial boundary value problem for a class of semilinear pseudo-parabolic equations with logarithmic nonlinearity. *Journal of Differential Equations*, 258, 4424-4442. doi: 10.1016/j.jde.2015.01.038.

Cömert, T. ve Pişkin, E. (2021). Blow up at infinity of weak solutions for a higher-order parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Journal of Universal Mathematics*, 4(2), 118-127. doi: 10.33773/jum.962057.

Cömert, T. ve Pişkin, E. (2022a). Global existence and decay of solutions for p-biharmonic parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Open Journal of Mathematical Analysis*, 6(1), 39-47. doi: 10.30538/psrp-oma2022.0104.

Cömert, T. ve Pişkin, E. (2022b). Global existence and exponential decay of solutions for higher-order parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Miskolc Mathematical Notes*, 23(2), 595-605. doi: 10.18514/MMN.2022.3894.

Cömert, T. ve Pişkin, E. (Baskıda). Blow up weak solutions for higher-order heat equation with logarithmic nonlinearity, *Miskolc Mathematical Notes*.

Ding, H. ve Zhou, J. (2021). Global existence and blow-up for a parabolic problem of Kirchhoff type with logarithmic nonlinearity. *Applied Mathematics & Optimization*, 83, 1651-1707. doi: 10.4134/BKMS.b181101.

Dubinskiĭ, Y. A. (1965). Weak convergence for nonlinear elliptic and parabolic equations. *Matematicheskii Sbornik*, 109(4), 609-642.

Evans, L. C. (1998). *Partial differantial equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19.

Galaktionov, V. A. (2003). Critical global asymptotics in higher-order semilinear parabolic equations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 60, 3809-3825. doi: 10.1155/S0161171203210176.

Gorka, P. (2009). Logarithmic Klein-Gordon equation. *Acta Physica Polonica B*, 40(1), 59-66.

Gross, L. (1975). Logarithmic Sobolev inequalities. *American Journal of Mathematics*, 4, 1061-1083. doi: 10.2307/2373688.

Han, Y., Cao, C., Sun, P. (2019). A p-Laplace equation with logarithmic nonlinearity at high initial energy level. *Acta Applicandae Mathematicae*, 164, 155-164. doi: 10.1016/j.jmaa.2019.01.059.

He, Y., Gao, H., Wang, H. (2018). Blow-up and decay for a class of pseudo-parabolic p-Laplacian equation with logarithmic nonlinearity. *Computers & Mathematics with Applications*, 75, 459-469. doi: 10.1016/j.camwa.2017.09.027.

Irkıl, N. (2021). *Logaritmik kaynak terimli dalga denklemlerin çözümlerinin davranışı*. (Doktora Tezi). Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.

Irkıl, N. ve Pişkin, E. (2021). Local existence for class of nonlinear higher-order wave equation with logarithmic source term. *Asia Mathematika*, 5(3), 89-100. doi: 10.5281/zenodo.5809227.

Ishige, K., Kawakami, T., Okabe S. (2020). Existence of solutions for a higher-order semilinear parabolic equation with singular initial data. *Annales de l'Institut Henri Poincare C, Analyse Nonlineaire*, 37, 1185-1209. doi: 10.1016/j.anihpc.2020.04.002.

John, F. (1955). A note on "improper" problems in partial differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 8(4), 591-594. doi: 10.1002/cpa.3160080409.

Kalantarov, V. K. ve Özsarı, T. (2016). Qualitative properties of solutions for nonlinear Schrödinger equations with nonlinear boundary conditions on the half-line. *Journal of Mathematical Physics*, 57(2), 021511. doi: 10.1007/BF01109723.

Komornik, V. ve Zuazua, E. (1990). A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. *Journal de Mathematiques Pure set Appliquĕes*, 69, 33-54.

Komornik, V. (1994). *Exact controllability and stabilization: The Multiplier Method*. RAM: Research in Applied Mathematics, Masson-John Wiley, Paris.

Köklü, K. (2018). *İntegral denklemler*. Papatya Yayıncılık Eğitim, İstanbul.

Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Uraltseva, N. N. (1967). *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Translations Mathematical Monographs, Nauka, Moskow.

Li, P. ve Liu, C. (2018). A class of fourth-order parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Journal of Inequalities and Applications*, 328, 1-21. doi: 10.1186/s13660-018-1920-7.

Li, J. ve Han, Y. (2019). Global existence and finite time blow-up of solutions to a nonlocal p-Laplace equation. *Mathematical Modelling and Analysis*, 24(2), 195-217. doi: 10.3846/mma.2019.014.

Martinez, P. (1999). A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus Variations*, 4, 419-444. doi: 10.1051/cocv:1999116.

Nhan, L. C. ve Truong, L. X. (2017). Global solution and blow-up for a class of pseudo p-Laplacian evolution equations with logarithmic nonlinearity. *Computers & Mathematics with Applications*, 73, 2076-2091. doi: 10.1016/j.camwa.2017.02.030.

Payne, L. E. (1960). Bounds in the Cauchy problem for the Laplace equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 5(1), 35-45. doi: 10.1007/BF00252897.

Payne, L. E. ve Sattinger, D. H. (1975). Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. *Israel Journal of Mathematics*, 22, 273-303. doi: 10.1007/BF02761595.

Peng, J. ve Zhou, J. (2019). Global existence and blow-up of solutions to a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity. *Applicable Analysis*, 100(13), 2804-2824. doi: 10.1080/00036811.2019.1698726.

Pişkin, E. (2013). *Doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması*. (Doktora Tezi). Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.

Pişkin, E. (2017). *Sobolev Uzayları*, Seçkin Yayıncılık, Ankara.

Pişkin, E. (2018). *Kısmi Türevli Denklemler*, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. (2019). Blow up solutions for a class of nonlinear higher-order wave equation with variable exponents. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 10(2), 149-156.

Pişkin, E. (2021). *Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması*. Pegem Akademi Yayıncılık, 204, Ankara.

Pişkin, E. ve Cömert, T. (2020). Blow-up of solutions for a parabolic Kirchhoff type equation with logarithmic nonlinearity. *Gulf Journal of Mathematics*, 9(2), 21-30. doi: 10.56947/gjom.v9i2.405.

Pişkin, E. ve Cömert, T. (2021). Qualitative analysis of solutions for a parabolic type Kirchhoff equation with logarithmic nonlinearity. *Open Journal of Discrete Applied Mathematics*, 4(2), 1-10. doi: 10.30538/psrp-odam2021.0054.

Pişkin, E. ve Cömert, T. (2022). Existence and decay of solutions for a parabolic type Kirchhoff equation with logarithmic nonlinearity. *Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, 15(1), 111-128. doi: 10.32513/asetmj/19322008208.

Pişkin, E. ve Çalışır, Z. (2020). Decay and blow up at infinite time of solutions for a logarithmic Petrovsky equation. *Tbilisi Mathematical Journal*, 13(4), 113-127. doi: 10.32513/tbilisi/1608606053.

Pişkin, E. ve Irkıl, N. (2019). Mathematical behavior of solutions of p-laplacian equation with logarithmic source term. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 10(2), 213-220.

Pişkin, E. ve Polat, N. (2013). On the decay of solutions for a nonlinear higher-order Kirchhoff-type hyperbolic equation. *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, 5(2), 107-116.

Polat, N. (2005). *Doğrusal olmayan parabolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu*. (Doktora Tezi). Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.

Straughan, B. (1998). *Explosive Instabilities in Mechanics*. Springer.

Wang, X., Chen, Y., Yang, Y., Li, J., Xu, R. (2019). Kirchhoff type system with lineer weak damping and logarithmic nonlinearities. *Nonlinear Analysis*, 188, 475-499. doi: 10.1016/j.na.2019.06.019.

Xiao, L. ve Li, M. (2021). Initial boundary value problem for a class of higher-order n-dimensional nonlinear pseudo-parabolic equations. *Boundary Value Problems*, 5, 1-24. doi: 10.1186/s13661-020-01482-6.

Yang, Y., Li, J., Yu, T. (2019). Qualitative analysis of solutions for a class of Kirchhoff equation with linear strong damping term, nonlinear weak damping term and power-type logarithmic source term. *Applied Numerical Mathematics*, 14, 263-285. doi: 10.1016/j.apnum.2019.01.002.

Ye, Y. (2010). Existence and asymptotic behaviour of global solutions for a class of nonlinear higher-order wave equation. *Journal of Inequalities and Applications*, 1-14. doi: 10.1155/2010/394859.

Zhou, J., Wang, X., Song, X., Mu, C. (2012). Global existence and blow-up of solutions for a class of nonlinear higher-order wave equations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 63, 461-473. doi: 10.1007/s00033-011-0165-9.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad	Cömert, Tuğrul
Web sayfası (Research Gate, Academia, vs.)	

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Necmettin Erbakan Üniversitesi	2018
Lisans	Gazi Üniversitesi	2009
Lise		

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2015-	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

Yayınlar

1. Cömert, T. ve Pişkin, E. (2021). Blow up at infinity of weak solutions for a higher-order parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Journal of Universal Mathematics*, 4(2), 118-127. doi: 10.33773/jum.962057.

2. Cömert, T. ve Pişkin, E. (2022a). Global existence and decay of solutions for p-biharmonic parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Open Journal of Mathematical Analysis*, 6(1), 39-47. doi: 10.30538/psrp-oma2022.0104.

3. Cömert, T. ve Pişkin, E. (2022b). Global existence and exponential decay of solutions for higher-order parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Miskolc Mathematical Notes*, 23(2), 595-605. doi: 10.18514/MMN.2022.3894. (SCI)

4. Pişkin, E. ve Cömert, T. (2020). Blow-up of solutions for a parabolic Kirchhoff type equation with logarithmic nonlinearity. *Gulf Journal of Mathematics*, 9(2), 21-30. doi: 10.56947/gjom.v9i2.405.

5. Pişkin, E. ve Cömert, T. (2021). Qualitative analysis of solutions for a parabolic type Kirchhoff equation with logarithmic nonlinearity. *Open Journal of Discrete Applied Mathematics*, 4(2), 1-10. doi: 10.30538/psrp-odam2021.0054.

6. Pişkin, E. ve Cömert, T. (2022). Existence and decay of solutions for a parabolic type Kirchhoff equation with logarithmic nonlinearity. *Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, 15(1), 111-128. doi: 10.32513/asetmj/19322008208. (E-SCI)

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Tuğrul CÖMERT		
Öğrenci No	18804505		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☐	Doktora ☒
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Erhan PİŞKİN		
Tez Başlığı	Logaritmik Kaynak Terimli Parabolik Tipten Denklemlerin Çözümlerinin Matematiksel Davranışı		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	79		
Raporlama Tarihi	30/12/2022		
Benzerlik Oranı (%)	%8		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 79 sayfalık kısmına ilişkin, 30/12/2022 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 8 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

☒Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç

☒Kaynaklar hariç

☒Alıntılar ~~hariç~~/dâhil

☐Diğer (Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir,
gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Tuğrul CÖMERT
Tarih: 30/12/2022
İmza:

Danışman Adı, Soyadı: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN Tarih: 30/12/2022	İmza:
Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY Tarih: 30/12/2022	İmza: