LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ EVOLÜSYON DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

RUKEN AKSOY

TEMMUZ 2022

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ EVOLÜSYON DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

RUKEN AKSOY

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

TEMMUZ 2022

DİYARBAKIR

LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Ruken AKSOY tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Danışman, **Dicle Üniversitesi**

Sınav Jürisi:

Doç. Dr. Baver OKUTMUŞTUR (*)
Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN (**)
Dicle Üniversitesi

Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Dicle Üniversitesi

ONAY

Savunma Tarihi: 05 / 07 / 2022

(*) Sınav Jürisi kısmının birinci satırına Jüri Başkanının bilgilerini yazınız.
(**) Sınav Jürisi kısmının ikinci satırına Tez Danışmanının bilgilerini yazınız.

Her zaman yanımda olan en büyük destekçilerim

Annem ve Babama…

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılayıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Ruken AKSOY

İmza: …….……

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim hem çok verimli hem de çok keyifli geçti. Severek, eğlenerek öğrenmenin tadını keyifle çıkardım. Bunun en büyük kaynaklarından olan ve bu süreç boyunca akademik tecrübeleriyle tezimin hazırlanmasında bana büyük desteği olan danışmanım Prof. Dr. Erhan Pişkin'e ve tezde bana sunmuş oldukları yardımlarından dolayı Dr. Nazlı Irkıl ile Tuğrul Cömert'e içten duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan, beni hep destekleyen, her zaman bana yardımcı olan tüm aile fertlerime sonsuz sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak vermiş olduğu 2210 Yurt içi yüksek lisans bursu ile bu tezin hazırlanmasında maddi destekleri olan TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR v

İÇİNDEKİLER vi

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ vii

ÖZET viii

ABSTRACT ix

1. GİRİŞ 1

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 3

3. ÖN BİLGİLER 6

3.1 Lebesgue Uzayı 6

3.2 Sobolev Uzayı 8

3.3 Eşitsizlikler 11

4. LOGARİTMİK KLEİN-GORDON DENKLEMİ 15

4.1 Çözümlerin Varlığı 15

5. YÜKSEK MERTEBEDEN LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ KLEİN-GORDON DENKLEMİ 20

5.1 Global Varlık ve Üstel Azalma 24

5.2 Çözümün Patlaması 32

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 36

KAYNAKLAR 37

ÖZGEÇMİŞ 41

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	**Açıklama**
α	Alfa
β	Beta
δ	Delta
χ	Chi
ε	Epsilon
η	Eta
γ	Gamma
κ	Kappa
ξ	Ksi
μ	Mu
ω	Omega
ζ	Zeta

Kısaltma	**Açıklama**
Δ	Laplace operatörü
∇	Nabla operatörü (Gradiyent)
R^n	n boyutlu Öklid uzayı
Ω	R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	Sürekli fonksiyonlar uzayı
$L^p(\Omega)$	p. mertebeden Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev uzayı
$H^m(\Omega)$	Hilbert uzayı

ÖZET

LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ EVOLÜSYON DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Aksoy, Ruken
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Erhan Pişkin
Haziran 2022, 50 sayfa

Bu tezin ilk bölümünde fen ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan diferansiyel denklemlerin tanımına ve tarihsel sürecine kısaca değinilmiştir. Diferansiyel denklemlerdeki gelişmelerin matematikte yeni alanların ortaya çıkmasını sağladığı ve matematikteki birçok alanlardaki ilerlemelerin de diferansiyel denklemler için yeni bakış açıları sunduğunada değinilmiştir.

İkinci bölümünde, tezin amacı belirtilmiş ve logaritmik kaynak terimli denklemlerin genel olarak kullanıldığı alanlar verilmiştir. Daha sonra logaritmik kaynak terimli problemlerle ilgili temel çalışmalar verilmiştir. Burada ilk olarak Birula ve Mycielski'nin 1976'da çalıştığı problem verilmiş, hemen ardından Cazenave ve Haraux'un 1980 yılındaki çalışmasına yer verilmiştir. Temel problemler verildikten sonra günümüze kadar yapılan birçok çalışma bu bölümde verilmiştir.

Üçüncü bölüm, üç kısımdan oluşmaktadır. İlk olarak Lebesgue uzayının tanımına yer verilmiştir. İkinci kısımda Sobolev uzayının tanımı ve Sobolev Gömülme teoremi verilmiştir. Üçüncü kısımda ise tez boyunca gerekli olan eşitsizliklere ve lemmalara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, bir boyutlu logaritmik kaynak terimli Klein-Gordon denklemine çalışılmıştır. Logaritmik lineer olmayan Klein-Gordon probleminin çözümlerinin lokal varlığı ele alınmıştır. Daha sonra problemin zayıf çözümünün ispatı verilmiş olup, ispat: Yaklaşım Çözüm bulma, Önsel Kestirim ve Limite Geçiş olmak üzere üç adımdan oluşmuştur. Burada zayıf çözümün ispatında Galerkin metodu, Logaritmik Sobolev Eşitsizliği ve Kompaktlık teoremleri kullanılmıştır. Ayrıca ispatın üçüncü adımı olan Limite Geçiş adımında Aubin Lions lemmasından faydalanılmıştır.

Beşinci bölüm tezin özgün kısmı olup logaritmik kaynak terimli yüksek mertebeden Klein-Gordon denkleminine çalışılmıştır. Problemimizin ilk olarak enerji denklemi bulunup, gerekli lemmalar ve tanımlara yer verilmiştir. Daha sonra problemimizin global varlığı ve üstel azalmasıyla ilgili teoremler verilmiş ve teoremlerin ispatında kullanılacak lemmalar ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Son olarak problemimizin çözümün patlamasına çalışılmıştır. Konkavlık metodu kullanılarak problemimizin patlaması gösterilmiştir.

Altıncı bölümde ise tezin sonuç ve öneriler kısmına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Global varlık, Logaritmik kaynak terim, Üstel azalma, Patlama, Yüksek mertebeden Klein-Gordon denklemi

ABSTRACT

SOLUTIONS OF EVOLUTIONS EQUATIONS WITH LOGARITHMIC SOURCE TERM

Aksoy, Ruken
Master of Science in Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Erhan Pişkin
June 2022, 50 pages

In the first part of this thesis, the definition and historical process of the differential equation that emerged in applied sciences such as science and engineering are briefly mentioned. It is also mentioned that the developments in differential equations provide the emergence of new fields in mathematics and the advances in many fields in mathematics offer new perspectives for differential equations.

In the second part, the purpose of the thesis is stated and the areas where the equations with logarithmic source terms are used in general are given. Then, basic studies on problems with logarithmic source terms are given. Here, first the problem that Birula and Mycielski worked on in 1976 is given, and then the work of Cazenave and Haraux in 1980 is given. After the basic problems are given, many studies carried out until today are given in this section.

The third part consists of three parts. Firstly, the definition of Lebesgue space is given. In the second part, the definition of Sobolev space and the Sobolev Embedding theorem are given. In the third part, the inequalities and lemmas required throughout the thesis are included.

In the fourth chapter, the Klein-Gordon equation with one-dimensional logarithmic source terms is studied. The local existence of the solutions of the logarithmic nonlinear Klein-Gordon problem is discussed. Then, the proof of the weak solution of the problem is given, and the proof consists of three steps: Approach Finding the Solution, Predictive Estimation and Passing the Limit. Here, Galerkin method, Logarithmic Sobolev Inequality and Compactness theorems are used to prove the weak solution. In addition, the Aubin Lions lemma is used in the step of Passing the Limit, which is the third step of the proof.

The fifth chapter is the original part of the thesis, and the higher order Klein-Gordon equation with logarithmic source terms has been studied. First, the energy equation of our problem is found and shown, and necessary lemmas and definitions are given. Then, the theorems about the Global Existence and Exponential Decay of our problem are given and the lemmas to be used in the proof of the theorems are given together with their proofs. Finally, the Blow up of the Solution of our problem has been attempted. The blow up of our problem has been shown using the concavity method.

In the sixth chapter, the conclusion and suggestions of the thesis are given.

Keywords: Decay, Global existence, Higher order Klein-Gordon equation, Logarithmic source term, Nonexistence

1. GİRİŞ

Bir fonksiyonu ve onun sonlu mertebeden türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklemde bağımsız değişkenlerden biri zamana (t) bağlı ise bu denklemlere evolüsyon denklem denir. Diferansiyel denklemler ilk olarak 17. yüzyılda Gottfried Wilhelm Leibniz, Isaac Newton, Jakob Bernoulli ve Johann Bernoulli tarafından yapılan çalışmalarda ele alınmıştır. Bu denklemler analizin yeni fikirlerini, gök cisimlerinin hareket yollarını, sürtünme özelliğine sahip olmayan bir nesnenin P noktasından Q noktasına hangi yol boyunca en kısa sürede alçalacağını ele alan brakistokron eğrisi gibi mekaniğin bazı problemlerine uygulamalarının bir sonucu olarak ortaya çıkmışlardır. Doğal yaşamda temel süreçlerin çoğunluğu genel olarak diferansiyel denklemler üzerinden temellendirilebilir (Kelley ve Peterson, 2010).

Yaklaşık olarak 300 yıldır diferansiyel denklemler pek çok bilimsel disiplindeki sorunları tanımlamak ve bunları analiz etmek için kullanılmışlardır. Bu denklemlerin çözümlerinin varlığını bulmak amacıyla matematiğin modern tekniklerinin kullanımından nümerik çözümlerinin kullanımına kadar birçok tekniğin geliştirilmesi için matematikçiler yoğun çalışmalar gerçekleştirmişlerdir. Ayrıca diferansiyel denklemler ile ilgili problemler matematikte yeni alanların ortaya çıkmasını sağlamıştır. Fonksiyonel analiz, analiz, topoloji, geometri ve cebir gibi alanlardaki ilerlemeler de diferansiyel denklemler için yeni bakış açıları sunduğundan matematiğin gelişiminde merkezi rol almışlardır (Kelley ve Peterson, 2010).

Klasik anlamda diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak her zaman mümkün değildir. Bu nedenle denklemin önemine bağlı olarak matematikçiler denklemin çözümünün niteliksel davranışlarıyla ilgilenmişlerdir. Örneğin; "Denklemin çözümü var mıdır?", "Denklemin çözümü tek midir?", "Denklemin çözümü kararlı mıdır?", "Denklemin çözümünde patlama olur mu?" gibi sorular cevaplanabilirse denklemin çözümünü bulamazsak bile denklem hakkında bilgi sahibi olmamıza olanak sağlayacaktır. Bu nedenle denklemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği, kararlılığı,

patlaması,... gibi özelliklerin incelenmesi oldukça önemlidir.

Bu amaçla tez çalışmamızda logaritmik kaynak terim içeren bir evolüsyon denklemin çözümlerinin global varlığı, üstel azalması ve patlaması incelenmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde amacımız aşağıdaki logaritmik kaynak terimli yüksek mertebeden

$$u_{tt} + (-\Delta)^m u + u + u_t = 2u \ln |u| , \quad \left(m \in Z^+\right)$$

Klein-Gordon denkleminin çözümlerinin global varlığı, üstel azalması ve patlamasını incelemektir. Logaritmik kaynak terime sahip olan denklemler optik, nükleer fizik, kuantum mekaniği, süpersimetri ve jeofizik gibi fiziğin birçok alanında ortaya çıkmaktadır (Birula ve Mycielski 1976).

Aşağıda bu denklemle ilgili literatür çalışması verilmiştir:

Birula ve Mycielski (1976)

$$u_{tt} - u_{xx} + u = \varepsilon u \ln u^2$$

denklemini çalıştılar.

Cazenave ve Haraux (1980)

$$u_{tt} - \Delta u = u \ln |u|^k$$

denkleminin varlık ve tekliğini incelediler.

Hiramatsu, Kawasaki ve Takahashi (2010)

$$u_{tt} - \Delta u + u + u_t + |u|^2 u = u \ln u$$

denklemini teorik fizikte Q-ball dinamiğini çalışırken elde ettiler. Han (2013) elde edilen denklemin R^3 bölgesinde global varlığını çalıştı.

Chen, Luo ve Liu (2015)

$$u_t - \Delta u = u \ln u$$

lineer olmayan logaritmik yarı lineer ısı denklemini çalıştılar.

Chen ve Tian (2015)

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u = u \ln u$$

lineer olmayan logaritmik kaynak terimli parabolik denklemini çalıştılar.

Zhang, Liu ve Hu (2015)

$$u_{tt} - \Delta u + u + u_t + |u|^2 u = u \ln u^k$$

denkleminin çözümlerinin azalmasını çalıştılar.

Ye ve Li (2017)

$$u_{tt} - \Delta u + u = u \ln |u|$$

Klein-Gordon denkleminin global varlığını ve patlamasını çalıştılar.

Hu, Zhang ve Lin (2017)

$$u_{tt} - \Delta u + u + u_t = u \ln |u|^k$$

denkleminin asimptotik davranışını çalıştılar.

Ma ve Fang (2018)

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = u \ln u^2$$

güçlü damping (sönüm) terim içeren denklemin sonsuz zamanda patlamasını, asimptotik davranışını ve global varlığını çalıştılar.

Lian ve Xu (2019)

$$u_{tt} - \Delta u - \omega \Delta u_t + \mu u_t = u \ln u$$

denkleminin global varlığını, lokal varlığını, patlamasını ve asimptotik davranışını çalıştılar.

Pişkin ve Irkıl (2019)

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxxtt} + u_{xxxx} + u_{xxxxxx} + \left(u_x \ln |u_x|^k\right)_x = 0$$

logaritmik kaynak terimli altıncı mertebeden Boussinesq denklemini çalıştılar.

Ye (2020)

$$u_{tt} - \Delta u + u + u_t = u \ln u^2$$

logaritmik Klein-Gordon denkleminin patlaması ve global varlığını çalıştı.

Pişkin ve Çalışır (2020)

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta^2 u_t = u \ln u^2$$

logaritmik kaynak terimli Petrovsky denkleminin patlamasını ve çözümlerinin azalmasını çalıştılar.

Cömert ve Pişkin (2021)

$$u_t + (-\Delta)^m u = u \ln |u|$$

logaritmik kaynak terimli yüksek mertebeden parabolik denklemin çözümlerinin patlamasını çalıştılar.

Ayrıca son zamanlarda logaritmik kaynak terim içeren birçok farklı çalışmada yapılmıştır. Bunlardan bazıları; Al-Gharabli, Guesmia ve Messaoudi (2018); Boulaaras, Draifia, Alnegga (2019); Ferreira, Pişkin, Irkıl ve Raposo (2021); Kafini (2021); Liao (2022); Peyravi (2020); Pişkin ve Irkıl (2019); Pişkin ve Irkıl (2020); Pişkin ve Irkıl (2021); Yang, Li, Yu (2019); Yüksekkaya ve Pişkin (2021) dır.

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, fonksiyonel analiz ve diferansiyel denklemler ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Evans, 1998; Kesaven, 1989; Pişkin, 2013; Pişkin, 2017; Pişkin, 2018; Polat 2005).

3.1. Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 3.1.1. Ω, R^n de ölçülebilir bir bölge olsun. u ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, yani

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

ise $u(x)$ fonksiyonları p. kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır, ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir. Bu şartı sağlayan tüm u fonksiyonlarının uzayına L^p Lebesgue uzayı denir. Burada L^p uzayının elemanları $\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$ şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıfıdır.
Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır. $L^p(\Omega)$ uzayı bu norm ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.1.2. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde

$$|u(x)| \leq K$$

olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki esas (essestial) supremumu denir ve $\underset{x\in\Omega}{ess\,\sup}$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzaya $L^\infty(\Omega)$ *uzayı denir.* $L^\infty(\Omega)$ uzaya

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x\in\Omega}{ess\,\sup}|u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.1.3. Ω, R^n de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt altkümesinde p. kuvveti integrallenebilen bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L^p_{loc}(\Omega)$ *uzayı* denir.

Tanım 3.1.4. X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer

(i) X, Y nin bir alt uzayı,

(ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan I birim operatörü sürekli ise, X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir.

I birim operatörü doğrusal olduğundan (ii) koşulu

$$\|Ix\|_Y \leq M \|x\|, \quad x \in X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 3.1.5. $vol(\Omega) = \int_\Omega 1dx$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

olur. Bu nedenle

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.1.6. $L^2(\Omega)$ uzayı

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 3.1.7. $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ olsun. $\|u(.)\|_X \in L^p(a,b)$ koşulunu sağlayan (a,b) aralığından X uzayına tanımlanmış ölçülebilir u fonksiyonları uzayına $L^p(a,b;X)$ *uzayı* denir. $L^p(a,b;X)$ uzayı

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p}, & 1 \leq p \leq \infty \\ ess\sup\limits_{t\in(a,b)} \|u(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Benzer şekilde $a < c < d < b$ olmak üzere her bir c, d için $u \in L^p(c,d;X)$ ise $u \in L^p(a,b;X)$ yazılır ve $p = 1$ için u *lokal integrallenebilirdir* denir.

Tanım 3.1.8. Her $t \in [0,T]$ için $[0,T]$ den X uzayına tanımlanmış ve m. mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonları uzayına $C^m([0,T];X)$ *uzayı* denir. $C^m([0,T];X)$ uzayı

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{t\in[0,T]} \|D^\alpha u(t)\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

3.2. Sobolev Uzayı $(W^{m,p}(\Omega))$

Tanım 3.2.1. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. *zayıf türevi* denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^\alpha u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^\alpha u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Tanım 3.2.2. Ω, R^n de bir bölge, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \\ \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty \end{aligned}$$

tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayıdır.
$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.
Aşikar olarak $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 3.2.3. Eğer $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur. $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

ile verilir.

Tanım 3.2.4. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır. Burada $(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ olup $L^2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımdır.
$H_0^1(\Omega)$ uzayı için iç çarpım

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.5. (Sobolev Gömülme Teoremi). Ω, R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere;

(i) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömülmesi elde edilir.

(ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

gömülmesi elde edilir. Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

(iii) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q < p^*$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q < p^*$$

gömülmesi elde edilir.

Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

şeklindedir.

Verilen gömülmelerde W yerine W_0 uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın yukarıdaki gömülmeler yine geçerli olur.

Teorem 3.2.6. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi bazı $p \leq q$ değerleri için kompakt ise, $|\Omega| < \infty$ dur.

Teorem 3.2.7. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi $1 \leq q < p$ özelliğini sağlayan bazı p ve q değerleri için mevcut ise, $|\Omega| < \infty$ dur.

3.3. Eşitsizlikler

Lemma 3.3.1. (Young Eşitsizliği). $\varepsilon > 0$, a, $b \in R$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

ve

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizlikleri geçerli olur. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ olarak tanımlanır.

Ayrıca

$$a = \delta X$$

ve

$$b = \frac{Y}{\delta}$$

olarak alınırsa ve

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliğinden yerine yazılırsa

$$\left| \delta X \frac{Y}{\delta} \right| \leq \frac{|\delta X|^p}{p} + \frac{\left|\frac{Y}{\delta}\right|^q}{q},$$

$$|XY| \leq \frac{\delta^p |X|^p}{p} + \frac{\delta^{-q} |Y|^q}{q}$$

formatında da ifade edilir.

Lemma 3.3.2. (Logaritmik Sobolev Eşitsizliği). $u \in H_0^1(\Omega)$ ve α herhangi bir pozitif sayı olmak üzere

$$\int_\Omega u^2 \ln |u| dx \leq \|u\|^2 \ln \|u\| + \frac{\alpha^2}{2\pi} \|\nabla u\|^2 - \frac{n}{2}(1 + \ln \alpha) \|u\|^2$$

dir (Chen vd., 2015; Gross, 1975).

Sonuç 3.3.1. $u \in H_0^m(\Omega)$ ve α herhangi bir pozitif sayı olmak üzere

$$\int_\Omega u^2 \ln |u| dx \leq \|u\|^2 \ln \|u\| + \frac{c_p \alpha^2}{2\pi} \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u\right\|^2 - \frac{n}{2}(1 + \ln \alpha) \|u\|^2$$

dir.

İspat. $H_0^m(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ gömülmesinden

$$\|\nabla u\|^2 \leq c_p \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u\right\|^2$$

yazılabilir. Böylece, Logaritmik Sobolev Eşitsizliğinden

$$\int_\Omega u^2 \ln |u| dx \leq \|u\|^2 \ln \|u\| + \frac{c_p \alpha^2}{2\pi} \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u\right\|^2 - \frac{n}{2}(1 + \ln \alpha) \|u\|^2$$

elde edilir ve c_p gömülme sabitidir.

Lemma 3.3.3. (Poincare Eşitsizliği).

$$\begin{cases} 2 \leq r < \infty, & n \leq 2m \\ 2 \leq r \leq \frac{2n}{n-2m}, & n > 2m \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\forall u \in H_0^m(\Omega)$ için

$$\|u\|_r \leq C \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u\right\|$$

dir (Pişkin, 2017).

Lemma 3.3.4. (Green Özdeşliği). $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ olmak üzere,

$$\int_\Omega v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

dir. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \nabla u$ dır (Pişkin, 2017).

Lemma 3.3.6. (Logaritmik Gronwall Eşitsizliği). Pozitif olan $a(t,s)$ fonksiyonu $\{(t,s) : 0 \leq s < t \leq T\}$ aralığında sürekli olsun ve bazı $T > 0$ ile tüm $(0,T]$ için $a(t,.) \in L^1(0,t)$ sağlansın. Kabul edelim ki ε_0 pozitif sabiti ve $A \in (0,1)$ vardır ki

$$\sup_{0\leq t\leq T} \int_{t-\varepsilon_0}^{t} a(t,s)\, ds \leq 1 - A$$

dır. Eğer tüm $t \in [0,T]$ için pozitif sabitler α, β ve negatif olmayan bir fonksiyon $f \in C([0,T])$ olmak üzere tüm $t \in [0,T]$ için

$$f(t) \leq \alpha + \int_0^t a(t,s)\, f(s)\, ds + \beta \int_0^t [1 + \ln(1 + f(s))]\, f(s)\, ds$$

eşitsizliği sağlanır.

Buradan tüm $t \in [0,T]$ için

$$\gamma = \sup_{0\leq t\leq T} \left[\sup_{0\leq s\leq t-\varepsilon_0} a(t,s) \right]$$

olarak tanımlanmış pozitif sabit olmak üzere

$$f(t) \leq \begin{cases} \frac{\alpha}{A} e^{\frac{\gamma t}{A}}, & \beta = 0, a(t,s) \neq 0 \\ -1 + \frac{[(1+\alpha)e]^{\exp(\beta t)}}{e}, & \beta \geq 0, a(t,s) = 0 \\ -1 + \frac{\left[\left(1+\frac{\alpha}{A}\right)e\right]^{\exp\left(\frac{\beta+\gamma}{A}t\right)}}{e}, & \beta > 0, a(t,s) \neq 0 \end{cases}$$

sağlanır (Cazenave ve Haraux, 1980).

Tanım 3.3.1. (Aubin-Lions). $L^p(0,T;V)$ uzayında bir fonksiyon dizisinin kompakt olduğu durumların belirlenmesini sağlar. Genel olarak sonlu boyutlu uzayda evolüsyon denklemleri çalışılırken, adi diferansiyel denklem sistemleri için yaklaşık çözüm dizisi oluştururken Cauchy-Lipschitz veya Carathéodory gibi varlık teoremleri ile çözümleri elde edilen sonlu boyutlu alt uzaylarla ilgili yaklaşık çözüm dizisi oluşturulur.

Daha sonra $L^p(0,T;X)$ uzayında sınırlı olmasıyla önsel tahmınler ve yaklaşık problemin kullanılmasıyla zamana göre türevlerinin de $L^q(0,T;Y)$ uzayında sınırlı olduğu fonksiyon dizisi elde edilir. Kompaktlık yaklaşık çözümler kümesinin $L^p(0,T;V)$ kümesinde güçlü yakınsak dizilerinin belirlenmesi için gereklidir. Bu şekilde evolüsyon denklemlerin orijinal çözümlerinin varlığı bulunabilir. Aubin-Lions X, Y, V ve p, q üzerinde yaklaşık problemin çözüm dizisinin
$L^p(0,T;V)$ uzayı cinsinden nispeten kompakt olduğu koşulları oluşturur (Dubinskiĭ, 1965).

4. LOGARİTMİK KLEİN-GORDON DENKLEMİ

Bu bölümde lineer olmayan

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = \varepsilon \ln |u|^2, & x \in [a,b],\ t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in [a,b], \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial[a,b],\ t \in (0,T) \end{cases} \tag{4.1}$$

logaritmik Klein-Gordon probleminin zayıf çözümünün varlığı ele alınmıştır (Gorka, 2009). Gorka (2009), teoremin ispatında Galerkin metodu, logaritmik Sobolev eşitsizliği ve kompaktlık teoremlerini kullanmıştır.

4.1. Çözümlerin Varlığı

Bu kısımda (4.1) probleminin çözümlerinin lokal varlığını ve bazı tanımları vereceğiz.

Tanım 4.1.1. Hemen hemen her yerde $t \in (0,T]$ ve $\forall \phi \in H_0^1[a,b]$ için

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty\left(0,T; H_0^1[a,b]\right), \\ u_t &\in L^\infty\left(0,T; L^2[a,b]\right), \\ u_{tt} &\in L^\infty\left(0,T; H^{-1}[a,b]\right) \end{aligned}$$

ve

$$(u_{tt},\phi) + \int_a^b \nabla u \nabla \phi dx = -\int_a^b u\phi dx + \varepsilon \int_a^b u \ln |u|^2 \phi dx$$

ile $u, u(0) = u_0, u_t(0) = u_1$ başlangıç koşullarını sağlarsa, (4.1) probleminin bir zayıf çözümüdür.

Sonuç 4.1.1. Eğer u, (4.1) probleminin bir zayıf çözümü ise bu durumda

$$\begin{aligned} u &\in C\left(0,T; L^2[a,b]\right), \\ u_t &\in C\left(0,T; H^{-1}[a,b]\right) \end{aligned}$$

dir.

Şimdi problemin lokal varlık teoremini ifade edelim.

Teorem 4.1.1. Varsayalım ki $u_0 \in H_0^1[a,b]$ ve $u_1 \in L^2[a,b]$ olsun. Bu durumda (4.1) probleminin bir zayıf çözümü vardır.

İspat. İspat üç adımdan oluşmaktadır.

1. Adım: Yaklaşım Çözüm Bulma

Bu aşamada Galerkin metodundan yararlanılacaktır.

$\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$, H_0^1 uzayının bir tabanı olsun ve V_n altuzayının elemanları $w_1, w_2, ..., w_n$ olarak alınsın.

u_m fonksiyonu

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_m^j(t)\, w_j$$

olarak tanımlansın ve u_m fonksiyonu $[0, t_m)$ aralığında tanımlanmış ve $\forall j = 1, ..., m$ için

$$\begin{cases} \left(u_m'', w_j\right)_{L^2[a,b]} + \left(\nabla u_m, \nabla w_j\right)_{L^2[a,b]} \\ = -\left(u_m, w_j\right)_{L^2[a,b]} + \varepsilon \left(u_m \ln |u_m|^2, w_j\right)_{L^2[a,b]}, \\ u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} \left(u_0, w_j\right) w_j, \\ u_m'(0) = \sum_{j=1}^{m} \left(u_1, w_j\right) w_j \end{cases} \tag{4.1.1}$$

(4.1) sisteminin çözümü olsun.

İkinci aşamada amacımız $t_m = T$ olduğunu göstermektir.

2. Adım: Önsel Kestirim

(4.1.1) nin her iki tarafını $g_m^{j'}$ ile çarparsak ve $j = 1$ den m ye kadar toplanırsa

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{array}{c} \|u_m'\|^2_{L^2[a,b]} + \|\nabla u_m\|^2_{L^2[a,b]} + (1+\varepsilon)\|u_m\|^2_{L^2[a,b]} \\ -2\varepsilon \int_a^b |u_m|^2 \ln|u_m|\, dx \end{array} \right) = 0 \tag{4.1.2}$$

olur. Buradan başlangıç koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \|u_m'(t)\|^2_{L^2[a,b]} + \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} \\ & + (1+\varepsilon)\|u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} - 2\varepsilon \int_a^b |u_m(t)|^2 \ln|u_m(t)|\, dx \\ = \; & \|u_m'(0)\|^2_{L^2[a,b]} + \|\nabla u_m(0)\|^2_{L^2[a,b]} \\ & + (1+\varepsilon)\|u_m(0)\|^2_{L^2[a,b]} - 2\varepsilon \int_a^b |u_m(0)|^2 \ln|u_m(0)|\, dx \\ \leq \; & C\left(\|u_1\|^2_{L^2[a,b]} + \|u_0\|^2_{H_0^1[a,b]}\right) \\ & -2\varepsilon \int_a^b |u_m(0)|^2 \ln|u_m(0)|\, dx, \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$H_0^1[a,b]$ uzayında $u_m(0) \to u_0$ olduğundan, $H_0^1[a,b]$ uzayında $u_m(0)$ dizisi sınırlıdır. Ayrıca

$$\left| \int_a^b |u_m(0)|^2 \ln|u_m(0)|\, dx \right| \leq c$$

olduğundan ve sonuç olarak, $C = C\left(\|u_0\|_{H_0^1[a,b]}, \|u_1\|_{L^2[a,b]}\right)$ başlangıç verilerine bağlı olarak

$$\begin{aligned} & \|u_m'(t)\|^2_{L^2[a,b]} + \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} + (1+\varepsilon)\|u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} \\ \leq \; & C + 2\varepsilon \int_a^b |u_m(t)|^2 \ln|u_m(t)|\, dx, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

yazılabilir.

(4.1.3) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son terimiyle ilgili bazı kestirimlerde bulunmak için logartitmik Sobolev eşitsizliği kullanılacaktır.

Lemma 3.2.2. den, (4.1.2) eşitsizliğinin sağ tarafı:

$$\begin{aligned} & \|u_m'(t)\|^2_{L^2[a,b]} + (1-2a\varepsilon)\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} \\ & + \left(1 + \varepsilon\left(2 + \frac{1}{2}\ln 2\pi a\right)\right)\|u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} \\ \leq \; & \varepsilon \ln\|u_m\|^2_{L^2[a,b]}\|u_m\|^2_{L^2[a,b]}. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

olarak ifade edilir. Şimdi $a = \frac{1}{4\varepsilon}$ olarak alınırsa (4.1.4) ifadesi

$$\begin{aligned} & \|u_m'(t)\|^2_{L^2[a,b]} + \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} + \|u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} \\ \leq\ & C(\varepsilon) \ln \|u_m\|^2_{L^2[a,b]} \|u_m\|^2_{L^2[a,b]} \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

olur.

$$u_m(t) = u_m(0) + \int_0^t \frac{\partial u_m}{\partial t}(s)\, ds$$

olduğundan Cauchy Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} \leq\ & 2\|u_0\|^2_{L^2[a,b]} \\ & + \max\{2T, 1\} \left(\frac{1 + C(\varepsilon)}{C(\varepsilon)}\right) \int_0^t \|u_m'(t)\|^2_{L^2[a,b]}\, ds \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

eşitsizliği yazılabilir.

(4.1.5) eşitsizliğinden faydalanarak (4.1.6) eşitsizliği

$$\begin{aligned} \|u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} \leq\ & 2\|u_0\|^2_{L^2[a,b]} + \max\{2T, 1\}(1 + C(\varepsilon)) \\ & \times \int_0^t \ln \|u_m\|^2_{L^2[a,b]} \|u_m\|^2_{L^2[a,b]}\, ds \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

olur.

$\tilde{C} = \max\{2T, 1\}(1 + C(\varepsilon)) \geq 1$ olarak alınırsa ve (4.1.7) düzenlenirse

$$\|u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} \leq 2\|u_0\|^2_{L^2[a,b]} + \tilde{C} \int_0^t \ln\left(\tilde{C} + \|u_m\|^2_{L^2[a,b]}\right) \|u_m\|^2_{L^2[a,b]}\, ds$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, Lemma 3.3.6 kullanılırsa

$$\|u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} \leq \left(\tilde{C} + 2\|u_m\|^2_{L^2[a,b]}\right) e^{\tilde{C}t} \leq C$$

olarak ifade edilebilir. Buradan (4.1.5) eşitsizliğinden

$$\|u_m'(t)\|^2_{L^2[a,b]} + \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} + \|u_m(t)\|^2_{L^2[a,b]} \leq C$$

olur. $t_m = T$ varsayımından

$$\|u_m'(t)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2[a,b])} + \|u_m(t)\|^2_{L^\infty\left(0,T;H_0^1[a,b]\right)} \leq C \tag{4.1.8}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde u_m'' için

$$\|u_m''(t)\|^2_{L^\infty(0,T;H^{-1}[a,b])} \leq C \tag{4.1.9}$$

olarak yazılabilir.

3. Adım: Limite Geçiş

(4.1.8) ve (4.1.9) eşitsizliklerinden u_m ile tanımlanan bir altdizi vardır, öyle ki

$$\begin{aligned}
u_m &\rightharpoonup u, \text{ için } L^2\left(0,T;H_0^1[a,b]\right) \text{ da zayıf yakınsak,}\\
u_m' &\rightharpoonup u', \text{ için } L^2\left(0,T;L^2[a,b]\right) \text{ da zayıf yakınsak,}\\
u_m'' &\rightharpoonup u'', \text{ için } L^2\left(0,T;H^{-1}[a,b]\right) \text{ da zayıf yakınsak,}\\
u_m &\rightharpoonup u, \text{ için } L^\infty\left(0,T;H_0^1[a,b]\right) \text{ da zayıf}^* \text{ yakınsak,}\\
u_m' &\rightharpoonup u', \text{ için } L^\infty\left(0,T;L^2[a,b]\right) \text{ da zayıf}^* \text{ yakınsak,}\\
u_m'' &\rightharpoonup u'', \text{ için } L^\infty\left(0,T;H^{-1}[a,b]\right) \text{ da zayıf yakınsak,}
\end{aligned}$$

olur. Aubin-Lions lemmasından ve üstteki yakısamalardan

$$u_m \to u, \quad L^2\left(0,T;L^2[a,b]\right) \text{ da güçlü yakınsak}$$

olarak elde edilir.
Sonuç olarak

$$u_m \to u, \quad (0,T)\times[a,b]$$

olarak ifade edilir. $x\ln|x|^2$ sürekli olduğundan

$$\left|u_m\ln|u_m|^2 - u\ln|u|^2\right|^2 \to 0, \quad (0,T)\times[a,b]$$

yakınsaması yazılabilir. Sobolev gömülme teoreminden $\left|u_m\ln|u_m|^2 - u\ln|u|^2\right|^2$, ifadesinin $L^\infty((0,T)\times[a,b])$ uzayında sınırlı olduğu elde edilir. Daha sonra Lebesgue yakınsama teoremi kullanırsak

$$u_m\ln|u_m|^2 \to u\ln|u|^2$$

ifadesinin $L^2(0,T;L^2[a,b])$ uzayında güçlü yakınsak olduğunu söyleyebiliriz. Sonuç olarak limite geçebiliriz. Son olarak başlangıç verilerinin doğruluğunu kontrol ederek ispatı sonlandırabiliriz.
Teorem 4.1.1 ispatı tamamlanır.

5. YÜKSEK MERTEBEDEN LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ KLEİN-GORDON DENKLEMİ

Bu bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Tezin bu bölümünde aşağıda verilen logaritmik kaynak terime ve zayıf damping (sönüm) terime sahip yüksek mertebeden Klein-Gordon

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathcal{P}u + u + u_t = 2u \ln |u| , & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \frac{\partial^i u(x,t)}{\partial v^i} = 0,\ (i = 0, 1, 2, ..., m-1) & x \in \partial\Omega, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip bir bölgedir. Ayrıca $m \in Z^+$ için $\mathcal{P} = (-\Delta)^m$ dır. $m = 1$ sınıfı, Ye (2020) tarafından çalışılmıştır. Çalışmamızda bu makaleden yararlanılarak denklemin genel hali olan (5.1) probleminin çözümlerinin global varlığı, üstel azalması ve patlamasına incelenecektir.

İlk olarak, lemma ve teoremlerde kullanılacak olan potansiyel enerji fonksiyoneli ve Nehari fonksiyonelini $u(t) \in H_0^m(\Omega)$ için

$$J(u) = \frac{1}{2}\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 \ln |u|^2 dx \tag{5.2}$$

ve

$$I(u) = \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2 - \int_\Omega u^2 \ln |u|^2 dx \tag{5.3}$$

olarak tanımlayalım. Böylece (5.1) probleminin toplam enerji fonksiyonelini

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 \ln |u|^2 dx \tag{5.4}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca başlangıç koşulları kullanılırsa başlangıç enerjisi

$$E(0) = \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 + \|u_0\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2 \ln |u_0|^2 dx$$

olur.

(5.2) ve (5.4) ten dolayı açıktır ki

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(u) \tag{5.5}$$

dır.

Lemma 5.1. $E(t)$ fonksiyonu, $t > 0$ için artmayan bir fonksiyondur. Yani

$$E'(t) = - \|u_t\|^2 \leq 0$$

dır.

İspat. Denklemimizin enerji fonksiyonelini bulmak için (5.1) denklemini u_t ile çarpıp, her bir terimin Ω bölgesinde integralini alırsak

$$\underbrace{\int_\Omega u_t u_{tt} dx}_{D_1} + \underbrace{\int_\Omega \mathcal{P} u u_t dx}_{D_2} + \underbrace{\int_\Omega u u_t dx}_{D_3} + \underbrace{\int_\Omega u_t u_t dx}_{D_4} = \underbrace{\int_\Omega 2 u u_t \ln |u| \, dx}_{D_5} \tag{5.6}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi (5.6) eşitliğinde yer alan D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 terimlerini yeniden ifade edelim;

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_\Omega u_t u_{tt} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u_t|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2 \end{aligned}$$

olarak yazılır. Green özdeşliği kullanılırsa D_2 terimi

$$\begin{aligned} D_2 &= \int_\Omega (-\Delta)^m u u_t dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| (-\Delta)^{\frac{m}{2}} u \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sırasıyla denklemin üçüncü ve dördüncü terimleri de

$$\begin{aligned} D_3 &= \int_\Omega u u_t dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_4 &= \int_\Omega u_t u_t dx \\ &= \int_\Omega u_t^2 dx \\ &= \|u_t\|^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Denklemimizin son terimi olan D_5 ise logaritma fonksiyonu özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} D_5 &= \int_\Omega 2uu_t \ln|u|\, dx \\ &= \int_\Omega \left(u^2 \ln|u|\right)' dx - \int_\Omega uu_t dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 \ln|u|^2\, dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 terimleri kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 \ln|u|^2\, dx\right) = -\|u_t\|^2$$

eşitliği yazılabilir. Burada (5.4) ten dolayı

$$\frac{d}{dt}\left(E\left(t\right)\right) = -\|u_t\|^2 \leq 0$$

dır. Bu ifadenin $(0,t)$ aralığında integrali alınırsa

$$E(t) + \int_0^t \int_\Omega |u_t|^2\, dt \leq E(0)$$

bulunur. Buradan $E(t)$ fonksiyonelinin artmayan bir fonksiyon olduğu ve

$$E\left(t\right) \leq E(0)$$

eşitsizliği elde edilir.

Payne ve Sattinger (1975) ın çalışmasındakine benzer şekilde $J(u)$ potansiyel derinlik değeri

$$d = \inf\left\{\sup_{\lambda\geq 0} J(\lambda u) : u \in H_0^m(\Omega)/\{0\}\right\} \tag{5.7}$$

olarak tanımlanır.

Nehari manifoldu ise

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^m(\Omega)/\{0\} : I(u) = 0\}$$

olarak tanımlanmıştır (Nehari, 1960; Willem, 1996). $\mathcal{N}$ kümesini aşağıdaki gibi sınırlı olmayan iki kümeye ayıralım

$$\mathcal{N}^+ = \{u \in H_0^m(\Omega)/\{0\} : I(u) > 0\} \cup \{0\}$$

ve

$$\mathcal{N}^- = \{u \in H_0^m(\Omega)/\{0\} : I(u) < 0\}.$$

Böylece, kararlı ve kararsız kümeleri sırasıyla

$$\mathcal{W} = \{u \in H_0^m(\Omega)/\{0\} : J(u) \leq d\} \cap \mathcal{N}^+$$

ve

$$\mathcal{U} = \{u \in H_0^m(\Omega)/\{0\} : J(u) \leq d\} \cap \mathcal{N}^-$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu tanımlamalara bağlı olarak potansiyel derinlik

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) \tag{5.8}$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi zayıf çözümün tanımını verelim:

Tanım 5.1. $\forall t \in [0,T]$ ve $\forall \varphi \in H_0^m(\Omega)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u &\in C([0,T], H_0^m(\Omega)), \\ u_t &\in C([0,T], L^2(\Omega)), \\ u_{tt} &\in C([0,T], H^{-m}(\Omega)) \end{aligned}$$

ve

$$\int_\Omega u_{tt}\varphi dx + \int_\Omega \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} \varphi dx + \int_\Omega u_t \varphi dx + \int_\Omega u\varphi dx = \int_\Omega u \ln |u|^2 \varphi dx$$

şartları sağlanırsa u, (5.1) probeleminin $[0,T]$ aralığında bir zayıf çözümüdür.

Teorem 5.1. (Lokal Varlık). Kabul edelim ki $u_0 \in H_0^m(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$ olsun. Böylece (5.1) probleminin $T > 0$ için

$$u \in C([0,T); H_0^m(\Omega)), \quad u_t \in C([0,T); L^2(\Omega)).$$

şartını sağlayan tek bir $u(t)$ lokal çözümü vardır. Ayrıca aşağıdaki ifadelerden en az biri doğrudur öyle ki

i. $t \to T^-$için $\|u_t\|^2 + \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u\right\|^2 + \|u\|^2 \to \infty$;

ii. $T = +\infty$

dır.

Teorem 5.1 in ispatı (Agre ve Rammaha, 2006; Irkıl ve Pişkin, 2021; Messaoudi, 2002) çalışmalarından faydalanılarak yapılabilir.

5.1. Global Varlık ve Üstel Azalma

Bu kısımda (5.1) probleminin global varlığı ve üstel azalması sırasıyla Teorem 5.1.1 ve Teorem 5.1.2 olarak ifade edilmiştir. Ayrıca teoremlerin ispatında kullanılacak bazı lemmalar ispatları ile verilmiştir.

Lemma 5.1.1. $u \in H_0^m(\Omega)$ ve $\|u\| \neq 0$ olmak üzere

$$\lambda^* = \exp\left(\frac{\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2 - 2\int_\Omega u^2 \ln u dx}{2\|u\|^2}\right)$$

için

$$I(\lambda u) = \lambda \frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) \begin{cases} > 0, & 0 < \lambda < \lambda^* \\ = 0, & \lambda = \lambda^* \\ < 0, & \lambda^* < \lambda < +\infty \end{cases}$$

dır.

İspat. (5.2) den dolayı

$$J(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2}\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \lambda^2\|u\|^2 - \lambda^2\int_\Omega u^2 \ln|\lambda u|\, dx$$

dır. Bu ifadenin λ ya göre türev alınırsa

$$\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u) = \lambda\left(\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2 - 2\ln\lambda\|u\|^2 - 2\int_\Omega u^2 \ln u dx\right) \tag{5.1.1}$$

olur. Buradan $\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u) = 0$ alınırsa, (5.1.1) denkleminin bir kökü

$$\lambda^* = \exp\left(\frac{\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2 - 2\int_\Omega u^2 \ln u dx}{2\|u\|^2}\right)$$

olarak bulunur.

(5.3) den dolayı biliyoruz ki

$$I(\lambda u) = \lambda^2\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \lambda^2\|u\|^2 - 2\lambda^2\int_\Omega u^2 \ln u dx - 2\lambda^2\ln\lambda\|u\| \tag{5.1.2}$$

dır. (5.1.1) ve (5.1.2) den dolayı açıktır ki

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u) = I(\lambda u)$$

dır. Böylece Lemma 5.1.1 ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 5.1.2. Kabul edelim ki $u \in H_0^m(\Omega)$ olsun. Böylece,

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{c_p}\right)^{\frac{n}{2}} e^n \tag{5.1.3}$$

dır.

İspat. Lemma (5.3) te verilen Nehari fonksiyonelinin tanımından ve Sonuç 3.3.1 den

$$\begin{aligned} I(u) &= \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2 - \int_\Omega u^2 \ln|u|^2 dx \\ &\geq \left(1 - \frac{c_p\alpha^2}{\pi}\right)\left(\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2\right) \\ &\quad + \left[n(1+\ln\alpha) - 2\ln\|u\|\right]\|u\|^2 \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

yazılabilir. Burada $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{c_p}}$ olarak alınırsa (5.1.4) ifadesi

$$I(u) \geq \left[n(1+\ln\alpha) - 2\ln\|u\|\right]\|u\|^2 \tag{5.1.5}$$

olur. Lemma 5.1.1 den dolayı

$$\sup_{\lambda\geq 0} J(\lambda u) = J(\lambda^* u) = \frac{1}{2}I(\lambda^* u) + \frac{1}{2}\|\lambda^* u\|^2 \tag{5.1.6}$$

eşitliği bulunur.

Lemma 5.1.1 ve (5.1.5) ten

$$I(\lambda^* u) \geq \left[n(1+\ln\alpha) - 2\ln\|\lambda^* u\|\right]\|\lambda^* u\|^2$$

olduğu açıktır. Böylece

$$0 \geq \left[n(1+\ln\alpha) - 2\ln\|\lambda^* u\|\right]\|\lambda^* u\|^2$$

olur. Bu eşitsizlikten

$$\|\lambda^* u\|^2 \geq \alpha^n e^n \tag{5.1.7}$$

elde edilir. (5.1.6) ve (5.1.7) den

$$\sup_{\lambda\geq 0} J(\lambda u) \geq \frac{1}{2}\alpha^n e^n \tag{5.1.8}$$

dir. d nin tanımı ve (5.1.8) den

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{c_p}\right)^{\frac{n}{2}} e^n$$

olarak bulunur.

Lemma 5.1.3. Kabul edelim ki $E(0) < d$ olsun. Eğer $u_0 \in \mathcal{N}^+$ ve $u_1 \in L^2(\Omega)$ ise bu durumda $\forall t \in [0,T)$ için $u(t) \in \mathcal{N}^+$ dir.

İspat. (5.5) eşitliği ve Lemma 5.1.1 ifadesi kullanılırsa $\forall t \in [0,T)$ için

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(u) \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + J(u_0) \\ &= E(0) < d \end{aligned}$$

dir. Ayrıca buradan

$$J(u) < d \tag{5.1.9}$$

açık bir şekilde yazılabilir.

Kabul edelim ki $t^* \in [0,T)$ aralığında bir değer vardır, öyle ki $[0,t^*)$ aralığında $u(t) \in \mathcal{N}^+$ ve $u(t^*) \notin \mathcal{N}^+$ dir. Böylece, $u(t)$ nin sürekliliğinden $u(t^*) \in \partial\mathcal{N}^+$ dır. $\mathcal{N}^+$ nın tanınmından ve $I(u)$ fonksiyonelinin zaman bağlı sürekliliğinden

$$I(u(t^*)) = 0 \tag{5.1.10}$$

olarak elde edilir. Varsayalım ki (5.1.10) sağlansın, böylece (5.1.5) ve Lemma 5.1.2 den dolayı

$$\|u(t^*)\|^2 \geq 2d \tag{5.1.11}$$

olarak yazılır. $J(u)$ ve $I(u)$ tanımı ile (5.1.10) ve (5.1.11) ifadeleri kullanılırsa

$$J(u(t^*)) = \frac{1}{2}\|u(t^*)\|^2 + \frac{1}{2}I(u(t^*)) \geq d \tag{5.1.12}$$

elde edilir. Bu durum (5.1.9) ile çelişir. Bundan dolayı (5.1.10) daki durumun sağlanması mümkün değildir. Sonuç olarak $[0,T)$ aralığında $u(t) \in \mathcal{N}^+$ olur.

Teorem 5.1.1 (Global çözüm). $u_0 \in \mathcal{W}$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ ve $E(0) < d$ olmak üzere, Teorem 5.1 de verilen lokal çözüm olan $u(t)$, (5.1) probleminin global çözümü olur.

İspat. Problemin ispatı yapılırken amacımız

$$\|u_t\|^2 + \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2$$

nin t den bağımsız olarak sınırlı olduğunu göstermektir. Teorem 5.1.1 varsayımları ve Lemma 5.1.3 den dolayı $[0,T)$ aralığında $u \in \mathcal{W}$ dır. $J(u)$ tanımı kullanılır ve sağ taraftaki son terime Sonuç 3.3.1 uygulanırsa

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 \ln|u|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c_p\alpha^2}{\pi}\right)\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left(1 - \ln\|u\| + \frac{n}{2}(1+\ln\alpha)\right)\|u\|^2 \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $u \in \mathcal{W}$ olduğundan $I(u) > 0$ olduğunu biliyoruz. (5.2) ve (5.3) den dolayı

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 \tag{5.1.14}$$

olarak yazılabilir. Burada d nin tanımından dolayı

$$\|u\|^2 \leq 2J(u) \leq 2d \tag{5.1.15}$$

dır. (5.1.15) ifadesi (5.1.13) te yerine yazılırsa

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c_p\alpha^2}{\pi}\right)\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\ln 2d + \frac{n}{2}(1+\ln\alpha)\right)\|u\|^2 \tag{5.1.16}$$

olarak elde edilir. $0 < \alpha < \sqrt{\frac{\pi}{c_p}}$ olarak seçilir ve Lemma 5.1.2 kullanılırsa

$$1 - \frac{c_p\alpha^2}{\pi} \geq 0$$

ve

$$1 - \frac{1}{2}\ln 2d + \frac{n}{2}(1+\ln\alpha) > 0$$

olduğu açıktır. Böylece (5.1.16) ifadesi

$$C_1 = \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{c_p\alpha^2}{2\pi},\ 1 - \frac{1}{2}\ln 2d + \frac{n}{2}(1+\ln\alpha)\right\}$$

olmak üzere

$$J(u) \geq C_1\left(\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2\right) \tag{5.1.17}$$

olarak düzenlenebilir.

(5.5) ve (5.1.17) ifadesi birlikte kullanılırsa ve Lemma 5.1 ve teoremde $E(0) < d$ varsayımı gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + C_1\left(\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2\right) &\leq \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(u) \\ &= E(t) \\ &\leq E(0) \\ &< d \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

elde edilir. Burada $C_2 = \min\{C_1, 1\}$ olmak üzere

$$\|u_t\|^2 + \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u\|^2 \leq \frac{d}{C_2} < +\infty$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten ve süreklilikten dolayı (5.1) probleminin u çözümünün global varlığı vardır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.2 (Üstel enerji azalması). $0 < \beta \leq 1$ bir sabit olmak üzere $E(0) < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{c_p}\right)^{\frac{n}{2}} e^n\beta \leq d$ eşitsizliği sağlansın. $u_0 \in \mathcal{W}$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ için zamandan bağımsız olacak şekilde κ ve k pozitif sabit vardır, öyle ki u global çözümü $\forall t \geq 0$ için

$$0 < E(t) \leq \kappa e^{-kt}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. $\forall t \geq 0$ için Lemma 5.1.3 den $u(t) \in \mathcal{N}^+$ olduğunu biliyoruz. Böylece $\forall t \geq 0$ için $0 < E(t) < d$ olduğu açıktır. Global çözümün üstel azalmasının ispatı için $\varepsilon > 0$ sonra belirlenecek sabit olmak üzere

$$F(t) = E(t) + \varepsilon \int_\Omega u_t u dx \tag{5.1.19}$$

fonksiyonelini tanımlayalım.

ξ_1 ve ξ_2 nin ε na bağlı iki pozitif sabit olmak üzere $\forall t \geq 0$ için

$$\xi_1 E(t) \leq F(t) \leq \xi_2 E(t) \tag{5.1.20}$$

olduğunu göstereceğiz. Aslında, (5.1.19) ifadesinde Young eşitsizliği uygulanır ve (5.1.18) kullanılırsa

$$\begin{aligned} F(t) &\leq E(t) + \frac{\varepsilon}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|u\|^2\right) \\ &\leq \left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2C_1}\right) E(t) \\ &= \xi_2 E(t), \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

elde edilir. Diğer taraftan benzer şekilde

$$\begin{aligned} F(t) &\geq E(t) - \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\|u_t\|^2 + J(u) - \frac{\varepsilon}{2C_1}E(t), \end{aligned} \tag{5.1.22}$$

eşitsizliği elde edilir. $0 < \varepsilon \leq \min\left\{1, \frac{2C_1}{2C_1+1}\right\}$ olacak şekilde ε yeterince küçük seçilirse (5.1.22) ifadesi

$$\begin{aligned} F(t) &\geq \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2C_1}\right)E(t) \\ &= \xi_1 E(t), \end{aligned} \tag{5.1.23}$$

olur. (5.1.21) ve (5.1.23) ifadelerinden dolayı (5.1.20) ifadesinin doğruluğu kanıtlanmış olur.

Şimdi (5.1.19) eşitliğinin türevi alınır, (5.1) denklemi ve Lemma 5.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} F'(t) &= E'(t) + \varepsilon\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \varepsilon\int_\Omega u u_{tt}dx \\ &= (\varepsilon-1)\|u_t\|^2 - \varepsilon\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \varepsilon\|u\|^2 \\ &\quad -\varepsilon\int_\Omega u_t u dx + \varepsilon\int_\Omega u^2\ln|u|^2 dx \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

ifadesi elde edilir.

$\zeta > 0$ için (5.1.24) ifadesinde aşağıdaki Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\int_\Omega u_t u dx\right| \leq \frac{1}{4\zeta}\|u_t\|^2 + \zeta\|u\|^2 \tag{5.1.25}$$

(5.1.24) eşitliği

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{4\zeta} - 1\right)\|u_t\|^2 - \varepsilon\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ &\quad +\varepsilon(\zeta-1)\|u\|^2 + \varepsilon\int_\Omega u^2\ln|u|^2 dx \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

olarak elde edilir.

η herhangi pozitif bir sabit olmak üzere (5.4) ve (5.1.26) ifadeleri birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\eta\varepsilon E(t) + \left[\varepsilon\left(1 + \frac{\eta}{2} + \frac{1}{4\eta}\right) - 1\right]\|u_t\|^2 \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{\eta}{2} - 1\right)\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \varepsilon(\eta+\zeta-1)\|u\|^2 \\ &\quad +\varepsilon\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)\int_\Omega u^2\ln|u|^2 dx \end{aligned} \tag{5.1.27}$$

olur. $0 < \eta \leq 1$ olarak seçilirse, Lemma 3.3.2 ve (5.1.15) kullanılırsa (5.1.27) ifadesi

$$\begin{aligned} F^{'}(t) &\leq -\eta\varepsilon E(t) + \left[\varepsilon\left(1+\frac{\eta}{2}+\frac{1}{4\eta}\right)-1\right]\|u_t\|^2 \\ &\quad -\varepsilon\left(1-\frac{\eta}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{\pi}\right)\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ &\quad +\varepsilon\left\{\eta+\zeta-1+\left(1-\frac{\eta}{2}\right)\left[\ln(2J(t))-n(1+\ln\alpha)\right]\right\}\|u\|^2 \end{aligned} \tag{5.1.28}$$

ifadesine dönüşür. $J(t) < E(t) < E(0) < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{c_p}\right)^{\frac{n}{2}} e^n\beta \leq d$ olduğundan α sabitini $\sqrt{\frac{\pi}{c_p}}\beta^{\frac{1}{n}} \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{\pi}{c_p}}$ aralığında seçilir ve $\zeta > 0$ yeterince küçük alınırsa

$$\begin{aligned} \zeta &< 1-\eta+\left(\frac{\eta}{2}-1\right)\left[\ln(2J(t))-n(1+\ln\alpha)\right] \\ &< 1-\eta+\left(\frac{\eta}{2}-1\right)\left[\ln\left(\left(\frac{\pi}{c_p}\right)^{\frac{n}{2}}e^n\beta\right)-n(1+\ln\alpha)\right] \\ &= 1-\eta+\left(\frac{\eta}{2}-1\right)\ln\left(\frac{\left(\frac{\pi}{c_p}\right)^{\frac{n}{2}}\beta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$F^{'}(t) \leq -\eta\varepsilon E(t) + \left[\varepsilon\left(1+\frac{\eta}{2}+\frac{1}{4\eta}\right)-1\right]\|u_t\|^2 \tag{5.1.29}$$

olduğunu elde ediriz.

Şimdi, ε yeterince küçük seçilirse

$$\varepsilon\left(1+\frac{\eta}{2}+\frac{1}{4\eta}\right)-1 < 0$$

olarak bulunur. Buradan, (5.1.29) eşitsizliğinden $\forall t \geq 0$ için

$$F^{'}(t) \leq -\eta\varepsilon E(t) \tag{5.1.30}$$

elde edilir. (5.1.20) ve (5.1.30) dan $k = \eta\varepsilon/\xi_2 > 0$ olmak üzere

$$F^{'}(t) \leq -kF(t) \tag{5.1.31}$$

olur. (5.1.31) eşitsizliğinin 0 dan t ye integrali alınırsa, $F(t)$ fonksiyonu

$$F(t) \leq F(0)e^{-kt} \tag{5.1.32}$$

olarak yazılır. Sonuç olarak, (5.1.20) den $\kappa = F(0)/\xi_1$ için

$$E(t) \leq \kappa e^{-kt}$$

elde edilir. Teorem 5.1.2 nin ispatı tamamlanır.

5.2. Çözümün Patlaması

Bu bölümde, (5.1) problemi için çözümün patlamasını çalışacağız.

Lemma 5.2.1. $u(t)$, (5.1) probleminin bir çözümü olsun. $u_0 \in \mathcal{U}$ ve $E(0) < d$ olmak üzere $\forall t \geq 0$ için $u(t) \in \mathcal{U}$ ve $E(t) < d$ dir.

İspat. Lemma 5.1 ve Lemma 5.2.1 den dolayı ve $\forall t \in [0, T)$ için

$$E(t) \leq E(0) < d$$

dir. Böylece, (5.4) ten dolayı $\forall t \in [0, T)$ için

$$J(u) \leq E(t) < d \tag{5.2.1}$$

olarak yazılabilir. $t^* \in [0, T)$ için $u(t^*) \notin \mathcal{U}$ oluğunu kabul edelim. Böylece süreklilikten dolayı $I(u(t^*)) = 0$ olur. Yani $u(t^*) \in \mathcal{N}$ dir. (5.8) den $J(u(t^*)) \geq d$ olur ancak bu (5.2.1) ile çelişki oluşturur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.1. Kabul edelim ki $u_0 \in \mathcal{U}$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ için $\int_\Omega u_0(x)u_1(x)dx \neq 0$ ve $0 < E(0) < \min\left\{d, \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{c_p}\right)^{\frac{n}{2}} e^n\right\}$ sağlansın. Bu durumda (5.1) probleminin $u(t)$ çözümü $T_* < +\infty$ zamanında patlar. Yani

$$\lim_{t \to T_*^-} \|u(t)\|^2 = +\infty$$

dir.

İspat. $u_0 \in \mathcal{U}$ ve $E(0) < d$ olduğundan Lemma 5.2.1 kullanılırsa $\forall t \in [0, T]$ için $u \in \mathcal{U}$ dır. Böylece $\forall t \in [0, T]$ için

$$I(u) = \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u\right\|^2 + \|u\|^2 - \int_\Omega u^2 \ln |u|^2 dx < 0, \tag{5.2.2}$$

dır. Sonuç 3.3.1 den

$$\left(1 - \frac{c_p \alpha^2}{\pi}\right) \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u\right\|^2 + \|u\|^2 + \left[n(1 + \ln \alpha) - \ln \|u\|^2\right] \|u\|^2 < 0 \tag{5.2.3}$$

yazılabilir. $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{c_p}}$ alınırsa (5.2.3) eşitsizliğinden

$$n(1 + \ln \alpha) - \ln \|u\|^2 < 0$$

yazılabilir. Buradan $\forall t \in [0, T]$ için

$$\|u(t)\|^2 > 2d \tag{5.2.4}$$

olur.

Problemin çözümünün global olduğunu varsayıp çelişki elde edeceğiz. $T > 0$ için $G(t) : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty]$ olmak üzere

$$G(t) = \|u(t)\|^2 + \int_0^t \|u(s)\|^2 ds + (T-t)\|u_0\|^2 \tag{5.2.5}$$

fonksiyonelini tanımlayalım. Burada her $t \in [0,T]$ için $G(t) > 0$ olduğu açıktır. $G(t)$ fonksiyonu sürekli olduğundan T den bağımsız olarak $\mu > 0$ vardır, öyle ki $\forall t \in [0,T]$ için

$$G(t) \geq \mu > 0 \tag{5.2.6}$$

dır.

(5.2.5) ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} G'(t) &= 2\int_\Omega u u_t dx + \|u(t)\|^2 - \|u_0\|^2 \\ &= 2\int_\Omega u u_t dx + 2\int_0^t \int_\Omega u(s) u_t(s) dx ds \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

eşitliği bulunur. (5.2.7) deki $G'(t)$ fonksiyonun türevini alırsak

$$G''(t) = 2\|u_t\|^2 + 2\int_\Omega u_{tt} u dx + 2\int_\Omega u_t u dx \tag{5.2.8}$$

elde edilir. (5.1) probleminde $u_{tt} = -\mathcal{P}u - u - u_t + 2u\ln|u|$ olduğundan (5.2.8) ifadesi

$$G''(t) = 2\left[\|u_t(t)\|^2 + \int_\Omega u^2 \ln|u|^2 dx - \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u(t)\right\|^2 - \|u(t)\|^2\right] \tag{5.2.9}$$

olarak ifade edilir.

(5.2.5), (5.2.7) ve (5.2.9) ifadeleri birlikte ele alınırsa

$$\begin{aligned} K(t) &= \left[\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|u(s)\|^2 ds\right] \times \left[\|u_t(t)\|^2 + \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds\right] \\ &\quad - \left[\int_\Omega u u_t dx + \int_0^t \int_\Omega u(s) u_t(s) dx ds\right]^2 \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} G(t)G''(t) - \frac{3}{2}[G'(t)]^2 &= 2G(t)\left[\|u_t(t)\|^2 + \int_\Omega u^2 \ln|u|^2 dx\right] \\ &\quad -2G(t)\left[\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u(t)\right\|^2 + \|u(t)\|^2\right] \\ &\quad -6[G(t) - (T-t)\|u_0\|^2] \times \left[\|u_t(t)\|^2 + \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds\right] \\ &\quad +6K(t) \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

eşitliği elde edilir.

$K(t)$ ifadesinin sağdan son iki terimine ayrı ayrı Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left(\int_\Omega uu_t dx\right)^2 \leq \|u(t)\|^2 \|u_t(t)\|^2, \tag{5.2.12}$$

$$\left(\int_0^t \int_\Omega uu_t dx ds\right)^2 \leq \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds, \tag{5.2.13}$$

ve

$$\begin{aligned} & 2\int_0^t \int_\Omega u(s)u_t(s)dxds \int_\Omega uu_t dx \\ \leq\ & \|u_t(t)\|^2 \int_0^t \|u(s)\|^2 ds + \|u(t)\|^2 \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

olarak elde edilir. (5.2.12)-(5.2.14) eşitsizliklerinden $\forall t \in [0,T]$ için $K(t) \geq 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece (5.2.11) eşitliği $\forall t \in [0,T]$ için

$$G(t)G''(t) - \frac{3}{2}[G'(t)]^2 \geq G(t)\chi(t) \tag{5.2.15}$$

olarak elde edilir. Burada $\chi(t)$

$$\begin{aligned} \chi(t) &= 2\left[\|u_t(t)\|^2 + \int_\Omega u^2 \ln|u|^2 dx - \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 - \|u(t)\|^2\right] \\ &\quad -6\left[\|u_t(t)\|^2 + \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds\right] \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

olarak alınmıştır.

(5.4) ve Sonuç 3.3.1 den

$$\begin{aligned} \chi(t) &\geq -8E(t) + 2\left(1 - \frac{c_p\alpha^2}{\pi}\right)\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 + 6\|u(t)\|^2 \\ &\quad +2\left[n(1+\ln\alpha) - \ln\|u(t)\|^2\right]\|u(t)\|^2 - 6\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

olarak yazılabilir.

$\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{c_p}}$ olarak alınır ve (5.1.3), (5.2.4) ifadeleri kullanılırsa (5.2.17) ifadesi

$$\chi(t) \geq -8E(t) + 6\|u(t)\|^2 - 6\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \tag{5.2.18}$$

olarak elde edilir. Lemma 5.1 den

$$\chi(t) \geq -8E(0) + 6\|u(t)\|^2 + 2\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \tag{5.2.19}$$

olur. Buradan (5.2.4) ve $E(0) < d$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} \chi(t) &\geq -8E(0) + 12d \\ &= 8\left[d - E(0)\right] + 4d > 0 \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

olur. Böylece T den bağımsız $\gamma > 0$ sayısı vardır öyle ki $\forall t \geq 0$ için

$$\chi(t) \geq \gamma > 0 \tag{5.2.21}$$

dir.

(5.2.6), (5.2.15) ve (5.2.21) den

$$G(t)G^{''}(t) - \frac{3}{2}[G^{'}(t)]^2 \geq \mu\gamma > 0 \tag{5.2.22}$$

olur. (5.2.22) integrallenirse

$$G(t) \geq \frac{G(0)}{\left(1 - \frac{G^{'}(0)}{2G(0)}t\right)^2} \tag{5.2.23}$$

elde edilir. Buradan T_* vardır, öyle ki

$$0 < T_* < \frac{2G(0)}{G^{'}(0)} \leq T \tag{5.2.24}$$

olur. Böylece,

$$\lim_{t \to T_*^-} G(t) = +\infty \tag{5.2.25}$$

elde edilir. $G(t)$ nin (5.2.5) teki tanımından ve (5.2.25) ten

$$\lim_{t \to T_*^-} \|u(t)\|^2 = +\infty$$

elde edilir. Dolayısıyla (5.1) in çözümünün global olduğu varsayımıyla çelişir. Böylece Teorem 5.2.1 in ispatı tamamlanır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde logaritmik kaynak terimli yüksek mertebeden

$$u_{tt} + \mathcal{P}u + u + u_t = 2u \ln |u|$$

Klein-Gordon denkleminin çözümlerinin global varlığı, üstel azalmasını ve patlamasını çalışılmıştır. Bu denklemin global varlığı, üstel azalması ve patlaması farklı koşul ve metotlar ile çalışılabilir. Ayrıca problemin polinomal azalması, atraktörü gibi farklı matematiksel özellikleri de çalışılabilir. Bu problem için sınırlı bölgede elde edilen sonuçlar sınırsız bölgede de çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Adams, R. A., ve Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York.

Agre, K. ve Rammaha, M. A. (2006). Systems of nonlinear wave equations with damping and source terms. *Differential Integral Equations*, 19(11), s. 1235-1270.

Al-Gharabli, M., vd., (2018). Well-posedness and asymptotic stability results for a viscoelastic plate equation with a logarithmic nonlinearity. *Applicable Analysis*, 99(4), s. 1-25.

Aubin, J. P. (1963). Un théoreme de compacite. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Juin*, 256, s. 5042–5044.

Bialynicki-Birula, I. ve Mycielski, J. (1976). Nonlinear wave mechanies. *Annals Physics,* 100(1-2), s. 62-93.

Boulaaras, S., vd., (2019). Polynomial Decay Rate for Kirchhoff Type in Viscoelasticity with Logarithmic Nonlinearity and Not Necessarily Decreasing Kernel. *Symmetry,* 11, s. 2-24.

Cazenave, T. ve Haraux, A. (1980). Equations d'evolution avec non-linearite logarithmique. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, 2(1), s. 21-51.

Chen, H. ve Tian, S. (2015). Initial boundary value problem for a class of semilinear pseudo-parabolic equations with logarithmic nonlinearity. *Journal of Differential Equations,* 12, s. 4424-4442.

Chen, H., vd., (2015). Global solution and blow up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1, s. 84-98.

Cömert, T. ve Pişkin, E. (2021). Blow up at infinity of weak solutions for a higher-order parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Journal of Universal Mathematics*, 4(2), s. 118-127.

Dubinskiĭ, Y. A. (1965). Weak convergence for nonlinear elliptic and parabolic equations. *Matematicheskii Sbornik*, 109(4), s. 609–642.

Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, vol. 19.

Ferreira, J., vd., (2021). Blow up results for a viscoelastic Kirchhoff-type equation with logarithmic nonlinearity and strong damping. *Mathematica Moravica*, 25(2), s. 125-141.

Gorka, P. (2009). Logarithmic Klein-Gordon equation. *Acta Physica Polonica B*, 40(1), s. 59-66.

Gross, L. (1975). Logarithmic Sobolev inequalities. *American Journal of Mathematics,* 4, s. 1061-1083.

Han, X.S. (2013). Global existence of weak solutions for a logarithmic wave equations arising from Q-ball dynamics. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 50(1), s. 275-283.

Hiramatsu, T., vd., (2010). Numerical study of Q-ball formationin gravitymediation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 6(8), s. 1-36.

Hu, Q., vd., (2017). Asymptotic behaviour for a class of logarithmic wave equations with linear damping. *Applied Mathematics & Optimization*, 79, s. 131-144.

Irkıl, N. ve Pişkin, E. (2021). Global nonexistence of solutions for the higher-order Kirchhoff type system with logarithmic nonlinearities. *Journal of Universal Mathematics*, 4(2), s. 172-187.

Irkıl, N. ve Pişkin, E. (2021). Local existence for class of nonlinear higher-order wave equation with logarithmic source term. *Asia Mathematika*, 5(3), s. 89-100.

Kafini, M. (2021). On the decay of a nonlinear wave equation with delay. *Annali dell'Universita di Ferrara,* s. 11-26.

Kelley, W. G., ve Peterson, A. C. (2010). *The theory of differential equations.* Springer-Verlag, 423, New York.

Kesavan, S. (1989). *Topics in functional analysis and applications.* John Wiley and Sons, India.

Lian, W. ve Xu, R. (2019). Global well-posedness of nonlinear wave equation with weak and strong damping terms and logarithmic source term. *Advances in Nonlinear Analysis,* 9(1), s. 613-632.

Liao, M. (2022). The lifespan of solutions for a viscoelastic wave equation with a strong damping and logarithmic nonlinearity. *Evolution Equations and Control Theory*, 11 (3) : 781-792.

Ma, L. ve Fang, Z. B. (2018). Energy decay estimates and infinite blow-up

phenomena for a strongly damped semilinear wave equation with logarithmic nonlinear source. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41, s. 2639-2653.

Messaodi S. A. (2002). Global existence and nonexistence in a system of Petrovsky. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 265, s. 296–308.

Peyravi, A. (2020). General Stability and Exponential Growth for a Class of Semilinear Wave Equations with Logarithmic Source and Memory Terms. *Applied Mathematics & Optimization*, 81(65).

Pişkin, E. (2013). *Doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması.* (Doktora Tezi). Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.

Pişkin, E. (2017). *Sobolev Uzayları*, Seçkin Yayıncılık, 147, Ankara.

Pişkin, E. (2018). *Kısmi Türevli Denklemler*, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. ve Çalışır, Z. (2020). Decay and blow up at infinite time of solutions for a logarithmic Petrovsky equation. *Tbilisi Mathematical Journal*, 13(4), s. 113-127.

Pişkin, E. ve Irkıl, N. (2019). Well-Posedness Results for a Sixth-Order Logarithmic Boussinesq Equation. *Filomat,* 33(13), s. 3985–4000.

Pişkin, E. ve Irkıl, N. (2019). Mathematical behavior of solutions of p-laplacian equation with logarithmic source term. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 10(2), s. 213-220.

Pişkin, E. ve Irkıl, N. (2020). Exponential growth of solutions of higher-order viscoelastic wave equation with logarithmic term. *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 13, s. 106-111.

Pişkin, E. ve Irkıl, N. (2021). Existence and decay of solutions for a higher-order viscoelastic wave equation with logarithmic nonlinearity. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 70(1), s. 300-319.

Polat, N. (2005). *Doğrusal olmayan parabolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu.* (Doktora Tezi). Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.

Yang, Y., vd., (2019). Qualitative analysis of solutions for a class of Kirchhoff

equation with linear strong damping term, nonlinear weak damping term and power-type logarithmic source term. *Applied Numerical Mathematics,* 141, s. 263-285.

Ye, Y. (2020). Global solution and blow up of logarithmic Klein-Gordon equation. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 57(2), s. 281-294.

Ye, Y. ve Li, L. (2017). Global existence and blow-up of solutions for logarithmic Klein-Gordon equation. *American Institute of Mathematical Sciences,* 6(7), s. 6898–6914.

Yüksekkaya, H. ve Pişkin, E. (2021). Blow up of solutions for Petrovsky equation with delay term. *Journal of Nepal Mathematical Society*, 4(1), s. 76-84.

Zhang, H., vd., (2015). Exponential decay of energy for a logarithmic wave equation. *Journal of Partial Differantial Equations*, 28(3), s. 269-277.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad	Aksoy, Ruken

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Lisans	Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği	2020
Lise	Mehmet Edip Fatma Yüksel Anadolu Lisesi Mardin/Artuklu	2015

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Erhan Pişkin and Ruken Aksoy **"*Existence and nonexistence for the higher-order logarithmic Klein-Gordon equation*"** in the 4th International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM - VAN 2022).
2.
3.
4.

Özel İlgiler

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Ruken AKSOY
ÖĞRENCİ NO	20804001
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2021-2022
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Logaritmik Kaynak Terimli Evolüsyon Denklemlerin Çözümleri
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	50
BENZERLİK ORANI	%13
RAPORLAMA TARİHİ	27/07/ 2022

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 50 sayfalık kısmına ilişkin, 27/07/2022 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %13'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

☒Kabul/Onay sayfaları hariç,
☒Kaynakça hariç
☒Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☐Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esaslarını inceledim ve bu Uygulama Esaslarında belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Öğrencinin
Adı ve Soyadı: Ruken AKSOY
Tarih:
İmza:

…….	…….
Tez Danışmanı	**Anabilim Dalı Başkanı**
Adı ve Soyadı: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN	Adı ve Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY
Tarih:	Tarih:
İmza:	İmza:

Formdaki bilgiler, bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersizdir.