T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRSEL TÜREV YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ ANALİTİK VE Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BİR ALT SINIFI

Gülfem AKIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Mayıs - 2017

T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Gülfem AKIN tarafından yapılan "Kesirsel Türev Yardımıyla Tanımlanmış Analitik ve Bi-ünivalent Fonksiyonların Bir Alt Sınıfı " konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. H.Özlem GÜNEY

Üye : Doç. Dr. Sevtap SÜMER EKER

Üye : Yrd. Doç. Dr. F. Müge SAKAR

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 26 / 05 / 2017

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../.....

Doç. Dr. Sevtap SÜMER EKER

Enstitü Müdür V.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bana yol gösterici ve destek olan, her konuda yardımını hiç esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Sevtap SÜMER EKER'e,

Tezin düzenlenmesinde değerli görüşlerini esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY'e,

Çalışmalarım boyunca manevi desteğini her an yanımda hissettiğim, beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
TEŞEKKÜR……..		I
İÇİNDEKİLER…….....		II
ÖZET…….....		III
ABSTRACT…….....		IV
ŞEKİL LİSTESİ…….....		V
KISALTMA VE SİMGELER…….		VI
1.	**GİRİŞ**…….....	1
2.	**KURAMSAL TEMELLER**…..……..	3
3.	**MATERYAL ve METOT**……..	9
3.1.	Ünivalent Fonksiyonlar…….....,,.....	9
3.2.	Ünivalent Fonksiyonların Bazı Altsınıfları…….....	17
3.3	Bi-Ünivalent Fonksiyonlar……...	27
3.4	Kesirsel Hesap……..…….....	29
3.5	Faber Polinomları…….…….....	34
4.	**BULGULAR VE TARTIŞMA**……..	37
5.	**KAYNAKLAR**…….....	43
ÖZGEÇMİŞ……...		45

ÖZET

KESİRSEL TÜREV YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ ANALİTİK VE Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BİR ALT SINIFI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülfem AKIN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

Bu tezde kesirsel türev kullanılarak analitik ve bi-ünivalent fonksiyonların yeni bir altsınıfı tanımlanmış ve bu altsınıfa ait fonksiyonların katsayıları için üst sınırlar bulunmuştur. Yapılan bu tezin okuyucu için anlaşılabilir olması amacıyla öncelikle karmaşık fonksiyonlar kuramının temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Ardından ünivalent fonksiyonlar teorisinin temelini oluşturan tanım ve teoremlere yer verilerek, ünivalent fonksiyonların bazı önemli alt sınıfları tanıtılmıştır. Ayrıca kesirsel analiz ve Faber polinomları hakkında gerekli bilgiler verilerek tezde tanımlanmış olan sınıfın anlaşılabilirliği sağlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Ünivalent Fonksiyon, Bi-Ünivalent Fonksiyon, Kesirsel Türev, Katsayı eşitsizlikleri.

ABSTRACT

A SUBCLASS OF ANALYTIC AND BI-UNIVALENT FUNCTIONS DEFINED BY FRACTIONAL DERIVATIVE OPERATOR

M.Sc. THESIS

Gülfem AKIN

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2017

In this thesis, using fractional derivative a new subclass of analytic and bi-univalent functions is defined and upper bounds for the coefficients of the functions belonging to this subclass are found. In order to make this thesis understandable to the reader, the basic definitions and theorems of the theory of complex functions are given first. After then, giving the definitions and the theorems underlying basis of the theory of univalent functions, some important subclasses of univalent functions are introduced. Furthermore, by providing the necessary information about fractional calculus and Faber polynomials, understandability of the class defined in the thesis is provided.

Keywords : Univalent Function, Bi-Univalent Function, Fractional Derivative, Coefficient inequalities.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil No		**Sayfa**
Şekil 3.1.	U Birim Diskinin Koebe Fonksiyonu Altındaki Resmi	12
Şekil 3.2.	$1+z \prec \frac{1+z}{1-z}$	21
Şekil 3.3.	Yıldızıl Küme	22
Şekil 3.4.	z noktasına göre yıldızıl küme	22
Şekil 3.5.	Konveks Küme	23

KISALTMA VE SİMGELER

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Gerçel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	:	Karmaşık Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	:	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Genişletilmiş Karmaşık Düzlem
U	:	$\{ z : \|z\| < 1 \}$, Birim disk
U_R	:	$\{ z : \|z\| < R \}$
$K(z)$	:	$\frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu
$L_0(z)$	:	$\frac{1+z}{1-z}$ Mobius fonksiyonu
Γ	:	Gamma fonksiyonu
$f \prec g$	:	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$D_z^{-\delta} f$	:	f fonksiyonunun δ mertebeli kesirsel integrali
$D_z^{\delta} f$	:	f fonksiyonunun δ mertebeli kesirsel türevi
$\Phi_n(w)$	:	$g(z)$ fonksiyonunun n . dereceden Faber polinomu
φ	:	Schwarz fonksiyonu
S	:	Birim diskte analitik, yalınkat ve normalleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı
P	:	Pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
Ω	:	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
S^*	:	Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
C	:	Konveks fonksiyonlar sınıfı
$S^*(\alpha)$	:	α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$C(\alpha)$: α mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı

$\sum$: Ünivalent fonksiyonlar sınıfı

$A_{\sum}^{(\alpha,\lambda,\delta)}$: $\sum$ sınıfındaki fonksiyonların kesirsel türev yardımıyla tanımlanan yeni bir alt sınıfı

1.GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi, analitik fonksiyonların geometrik özellikleri ile ilgilenen karmaşık analizin önemli bir dalıdır. Fonksiyonlar teorisinin başlangıcı 18. yüzyıla, L. Euler'e dayanmaktadır. Modern fonksiyonlar teorisi 19. yüzyılda gelişmeye başlamıştır. B. Riemann, 1851 yılında $z-$ düzleminin basit bağlantılı bir $D_1 \subset \mathbb{C}$ $(D_1 \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$ düzleminin basit bağlantılı D_2 bölgesi üzerine resmeden analitik bir f fonksiyonunun varlığını göstermiş ve böylece geometrik fonksiyonlar teorisinin doğmasına sebep olmuştur. Ünivalent fonksiyonlar teorisi, geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından biridir. Bu teori Koebe'nin 1907 yılında yapmış olduğu, normalize edilmiş ünivalent bir fonksiyonun kendisinin ve birinci türevinin modülleri üzerindeki sınırları ispatladığı çalışması ile başlamıştır. Bieberbach'ın bu tür fonksiyonların ikinci katsayıları için 1916 yılında elde ettiği katsayı kestirimi ve bu kestirimin sonuçları ünivalent fonksiyonlar teorisinin önemini ortaya koymuştur. Böylece karmaşık analizin bu önemli dalı pek çok matematikçiyi cezbetmeye başlamış ve günümüze kadar ünivalent fonksiyonların alt sınıfları üzerine birçok çalışma yapılmıştır.

Bieberbach tahmininin 1984 yılında Branges tarafından ispatlanmasına kadar problemin çözümü ile ilgilenen matematikçiler normalize edilmiş analitik ve ünivalent fonksiyonlar sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlayarak bu alt sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili ilginç bağıntılar elde etmiştir. Branges tarafından katsayı probleminin çözülmüş olması, bu alanda çalışılacak bir şey kalmadığı anlamına gelmemiş, aksine ünivalent fonksiyonlar teorisini daha da zenginleştirerek bu alanda çalışan matematikçilerin problemi ünivalent fonksiyonların değişik alt sınıflarına taşımalarına ve bu alt sınıflar üzerinde çalışmalarını sürdürmelerine sebep olmuştur.

Ünivalent bir fonksiyonun tersi ünivalent olmayabilir. Tersi de ünivalent olan ünivalent fonksiyonlarla yani bi-ünivalent fonksiyonlarla ilgili ilk çalışma, 1967 yılında Lewin tarafından yapılmıştır. Lewin, bi-ünivalent fonksiyonların sınıfını Σ ile göstererek bu sınıfa ait fonksiyonların ikinci katsayıları için $|a_2| < 1.51$ olduğunu elde etmiştir. Brannan ve Clunie, 1967 yılında her $f \in \Sigma$ için $|a_2| \leq \sqrt{2}$ olduğunu açık problem olarak ortaya atmışlardır. Netanyahu, 1969 yılında her $f \in \Sigma$ için $\max |a_2| = \frac{4}{3}$

olduğunu göstermiştir. Daha sonra $|a_2| \leq 1.485$ olduğu 1985 yılında Tan tarafından gösterilmiştir. Kedzierawski ise, 1985 yılında Brannan ve Clunie tarafından elde edilmiş olan $|a_2| \leq \sqrt{2}$ tahminini bi-yıldızıl fonksiyonlar için ispatlamıştır. Brannan ve Taha, 1985 ve 1986 yıllarında α – mertebeden bi-yıldızıl ve bi-konveks fonksiyonların a_2 ve a_3 katsayılarının modüllerinin sınırlarıyla ilgili tahminler elde etmişlerdir. Son zamanlarda pek çok matematikçi, bi-ünivalent fonksiyonların çeşitli alt sınıfları için katsayı tahminlerinde bulunmuştur.

Bu çalışmada kesirsel türev yardımıyla Σ sınıfındaki fonksiyonların yeni bir alt sınıfı tanımlanarak bu sınıftaki fonksiyonların a_n genel katsayılarının modülleri için Faber polinomu katsayı teknikleri kullanılarak sınır belirlenmiştir. Ayrıca bu fonksiyonların a_2 ve a_3 katsayılarının modülleri için üst sınırlar elde edilmiştir.

Tezin kuramsal temeller bölümünde çalışmamızda gerekli olacak bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Materyal ve metot bölümünde ise ünivalent ve bi-ünivalent fonksiyonlar tanıtılarak normalize edilmiş analitik ve ünivalent fonksiyonlar sınıfına ve bazı alt sınıflarına ait önemli özellikler verilmiş, kesirsel türev kavramı ve Faber polinomları açıklanmıştır.

Araştırma bulguları olarak verilen son bölümde ise $A_{\Sigma}^{(\alpha,\lambda,\delta)}$ sınıfı tanımlanarak bu sınıftaki fonksiyonlar için katsayı sınırları belirlenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, tezde kullanılan temel tanımlar yapılacaktır. Ayrıca tez boyunca ihtiyaç duyulan önemli teoremler ve bu teoremlerin sonuçları ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.1 (Komşuluk) $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi olsun. $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $B(z_0;\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine z_0 noktasının $\varepsilon -$ *komşuluğu* denir. $B(z_0;\varepsilon)$ kümesi, z_0 merkezli ve ε yarıçaplı çemberin içidir. Bazen " $B(z_0;\varepsilon)$ komşuluğu" yerine "$\mathbb{C}$ de bir disk" ifadesi de kullanılır. $\overline{B}(z_0;\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le \varepsilon\}$ kümesine z_0 merkezli ve ε yarıçaplı kapalı disk, $B(z_0;\varepsilon) - \{z_0\}$ kümesine ise z_0 noktasının *delinmiş* $\varepsilon -$ *komşuluğu* denir. $B^*(z_0;\varepsilon)$ ile gösterilen z_0 noktasının delinmiş $\varepsilon -$ komşuluğunun $B^*(z_0;\varepsilon) = \{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ şeklinde yazılabileceği açıktır.

Tanım 2.2 (İç nokta) $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in A$ olsun. z_0 noktasının bir ε komşuluğu tamamen A kümesinde kalıyorsa, başka bir deyişle $B(z_0;\varepsilon) \subset A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir *iç noktası* denir. A kümesinin bütün iç noktalarının kümesi A kümesinin *içi* olarak adlandırılır.

Tanım 2.3 (Açık ve Kapalı küme) Her noktası iç nokta olan kümeye *açık küme*, tümleyeni açık olan kümeye ise *kapalı küme* denir.

Tanım 2.4 (Bağlantılı küme, Bağlantısız küme) $A \subset \mathbb{C}$ alt kümesi verilsin. A kümesi boştan farklı, ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa A kümesine *bağlantılıdır* denir. Bağlantılı kümenin diğer bir tanımı aşağıdaki şekilde verilir:

$A \subseteq U \cup V$, $A \cap U \neq \varnothing$ ve $A \cap V \neq \varnothing$, $A \cap U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde boştan farklı U ve V açık kümeleri bulunamıyor ise, A kümesine *bağlantılı küme* denir. Örneğin $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ve $A = \{ z : |z| < 1 \}$ kümeleri birer bağlantılı kümedir.

Bağlantılı olmayan kümeye *bağlantısız küme* denir. $B = \{ z : \operatorname{Im} z = 0 \ ve \ \operatorname{Re} z \ rasyonel \ sayı \}$ kümesi bağlantısız kümeye örnek olarak verilebilir.

Tanım 2.5 (Bölge) Karmaşık düzlemde açık ve bağlantılı bir kümeye *bölge* denir. Örneğin $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi açık ve bağlantılı olduğundan bir bölgedir. Fakat $B = \{ z : \operatorname{Im} z = 0 \text{ ve } \operatorname{Re} z \text{ rasyonel sayı} \}$ kümesi bağlantılı olmadığından bir bölge değildir.

Tanım 2.6 (Eğri) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir *eğri* denir. Bir eğri geometrik olarak $[a,b]$ aralığının γ fonksiyonu altındaki sürekli resmi olarak verilir. Örneğin $\gamma : [1,2] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t + it$ ile verilen fonksiyon sürekli olduğundan $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğridir.

Bir γ eğrisi için $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin *başlangıç ve bitiş noktaları* denir. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ eğrisi *kapalı eğri* olarak adlandırılır. Kendi kendini kesmeyen eğrilere *basit eğri*, hem basit hem de kapalı eğrilere de *basit kapalı eğri* veya *Jordan eğrisi* denir. Örneğin $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ ile verilen eğri bir Jordan eğrisidir.

Bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eğrisi parametrik olarak $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$ kuralı ile verilir. t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralanma yön olarak alınır.

Tanım 2.7 (Diferensiyellenebilirlik) $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A kümesinin bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *diferensiyellenebilir* (veya *türevlenebilir*) denir. Bu limitin değeri $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ ile gösterilir ve buna f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi* adı verilir. $f'(z_0)$ türevi yine $\mathbb{C}$ kümesinin elemanıdır.

Tanım 2.8 (Analitiklik) $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse, f fonksiyonuna z_0 *noktasında analitiktir* denir. f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse, bu noktaya fonksiyonun *singüler noktası* denir. Eğer her $z_0 \in A$ noktasında f fonksiyonu diferensiyellenebilir ise f fonksiyonuna *A kümesi üzerinde analitiktir* denir. $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesinde analitik olan fonksiyona ise *tam fonksiyon* adı verilir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

ile verilen *Cauchy-Riemann denklemlerini* sağlar.

Örneğin $f_1(z) = e^z$, $f_2(z) = \sin z$, $f_3(z) = \cos z$ fonksiyonları birer tam fonksiyondur. $f_4(z) = \overline{z}$ fonksiyonu ise Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamaz ve dolayısıyla hiçbir yerde analitik değildir.

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu için f_z ve $f_{\overline{z}}$ kısmi türevleri

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y)$$

$$f_{\overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y)$$

şeklindedir. Eğer bir f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ise $f_{\overline{z}} = 0$ ve $f_z = f'(z)$ olur. Tersine eğer bir D bölgesinde $f_{\overline{z}} = 0$ veya $f_z = f'(z)$ ise f fonksiyonu D bölgesinde analitiktir. Ayrıca

$$|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Cauchy-Riemann denklemlerinin bir sonucu olarak,

$$J_f(z) = J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = u_x^2 + u_y^2 = \left|u_x + iu_y\right|^2 = \left|f'(z)\right|^2$$

olduğu açıktır.

Teorem 2.9 (Türevler İçin Cauchy İntegral Formülü) f pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0,1,2,...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

olur (Ponnusamy ve Silverman, 2006).□

Türevler için Cauchy integral formülünün en önemli sonuçlarından biri, bir bölgede analitik bir f fonksiyonunun bu bölgede her mertebeden türevinin var olması ve bu türevlerin de o bölgede analitik olmasıdır.

Cauchy integral formülünden elde edilebilen bir diğer önemli kavram ise f fonksiyonunun analitik olduğu noktanın uygun bir komşuluğunda kuvvet serisine açılabildiğini söyleyen Taylor Teoremidir.

Teorem 2.10 (Taylor Teoremi) f, D bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $z_0 \in D$ olmak üzere $B(z_0, r)$, D bölgesindeki en büyük açık disk olsun. Bu durumda f fonksiyonu tüm $z \in B(z_0, r)$ noktalarında yakınsak olan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

şeklinde bir seri açılımına sahiptir. Ayrıca bu yakınsaklık $0 \le r < R$ olmak üzere $\overline{B}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$ kapalı diskinde düzgündür. Yukarıda verilen eşitlikteki seriye f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *Taylor serisi* denir (Agarwal ve ark. 2010).□

Tanım 2.11 (Schwarz Fonksiyonu) $U = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ koşullarını sağlayan analitik f fonksiyonuna U birim diskinde *Schwarz fonksiyonu* denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf Ω ile gösterilir.

Yardımcı Önerme 2.12 (Schwarz Yardımcı Önermesi) f fonksiyonu U birim diskinde bir Schwarz fonksiyonu ise $|f'(0)| \le 1$ ve $|f(z)| \le |z|$ eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik hali yalnızca $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta}z$ fonksiyonu için sağlanır (Ponnusamy ve Silverman, 2006).□

Tanım 2.13 (Konform Dönüşüm) Karmaşık düzlemin bir D bölgesinde $f : D \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. γ_1 ve γ_2, $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı bulunan herhangi iki düzgün eğri olmak üzere bu eğrilerin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrilerinin w_0 noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı varsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında *konform dönüşüm* denir. f fonksiyonu her $z_0 \in D$ noktasında konform ise, f fonksiyonuna D bölgesinde *konformdur* denir.

En önemli konform dönüşümlerden biri a,b,c,d karmaşık sabitler olmak üzere

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad ad - bc \neq 0$$

ile verilen *Möbius dönüşümü*dür. Bu dönüşüm genişletilmiş karmaşık düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ kendisi üzerine konform olarak resmeder.

Konform dönüşümler ile analitiklik arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teorem oldukça kullanışlıdır.

Teorem 2.14 f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur (Duren 1983).□

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde tezin oluşturulmasında kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

3.1 Ünivalent Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1 (Ünivalent Fonksiyon) Bir D bölgesinde tanımlı bir f fonksiyonu, D deki farklı z değerlerine farklı w değer çiftleri karşılık getiriyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde *ünivalenttir* denir. Bu durumda, $w = f(z)$ denklemi, her w değeri için bu bölgede en fazla bir köke sahiptir. Bu tür fonksiyonlar, D bölgesini, $w-$ düzlemindeki bir bölge üzerine bire-bir ve konform olarak dönüştürür.

Bu tanım aşağıdaki şekilde de verilebilir:

Herhangi bir D bölgesinde ve en fazla bir kutup noktası hariç tüm düzlemde analitik bir f fonksiyonu için, $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere,

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

önermesi doğru oluyorsa, yani f fonksiyonu bu bölgedeki bir noktada aynı değeri iki kez almıyorsa, f fonksiyonuna D bölgesinde *ünivalenttir* denir.

Örneğin; $f(z) = \overline{z}$ fonksiyonu ünivalent bir fonksiyondur.

D bölgesindeki ünivalentlik, D bölgesinin her alt bölgesinde de sağlanır.

Tanım 3.1.2 (Yerel Ünivalent Fonksiyon) Bir D bölgesinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu, bir $z \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda ünivalent ise f fonksiyonuna z *noktasında yerel ünivalent fonksiyon* denir.

f fonksiyonunun analitik olması durumunda yerel ünivalentlik $z \in D$ olmak üzere $f'(z) \neq 0$ koşulu ile eşdeğerdir (Duren 1983).

Eğer f fonksiyonu bir D bölgesinde yerel ünivalent ve $z \in D$ ise $f'(z)$ türevi fonksiyonun z noktası etrafındaki yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ değeri uzunluklar için yerel büyüme çarpanını ve $\arg f'(z)$ değeri ise yerel dönme çarpanını verir. Ayrıca f fonksiyonunun $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinden $\mathbb{R}^2$ ye bir dönüşüm olduğu göz

önüne alındığında, bu dönüşümün Jacobian determinantı $|f'(z)|^2$ olacaktır. Böylece bir yerel ünivalent fonksiyon açıları ve yönleri korur. Bu yüzden bir ünivalent fonksiyon bir konformal dönüşüm veya bir konformal eşdeğerlik olarak anılır.

D bölgesi üzerindeki $f'(z) \neq 0$ koşulu f fonksiyonunun bu bölge üzerindeki ünivalentliği için gerekli olmasına rağmen yeterli değildir. Örneğin $f(z) = e^{kz}$ fonksiyonu tüm $k \in \mathbb{C}$ değerleri için U birim diskinde yerel ünivalenttir ancak $|k| > \pi$ olması durumunda ünivalent değildir. Bir diğer örnek olarak $f(z) = z^2$ fonksiyonu verilebilir. Bu fonksiyon $D = \{z : 1 < |z| < 2 \ , \ 0 < \arg z < 3\pi / 2\}$ bölgesinde yerel ünivalenttir ancak ünivalent değildir. Gerçekten, $f(z) = z^2$ fonksiyonu D bölgesinde analitiktir ve her $z_0 \in D$ için $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + i\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}} - i\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = i\frac{9}{4}$$

olduğundan f fonksiyonu D bölgesinde ünivalent değildir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde kullanılan en önemli temel sonuçlardan biri de Riemann Dönüşüm Teoremidir.

Teorem 3.1.3 (Riemann Dönüşüm Teoremi) $\mathbb{C}$ karmaşık düzleminin basit bağlantılı bir D öz alt kümesini alalım ve $z_0 \in D$ olsun. Bu durumda D bölgesini U birim diski üzerine konform olarak resmeden ve $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan tek bir f fonksiyonu vardır (Duren 1983). □

Riemann Dönüşüm Teoremi, ünivalentlik ile ilgili problemlerin genel basit bağlantılı bir bölge üzerinde çalışılması yerine U birim diski üzerinde çalışılabileceğini söyler.

Tanım 3.1.4 (Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar) U birim diskinde analitik olan bir g fonksiyonunun

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

şeklinde bir Maclaurin açılımına sahip ve birim diskte yakınsak olduğu bilinmektedir. U birim diskinde ünivalent bir g fonksiyonuna sabit bir sayı eklemekle elde edilen fonksiyon sadece bölgeyi kaydıracağından, bu yeni fonksiyon da birim diskte ünivalent olur. O halde yukarıdaki Maclaurin açılımında b_0 sabiti keyfidir. g fonksiyonundan b_0 sabitini çıkararak elde edilen $g(z)-b_0$ fonksiyonu U birim diskinde ünivalent olduğundan $b_1 = g'(0) \neq 0$ dır. Böylece $g(z)-b_0$ fonksiyonunu b_1 sayısına bölerek elde edilen $f(z) = (g(z)-b_0)/b_1$ fonksiyonu göz önüne alınabilir. Bu fonksiyon $1/b_1$ ile çarpıldığında resim bölgesi sadece döner ve genişler (veya daralır). Buradan g fonksiyonu D bölgesinde ünivalent ise $f(z) = (g(z)-b_0)/b_1$ fonksiyonunun da aynı bölgede ünivalent olduğu ve tersine f fonksiyonunun D bölgesinde ünivalent olması durumunda g fonksiyonunun da ünivalent olduğu söylenebilir. Böylece Maclaurin açılımında $\frac{b_n}{b_1} = a_n$ yazılarak

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{3.1}$$

normalize formu elde edilir. (3.1) ile verilen fonksiyona "*normalleştirilmiştir*" denir. Eğer f fonksiyonu ünivalent ve (3.1) ile verilen formda ise *normalleştirilmiş ünivalent fonksiyon* adını alır. U birim diskinde analitik ve ünivalent normalleştirilmiş fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir.

S sınıfındaki fonksiyonların en temel örneği,

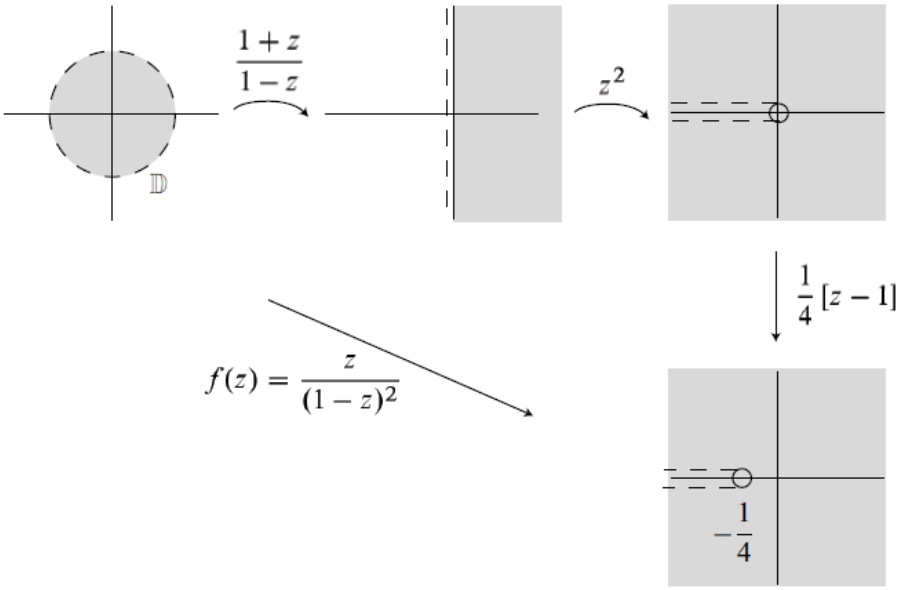
$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$$

şeklinde Taylor serisi açılımına sahip olan $K(z) = z(1-z)^{-2}$ *Koebe fonksiyonu*dur. Eğer Koebe fonksiyonu,

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

olarak tekrar düzenlenirse ve $w = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun U birim diskini konform olarak $\mathrm{Re}(w) > 0$ bölgesine dönüştürdüğü göz önüne alınırsa, Koebe fonksiyonunun U birim

diskini $-1/4$ ten $-\infty$ a kadar kesilmiş karmaşık düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğünü görmek kolaydır.



Şekil 3.1 U birim diskinin Koebe fonksiyonu altındaki resmi

S sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıdaki gibi verilebilir:

(i) U birim diskini kendisi üzerine resmeden $f(z)=z$ birim fonksiyonu,

(ii) U birim diskini $\{\mathrm{Re}\{w\}>-1/2\}$ sağ yarı düzlemine resmeden

$f(z)=\dfrac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\ldots$ fonksiyonu,

(iii) U birim diskini $[1/2,\infty)$ ve $(-\infty,-1/2]$ yarı doğruları çıkarılmış düzlem üzerine resmeden $f(z)=\dfrac{z}{1-z^2}=z+z^3+z^5+\ldots$ fonksiyonu,

(iv) U birim diskini $\{-\pi/4<\mathrm{Im}\{w\}<\pi/4\}$ yatay şeridine resmeden $f(z)=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu,

(v) U birim diskini bir kardiodin içine resmeden $f(z)=z-\dfrac{1}{2}z^2=\dfrac{1}{2}[1-(1-z)^2]$ fonksiyonu.

S sınıfının önemli bir özelliği de toplama işlemine göre kapalı olmayışıdır. Diğer bir ifadeyle $f, g \in S$ fonksiyonları için $f+g \in S$ olmak zorunda değildir.

Örneğin $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ ve $g(z)=\dfrac{z}{1+i\,z}$ fonksiyonları S sınıfına ait olmasına rağmen $f+g$ fonksiyonu S sınıfında değildir. Çünkü

$$f'(z)+g'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{(1+iz)^2}=\frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

olup, $z=\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{2}\in U$ noktasında $f'(z)+g'(z)=0$ olur.

Bununla beraber S sınıfı birçok temel dönüşüm altında korunur. Bu dönüşümlerden bazıları aşağıda verilmiştir (Duren 1983):

(i)*Eşlenik alma:* $f \in S$ ve $g(z)=\overline{f(\overline{z})}=z+\overline{a}_2 z^2+\ldots$ ise $g \in S$ dir.

(ii)*Dönme (Rotasyon):* $f \in S$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$g(z)=e^{-i\theta}f(e^{-i\theta})=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n e^{i(n-1)\theta}z^n,\quad (z\in U)$$

ise $g \in S$ dir.

(iii)*Genişleme (Dilatasyon):* $f \in S$ ve $0<r<1$ olmak üzere,

$$g(z)=r^{-1}f(rz)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n r^{n-1}z^n,\quad (z\in U)$$

ise $g \in S$ dir.

(iv) *Disk otomorfizmi (Koebe Dönüşümü):* $f \in S$ ve $\alpha \in U$ olmak üzere,

$$g(z)=\frac{f\left(\dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}\right)-f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)},\quad (z\in U)$$

ise $g \in S$ dir.

(v)*Değer bölgesi dönüşümü:* $f \in S$ olmak üzere ψ fonksiyonu $f(U)$ da ünivalent ve $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=1$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in S$ dir.

(vi) *Çıkarılmış değer dönüşümü:* $f \in S$ ve $w \notin f(U)$ olsun. Bu durumda

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w}, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu S sınıfındadır.

(vii) n. kök dönüşümü: $f \in S$ olmak üzere $n = 2,3,...$ için

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + ..., \quad (z \in U)$$

fonksiyonu S sınıfındadır.

f ünivalent fonksiyonunun Taylor seri açılımdaki a_n katsayılarını kullanarak birim diskin f fonksiyonu altındaki resminin alanını hesaplamamıza olanak sağlayan aşağıdaki teorem oldukça kullanışlıdır.

Teorem 3.1.5 (Alan Teoremi) Eğer f, U birim diski üzerinde $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 > 0$ iken

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ..., \quad |z| < 1$$

Taylor açılımına sahip olan U nun bir konformal dönüşümü ise, bu durumda

$$Alan\left(f(U)\right) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$$

şeklindedir. □

Örneğin; U birim diskini bir kardioidin içine resmeden $f(z) = z - \frac{1}{2} z^2 \in S$ fonksiyonu için, $a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}$ olup, buradan

$$Alan\left(f(U)\right) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 = \pi \left(1 \cdot |1|^2 + 2 \cdot \left| -\frac{1}{2} \right|^2 \right) = \frac{3\pi}{2}$$

olarak bulunur.

S sınıfına ait bir f fonksiyonunun a_2 (ikinci) katsayısının modülünün sınırını hesaplamak için verilen ve ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli yer tutan aşağıdaki teorem 1916 yılında Bieberbach tarafından verilmiştir.

Teorem 3.1.6 (Bieberbach Teoremi) S sınıfındaki her f fonksiyonu için $|a_2| \le 2$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik için, f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir (Bieberbach, 1916).□

Verilen koşullar altında, eşitlik işaretinin korunduğu kabul edilebilir bir fonksiyonun varlığından hareketle, eşitsizliği geliştirmek (yani bir üst sınırı azaltmak veya bir alt sınırı arttırmak) imkânsız ise, bu eşitsizliğe *kesin eşitsizlik* denir. Bir eşitsizliğin kesin olduğu, eşitliği sağlayan fonksiyon bulunarak gösterilir. Bir kesin eşitsizlikte eşitliği sağlayan fonksiyona *ekstremal fonksiyon* denir. Koebe fonksiyonu Bieberbach Teoremi için ekstremal fonksiyondur.

Bieberbach Teoreminin ilk uygulaması, Koebe'ye ait ünlü bir örtme teoremidir. Her bir $f \in S$ fonksiyonu $f(0) = 0$ koşullu açık bir dönüşüm olduğundan f fonksiyonunun görüntüsü orijin merkezli en az bir diski kapsar. 1907 yılında Koebe, ρ mutlak bir sabit olmak üzere, S sınıfındaki tüm fonksiyonların görüntü kümelerinin, ortak bir $|w| < \rho$ diskini kapsadıklarını göstermiştir. Koebe fonksiyonu, $\rho \le 1/4$ olmasını gerektirir. Daha sonra Bieberbach, ρ sabitinin $1/4$ alınabileceği şeklindeki Koebe Kestirimini ispatlamıştır.

Teorem 3.1.7 (Koebe Dörtte Bir Teoremi) S sınıfındaki her fonksiyonun değer kümesi, $\{w : |w| < 1/4\}$ diskini kapsar. Bu sonuç Koebe fonksiyonunun dönmeleri için kesindir (Duren, 1983).

İspat: $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu S sınıfında ve $c \notin f(U)$ olsun. $f(z) \neq c$ olduğundan,

$$g(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right) z^2 + \cdots$$

fonksiyonu da S sınıfındadır. $g(z)$ fonksiyonuna Bieberbach Teoremi uygulanırsa $\left|a_2 + \frac{1}{c}\right| \le 2$ bulunur. Böylece

$$\left|\frac{1}{c}\right| - |a_2| \le \left|a_2 + \frac{1}{c}\right| \le 2$$

olur. Bu kez $f(z)$ fonksiyonuna Bieberbach Teoremi uygulanırsa

$$\left|\frac{1}{c}\right| \leq 2 + |a_2| \leq 4$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. □

Bu teorem, orijin merkezli $1/4$ yarıçaplı diskin, S sınıfındaki her bir fonksiyonun görüntü kümesinde kapsanan orijin merkezli en büyük disk olduğunu söyler.

Koebe Dörtte Bir Teoremindeki ünivalentlik koşulu kaldırılamaz. Eğer

$$f_n(z) = \frac{1}{n}(e^{nz} - 1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

analitik fonksiyonlarını alırsak $f_n(0) = 0$ ve $f_n'(0) = 1$ olur. f_n fonksiyonları $z = 0$ noktasında yerel ünivalenttir, ancak bu fonksiyonlar için $-1/n$ değeri çıkarılır ki bu değer 0 noktasına keyfi derecede yakın seçilebilecek bir değerdir.

S sınıfındaki fonksiyonlar için Bieberbach Teoreminin ispatlanmış olması, bu sınıfla ilgili başka teoremlerin elde edilmesine olanak tanımıştır. En önemli teoremler arasında Bükülme ve Büyüme Teoremleri gelir.

Teorem 3.1.8 (Bükülme Teoremi) Her bir $f \in S$ ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman 1983).□

Teorem 3.1.9 (Büyüme Teoremi) Her bir $f \in S$ ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman 1983).□

Bazı durumlarda daha kullanışlı olabilen, Büyüme ve Bükülme teoremlerinin birleştirildiği bir diğer eşitsizlik, aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 3.1.10 S sınıfındaki her bir f fonksiyonu için $|z| = r < 1$ olmak üzere,

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliği sağlanır (Duren 1983).□

Verilen bu son üç teoremdeki eşitliklerin gerçeklenmesi için $z \in U$ ve $z \neq 0$ iken f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir.

Teorem 3.1.11 (Bieberbach Kestirimi veya Branges Teoremi) S sınıfından alınan her f fonksiyonu için $|a_n| \leq n$ ($n = 2,3,...$) eşitsizliği sağlanır. f , Koebe fonksiyonu veya onun bir dönmesi olmadıkça tüm n değerleri için eşitsizlik kesindir (Pommerenke 1975).□

Bieberbach Kestirimi, 1916 yılında Bieberbach tarafından ortaya atılmıştır. Uzun yıllar boyunca üzerinde çalışılmış, ancak 1985 yılında Louis de Branges tarafından tamamı ispatlanıncaya kadar, sadece $n = 7$ ye kadar olan değerler için sağlatılabilmiştir. Ünivalent fonksiyonlar teorisi üzerindeki araştırmaların büyük bir kısmının merkezinde Bieberbach Kestirimi vardır.

3.2. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kesimde S sınıfının bazı alt sınıfları ve bu alt sınıfların temel özellikleri verilecektir. Bu alt sınıflar arasında yıldızıl, konveks, α mertebeli yıldızıl, α mertebeli konveks fonksiyon sınıfları bulunmaktadır. Hem analitik hem de geometrik özelliklere sahip olan bu alt sınıflar pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı ve subordinasyon kavramı ile yakın ilişkilidir.

Tanım 3.2.1 (Caratheodory Sınıfı) P sınıfı,

$$f(z)=1+p_1z+p_2z^2+...+p_nz^n+...=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$$

formunda, U birim diskinde analitik olan ve birim diskteki z noktaları için $\mathrm{Re}\{f(z)\}>0$ olacak şekildeki tüm fonksiyonların sınıfıdır. Bu sınıf *pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı* veya sıklıkla *Caratheodory Sınıfı* olarak adlandırılır. Burada f fonksiyonunun ünivalent olması gerekmemektedir. Örneğin, $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu herhangi bir $n\geq 0$ tamsayısı için P sınıfındadır ancak $n\geq 2$ için bu fonksiyon ünivalent değildir.

P sınıfına ait fonksiyonların katsayıları için oldukça kullanışlı bir teorem 1907 yılında Caratheodory tarafından verilmiştir.

Teorem 3.2.2 (Caratheodory Teoremi) $N\geq 1$ belirli bir tamsayı olsun. Eğer $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$ fonksiyonu P sınıfında ise $|p_n|\leq 2$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir. $\eta=e^{2\pi i/N}$ ve $k=1,2,...,N$ için $\mu_k\geq 0$ olmak üzere,

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}\mu_k\frac{1+\eta^k z}{1-\eta^k z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$$

ve $\sum_{k=1}^{N}\mu_k=1$ ise, F fonksiyonu P sınıfındadır ve $P_N=2$ olur (Caratheodory 1907).□

Koebe fonksiyonunun S sınıfı için oynadığı merkezi rol gibi,

$$L_0(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+2z+2z^3+...=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n$$

Möbius fonksiyonu da P sınıfı için merkezi bir rol oynar. Bu fonksiyon P sınıfındadır, birim diskte analitik ve ünivalenttir, üstelik birim diski $\mathrm{Re}\,w>0$ yarı düzlemi üzerine dönüştürür. Ancak L_0 fonksiyonunun karakteri ile Koebe fonksiyonu arasında dikkate değer bir fark vardır. S sınıfı için pek çok ekstremal problemde Koebe fonksiyonu (veya bir dönmesi) yegane çözümdür. Bu durumun aksine, L_0 fonksiyonu P sınıfındaki $|p_n|$ değerini maksimize eder fakat $n\geq 2$ ise $p_n=2$ olacak şekilde bu

sınıfın sonsuz çoklukta başka fonksiyonu vardır ve bunların hiçbiri, bir diğerinin dönmesiyle elde edilemez.

P sınıfı konvekstir. Yani başka bir ifadeyle, μ_1 ve μ_2 , $\mu_1+\mu_2=1$ koşulu ile negatif olmayan sayılar ve $f_1(z)$ ile $f_2(z)$, P sınıfına ait fonksiyonlar ise

$$f(z)=\mu_1 f_1(z)+\mu_2 f_2(z)$$

fonksiyonu da P sınıfındadır. Verilen bu denklemden, bir sonlu toplama ve sonra her k için $\mu_k \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k=1$ kabulü ile

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k f_k(z)$$

toplamına geçmek doğaldır.

Pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonların sınıfı P ile Schwarz fonksiyonlarının sınıfı Ω arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki önerme pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonların özelliklerinden Schwarz fonksiyonlarının özelliklerini, benzer şekilde Schwarz fonksiyonlarının özelliklerinden pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonların özelliklerini elde etmemize olanak tanır.

$$p\in P \Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} \ , \ \varphi\in\Omega$$

Tanım 3.2.3 (Subordinasyon) f ve g fonksiyonları U birim diskinde analitik olsunlar. U birim diskinde

$$f(z)=g\left(\varphi(z)\right)$$

olacak şekilde bir φ Schwarz fonksiyonu varsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna *subordinedir* denir ve bu durum $f\prec g$ şeklinde gösterilir.

Eğer $f\prec g$ ise $f(0)=g(0)$ ve $f(U)\subseteq g(U)$ olur. Schwarz Yardımcı Önermesinden tüm $r\in(0,1)$ değerleri için $\left|f'(0)\right|\leq\left|g'(0)\right|$ ve $f(U_r)\subset g(U_r)$ elde edilir. Ayrıca $f\prec g$ ise

$$\max_{|z|\leq r}|f(z)|\leq\max_{|z|\leq r}|g(z)| \ , r\in(0,1)$$

yazmak mümkündür.

En önemli durum ise subordine olunan fonksiyonun ünivalent olması durumudur:

Yardımcı Önerme 3.2.4 Eğer g fonksiyonu U birim diskinde ünivalent ise $f \prec g$ olması için gerekli ve yeterli koşul $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ koşullarının sağlanmasıdır.□

Tüm $r \in (0,1)$ değerleri için $f(U_r) \subseteq g(U_r)$ olması durumu, yukarıdaki yardımcı önerme ile birlikte *subordinasyon prensibi* olarak bilinir.

Teorem 3.2.5 (Subordinasyon Prensibi) Eğer g fonksiyonu U birim diskinde ünivalent ise $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ olması durumunda $f(U_r) \subseteq g(U_r)$, $r \in (0,1)$ kapsaması sağlanır (Pommerenke 1975).□

Karmaşık analizde önemli rol oynayan subordinasyon ilkesi, son yıllarda karmaşık analiz ile ilgilenen birçok matematikçinin çalışmalarına konu olmuştur. Subordinasyon kavramı, ilk olarak E. Lindelöf (1909) tarafından ortaya atılmış, ancak temel bağıntılar J. E. Littlewood (1925) ve W. W. Rogosinski (1943) tarafından bulunmuştur.

U birim diskinde $p(0) = 1$ eşitliğini sağlayan analitik bir fonksiyonun P sınıfında olması için U üzerinde $p(z) \prec \dfrac{1+z}{1-z}$ subordinasyonunu sağlaması gerekli ve yeterlidir. Ayrıca U birim diskinde $\varphi(0) = 0$ eşitliğini sağlayan analitik bir fonksiyonun Ω sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul U üzerinde $\varphi(z) \prec z$ subordinasyonunu sağlamasıdır.

Örneğin, U birim diskinde analitik olan $f(z) = 1 + z$ ve $g(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonları göz önüne alınırsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir. Bunu görmek için $\forall z \in U$ için $f(z) = g(\varphi(z))$ olacak şekilde $|\varphi(z)| < 1$ ve $\varphi(0) = 0$ koşullarını sağlayan bir φ fonksiyonunun varlığı gösterilmelidir.

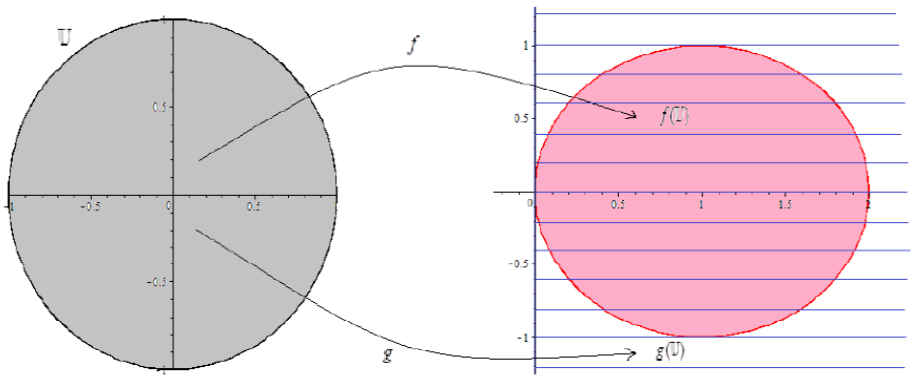
$$f(z) = g(\varphi(z)) \Rightarrow 1 + z = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} \Rightarrow \varphi(z) = \frac{z}{z+2}$$

bulunur.

Bulunan bu φ fonksiyonu için

$$\varphi(0)=0 \text{ ve } |\varphi(z)|=\left|\frac{z}{z+2}\right|\leq\frac{1}{|z+2|}\leq 1$$

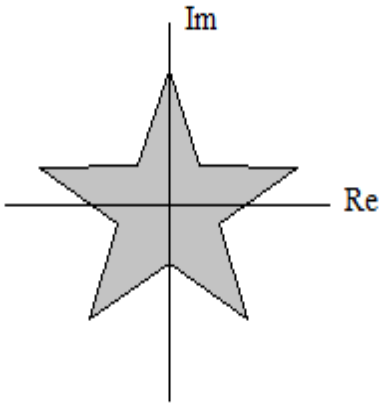
olduğu açıktır. Bu ise $f\prec g$ demektir. Ayrıca g ünivalent olduğundan $f(0)=g(0)$ ve $f(U)\subseteq g(U)$ olur. Bu durum aşağıdaki şekilde açık olarak görülebilir.



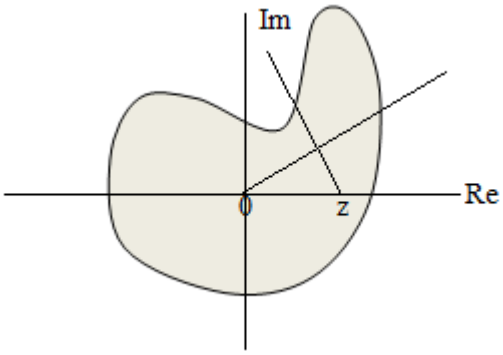
Şekil 3.2. $1+z\prec\frac{1+z}{1-z}$.

Teorik olarak subordinasyonun kullanılmasının amacı, özellikleri bilinmeyen bir fonksiyonu özellikleri bilinen bir fonksiyon yardımıyla incelemektir.

Tanım 3.2.6 (Yıldızıl Küme) Bir $D\subset\mathbb{C}$ kümesi ve onun bir $z_0\in D$ noktasını alalım. z_0 noktasını her diğer $z\in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa, D kümesine $z_0\in D$ *noktasına göre yıldızıl küme* denir. z_0 noktası özel olarak orijin seçilirse bu kümeye kısaca *yıldızıl küme* adı verilir. Daha resimsel bir ifadeyle, D kümesinin her noktası z_0 noktasından "görünür" ise, D kümesine z_0 noktasına göre yıldızıl küme denir.



Şekil 3.3 Yıldızıl Küme



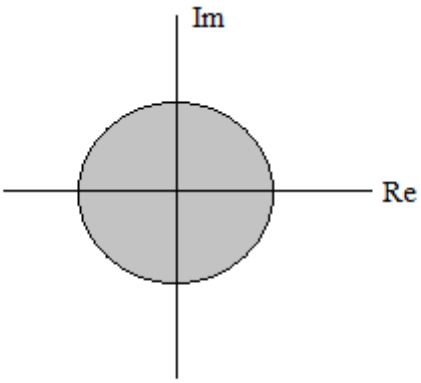
Şekil 3.4 z noktasına göre yıldızıl küme

Tanım 3.2.7 (Yıldızıl Fonksiyon) Eğer bir f fonksiyonu U birim diskini z_0 noktasına göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna z_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. Özel olarak, f fonksiyonu U birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, diğer bir deyişle

$$w \in F \quad , \quad 0 \le t \le 1 \Rightarrow tw \in F$$

önermesi doğru ise f fonksiyonuna *yıldızıl fonksiyon* denir. Yıldızıl fonksiyonların kümesi S^* ile gösterilir. Bu sınıf ilk olarak Alexander (1915) tarafından verilmiştir.

Tanım 3.2.8 (Konveks Küme) $D \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $z_1, z_2 \in D$ için z_1 noktasını z_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D kümesinde kalıyorsa D ye *konveks küme* denir. Bir başka deyişle, noktalarının her birine göre yıldızıl olan kümeye konveks küme denir.



Şekil 3.5 Konveks Küme

Tanım 3.2.9 (Konveks Fonksiyon) Eğer bir f fonksiyonu konveks bir kümeyi konveks bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Diğer bir deyişle, bir f fonksiyonu ünivalent ve $f(U)$ görüntü bölgesi konveks ise, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denilmektedir. Konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir.

Konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları için $C \subset S^* \subset S$ sağlanır. Konveks ve yıldızıl fonksiyonlara örnek olarak

$$\frac{z}{1-z} \quad , \quad \log\frac{1+z}{1-z} \quad \text{ve} \quad \frac{z}{1-z^2}$$

fonksiyonları verilebilir. Bu fonksiyonlardan ilk ikisi konveks fonksiyonlar olduğu halde, $\frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu yıldızıldır fakat konveks değildir.

Konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıflarının analitik karakterizasyonu, pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar yardımıyla yapılabilir. Başka bir deyişle, U bölgesinde analitik, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ normalize koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu için

$$f(z) \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$$

ve

$$f(z) \in C \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P$$

önermeleri doğrudur. Bu önermeler, yıldızıl ve konveks fonksiyonların daha önce verilen geometrik tanımlarını analitik olarak ifade eder ve bizi konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları arasındaki ilişkiyi veren oldukça kullanışlı olan aşağıdaki sonuca götürür.

Teorem 3.2.10 (Alexander Teoremi) $U_R = \{z : |z| < R, 0 < R < 1\}$ şeklinde tanımlanan U_R bölgesinde $f'(z) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda f fonksiyonunun U_R bölgesinde konveks olması için gerekli ve yeterli koşul $F(z) = z\,f'(z)$ fonksiyonunun bu bölgede yıldızıl olmasıdır (Alexander 1915).□

İlginç bir örnek olarak, U birim diskini $\mathrm{Re}\, w > -1/2$ yarı düzlemi üzerine dönüştüren

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n$$

fonksiyonu göz önüne alınabilir. Bu fonksiyon birim diskte konveks olup

$$F(z) = z\,f'(z) = z\frac{(1-z)-z(-1)}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

fonksiyonu birim diskte yıldızıldır. Bilindiği gibi bu son ifadenin sağ tarafı Koebe fonksiyonudur.

S^* sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki teorem Nevanlinna (1921) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.11 Eğer $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu S^* sınıfında ise, her bir pozitif n tam sayısı için $|a_n| \leq n$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik her n için kesindir ve eğer bir $n \geq 2$ için eşitlik sağlanırsa, bu durumda f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir dönmesidir (Nevanlinna1921). □

C sınıfındaki fonksiyonlar için aşağıdaki teorem Loewner tarafından 1917 yılında ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.12 Eğer $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ fonksiyonu C sınıfında ise, her bir pozitif n tam sayısı için $|a_n|\le 1$ olur. Bu eşitsizlik her n için kesindir ve eğer sadece bir $n\ge 2$ için eşitlik sağlanırsa, bu durumda f fonksiyonu, $\frac{z}{1-z}$ fonksiyonun bir dönmesidir (Loewner 1917).□

Koebe fonksiyonu ve onun dönmeleri S^* sınıfında olduğundan, S sınıfı için verilen büyüme ve bükülme teoremleri S^* sınıfı için de geçerli olacaktır.

Teorem 3.2.13 $f\in S^*$ ve $|z|=r<1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{(1+r)^2}\le|f(z)|\le\frac{r}{(1-r)^2}$$

ve

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\le|f'(z)|\le\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler kesindir. Eşitliğin sağlanması için fonksiyonun Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir (Goodman 1983). □

Normalize edilmiş konveks fonksiyonlar için aşağıdaki büyüme ve bükülme teoremleri Gronwall (1915) ve Loewner (1917) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.2.14 $f\in C$ ve $|z|=r<1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{1+r}\le|f(z)|\le\frac{r}{1-r}$$

ve

$$\frac{1}{(1+r)^2}\le|f'(z)|\le\frac{1}{(1-r)^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler kesindir. Eşitliğin sağlanması için fonksiyonun $\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun uygun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir. □

1936 yılında Robertson α mertebeli yıldızıl ve α mertebeli konveks fonksiyon kavramlarını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 3.2.15 (α -Mertebeli Yıldızıl Fonksiyon) $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu tüm $z \in U$ değerleri için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right) \geq \alpha$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona *α mertebeli yıldızıl fonksiyon* denir. Bu şekildeki fonksiyonların kümesi $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.16 (α -Mertebeli Konveks Fonksiyon) $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \geq \alpha$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona *α mertebeli konveks fonksiyon* adı verilir. Bu fonksiyonların kümesi ise $C(\alpha)$ ile gösterilir.

$\left. \frac{z f'(z)}{f(z)} \right|_{z=0} = 1 + \left. \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right|_{z=0} = 1$ olduğundan $\alpha \leq 1$ olması gerektiği açıktır. Aksi takdirde $S^*(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ kümelerinin ikisi de boş olacaktır. Ayrıca, $\alpha = 1$ ise $S^*(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ kümeleri yalnız bir fonksiyona sahip olur: $f(z) = z$. Biz genelde $0 \leq \alpha < 1$ doğal koşulunu koyacağız. Burada α değeri arttıkça $S^*(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ kümeleri küçülmektedir.

Alexander Teoreminin, bu yeni sınıflarla ilgisi açıktır:

$$f(z) \in C(\alpha) \Leftrightarrow F(z) \equiv z f'(z) \in S^*(\alpha).$$

3.3 Bi-Ünivalent Fonksiyonlar

f fonksiyonu $\mathbb{C}$ karmaşık düzleminin açık ve bağlantılı bir D alt kümesinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer f ünivalent ise f fonksiyonunun tersi $f(D)$ bölgesinde $g\left(f(z)\right)=z$ kuralı ile verilen g fonksiyonudur. U birim diskinin her $f\in S$ fonksiyonu altındaki görüntüsünün $1/4$ yarıçaplı diski içine aldığını biliyoruz. Bu nedenle her $f\in S$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan bir f^{-1} ters fonksiyonuna sahiptir:

$$f^{-1}\left(f\left(z\right)\right)=z \quad \left(z\in U\right)$$

ve

$$f\left(f^{-1}\left(w\right)\right)=w \quad \left(|w|<r_0\left(f\right),\ r_0\left(f\right)\geq 1/4\right).$$

Buradaki f^{-1} ters fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$g(w)=f^{-1}(w)=w-a_2w^2+\left(2a_2^2-a_3\right)w^3-\left(5a_2^3-5a_2a_3+a_4\right)w^4+\ldots$$

$$=w+\sum_{n=2}^{\infty}b_nw^n.$$

Eğer f ve f^{-1} fonksiyonları U birim diskinde ünivalent ise f fonksiyonuna U da bi-ünivalenttir denir. $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ şeklindeki Taylor-Maclaurin seri açılımı ile verilen U birim diskindeki tüm bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı Σ ile gösterilir.

Aşağıda verilen fonksiyonlar Σ sınıfına aittir:

$$h(z)=\frac{z}{1-z}\ ,\ k(z)=-\log(1-z)\ ,\ l(z)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Ancak $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ ile tanımlanan Koebe fonksiyonu Σ sınıfına ait değildir. Çünkü Koebe fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1/4]$ bölgesi üzerine resmeder. Bu nedenle, görüntü bölgesi U birim diskini kapsamaz.

Ayrıca $t(z)=z-\frac{z^2}{2}$ ve $s(z)=\frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonları da Σ sınıfına ait olmayan fonksiyonlara örnek olarak verilebilir.

Bir fonksiyonun tersinin Maclaurin seri açılımındaki katsayılar için bir formül vermek mümkündür.

$$w=f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \tag{3.2}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun, $w=0$ merkezli en az bir küçük diskte daima var olan ters fonksiyonu da

$$z=g(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty}b_n w^n \tag{3.3}$$

olsun. Buradaki amacımız, $a_2,a_3,...,a_n$ katsayılarının bir fonksiyonu olarak b_n katsayılarını elde etmektir. Bu problem, keyfi F fonksiyonu w nın terimlerinde bir kuvvet serisi olarak ifade edilerek, daha genel bir teoremin özel bir durumu olarak kısmen çözülmüştür.

Teorem 3.3.1 F fonksiyonu $z=0$ noktasını kapsayan bir disk üzerinde analitik, (3.2) ve (3.3) eşitlikleri ile verilen f ve g fonksiyonları da aynı diskte ters fonksiyonlar olsun.

$$h(z)=\frac{f(z)}{z}=1+a_2 z+a_3 z^2+...$$

olarak alalım. $z=0$ noktasının en az bir komşuluğunda,

$$F(z)=F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{F'(z)}{[h(z)]^n}\right)\right]\Bigg|_{z=0}$$

olur. Bu seri, Bürmann - Lagrange serisi olarak adlandırılır (Goodman 1983). □

Eğer bu teoremde $F(z)=z$ olarak alınırsa, aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.3.2 Eğer f ve g, (3.2) ve (3.3) eşitlikleri ile verilen ters fonksiyonlar ise, $h(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^{n-1}$ olmak üzere, b_n katsayıları

$$b_n=\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[h(z)]^{-n}\Big|_{z=0}$$

olarak bulunur (Goodman 1983). □

Bu formülün görünüşü ilgi çekicidir, ancak h fonksiyonu dikkatli seçilmezse b_n katsayılarını hesaplamak çok zahmetli olabilir. "Dikkatli seçilmiş" terimi şu şekilde örneklenebilir:

$w=ze^{-Az}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu için bir Maclaurin seri açılımı bulup, bu serinin yakınsaklık yarıçapını hesaplayalım.

Burada $h(z)=e^{-Az}$ olup, buradan

$$b_n=\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}e^{Anz}\Big|_{z=0}=\frac{A^{n-1}n^{n-1}}{n!}$$

ve

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^{n-1}n^{n-1}}{n!}w^n$$

olur. Oran testi ile bu serinin $|w|<1/|A|e$ için yakınsak olduğu gösterilebilir.

3.4 Kesirsel Hesap

$D=d/dx$ türev operatörü temel analiz çalışanlar için oldukça iyi bilinen bir kavramdır. Kesirsel hesabın doğuşuna yol açan "tamsayı mertebeden türevler, n in bir kesir olması durumuna genişletilebilir mi?" sorusu olmuştur. Ardından "n, kesirli veya irrasyonel veyahut karmaşık herhangi bir sayı olabilir mi?" sorusu gelmiştir. Bu ikinci sorunun cevabı olumlu olduğu için bazı matematikçiler "kesirsel hesap" ismi yerine "keyfi mertebeden diferensiyel ve integral hesap" isminin daha yerinde olacağı kanısındadırlar.

Leibniz, $d^n y/dx^n$ gösterimini ilk kullanan kişi olarak bilinir. Bu gösterim L'Hospital'in 1695 yılında bir mektup yazarak Leibniz'e şu soruyu sormasına sebep olur:

"Tamsayı mertebeli türevlerin anlamı, tamsayı olmayan mertebeden türevlere genelleştirilebilir mi?"

L'Hospital şaşırtıcı sorusuyla devam eder:

"Eğer $n = 1/2$ olursa sonuç ne olur?"

Leibniz'in 30 Eylül 1965 tarihli mektubunda verdiği yanıt ise şu olmuştur:

"Günün birinde bundan yararlı sonuçlar elde edilecek olan apaçık bir paradoks."

Leibniz'in bu mektubunun tarihi kesirsel hesabın doğum günü olarak kabul edilir.

L'Hospital ve Leibniz'in ardından aralarında Bernoulli, Fourier, Euler ve Laplace'ın da bulunduğu pek çok matematikçi kesirsel hesap ve bunun matematiksel sonuçlarıyla ilgilenmiştir. Bunlardan birçoğu kendi kavram ve gösterimlerini kullanarak tamsayı olmayan mertebeden integral ve türev kavramına uygun tanımlar bulmuşlardır. Bu tanımlardan kesirsel hesap dünyasında popülaritesi olan en ünlü ve en kullanışlı tanım Riemann-Liouville tanımıdır.

Kesirsel hesap günümüzde sayısal analiz, kontrol teorisi, ısı iletimi, elektrik bilimi, mekanik, kaos ve fraktallar gibi pek çok alanda uygulamalara sahiptir.

Kesirsel hesap ile ilgili tanımlarımıza geçmeden önce, bu tanımlarda kullandığımız ve matematikte önemli bir yere sahip olan Gamma fonksiyonunu vermek yerinde olacaktır.

Tanım 3.4.1 (Gamma Fonksiyonu) $\mathrm{Re}\{z\} > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

ile tanımlı fonksiyona Gamma Fonksiyonu denir.

Gamma Fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, $\Gamma(1)=1$

(ii) $\Gamma(n)=(n-1)!$, $n\in\mathbb{N}^{+}$

(iii) $\Gamma(z)=0$ olacak şekilde hiçbir z noktası yoktur. $z=0,-1,-2,...$ noktaları hariç her yerde analitiktir ve $z=-k$ noktasındaki rezidüsü $\operatorname{Re}_{z=-k} z\Gamma(z)=\dfrac{(-1)^k}{k!}$ şeklindedir.

Tanım 3.4.2 (Riemann-Liouville Kesirsel İntegrali) $f(x)\in C([a,b])$ ve $a<x<b$ ise, $\delta\in(-\infty,\infty)$ iken

$$D_a^{-\delta}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_a^x\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-\delta}}d\xi$$

integraline δ *mertebeli Riemann-Liouville kesirsel integrali* denir.

Tanım 3.4.3 (Riemann-Liouville Kesirsel Türevi) $\delta\in(0,1)$ için

$$D_a^{\delta}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\delta}}d\xi$$

değerine δ *mertebeli Riemann-Liouville kesirsel türevi* denir.

Bu operatörlere Riemann-Liouville kesirsel integral operatörleri veya kısaca R-L operatörleri denir. $\delta=1/2$ özel halinde kesirsel türev, *yarı-türev* adını alır.

Riemann-Liouville kesirsel integral operatörleri için oldukça yararlı olan kesirsel integralin yarı grup özelliği aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.4.4 Herhangi bir $f(x)\in C([a,b])$ için Riemann-Liouville kesirsel integrali, $\delta>0, n>0$ iken

$$D_a^{-\delta}D_a^{-n}f(x)=D_a^{-(\delta+n)}f(x)$$

eşitliğini sağlar (Oldham ve Spanier 1974).□

1978 yılında Owa, analitik fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirsel integralini ve kesirsel türevini aşağıdaki şekilde vermiştir.

Tanım 3.4.5 Orijini kapsayan karmaşık $z-$düzleminin basit bağlantılı bir bölgesinde analitik olan ve $z-\xi>0$ iken $\log(z-\xi)$ değerinin gerçel olması gerektiğinden $(z-\xi)^{\delta-1}$ katlılığı kaldırılmış bir f fonksiyonu için, δ mertebeli kesirsel integral

$$D_z^{-\delta} f(z)=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{1-\delta}}d\xi, \quad (\delta>0)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.4.6 Tanım 3.4.5 deki gibi kısıtlanmış ve $(z-\xi)^{-\delta}$ katlılığı kaldırılmış bir f fonksiyonu için, δ mertebeli kesirsel türev

$$D_z^{\delta} f(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{\delta}}d\xi, \quad (0\le\delta<1)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.4.7 Tanım 3.4.6 ile verilen varsayımlar altında, bir f fonksiyonu için, $n+\delta$ mertebeli kesirsel türev

$$D_z^{n+\delta} f(z)=\frac{d^n}{dz^n}D_z^{\delta} f(z), \quad (0\le\delta<1;\ n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\})$$

şeklinde tanımlıdır.

Yukarıda verilen tanımlardan

$$D_z^{-\delta} z^k=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\delta+1)}z^{k+\delta}, \qquad (\delta>0),$$

ve

$$D_z^{\delta} z^k=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\delta+1)}z^{k-\delta}, \qquad (0\le\delta<1)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Örnek: $f(z)=z+z^2$ fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyonun $\delta=\frac{1}{2}$ kesirsel mertebeden integrali

$$D_z^{-\frac{1}{2}}f(z)=D_z^{-\frac{1}{2}}(z+z^2)=D_z^{-\frac{1}{2}}z+D_z^{-\frac{1}{2}}z^2$$

$$=\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}+1)}z^{1+\frac{1}{2}}+\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2+\frac{1}{2}+1)}z^{2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}z^{\frac{3}{2}}+\frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}z^{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{4z^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{4}{5}z\right)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, $f(z)$ fonksiyonunun $\delta=\frac{1}{2}$ kesirsel mertebeden türevi ise

$$D_z^{\frac{1}{2}}f(z)=D_z^{\frac{1}{2}}(z+z^2)=D_z^{\frac{1}{2}}z+D_z^{\frac{1}{2}}z^2$$

$$=\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)}z^{1-\frac{1}{2}}+\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)}z^{2-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}z^{\frac{1}{2}}+\frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}z^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{4}{3}z\right)$$

şeklinde elde edilir.

3.5 Faber Polinomları

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \tag{3.4}$$

ile verilen fonksiyonunun ∞ un en az bir komşuluğunda analitik olduğunu kabul edelim. Böylece ∞ civarında ünivalent olacaktır. $|z| > R$ diyelim. Belirli bir $w \in \mathbb{C}$ için $\log\left[\, \zeta^{-1}(g(\zeta) - w)\right]$ fonksiyonu yeterince büyük ζ değerleri için analitik olur ve g fonksiyonunun tanımlanışı sebebiyle ∞ da sıfıra gidecektir. Böylece büyük ζ değerleri için ∞ civarında

$$\log \frac{g(\zeta) - w}{\zeta} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi_n(w) \zeta^{-n} \quad , \quad (w \in \mathbb{C}) \tag{3.5}$$

şeklinde bir açılıma sahip olacaktır. Eğer bu ifadenin ζ ye ve w ya göre türevi alınırsa ve $\Phi_0(w) = 1$ yazılırsa, sırasıyla,

$$\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta) - w} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(w) \zeta^{-(n+1)} \tag{3.6}$$

ve

$$\frac{1}{g(\zeta) - w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi_n'(w) \zeta^{-n} \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.4) ile verilen fonksiyon (3.6) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\zeta - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \zeta^{-n} = \left(\zeta + (b_0 - w) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{-n} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Phi_n(w) \zeta^{-n} \right)$$

eşitliği elde edilir. Karşılıklı katsayıları eşitlenirse, $\Phi_1(w) = w - b_0$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\Phi_{n+1}(w) = (w - b_0)\Phi_n(w) - \sum_{\nu=1}^{n-1} b_{n-\nu} \Phi_\nu(w) - (n+1) b_n$$

formülü elde edilir. Tümevarım ile $\Phi_n(w)$ polinomu

$$\Phi_n(w) = (w - b_0)^n - n b_1 (w - b_0)^{n-2} + \cdots, \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

şeklinde n. dereceden bir polinom olarak elde edilir. $\Phi_n(w)$ polinomuna $g(z)$ fonksiyonunun n. dereceden *Faber polinomu* denir. Özel olarak

$$\Phi_0(w) = 1$$

$$\Phi_1(w) = w - b_0$$

$$\Phi_2(w) = (w - b_0)^2 - 2b_1$$

$$\Phi_3(w) = (w - b_0)^3 - 3b_1(w - b_0) - 3b_2$$

$$\Phi_4(w) = (w - b_0)^4 - 4b_1(w - b_0)^2 - 4b_2(w - b_0) + (2b_1^2 - 4b_3)$$

olduğu açıktır. Faber polinomları kompleks yaklaşım teorisinde önemli rol oynar. Uygun koşullar altında analitik bir fonksiyonun, Jordan eğrisinin iç bölgesinde bir Faber polinomu seri açılımı yapılabilir. Bu açılım Jordan eğrisinin dış bölgesinin dönüşüm fonksiyonundan gelir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, çalışmamızda elde edilen bulgulara yer verilecektir. Amacımız, Σ sınıfındaki fonksiyonların yeni bir alt sınıfını tanımlamak ve bu sınıftaki fonksiyonların a_n genel katsayılarının modülleri için Faber polinomu katsayı tekniklerini kullanarak bir üst sınır belirlemektir. Ayrıca bu fonksiyonların ilk iki a_2 ve a_3 katsayılarının modülleri için üst sınırlar elde edilecektir. Bu bölümde yapılan çalışma ve elde edilen sonuçlar "C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I" adlı dergide yayınlanmıştır.

Öncelikle $A_{\Sigma}^{(\alpha,\lambda,\delta)}$ fonksiyon sınıfını tanımlayalım.

Tanım 4.1 $z \in U$ olmak üzere,

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{4.1}$$

şeklinde verilen bir $f \in \sum$ fonksiyonu,

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\Gamma(2-\delta)z^{\delta-1}D_z^{\delta}f(z)+\lambda\Gamma(1-\delta)z^{\delta}D_z^{\delta+1}f(z)\right\}>\alpha \tag{4.2}$$

$$(0\le\alpha<1,\ \lambda\ge 0 \text{ ve } 0\le\delta<1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona $A_{\Sigma}^{(\alpha,\lambda,\delta)}$ sınıfındadır denir.

Katsayı eşitsizliklerini elde edebilmek için Airault ve Bouali (2006) tarafından verilmiş olan aşağıdaki teoreme ihtiyaç duyulacaktır:

Teorem 4.2 $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$ olsun. f fonksiyonunun tersi olan f^{-1} fonksiyonu f in Faber Polinomu cinsinden

$$g(w)=f^{-1}(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}K_{n-1}^{-n}(a_2,a_3,\ldots,a_n)w^n$$

şeklinde verilir (Airault ve Bouali 2006). □

Airault ve Bouali K_n^p nin genel açılımını $D_n^p=D_n^p(a_2,a_3,\ldots)$ olmak üzere aşağıdaki şekilde elde etmişlerdir:

$$K_n^p=pa_n+\frac{p(p-1)}{2}D_n^2+\frac{p!}{(p-3)!3!}D_n^3+\ldots+\frac{p!}{(p-n)!n!}D_n^n \quad (p\in\mathbb{Z}=\{0,\mp1,\mp2,\ldots\}).$$

Todorov (1991), D_n^m ifadesini

$$D_n^m = D_n^m(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum \frac{m!(a_1)^{\mu_1}...(a_n)^{\mu_n}}{\mu_1!...\mu_n!}$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $a_1 = 1$ olur ve toplam tüm negatif olmayan ve

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n = m \\ \mu_1 + 2\mu_2 + ... + n\mu_n = n \end{cases}$$

koşullarını sağlayan $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ tamsayı değerleri üzerinden alınmaktadır. İlk ve son polinomların

$$D_n^1 = a_n$$

ve

$$D_n^n = a_1^n = 1$$

olacağını görmek kolaydır. Yukarıda verilen tanım ile K_{n-1}^{-n} ifadesinin ilk üç terimi

$$K_1^{-2} = -2a_2,$$

$$K_2^{-3} = 3\left(2a_2^2 - a_3\right),$$

$$K_3^{-4} = -4\left(5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4\right)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.3 (4.1) ile verilen f fonksiyonu $f \in A_{\Sigma}^{(\alpha,\lambda,\delta)}\left(0 \le \alpha < 1,\ \lambda \ge 0,\ 0 \le \delta < 1\right)$ sınıfında olsun. Eğer $2 \le k \le n-1$ için $a_k = 0$ ise,

$$\left|a_n\right| \le \frac{2(1-\alpha)\Gamma(n+1-\delta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\delta)\left[1-\delta+\lambda(n-1)\right]}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\} \qquad (4.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.1) formundaki analitik f fonksiyonları için

$$D_z^{\delta} f(z) = \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} z^{1-\delta} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\delta)} a_n z^{n-\delta},$$

olduğundan,

$$(1-\lambda)\Gamma(2-\delta)z^{\delta-1}D_z^{\delta}f(z)+\lambda\Gamma(1-\delta)z^{\delta}D_z^{\delta+1}f(z)$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\delta)\left[1-\delta+\lambda(n-1)\right]}{\Gamma(n+1-\delta)}a_n z^{n-1} \qquad (4.4)$$

ve f fonksiyonunun ters dönüşümü olan $g=f^{-1}$ için,

$$(1-\lambda)\Gamma(2-\delta)w^{\delta-1}D_w^{\delta}g(w)+\lambda\Gamma(1-\delta)w^{\delta}D_w^{\delta+1}g(w)$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\delta)\left[1-\delta+\lambda(n-1)\right]}{\Gamma(n+1-\delta)}b_n w^{n-1}$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\delta)\left[1-\delta+\lambda(n-1)\right]}{\Gamma(n+1-\delta)}\frac{1}{n}K_{n-1}^{-n}(a_2,a_3,\ldots,a_n)w^{n-1} \qquad (4.5)$$

elde edilir. Diğer taraftan f ve $g=f^{-1}$ fonksiyonları $A_{\Sigma}^{(\alpha,\lambda,\delta)}$ sınıfında olduğundan,

$$(1-\lambda)\Gamma(2-\delta)z^{\delta-1}D_z^{\delta}f(z)+\lambda\Gamma(1-\delta)z^{\delta}D_z^{\delta+1}f(z)=\alpha+(1-\alpha)p(z)$$

$$=1+(1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n\,, \qquad (4.6)$$

$$(1-\lambda)\Gamma(2-\delta)w^{\delta-1}D_w^{\delta}g(w)+\lambda\Gamma(1-\delta)w^{\delta}D_w^{\delta+1}g(w)=\alpha+(1-\alpha)q(w)$$

$$=1+(1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}d_n w^n \qquad (4.7)$$

olacak şekilde $\mathrm{Re}\left(p(z)\right)>0$ ve $\mathrm{Re}\left(q(w)\right)>0$ eşitsizliklerini sağlayan pozitif reel kısma sahip

$$p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$$

ve

$$q(w)=1+\sum_{n=1}^{\infty}d_n w^n$$

fonksiyonları vardır. Buradan, (4.4) ve (4.6) ifadelerinin katsayıları eşitlenirse,

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\delta)\left[1-\delta+\lambda(n-1)\right]}{\Gamma(n+1-\delta)}a_n=(1-\alpha)c_{n-1} \tag{4.8}$$

ve benzer şekilde (4.5) ve (4.7) ten

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\delta)\left[1-\delta+\lambda(n-1)\right]}{\Gamma(n+1-\delta)}\frac{1}{n}K_{n-1}^{-n}(a_2,a_3,...,a_n)=(1-\alpha)d_{n-1} \tag{4.9}$$

eşitlikleri yazılabilir. $2\le k\le n-1$ için $a_k=0$ olduğundan, $b_n=-a_n$ bulunur. Böylece,

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\delta)\left[1-\delta+\lambda(n-1)\right]}{\Gamma(n+1-\delta)}a_n=(1-\alpha)c_{n-1}, \tag{4.10}$$

$$-\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\delta)\left[1-\delta+\lambda(n-1)\right]}{\Gamma(n+1-\delta)}a_n=(1-\alpha)d_{n-1} \tag{4.11}$$

eşitliklerini yazmak mümkündür.

Caratheodory Yardımcı Önermesinden $n\in\mathbb{N}$ için $|c_n|\le 2$ ve $|d_n|\le 2$ olduğunu biliyoruz. (4.10) ve (4.11) ifadelerinde eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınarak, Caratheodory Yardımcı Önermesi uygulanırsa,

$$|a_n|\le\frac{(1-\alpha)\Gamma(n+1-\delta)|c_{n-1}|}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\delta)\left[1-\delta+\lambda(n-1)\right]}$$

$$=\frac{(1-\alpha)\Gamma(n+1-\delta)|d_{n-1}|}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\delta)\left[1-\delta+\lambda(n-1)\right]}$$

$$\le\frac{2(1-\alpha)\Gamma(n+1-\delta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\delta)\left[1-\delta+\lambda(n-1)\right]}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.3 deki katsayı kısıtlamalarını hafifleterek, $A_{\Sigma}^{(\alpha,\lambda,\delta)}$ sınıfındaki fonksiyonların ilk iki katsayısı için üst sınırlar aşağıdaki teoremde verilen şekilde elde edilebilir.

Teorem 4.4 (4.1) ile verilen f fonksiyonu $A_{\Sigma}^{(\alpha,\lambda,\delta)}$ $\left(0\le\alpha<1,\ \lambda\ge 0, 0\le\delta<1\right)$ sınıfında ise

$$(i)\quad |a_2|\le\begin{cases}\sqrt{\dfrac{(1-\alpha)\Gamma(4-\delta)}{3\Gamma(1-\delta)(1-\delta+2\lambda)}}, & 0\le\alpha<1-\dfrac{(3-\delta)\Gamma(1-\delta)(1-\delta+\lambda)^2}{3\Gamma(3-\delta)(1-\delta+2\lambda)}\\ \dfrac{(1-\alpha)\Gamma(3-\delta)}{\Gamma(1-\delta)(1-\delta+\lambda)}, & 1-\dfrac{(3-\delta)\Gamma(1-\delta)(1-\delta+\lambda)^2}{3\Gamma(3-\delta)(1-\delta+2\lambda)}\le\alpha<1\end{cases}$$

$$(ii)\quad |a_3|\le\frac{(1-\alpha)\Gamma(4-\delta)}{3\Gamma(1-\delta)(1-\delta+2\lambda)}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: (4.8) ve (4.9) ifadelerinde n yerine sırasıyla 2 ve 3 yazılırsa,

$$\frac{2\Gamma(1-\delta)(1-\delta+\lambda)}{\Gamma(3-\delta)}a_2 = (1-\alpha)c_1, \tag{4.12}$$

$$\frac{6\Gamma(1-\delta)(1-\delta+2\lambda)}{\Gamma(4-\delta)}a_3 = (1-\alpha)c_2, \tag{4.13}$$

$$-\frac{2\Gamma(1-\delta)(1-\delta+\lambda)}{\Gamma(3-\delta)}a_2 = (1-\alpha)d_1, \tag{4.14}$$

$$\frac{6\Gamma(1-\delta)(1-\delta+2\lambda)}{\Gamma(4-\delta)}\left(2a_2^2-a_3\right) = (1-\alpha)d_2 \tag{4.15}$$

eşitlikleri elde edilir.(4.12) veya (4.14) de eşitliğin her iki tarafı $\dfrac{2\Gamma(1-\delta)(1-\delta+\lambda)}{\Gamma(3-\delta)}$ ile bölünüp mutlak değerleri alınırsa, Caratheodory Yardımcı Önermesi ile,

$$|a_2|\le\frac{(1-\alpha)\Gamma(3-\delta)|c_1|}{2\Gamma(1-\delta)(1-\delta+\lambda)}=\frac{(1-\alpha)\Gamma(3-\delta)|d_1|}{2\Gamma(1-\delta)(1-\delta+\lambda)}\le\frac{(1-\alpha)\Gamma(3-\delta)}{\Gamma(1-\delta)(1-\delta+\lambda)}$$

elde edilir.

(4.13) ve (4.15) taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{12\Gamma(1-\delta)(1-\delta+2\lambda)}{\Gamma(4-\delta)}a_2^2=(1-\alpha)(c_2+d_2) \tag{4.16}$$

veya eşdeğer olarak

$$a_2^2=\frac{(1-\alpha)\Gamma(4-\delta)(c_2+d_2)}{12\Gamma(1-\delta)(1-\delta+2\lambda)} \tag{4.17}$$

bulunur. Caratheodory Yardımcı Önermesi uygulandıktan sonra her iki tarafın karekökü alınırsa,

$$|a_2|\le\sqrt{\frac{(1-\alpha)\Gamma(4-\delta)}{3\Gamma(1-\delta)(1-\delta+2\lambda)}} \tag{4.18}$$

eşitsizliği elde edilir.

$1-\frac{(3-\delta)\Gamma(1-\delta)(1-\delta+\lambda)^2}{3\Gamma(3-\delta)(1-\delta+2\lambda)}\le\alpha<1$ için

$$\frac{(1-\alpha)\Gamma(3-\delta)}{\Gamma(1-\delta)(1-\delta+\lambda)}\le\sqrt{\frac{(1-\alpha)\Gamma(4-\delta)}{3\Gamma(1-\delta)(1-\delta+2\lambda)}}$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür. (4.13) ifadesinde eşitliğin her iki tarafı $\frac{6\Gamma(1-\delta)(1-\delta+2\lambda)}{\Gamma(4-\delta)}$ ile bölünüp mutlak değeri alınırsa, Caratheodory Yardımcı Önermesi ile

$$|a_3|\le\frac{(1-\alpha)\Gamma(4-\delta)}{3\Gamma(1-\delta)(1-\delta+2\lambda)}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.□

5. KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., Perera, K. ve Pinelas, S. 2011. An Introduction to Complex Analysis. Springer US.

Airault, H. ve Bouali, A. 2006. Differential calculus on the Faber polynomials. ***Bull. Sci. Math.***, 130 (3): 179-222.

Alexander, J.W. 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. ***Ann. of Math.***,(17): 12-22.

Bieberbach, L. 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen. Welcheeine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. ***Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.*** : 940–955.

Branges, L. de. 1984. A proof of the Bieberbach conjecture. ***Acta Mathematica***, 154 (1): 137-152.

Brannan, D. A. ve Clunie, J. G. (Eds.). 1980. Aspects of Contemporary Complex Analysis (Proceedings of the NATO Advanced Study Institude held at the University of Durham. Durham; July 1-20, 1979), Academic Press, New York and London.

Brannan, D. A. ve Taha, T. S. 1986. On some classes of bi-univalent functions,in: S. M. Mazhar, A. Hamoui, N. S. Faour (Eds.), ***Math. Anal. and Appl.***, Kuwait; February 18.21, 1985, in: KFAS Proceedings Series, vol. 3, Pergamon Press, Elsevier Secience Limited, Oxford 1988, : 53-60. see also ***Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.*** 31(2): 70-77.

Caratheodory, C. 1907. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen. Die gegebene Werte nicht annehmen, ***Math.Ann.***, 64, 95-115.

Duren, P.L. 1983. Univalent Functions. Grundlehren der Math. Wissenschaften, 259, Springer-Verlag, New York.

Goodman, A. W. 1983. Univalent Functions, Vols. I and II. Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey.

Gronwall, T.H. 1914-1915. Some remarks on conformal representation. ***Ann. of Math.***, ***Ser. 2*** , (16): 72–76.

Kedzierawski, A. W. 1988. Some remarks on bi-univalent functions. ***Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A***, (39): 77-81.

Koebe, P. 1907. Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven, ***Nach. Ges. Wiss.*** Gottingen, 191-210.

Lewin, M. 1967. “On a coefficient problem for bi-univalent functions”. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, (18): 63-68.

Lindelöf, E. 1909. Mémoire sur certaines inegualités dans la théorie des fonctions onogènes et sur quelques propriétes nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel. ***Acta Soc.Sci.Fenn.***, 35 (7): 1–35.

Littlewood, J. E. 1925. On inequalities in the theory of functions. ***Proc. London Math. Soc.***, (23): 481-519.

Loewner, C. 1917. Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z|<1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden, ***Ber.Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig***, 69: 89-106.

Netanyahu, E. 1969. “The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z|<1$”. ***Arch. Rational Mech. Anal.***, (32): 100-112.

Nevanlinna, R. 1920-1921. Über die Konforme Abbildung von Sterngebieten, Översiktav Finska Vetenskaps, ***Societetens Förhandlingar***, No. 6 (63): 1-21.

Oldham, K. B. ve Spainer, J. 1974. The Fractional Calculus. Academic Press, New York.

Owa, S. 1978. On the distortion theorems I. ***Kyungpook Math. J.*** (18): 53-59.

Pommerenke, Ch. 1975. Univalent Functions. Vandenhoech and Ruprecht, Göttingen.

Ponnusamy, S. ve Silverman, H. 2006. Complex Variables with Applications. Birkhauser, Boston.

Robertson, M. S. 1936. On the theory of univalent functions, ***Ann. of Math.***, (37): 374-408.

Rogosinski, W. 1943. On the coefficients of subordinate functions. ***Proc. London Math.*** **Soc. 2**, (48): 48-82.

Tan, D.L. 1984. Coefficient estimates for bi-univalent functions. ***Chinese Ann. Math. Ser. A*** (5): 559-568.

Todorov, P. G. 1991. On the Faber polynomials of the univalent functions of class Σ. ***J. Math. Anal. Appl.*** 162 (1): 268–276.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında İstanbul'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi İstanbul'da, lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2001 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladım ve 2005 yılında mezun oldum. 2008 yılında MEB de Ortaöğretim Matematik öğretmeni olarak göreve başladım ve halen devam etmekteyim. 2012 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimime başladım. Evliyim ve biri erkek biri kız iki çocuğum var.

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Gülfem AKIN
ÖĞRENCİ NO	12804001
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2016-2017
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Kesirsel Türev Yardımıyla Tanımlanmış Analitik ve Bi-ünivalent Fonksiyonların Bir Alt Sınıfı
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	50
BENZERLİK ORANI	% 20
RAPORLAMA TARİHİ	03 / 07/ 2016

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 50 sayfalık kısmına ilişkin, 03/07/2017 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 20'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

☒ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☐ Kaynakça hariç
☐ Alıntılar hariç/dâhil
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

(İmza)
(Gülfem AKIN)

(İmza)
04/07/2017

Doç.Dr.Sevtap SÜMER EKER
Tez Danışmanı

(İmza)
04/07/2017

Doç.Dr.Bilal ÇEKİÇ
Anabilim Dalı Başkanı V.