T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ-CERRAHPAŞA
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

[DOKTORA TEZİ]

[KATI ZERRELER İÇEREN VİSKOZ BİR AKIŞKANIN DURMA NOKTASI CİVARINDAKİ AKIŞININ TEORİK ANALİZİ]

[Bahar ALANBEL ERSİN]

[DANIŞMAN
Prof. Dr. Serdar BARIŞ]

[Makine Mühendisliği Anabilim Dalı]

[Makine Mühendisliği Programı]

[İSTANBUL-2021]

Bu çalışma 07.04.2021 Tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Makine Mühendisliği Programı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

TEZ JÜRİSİ

Prof. Dr. Serdar BARIŞ
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi

Prof. Dr. Erol UZAL
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi

Doç. Dr. Banu KÖRBAHTİ
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi

Prof. Dr. Mehmet Salih DOKUZ
İstanbul Teknik Üniversitesi
Makina Fakültesi

Prof. Dr. Yakup Erhan BÖKE
İstanbul Teknik Üniversitesi
Makina Fakültesi

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa'nın abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Tanıştığımız günden beri örnek aldığım, birikimlerine ve meslek etiğine sonsuz saygı duyduğum, bilgi ve tecrübesiyle bana her konuda yol gösteren, zamanını, bilgisini ve emeğini hiç esirgemeden paylaşan değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Serdar BARIŞ'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen aileme tez çalışmalarım sırasında gösterdikleri anlayıştan ötürü teşekkürü bir borç bilirim.

Mart 2021 Bahar ALANBEL ERSİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ ..... **iv**
İÇİNDEKİLER ..... **v**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **vii**
TABLO LİSTESİ ..... **x**
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ ..... **xii**
ÖZET ..... **xv**
SUMMARY ..... **xvii**
1. GİRİŞ **1**
2. GENEL KISIMLAR **3**
3. MALZEME VE YÖNTEM **21**
3.1. KATI ZERRELER İÇEREN AKIŞKANLAR 21
3.1.1. Giriş 21
3.1.2. Katı Zerrelerin Hareketine Etki Eden Parametreler 22
3.1.3. Katı Zerrelerin ve Akışkanın Hareketleriyle İlgili Temel Denklemler 24
3.1.4. Etkileşimsiz Katı Zerreler İçeren Sıkıştırılamayan Viskoz Akışkanın Hareketini Yöneten Temel Denklemler 27
3.2. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ SİLİNDİRİK BİR NEWTONIAN AKIŞKAN HÜZMESİNİN YATAY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI 31
3.3. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ PRİZMATİK BİR NEWTONIAN AKIŞKAN HÜZMESİNİN YATAY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI 39
3.4. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ SİLİNDİRİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN DÜŞEY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI 47
3.5. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ PRİZMATİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN DÜŞEY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI 54
4. BULGULAR **61**
4.1. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ SİLİNDİRİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN YATAY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ 61

4.2. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ PRİZMATİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN YATAY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ 67
4.3. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ SİLİNDİRİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN DÜŞEY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ 73
4.4. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ PRİZMATİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN DÜŞEY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ 79
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 86
KAYNAKLAR 100
ÖZGEÇMİŞ 108

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 3.1: Manyetik alan etkisindeki silindirik akışkan hüzmesinin hareketli yatay bir plakaya doğru akışı. 31

Şekil 3.2: Manyetik alan etkisindeki prizmatik akışkan hüzmesinin hareketli yatay bir plakaya doğru akışı. 39

Şekil 3.3: Manyetik alan etkisindeki silindirik akışkan hüzmesinin hareketli düşey bir plakaya doğru akışı. 47

Şekil 3.4: Manyetik alan etkisindeki prizmatik akışkan hüzmesinin hareketli düşey bir plakaya doğru akışı. 54

Şekil 4.1: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde akışkan zerre etkileşim parametresinin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri (d) zerre yoğunluk oranı fonksiyonu. 62

Şekil 4.2: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde manyetik parametrenin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri. 63

Şekil 4.3: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde boyutsuz hızların x doğrultusundaki bileşenlerinin ax / U_0 oranı ile değişimi. 63

Şekil 4.4: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde parametrelerin çeşitli değerleri için sıcaklık dağılımının (a) akışkan zerre etkileşim parametresi ile değişimi (b) manyetik parametre ile değişimi (c) Eckert sayısı ile değişimi (d) Prandtl sayısı ile değişimi (e) akışkan / zerre özgül ısı oranı ile değişimi. 66

Şekil 4.5: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde akışkan zerre etkileşim parametresinin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri (d) zerre yoğunluk oranı fonksiyonu. 68

Şekil 4.6: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde boyutsuz hızların y doğrultusundaki bileşenlerinin ay / V_0 oranı ile değişimi. 68

Şekil 4.7: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde manyetik parametrenin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri..... 69

Şekil 4.8: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde parametrelerin çeşitli değerleri için sıcaklık dağılımının (a) akışkan zerre etkileşim parametresi ile değişimi (b) manyetik parametre ile değişimi (c) Eckert sayısı ile değişimi (d) Prandtl sayısı ile değişimi (e) akışkan / zerre özgül ısı oranı ile değişimi..... 72

Şekil 4.9: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde akışkan zerre etkileşim parametresinin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri (d) zerre yoğunluk oranı fonksiyonu..... 74

Şekil 4.10: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde Prandtl sayısının çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi..... 74

Şekil 4.11: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde manyetik parametrenin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri..... 75

Şekil 4.12: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde y doğrultusundaki boyutsuz hız bileşenlerinin ay / V_0 oranı ile değişimi..... 75

Şekil 4.13: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde taşınım parametresinin çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi..... 76

Şekil 4.14: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde ısı üretim parametresinin çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi..... 76

Şekil 4.15: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde parametrelerin çeşitli değerleri için sıcaklık dağılımının (a) akışkan zerre etkileşim parametresi ile değişimi (b) manyetik parametre ile değişimi (c) Prandtl sayısı ile değişimi (d) akışkan / zerre özgül ısı oranı ile değişimi (e) ısı üretim parametresi ile değişimi. 78

Şekil 4.16: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde Prandtl sayısının çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi..... 80

Şekil 4.17: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde akışkan zerre etkileşim parametresinin çeşitli değerleri için

boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri (d) zerre yoğunluk oranı fonksiyonu. 81

Şekil 4.18: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde taşınım parametresinin çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi. 81

Şekil 4.19: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde manyetik parametrenin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri. 82

Şekil 4.20: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde ısı üretim parametresinin çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi. 82

Şekil 4.21: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde parametrelerin çeşitli değerleri için sıcaklık dağılımının (a) akışkan zerre etkileşim parametresi ile değişimi (b) manyetik parametre ile değişimi (c) Prandtl sayısı ile değişimi (d) akışkan / zerre özgül ısı oranı ile değişimi (e) ısı üretim parametresi ile değişimi. 85

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4-1: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde Ha ve βv parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerindeki kayma gerilmesi değerleri. 64

Tablo 4-2: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde ilgili parametrelerin çeşitli değerlerinde plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı. 65

Tablo 4-3: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde Ha ve βv parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerindeki kayma gerilmesi değerleri. 70

Tablo 4-4: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde βv, Ha, Ec, c ve Pr parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerinde sıcaklık gradyanının değerleri. 71

Tablo 4-5: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde Ha, λ, Q, c, βv ve Pr parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerindeki kayma gerilmesi değerleri. 77

Tablo 4-6: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde βv, Ha, λ, Q, c, ve Pr parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerinde sıcaklık gradyanının değerleri. 79

Tablo 4-7: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde Ha, λ, Q, c, βv ve Pr parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerindeki kayma gerilmesi değerleri. 83

Tablo 4-8: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde βv, Ha, λ, Q, c ve Pr parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerinde sıcaklık gradyanının değerleri. 84

Tablo 5-1: Wang [70] tarafından elde edilen değerlerin ve katı zerreler içeren silindirik bir akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı problemi için a) kayıp türev değerleri b) plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı değerlerinin karşılaştırılması. 88

Tablo 5-2: Demir ve Barış [89] tarafından elde edilen değerlerin ve katı zerreler içeren silindirik bir akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı problemi için a) kayma gerilmesi değerleri b) plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı değerlerinin karşılaştırılması. 89

Tablo 5-3: Wang ve Ng [82] tarafından elde edilen değerlerin ve katı zerreler içeren a) silindirik b) prizmatik bir akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı problemi için kayıp türev değerleri karşılaştırılması. 90

Tablo 5-4: Demir ve Barış [88] tarafından elde edilen değerlerin ve katı zerreler içeren a) silindirik b) prizmatik bir akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı problemi için kayma gerilmesi ve plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı değerlerinin karşılaştırılması. 91

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler **Açıklama**

$\boldsymbol{a}$: Durma noktası akışıyla ilgili fiziksel parametre $[T^{-1}]$

$\boldsymbol{B}$: Manyetik alan vektörü $[L^{-1}I]$

$\boldsymbol{B_0}$: Tatbik edilen manyetik alanın şiddeti $[L^{-1}I]$

$\boldsymbol{C_1, C_2, C_3}$: Keyfi integrasyon sabitleri

$\boldsymbol{c_s}$: Katı zerrenin özgül ısısı $[L^2T^{-2}\theta^{-1}]$

$\boldsymbol{c_p}$: Akışkanın özgül ısısı $[L^2T^{-2}\theta^{-1}]$

$\boldsymbol{c_j}$: Zerrenin kendine özgü hız vektörü $[LT^{-1}]$

$\boldsymbol{e}$: Deformasyon hızı tansörü $[T^{-1}]$

$\boldsymbol{Ec}$: Eckert sayısı

$\boldsymbol{f(z)}$,$\boldsymbol{h(z)}$,$\boldsymbol{g(z)}$,$\boldsymbol{m(z)}$: Akışkanın hız bileşenleri ile ilgili benzerlik fonksiyonları $[LT^{-1}]$

$\boldsymbol{F(z)}$,$\boldsymbol{N(z)}$,$\boldsymbol{G(z)}$, $\boldsymbol{H(z)}$,$\boldsymbol{M(z)}$: Zerrelerin hız bileşenleri ile ilgili benzerlik fonksiyonları $[LT^{-1}]$

$\boldsymbol{f}$: Birim kütle başına hacim kuvvetleri $[LT^{-2}]$

$\boldsymbol{\mathcal{F}_k}$: Zerrenin akışkana uyguladığı kuvvet $[MLT^{-2}]$

$\boldsymbol{F_p}$: Akışkanın birim hacmine uygulanan kuvvet $[ML^{-2}T^{-2}]$

$\mathfrak{g}$: Yer çekimi ivmesi vektörü $[LT^{-2}]$

$\mathfrak{h}$: Birim kütle başına ısı üretimi $[L^{-2}T^{-3}]$

$\boldsymbol{Ha}$: Manyetik parametre

$\boldsymbol{J}$: Elektrik akımı yoğunluk vektörü $[ML^{-1}T^{-2}I^{-1}]$

$\boldsymbol{k}$: Isıl iletkenlik katsayısı $[MLT^{-3}\theta^{-1}]$

$\boldsymbol{K(z)}$: Yoğunluk oranı fonsiyonu

$\boldsymbol{L}$: Karakteristik uzunluk $[L]$

$\boldsymbol{m}$: Zerre kütlesi $[M]$

$\boldsymbol{n}$: Karışımın birim hacminde m kütlesine sahip zerre sayısı $[L^{-3}]$

$\boldsymbol{Nu}$: Nusselt sayısı

$\boldsymbol{p}$: Basınç $[ML^{-1}T^{-2}]$

$\boldsymbol{q}$: Isı akısı vektörü $[MT^{-3}]$

$\boldsymbol{q_p}$: Zerrenin akışkana aktardığı ısı $[ML^2T^{-3}]$

$\boldsymbol{q_p}$: Kayma enerji akısı vektörü $[ML^{-1}T^{-3}]$

$\boldsymbol{Q}$: Isı üretimi parametresi

$\boldsymbol{Q_0}$: Isı üretim katsayısı $[ML^{-1}T^{-3}\theta^{-1}]$

$\boldsymbol{Q_p}$: Akışkana aktarılan ısı $[ML^{-1}T^{-3}]$

$\boldsymbol{Pr}$: Prandtl sayısı

$\boldsymbol{r}$: Yarıçap $[L]$

$\boldsymbol{Re}$: Reynolds sayısı

$\boldsymbol{S}$: Kayma gerilme tansörü $[ML^{-2}T^{-2}]$

$\boldsymbol{t}$: Zaman $[T]$

$\boldsymbol{T}$: Sıcaklık $[\theta]$

$\boldsymbol{T}$: Gerilme tansörü $[ML^{-1}T^{-2}]$

$\boldsymbol{u}$: Akışkanın hız vektörü $[LT^{-1}]$

$\boldsymbol{v_p}$: Zerrelerin hız vektörü $[LT^{-1}]$

$\boldsymbol{u, v, w}$: Hız vektörü bileşenleri $[LT^{-1}]$

$\boldsymbol{U_0}$, $\boldsymbol{V_0}$: Levhanın çekilme hızı $[LT^{-1}]$

$\boldsymbol{x, y, z}$: Kartezyen koordinatlar $[L]$

$\boldsymbol{\beta_v}$: Akışkan - zerre etkileşim parametresi

$\boldsymbol{\beta_T}$: Akışkan - zerre ısıl etkileşim parametresi

$\boldsymbol{\gamma}$: Hacimsel genleşme katsayısı $[\theta^{-1}]$

$\boldsymbol{\varsigma}$: Zerrelerin sayısını temsil eden fonksiyon $[L^{-3}]$

$\boldsymbol{\eta}$: Benzerlik değişkeni

$\boldsymbol{\lambda}$: Taşınım parametresi

$\boldsymbol{\lambda_T}$: Isıl denge aralığı $[L]$

$\boldsymbol{\lambda_v}$: Momentum denge aralığı $[L]$

$\boldsymbol{\mu}$: Dinamik viskozite $[ML^{-1}T^{-1}]$

$\boldsymbol{\nu}$: Kinematik viskozite $[L^2T^{-1}]$

$\boldsymbol{\pi}$: Pi sayısı

$\boldsymbol{\rho_p}$: Karışımın birim hacmindeki zerre kütlesi $[ML^{-3}]$

$\boldsymbol{\rho}$: Yoğunluk $[ML^{-3}]$

$\boldsymbol{\sigma}$: Elektriksel iletkenlik katsayısı $[ML^{-1}T^{-1}I^{-2}]$

$\boldsymbol{\tau}$: Karakteristik zaman $[T]$

$\boldsymbol{\tau_T}$: Isıl gevşeme süresi $[T]$

$\boldsymbol{\tau_v}$: Zerre gevşeme süresi $[T]$

$\boldsymbol{\theta(z), \theta_1(z), \theta_2(z), \theta_3(z)}$: Sıcaklık fonksiyonları $[\theta]$

$\boldsymbol{\Phi_J}$: Joule disipasyonu $[ML^{-1}T^{-3}]$

$\boldsymbol{\Phi_p}$: Zerreler tarafından yapılan iş $[ML^{-1}T^{-3}]$

$\boldsymbol{\varphi}$: Zerrenin kendine özgü sıcaklığı $[\theta]$

$\boldsymbol{\nabla}$: Nabla operatörü

Alt indisler

$\boldsymbol{p}$: Zerre ile ilgili büyüklükler

$\boldsymbol{w}$: Büyüklüğün plaka üzerindeki değeri

∞ : Büyüklüğün plakadan uzakta aldığı değer

Kısaltmalar	**Açıklama**
bvp4c	: boundary value problem 4 collacation
RFK45	: Runge Kutta Fehlberg dördüncü beşinci mertebe yöntemi
MHD	: manyetohidrodinamik

ÖZET

DOKTORA TEZİ

KATI ZERRELER İÇEREN VİSKOZ BİR AKIŞKANIN DURMA NOKTASI CİVARINDAKİ AKIŞININ TEORİK ANALİZİ

Bahar ALANBEL ERSİN

İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Serdar BARIŞ

Zerreler içeren akışkanların hareketli plakalar üzerinde iki fazlı durma noktası akışı mühendislik problemleri açısından önemli bir araştırma konusudur. Bu tez çalışmasında, küresel katı zerreler içeren Newtonian bir akışkanın; hareketli yatay plakaya doğru durma noktası akışında enine manyetik alan uygulanmasının etkileri, ayrıca viskoz disipasyonun ve Joule ısınmasının sıcaklık dağılımları üzerindeki etkileri; ikinci olarak hareketli düşey plakaya doğru durma noktası akışında, enine manyetik alan uygulanmasının ve kaldırma kuvvetlerinin etkileri teorik olarak incelenmiştir.

Tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır:

İlk bölümde zerreler içeren akışkanların durma noktası akışlarına değinilmiş ve iki fazlı akış olarak incelenmesinin gerekliliği vurgulanmıştır.

İkinci bölümde araştırma alanının gelişim sürecinde katkıda bulunan araştırmalar verilmiştir.

Üçüncü bölümde tez çalışmasında uygulanacak modelin kısıtları ve kabulleri belirtilerek akışkan ve zerreler için kütlenin korunumu, hareket ve enerjinin korunumu denklemleri verilmiştir. Devamında dört problem için gerekli formülasyonlar yapılmıştır. Durma noktası civarındaki akışı incelenen dört problem şu şekilde tanımlanmıştır: İlk olarak, küresel katı zerreler içeren Newtonian bir akışkan silindirik hüzme biçiminde hareket ederken x ekseni doğrultusunda hareket eden yarı sonsuz yatay bir plakaya çarpmaktadır. İkinci olarak aynı

akışkan prizmatik hüzme biçiminde akarken hem x hem de y doğrultusunda hareket eden yarı sonsuz yatay plakaya çarpmaktadır. Üçüncü durumda aynı akışkan silindirik hüzme biçiminde, dördüncü durumda ise prizmatik hüzme biçiminde hareket ederken, y doğrultusunda hareket eden yarı sonsuz düşey plakaya çarpmaktadır. İncelenen akış problemlerinde plakalara dik doğrultuda uygulanan sabit şiddetli bir manyetik alan da mevcuttur. Formülasyon aşamasında her bir problem için uygun benzerlik dönüşümleri kullanılarak adi diferansiyel denklem takımları elde edilmiş, ardından bu denklem takımları üzerinde problemin fiziğine uygun boyutsuzlaştırmalar yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, elde edilen diferansiyel denklem takımları ilgili sınır şartları altında sayısal olarak çözülmüştür. Hız alanı ve sıcaklık dağılımları ile ilgili grafikler parametrelerin çeşitli değerlerinde elde edilerek verilmiştir. Plaka yüzeyindeki kayma gerilmesi ve ısı akısı değerleri ilgili parametrelerin çeşitli değerleri için tablo olarak verilmiştir.

Beşinci bölümde literatürde bulunan çalışmalar ile karşılaştırmalar yapılmış ve sayısal sonuçların uyumlu olduğu görülmüştür. Elde edilen grafik ve tablolar yardımı ile parametrelerin etkileri değerlendirilmiştir. ⌋

Mart 2021, ⌈126⌉ sayfa.

Anahtar kelimeler: ⌈Zerreler içeren akışkan, durma noktası akışı, benzerlik dönüşümü. ⌋

SUMMARY

Ph.D. THESIS

THEORETICAL ANALYSIS OF STAGNATION-POINT FLOW OF A VISCOUS FLUID WITH PARTICLES

Bahar ALANBEL ERSİN

Istanbul University-Cerrahpasa

Institute of Graduate Studies

Department of Mechanical Engineering

Supervisor : Prof. Dr. Serdar BARIŞ

This thesis comprises the theoretical analysis of four different problems related to the stagnation point flow of a viscous fluid with particles. First two theoretical analyses are carried out to delve into the problem of axisymmetric and two dimensional magnetohydrodynamic stagnation flow towards an infinite horizontal plate with a constant velocity in the presence of viscous dissipation and Joule heating. Remaining theoretical analyses are made to shed light on the problem of axisymmetric and two dimensional magnetohydrodynamic free convection stagnation flow towards an infinite vertical plate with a constant velocity.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the stagnation point flow of a viscous fluid with particles is mentioned and the necessity of examining the problem as a two phase flow is emphasized.

In the second chapter, previous studies dealing with dusty fluid and stagnation point flow of towards a moving plate are reviewed briefly.

In the third chapter, limitations of the dusty fluid concept are given with the physical parameters that indicate the relative importance of the particle cloud. Then conservation of momentum and conservation of energy equations are given for fluid and particles. In other sections of this chapter, four different problems related to stagnation point flow are formulated. The governing equations are reduced to a systems of nonlinear ordinary differential equations by means of

appropriate similarity transformations for the velocity components and temperature. Finally, resulting equations are expressed in dimensionless form.

In the fourth chapter, the systems of coupled differential equations obtained are solved numerically under the relevant boundary conditions. Numerical results are obtained for velocity and temperature distributions, as well as the shear stress and heat flux values on the surface of the plate for various values of the involved parameters.

In the fifth chapter, the effects of various parameters are discussed in detail with the help of the graps and tables. A comparison with previous studies available in the literature has been done and we have found an excellent agreement with them.]

March 2021, [126] pages.

Keywords: [Dusty fluid, stagnation point flow, similarity solutions.]

1. GİRİŞ

Hareketli bir yüzey üzerindeki akış ve ısı transferi problemi, mühendislik, bilim ve teknoloji alanlarında önemli uygulamaları olması sebebiyle, uzun yıllardır üzerinde araştırma ve çalışma yapılan bir konudur. Elektronik bileşenlerin soğutulması, plastik tabakanın aerodinamik ekstrüzyonu, soğutma banyosunda metal plakanın soğutulması, jeotermal sistemler, nükleer reaktörler ve metalurjik işlemler durma noktası akış ve ısı transferi probleminin karşılaşıldığı alanlardan bazılarıdır. Elektriksel ve manyetik alanlar ile etkileşime giren akışkanların dinamiğinin incelenmesi manyetohidrodinamik (MHD) olarak bilinir ve durma noktası akışları incelenirken manyetik alan etkilerinin kullanılması sıkça karşılaşılan bir durumdur. Bunun bir sebebi elektriksel olarak iletken sıvının kullanılması ve manyetik alanların uygulanması ile son ürünün soğutma hızı ve/veya istenen özelliklerinin kontrol edilebilmesidir. Hareketli plakalar üzerinde durma noktası akışları Newtonian akışkanlar, viskoelastik akışkanlar mikropolar akışkanlar gibi birçok akışkan modeli için incelenmiştir. Ancak doğada saf haldeki akışkan nadiren bulunmaktadır, toz parçacıkları ve/veya yabancı maddeler içeren akışkanların akışı ve ısı transferi mühendislik alanlarında ve çevre kirliliği problemlerinde karşımıza çıkmakta, ayrıca fizyolojik akışlardaki uygulamaları nedeniyle dikkat çekmektedir. Doğal rüzgarlarla toprak kurtuluşu, bir iniş aracının egzozundan kaynaklanan yüzey erozyonu, zerreler içeren akışkanların sınır tabaka akışına örnek verilebilir. Zerre fazını ve akışkan fazını içeren bir akışa, bir katı cisim batırıldığında oluşan durma noktası akışı; toz toplama ekipmanları, gaz maskeleri, türbin kanadı gibi yerlerde örneklenebilir. Ayrıca biyolojik sıvılar (kan akışı vb.) ve petrol endüstrisinde kullanılan akışkanlar da zerreler içeren akışkanlar olarak kabul edilebilmektedir. Zerrelerin şekli, boyutu, miktarı ve özgül özellikleri akış alanları üzerinde önemli etkiler meydana getirebilmektedir. Örneğin zerrelerin varlığı türbülansı azaltabilir, akışkanın hızını değiştirebilir, akışkanın bir yüzeyle arasındaki ısı transferini azaltabilir ya da arttırabilir, bu sebeple zerrelerin akış alanının ve akışkanın zerreler ile etkileşiminin belirlenmesinde rol oynayan belirli parametreler ortaya çıkmaktadır ve akışların iki fazlı olarak incelenmesini gerekli kılmaktadır.

Bu tez çalışmasında Saffman [1] tarafından formülasyonu yapılan temel denklemler kullanılmıştır. Bu formülasyonun temelinde akışkan ve küresel zerrelerin bir karışım olduğu ancak zerrelerin kendi aralarında mekanik ve ısıl etkileşim bulunmadığı kabulü vardır. Ayrıca,

tek bir zerrenin hareket denkleminin Stokes yasasıyla verilebildiği yani basitçe akışkanın zerreye uyguladığı sürüklenme kuvvetinin; zerrenin ve akışkanın hız vektörleri arasındaki farkla orantılı olduğu kabul edilir. Bununla birlikte zerrelerin hareketleri ayrı ayrı değerlendirilmez ve sanal bir akış alanı oluşturdukları varsayılır. Bu akış alanı için kütlenin korunumu denklemi yazılabilir, momentum denkliği ve enerjinin korunumu denklemleri akışkan ile etkileşim terimlerini içerecek şekildedir. Zerreler içeren akışkanın dinamiği, davranışı ve sınır tabakası modellemesi ile ilgili temel çalışmalar Saffman [1], Marble [2]-[3], Chakrabarti [4], Datta ve Mishra [5] tarafından yapılmış olup, tez çalışmamızın sonraki bölümlerinde ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasında ilk olarak yatay ve hareketli bir plakaya a) silindirik b) prizmatik hüzme şeklinde çarpan, katı küresel zerreler içeren manyetik alan tesirindeki Newtonian akışkanın daimi durma noktası akışı ve ısı transferi problemi göz önüne alınmıştır. Bu iki problem için enerji denkleminde, zerrelerin bağıl hareketinden kaynaklanan iş terimi, viskoz disipasyon ve Joule ısınması etkileri ihmal edilmeyerek incelenmiştir. Ardından düşey ve hareketli bir plakaya a) silindirik b) prizmatik hüzme şeklinde çarpan, katı küresel zerreler içeren manyetik alan tesirindeki Newtonian akışkanın daimi durma noktası akışı ve ısı transferi problemi göz önüne alınmıştır. Bu iki problem için ise ısı üretimi ve yerçekimi etkileri hesaba katılmıştır. Çalışmada ele alınan problemlerin çözümü aşamasında kütlenin korunumu, hareket ve enerji denklemlerinden gelen kısmi diferansiyel denklemler uygun benzerlik dönüşümleri yardımıyla adi diferansiyel denklem takımlarına indirgenmiştir. Adi diferansiyel denklem takımları ve ilgili sınır şartlarına problemin fiziğine uygun boyutsuzlaştırmalar yapılmasının ardından bir Matlab uygulaması olan bvp4c algoritması kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde ilk olarak katı zerreler içeren iki fazlı akışlar ile ilgili günümüze kadar yayınlanan çalışmalara genel bir bakış yapılmıştır. Ardından tez çalışmasında ele alınan durma noktası akışı ve ısı transferi problemiyle ilgili hem Newtonian akışkanlar hem de katı zerreler içeren akışkanlar ile ilgili bugüne kadar yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir.

Hem fizik hem de biyoloji bilimi, zerrelerin veya yuvarların bir akışkanda asılı kaldığı veya akışkanın hareketi ile taşındığı durumlarda, akışkanın ve plazmanın özellikleri ile çok eskilerden beri ilgilenmektedir. Zerrelerin varlığının, süspansiyonun özelliklerini etkileyeceği ve viskozitesini arttırabileceği geçmiş zamanlardan beri bilinmekte ve araştırılmaktadır. Bu çalışmaların en bilinenleri küresel parçacıklar vakasını düşünen ve viskozitedeki artış için bir formül veren Einstein'a [6] aittir. Bu çalışmayı Jeffery [7] elipsoidal şekilli parçacıklar için genişletmiştir. Akışkanın partikül hareketi üzerindeki etkileri de uzun yıllardır araştırma konusu olmuştur. Stokes [8] 1800 lerin ikinci yarısında akışkanların iç sürtünmesinin sarkaç hareketine etkisi üzerine oldukça kapsamlı bir çalışma yayınlamıştır.

Konuyla ilgili çalışmalar yakın geçmişte yoğunlaşmaktadır. Saffman [9] sıvının ataletinin etkisinin zerrenin yörüngesini yavaşça değiştirmek olduğu göstermiştir ayrıca birden fazla zerre mevcut olduğunda bu zerreler arasındaki çarpışmaların olası etkisi hakkında da bazı açıklamalar yapmıştır. Torobin ve Gauvin'in [10], [11], [12], [13], [14], [15] katı-gaz akışının temel özelliklerini tartıştıkları biz dizi çalışması mevcuttur.

Bununla birlikte mühendislikte ve biyoloji biliminde karşımıza çıkan pek çok oluşum ve uygulama katı zerreler içeren akışkanların hareketinin iki fazlı olarak incelenmesini gerekli kılmıştır. Zerrelerin hareketini yöneten denklemlerle ilgili bireysel farklılıklar olduğunu ve önceki çalışmaların ayrı ayrı zerrelerin yörüngelerinin hesaplanmasını içerdiğini belirten Robinson [16], potansiyel akış alanındaki küçük parçacıkların hareketini incelediği makalesinde, bir zerrenin hareket denkleminin Stokes yasası tarafından verilebildiği kabulünü yapmış, bununla birlikte, problemi tek bir zerrenin yörüngesiyle sınırlamak yerine, her biri belirtilen hareket denklemi tarafından yönetilen belirli boyuttaki zerrelerin sürekli dağılımı ile üretilecek (sanal) akış alanını göz önünde bulundurmuştur. Bu sanal akış alanının, çeşitli özelliklerini türetmiş, dahası, ince bir engel üzerinde veya bir duvardan az bir yükseklikte

biriken zerrelerin toplam kütlesi için kompakt bir formül elde etmiştir. Ayrıca taşıyıcı akışkanlar sıkıştırılamaz olsa bile zerre akışının sıkıştırılabildiğini göstermiştir.

Kliegel [17] bir gaz zerre karışım sisteminin tek boyutlu akışını düzenleyen denklemlere bir çözüm ailesi sunmuştur. Teorinin dayandığı temel varsayımlar, zerrelerin kendi aralarında etkileşime girmemesi, şekillerinin küre olması ve daima Stokes akış rejiminde (küçük parçacık gecikmeleri) olmasıdır. Eksenel hız gradyanının sabit olduğu bir burundaki akışa karşılık gelen çözümü göstermiştir. Bu yaklaşıma göre mühendisliği ilgilendiren sistemlerde, zerre termal gecikmesinin zerre hızı gecikmesinden daha büyük olduğunu göstermiştir.

Soo [18] asılı katı zerreler içeren gaz için, gaz fazı ve katı faz arasındaki momentum ve ısı transferini dikkate alarak iki fazlı daimi bir boyutlu akış için korunum denklemlerini geliştirmiştir ve bu katkıların önemini Laval nozulundan genişleme durumunu inceleyerek göstermiştir. Kanal akışı ve normal şok problemlerini de tartışmıştır.

1962 yılında Saffman [1] gevşeme parametresini tanıtarak toz zerreleri içeren bir gazın laminer akışının kararlılığı üzerinde öncü bir çalışma gerçekleştirmiştir. Çalışmasının başında yazar, Sproull [19] tarafından yayınlanan, havanın bir borudan türbülanslı akışında havaya toz eklenmesinin direnç katsayısını önemli ölçüde azaltabileceği gözlemini yapan çalışmaya değinmiştir, Sproull bir borudan türbülanslı bir şekilde akan bir gaza (havaya) toz (kireçtaşı) ilave edilmesinin, akışı orijinal hızda tutmak için gereken basınç gradyanında hemen bir azalmaya neden olduğunu gözlemlemiş ve bu fenomeni tozun viskozite azalmasına neden olduğunu belirterek açıklamıştır; yani toz zerreleri içeren bir gazın viskozitesi, ilgili temiz gazın viskozitesinden daha azdır. Saffman [1] tozlu gazlar ile ilgili çalışmasını daha kesin matematiksel temele oturtmaya çalışmış ve bir süspansiyonun viskozitesi için Einstein formülünün toz zerreleri içeren bir gazın viskozitesindeki bir artışı beraberinde getireceğini gözlemleyerek Sproull'un viskozite azalması ile ilgili argümanlarını reddetmiştir. Saffman'ın açıklaması, toz parçacıklarının türbülansı şu şekilde azaltmasıydı: bir gazdaki toz parçacığının eşdeğer gaz hacminden çok daha büyük bir ataleti vardır ve bu nedenle türbülanslı dalgalanmalara kolayca katılmayacaktır; dolayısıyla, toz partiküllerinin temiz gaza göre göreceli hareketi, sürüklenme nedeniyle enerjiyi dağıtacak ve böylece sistemden enerji çıkaracaktır. Türbülans sorununun laminer akışların kararlılığı ile ilgili olduğunu ve bu sebeple tozun laminerden türbülanslı akışa geçiş için kritik Reynolds sayısını nasıl etkileyebileceğini görmeyi hedeflediği bu çalışmayı yaptığını belirtmiştir. Çalışmadaki yenilik dağılmış katı

zerreler içeren bir gazın sıkıştırılamaz paralel akışının lineerleştirilmiş kararlılık teorisini formüle etmesidir. Toz parçacıkları taşıyan bir gazın hareketini açıklayan denklemleri vermiş ve tozun etkisini iki parametre ile açıklanmıştır. İlk parametre toz konsantrasyonu ve ikinci parametre bir toz partikülünün hızının gaz hızındaki değişikliklere uyum sağlama hızını ölçen ve münferit zerrelerin boyutuna bağlı olan bir gevşeme süresidir. Sorunu basit bir şekilde formüle etmek ve temel özellikleri ortaya çıkarmak için, toz zerrelerinin boyut ve şekil olarak aynı olduğu, hızlarının $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ ve sayı olarak yoğunluğunun (number density) $N(\boldsymbol{x},t)$ alanları ile tanımlanabileceğini varsaymıştır. Ayrıca tozun hacimce konsantrasyonunun çok küçük olduğunu varsayarak tozun gaz üzerindeki net etkisinin birim hacim başına ilave bir $KN(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$ kuvvetine eşit olacağını belirtmiştir, burada $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ gazın hızı ve $K=6\pi a\mu$ olarak verilen Stokes sürüklenme sabitidir. Ayrıca burada toz ve gazın göreceli hareketinin Reynolds sayısının birliğe kıyasla küçük olduğu ve böylece toz ve gaz arasındaki kuvvetin göreceli hız ile orantılı olduğu varsayılmaktadır. Daha sonra küçük kütle konsantrasyonu kabulü ve gazın sıkıştırılabilirliğinin ihmali ile gaz ve toz için hareket ve süreklilik denklemlerini vermiştir. Düzlemsel paralel akış için, toz zerreleri içeren bir gazın kararlılık özelliklerinin hala Orr-Sommerfeld denkleminin çözümleri ile belirlendiğini, ancak temel hız profilinin yerine değiştirilmiş bir profilin verildiğini göstermiştir. Yazar, gevşeme süresinin akışla ilişkili karakteristik bir zaman ölçeğinden küçük kalabildiği yani tozun yeterince küçük olduğu durumda, toz ilave edilmesinin bir gaz akışını istikrarsızlaştırdığı ancak toz gevşeme süresinin nispeten fazla olacağı kadar büyük ise tozun dengeleyici etkisi olduğu sonucuna varmıştır.

Saffman [1] ile aynı yıl içinde, akışkan-zerre akış fenomenlerinin akışkanlar mekaniği modeline ne şekilde uyumlu olduğunu ve modeli nasıl genişlettiğini göstermek istediğini belirten Marble [2] kapsamlı bir çalışma yayınlamıştır. Yazar çalışmasında Stokes sürüklenme yasasının kabul edilebilir bir yaklaşım olduğu yani Reynolds sayısının ve moleküler ortalama serbest yolun yeterince küçük olduğu ve zerrelerin münferit yoğunluklarının hacimsel etkilerinin ihmal edilebileceği küçüklükte olduğu kabulünü yapmıştır. Çalışmada ilk olarak, akışkan-zerre akış sistemleri için, zerre akış alanının ve akışkanın zerre bulutuyla karşılıklı etkileşiminin, her biri basit bir fiziksel öneme sahip olan dört benzerlik parametresi tarafından yönetildiği gösterilmiştir ve parametrelerin genel fiziksel etkileri belirtilmiştir. Daha sonra akışkan-zerre hareketini yöneten dinamik ve termodinamik ilişkilerin genel ifadelerini, kendi aralarında etkileşimi olmayan katı zerreler kabulü yaparak, geliştirmiştir. Bir boyutlu gaz akışı için denklemleri özelleştirip normal şok dalgaları için analitik çözümler vermiştir. Prandtl-

Meyer genişlemesinde parçacık yörüngelerini incelemiştir. Sıkıştırılamayan akışkan-zerre sisteminin laminer sınır tabakası probleminde, sınır tabakası yaklaşımının hem sıvı hem de zerre akışları için yeterli olup olamadığını ve kayma akışı boyunca hareket ettikleri için zerreler üzerindeki yanal kuvveti hesaba katmanın gerekli olup olmadığını tartışmıştır, ancak analiz plakanın tüm uzunluğu için geçerli değildir. Bu tipik problemlerin analitik çözümlerini, yeni boyutsuz parametrelerin etkilerinin bir örneği ve çeşitli problemlere uygun analitik yöntemlerin bir göstergesi olarak özetleyerek, akışkan-zerre dinamiği alanındaki çalışmaların ilerletilebileceği bazı sahalara işaret etmiştir. Marble [20] tarafından ortaya koyulan bir diğer çalışma gaz parçacık karışımlarının tek boyutlu dinamiğinde parçacık çarpışma mekanizmasını içermektedir.

Singleton [21] iki fazlı akış modellemesi için Marble'i [2] takip ettiği tez çalışmasında sınır tabakası yaklaşımının, zerre yoğunluğunun sınır tabakasında gaz yoğunluğu mertebesinde olması şartıyla, yarı sonsuz düz bir plaka üzerindeki ve dairesel sabit bir silindir üzerindeki iki fazlı akışa uygulanabilir olduğunu göstermiştir. Sınır tabaka denklemlerinde, zerre hızının akışkanın hızına ulaşması için gereken mesafenin durma noktasından aşağı akım bölgesine kadar ölçülen uzunluğa oranı olan yeni parametrenin önemini belirterek, bu parametre açısından, yarı sonsuz düz plaka için benzerlik değişkeninin bulunabileceği belirtmiştir. Analizi, yarı sonsuz düz bir plaka üzerindeki hem sıkıştırılamaz hem de sıkıştırılabilir bir gaz için gerçekleştirerek yeni kayma gerilmesi ve ısı transferi katsayılarını bu analizden elde etmiştir. Gazın sıkıştırılamaz olduğu durumda yarı sonsuz plaka üzerindeki akış ile ilgili denklemlerin çözümü için sayısal çözüm ile karşılaştırmak amacıyla integral yöntem uygulayarak çözüm elde etmiştir. Akışta zerrelerin varlığından kaynaklanan yüzeydeki kayma gerilmesini hesaplamıştır. Sabit dairesel silindir problemi ile eğriliğin iki fazlı akış üzerindeki etkilerini araştırmıştır. Singleton [22] tez çalışmasını takip ederek, yarı sonsuz düz bir plaka üzerinde laminer iki fazlı bir sınır tabaka problemini ele almıştır ve gaz sabit yoğunlukta olmadığında, duvar ile gerçekleşen ısı transferinde ne gibi değişiklikler olacağını incelemiştir.

Michael [23], Saffman [1] tarafından verilen formülasyonu, tozlu bir gazın düzlem Poiseuille akışının kararlılığını araştırma amacıyla uygulayarak yaklaşık sonuçlar sunmuştur. Elde ettiği sonuçların, büyük bir sayısal doğruluğa sahip olmamakla birlikte, nötr kararlılık eğrisinin tozun varlığı ile nasıl değiştirildiğini niteliksel olarak göstermek için yeterli olduğunu belirtmiştir. Bu

çalışmanın hemen ardından, Michael [24] katı zerreler içeren bir gazın Kelvin-Helmholtz kararsızlığını analiz etmiştir.

Michael ve Miller [25], Saffman'ın [1] formülasyonunu kullanarak katı zerreler içeren bir gazın hareketi ile ilgili çözümler vermişlerdir. Düzgün bir toz dağılımı içeren gaz, katı bir düzlem sınırının üzerindeki yarı sonsuz alanı kaplamaktadır. Problem iki farklı hareket için incelemişlerdir. İlki düzlemin kendisine paralel basit harmonik hareket yaptığı durum, ikincisi düzlemin tekdüze bir hızda durmadan itici olarak hareket ettiği durumdur. İlk durumda faz hızındaki değişim ve salınımlı dalgaların bozulması, tozun kütle konsantrasyonunun fonksiyonları olarak not edilir. İkinci durumda tozun kütle konsantrasyonu 0.2 seçerek Laplace dönüşümü ile çözüm elde etmişler, bazı hız dağılımları hesaplayarak kayma tabakası kalınlığının tozun kütle konsantrasyonun bir faktörü ile azaldığını göstermişlerdir.

Michael [26] bir diğer çalışmasında bir küre etrafında akan toz zerreleri içeren gazın hareketini incelemiştir. Bu çalışmada küçük toz parçacıklarının gaza göre hareketi Stokes akışı kabulüne uygun alınarak, Reynolds sayısının büyük değerlerinde bir küre için ayrılmamış potansiyel akış problemi için çözüm elde edilmiştir. Kürenin yakınındaki toz konsantrasyonu için bir denklem türetilerek, sayısal olarak çözülmüştür. Benzer bir problem Michael ve Norey [27] tarafından katı zerreler içeren vizkoz bir sıvı için incelenmiştir makalenin son bölümünde, bir zerrenin küreyle çarpışacağı Stokes sayısının kritik değerini bulma ile ilgili bir değerlendirme yapılmıştır.

Michael ve Norey [28] iki eş eksenli dönen silindir arasında bulunan tozlu gazın laminer akışını da incelemiştir. Zerrelerin gevşeme süresinin küçük olduğu kabul edilmiş, gaz hızının ve zerre bulutunun kütle konsantrasyonunun değiştiği zaman ölçeklerinin hem büyük hem de küçük olduğu durumlar için çözümler elde edilmiştir. Ayrıca zerrelerin yer değiştirmesinin iki silindirin daimi hareketini korumak için gereken torku nasıl etkilediğini göstermişlerdir.

Miller [29], modelinin farklı tipteki parçacıkları ayırabilen bir santrifüj tasarlamak için kullanılıp kullanılamayacağını saptamak amacıyla yaptığı çalışmasında, katı zerreler içeren viskoz bir akışkanın başlangıçta hareketsiz olup devamında salınımlı dönme hareketi yapan dikey dairesel silindir etrafındaki hareketini incelemiştir. Yer çekimi etkileri probleme dahil edilmiş ve parçacıkların sayı olarak yoğunluğunun sabit olmadığı durum için parçacıkların yönlerini ve sayı yoğunluğunu bulma yöntemlerini göstermiştir.

Liu [30] katı zerreler içeren bir gazın paralel akışının kararlılığını konu aldığı çalışmasında enerji dengesini inceleyerek zerre bulutunun varlığının alt katmanda bozulma, girdap, difüzyon sürecindeki etkilerini araştırmıştır. Sonraki çalışmasında yazar [31] katı zerreler içeren bir gazın kendi düzleminde salınım yapan sonsuz düz bir plaka tarafından indüklenen akışını incelemiş, gaz ve zerrelerin hız profillerini, plaka üzerindeki kayma gerilmelerini vererek problemin parametrelerinin etkilerini tartışmıştır. Yine Liu [32] sıkıştırılamaz tozlu bir gazın aniden kendi düzlemine paralel olarak hareket eden sonsuz bir düz plaka tarafından indüklenen akışını inceleyerek, akışkan-zerre etkileşimi nedeniyle sınır tabaka büyümesi ve yüzey sürtünmesindeki değişimler hakkında bilgi vermiştir.

Baral [33] yarı sonsuz bir alanı kaplayan iletken tozlu gazın enine manyetik alanın etkisi altında düzlemsel paralel akışını, gazın iletken olduğunu ancak tozun iletken olmayan nötr zerrelerden oluştuğunu varsayarak, Laplace dönüşümleri kullanarak analiz etmiş, zerre bulutu ve gaz için hız profillerini veren integral ifadeleri elde etmiştir.

Otterman ve Lee [34], karıştırma bölgesinin kararlı büyümesini, fazlar arasındaki kaymayı ve karıştırma bölgesindeki zerre konsantrasyonunu hesaplamak amacıyla bir süspansiyon akımının temiz bir sıvı akımıyla laminer karıştırılmasının analizini yapmışlardır. İki boyutlu sınır tabaka denklemlerini, viskoz disipasyonun, zerre hacminin, Brownian hareketinin ihmal edilebilir olduğu ve sıvı fazının sıkıştırılamadığı, zerrelerin eşit ve değişmeyen boyutlarda olduğu durum için özelleştirmiş ve hem sürüklenme hem de kayma-kesme kuvvetlerinin etkilerini araştırmışlardır. İki fazlı sınır tabakası akışlarında katı zerre fazının yoğunluğunun sıvıyla aynı mertebede olması şartıyla, standart sınır tabakası yaklaşımlarının sıvı fazı için geçerli olduğunu ayrıca zerre fazı için momentum denklemlerinde sınır tabakası yaklaşımı yapılmasının gerekli olmadığı ve enine doğrultuda zerreler için momentum denkleminin ihmal edilemeyeceğini belirtmişlerdir. Zerrelerin sınır tabakası içinde düzgün olmayan hız alanı nedeniyle enine bir kuvvette maruz kalması sebebiyle zerre ve akışkan arasındaki etkileşim terimini genişletmişlerdir.

Sabit bir hızda dönen sonsuz büyüklükte bir disk tarafından indüklenen akışkan-zerre süspansiyonu akışı problemi Zung [35] tarafından uygun benzerlik dönüşümleri kullanılarak çözülmüştür. Ortaya çıkan adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü ile hem akışkan hem de katı fazlar için hız dağılımları ve katı faz için yoğunluk dağılımları elde edilmiştir. Zerre bulutunun ve akışkanın sınır tabakası kalınlıkları yaklaşık olarak eşit bulunmuştur.

Bir başka çalışmasında Marble [3] katı zerre veya damlacık bulutunun hacim fraksiyonunun, tek tek zerreler arasındaki etkileşimin ihmal edilebileceği veya oldukça basitleştirebileceği kadar, küçük olduğu heterojen bir ortam için derleme yazmıştır. Temel denklemleri ve değişim süreçlerini katı zerreler içeren gaz kavramının sınırlamalarını gösteren parametrelerle birlikte tanıtmıştır. Normal şok dalgalarının yapısını analiz etmiş, zayıf dalgalar ve akustik sönümleme problemi içim çözüm sunmuştur. Zerrelerin küçük kayma hızına sahip oldukları yani karışımın değiştirilmiş yoğunluk ve termodinamik özelliklere sahip bir gaz gibi davrandığı durumu incelemiştir ve son olarak faz değişiminin etkisini incelemek amacıyla kütlenin buhar fazı ve damlacık fazı arasında değiş tokuş edildiği bir problemi ele almıştır.

Katı zerreler içeren bir gazın sınır tabakası akışını inceleyen bir çalışma Chakrabarti [4] tarafından yapılmıştır. Katı zerrelerin varlığında bir gazın potansiyel akışının sınır tabakası üzerindeki etkisinin tartışıldığı çalışmada, birinci ve ikinci derece yaklaşımlar için hızların integral ifadeleri elde edilmiş ayrıca yerel yüzey sürtünmesi ifadesi elde edilerek temiz bir gaz için olanla ifade ile karşılaştırılmıştır. Zerrelerin etkisinin yerel yüzey sürtünmesini azalttığı görülmektedir. Bu azalma zaman arttıkça düşme eğilimindedir. Bununla birlikte bu analizin sadece bir sınır katmanı gelişiminin ilk aşamasında geçerli olduğunu belirtmiştir.

Dube ve Sharma [36] katı zerreler içeren viskoz bir akışkanın düzlemlerine dik bir eksen etrafında sabit açısal hızla dönen iki paralel sonsuz duvar arasında daimi olmayan akışını analiz etmişlerdir. Akışkan ve zerrelerin hızları için analitik ifadeler elde etmişler, boyutsuz bir bozunma faktörü parametresi ile Ekman sayısının hız dağılımları üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

Gupta ve Gupta [37] üzerinde bulunduğu sonsuz plakanın titreşimi ile hareket eden küresel zerreler içeren sıkıştırılamaz, viskoz, iletken bir sıvının Stokes akışı problemini enine manyetik alanın varlığında incelemişler, sıvının ve zerrelerin hızlarını ve duvar kayma gerilimini hesaplamak için integral ifadeleri Laplace dönüşüm kullanarak elde etmişlerdir. Katı zerreler içeren iletken viskoz sıkıştırılamaz bir sıvının uniform bir manyetik alan ve zamana bağlı bir basınç gradyanının etkisi altında dikdörtgen kanal boyunca daimi olmayan akışı Singh [38] tarafından incelenmiştir. Basınç gradyanının zamanın periyodik fonksiyonu, mutlak sabit ve zamanın üstel olarak azalan fonksiyonu olduğu özel durumlar ayrıntılı olarak tartışılmıştır.

Katı zerreler içeren bir akışkanın iki fazlı akışı modelini kullanarak Nag ve diğ. [39] Coutte akışını incelemişlerdir. Katı ve akışkan fazların hızlarını hesaplamak için Laplace dönüşümlerini kullanmışlar ve kayma gerilmelerini de hesaplamışlardır. Katı zerrelerin kütle konsantrasyonun arttırılmasının katı ve akışkan fazın hızlarını düşürdüğü, plakanın üniform bir ivmelenme ile harekete başladığı durumunda zerrelerin hızının, gevşeme süresinin orta değeri için akışkan hızından daha az olduğu ve zerreler çok ince olduğunda eşit hale geldiğini belirtmişlerdir. Kulshrestha ve Puri [40] katı zerreler içeren bir akışkanın titreşimli Couette akışında dalga yapısını incelemişler küçük zamanlar için hız dağılımının genel çözümlerini Laplace dönüşümleri kullanarak elde etmişlerdir. Zerrelerin varlığının temel dalga yapısını değiştirmediğini belirtmişlerdir. Vidya ve Harinath [41] biri sabit ve diğeri dürtüsel olarak kendisine paralel daimi hareket eden iki plaka arasındaki Couette akışında yerçekimi etkilerini araştırdıkları çalışmada, nadiren dağılmış katı zerreler mevcut ise zerrelere etkiyen yerçekiminin akışkanın hızı üzerinde de etkisi olduğunu ve bu etkinin plakanın ilk hızı çok düşük olduğunda oldukça belirgin olduğunu ifade etmişlerdir. Attia'nın [42] katı zerreler içeren değişken viskoziteli ve elektrik iletkenliğine sahip bir akışkanın iki paralel plaka arasındaki daimi olmayan Couette akışını ve ısı transferini incelediği çalışmada ise, akışkan sabit bir basınç gradyanı ile tahrik edilmekte ve plakalara dik manyetik alan uygulanmaktadır. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler sonlu farklar kullanılarak sayısal olarak çözülmektedir. Akışkanın viskozitesindeki ve elektrik iletkenliğindeki varyasyonların ve manyetik alanın hem akışkanın hem de katı zerrelerin hız ve sıcaklık alanları üzerindeki etkisi tartışılmaktadır. Attia [43], [44] aynı problem için akışkanın üstel bir bozunma basıncı gradyanı ile harekete geçirildiği durumu ve plakaların gözenekli olduğu durumu da incelemiştir. Katı zerreler içeren bir akışkanın iki yatay paralel gözenekli düz plaka arasındaki Couette akışı, sabit plakada akışkanın enine sinüzoidal enjeksiyonu ve bunun hareket halindeki plakadan sürekli emilerek uzaklaştırılması durumu Govindarajan ve diğ. [45] tarafından incelemiştir, katı zerreler ile ilgili parametrelerin üç boyutlu Couette akışı üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Couette akışı ile ilgili bir başka çalışma Sivaraj ve Kumar [46] tarafından yapılmıştır. Yazarlar düzensiz gözenekli bir kanalda zerreler içeren bir viskoelastik akışkanın (Walter's B akışkanı) daimi olmayan MHD Couette akışında, konvektif sınır ve değişen kütle difüzyonu şartları altında ısı emilimi, radyasyon, Joule ısıtması, viskoz yayılım, kimyasal reaksiyon ve termal difüzyonun etkilerini incelemek için matematiksel bir model oluşturmuşlardır. Pertürbasyon yöntemini, doğrusal olmayan birleştirilmiş denklemleri analiz etmek için kullanmışlar ve hız, sıcaklık ve

konsantrasyon dağılımları için çözümleri analitik olarak elde etmişlerdir. Problemin önemli parametrelerinin etkisini yorumlamak için grafiksel sonuçları sunarak ve fiziksel yönlerini ayrıntılı olarak tartışmışlardır. Vishalakshi ve diğ. [47] zerreler içeren akışkanın gözenekli bir ortamda üç boyutlu Couette akışı ve ısı transferi problemini incelemişlerdir. Problemi yöneten denklemleri, pertürbasyon tekniği kullanarak çözmüşler ve hız alanı, sıcaklık alanı ifadeleri ile yüzey sürtünmesini ve Nusselt sayısını elde etmişlerdir. Gayathri ve diğ. [48] tarafından son yıllarda yapılan bir çalışma katı zerreler içeren bir akışkanın indüklenen manyetik alanın varlığında iki sonsuz paralel gözenekli plaka arasında üç boyutlu Couette akışının matematiksel modellenmesi ile ilgilidir. Hem akışkan hem de katı fazının hız ve sıcaklık alanları için kapalı formda çözüm ifadeleri problemi yöneten kısmi denklemlerin pertürbasyon yöntemini kullanarak çözülmesi ile elde edilmiştir. Çalışmada kütle konsantrasyonu parametresinin akışkan ve zerre fazlarının hızları üzerindeki etkisinin benzer olduğu, gevşeme zamanı parametresinin yüzey sürtünme bileşenleri ve Nusselt sayısı üzerindeki etkisinin aynı olduğu ayrıca manyetik parametrenin akışkan ve parçacık fazları üzerindeki etkisinin benzer olduğu belirtilmiştir.

Kaskat nozulunda değişen basınç alanlarında akan gaz-zerre karışımının sınır tabakasının analiz edildiği çalışmada, Tabakoff ve Hameed [49] tek fazlı akış için bilinen momentun integral yöntemini parçacık akışına genişletmişler ve zerreler ile ilgili parametrelerin değiştirilmesinin sınır tabakası kalınlığı ve duvardaki kayma gerilmesi üzerindeki etkisini incelemişleridir. Bu örnek için sonuçlar, zerrelerin akışa dahil edilmesinin gaz sınır tabakası kalınlığında bir artışa yol açtığını göstermektedir. Ek olarak, gaz sınır tabakası özelliklerinin, zerre konsantrasyonuna diğer herhangi bir zerre akış parametresinden daha duyarlı olduğu bulunmuştur. Bununla birlikte, zerre sınır tabakası karakteristikleri ortalama zerre çapına, zerre konsantrasyonundan daha duyarlıdır. Katı zerreler içeren bir akışkanın yarı sonsuz bir plaka üzerindeki laminer iki fazlı sınır tabakası akışı problemi Datta ve Mishra [5] tarafından tekrar ele alınarak, yüksek kayma hızı bölgesi ve küçük kayma hızı bölgesi için çözümler elde edilmiştir. Daha önce Otterman ve Lee [34] tarafından da kullanılan Stokes sürüklemesi ve enine kuvveti içeren terimi parçacık ve sıvı fazları arasındaki etkileşimi temsil etmek için tercih etmişlerdir. Önceki çalışmalar ile karşılaştırma yaparak enine kuvvet parametresinin etkisinin, zerre sınır tabakası kalınlığını arttırmak olduğu sonucuna varmışlardır. Bu çalışmayı genişleten Xie ve diğ. [50] büyüyen düz plaka sınır tabakasında zerre yüklü bir akışın hidrodinamik kararlılığı üzerinde çalışmışlardır. Agranat [51] basınç gradyanının zerreler içeren bir akışkanın sınır tabakasındaki

sürtünme ve ısı transferi üzerindeki etkisini tartışmıştır. Asmolov ve Manuilovich [52] katı zerreler içeren bir gazın yarı sonsuz düz bir plaka üzerindeki sıkıştırılamaz sınır tabakası akışının doğrusal kararlılığı problemini ele almışlardır. Saffman'ın [1] yaptığı şekilde problemi değiştirilmiş Orr-Sommerfeld denkleminin çözümüne indirgenmişlerdir. Doğrudan ortonormalizasyon yöntemini ve küçük zerre kütlesi söz konusunda olduğunda pertürbasyon yöntemini kullanarak kararlılık karakteristiklerini hem tek hem de çoklu dağılmış zerreler için hesaplamışlardır. Önceki çalışmalar ile benzer sonuçlar elde ederek katı zerrelerin, çok çeşitli parçacık boyutlarında, kararsızlık dalgalarını bastırdığını belirtmişlerdir. Son yıllarda Gireesha ve diğ. [53] homojen olmayan bir ısı kaynağı / kuyusu olan bir germe tabakası üzerinde katı zerreler içeren bir akışkanın sınır tabaka akışı ve ısı transferini incelemişlerdir. Hareket ve enerji denklemlerini benzerlik dönüşümleri yardımıyla adi diferansiyel denklem sistemine indirgeyerek ve Runge Kutta Fehlberg dördüncü beşinci mertebe yöntemi (RKF45 Metodu) ile sayısal olarak çözmüşlerdir. Akışkan zerre etkileşim parametresi, Eckert sayısı, Prandtl sayısı, sayı yoğunluğu ve homojen olmayan ısı üretimi / emilimi parametresinin sıcaklık dağılımı üzerindeki etkilerini ve ayrıca duvar sıcaklığı gradyan fonksiyonu ve duvar sıcaklığı fonksiyonunun etkisini tartışmışlardır. Gireesha ve diğ. [54] sıkıştırılamayan küresel katı zerreler içeren bir akışkanın dikey yüzey üzerinde sınır tabaka akışı ve ısı transferini araştırmışlardır. Çözüm için önceki çalışmadaki yöntemi uygulamışlardır. Elde edilen sonuçların analizi, akışkan-zerre etkileşim parametresinin, Grashof sayısının, Prandtl sayısının ve Eckert sayısının akış ve ısı transferi üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğunu göstermiştir. Akışkan-zerre etkileşim parametresinin arttırılmasının hız profillerini birbirine yaklaştırdığı, ısı transferi oranını azalttığı görülmüştür. Gireesha ve diğ. [55] tarafından yayınlanan bir başka çalışma manyetik alanın, katı zerreler içeren bir akışkanın üstel sıcaklık dağılımı ile üstel olarak uzayan bir yüzey üzerinde iki boyutlu sınır tabakası akışında ısı transferi üzerindeki etkisini incelemiştir. Problemi yöneten sınır tabaka denklemleri uygun benzerlik dönüşümleri kullanılarak basitleştirilmiştir ve RKF45 metodu kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Hem akışkan hem de zerre fazında manyetik parametre arttıkça hız dağılımının azaldığı, sıcaklık dağılımını arttığı görülmüştür. Manjunatha ve diğ. [56] gözeneksiz bir germe yüzeyi üzerinde katı zerreler içeren viskoz bir akışkanın iki boyutlu sınır tabaka akışı ve ısı transfer analizini incelememişlerdir. Momentum sınır tabakası denklemi enine manyetik alanın etkisini, termal sınır tabakası denklemi ise termal radyasyonun etkisini dikkate alacak şekilde yazılmıştır. Işıma ısı akısı Rosseland yaklaşımı ile modellenmiştir. Ayrıca hem değişken duvar sıcaklığı hem de

değişken ısı akısı koşulları dikkate alınmıştır. Geçerli kısmi diferansiyel denklemler, benzerlik dönüşümü kullanılarak doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlere indirgenerek sayısal çözümleri RKF-45 yöntemi ile elde edilmiştir. Bu çalışmada bildirilen bazı önemli bulgular, ışınımın sınır tabaka bölgesindeki ısı aktarım hızını kontrol etmede önemli bir etkisi olduğunu ortaya koymaktadır. Ghadikolaei ve diğ. [57] bir germe tabakası üzerinde katı zerreler içeren mikropolar bir sıvı içinde süspansiyon haline getirilmiş Cu-Al_2O_3 / H_2O hibrid nanoparçacıkların iki boyutlu MHD sınır tabakası akışını ve ısı transferini termal radyasyon etkilerini dikkate alarak Runge-Kutta Fehlberg beşinci dereceden sayısal yöntem kullanılarak analiz etmişlerdir. Ghadikolaei ve diğ. [58] tarafından yayınlanan bir diğer makale, termal radyasyon varlığında bir germe tabakasından geçen mikropolar parçacıklı sıvı içinde süspansiyon haline getirilmiş $CNTs$ / H_2O nanopartiküllerinin iki boyutlu MHD akışı ve ısı transferi analizini içermektedir. İki makalede elde edilen sonuçlar birbiri ile uyumludur ve özet olarak olarak nanofluid fazının hız fonksiyonunun değeri zerre fazınınkinden daha büyüktür, nanopartiküller sıcaklığı katı zerrelerden daha fazla arttırmaktadır ve yüzey sürtünme katsayısının, akışkan-zerre etkileşim parametresinin varlığında manyetik parametre ve geçirgenlik parametresi ile doğrudan ilişkisi vardır. Katı zerreler içeren bir akışkanın düz bir germe yüzeyi üzerindeki laminer sınır tabaka akışında indüklenen manyetik alan etkilerini araştıran bir makale Silu ve diğ. [59] tarafından yayınlanmıştır. Çalışmada sınır tabakasının sabit denklemlerine manyetik indüksiyon denklemi eklenmiştir. Problemi yöneten kısmi diferansiyel denklemler, uygun benzerlik dönüşümleri yardımıyla adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülerek Matlab işlevi bvp4c aracılığıyla sayısal olarak çözülmüştür. Sonuç olarak indüklenmiş manyetik alanın yüzey sürtünmesi ve kayma gerilmesi üzerinde etkisi olduğu, gerilme yüzeyi üzerindeki toz parçacıklarının yapışkanlığının azalmasına yol açtığını belirtilmiştir.

Durma noktası civarındaki akışlar, akışkanlar dinamiğinin temel konularından biridir ve mühendislik uygulamalarındaki yaygın kullanım alanı sebebiyle viskoz akış teorisinin ilk zamanlarından beri bu konuda teorik çalışmalar yapılmaktadır. Newtonian bir akışkan için iki boyutlu durma noktası akışı problemini ilk inceleyen Hiemenz [60] olmuştur. Homann [61] ise bu problemin eksenel simetrik durumdaki çözümünü ortaya koymuştur. Bu iki klasik durma noktası akışı problemi, akışkanın düz bir yüzeye çarptığı ve yüzey boyunca çift yönlü veya radyal olarak tek bir durma noktasından yayıldığı durumları tarif etmektedir. Hem iki boyutlu hem de eksenel simetrik akışları üç boyutlu duruma genişleterek inceleyen Howarth [62] ve

Davey [63] olmuştur. Eksenel simetrik durum için sıcaklık dağılımı ise Sibulkin [64] tarafından verilmiştir. Stuart [65], Rott [66] ve Glauert [67], gibi yazarlar, kendi düzleminde titreşim hareketi yapan bir plaka üzerinde iki boyutlu durma noktası akışını analiz etmişlerdir. Manyetik alan tesirindeki elektrik ileten bir viskoz akışkanın durma noktası akışı probleminin araştırılması Neuringer ve Mcllroy [68] tarafından başlatılmıştır. Sonraki çalışmalarında [69], aynı problemin ısı transferi yönünü dikkate almışlardır. Hareketli bir plaka üzerinde Newtonian bir akışkanın eksenel simetrik durma noktası akışı için hız ve sıcaklık dağılımları Wang [70] tarafından verilmiştir. Newtonian bir akışkanın dikey plaka üzerindeki durma noktası akışında taşınım problemini ise ilk kez Sparrow ve diğ. [71] incelemiştir. Wang [72], [73] Newtonian bir akışkanın ısıtılan dikey bir plaka üzerinde eksenel simetrik durma noktası akışını kaldırma kuvvetlerini göz önünde bulundurarak ele almıştır. Problemi yöneten denklemleri benzerlik dönüşümleri yardımıyla adi diferansiyel denklem sistemine indirgeyerek sayısal yöntemlerle çözüm elde etmiştir. İki boyutlu durma noktası akışındaki karışık taşınım problemi için Ramachandran ve diğ. [74] tarafından keyfi bir duvar sıcaklığı ve keyfi yüzey ısı akısı koşulları altında benzerlik çözümleri elde edilmiştir. Lin ve Chen [75] ise izotermal bir dikey plaka üzerinde karışık taşınım koşulunda sınır tabaka denklemlerini sayısal olarak çözmüşlerdir. Dikey plaka ile ilgili bir başka çalışmada Chamkha [76] gözenekli ortamdaki yarı sonsuz, geçirgen bir plaka üzerinde, manyetik alan tesirindeki Newtonian bir akışkanın sınır tabaka akışını ısı üretimini ve manyetik disipasyon etkilerini hesaba katarak incelemiştir. Problemi yöneten denklemleri benzerlik dönüşümleri yardımıyla adi diferansiyel denklem sistemine indirgemiş ve sonlu farklar metoduyla çözüm elde etmiştir. Chamkha [77] aynı yıl içinde yayınladığı bir diğer çalışmasında bir durma noktası civarında, elektriksel olarak iletken ve ısı üreten / emen akışkanın zorlanmış konveksiyon akışı problemini tek tip bir manyetik alanın mevcudiyetinde sayısal olarak çözmüştür.

Ariel [78], daha önce Na [79] tarafından çözülen manyetik alan tesirindeki Newtonian bir akışkan için iki boyutlu durma noktası akışı probleminde Na tarafından verilen prosedüre küçük bir değişiklik önererek sonlu farklar metodu ile çözüm elde etmiştir. Attia [80] geçirgen bir gerdirme yüzeyine çarpan viskoz bir sıkıştırılamayan akışkanın eksenel simetrik üç boyutlu hidromanyetik durma noktası akışı problemini, ısı üretimi/emilimi ve muntazam manyetik alan mevcudiyetinde incelemiştir. Asimptotik sınır koşullarını dikkate alan sonlu fark yaklaşımları kullanarak problemi yöneten momentum ve enerji denklemleri için sayısal bir çözüm elde etmiştir.

Wang [81] tarafından yayınlanan çalışmada, durma noktası akışları için günümüze kadar yapılan benzerlik dönüşümü çözümleri kısaca gözden geçirilerek, durma noktası akışlarının kayma şartı altındaki çözümleri ele alınmıştır. Son yıllardaki bir çalışmada Wang ve Ng [82] kayma şartı altında durma noktası akışı ile ilgili iki problemi incelemişlerdir. Birinci problemde, muntazam bir şekilde ısıtılan düşey düz bir yüzeye çarpan akışkanın eksenel simetrik akışının ve ikinci problemde, eğimli yüzeye çarpan akışkanın iki boyutlu akışının incelendiği çalışmada, benzerlik dönüşümleri yardımıyla adi diferansiyel denklem sistemine indirgenen hareket denklemleri sayısal yöntemlerle çözülmüştür. Kayma şartı uygulanmasının hem ısı transferi hem de hız alanı üzerinde önemli etkisi olduğu ortaya koyulmuştur.

Ishak ve diğ. [83] değişken yüzey sıcaklığına sahip bir gerdirme plakası üzerinde, manyetik alan tesirindeki Newtonian bir akışkanın iki boyutlu durma noktası akışını araştırdıkları çalışmada benzerlik dönüşümleri yardımıyla çözüm etmiş ve serbest akım hızının germe hızını aştığı durumda yüzeydeki ısı transfer hızının manyetik parametre ile arttığını bulmuşlardır.

Bhattacharyya ve Gupta [84] düzgün bir manyetik alanın nüfuz ettiği genel üç boyutlu durma noktası civarındaki akışta, sıkıştırılamaz viskoz ve elektriksel olarak iletken bir akışkanın hareketini ve ısı transferini incelemişlerdir. Çalışmada viskoz disipasyon ve Joule disipasyonu etkileri hesaba katılmıştır. Borelli ve diğ. [85] problemi tekrar ele alarak manyetik alanın bağlantı veya ayrılma noktası üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Düz bir plaka üzerinde eksenel simetrik olmayan üç boyutlu durma noktası akışı ve ısı transferi için Navier-Stokes denklemleri ve enerji denkleminin en genel çözümü Abbasi ve Rahimi [86] tarafından sunulmuştur.

Son yıllarda Pal [87] sıkıştırılamaz bir viskoz akışkanın kaldırma kuvveti ve ısıl ışınım varlığında, gerilen dikey bir plaka üzerindeki iki boyutlu durma noktası akışında ısı ve kütle transferini analiz etmiştir. Işınım ile ısı transferini modellemek için Rosseland yaklaşımını tercih etmiştir. Tablo sonuçları ışınımın etkisinin yüzey sürtünme katsayısını, yerel Nusselt sayısını ve Sherwood sayısını arttırmak olduğunu göstermektedir.

Elektrik iletken sıkıştırılamaz viskoz bir akışkanın hareketli bir düşey plaka üzerinde iki boyutlu durma noktası akışı ve hareketli bir düşey plaka üzerinde eksenel simetrik durma noktası akışı Demir ve Barış [88] tarafından incelenmiştir. Daha önce Wang ve Ng [82] tarafından incelenen problemlere sabit bir manyetik alan ve ısı üretimi etkilerini dahil eden çalışmada yeni uygun

benzerlik dönüşümleri önerilmiş ve problemi yöneten kısmi diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklem sistemine indirgenerek sayısal olarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar Wang ve Ng [82] nin sonuçları ile karşılaştırılarak uyumlu olduğu belirtilmiştir. Demir ve Barış [89] başka bir çalışmada, sabit bir hıza sahip yarı sonsuz bir yatay plakaya doğru eksenel simetrik durma noktası akışı probleminde, viskoz disipasyon ve ısı üretimi etkilerininin yanısıra entropi üretimini de araştırmışlardır. Sıcaklık için önerilen yeni benzerlik dönüşümü bu etkileri karşılayacak formdadır. İlgili parametrelerin hız bileşenleri, sıcaklık, yüzey sürtünmesi, ısı transferi ve entropi üretim hızı üzerindeki etkileri grafik ve tablo şeklinde sunulmuştur. Viskoz disipasyonun ve ısı üretiminin sonuçlar üzerinde güçlü bir etkiye sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Katı zerreler içeren bir akışkanın iki boyutlu durma noktası akışı ise ilk olarak, daha önce Glaurt [67] tarafından Newtonian akışkan için çözülen, kendi düzleminde titreşim hareketi yapan yarı sonsuz bir plaka üzerinde akış problemini genişleterek iki fazlı akış kabulü yapan Datta ve Mishra [90] tarafından incelenmiştir. Yazarlar gaz-partikül bağlı sistem için korunum denklemlerini adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürecek benzerlik dönüşümleri önermişlerdir. Sonuçları tartışmak için katı zerrelerin konsantrasyonu temsil eden bir parametrenin ve katı zerrelerin çapına bağlı bir parametrenin çeşitli değerlerinde, sınır tabaka kalınlığı, hız profillerinin katsayılarının değerleri, yüzey sürtünmesinin genlikleri ve faz açıları ile plaka üzerindeki toz parçacıklarının hızı için sayısal hesaplamalar yaparak tablolar sunmuşlardır. Bu çalışmanın ardından De La Mora [91], Datta ve Mishra [90] nın çalışması hakkında benzerlik dönüşümlerinin önemine vurgu yaparak partikül ataleti, partikül kütle yükü ve plaka salınım frekansının eşzamanlı etkilerini çok genel bir biçimde incelemesine izin verdiğini belirtmiş ancak çalışmaya parçacık fazının sıkıştırılabilirliğine ve yüzeydeki sınır koşularına değinerek iyileştirmeler sunmuştur. Parçacık yoğunluğunun akış esnasında sabit kalmasının akışkanın yavaşlamadığı akış alanları (daimi poiseuille akışları gibi) için doğru olmakla birlikte durma noktası için yalnızca bazı özel limit durumlarında fiziksel gerçekliği olabileceğini göstermiştir. Parçacık fazı için kısmi diferansiyel denklemlerin birinci dereceden hiperbolik denklemler olduğuna ve yüzeydeki parçacık hızının yalnızca geçmiş bilgisine bağlı olacağına vurgu yapmıştır.

Ramesh ve diğ. [92] tarafından yapılan çalışma yatay genişleyen ve geçirgen bir plaka üzerinde katı zerreler içeren bir akışkanın iki boyutlu MHD durma noktası akışını içerir. Yazarlar biri

öngörülen yüzey sıcaklığı (PST) diğeri öngörülen duvar ısı akısı (PHF) olmak üzere iki farklı ısıtma işlemi dikkate almışlardır. Non-linear kısmi diferansiyel denklem sistemini, benzerlik dönüşümleri yardımıyla adi diferansiyel denklemlere dönüştürüp RKF45 (Runge Kutta Fehlberg fourth-fifth order metod) yöntemimi kullanarak sayısal olarak çözüm elde etmişlerdir. Olayı etkileyen parametrelerin akış alanı ve ısı transferi üzerindeki etkilerini tartışmışlardır. Serbest akım hızının plakanın germe hızına oranının birden büyük olduğu sınır tabakası durumunda akışkan partikül etkileşim parametresinin arttırılmasının akışkan fazın hızını azaltırken ve zerre fazın hızını arttırdığını, manyetik parametrenin ve emme parametresinin arttırılmasının ise her iki hızı da yükselttiğini belirtmişlerdir. Serbest akım hızının plakanın germe hızına oranının birden küçük olduğu sınır tabakası durumunda ise akışkan partikül etkileşim parametresinin hızlar üzerindeki etkisinin aynı olduğunu, manyetik parametrenin ve emme parametresinin arttırılmasının ise her iki hızı da düşürdüğünü belirtmişlerdir. Emmenin hız sınır tabakasının büyümesini stabilize ettiğini de göstermişlerdir. Sıcaklıklar ile ilgili analizlerde ise serbest akım hızının plakanın germe hızına oranının birden küçük olduğu durumda Pr sayısının arttırılmasının akışkan ve zerre fazın sıcaklıklarında düşüşe sebep olduğunu belirtmişlerdir. Eckert sayısının artan değerlerinin etkisinin bir noktadaki sıcaklığı hem akışkan fazı hem de zerre fazı için arttırdığını göstermişlerdir.

Ramesh ve diğ.[93] bir diğer çalışmalarında, [92] de çözüm sundukları problemi ışınım ile ısı transferi etkileri altında tekrar inceleyerek, ışınım ile ısı transferinin sıkıştırılamaz, viskoz, katı partiküller içeren, elektriksel olarak iletken bir akışkanın gerdirme tabakasına doğru iki boyutlu durma noktası akışı üzerindeki etkisini analiz etmişlerdir. Işınım için Rosseland yaklaşımını kullanarak ısı akısı terimini basitleştirmişlerdir. Isıl sonuçları, gerilme sınırının yüzey sıcaklığı ile ve ısı akısı ile verildiği durumlar için analiz etmişlerdir. Non-linear kısmi diferansiyel denklem sistemini benzerlik dönüşümleri yardımıyla adi diferansiyel denklemlere dönüştürerek RKF45 yöntemi ile sayısal olarak çözüm elde etmişlerdir. Işınım parametresinin farklı değerleri için sıcaklık profilleri grafik olarak vererek plaka sıcaklığının serbest akım sıcaklığından büyük olduğu durumda ışınım parametresindeki bir artışın hem temiz akışkan hem de zerre sıcaklığının artmasına neden olduğunu göstermişlerdir.

Prasannakumara ve diğ. [94] bir germe yüzeyi üzerindeki iki boyutlu durma noktası akışında, ısıl ışınım, ısı kaynağı / kuyusu ve manyetik alan varlığında, erimenin sıkıştırılamaz viskoz partiküllü sıvının akışı ve ısı transferi üzerindeki etkisini araştırmak için kapsamlı bir sayısal

çalışma yapmışlardır. Uygun dönüşümler kullanılarak, problemi yöneten doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri, bir grup birleştirilmiş doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlere dönüştürüp sayısal olarak çözmüşlerdir. Çeşitli parametrelerin akış ve ısı transferi üzerindeki etkisini, çizilen grafikler aracılığıyla ayrıntılı olarak analiz etmişlerdir. Yazarlar germe parametresinin değerini birden küçük ve serbest akım sıcaklığını plaka sıcaklığından büyük tutmuşlardır. Erime parametresindeki artışın hem akışkan hem de partikül fazın hızında yükselişe sebep olduğunu ayrıca sınır tabaka kalınlığını da arttırdığını göstermişlerdir. Erime parametresinin arttırılmasının sıcaklığı düşürürken ısıl sınır tabaka kalınlığının eritme işlemindeki artışla arttırdığını belirtmişlerdir.

Mohaghegh ve Rahimi [95] nin çalışmasında katı zerreler içeren bir sıvının bir gerdirme tabakasına doğru, daimi üç boyutlu durma noktası akışı ve ısı transferi, benzerlik çözümü yaklaşımı kullanılarak araştırılmıştır. Çalışmada; hız oranı, akışkan zerre etkileşim parametresi, serbest akım hız parametresinin gerdirme tabakası hız parametresine oranı, Prandtl sayısı ve Eckert sayısı gibi fiziksel parametrelerin akış alanına etkileri incelenmiştir. Ayrıca, eksenel simetrik durum için yüzeydeki ısı transfer katsayısının ve kayma gerilmesinin, eksenel simetrik olmayan durumdan daha büyük olduğu bulunmuştur. Akışkan parçacık etkileşim parametresinin farklı değerleri için sınır tabakadaki hız profilleri varyasyonları verilerek, hız değerlerinin, beklendiği gibi, akışkan faz için tüm noktalarda zerre fazından daha yüksek olduğu gösterilmiştir. Bununla beraber partikül fazın hızının bu parametrenin değişimlerine daha duyarlı olduğu da gösterilmiştir. Benzer durum ısıl etkileşim parametresinin değişimi ile elde edilen varyasyonlarında sıcaklık profilleri üzerinde de gerçekleştiği belirtilmiştir.

Katı zerreler içeren sıvının bir germe tabakası üzerinde konvektif sınır koşulu uygulanan hidromanyetik durma noktası akışını inceleyen bir çalışma Isa ve diğ. [96] tarafından ortaya koyulmuştur. Yazarlar tabakanın alt yüzeyinin sıcak sıvıdan taşınım yardımı ile ısıtıldığı durumu incelemişlerdir. Geçerli kısmi diferansiyel denklemler, benzerlik dönüşümü kullanılarak doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemler sistemine dönüştürüp RKF45 Metodu kullanarak sayısal olarak çözülmüştür. Parçacık fazın ve hidromanyetik sıvının hız ve sıcaklık profillerinin özelliklerini, konvektif Biot sayısı, sıvı-parçacık etkileşim parametresi, manyetik parametre, serbest akış hızı parametresinin oranı ve Prandtl sayısı gibi farklı ilgili parametreler için analiz etmişlerdir. Biot sayısındaki artışın hem akışkan hem de parçacık fazın sıcaklık profilinde yükselişe sebep olduğunu belirtmişlerdir.

Animasaun ve diğ. [97] tarafından yapılan çalışmada, katı partiküllerine gömülü nanofluidin indüklenmiş manyetik alan, muntazam olmayan ısı kaynağı / kuyusu ve emme mevcudiyetinde eğik izotermal olmayan bir germe tabakası üzerinde yüzdürme güdümlü MHD karışık konveksiyon iki boyutlu durma noktası akışı analiz edilmiştir. İletken toz parçacıkları ile gömülü Cu-H_2O ve Al_2O_3-H_2O olmak üzere iki tip nanofluid dikkate alınmıştır. Hareket denklemleri ve sıcaklık denklemleri benzerlik dönüşümleri yardımıyla adi diferansiyel denklem sistemine indirgemiş ve Runge-Kutta temelli shooting tekniği kullanılarak çözümler elde edilmiştir. Akışkan partikül etkileşim parametresindeki bir artışın indüklenen manyetik alan profillerini azalttığı gözlemlenmiş bunun sebebinin akışkanın hız sınır tabakasındaki düşüş olabileceği belirtilmiştir. Ayrıca akışkan partikül etkileşim parametresindeki artışın ısı aktarım hızını arttırdığı ve sürtünme faktörünün değerini düşürdüğü gösterilmiştir.

Muthtamilselvan [98] çalışmadaki amacı katı zerreler içeren bir Casson akışkanının bir gerdirme tabakası üzerindeki durma noktası akışını ısıl radyasyon ve yüzdürme etkileri ile incelemektir. Katı zerreler içeren Casson akışkanının daimi sıkıştırılamaz akışı, benzerlik dönüşümleri kullanılarak bir dizi adi diferansiyel denkleme dönüştürülen, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemi ile temsil edilmiştir. Daha sonra sınır tabaka denklemleri (RKF-45) yöntemi kullanılarak çözümlere ulaşılmıştır. Akışkan ve zerrelerin hız, sıcaklık ve konsantrasyon profillerinin, akışkan zerre etkileşim parametresi, Casson parametresi, Grashof sayısı, radyasyon parametresi, Prandtl sayısı, sayı yoğunluğu, termal denge süresi, gevşeme süresi, akışkan ve partiküllerin özgül ısısı, difüzyon katsayılarının oranı, Schmidt sayısı ve Eckert sayısı değişimlerine karşılık ortaya koydukları davranışlar grafiksel olarak analiz edilmiştir. Casson parametresindeki artışın, akışkanın viskozitesinde bir artışa sebep olması sebebiyle hem sıvı hem de partikül fazdaki hızın azalmasına sebep olduğu beklenen sonucunu yinelemişlerdir. Radyasyon parametresindeki artışın sıcaklıkları yükselttiği, farklı termal denge süresi değerlerinin, akışkan ve partikül fazın sıcaklıklarında ters etki yaptığı gösterilmiştir. Ayrıca sıcaklık dağılımının, sıvının özgül ısısındaki artışla artarken ve partiküllerin özgül ısısındaki artışla azaldığı belirtilmiştir. Daha büyük Schimdt sayısı, her iki fazdaki difüzyon hızının azalması nedeniyle konsantrasyon dağılımını azaltırken Eckert sayısı arttıkça, termal sınır tabakasının hem sıvı hem de toz fazında genişlediği gösterilmiştir.

Yukarıda değinilen zerreler içeren akışkanlar ile ilgili çalışmaların tamamı bir germe yüzeyi üzerinde durma noktası akışı problemini incelemiştir ve yalnızca Mohaghegh ve Rahimi'nin

[95] çalışması üç boyutlu akışı incelemektedir. Bildiğimiz kadarıyla küresel katı zerreler içeren Newtonian bir akışkanın hareketli plaka üzerinde daimi durma noktası akışı probleminde viskoz disipasyon, Joule ısınması ve zerrelerin yaptığı iş etkilerinin bir arada incelendiği bir çalışma bulunmamaktadır. Demir ve Barış'ın [89] Newtonian akışkan için yaptığı çalışmada sıcaklık için önerilen yeni benzerlik dönüşümleri, katı zerreler içeren Newton akışkan için enerji denkleminde bu üç terimin de bir arada incelenebileceği fikrini ortaya çıkarmıştır.

Sunulan tezin literatüre katkısı şu şekilde özetlenebilir: Küresel katı zerreler içeren Newtonian bir akışkanın sırasıyla silindirik ve prizmatik hüzme şeklinde hareketli yatay bir plakaya doğru daimi durma noktası akışı problemi sabit şiddetli manyetik alan mevcudiyetinde çözülmüş; Wang [70], Demir ve Barış [89] , Libby [99] tarafından katı zerreler içermeyen duruma karşılık gelen problemler için önerilen benzerlik dönüşümleri akışkan faz için uygulanırken, zerre fazı için bu problemle ilgili olarak ilk defa tarafımızdan önerilen akışkan ile uyumlu benzerlik dönüşümleri kullanılmıştır. Akışkan zerre etkileşim parametresinin değişen değerlerinin hız ve sıcaklık profilleri üzerinde etkisi ve bu etkinin manyetik alan parametresinin, Ec sayısının, Pr sayısının değişimi ile artışı/azalışı tartışılmıştır. Küresel katı zerreler içeren Newtonian bir akışkanın sırasıyla silindirik ve prizmatik hüzme şeklinde hareketli düşey bir plakaya doğru daimi durma noktası akışı problemleri sabit şiddetli manyetik alan, yerçekimi kuvveti ve ısı üretimi mevcudiyetinde çözülmüş; Demir ve Barış [100] tarafından katı zerreler içermeyen duruma karşılık gelen problemler için önerilen benzerlik dönüşümleri akışkan faz için uygulanırken zerre faz için yine ilk defa tarafımızdan önerilen akışkan ile uyumlu benzerlik dönüşümleri kullanılmıştır. Akışkan zerre etkileşim parametresinin değişen değerlerinin hız ve sıcaklık profilleri üzerinde etkisinin yanında; manyetik alan parametresinin, Pr sayısının, ısı üretim parametresinin, taşınım parametresinin akışkan ve zerre fazın hız ve sıcaklık profilleri üzerindeki etkileri tartışılmıştır. Sonuç olarak; bu tez çalışmasında, katı zerrelere sahip viskoz akışkan durumu için yapılmış olan formülasyonla, aynı problemleri katı zerreleri olmayan viskoz akışkan için inceleyen önceki çalışmaları alt problemler olarak içeren daha genel denklemlere ulaşılmıştır. Parametrik limit haller olarak adlandıracağımız bu alt problemler tartışma ve sonuç bölümünde listelenmiştir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

İlk olarak katı zereler taşıyan akışkanın hareketi ile ilgili genel kavramlar ele alınarak, akışkan ve katı zerreler için korunum yasaları verilmiştir. İkinci kısımda, katı zerreler içeren ve manyetik alan tesirindeki silindirik bir akışkan hüzmesinin, üçüncü kısımda prizmatik bir akışkan hüzmesinin yatay konumlandırılmış hareketli plakaya doğru akışı problemi, dördüncü kısımda katı zerreler içeren ve manyetik alan tesirindeki silindirik bir akışkan hüzmesinin, beşinci kısımda ise prizmatik bir akışkan hüzmesinin düşey konumlandırılmış hareketli plakaya doğru akışı problemi, hareketi ve ısı transferini tartışmak amacıyla formüle edilmiştir.

3.1. KATI ZERRELER İÇEREN AKIŞKANLAR

3.1.1. Giriş

Katı zerreler içeren veya taşıyan bir akışkanın hareketi, akışkan ile katı arasındaki etkileşime kritik olarak bağlıdır. Etkileşim kuvveti genel halde zerrelerin Reynols sayısına, Mach sayısına, Knudsen sayısına ayrıca yerel akış alanının ayrıntılarına, zerrelerin kendi aralarındaki etkileşime bağlıdır. Bu konu ile ilgili yapılan ilk çalışmalardan olan, Marble [2] tarafından 1962 yılında yayınlanan makalede yazar, akışkan-katı ve katı-katı arasındaki etkileşimi değerlendirip, teorinin kısıtları ve kabulleri hakkında ayrıntılı bir inceleme ortaya koymuştur. Aynı yıl içinde Saffman [1] makalesinde kabuller, kısıtlar ve yeni parametreler ile ilgili değerlendirmelerde bulunmuştur. Marble [3] tarafından yayınlanan bir diğer makalede aynı şekilde ayrıntılı ve aydınlatıcıdır. Bu kısımda yukarıdaki çalışmalar temel alınarak katı zerreler içeren akışkanlar ile ilgili parametreler, katı zerrelerin ve akışkanın hareketini yöneten fiziksel ilişkiler ve son olarak korunum yasaları verilmiştir.

Tez çalışmasında uygulamak için tercih ettiğimiz bu model oluşturulurken yapılan kabuller yukarıdaki çalışmalarda açıkça belirtilmektedir ve şu şekildedir:

- Zerreler eş boyutlu küreler olarak kabul edilirler ve birim hacimdeki her bir zerre aynı hız vektörü ile hareket etmektedir, ayrıca akış alanı içerisinde birbirleri ile çarpışmayacak kadar seyrektirler. Dolayısıyla zerrelerin kendi aralarında momentum transferi olmamaktadır. Farklı boyuttaki parçacıklar için yerel hız vektörü farklı olabileceğinden, bu parçacıklar arasında çarpışmalar meydana gelmesi olasıdır. Bu tür çarpışmaların sıklığı, çarpışan parçacıkların yerel

sayı yoğunluklarının çarpımına bağlıdır ve kendi aralarında etkileşmeyen parçacıklar varsayımı yapılmasına sebep bu faktördür.

- Zerreler arasında ışınımla ısı transferi gerçekleşmemektedir.

- Akışkan ve zerrelerin bağıl hareketinin Reynolds sayısı ve moleküler ortalama serbest yol, Stokes sürüklenme yasasının makul bir yaklaşım olacağı büyüklüktedir.

3.1.2. Katı Zerrelerin Hareketine Etki Eden Parametreler

Akışkan ve katı faz arasındaki etkileşim ile ilgili parametreleri tanımlamak ve fiziksel anlamlarını açıklamak için m kütlesinde ve $\boldsymbol{v_p}$ hızında tek bir küresel zerrenin, $\boldsymbol{u}$ hızındaki akışkan ile paralel hareket ettiği düşünülür. Eğer zerrenin hızını akışkanın hızına yaklaştıran kuvvet Stokes sürüklenme yasası [8] ile verilirse bu süreç

$$\tau_v = \frac{m}{6\pi r\mu} \tag{3.1}$$

karakteristik zamanı içerisinde gerçekleşir. Bu büyüklüğe (τ_v), Marble [2] zerre hız dengeleme süresi, Saffman [1] ise zerre gevşeme süresi demiştir. Literatürdeki çalışmalarda genel kullanımı zerre gevşeme süresi şeklindedir. Burada r tek bir zerrenin yarıçapı, μ akışkanın dinamik viskozitesidir. u_0 akış sisteminin karakteristik hızı olmak üzere momentum denge aralığı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\lambda_v = \tau_v\, u_0 \tag{3.2}$$

Fiziksel olarak λ_v ve τ_v bir zerrenin akışkan ile arasındaki bağıl hızı orijinal değerinin e^{-1} ine düşürmesi için kat etmesi gereken mesafeyi ve geçen zamanı ifade eder.

Bu hususlar, akışkan sıcaklığından farklı bir zerre sıcaklığı mevcut olduğunda, zerre sıcaklığı T_p için de ele alınabilir. Stokes sürüklenme yasası makul bir yaklaşım olduğunda Nusselt sayısı bir olarak alınabilir. Zerre için ısıl gevşeme süresi ve ısıl denge aralığı sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\tau_T = \frac{mc_s}{4\pi rk} \tag{3.3}$$

$$\lambda_T = \tau_T u_0 \tag{3.4}$$

Burada c_s katı zerrenin özgül ısısı ve k akışkanın ısıl iletkenlik katsayısıdır. τ_T bir zerre ve akışkan arasındaki sıcaklık farkının başlangıç değerinin e^{-1} ine düşürülmesi için gereken süreyi verir. Isıl denge aralığı λ_T nin fiziksel anlamı, dengeleme işlemine tabi tutulan zerrenin akışkan tarafından taşındığı mesafe olarak tanımlanmıştır.

Akış alanının karakteristik uzunluğu L ve karakteristik zaman τ ise, $\lambda_v \gg L$ ya da $\tau_v \gg \tau$ durumunda zerre hareketi akışkanın hareketinden kayda değer şekilde etkilenmeden önce, zerre akış bölgesine girer ve çıkar. Dolayısıyla zerrenin hareketi büyük ölçüde kendi başlangıç koşullarına bağlılık gösterir. $\lambda_v \ll L$ ya da $\tau_v \ll \tau$ durumunda zerrenin kayma hızı, akış alanının karakteristik hızına göre küçüktür. Zerre akış alanı içerisinde kayda değer bir mesafe kat etmeden hareketlerini akışın yerel özelliklerine uyumlu hale getirebilecek zamana sahip olur. Burada önemli olan nokta zerre hareketinin, akışın yerel şartlarına ve özellikle yerel ivmeye bağlı olduğu ve kendi geçmişinden nispeten bağımsız olduğudur. Saffman [1] bu koşuldaki değerlendirmesini yaparken belirli sayıdaki zerrelerin etkisinin, akışı aynı temel hız dağılımına sahip ancak daha küçük kinematik viskoziyete sahip temiz bir gazın akışına benzer hale getirmek olacağını belirtmiştir.

λ_v ve L ya da $\tau_v$ve τ arasındaki farkın çok çok büyük olmadığı ($\lambda_v \gg L$ ya da $\lambda_v \ll L$ olmayan) durumlarda, zerre akış koşullarındaki önemli değişikliklerin gerçekleştiği λ_v boyutunda bir bölge boyunca meydana gelen olayların belleğine sahiptir yani parçacığın yerel hareketi tüm geçmişinin etkisi altındadır.

Yukarıda momentum denge aralığı λ_v üzerinden yapılan tartışmanın benzeri ısıl denge aralığı λ_T için yapılabilir. $\lambda_T \gg L$ durumunda zerrenin akış alanına girdiğinde sahip olduğu sıcaklığı, hakim olan sıcaklıktır. $\lambda_T \ll L$ olduğu durumda ise zerrenin sıcaklığı yerel sıcaklık etkisi altındadır. Ayrıca $\lambda_T \ll L$ olması $\frac{T_s}{\Delta T} \ll 1$ olduğunu ima eder yani zerre fazı ve akışkan faz hemen hemen termal dengededir, burada T_s zerre ve akışkan arasındaki sıcaklık farkı ΔT ise akış alanının karakteristik sıcaklık farkıdır. $\lambda_v \approx \lambda_T$ olduğunda zerrelerin hem hız hem de sıcaklığı benzer analitik metotlar ile hesaplanabilir.

Zerrelerin hareketinin akışkan hareketi üzerinde etkisi, yukarıda belirtilen kriterlere ek olarak, belirli bir bölgedeki zerrelerin kütlesine doğrudan bağlıdır. Karışımın birim hacminde m

kütlesine sahip n sayıda zerre mevcut ise, karışımın birim hacmindeki katı yoğunluğu $nm = \rho_p$ dir. Akışkanın yoğunluğu ρ ise, zerre yoğunluk oranı

$$\frac{nm}{\rho} = \frac{\rho_p}{\rho} \equiv \kappa \tag{3.5}$$

olarak verilir. Bu oran akışkanın birim kütlesine etki eden toplam etkileşim kuvvetinin bir ölçüsüdür. Eğer $\kappa \ll 1$ ise akışkan hareketi zerrelerin varlığından çok az etkilenir, $\kappa \gg 1$ ise tersi geçerlidir. Diğer taraftan $\kappa \sim 1$ ise hem akışkanın hem de zerrelerin hareketi birbirinden etkilenir ve uniform bir yaklaşım yöntemi gerektirir.

3.1.3. Katı Zerrelerin ve Akışkanın Hareketleriyle İlgili Temel Denklemler

Zerrelerin birbirleri arasında etkileşimde bulunmadığı kabulü ile birlikte akış alanı içerisinde zerre yoğunluğunun yeterince düşük olduğu da kabul edilir. Katı zerre tarafından işgal edilmemiş alanın herhangi bir noktasında akışkanın durumu; yerel basınç, yoğunluk, sıcaklık ve üç hız bileşeni ile tanımlanırken herhangi bir katı zerrenin durumu; hız bileşenleri ve sıcaklığı ile tanımlanır. Küçük bir hacimde zerreler farklı yönlerde hareket edebilirler ve geçmişlerine bağlı olarak farklı sıcaklıklara sahip olabilirler. x_i hacmin konum vektörü, c_j , φ, r sırasıyla tek bir zerrenin kendine özgü hız vektörü, sıcaklığı ve zamandan bağımsız yarıçapı, t zaman olmak üzere, zerrelerin dağılımı yerel olarak $\varsigma(x_i, c_{j,}\varphi, r, t)$ fonksiyonu ile tanımlanabilir. Bu durumda x_i , $x_i + dx_i$ hacminde bulunan yarıçapı r, $r + dr$, hız vektörü c_j , $c_j + dc_j$ ve sıcaklığı φ, $\varphi + d\varphi$ olan zerrelerin sayısı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\varsigma(x_i, c_{j,}\varphi, r, t)d^3x_i d^3c_j d\varphi dr \tag{3.6}$$

Zerreler kendi aralarında etkileşimsiz olduğundan rastgeleleşme eğilimleri olmadığı gibi akışkan ile etkileşimleri sebebiyle muntazamlaşma eğilimindedirler. Dolayısıyla çok sayıda parçacıktan oluşan zerre bulutunu sürekli ortam olarak değerlendirmek uygundur. Zerre bulutun bir noktadaki yoğunluğu,

$$\rho_p(x_i, t) = \iiint m(r)\, \varsigma(x_i, c_j, \varphi, r, t)d^3c_j d\varphi dr \tag{3.7}$$

olarak tanımlanır. Burada $m(r)$ r yarıçapındaki bir zerrenin kütlesidir.

Aynı şekilde ortalama hız ve sıcaklık verilebilir.

$$v_{pi}(x_i,t) = \frac{1}{\rho_p}\iiint m(r)c_j\, \varsigma\, d^3c_j d\varphi dr \tag{3.8}$$

$$T_p(x_i,t) = \frac{1}{\rho_p}\iiint m(r)\varphi\, \varsigma\, d^3c_j d\varphi dr \tag{3.9}$$

Akışkan ve zerrelerin hareket denklemlerini formüle etmek için, etkileşim kuvvetleri ve enerji değişimi değerlendirilmelidir. Zerreler ve akışkan arasında küçük bağıl hızlar söz konusu olduğunda, bir zerreye etki eden kuvvet yalnızca zerrenin yarıçapına, akışkanın viskozitesine ve zerre ile akışkan arasındaki yerel hız farkına bağlıdır [8]. Bununla birlikte akışkan hızı ve yoğunluğu konum ve zamana bağlı değişkenlerdir, tek bir zerrenin hareketi ile akışkana uygulanan kuvvet $\mathcal{F}_k(x_i, c_j, r, t)$ ile gösterilebilir. Bu durumda akışkanın birim hacmine uygulanan kuvvet

$$F_{pk}(x_i,t) = \iiint \mathcal{F}_k(x_i, c_j, r, t)\ \varsigma\, d^3c_j d\varphi dr \tag{3.10}$$

olarak yazılır ve bu kuvvetin negatifi ise birim hacimdeki akışkanın zerrelere uyguladığı kuvvettir.

Zerreler genel olarak çevresindeki akışkanınkinden farklı bir sıcaklığa sahip olacak ve bu nedenle sıcaklık kusurları da olacaktır. Bu sıcaklık kusurları nedeniyle, iki faz arasında ısı transferi gerçekleşir. Akış esnasında bir zerrenin akışkana aktardığı ısı $q_p(x_i, c_j, \varphi, r, t)$ formunda ifade edilebilir bu durumda temel hacim içindeki zerreler tarafından akışkana toplam ısı aktarımı aşağıdaki şekilde yazılır.

$$Q_p(x_i,t) = \iiint q_p(x_i, c_j, \varphi, r, t)\, \varsigma\, d^3c_j d\varphi dr \tag{3.11}$$

Akış esnasında olağan durumdan farklı olarak, zerreler tarafından akışkan hacmi üzerinde iş yapılır. Tek bir zerre akışkana $\mathcal{F}_k(x_i, c_j, r, t)$ kuvvetini uygular ve $c_k - u_k$ bağıl hızı ile hareket eder, böylece akışkan üzerinde $(c_k - u_k)\,\mathcal{F}_k$ oranında iş yapar. Hacimdeki zerreler tarafından yapılan iş Φ_p kadardır.

$$\Phi_p = \iiint (c_k - u_k)\,\mathcal{F}_k(x_i, c_j, r, t)\, \varsigma\, d^3c_j d\varphi dr \tag{3.12}$$

Yukarıda sunulan etkileşimler göz önünde bulundurularak akışkan faz için korunum yasaları verilir.

Zerreler tarafından işgal edilen hacmin ihmal edilebilir olduğu kabul edildiğinden, akışkan için kütlenin korunumu denklemi normal formunda kalır.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = 0 \tag{3.13}$$

Akışkan faz için lineer momentum dengesi, akışkanın birim hacmine etki eden kuvvet (3.10) göz önünde bulundurularak aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho \boldsymbol{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_p \tag{3.14}$$

Akışkan faz için enerjinin korunumu, zerreler ve akışkan arasındaki ısı aktarımı (3.11) ve zerreler tarafından yapılan iş (3.12) hesaba katılarak aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho \mathfrak{h} + \boldsymbol{T} : \boldsymbol{e} + Q_p + \Phi_p + \Phi_J \tag{3.15}$$

Korunum denklemlerinde $\boldsymbol{f}$ birim kütle başına hacim kuvvetlerini ve $\boldsymbol{T}$ gerilme tansörünü göstermektedir. $\frac{D\epsilon}{Dt}$ iç enerjinin birim kütle başına değişim hızı, $\boldsymbol{q}$ ısı akısı vektörü, $\mathfrak{h}$ birim kütle başına iç ısı kaynağının verdiği enerji ve $\boldsymbol{e}$ deformasyon hızı tansörüdür. Φ_J manyetik alan tatbiki sebebiyle oluşan ısı yani Joule ısınmasıdır.

Zerrelerin kendi aralarında etkileşmediği durumdaki hareketleri, akışkan ile aralarında oluşan etkileşim kuvveti tarafından yönetilir. Bu durumda zerrelerin ayrı ayrı hareketini incelemek yerine zerre bulutunun hareketlerini bir sürekli ortam olarak formüle etmek çoğunlukla uygundur. Bu da etkileşimsiz zerreler için Boltzman denklemi ve dağılım fonksiyonu kullanılarak yapılır [2].

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_j f\right) + \frac{\partial}{\partial c_j}\left(\frac{\mathcal{F}_j f}{m}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{q_p}{m c_s} f\right) = 0 \tag{3.16}$$

Zerre bulutu için süreklilik benzeri denklemler Boltzmann denkleminin zerrelerin hızları, sıcaklıkları ve boyutları üzerinden alınan uygun momentleri ile elde edilir. Zerre bulutu için kütlenin korunumu denklemi, (3.16) nın zerre kütlesi $m(r)$ ile çarpılarak, bütün zerrelerin, hızları, sıcaklıkları ve boyutları üzerinde integre edilmesi ile bulunur ve akışkan için kütlenin korumun denklemi ile aynıdır. Benzer şekilde, lineer momentumun korunumu denklem (3.16) nın zerre momentumu $\left(mc_j\right)$ ile çarpılıp, uygun alan üzerinde integre edilmesiyle elde edilir.

Bir zerrenin sıcaklığı, öteleme kinetik enerjisiyle ilişkili olmadığından, denklem (3.16) zerrenin ısıl iç enerjisi $mc_s\varphi$ ile çarpılır ve integre edilerek zerre bulutu için enerjinin korunumu denklemi elde edilir. Zerre fazı için korunum denklemleri aşağıda verilmiştir [2].

$$\frac{D\rho_p}{Dt} + \rho_p\left(\nabla \cdot \boldsymbol{v_p}\right) = 0 \tag{3.17}$$

$$\rho_p \frac{D\boldsymbol{v_p}}{Dt} = -\boldsymbol{F}_p - \nabla \cdot \boldsymbol{S} \tag{3.18}$$

$$\rho_p c_s \frac{DT_p}{Dt} = -Q_p - \nabla \cdot \boldsymbol{q_p} \tag{3.19}$$

Zerre fazın lineer momentumun korunumu denklemi (3.18) de görülen $\boldsymbol{S}$, kayma gerilme tansörü olup ortalama zerre hızından farklı hızlardaki zerrelerin hareketi nedeniyle momentum taşınmasından kaynaklanır. Zerre fazın enerji denklemi (3.19) da görülen $\boldsymbol{q_p}$ kayma enerji akısı olup, aynı bölgede farklı kayma hızlarına ve farklı sıcaklık gecikmelerine sahip olan zerrelerden kaynaklanır. Kayma enerji akısı, sıcaklık gecikmelerinin ve hız kaymalarının her ikisi de zerrelerin boyutlarındaki farklardan kaynaklandığında özellikle önemli olmaktadır. Zerre bulutu için kinetik enerji yasası hareket denklemlerinden gelir. Aşağıdaki denklemde açıkça görülmektedir ki; zerrelerin kinetik enerjisindeki değişim, akışkanın zerreler üzerinde yaptığı işten ve zerrelerin kayma hareketleri ile bölgeye aktardıkları enerjiden kaynaklanmaktadır [2].

$$\rho_p \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}{v_{pi}}^2\right) + \rho_p v_{pj} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}{v_{pi}}^2\right) = -v_{pi}F_{pi} - v_{pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(S_{ij}\right) \tag{3.20}$$

3.1.4. Etkileşimsiz Katı Zerreler İçeren Sıkıştırılamayan Viskoz Akışkanın Hareketini Yöneten Temel Denklemler

Bu tez çalışmada incelenen bütün akışlar daimi ve laminer olup, karışımdaki akışkan elektriksel iletkenliğe sahip sıkıştırılamayan Newtonian bir akışkandır. Katı zerreler üniform boyutta rijit kürelerdir ve birim hacimde aynı sıcaklığa ve hız vektörüne sahiptirler. Katı zerrelerin karışım içindeki yoğunluğu birbirleri ile etkileşmeyecekleri kadar seyrek tercih edilmiştir. Katı maddenin malzeme yoğunluğu sabittir ancak zerre yoğunluk oranı, konuma bağlı olarak değişmektedir. Katı zerrelerin akışkan içinde kapladığı hacim etkisi ihmal edilebilecek kadar küçüktür. Bu sebeple akışkan fazın yoğunluğunun ve viskozitesinin değişmeden kalabileceği kabul edilir. Karışım içinde, kimyasal reaksiyon, faz değişimi ve zerreler arasında ışınım ile ısı

transferi olmamaktadır. Zerreler ve akışkan arasındaki tek ilişki sürüklenme ve ısı transferidir. Akışkana etkiyen elektromanyetik kuvvetler ve ağırlık kuvvetleri dışındaki hacim kuvvetleri ihmal edilebilecek mertebededir. İndüklenmiş manyetik alan ihmal edilmiştir.

Yukarıdaki kabuller doğrultusunda akışkan için kütlenin korunumu denklemi (3.13) ve zerre fazı için kütlenin korunumu denklemi (3.17) sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \tag{3.21}$$

$$\nabla \cdot \left(\rho_p \, \boldsymbol{v_p}\right) = 0 \tag{3.22}$$

Sıkıştırılamayan Newtonian akışkan için bünye denklemi aşağıdaki şekildedir.

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e} \tag{3.23}$$

Akışkan faz için lineer momentum dengesi, akışın daimi olduğu göz önünde bulundurularak, (3.23) ün denklem (3.14) de yerine yazılması ile elde edilir. Zerre fazı için lineer momentumun korunumu, daimi akış durumu ve parçacıkların hız vektörlerinin aynı olduğu akış alanı için denklem (3.18) in yeniden yazılması ile elde edilir. Yeni eşitlikler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}) = -\nabla \mathrm{p} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{f} + \boldsymbol{F_p} \tag{3.24}$$

$$\rho_p\left(\boldsymbol{v_p} \cdot \nabla \boldsymbol{v_p}\right) = -\boldsymbol{F_p} \tag{3.25}$$

Birim hacim başına dış kuvvetin sadece ağırlık kuvvetleri ve elektromanyetik kuvvetlerden oluştuğu durum için (3.24) denklemindeki $\rho \boldsymbol{f}$ terimi aşağıdaki şekilde yazılacaktır.

$$\rho \boldsymbol{f} = \rho \mathfrak{g} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \tag{3.26}$$

Yukarıdaki denklemin sağ tarafındaki ilk terim birim hacim başına ağırlık kuvvetlerini, ikinci terim ise birim hacim başına elektromanyetik kuvveti (Lorentz kuvveti) göstermektedir. $\mathfrak{g}$ yer çekimi ivmesi vektörü, $\boldsymbol{B}$ manyetik alan vektörü ve $\boldsymbol{J}$ akım yoğunluğu vektörüdür. İndüklenmiş manyetik alanın uygulanan manyetik alan yanında ihmal edilebilir olduğu ve elektrik alanın olmadığı durum için $\boldsymbol{J}$ vektörü aşağıdaki şekilde verilir ([101], [102]).

$$\boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{3.27}$$

Burada σ elektriksel iletkenlik katsayısıdır.

Akışkanın birim hacmine uygulanan $\boldsymbol{F}_p$ kuvvetinin Stokes sürükleme yasası formunda olduğu varsayılır. Zerrelerin Reynolds sayısının büyük değerleri için, bu varsayım yanlıştır, bu sebeple zerrelerin Reynolds sayısının yeterli küçüklükte olduğu varsayılır. Bu kısıtlamanın karşılanmadığı akış bölgelerinde yine de sonuçlar niteliksel olarak doğru ve nicel olarak makul olacaktır [22].

$$\boldsymbol{F}_p = n6\pi r\mu\left(\boldsymbol{v_p} - \boldsymbol{u}\right) \tag{3.28}$$

Bu kuvvetin bir başka ifadesi zerrelerin gevşe süresi τ_v yi içerecek şekilde yazılabilir.

$$\boldsymbol{F}_p = \frac{\rho_p}{\tau_v}\left(\boldsymbol{v_p} - \boldsymbol{u}\right) \tag{3.29}$$

Rubinow ve Keller [103] tarafından yapılan çalışmada uniform doğrusal bir akışta dönen bir küre üzerindeki kaldırma kuvveti tartışılmış ve kaldırma kuvveti için formül elde edilmiştir. Singleton [21], [22] kaldırma kuvvetlerinin Stokes sürüklenme kuvvetlerine kıyasla ihmal edilebilir olduğunu göstermiştir. Bu tez çalışmasında kaldırma kuvvetleri ihmal edilmiştir.

Akışkan faz için enerjinin korunumu akışın daimi olduğu göz önünde bulundurularak, (3.23) ün denklem (3.15) te yerine yazılması ile elde edilir. Zerre fazı için enerjinin korunumu, daimi akış durumu ve parçacıkların sıcaklık kaymalarının aynı olduğu akış alanı için denklem (3.19) un yeniden yazılması ile elde edilir. Yeni eşitlikler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\rho c_p(\boldsymbol{u}\cdot\nabla T) = -\nabla\cdot\boldsymbol{q} + \rho\mathfrak{h} + \Phi_v + Q_p + \Phi_p + \Phi_J \tag{3.30}$$

$$\rho_p c_s\left(\boldsymbol{v_p}\cdot\nabla T_p\right) = -Q_p \tag{3.31}$$

c_p akışkanın sabit basınçtaki özgül ısısıdır. $\boldsymbol{q}$ ısı akısı vektörü, Fourier ısı iletim yasası ile verilir.

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T \tag{3.32}$$

k daha önce belirtildiği gibi akışkanın ısı iletim katsayısıdır ve bu çalışmada sabit alınmıştır. Φ_v viskoz disipasyon terimidir ve sıkıştırılamayan Newtonian akışkan için Kartezyen koordinatlarda aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\Phi_v = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \quad (3.33)$$

Zerreler ve onları çevreleyen akışkan farklı sıcaklıklarda olduğunda, küresel bir zerre ile akışkan faz arasında gerçekleşen ısı transferi

$$q_p = k(4\pi r^2)\frac{T_p - T}{r} Nu \quad (3.34)$$

şeklindedir. Stokes sürüklenme yasasını geçerli kılan koşullar altında, Nusselt sayısı bire eşit olarak alınabilir. Bu durumda karışımın birim hacmi başına akışkan faza olan ısı transferi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$Q_p = nk4\pi r\left(T_p - T\right) \quad (3.35)$$

Bu terimin bir başka ifadesi zerrelerin ısıl gevşe süresi τ_T yi içerecek şekilde yazılabilir.

$$Q_p = \frac{\rho_p c_s}{\tau_T}\left(T_p - T\right) \quad (3.36)$$

Akışkan ve zerreler arasındaki bağıl hareket sebebi ile zerrelerin yaptığı iş Φ_p , (3.12) den görülebileceği gibi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

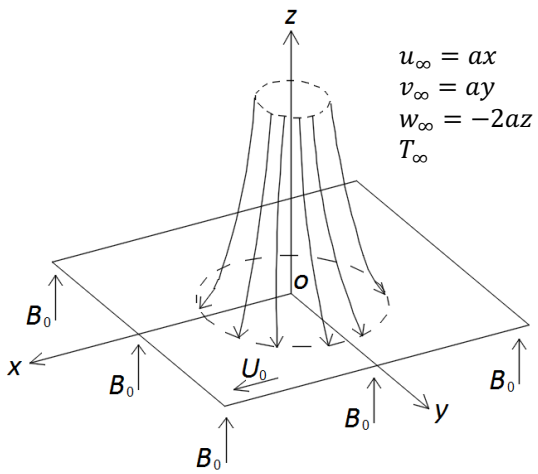
$$\Phi_p = \left(\boldsymbol{v_p} - \boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{F}_p \quad (3.37)$$

Akış alanına etkitilen manyetik alan sebebiyle oluşan Joule ısınması aşağıdaki şekilde temsil edilmektedir.

$$\Phi_j = \frac{J^2}{\sigma} \quad (3.38)$$

3.2. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ SİLİNDİRİK BİR NEWTONIAN AKIŞKAN HÜZMESİNİN YATAY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI

Sabit U_0 hızı ile x ekseni doğrultusunda hareket eden sonsuz büyüklükteki plaka xy yatay düzlemine konumlandırılmıştır. Silindirik bir akışkan hüzmesi $-z$ doğrultusunda hareket etmekte ve $z = 0$ da plakaya çarparak plaka üzerinde yayılmaktadır. Akış esnasında z ekseni doğrultusunda sabit bir B_0 manyetik alanı uygulanmaktadır. Problemin geometrisi Şekil 3.1 ile verilmiştir.



Şekil 3.1: Manyetik alan etkisindeki silindirik akışkan hüzmesinin hareketli yatay bir plakaya doğru akışı.

Akış daimi ve laminerdir. Akışkan elektrik iletkenliğe sahip sıkıştırılamayan Newtonian bir akışkan olup, akış esnasında tüm özelliklerinin sabit kaldığı kabul edilmiştir. Dışarıdan etkiyen sabit şiddetli manyetik alan vektörü $\boldsymbol{B} = \{0,0,B_0\}$ şeklindedir.

Bu kabuller altında akışkan faz ve zerre fazı için kütlenin korunumu denklemleri (3.21) ve (3.22) deki ifadelerinden değişiklik göstermez. (3.26), (3.27) ve (3.29) ifadelerinin (3.24) denkleminde, (3.29) un (3.25) te yazılması ile akışkan faz ve zerre fazı için özelleştirilen lineer momentumun korunumu denklemleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{\rho}\nabla \mathrm{p} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{u} + \frac{\sigma}{\rho}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} + \frac{\rho_p}{\rho\,\tau_v}\left(\boldsymbol{v_p}-\boldsymbol{u}\right) \tag{3.39}$$

$$\left(\boldsymbol{v_p}\cdot\nabla\boldsymbol{v_p}\right)=-\frac{1}{\tau_v}\left(\boldsymbol{v_p}-\boldsymbol{u}\right) \tag{3.40}$$

Benzer şekilde (3.32), (3.33), (3.36), (3.37) ve (3.38) in (3.30) da, (3.36) nın da (3.31) de yerine yazılması ile akışkan faz ve zerre fazı için enerjinin korunumu denklemleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\rho c_p(\boldsymbol{u}\cdot\nabla T)=k\nabla^2T+\ \Phi_v+\frac{\rho_p c_s}{\tau_T}\left(T_p-T\right)+\left(\boldsymbol{v_p}-\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{F}_p\ \ +\frac{J^2}{\sigma} \tag{3.41}$$

$$\left(\boldsymbol{v_p}\cdot\nabla T_p\right)=-\frac{1}{\tau_T}\left(T_p-T\right) \tag{3.42}$$

Yukarıda verilen denklemler ile ilgili sınır şartları akışkan fazın hız ve sıcaklığının plaka üzerinde ve plakadan yeterince uzakta aldığı değerler ile zerre fazının hız, sıcaklık ve yoğunluk oranının plakadan yeterince uzakta aldığı değerlerdir. Plakadan yeterince uzaktaki potansiyel akış bölgesinde karışım T_∞ sıcaklığındadır, plaka üzerinde ise akışkan sıcaklığı plakanın sıcaklığı olan T_w değerini alacaktır. Plaka üzerinde akışkan fazın hızı kaymama şartından, plakadan yeterince uzakta ise, potansiyel teoriden faydalanarak aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\begin{aligned} &z\to\infty \quad ;\quad u=ax\ ,\ \ v=ay\ ,\ \ w=-2az\ ,\ \ T=T_\infty \\ &z=0 \quad ;\quad u=U_0\ ,\ \ v=0\ ,\ \ w=0\ ,\ \ T=T_w \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$z\to\infty \quad ;\ u_p=u\ ,\ \ v_p=v\ ,\ \ w_p=w\ ,\ \ T_p=T\ ,\ \ \rho_p=\rho_{p\infty} \tag{3.44}$$

x,y,z doğrultularındaki hız bileşenleri akışkan için $u\ ,v\ ,w$ ve zerre fazı için $u_p\ ,v_p\ ,w_p$ ile gösterilmiştir. T ve T_p sırasıyla akışkan ve zerre fazın sıcaklığını göstermektedir.

Korunum denklemlerinin benzerlik çözümlerini elde etmek için bir dizi benzerlik dönüşümüne ihtiyaç vardır. Yukarıda tanıtılan problemde akışkanın hız bileşenleri için Wang [70] tarafından önerilen dönüşümler kullanılmıştır. Ancak Wang çözümlerinde viskoz disipasyon terimini ihmal etmiştir, ayrıca çalışmasında önerilen sıcaklık fonksiyonu, disipasyon terimlerinin mevcudiyetinde, enerji denkleminin benzerlik çözümüne izin vermemektedir. Viskoz disipasyon terimlerinin enerji denklemlerinde ihmal edilmediği durum için Demir ve Barış [89] tarafından önerilen sıcaklık fonksiyonu yukarıda tanıtılan problemin enerji denkleminin benzerlik çözümüne, hiçbir terimi ihmal etmeden, izin vermektedir.

$f(z)$, $h(z)$, $\theta_0(z)$, $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere akışkan faz için benzerlik dönüşümü aşağıdaki şekildedir.

$$u = f(z) + xh'(z)$$

$$v = yh'(z)$$

$$w = -2h(z) \tag{3.45}$$

$$T = T_\infty + (T_w - T_\infty)[\theta_0(z) + x\theta_1(z) + (x^2 + y^2)\theta_2(z)]$$

Zerre fazı için benzerlik dönüşümü, $F(z)$, $N(z)$, $H(z)$, $\theta_{p0}(z)$, $\theta_{p1}(z)$, $\theta_{p2}(z)$ ve $K(z)$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki şekildedir.

$$u_p = F(z) + xN(z)$$

$$v_p = yN(z)$$

$$w_p = H(z) \tag{3.46}$$

$$T_p = T_\infty + (T_w - T_\infty)\left[\theta_{p0}(z) + x\theta_{p1}(z) + (x^2 + y^2)\theta_{p2}(z)\right]$$

$$\rho_p = K(z)$$

Benzerlik dönüşümlerinin (3.21), (3.22) ve (3.39) - (3.42) denklemlerinde yazılması ile problemin çözümü bir adi diferansiyel denklem sisteminin çözümüne indirgenir. Akışkan için kütlenin korumu denklemi, (3.45) benzerlik dönüşümü ile kendiliğinden sağlanır. Zerre fazın bağıl yoğunluğu sabit olmadığından, (3.22) ifadesinden, (3.46) benzerlik dönüşümü ile aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$KH' + K'H + 2KN = 0 \tag{3.47}$$

(3.45) ve (3.46) benzerlik dönüşümleri ile (3.39) denkleminin x, y, z doğrultularındaki bileşenlerinden sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu f'' + 2hf' - fh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} f + \frac{1}{\rho\tau_v} K(F - f)$$
$$+x\left\{\nu h''' + 2h''h - (h')^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_v} K(N - h')\right\} \quad (3.48)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = y\left\{\nu h''' + 2h''h - (h')^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_v} K(N - h')\right\} \quad (3.49)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -2\nu h'' - 4h'h + \frac{1}{\rho\tau_v} K(H + 2h) \quad (3.50)$$

(3.50) ve (3.49) sırasıyla y ve z' ye göre türetilip eşitlenirse

$$\left[\nu h''' + 2h''h - (h')^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_v} K(N - h')\right]' = 0 \quad (3.51)$$

$$\nu h''' + 2h''h - (h')^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_v} K(N - h') = C_1 \quad (3.52)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.48) ve (3.50) sırasıyla z ve x' e göre türetilip eşitlenirse

$$\left[\nu f'' + 2hf' - fh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} f + \frac{1}{\rho\tau_v} K(F - f)\right]'$$
$$+x\left[\nu h''' + 2h''h - (h')^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_v} K(N - h')\right]' = 0 \quad (3.53)$$

elde edilir, burada x çarpanındaki terimler (3.51) ile aynıdır. Bu durumda

$$\nu f'' + 2hf' - fh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} f + \frac{1}{\rho\tau_v} K(F - f) = C_2 \quad (3.54)$$

olmaktadır.

C_1ve C_2 keyfi integrasyon sabitleri (3.52) ve (3.54) denklemlerinin $z \to \infty$ da yazılması ile elde edilir. Bilinmeyen fonksiyonların ve türevlerinin $z \to \infty$ iken aldığı değerler (3.43) - (3.46) ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\lim_{z\to\infty} f = 0\,,\quad \lim_{z\to\infty} f' = 0\,,\quad \lim_{z\to\infty} f'' = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} h = az\,,\quad \lim_{z\to\infty} h' = a\,,\quad \lim_{z\to\infty} h'' = 0\,,\quad \lim_{z\to\infty} h''' = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} F = 0\,,\lim_{z\to\infty} N = a\,,\quad \lim_{z\to\infty} H = -2\lim_{z\to\infty} h\,,\quad \lim_{z\to\infty} K = \rho_{p\infty} \tag{3.55}$$

$$\lim_{z\to\infty} \theta_0 = 0\,,\quad \lim_{z\to\infty} \theta_1 = 0\,,\quad \lim_{z\to\infty} \theta_2 = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} \theta_{p0} = 0\,,\quad \lim_{z\to\infty} \theta_{p1} = 0\,,\quad \lim_{z\to\infty} \theta_{p2} = 0$$

Yukarıda verilen şartların uygulanması ile integrasyon sabitleri hesaplanmış olur.

$$C_1 = -a^2\left(1+\frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}\right)\quad,\quad C_2 = 0 \tag{3.56}$$

İntegrasyon sabitlerinin (3.52) ve (3.54) te yerine yazılması ile aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir.

$$\nu h''' + 2h''h - (h')^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho}h' + \frac{1}{\rho\tau_v}K(N-h') + a^2\left(1+\frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}\right) = 0 \tag{3.57}$$

$$\nu f'' + 2hf' - fh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho}f + \frac{1}{\rho\tau_v}K(F-f) = 0 \tag{3.58}$$

(3.45) ve (3.46) benzerlik dönüşümleri ile (3.40) denkleminin x, y, z doğrultularındaki bileşenlerinden sırasıyla

$$HF' + FN + \frac{1}{\tau_v}(F-f) + x\left\{HN' + N^2 + \frac{1}{\tau_v}(N-h')\right\} = 0 \tag{3.59}$$

$$HN' + N^2 + \frac{1}{\tau_v}(N-h') = 0 \tag{3.60}$$

$$HH' + \frac{1}{\tau_v}(H+2h) = 0 \tag{3.61}$$

elde edilir. (3.59) denkleminin x çarpanındaki terimler (3.60) ile aynı olduğundan aşağıdaki eşitlik geçerli olacaktır.

$$HF' + FN + \frac{1}{\tau_v}(F - f) = 0 \tag{3.62}$$

(3.45) ve (3.46) benzerlik dönüşümlerinin (3.41) de yerine yazılması ve $x, (x^2 + y^2)$ katsayılı bileşenlerin eşitlenmesi ile x ve y den bağımsız diferansiyel denklemler yazılır.

$$\theta_0'' + 4\theta_2 - \frac{\rho c_p}{k} f\theta_1 + 2\frac{\rho c_p}{k} h\theta_0' + \frac{c_s}{k\tau_T} K\left(\theta_{p0} - \theta_0\right) + \frac{\sigma {B_0}^2}{k(T_w - T_\infty)} f^2 + \frac{1}{k(T_w - T_\infty)\tau_v} K[(F - f)^2 + (H + 2h)^2] + \frac{\mu}{k(T_w - T_\infty)}\left(12h'^2 + f'^2\right) = 0 \tag{3.63}$$

$$\theta_1'' - 2\frac{\rho c_p}{k} f\theta_2 - \frac{\rho c_p}{k} h'\theta_1 + 2\frac{\rho c_p}{k} h\theta_1' + \frac{c_s}{k\tau_T} K\left(\theta_{p1} - \theta_1\right) + 2\frac{\sigma {B_0}^2}{k(T_w - T_\infty)} fh' + \frac{2}{k(T_w - T_\infty)\tau_v} K[(F - f)(N - h')] + 2\frac{\mu}{k(T_w - T_\infty)}(f'h'') = 0 \tag{3.64}$$

$$\theta_2'' - 2\frac{\rho c_p}{k} h'\theta_2 + 2\frac{\rho c_p}{k} h\theta_2' + \frac{c_s}{k\tau_T} K\left(\theta_{p2} - \theta_2\right) + \frac{\sigma {B_0}^2}{k(T_w - T_\infty)} h'^2 + \frac{1}{k(T_w - T_\infty)\tau_v} K(N - h')^2 + \frac{\mu}{k(T_w - T_\infty)} h''^2 = 0 \tag{3.65}$$

Benzer şekilde (3.45) ve (3.46) benzerlik dönüşümlerinin (3.42) de yerine yazılması $x, (x^2 + y^2)$ katsayılı bileşenlerin eşitlenmesi ile zerre fazın enerji denkleminden gelen x ve y den bağımsız diferansiyel denklemler elde edilir.

$$H\theta_{p0}' + F\theta_{p1} + \frac{1}{\tau_T}\left(\theta_{p0} - \theta_0\right) = 0 \tag{3.66}$$

$$H\theta_{p1}' + 2F\theta_{p2} + N\theta_{p1} + \frac{1}{\tau_T}\left(\theta_{p1} - \theta_1\right) = 0 \tag{3.67}$$

$$H\theta_{p2}' + 2N\theta_{p2} + \frac{1}{\tau_T}\left(\theta_{p2} - \theta_2\right) = 0 \tag{3.68}$$

Böylece problemin çözümü, (3.47), (3.57), (3.58) ve (3.60) - (3.68) denklemlerinden oluşan adi diferansiyel denklem sisteminin çözümüne indirgenmiş olur. İlgili sınır şartları ise (3.43) - (3.46) denklemleri yardımıyla elde edilir.

$$\lim_{z\to\infty} f = 0\,,\quad f(0) = U_0\,,\quad \lim_{z\to\infty} h' = a\,,\quad h(0) = 0\,,\quad h'(0) = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} F = 0\,,\quad \lim_{z\to\infty} N = a\,,\quad \lim_{z\to\infty} H = -2\lim_{z\to\infty} h\,,\quad \lim_{z\to\infty} K = \rho_{p\infty} \tag{3.69}$$

$$\lim_{z\to\infty}\theta_0 = 0\ ,\ \lim_{z\to\infty}\theta_1 = 0\ ,\ \lim_{z\to\infty}\theta_2 = 0\ ,\ \ \theta_0(0) = 1\ ,\ \ \theta_1(0) = 0\ ,\ \ \theta_2(0) = 0$$

$$\lim_{z\to\infty}\theta_{p0} = 0\ ,\ \ \lim_{z\to\infty}\theta_{p1} = 0\ ,\ \ \lim_{z\to\infty}\theta_{p2} = 0$$

Kütlenin korunumundan gelen (3.47) denklemi, lineer momentumun korunumundan gelen (3.57), (3.58), (3.60), (3.61), (3.62), denklemleri ve enerjinin korunumundan gelen (3.63), (3.64), (3.65), (3.66), (3.67), (3.68) denklemlerinin oluşturduğu denklem sistemi ve ilgili sınır şartları (3.69) a, yeni parametre η olmak üzere

$$z = \sqrt{\frac{\nu}{a}}\eta\ ,\ \ x = \sqrt{\frac{\nu}{a}}x^*,\ \ y = \sqrt{\frac{\nu}{a}}y^*$$

$$f = U_0 f^*,\ \ h = \sqrt{a\nu}h^*\ ,\ \ F = U_0 F^*,\ \ H = \sqrt{a\nu}H^*,\ \ N = aN^*,\ K = \rho K^* \tag{3.70}$$

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{a}{\nu}}{\theta_1}^*,\ \ \theta_2 = \frac{a}{\nu}{\theta_2}^*,\ \ \theta_{p1} = \sqrt{\frac{a}{\nu}}{\theta_{p1}}^*\ ,\ \ \theta_{p2} = \frac{a}{\nu}{\theta_{p2}}^*$$

boyutsuzlaştırmasının uygulanması ile ulaşılan denklemler sırasıyla

$$KH' + K'H + 2KN = 0 \tag{3.71}$$

$$h''' + 2h''h - (h')^2 + Ha(1 - h') + \beta_v K(N - h') + 1 = 0 \tag{3.72}$$

$$f'' + 2hf' - fh' - Haf + \beta_v K(F - f) = 0 \tag{3.73}$$

$$HN' + N^2 + \beta_v(N - h') = 0 \tag{3.74}$$

$$HH' + \beta_v(H + 2h) = 0 \tag{3.75}$$

$$HF' + FN + \beta_v(F - f) = 0 \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}&{\theta_0}'' + 4\theta_2 + Pr\left(2h{\theta_0}' - \sqrt{Re}f\theta_1\right) + PrEc\beta_v K\left((F - f)^2 + \frac{1}{Re}(H + 2h)^2\right) + \\ &\frac{2}{3}\beta_v K\left(\theta_{p0} - \theta_0\right) + PrEc\left(\frac{12}{Re}h'^2 + f'^2\right) + HaPrEcf^2 = 0\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}&{\theta_1}'' + Pr\left(2h{\theta_1}' - h'\theta_1 - 2\sqrt{Re}f\theta_2\right) + \frac{2}{3}\beta_v K\left(\theta_{p1} - \theta_1\right) + 2PrEc\frac{1}{\sqrt{Re}}f'h'' + \\ &2PrEc\frac{1}{\sqrt{Re}}\beta_v K(F - f)(N - h') + 2HaEcPr\frac{1}{\sqrt{Re}}fh' = 0\end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\theta_2'' + 2Pr(h\theta_2' - h'\theta_2) + \frac{2}{3}\beta_v K(\theta_{p2} - \theta_2) + PrEc\frac{1}{Re}h''^2 + PrEc\frac{1}{Re}\beta_v K(N - h')^2 + HaEcPr\frac{1}{Re}h'^2 = 0 \quad (3.79)$$

$$H\theta_{p0}' + \sqrt{Re}F\theta_{p1} + \frac{2c}{3Pr}\beta_v(\theta_{p0} - \theta_0) = 0 \quad (3.80)$$

$$H\theta_{p1}' + 2\sqrt{Re}F\theta_{p2} + N\theta_{p1} + \frac{2c}{3Pr}\beta_v(\theta_{p1} - \theta_1) = 0 \quad (3.81)$$

$$H\theta_{p2}' + 2N\theta_{p2} + \frac{2c}{3Pr}\beta_v(\theta_{p2} - \theta_2) = 0 \quad (3.82)$$

şeklindedir ve sınır koşulları

$$\lim_{\eta\to\infty} f = 0\,,\quad f(0) = 1\,,\ \lim_{\eta\to\infty} h' = 1\,,\quad h(0) = 0\,,\quad h'(0) = 0$$

$$\lim_{\eta\to\infty} F = 0\,,\ \lim_{\eta\to\infty} N = 1\ ,\ \lim_{\eta\to\infty} H = \lim_{\eta\to\infty}(-2h)\ ,\ \lim_{z\to\infty} K = \frac{\rho_{p\infty}}{\rho} \quad (3.83)$$

$$\lim_{\eta\to\infty} \theta_0 = 0\,,\ \lim_{\eta\to\infty} \theta_1 = 0\,,\ \lim_{\eta\to\infty} \theta_2 = 0\,,\ \theta_0(0) = 1\,,\ \theta_1(0) = 0\,,\ \theta_2(0) = 0$$

$$\lim_{\eta\to\infty} \theta_{p0} = 0\,,\ \lim_{\eta\to\infty} \theta_{p1} = 0\,,\quad \lim_{\eta\to\infty} \theta_{p2} = 0$$

olarak yazılır. Boyutsuz ifadeler yazılırken * üst indisi kullanılmamıştır.

Yukarıdaki denklem sisteminde görülen boyutsuz parametreler; Ha manyetik parametre, Pr Prandtl sayısı, Ec Eckert sayısı, Re Reynolds sayısı, β_v ve c sırasıyla akışkan zerre etkileşim parametresi ve özgül ısı oranı olup

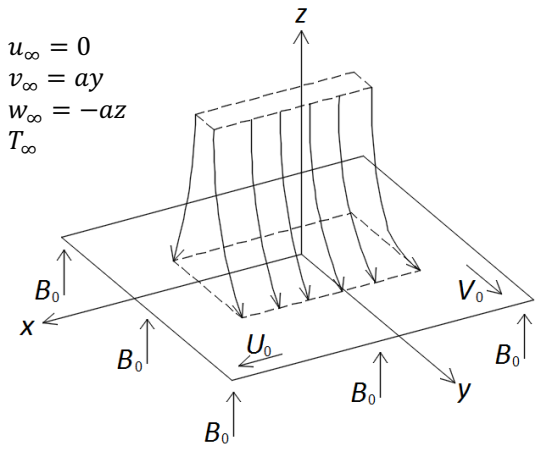
$$Ha = \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}\ ,\ Pr = \frac{\mu c_p}{k}\ ,\ Ec = \frac{{U_0}^2}{c_p(T_w - T_\infty)}\ ,\ Re = \frac{{U_0}^2}{av} \quad (3.84)$$

$$\beta_v = \frac{1}{\tau_v a}\ ,\ c = \frac{c_p}{c_s}$$

şeklinde tanımlanmışlardır.

3.3. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ PRİZMATİK BİR NEWTONIAN AKIŞKAN HÜZMESİNİN YATAY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI

Sabit U_0 hızı ile x ekseni ve sabit V_0 hızı ile y ekseni doğrultusunda hareket eden sonsuz büyüklükteki plaka xy yatay düzlemine konumlandırılmıştır. Prizmatik bir akışkan hüzmesi $-z$ doğrultusunda hareket etmekte ve $z = 0$ da plakaya çarparak plaka üzerinde yayılmaktadır. Akış esnasında z ekseni doğrultusunda sabit bir B_0 manyetik alanı uygulanmaktadır. Problemin geometrisi Şekil 3.2 ile verilmiştir.



Şekil 3.2: Manyetik alan etkisindeki prizmatik akışkan hüzmesinin hareketli yatay bir plakaya doğru akışı.

Akış daimi ve laminerdir. Akışkan elektrik iletkenliğe sahip sıkıştırılamayan Newtonian bir akışkan olup, akış esnasında tüm özelliklerinin sabit kaldığı kabul edilmiştir. Dışarıdan uygulanan sabit şiddetli manyetik alan vektörü $\boldsymbol{B} = \{0,0,B_0\}$ şeklindedir.

Bu kabuller altında akışkan faz ve zerre fazı için kütlenin korunumu denklemleri (3.21) ve (3.22) deki ifadelerinden değişiklik göstermez. Lineer momentum denklemleri (3.39), (3.40) ve enerjinin korunumu denklemleri (3.41), (3.42) ile verilecektir. Bu denklemler ile ilgili sınır şartları akışkan fazın hız ve sıcaklığının plaka üzerinde ve plakadan yeterince uzakta aldığı değerler ile zerre fazın hız, sıcak ve yoğunluğunun plakadan yeterince uzakta aldığı değerlerdir. Plakadan yeterince uzaktaki potansiyel akış bölgesinde karışım T_∞ sıcaklığındadır, plaka üzerinde ise akışkan sıcaklığı plakanın sıcaklığı olan T_w değerini alacaktır. Plaka üzerinde akışkan fazın hızı kaymama şartından, plakadan yeterince uzakta ise, potansiyel teoriden faydalanarak aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$z \to \infty \quad ; \quad u = 0\,, \quad v = ay\,, \quad w = -az\,, \quad T = T_\infty$$
$$z = 0 \quad ; \quad u = U_0\,, \quad v = V_0\,, \quad w = 0\,, \quad T = T_w \tag{3.85}$$

$$z \to \infty \quad ; \quad u_p = 0\,, \quad v_p = ay\,, \quad w_p = w\,, \quad T_p = T_\infty \tag{3.86}$$

Yukarıda tanıtılan problemde akışkanın hız bileşenleri için kullanılan benzerlik dönüşümleri Libby [99] tarafından daha önce uygulanan dönüşümlerdir. Sıcaklık fonksiyonlarının benzerlik dönüşümleri Demir ve Barış [89] tarafından önerilen dönüşümden yola çıkarak bu problemin enerji denklemlerinin benzerlik çözümlerini karşılayacak şekilde önerilmiştir.

$f(z)$, $h(z)$, $g(z)$, $\theta_0(z)$, $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere akışkan faz için benzerlik dönüşümü aşağıdaki şekildedir.

$$u = f(z)$$
$$v = g(z) + yh'(z)$$
$$w = -h(z) \tag{3.87}$$
$$T = T_\infty + (T_w - T_\infty)[\theta_0(z) + y\theta_1(z) + y^2\theta_2(z)]$$

Zerre fazı için benzerlik dönüşümü, $F(z)$, $N(z)$, $H(z)$, $\theta_{p0}(z)$, $\theta_{p1}(z)$, $\theta_{p2}(z)$ ve $K(z)$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki şekildedir.

$$u_p = F(z)$$
$$v_p = G(z) + yN(z)$$
$$w_p = H(z) \tag{3.88}$$
$$T_p = T_\infty + (T_w - T_\infty)\left[\theta_{p0}(z) + y\theta_{p1}(z) + y^2\theta_{p2}(z)\right]$$
$$\rho_p = K(z)$$

Benzerlik dönüşümlerinin (3.21), (3.22) ve (3.39) - (3.42) denklemlerinde yazılması ile problemin çözümü bir adi diferansiyel denklem sisteminin çözümüne indirgenir. Akışkan için kütlenin korumu denklemi, (3.87) benzerlik dönüşümü ile kendiliğinden sağlanır. Zerre fazın

bağıl yoğunluğu sabit olmadığından, (3.22) ifadesinden, (3.88) benzerlik dönüşümü ile aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$KH' + K'H + KN = 0 \tag{3.89}$$

(3.87) ve (3.88) benzerlik dönüşümleri ile (3.39) denkleminin x, y, z doğrultularındaki bileşenlerinden sırasıyla

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu f'' + hf' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} f + \frac{1}{\rho\tau_v} K(F - f) \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = {} & \nu g'' + hg' - gh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho\tau_v} K(G - g) \\ & + y\left\{\nu h''' + h''h - (h')^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_v} K(N - h')\right\}\end{aligned} \tag{3.91}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\nu h'' - h'h + \frac{1}{\rho\tau_v} K(H + h) \tag{3.92}$$

elde edilir.

(3.92) ve (3.90) sırasıyla x ve z' ye göre türetilip eşitlenirse

$$\left[\nu f'' + hf' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} f + \frac{1}{\rho\tau_v} K(F - f)\right]' = 0 \tag{3.93}$$

$$\nu f'' + hf' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} f + \frac{1}{\rho\tau_v} K(F - f) = C_1 \tag{3.94}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.91) ve (3.92) sırasıyla z ve x' e göre türetilip eşitlenirse

$$\begin{aligned}&\left[\nu g'' + hg' - gh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho\tau_v} K(G - g)\right]' + y\left[\nu h''' + h''h - (h')^2 - \right. \\ &\left. \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_v} K(N - h')\right]' = 0\end{aligned} \tag{3.95}$$

elde edilir. Bu eşitliğin bütün y değerlerinde geçerli olması için

$$\nu g'' + hg' - gh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho\tau_v} K(G - g) = C_2 \tag{3.96}$$

$$\nu h''' + h''h - (h')^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho \tau_v} K(N - h') = C_3 \tag{3.97}$$

olmaktadır.

C_1, C_2 ve C_3 keyfi integrasyon sabitleri (3.94), (3.96) ve (3.97) denklemlerinin $z \to \infty$ da yazılması ile elde edilir. Bilinmeyen fonksiyonların ve türevlerinin $z \to \infty$ iken aldığı değerler (3.85) - (3.88) ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\lim_{z\to\infty} f = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} f' = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} f'' = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} g = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} g' = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} g'' = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} h = az\,, \quad \lim_{z\to\infty} h' = a\,, \quad \lim_{z\to\infty} h'' = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} h''' = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} F = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} G = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} N = a\,, \quad \lim_{z\to\infty} H = -\lim_{z\to\infty} h \tag{3.98}$$

$$\lim_{z\to\infty} K = \rho_{p\infty}$$

$$\lim_{z\to\infty} \theta_0 = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} \theta_1 = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} \theta_2 = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} \theta_{p0} = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} \theta_{p1} = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} \theta_{p2} = 0$$

Yukarıda verilen şartların uygulanması ile integrasyon sabitleri hesaplanmış olur.

$$C_1 = 0,\ \ C_2 = 0\ , C_3 = -a^2\left(1 + \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}\right) \tag{3.99}$$

İntegrasyon sabitlerinin (3.94), (3.96) ve (3.97) de yerine yazılması ile aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir.

$$\nu f'' + hf' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} f + \frac{1}{\rho \tau_v} K(F - f)\ = 0\,, \tag{3.100}$$

$$\nu g'' + hg' - gh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho \tau_v} K(G - g) = 0 \tag{3.101}$$

$$\nu h''' + h''h - (h')^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho \tau_v} K(N - h') + a^2 \left(1 + \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}\right) = 0 \tag{3.102}$$

(3.87), (3.88) benzerlik dönüşümleri ile (3.40) denkleminin x, y, z doğrultularındaki bileşenlerinden sırasıyla

$$HF' + \frac{1}{\tau_v}(F - f) = 0\,, \tag{3.103}$$

$$HG' + GN + \frac{1}{\tau_v}(G - g) + y\left\{HN' + N^2 + \frac{1}{\tau_v}(N - h')\right\} = 0 \tag{3.104}$$

$$HH' + \frac{1}{\tau_v}(H + h) = 0 \tag{3.105}$$

(3.104) denkleminin bütün y değerlerinde geçerli olabilmesi için,

$$HG' + GN + \frac{1}{\tau_v}(G - g) = 0 \tag{3.106}$$

$$HN' + N^2 + \frac{1}{\tau_v}(N - h') = 0 \tag{3.107}$$

olmalıdır.

(3.87) ve (3.88) benzerlik dönüşümlerinin (3.41) de yerine yazıldıktan sonra y ve y^2 katsayılı bileşenlerin eşitlenmesi ile y den bağımsız diferansiyel denklemler yazılır.

$$\begin{aligned}&{\theta_0}'' + 2\theta_2 - \frac{\rho c_p}{k} g\theta_1 + \frac{\rho c_p}{k} h{\theta_0}' + \frac{c_s}{k\tau_T} K\left(\theta_{p0} - \theta_0\right) + \frac{\sigma {B_0}^2}{k(T_w - T_\infty)}(f^2 + g^2) + \\ &\frac{1}{k(T_w - T_\infty)\tau_v} K[(F - f)^2 + (G + g)^2 + (H + h)^2] + \frac{\mu}{k(T_w - T_\infty)}\left(4{h'}^2 + {f'}^2 + \right. \\ &\left.{g'}^2\right) = 0\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}&{\theta_1}'' - 2\frac{\rho c_p}{k} g\theta_2 - \frac{\rho c_p}{k} h'\theta_1 + \frac{\rho c_p}{k} h{\theta_1}' + \frac{c_s}{k\tau_T} K\left(\theta_{p1} - \theta_1\right) + 2\frac{\sigma {B_0}^2}{k(T_w - T_\infty)} gh' + \\ &\frac{2}{k(T_w - T_\infty)\tau_v} K[(G - g) + (N - h')] + 2\frac{\mu}{k(T_w - T_\infty)} g'h'' = 0\end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned}&{\theta_2}'' - 2\frac{\rho c_p}{k} h'\theta_2 + \frac{\rho c_p}{k} h{\theta_2}' + \frac{c_s}{k\tau_T} K\left(\theta_{p2} - \theta_2\right) + \frac{\sigma {B_0}^2}{k(T_w - T_\infty)} h'^2 + \\ &\frac{1}{k(T_w - T_\infty)\tau_v} K(N - h')^2 + \frac{\mu}{k(T_w - T_\infty)} h''^2 = 0\end{aligned} \tag{3.110}$$

Benzer şekilde (3.87) ve (3.88) benzerlik dönüşümlerinin (3.42) de yerine yazıldıktan sonra y ve y^2 katsayılı bileşenlerin eşitlenmesi ile zerre fazın enerji denkleminden gelen y den bağımsız diferansiyel denklemler yazılır.

$$H\theta_{p0}' + G\theta_{p1} + \frac{1}{\tau_T}\left(\theta_{p0} - \theta_0\right) = 0 \tag{3.111}$$

$$H\theta_{p1}' + 2G\theta_{p2} + N\theta_{p1} + \frac{1}{\tau_T}\left(\theta_{p1} - \theta_1\right) = 0 \tag{3.112}$$

$$H\theta_{p2}' + 2N\theta_{p2} + \frac{1}{\tau_T}\left(\theta_{p2} - \theta_2\right) = 0 \tag{3.113}$$

Böylece problemin çözümü, (3.89), (3.100) - (3.103), (3.105) - (3.113) denklemlerinden oluşan adi diferansiyel denklem sisteminin çözümüne indirgenmiş olur. İlgili sınır şartları ise (3.85) - (3.88) denklemleri yardımıyla elde edilir.

$$\begin{gathered}
\lim_{z\to\infty} f = 0\,, \quad f(0) = U_0\,, \quad \lim_{z\to\infty} g = 0\,, \quad \mathrm{g}(0) = V_0 \\
\lim_{z\to\infty} h' = a\,, \quad h(0) = 0\,, \quad h'(0) = 0 \\
\lim_{z\to\infty} F = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} G = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} N = a\,, \quad \lim_{z\to\infty} H = -\lim_{z\to\infty} h \\
\lim_{z\to\infty} K = \rho_{p\infty} \\
\lim_{z\to\infty} \theta_0 = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} \theta_1 = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} \theta_2 = 0\,, \theta_0(0) = 1\,, \quad \theta_1(0) = 0\,, \quad \theta_2(0) = 0 \\
\lim_{z\to\infty} \theta_{p0} = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} \theta_{p1} = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} \theta_{p2} = 0
\end{gathered} \tag{3.114}$$

Kütlenin korunumundan gelen (3.89) denklemi, Lineer momentumun korunumundan gelen (3.100) - (3.103), (3.105) - (3.107) denklemleri ve enerjinin korunumundan gelen (3.108) - (3.113) denklemlerinin oluşturduğu denklem sistemi ve ilgili sınır şartları (3.114) e, yeni parametre η olmak üzere

$$z = \sqrt{\frac{\nu}{a}}\eta \ , \quad y = \sqrt{\frac{\nu}{a}}y^*$$

$$f = U_0 f^* \ , \quad g = V_0 g^* \ , \quad h = \sqrt{a\nu}h^*$$

$$F = U_0 F^* \ , \quad \mathrm{G}= V_0 G^* \ , \quad H = \sqrt{a\nu}H^*, \quad N = aN^*, \quad K = \rho K^* \tag{3.115}$$

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{a}{\nu}}{\theta_1}^*, \quad \theta_2 = \frac{a}{\nu}{\theta_2}^* \ , \quad \theta_{p1} = \sqrt{\frac{a}{\nu}}{\theta_{p1}}^* \ , \quad \theta_{p2} = \frac{a}{\nu}{\theta_{p2}}^*$$

boyutsuzlaştırmasının uygulanması ile ulaşılan denklemler sırasıyla

$$KH' + K'H + KN = 0 \tag{3.116}$$

$$f'' + hf' - Haf + \beta_v K(F - f) \ = 0 \tag{3.117}$$

$$g'' + hg' - gh' - Hag + \beta_v K(G - g) = 0 \tag{3.118}$$

$$h''' + h''h - (h')^2 + Ha(1 - h') + \beta_v K(N - h') + 1 = 0 \tag{3.119}$$

$$HF' + \beta_v(F - f) = 0 \tag{3.120}$$

$$HH' + \beta_v(H + h) = 0 \tag{3.121}$$

$$HG' + GN + \beta_v(G - g) = 0 \tag{3.122}$$

$$HN' + N^2 + \beta_v(N - h') = 0 \tag{3.123}$$

$$\begin{aligned}&{\theta_0}'' + 2\theta_2 - Pr\sqrt{Re_2}g\theta_1 + Prh{\theta_0}' + \frac{2}{3}\beta_v K\left(\theta_{p0} - \theta_0\right) + 4PrEc_1\frac{1}{Re_1}h'^2 + \\ &Pr\left(Ec_1 f'^2 + Ec_2 g'^2\right) + Pr\beta_v K(Ec_1(F - f)^2 + Ec_2(G - g)^2) + \\ &PrEc_1\frac{1}{Re_1}\beta_v K(H + h)^2 + HaPr(Ec_1 f^2 + Ec_2 g^2) = 0\end{aligned} \tag{3.124}$$

$$\begin{aligned}&{\theta_1}'' - 2Pr\sqrt{Re_2}g\theta_2 + Pr(-h'\theta_1 + h{\theta_1}') + \frac{2}{3}\beta_v K\left(\theta_{p1} - \theta_1\right) + \\ &2PrEc_2\frac{1}{\sqrt{Re_2}}\beta_v K[(G - g)(N - h')] + 2PrEc_2\frac{1}{\sqrt{Re_2}}g'h'' + \\ &2HaPrEc_2\frac{1}{\sqrt{Re_2}}gh' = 0\end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\theta_2'' - 2Prh'\theta_2 + Prh\theta_2' + \frac{2}{3}\beta_v K(\theta_{p2} - \theta_2) + PrEc_1 \frac{1}{Re_1}\beta_v K(N - h')^2 + PrEc_1 \frac{1}{Re_1} h''^2 + HaPrEc_1 \frac{1}{Re_1} h'^2 = 0 \quad (3.126)$$

$$H\theta_{p0}' + \sqrt{Re_2} G\theta_{p1} + \frac{2c}{3Pr}\beta_v(\theta_{p0} - \theta_0) = 0 \quad (3.127)$$

$$H\theta_{p1}' + 2\sqrt{Re_2} G\theta_{p2} + N\theta_{p1} + \frac{2c}{3Pr}\beta_v(\theta_{p1} - \theta_1) = 0 \quad (3.128)$$

$$H\theta_{p2}' + 2N\theta_{p2} + \frac{2c}{3Pr}\beta_v(\theta_{p2} - \theta_2) = 0 \quad (3.129)$$

şeklindedir ve sınır koşulları

$$\begin{gathered} \lim_{\eta\to\infty} f = 0\,, \quad f(0) = 1\,, \quad \lim_{\eta\to\infty} g = 0\,, \quad g(0) = 1 \\ \lim_{\eta\to\infty} h' = 1\,, \quad h(0) = 0\,, \quad h'(0) = 0 \\ \lim_{\eta\to\infty} F = 0\,, \quad \lim_{\eta\to\infty} G = 0\,, \quad \lim_{\eta\to\infty} N = 1 \\ \lim_{\eta\to\infty} H = -\lim_{\eta\to\infty} h\,, \quad \lim_{\eta\to\infty} K = \frac{\rho_{p\infty}}{\rho} \\ \lim_{\eta\to\infty} \theta_0 = 0\,, \quad \lim_{\eta\to\infty} \theta_1 = 0\,, \quad \lim_{\eta\to\infty} \theta_2 = 0\,, \theta_0(0) = 1\,, \quad \theta_1(0) = 0\,, \quad \theta_2(0) = 0 \\ \lim_{\eta\to\infty} \theta_{p0} = 0\,, \quad \lim_{\eta\to\infty} \theta_{p1} = 0\,, \quad \lim_{\eta\to\infty} \theta_{p2} = 0 \end{gathered} \quad (3.130)$$

olarak yazılır. Boyutsuz ifadeler yazılırken * üst indisi yazılmamıştır.

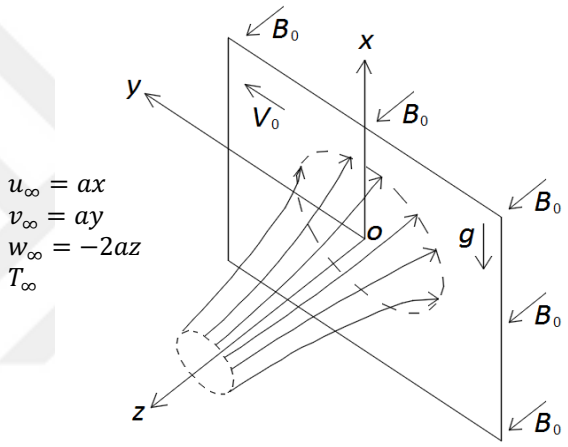
Yukarıdaki denklem sisteminde görülen boyutsuz parametreler; Ha manyetik parametre, Pr Prandtl sayısı, Ec Eckert sayısı, Re Reynolds sayısı, β_v ve c sırasıyla akışkan zerre etkileşim parametresi ve özgül ısı oranı olup

$$\begin{gathered} Ha = \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}\,, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{k}\,, \quad Ec_1 = \frac{{U_0}^2}{c_p(T_w - T_\infty)}\,, \quad Ec_2 = \frac{{V_0}^2}{c_p(T_w - T_\infty)} \\ Re_1 = \frac{{U_0}^2}{a\nu}\,, \quad Re_2 = \frac{{V_0}^2}{a\nu}\,, \quad \beta_v = \frac{1}{\tau_v a}\,, \quad c = \frac{c_p}{c_s} \end{gathered} \quad (3.131)$$

şeklinde tanımlanmışlardır.

3.4. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ SİLİNDİRİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN DÜŞEY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI

Sabit V_0 hızı ile y ekseni doğrultusunda hareket eden sonsuz büyüklükteki plaka xy düşey düzlemine konumlandırılmıştır. Prizmatik bir akışkan hüzmesi $-z$ doğrultusunda hareket etmekte ve $z = 0$ da plakaya çarparak plaka üzerinde yayılmaktadır. Akış esnasında z ekseni doğrultusunda sabit bir B_0 manyetik alanı uygulanmaktadır. Problemin geometrisi Şekil 3.3 ile verilmiştir.



Şekil 3.3: Manyetik alan etkisindeki silindirik akışkan hüzmesinin hareketli düşey bir plakaya doğru akışı.

Akış daimi ve laminerdir. Akışkan elektrik iletkenliğe sahip sıkıştırılamayan Newtonian bir akışkan olup, akış esnasında tüm özelliklerinin sabit kaldığı kabul edilmiştir. Yerçekimi kuvveti $\mathbf{g} = \{-g, 0,0\}$ ve sabit şiddetli manyetik alan vektörü $\boldsymbol{B} = \{0,0,B_0\}$ şeklindedir. Enerji denkleminde disipasyon terimleri ihmal edilmiş, ısı kaynağı terimi göz önüne alınmıştır.

Bu kabuller altında zerre fazı için daha önce verilen (3.22), (3.40), (3.42) denklemleri geçerliliğini korumaktadır. Akışkan faz için (3.21) geçerliliğini korur ancak lineer momentumun korunumu denklemi, (3.26), (3.27) ve (3.29) un (3.24) te yerine yazılması ve Boussinesq yaklaşımı ile

$$\rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}) = -\nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} - \rho\gamma\delta T\mathbf{g} + \sigma(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} + \frac{\rho_p}{\rho\,\tau_v}\left(\boldsymbol{v_p} - \boldsymbol{u}\right) \tag{3.132}$$

elde edilir. Burada δT sıcaklık değişimini ve γ hacimsel genleşme katsayısını belirtmektedir.

Akışkan faz için enerji denklemi Joule ısınması, zerrelerin yaptığı iş ve disipasyon terimlerinin ihmali ile basitleşir, (3.32) ve (3.36) nın (3.30) da yerine yazılmasıyla, Q_0 ısı üretimi ile birlikte aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\rho c_p(\boldsymbol{u}\cdot\nabla T) = k\nabla^2 T + Q_0(T-T_\infty) + \frac{\rho_p c_s}{\tau_T}\left(T_p - T\right) \tag{3.133}$$

Korunum denklemleri ile ilgili sınır şartları akışkan fazın hız ve sıcaklığının plaka üzerinde ve plakadan yeterince uzakta aldığı değerler ile zerre fazın hız ve sıcaklığının plakadan yeterince uzakta aldığı değerlerdir. Plakadan yeterince uzaktaki potansiyel akış bölgesinde karışım T_∞ sıcaklığındadır, plaka üzerinde ise akışkan sıcaklığı plakanın sıcaklığı olan T_w değerini alacaktır. Plaka üzerinde akışkan fazın hızı kaymama şartından, plakadan yeterince uzakta ise, potansiyel teoriden faydalanarak aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\begin{aligned} &z \longrightarrow \infty \quad ; \quad u = ax\,, \quad v = ay\,, \quad w = -2az\,, \quad T = T_\infty \\ &z = 0 \qquad ; \quad u = 0\,, \quad v = V_0\,, \quad w = 0\,, \quad T = T_w \end{aligned} \tag{3.134}$$

$$z \longrightarrow \infty \quad ; \quad u_p = ax\,, \quad v_p = ay\,, \quad w_p = w\,, \quad T_p = T_\infty \tag{3.135}$$

Yukarıda tanıtılan problemde akışkanın hız bileşenleri için Demir ve Barış [100], Demir [104] tarafından önerilen dönüşümler kullanılmıştır. Sıcaklık fonksiyonlarının benzerlik dönüşümleri geleneksel formunda alınmıştır.

$m(z)$, $h(z)$, $g(z)$, $\theta(z)$, bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere akışkan faz için benzerlik dönüşümü aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} u &= m(z) + xh'(z) \\ v &= g(z) + yh'(z) \\ w &= -2h(z) \\ T &= T_\infty + (T_w - T_\infty)\theta(z) \end{aligned} \tag{3.136}$$

Zerre fazı için benzerlik dönüşümü, $M(z)$, $N(z)$, $G(z)$, $H(z)$, $\theta_p(z)$ve $K(z)$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki şekildedir.

$$u_p = M(z) + xN(z)$$

$$v_p = G(z) + yN(z)$$

$$w_p = H(z) \tag{3.137}$$

$$T_p = T_\infty + (T_w - T_\infty)\theta_p(z)$$

$$\rho_p = K(z)$$

Benzerlik dönüşümlerinin (3.21), (3.22), (3.40), (3.42), (3.132) ve (3.133) denklemlerinde yazılması ile problemin çözümü bir adi diferansiyel denklem sisteminin çözümüne indirgenir. (3.21), (3.87) benzerlik dönüşümü ile kendiliğinden sağlanır. Zerre fazın bağıl yoğunluğu sabit olmadığından, (3.22) ifadesinden, (3.137) benzerlik dönüşümü ile aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$KH' + K'H + 2KN = 0 \tag{3.138}$$

(3.136) ve (3.137) benzerlik dönüşümleri ile (3.132) denkleminin x, y, z doğrultularındaki bileşenlerinden sırasıyla

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \nu m'' + 2hm' - mh' + \mathrm{g}\gamma(T_w - T_\infty)\theta - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} m + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(M - m) + x\left(\nu h''' + 2hh'' - h'^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(N - h')\right) \tag{3.139}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \nu g'' + 2hg' - gh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(G - g) + y\left(\nu h''' + 2hh'' - h'^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(N - h')\right) \tag{3.140}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -2\nu h'' - 4hh' + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(H + 2h) \tag{3.141}$$

elde edilir.

(3.141) ve (3.139) sırasıyla x ve z' ye göre türetilip eşitlenirse

$$\left[\nu m'' + 2hm' - mh' + \mathfrak{g}\gamma(T_w - T_\infty)\theta - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} m + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(M - m) + x\left(\nu h''' + 2hh'' - h'^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(N - h')\right)\right]' = 0 \tag{3.142}$$

yukarıdaki eşitliğin bütün x değerlerinde geçerli olması için

$$\nu h''' + 2hh'' - h'^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(N - h') = C_1 \tag{3.143}$$

$$\nu m'' + 2hm' - mh' + \mathfrak{g}\gamma(T_w - T_\infty)\theta - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} m + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(M - m) = C_2 \tag{3.144}$$

(3.141) ve (3.140) sırasıyla y ve z' ye göre türetilip eşitlenirse

$$\left[\nu g'' + 2hg' - gh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(G - g)\right]' = 0 \tag{3.145}$$

$$\nu g'' + 2hg' - gh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(G - g) = C_3 \tag{3.146}$$

elde edilir. C_1, C_2 ve C_3 keyfi integrasyon sabitleri (3.143), (3.144), (3.146) denklemlerinin $z \to \infty$ da yazılması ile elde edilir. Bilinmeyen fonksiyonların ve türevlerinin $z \to \infty$ iken aldığı değerler (3.134) - (3.137) ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{gathered}
\lim_{z\to\infty} m = 0\,,\ \lim_{z\to\infty} m' = 0\,,\ \lim_{z\to\infty} m'' = 0,\ \lim_{z\to\infty} g = 0\,,\ \lim_{z\to\infty} g' = 0\,,\ \lim_{z\to\infty} g'' = 0 \\
\lim_{z\to\infty} h = az\,,\quad \lim_{z\to\infty} h' = a\,,\quad \lim_{z\to\infty} h'' = 0\,,\ \lim_{z\to\infty} h''' = 0 \\
\lim_{z\to\infty} M = 0\,,\ \lim_{z\to\infty} G = 0\,,\ \lim_{z\to\infty} N = a\,,\ \lim_{z\to\infty} H = \lim_{z\to\infty}(-2h) \\
\lim_{z\to\infty} K = \rho_{p\infty}\,,\ \lim_{z\to\infty} \theta = 0\,,\quad \lim_{z\to\infty} \theta_p = 0
\end{gathered} \tag{3.147}$$

Yukarıda verilen şartların uygulanması ile integrasyon sabitleri hesaplanmış olur.

$$C_1 = -a^2\left(1 + \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}\right),\quad C_2 = 0\ ,\ C_3 = 0 \tag{3.148}$$

İntegrasyon sabitlerinin (3.143), (3.144) ve (3.146) da yerine yazılması ile aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir.

$$\nu h''' + 2hh'' - h'^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho \tau_\nu} K(N - h') + a^2 \left(1 + \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}\right) = 0 \,, \tag{3.149}$$

$$\nu m'' + 2hm' - mh' + \mathfrak{g}\gamma(T_w - T_\infty)\theta - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} m + \frac{1}{\rho \tau_\nu} K(M - m) = 0 \tag{3.150}$$

$$\nu g'' + 2hg' - gh' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho \tau_\nu} K(G - g) = 0 \tag{3.151}$$

(3.136) ve (3.137) benzerlik dönüşümleri ile (3.40) denkleminin x, y, z doğrultularındaki bileşenlerinden sırasıyla

$$HM' + MN + \frac{1}{\tau_\nu}(M - m) + x\left(HN' + N^2 + \frac{1}{\tau_\nu}(N - h')\right) = 0 \tag{3.152}$$

$$HG' + GN + \frac{1}{\tau_\nu}(G - g) + y\left(HN' + N^2 + \frac{1}{\tau_\nu}(N - h')\right) = 0 \tag{3.153}$$

$$HH' + \frac{1}{\tau_\nu}(H + 2h) = 0 \tag{3.154}$$

(3.152) ve (3.153) denklemlerinin bütün x ve y değerlerinde geçerli olabilmesi için,

$$HM' + MN + \frac{1}{\tau_\nu}(M - m) = 0 \tag{3.155}$$

$$HN' + N^2 + \frac{1}{\tau_\nu}(N - h') = 0 \tag{3.156}$$

$$HG' + GN + \frac{1}{\tau_\nu}(G - g) = 0 \tag{3.157}$$

olmalıdır.

(3.136) ve (3.137) benzerlik dönüşümlerinin (3.133) ve (3.42) de yerine yazılması ile

$$\theta'' + 2\frac{\rho c_p}{k} h\theta' + \frac{c_s}{k\tau_T} K\left(\theta_p - \theta\right) + \frac{Q_0}{k}\theta = 0 \tag{3.158}$$

$$H{\theta_p}' + \frac{1}{\tau_T}\left(\theta_p - \theta\right) = 0 \tag{3.159}$$

elde edilir. Böylece problemin çözümü, (3.138), (3.149) - (3.151), (3.154) - (3.159) denklemlerinden oluşan adi diferansiyel denklem sisteminin çözümüne indirgenmiş olur. İlgili sınır şartları ise (3.134) - (3.137) denklemleri yardımıyla elde edilir.

$$\begin{gathered}\lim_{z\to\infty} m = 0\,, \quad m(0) = 0, \lim_{z\to\infty} g = 0\,, \quad g(0) = V_0 \\ \lim_{z\to\infty} h' = a\,, \quad h(0) = 0\,, \quad h'(0) = 0 \\ \lim_{z\to\infty} M = 0\,, \ \lim_{z\to\infty} G = 0\,, \ \lim_{z\to\infty} N = a, \quad \lim_{z\to\infty} H = \lim_{z\to\infty}(-2h) \\ \lim_{z\to\infty} K = \rho_{p\infty}\,, \ \lim_{z\to\infty} \theta = 0\,, \quad \theta(0) = 1, \ \lim_{z\to\infty} \theta_p = 0\end{gathered} \tag{3.160}$$

Kütlenin korunumundan gelen (3.138) denklemi, Lineer momentumun korunumundan gelen (3.149) - (3.151), (3.154) - (3.157) denklemleri ve enerjinin korunumundan gelen (3.158), (3.159) denklemlerinin oluşturduğu denklem sistemi ve ilgili sınır şartları (3.160) a, yeni parametre η olmak üzere

$$\begin{gathered}z = \sqrt{\frac{\nu}{a}}\eta \\ m = \sqrt{a\nu}m^*, \quad g = V_0 g^*, \quad h = \sqrt{a\nu}h^* \\ M = \sqrt{a\nu}M^*, \quad G = V_0 G^*, \quad N = aN^*\,, \quad H = \sqrt{a\nu}H^*\,, \quad K = \rho K^*\end{gathered} \tag{3.161}$$

boyutsuzlaştırmasının uygulanması ile ulaşılan denklemler sırasıyla

$$KH' + K'H + 2KN = 0 \tag{3.162}$$

$$h''' + 2h''h - h'^2 + Ha(1 - h') + \beta_\nu K(N - h') + 1 = 0 \tag{3.163}$$

$$m'' + 2m'h - mh' - Ha\, m + \lambda\theta + \beta_\nu K(M - m) = 0 \tag{3.164}$$

$$g'' + 2g'h - gh' - Ha\, g + \beta_\nu K(G - g) = 0 \tag{3.165}$$

$$HH' + \beta_\nu(H + 2h) = 0 \tag{3.166}$$

$$HM' + MN + \beta_\nu(M - m) = 0 \tag{3.167}$$

$$HN' + N^2 + \beta_v(N - h') = 0 \tag{3.168}$$

$$HG' + GN + \beta_v(G - g) = 0 \tag{3.169}$$

$$\theta'' + 2\,\mathrm{Pr}\, h\theta' + \frac{2}{3}\beta_v K\left(\theta_p - \theta\right) + PrQ\theta = 0 \tag{3.170}$$

$$H{\theta_p}' + \frac{2c}{3Pr}\beta_v\left(\theta_p - \theta\right) = 0 \tag{3.171}$$

şeklindedir ve sınır koşulları

$$\begin{gathered}\lim_{\eta\to\infty} m = 0\ ,\ m(0) = 0,\ \lim_{\eta\to\infty} g = 0\ ,\ g(0) = 1 \\ \lim_{\eta\to\infty} h' = 1\ ,\ h(0) = 0\ ,\quad h'(0) = 0 \\ \lim_{\eta\to\infty} M = 0\ ,\ \lim_{\eta\to\infty} G = 0\ ,\ \lim_{\eta\to\infty} N = 1,\ \lim_{\eta\to\infty} H = \lim_{\eta\to\infty}(-2h) \\ \lim_{\eta\to\infty} K = \frac{\rho_{p\infty}}{\rho}\ ,\ \lim_{\eta\to\infty}\theta = 0\ \ ,\quad \theta(0) = 1\ ,\ \lim_{\eta\to\infty}\theta_p = 0\end{gathered} \tag{3.172}$$

olarak bulunur. Boyutsuz ifadeler yazılırken * üst indisi yazılmamıştır.

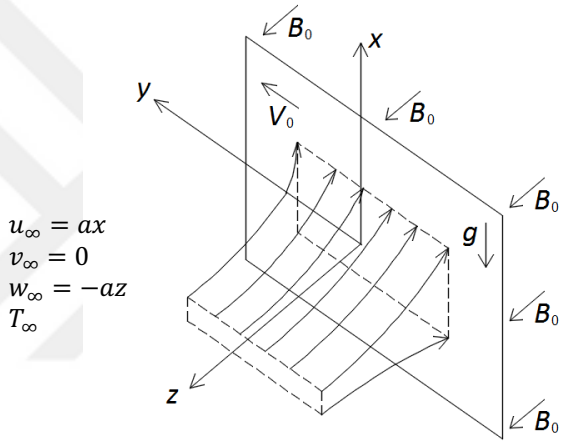
Yukarıdaki denklem sisteminde görülen boyutsuz parametreler; Ha manyetik parametre, Pr Pandtl sayısı, λ taşınım parmetresi, Q ısı üretimi parametresi, β_v zerre etkileşim parametresi ve c özgül ısı oranı olup

$$\begin{gathered}Ha = \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}\ ,\quad Pr = \frac{\rho c_p \nu}{k}\ ,\ \lambda = \frac{g\gamma(T_w - T_\infty)}{a\sqrt{a\nu}}\ ,\qquad \mathrm{Q}= \frac{Q_0}{\rho c_p a}, \\ \beta_v = \frac{1}{\tau_v a}\ ,\quad c = \frac{c_p}{c_s}\end{gathered} \tag{3.173}$$

şeklinde tanımlanmışlardır.

3.5. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ PRİZMATİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN DÜŞEY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI

Sabit V_0 hızı ile y ekseni doğrultusunda hareket eden sonsuz büyüklükteki plaka xy düşey düzlemine konumlandırılmıştır. Prizmatik bir akışkan hüzmesi $-z$ doğrultusunda hareket etmekte ve $z = 0$ da plakaya çarparak plaka üzerinde yayılmaktadır. Akış esnasında z ekseni doğrultusunda sabit bir B_0 manyetik alanı uygulanmaktadır. Problemin geometrisi Şekil 3.4 ile verilmiştir.



Şekil 3.4: Manyetik alan etkisindeki prizmatik akışkan hüzmesinin hareketli düşey bir plakaya doğru akışı.

Akış daimi ve laminerdir. Akışkan elektrik iletkenliğe sahip sıkıştırılamayan Newtonian bir akışkan olup, akış esnasında tüm özelliklerinin sabit kaldığı kabul edilmiştir. Yerçekimi kuvveti $\mathbf{g} = \{-g, 0,0\}$ ve sabit şiddetli manyetik alan vektörü $\boldsymbol{B} = \{0,0,B_0\}$ şeklindedir. Enerji denkleminde disipasyon terimleri ihmal edilmiş, ısı kaynağı terimi göz önüne alınmıştır.

Bu kabuller altında zerre fazı için daha önce verilen (3.22), (3.40), (3.42) denklemleri ve akışkan faz için daha önce verilen (3.21), (3.132), (3.133) denklemleri geçerliliğini korumaktadır. Bu denklemler ile ilgili sınır şartları akışkan fazın hız ve sıcaklığının plaka üzerinde ve plakadan yeterince uzakta aldığı değerler ile zerre fazın hız ve sıcaklığının plakadan yeterince uzakta aldığı değerlerdir. Plakadan yeterince uzaktaki potansiyel akış bölgesinde karışım T_∞ sıcaklığındadır, plaka üzerinde ise akışkan sıcaklığı plakanın sıcaklığı olan T_w değerini alacaktır. Plaka üzerinde akışkan fazın hızı kaymama şartından, plakadan yeterince uzakta ise, potansiyel teoriden faydalanarak aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$z \to \infty \quad ; \quad u = ax\,, \quad v = 0\,, \quad w = -az\,, \quad T = T_\infty$$
$$z = 0 \quad ; \quad u = 0\,, \quad v = V_0\,, \quad w = 0\,, \quad T = T_w \tag{3.174}$$

$$z \to \infty \quad ; \quad u_p = ax\,, \quad v_p = 0\,, \quad w_p = w\,, \quad T_p = T_\infty \tag{3.175}$$

Yukarıda tanıtılan problemde akışkanın hız bileşenleri için Demir [104] tarafından önerilen dönüşümler kullanılmıştır. Sıcaklık fonksiyonlarının benzerlik dönüşümleri geleneksel formunda alınmıştır.

$m(z)$, $h(z)$, $g(z)$, $\theta(z)$, bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere akışkan faz için benzerlik dönüşümü aşağıdaki şekildedir.

$$u = m(z) + xh'(z)$$
$$v = g(z)$$
$$w = -h(z) \tag{3.176}$$
$$T = T_\infty + (T_w - T_\infty)\theta(z)$$

Zerre fazı için benzerlik dönüşümü, $M(z)$, $N(z)$, $G(z)$, $H(z)$, $\theta_p(z)$,ve $K(z)$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki şekildedir.

$$u_p = M(z) + xN(z)$$
$$v_p = G(z)$$
$$w_p = H(z) \tag{3.177}$$
$$T_p = T_\infty + (T_w - T_\infty)\theta_p(z)$$
$$\rho_p = K(z)$$

Benzerlik dönüşümlerinin (3.21), (3.22), (3.40), (3.42), (3.132), (3.133) denklemlerinde yazılması ile problemin çözümü bir adi diferansiyel denklem sisteminin çözümüne indirgenir. Akışkan için kütlenin korumu denklemi, (3.176) benzerlik dönüşümü ile kendiliğinden sağlanır.

Zerre fazın bağıl yoğunluğu sabit olmadığından, (3.22) ifadesinden, (3.177) benzerlik dönüşümü ile aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$KH' + K'H + KN = 0 \tag{3.178}$$

(3.176) ve (3.177) benzerlik dönüşümleri ile (3.132) denkleminin x, y, z doğrultularındaki bileşenlerinden sırasıyla

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \nu m'' + hm' - mh' + \mathfrak{g}\gamma(T_w - T_\infty)\theta - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} m + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(M - m) + x\left(\nu h''' + hh'' - h'^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(N - h')\right) \tag{3.179}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \nu g'' + hg' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(G - g) \tag{3.180}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -\nu h'' - hh' + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(H + h) \tag{3.181}$$

elde edilir.

(3.181) ve (3.179) sırasıyla x ve z' ye göre türetilip eşitlenirse

$$\left[\nu m'' + hm' - mh' + \mathfrak{g}\gamma(T_w - T_\infty)\theta - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} m + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(M - m) + x\left(\nu h''' + hh'' - h'^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(N - h')\right)\right]' = 0 \tag{3.182}$$

yukarıdaki eşitliğin bütün x değerlerinde geçerli olması için

$$\nu h''' + hh'' - h'^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(N - h') = C_1 \tag{3.183}$$

$$\nu m'' + hm' - mh' + \mathfrak{g}\gamma(T_w - T_\infty)\theta - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} m + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(M - m) = C_2 \tag{3.184}$$

(3.181) ve (3.180) sırasıyla y ve z' ye göre türetilip eşitlenirse

$$\left[\nu g'' + hg' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho\tau_\nu} K(G - g)\right]' = 0 \tag{3.185}$$

$$v g'' + h g' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho \tau_v} K(G - g) = C_3 \tag{3.186}$$

elde edilir. C_1, C_2 ve C_3 keyfi integrasyon sabitleri (3.183), (3.184) ve (3.186) denklemlerinin $z \to \infty$ da yazılması ile elde edilir. Bilinmeyen fonksiyonların ve türevlerinin $z \to \infty$ iken aldığı değerler (3.174) - (3.177) ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{gathered}
\lim_{z\to\infty} m = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} m' = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} m'' = 0 \\
\lim_{z\to\infty} g = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} g' = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} g'' = 0 \\
\lim_{z\to\infty} h = az\,, \quad \lim_{z\to\infty} h' = a\,, \quad \lim_{z\to\infty} h'' = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} h''' = 0 \\
\lim_{z\to\infty} M = 0, \quad \lim_{z\to\infty} H = -az\,, \quad \lim_{z\to\infty} G = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} N = a\,, \\
\lim_{z\to\infty} \theta = 0, \quad \lim_{z\to\infty} \theta_p = 0
\end{gathered} \tag{3.187}$$

Yukarıda verilen şartların uygulanması ile integrasyon sabitleri hesaplanmış olur.

$$C_1 = -a^2 \left(1 + \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}\right), \quad C_2 = 0\,, C_3 = 0 \tag{3.188}$$

İntegrasyon sabitlerinin (3.183), (3.184) ve (3.186) da yerine yazılması ile aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir.

$$v h''' + h h'' - h'^2 - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} h' + \frac{1}{\rho \tau_v} K(N - h') + a^2 \left(1 + \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}\right) = 0\,, \tag{3.189}$$

$$v m'' + h m' - m h' + \mathfrak{g}\gamma (T_w - T_\infty)\theta - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} m + \frac{1}{\rho \tau_v} K(M - m) = 0 \tag{3.190}$$

$$v g'' + h g' - \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho} g + \frac{1}{\rho \tau_v} K(G - g) = 0 \tag{3.191}$$

(3.176) ve (3.177) benzerlik dönüşümleri ile (3.40) denkleminin x, y, z doğrultularındaki bileşenlerinden sırasıyla

$$H M' + M N + \frac{1}{\tau_v}(M - m) + x \left(H N' + N^2 + \frac{1}{\tau_v}(N - h') \right) = 0 \tag{3.192}$$

$$HG' + \frac{1}{\tau_v}(G - g) = 0 \tag{3.193}$$

$$HH' + \frac{1}{\tau_v}(H + h) = 0 \tag{3.194}$$

(3.192) denkleminin bütün x değerlerinde geçerli olabilmesi için,

$$HM' + MN + \frac{1}{\tau_v}(M - m) = 0 \tag{3.195}$$

$$HN' + N^2 + \frac{1}{\tau_v}(N - h') = 0 \tag{3.196}$$

olmalıdır.

(3.176) ve (3.177) benzerlik dönüşümlerinin (3.133) ve (3.42) de yerine yazılması ile

$$\theta'' + \frac{\rho c_p}{k} h\theta' + \frac{c_s}{k\tau_T} K\left(\theta_p - \theta\right) + \frac{Q_0}{k}\theta = 0 \tag{3.197}$$

$$H{\theta_p}' + \frac{1}{\tau_T}\left(\theta_p - \theta\right) = 0 \tag{3.198}$$

elde edilir. Böylece problemin çözümü, (3.178), (3.189) - (3.191), (3.193) - (3.198) denklemlerinden oluşan adi diferansiyel denklem sisteminin çözümüne indirgenmiş olur. İlgili sınır şartları ise (3.174) - (3.177) denklemleri yardımıyla elde edilir.

$$\lim_{z\to\infty} m = 0\,, \quad m(0) = 0, \lim_{z\to\infty} g = 0\,, \quad g(0) = V_0$$

$$\lim_{z\to\infty} h' = a\,, \quad h(0) = 0\,, \quad h'(0) = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} M = 0\,, \quad \lim_{z\to\infty} G = 0\,, \lim_{z\to\infty} N = a\,, \lim_{\eta\to\infty} H = \lim_{\eta\to\infty}(-h)\,, \lim_{z\to\infty} K = \rho_{p\infty}$$

$$\lim_{z\to\infty} \theta = 0, \quad \theta(0) = 1, \quad \lim_{z\to\infty} \theta_p = 0 \tag{3.199}$$

Kütlenin korunumundan gelen (3.178) denklemi, Lineer momentumun korunumundan gelen (3.189) - (3.191), (3.193) - (3.196) denklemleri ve enerjinin korunumundan gelen (3.197), (3.198) denklemlerinin oluşturduğu denklem sistemi ve ilgili sınır şartları (3.199) a, yeni parametre η olmak üzere

$$z = \sqrt{\frac{\nu}{a}}\eta$$

$$m = \sqrt{a\nu}m^*, \quad g = V_0 g^*, \quad h = \sqrt{a\nu}h^* \tag{3.200}$$

$$M = \sqrt{a\nu}M^*, \quad G = V_0 G^*, \quad N = aN^*, \quad H = \sqrt{a\nu}H^*, \quad K = \rho K^*$$

boyutsuzlaştırmasının uygulanması ile ulaşılan denklemler sırasıyla

$$KH' + K'H + KN = 0 \tag{3.201}$$

$$h''' + h''h - h'^2 + Ha(1 - h') + \beta_\nu K(N - h') + 1 = 0 \tag{3.202}$$

$$m'' + m'h - mh' - Ha\, m + \lambda\theta + \beta_\nu K(M - m) = 0 \tag{3.203}$$

$$g'' + g'h - Ha\, g + \beta_\nu K(G - g) = 0 \tag{3.204}$$

$$HG' + \beta_\nu(G - g) = 0 \tag{3.205}$$

$$HH' + \beta_\nu(H + h) = 0 \tag{3.206}$$

$$HM' + MN + \beta_\nu(M - m) = 0 \tag{3.207}$$

$$HN' + N^2 + \beta_\nu(N - h') = 0 \tag{3.208}$$

$$\theta'' + \Pr h\theta' + \frac{2}{3}\beta_\nu K\left(\theta_p - \theta\right) + PrQ\theta = 0 \tag{3.209}$$

$$H\theta_p{}' + \frac{2c}{3Pr}\beta_\nu\left(\theta_p - \theta\right) = 0 \tag{3.210}$$

şeklindedir ve sınır koşulları

$$\lim_{\eta\to\infty} m = 0, \quad m(0) = 0, \quad \lim_{\eta\to\infty} g = 0, \quad g(0) = 1$$

$$\lim_{\eta\to\infty} h' = 1, \quad h(0) = 0, \quad h'(0) = 0$$

$$\lim_{\eta\to\infty} M = 0, \quad \lim_{\eta\to\infty} G = 0, \quad \lim_{\eta\to\infty} N = 1, \quad \lim_{\eta\to\infty} H = -\lim_{\eta\to\infty} h \tag{3.211}$$

$$\lim_{\eta\to\infty}\theta = 0 \ , \theta(0) = 1 \ , \ \lim_{\eta\to\infty}\theta_p = 0 \ , \ \lim_{\eta\to\infty}\kappa = \frac{\rho_{p\infty}}{\rho}$$

olarak yazılır. Boyutsuz ifadeler yazılırken * üst indisi yazılmamıştır.

Yukarıdaki denklem sisteminde görülen boyutsuz parametreler; Ha manyetik parametre, Pr Pandtl sayısı, λ taşınım parmetresi, Q ısı üretimi parametresi, β_v zerre etkileşim parametresi, c özgül ısı oranı olup

$$Ha = \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho a}, \quad Pr = \frac{\rho c_p \nu}{k}, \ \lambda = \frac{\mathrm{g}\gamma(T_w - T_\infty)}{a\sqrt{a\nu}}, \qquad Q = \frac{Q_0}{\rho c_p a}, \tag{3.212}$$

$$\beta_v = \frac{1}{\tau_v a} \qquad c = \frac{c_p}{c_s}$$

şeklinde tanımlanmışlardır.

4. BULGULAR

Bu bölümde, bir önceki bölümde dört farklı problem için elde edilen adi diferansiyel denklem sistemleri sayısal yöntem ile çözülmüştür. Parametrelerin çeşitli değerleri için elde edilen grafikler ile birlikte plaka üzerindeki kayma gerilmesinin ve sıcaklık gradyanının ilgili parametrelerin çeşitli değerlerindeki büyüklükleri tablo oluşturularak verilmiştir. Sayısal çözüm için tercih edilen Matlab yazılımında çalışan "bvp4c" (boundary value problem 4 collocation) algoritmasının sınır değeri problemlerinin sayısal çözümlerini bulmada başarılı ve verimli olduğunu gösteren çalışmalar [88], [100] mevcuttur. Algoritma ile ilgili bilgi için Kierzenka ve Shampine'in [105] çalışmasına başvurulabilir.

4.1. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ SİLİNDİRİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN YATAY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bölüm 3 kısım 2 de elde edilen (3.71) - (3.82) adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü, ilgili sınır koşulları (3.83) uygulanarak, bvp4c algoritması kullanılarak elde edilmiştir. Çözüm aşamasında, durma noktasından yeterince uzak bölgenin sınır koşullarındaki sonsuzluk ifadesi uygun bir sonlu değer olan $\eta_\infty = 8$ olarak seçilmiştir, bağıl ve mutlak tolerans 10^{-7} olarak alınmıştır. Hız bileşenlerinin ve sıcaklık dağılımlarının grafikleri parametrelerin çeşitli değerleri için ayrı ayrı verilmiştir. Plaka üzerindeki kayma gerilmesi ve ısı akısı değerleri ilgili parametrelerin çeşitli değerleri için tablo olarak verilmiştir. Grafikler çizilirken, aksi belirtilmedikçe, parametrelerin değerleri; $Ha = 1$, $\beta_v = 1.2$, $Pr = 0.7$, $Re = 100$, $Ec = 0.25$, $\frac{ax}{U_0} = 0.2$, $c = 3$ olarak alınmıştır. Disipasyon terimlerini hesaba katmak için gerekli olan $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ değerleri ise 0.2 olarak alınmıştır.

Hız bileşenlerinin boyutsuz ifadeleri, (3.45) ve (3.46) benzerlik dönüşümlerine (3.70) boyutsuzlaştırması uygulanarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{u}{U_0} = f(\eta) + \frac{ax}{U_0} h'(\eta)$$

$$\frac{v}{ay} = h'(\eta)$$

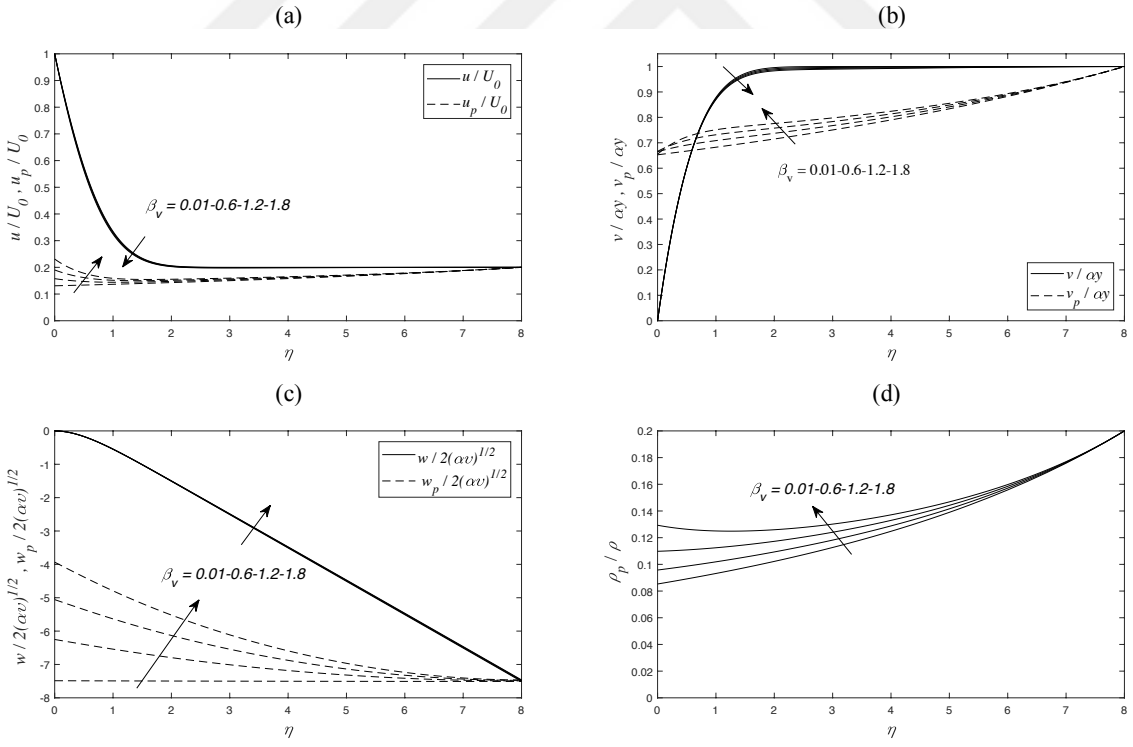
$$\frac{w}{2\sqrt{av}} = -h(\eta)$$

$$\frac{u_p}{U_0} = F(\eta) + \frac{ax}{U_0} N(\eta) \qquad (4.1)$$

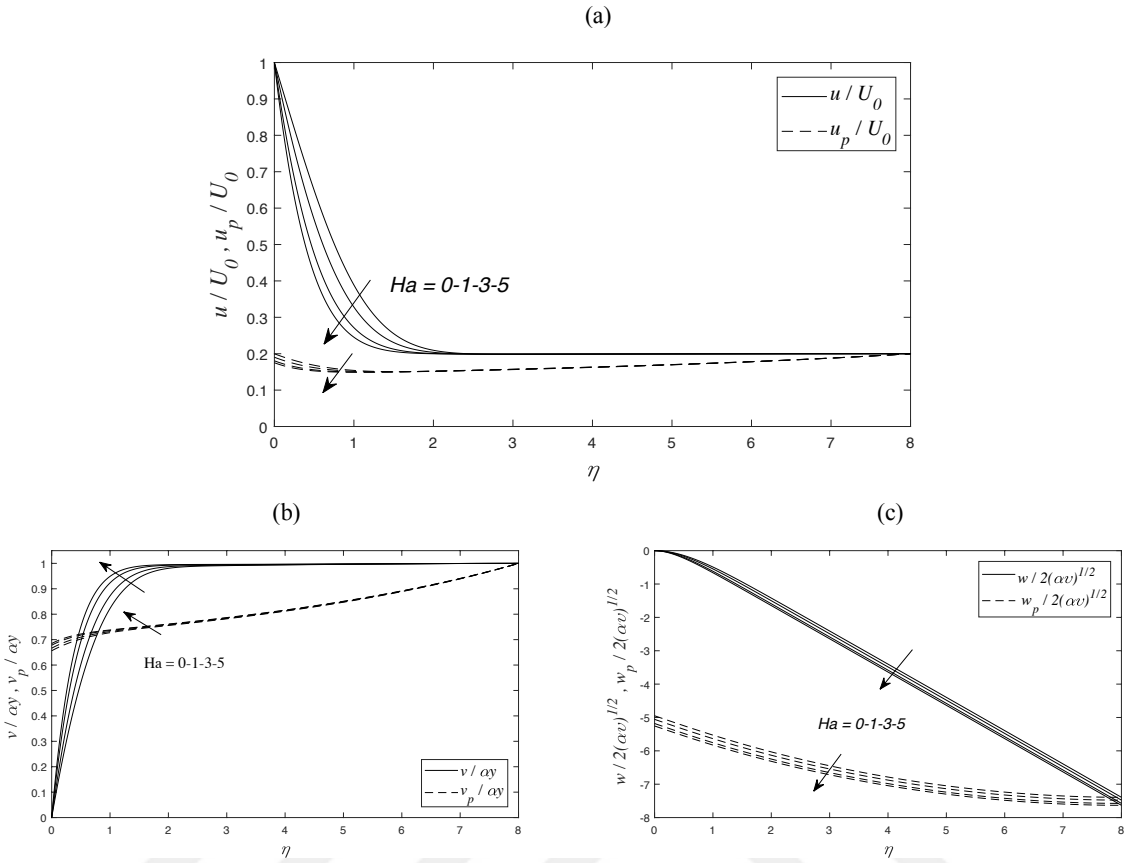
$$\frac{v_p}{ay} = N(\eta)$$

$$\frac{w}{\sqrt{av}} = H(\eta)$$

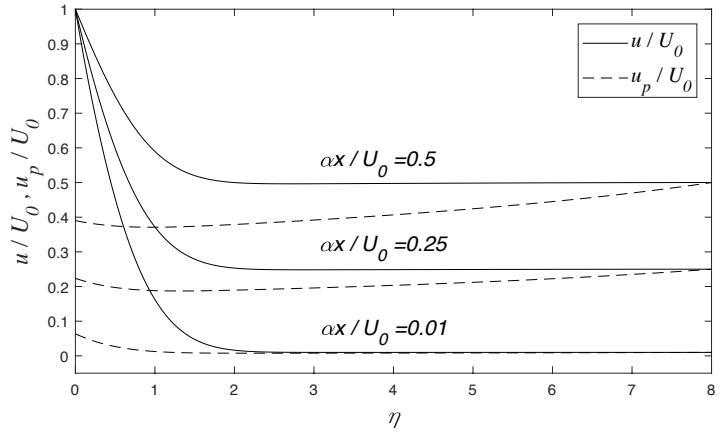
Akışkan ve zerre faz için boyutsuz hız bileşenlerinin parametrelerin çeşitli değerlerinde elde edilen grafikleri Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 te verilmiştir.



Şekil 4.1: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde akışkan zerre etkileşim parametresinin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri (d) zerre yoğunluk oranı fonksiyonu.



Şekil 4.2: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde manyetik parametrenin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri.



Şekil 4.3: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde boyutsuz hızların x doğrultusundaki bileşenlerinin ax / U_0 oranı ile değişimi.

Plaka üzerindeki kayma gerilmesinin x ve y doğrultularındaki bileşenleri, sıkıştırılamayan Newtonian bir akışkan için gerilme tansörünün ilgili bileşenlerinden yazılır. Sıkıştırılamayan Newtonian bir akışkan için kayma gerilmesi tansörünün t_{xz} ve t_{yz} bileşenleri aşağıdaki şekildedir.

$$t_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$t_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{4.2}$$

(3.45) benzerlik dönüşümlerinin yukarıdaki ifadede yerine yazılması ve elde edilen eşitliklere (3.70) in uygulanması ile

$$\tau_{wx} = -\frac{t_{xz}}{\mu U_0\sqrt{a/\upsilon}}\Big|_{z=0} = -f'(0) - \frac{ax}{U_0}h''(0)$$
$$\tau_{wy} = -\frac{t_{yz}}{\mu a\bar{y}}\Big|_{z=0} = -h''(0) \tag{4.3}$$

plaka üzerindeki kayma gerilmelerinin boyutsuz ifadeleri elde edilir. Kayma gerilmelerinin ilgili parametrelerin çeşitli büyüklüklerinde aldıkları değerler Tablo 4-1 ile verilmiştir.

Tablo 4-1: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde Ha ve β_v parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerindeki kayma gerilmesi değerleri.

Ha	β_v	τ_{wx}	τ_{wy}
0	0.01	0.6766844	-1.3119914
	0.6	0.6984379	-1.3170114
	1.2	0.7244792	-1.3261213
	1.8	0.7555388	-1.3398016
1	0.01	1.0152311	-1.6453758
	0.6	1.0323962	-1.6500579
	1.2	1.0529675	-1.6580835
	1.8	1.0776407	-1.6699327
3	0.01	1.5028665	-2.1664191
	0.6	1.5156834	-2.1705428
	1.2	1.5311127	-2.1772921
	1.8	1.5497626	-2.1871197
5	0.01	1.8753997	-2.5858330
	0.6	1.8860278	-2.5895310
	1.2	1.8988667	-2.5954806
	1.8	1.9144609	-2.6041064

Sıcaklıkların dağılımları için boyutsuz ifadeler, (3.45) ve (3.46) benzerlik dönüşümlerine (3.70) boyutsuzlaştırması uygulanarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{T-T_\infty}{(T_w-T_\infty)} = \theta_0(\eta) + \bar{x}\theta_1(\eta) + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\theta_2(\eta)$$

$$\frac{T_p-T_\infty}{T_w-T_\infty} = \theta_{p0}(\eta) + \bar{x}\theta_{p1}(\eta) + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\theta_{p2}(\eta) \quad (4.4)$$

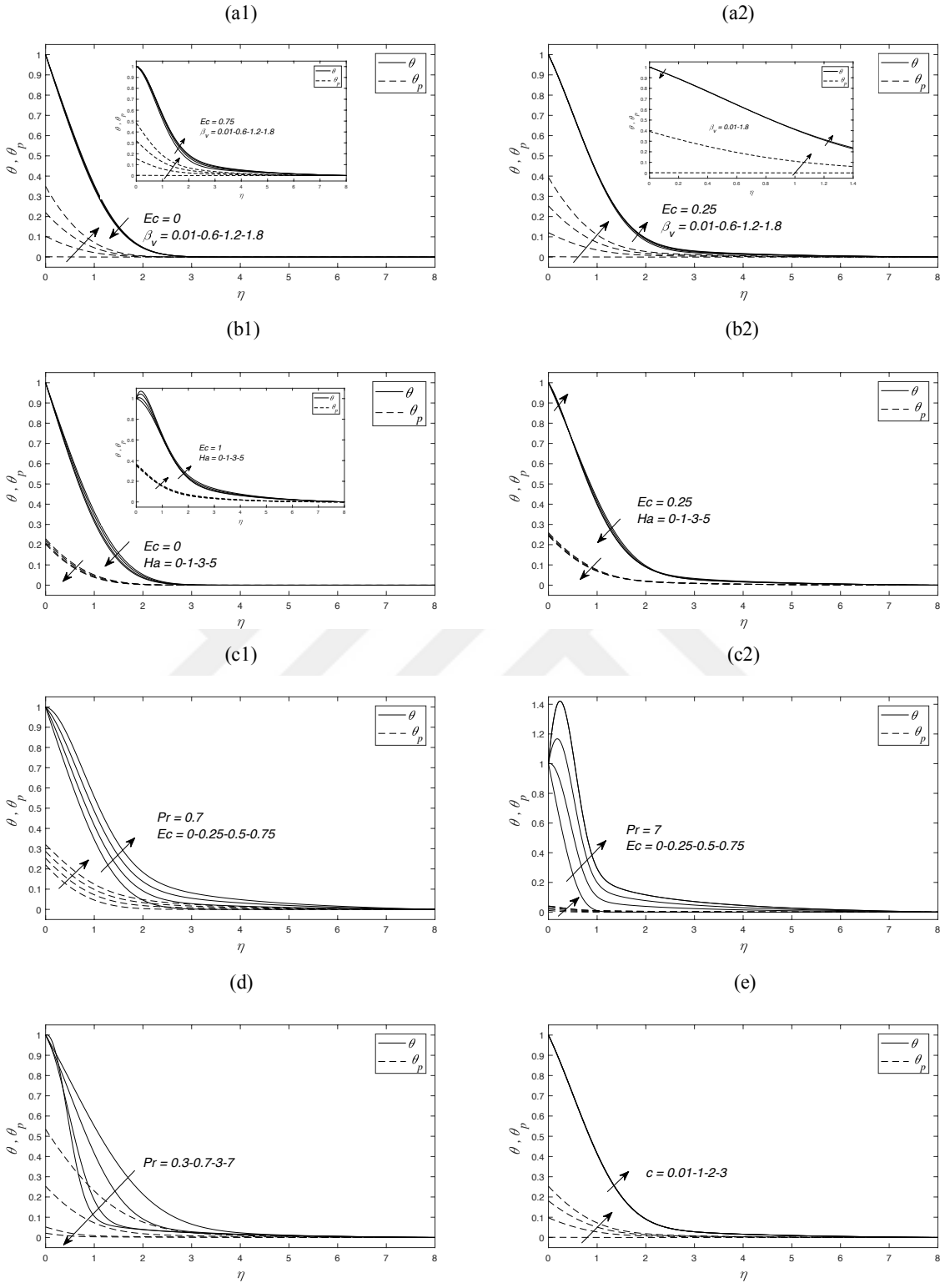
Sıcaklık dağılımlarının parametrelerin çeşitli değerleri için elde edilen grafikleri Şekil 4.4 te verilmiştir. Plaka yüzeyindeki ısı akısı (3.45) te verilen sıcaklık fonksiyonu ve Fourier ısı iletim yasası ile verilir ve gerekli boyutsuzlaştırma (3.70) yardımı ile aşağıdaki şekilde yazılır. İlgili parametrelerin çeşitli değerleri için plaka üzerinde sıcaklık gradyanının aldığı değerler Tablo 4-2 ile verilmiştir.

$$q_w = -k\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} \quad (4.5)$$

$$\frac{q_w}{k\sqrt{a/v}\,(T_w-T_\infty)}\Bigg|_{z=0} = -\theta_0{}'(0) - \bar{x}\theta_1{}'(0) - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\theta_2{}'(0) \quad (4.6)$$

Tablo 4-2: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde ilgili parametrelerin çeşitli değerlerinde plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı.

Ec	β_v	Ha	c	$-\theta_0{}'(0) - \bar{x}\theta_1{}'(0) - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\theta_2{}'(0)$	
				$Pr = 0.7$	$Pr = 7$
0	0.01	1	3	0.6912544	1.6343497
	0.6			0.7106789	1.6432162
	1.2			0.7307333	1.6553305
	1.8			0.7503829	1.6717164
0.25	0	1	3	0.4986085	0.0794065
	0.01			0.4984839	0.0770075
	0.6			0.4958087	-0.0404269
	1			0.4983798	-0.0956023
	1.2			0.5006945	-0.1166742
	1.8			0.5105550	-0.1571845
0.25	1.2	0	3	0.5480400	0.3337956
		3		0.4223780	-0.8384809
		5		0.3551800	-1.4358749
0.25	1.2	1	0.01	0.5122970	-0.1161111
			1	0.5078816	-0.1163007
			2	0.5040403	-0.1164891
0.5	0.01	1	3	0.3057133	-1.4803347
	0.6			0.2809391	-1.7240702
	1.2			0.2706558	-1.8886789
	1.8			0.2707271	-1.9860853
0.75	0.01	1	3	0.1129428	-3.0376769
	0.6			0.0660695	-3.4077134
	1.2			0.0406170	-3.6606837
	1.8			0.0308991	-3.8149862



Şekil 4.4: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde parametrelerin çeşitli değerleri için sıcaklık dağılımının (a) akışkan zerre etkileşim parametresi ile değişimi (b) manyetik parametre ile değişimi (c) Eckert sayısı ile değişimi (d) Prandtl sayısı ile değişimi (e) akışkan / zerre özgül ısı oranı ile değişimi.

4.2. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ PRİZMATİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN YATAY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bölüm 3 kısım 3 de elde edilen (3.116) - (3.129) adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü, ilgili sınır koşulları (3.130) uygulanarak, bvp4c algoritması kullanılarak elde edilmiştir. Çözüm aşamasında, durma noktasından yeterince uzak bölgenin sınır koşullarındaki sonsuzluk ifadesi uygun bir sonlu değer olan $\eta_\infty = 8$ olarak seçilmiştir, bağıl ve mutlak tolerans 10^{-7} olarak alınmıştır. Hız bileşenlerinin ve sıcaklık dağılımlarının grafikleri parametrelerin çeşitli değerleri için ayrı ayrı verilmiştir. Plaka üzerindeki kayma gerilmesi ve ısı akısı değerleri ilgili parametrelerin çeşitli değerleri için tablo olarak verilmiştir. Grafikler çizilirken, aksi belirtilmedikçe, parametrelerin değerleri; $Ha = 1,\ \beta_v = 1.2,\ Pr = 0.7,\ Re_x = Re_y = 100,$ $Ec_x = Ec_y = 0.25,\ \frac{ay}{V_0} = 0.2,\ \ c = 3$ olarak alınmıştır. Disipasyon terimlerini hesaba katmak için gerekli olan $\bar{y}$ değeri ise 0.2 olarak alınmıştır.

Hız bileşenlerinin boyutsuz ifadeleri, (3.87) ve (3.88) benzerlik dönüşümlerine (3.115) boyutsuzlaştırması uygulanarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{u}{U_0} = f(\eta)$$

$$\frac{v}{V_0} = g(\eta) + \frac{ay}{V_0} h'(\eta)$$

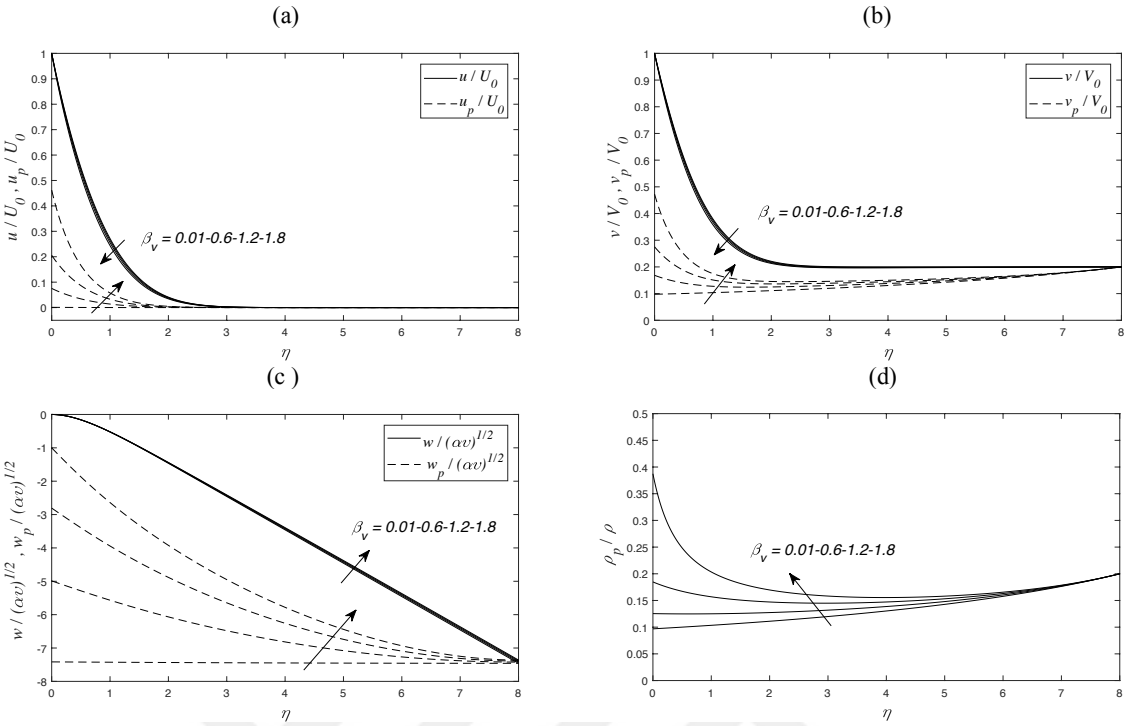
$$\frac{w}{\sqrt{av}} = -h(\eta) \qquad (4.7)$$

$$\frac{u_p}{U_0} = F(\eta)$$

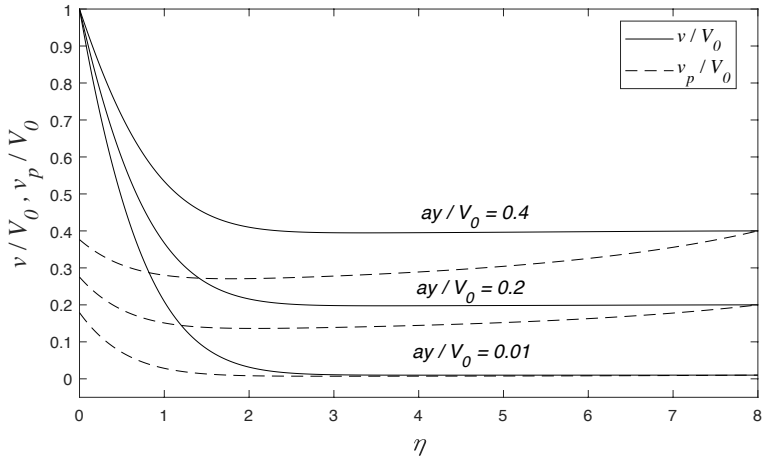
$$\frac{v_p}{V_0} = G(\eta) + \frac{ay}{V_0} N(\eta)$$

$$\frac{w_p}{\sqrt{av}} = H(\eta)$$

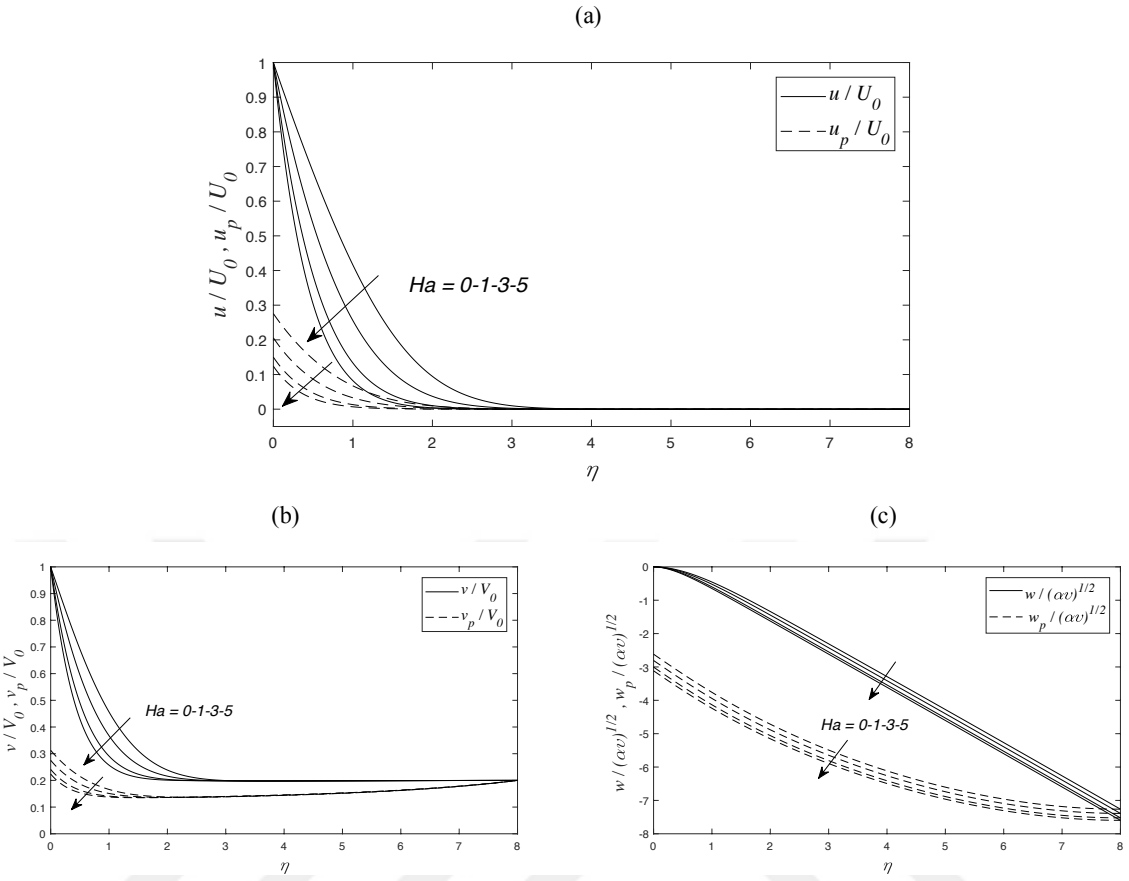
Akışkan ve katı faz için boyutsuz hız bileşenlerinin parametrelerin çeşitli değerlerinde elde edilen grafikler Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 de verilmiştir.



Şekil 4.5: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde akışkan zerre etkileşim parametresinin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri (d) zerre yoğunluk oranı fonksiyonu.



Şekil 4.6: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde boyutsuz hızların y doğrultusundaki bileşenlerinin ay / V_0 oranı ile değişimi.



Şekil 4.7: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde manyetik parametrenin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri.

Plaka üzerindeki kayma gerilmesinin x ve y doğrultularındaki bileşenleri, sıkıştırılamayan Newtonian bir akışkan için gerilme tansörünün ilgili bileşenlerinden yazılır. (3.87) benzerlik dönüşümlerinin (4.2) de yerine yazılması ve elde edilen eşitliğe (3.115) in uygulanması ile bulunan plaka üzerindeki kayma gerilmelerinin boyutsuz ifadeleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\tau_{wx} = -\frac{t_{xz}}{\mu U_0 \sqrt{a/\upsilon}}\Bigg|_{z=0} = -f'(0)$$

$$\tau_{wy} = -\frac{t_{yz}}{\mu V_0 \sqrt{a/\upsilon}}\Bigg|_{z=0} = -g'(0) - \frac{ay}{V_0} h''(0) \tag{4.8}$$

Kayma gerilmelerinin ilgili parametrelerin çeşitli büyüklüklerinde aldıkları değerler Tablo 4-3 ile verilmiştir.

Tablo 4-3: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde Ha ve β_v parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerindeki kayma gerilmesi değerleri.

Ha	β_v	τ_{wx}	τ_{wy}
0	0.01	0.5711106	0.5652384
	0.6	0.6147700	0.5967232
	1.2	0.6731437	0.6424434
	1.8	0.7521174	0.7184508
1	0.01	1.1127478	0.9448425
	0.6	1.1410525	0.9685343
	1.2	1.1815742	1.0033782
	1.8	1.2424703	1.0618780
3	0.01	1.7888317	1.4595124
	0.6	1.8078472	1.4767192
	1.2	1.8364496	1.5024171
	1.8	1.8825012	1.5460241
5	0.01	2.2778133	1.8424027
	0.6	2.2930841	1.8565598
	1.2	2.3165381	1.8778874
	1.8	2.3553747	1.9143156

Sıcaklıkların dağılımları için boyutsuz ifadeler, (3.87) ve (3.88) benzerlik dönüşümlerine (3.115) boyutsuzlaştırması uygulanarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{T-T_\infty}{(T_w-T_\infty)} = \theta_0(\eta) + \bar{y}\theta_1(\eta) + \bar{y}^2\theta_2(\eta)$$
$$\frac{T_p-T_\infty}{T_w-T_\infty} = \theta_{p0}(\eta) + \bar{y}\theta_{p1}(\eta) + \bar{y}^2\theta_{p2}(\eta) \tag{4.9}$$

Sıcaklıkların dağılımlarının parametrelerin çeşitli değerleri için elde edilen grafikleri Şekil 4.8 de verilmiştir.

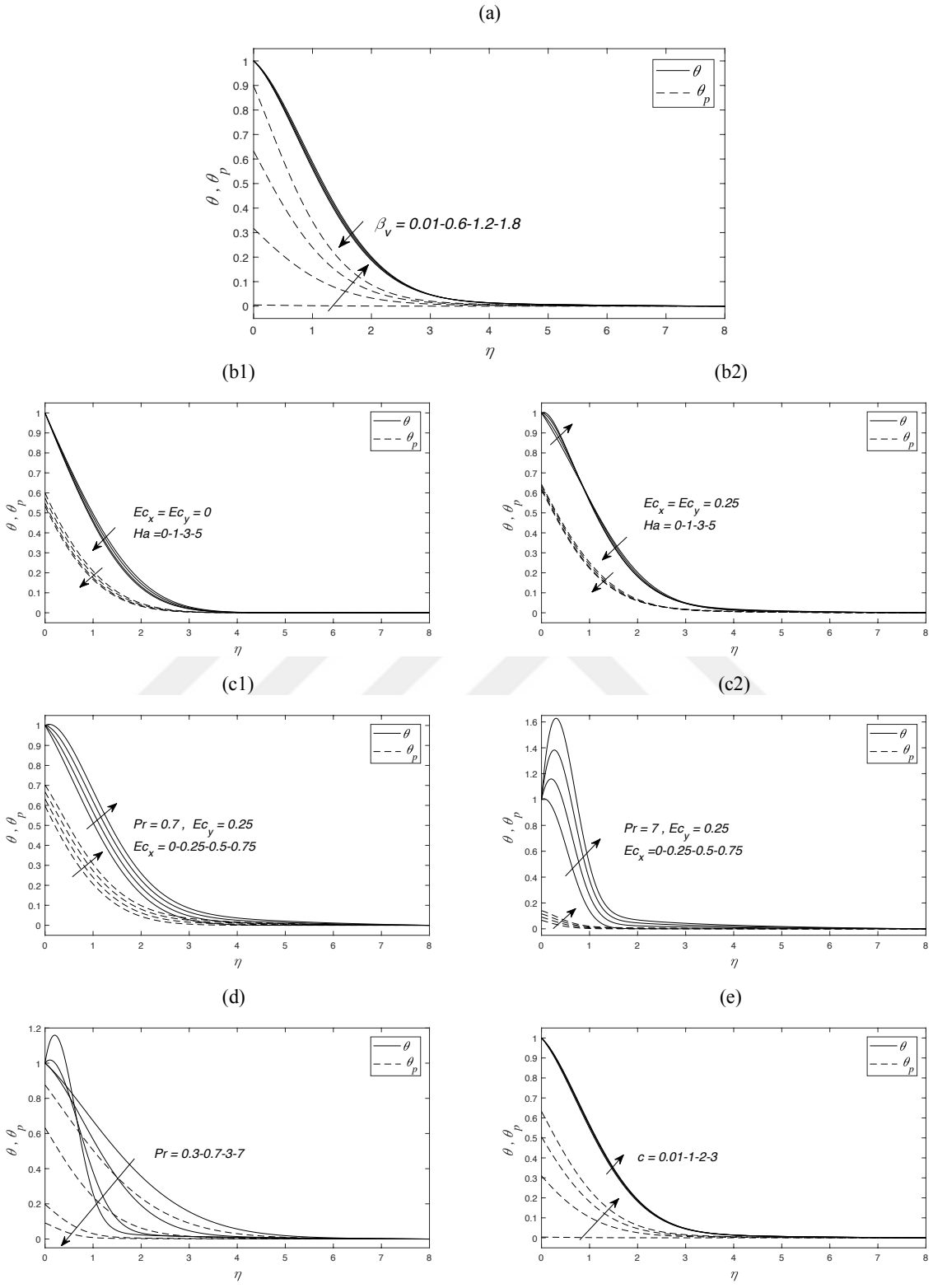
Plaka üzerindeki ısı akısı (3.87) de verilen sıcaklık fonksiyonu ve Fourier ısı iletim yasası ile verilir. Gerekli boyutsuzlaştırma (3.115) yardımı ile aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{q_w}{k\sqrt{a/v}\,(T_w-T_\infty)}\Big|_{z=0} = -\theta_0{}'(0) - \bar{y}\theta_1{}'(0) - \bar{y}^2\theta_2{}'(0) \tag{4.10}$$

İlgili parametrelerin çeşitli değerleri için plaka üzerindeki sıcaklık gradyanının aldığı değerler Tablo 4-4 ile verilmiştir.

Tablo 4-4: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde β_v, Ha, Ec, c ve Pr parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerinde sıcaklık gradyanının değerleri.

Ec	β_v	Ha	c	$-\theta_0'(0) - \bar{y}\theta_1'(0) - \bar{y}^2\theta_2'(0)$	
				$Pr = 0.7$	$Pr = 7$
0	0.01	1	3	0.5161245	1.2511991
	0.6			0.5437716	1.2646879
	1.2			0.5663552	1.2904980
	1.8			0.5778168	1.3497589
0.25	0	1	3	0.1924563	-1.5079270
	0.01			0.1927386	-1.5095506
	0.6			0.2088255	-1.5936914
	1			0.2170529	-1.6393435
	1.2			0.2195661	-1.6581842
	1.8			0.2178541	-1.6773079
0.25	1.2	0	3	0.3658998	-0.3838167
		3		0.0175859	-3.4690241
		5		-0.1382913	-4.8761991
0.25	1.2	1	0.01	1.1815742	-1.6540298
			1	0.2486488	-1.6554499
			2	0.2316921	-1.6568388
0.5	0.01	1	3	-0.1306472	-4.2703004
	0.6			-0.1261207	-4.4520708
	1.2			-0.1272231	-4.6068665
	1.8			-0.1421087	-4.7043746
0.75	0.01	1	3	-0.4540331	-7.0310502
	0.6			-0.4610668	-7.3104502
	1.2			-0.4740122	-7.5555488
	1.8			-0.5020714	-7.7314414



Şekil 4.8: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde parametrelerin çeşitli değerleri için sıcaklık dağılımının (a) akışkan zerre etkileşim parametresi ile değişimi (b) manyetik parametre ile değişimi (c) Eckert sayısı ile değişimi (d) Prandtl sayısı ile değişimi (e) akışkan / zerre özgül ısı oranı ile değişimi.

4.3. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ SİLİNDİRİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN DÜŞEY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bölüm 3 kısım 4 te elde edilen (3.162) - (3.171) adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü, ilgili sınır koşulları (3.172) uygulanarak, bvp4c algoritması kullanılarak elde edilmiştir. Çözüm aşamasında, durma noktasından yeterince uzak bölgenin sınır koşullarındaki sonsuzluk ifadesi uygun bir sonlu değer olan $\eta_\infty = 8$ olarak seçilmiştir, bağıl ve mutlak tolerans 10^{-7} olarak alınmıştır. Hız bileşenlerinin ve sıcaklık dağılımlarının grafikleri parametrelerin çeşitli değerleri için ayrı ayrı verilmiştir. Plaka üzerindeki kayma gerilmesi ve ısı akısı değerleri ilgili parametrelerin çeşitli değerleri için tablo olarak verilmiştir. Grafikler çizilirken, aksi belirtilmedikçe, parametrelerin değerleri; $Ha = 1,\ \beta_v = 1.2,\ Pr = 0.7,\ c = 3$, $\frac{ay}{V_0} = 0.2$, $\sqrt{\frac{\upsilon}{ax^2}} = 0.4$, $\lambda = 0.5, Q = 0.2$ olarak alınmıştır.

Hız bileşenlerinin boyutsuz ifadeleri, (3.136) ve (3.137) benzerlik dönüşümlerine (3.161) boyutsuzlaştırması uygulanarak aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\frac{u}{ax} = \sqrt{\frac{\upsilon}{ax^2}}m(\eta) + h'(\eta)$$

$$\frac{v}{V_0} = g(\eta) + \frac{ay}{V_0}h'(\eta)$$

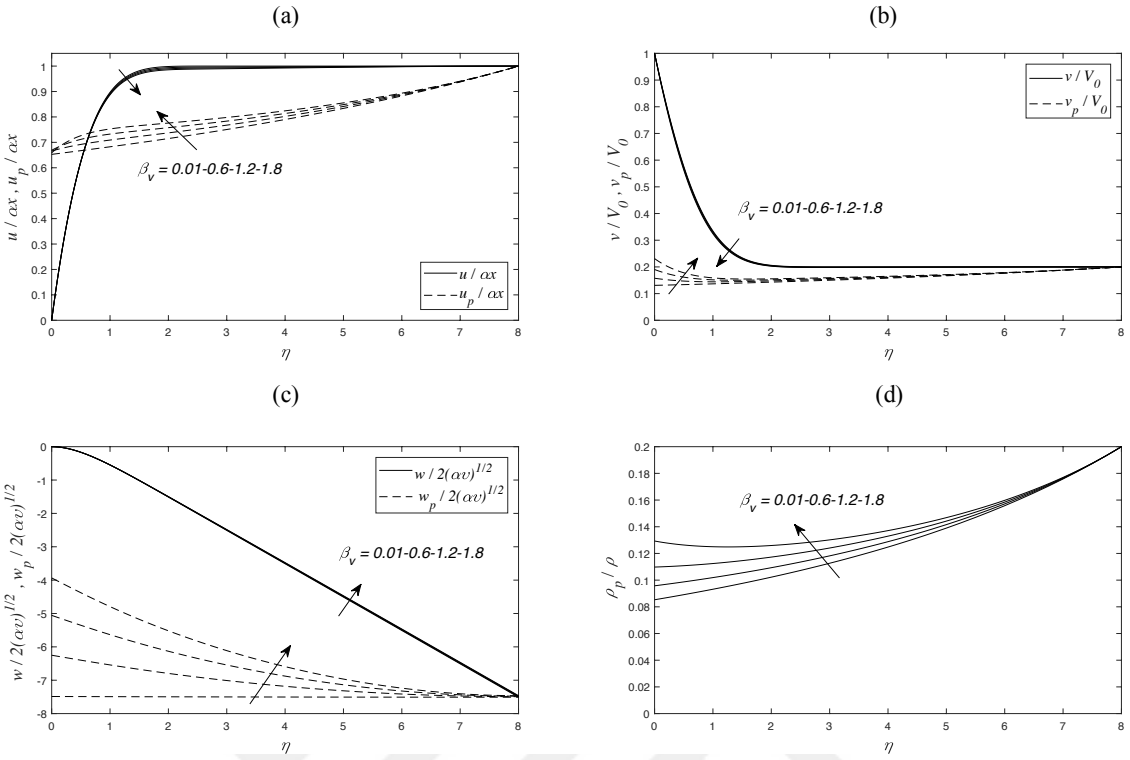
$$\frac{w}{2\sqrt{av}} = -h(\eta)$$

$$\frac{u_p}{ax} = \sqrt{\frac{\upsilon}{ax^2}}M(\eta) + N(\eta)$$

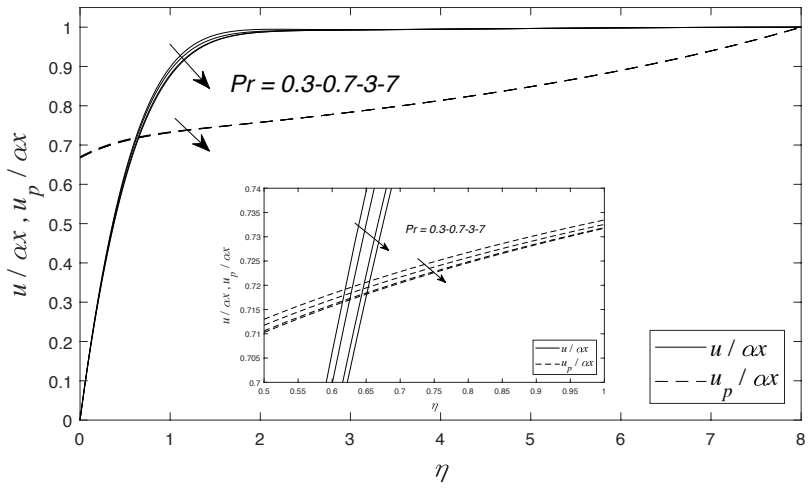
$$\frac{v_p}{V_0} = G(\eta) + \frac{ay}{V_0}N(\eta)$$

$$\frac{w_p}{\sqrt{av}} = H(\eta) \qquad (4.11)$$

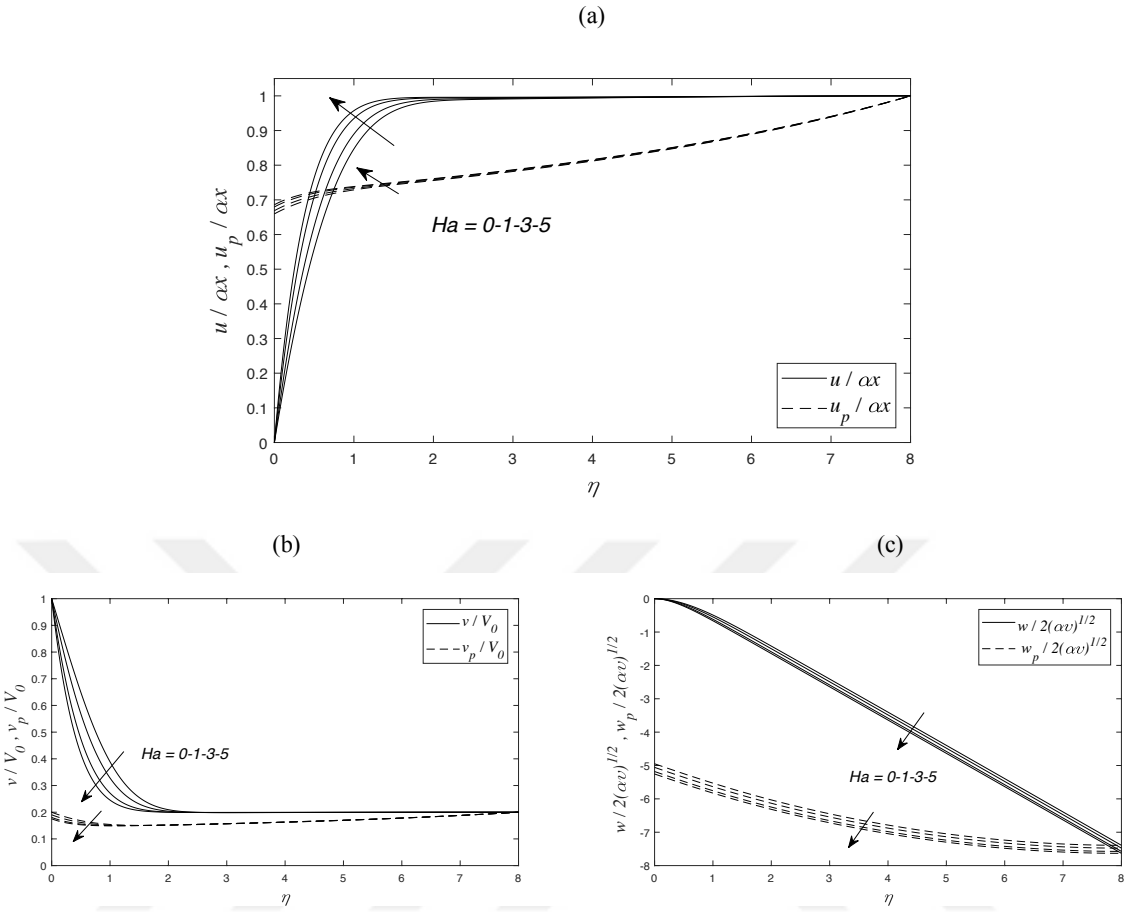
Akışkan ve katı faz için boyutsuz hız bileşenlerinin parametrelerin çeşitli değerlerinde elde edilen grafikleri Şekil 4.9, Şekil 4.10, Şekil 4.11, Şekil 4.12, Şekil 4.13 ve Şekil 4.14 te verilmiştir.



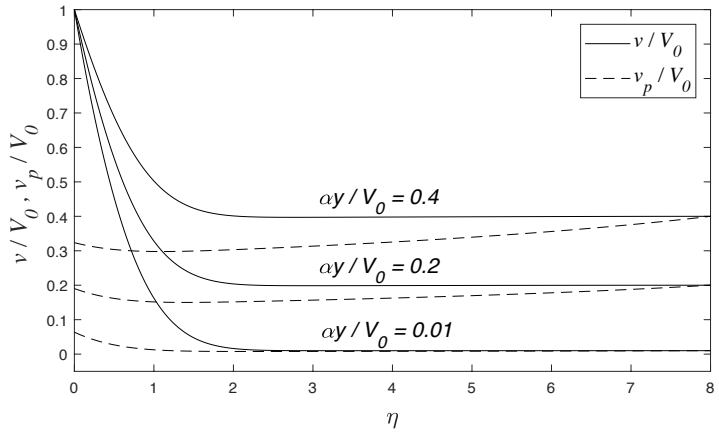
Şekil 4.9: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde akışkan zerre etkileşim parametresinin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri (d) zerre yoğunluk oranı fonksiyonu.



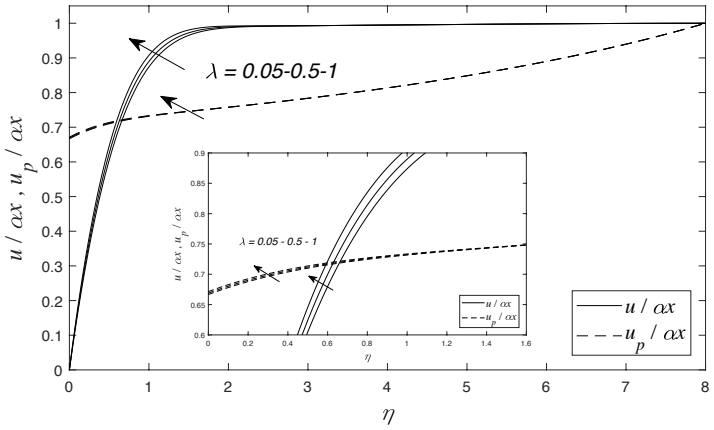
Şekil 4.10: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde Prandtl sayısının çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi.



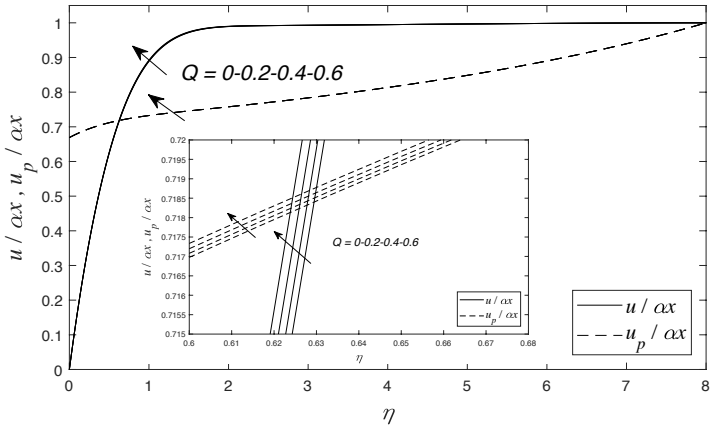
Şekil 4.11: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde manyetik parametrenin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri.



Şekil 4.12: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde y doğrultusundaki boyutsuz hız bileşenlerinin $\alpha y / V_0$ oranı ile değişimi.



Şekil 4.13: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde taşınım parametresinin çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi.



Şekil 4.14: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde ısı üretim parametresinin çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi.

Plaka üzerindeki kayma gerilmesinin x ve y doğrultularındaki bileşenleri, sıkıştırılamayan Newtonian bir akışkan için gerilme tansörünün ilgili bileşenlerinden yazılır. (3.136) benzerlik dönüşümlerinin (4.2) ifadesinde yerine yazılması ve elde edilen eşitliğe (3.161) in uygulanması ile bulunan plaka üzerindeki kayma gerilmelerinin boyutsuz ifadeleri sırasıyla aşağıda verilmiştir, parametrelerin çeşitli büyüklüklerinde aldıkları değerler Tablo 4-5 ile verilmiştir.

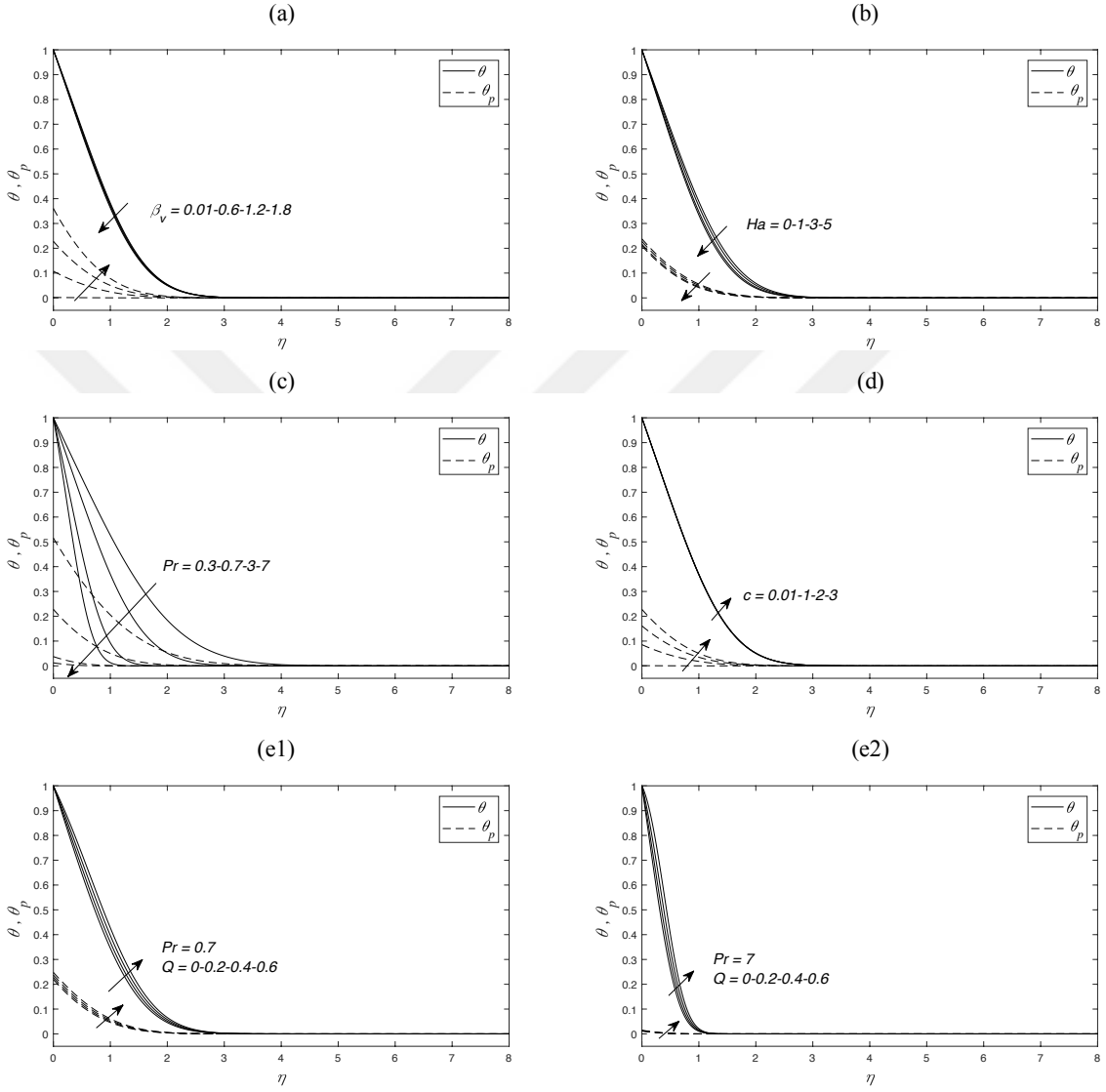
$$\tau_{wx} = -\frac{t_{xz}}{\mu a x\sqrt{a/\upsilon}}\Big|_{z=0} = -\sqrt{\frac{\upsilon}{ax^2}}\,m'(0) - h''(0)$$

$$\tau_{wy} = -\frac{t_{yz}}{\mu V_0\sqrt{a/\upsilon}}\Big|_{z=0} = -g'(0) - \frac{ay}{V_0}h''(0) \qquad (4.12)$$

Tablo 4-5: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde Ha, λ, Q, c, β_v ve Pr parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerindeki kayma gerilmesi değerleri.

Ha	λ	Q	c	β_v	τ_{wx}		τ_{wy}	
					$Pr = 0.7$	$Pr = 7$	$Pr = 0.7$	$Pr = 7$
0	0.5	0.2	3	0.01	-1.4143165	-1.3731264	0.6766844	0.6766844
				0.6	-1.4177119	-1.3777412	0.6984377	0.6984379
				1.2	-1.4250930	-1.3863267	0.7244792	0.7244792
				1.8	-1.4370339	-1.3993594	0.7555388	0.7555388
1	0.5	0.2	0.01	0.01	-1.7320549	-1.6990255	1.0152311	1.0152311
				0.6	-1.7355587	-1.7034269	1.0323962	1.0323962
				1.2	-1.7422136	-1.7110953	1.0529675	1.0529675
				1.8	-1.7525055	-1.7225041	1.0776407	1.0776407
1	0.5	0.2	1	0.01	-1.7320549	-1.6990255	1.0152311	1.0152311
				0.6	-1.7355764	-1.7034269	1.0323962	1.0323962
				1.2	-1.7422983	-1.7110958	1.0529675	1.0529675
				1.8	-1.7527360	-1.7225058	1.0776407	1.0776407
1	0.5	0.2	2	0.01	-1.7320549	-1.6990255	1.0152311	1.0152311
				0.6	-1.7355936	-1.7034271	1.0323962	1.0323962
				1.2	-1.7423765	-1.7110964	1.0529675	1.0529675
				1.8	-1.7529361	-1.7225076	1.0776407	1.0776407
1	0.5	0	3	0.01	-1.7296556	-1.6958476	1.0152311	1.0152311
				0.6	-1.7332934	-1.7002809	1.0323962	1.0323962
				1.2	-1.7402122	-1.7079924	1.0529675	1.0529675
				1.8	-1.7509473	-1.7194575	1.0776407	1.0776407
1	0.5	0.4	3	0.01	-1.7347352	-1.7029001	1.0152311	1.0152311
				0.6	-1.7381928	-1.7072609	1.0323962	1.0323962
				1.2	-1.7449352	-1.7148762	1.0529675	1.0529675
				1.8	-1.7555096	-1.7262195	1.0776407	1.0776407
1	0.5	0.6	3	0.01	-1.7377581	-1.7077569	1.0152311	1.0152311
				0.6	-1.7410986	-1.7120632	1.0323962	1.0323962
				1.2	-1.7477276	-1.7196047	1.0529675	1.0529675
				1.8	-1.7581995	-1.7308536	1.0776407	1.0776407
1	0.05	0.2	3	0.01	-1.6540437	-1.6507408	1.0152311	1.0152311
				0.6	-1.6586132	-1.6553949	1.0323962	1.0323962
				1.2	-1.6665199	-1.6633849	1.0529675	1.0529675
				1.8	-1.6782503	-1.6751903	1.0776407	1.0776407
1	0.75	0.2	3	0.01	-1.7753945	-1.7258503	1.0152311	1.0152311
				0.6	-1.7783863	-1.7301118	1.0323962	1.0323962
				1.2	-1.7846301	-1.7376036	1.0529675	1.0529675
				1.8	-1.7946969	-1.7487976	1.0776407	1.0776407
1	1	0.2	3	0.01	-1.8187341	-1.7526752	1.0152311	1.0152311
				0.6	-1.8211624	-1.7567965	1.0323962	1.0323962
				1.2	-1.8268122	-1.7641103	1.0529675	1.0529675
				1.8	-1.8362849	-1.7750858	1.0776407	1.0776407
1	0.5	0.2	3	0.01	-1.7320549	-1.6990255	1.0152311	1.0152311
				0.6	-1.7356101	-1.7034272	1.0323962	1.0323962
				1.2	-1.7424478	-1.7110969	1.0529675	1.0529675
				1.8	-1.7531088	-1.7225093	1.0776407	1.0776407
3	0.5	0.2	3	0.01	-2.2364953	-2.2119793	1.5028665	1.5028665
				0.6	-2.2399218	-2.2159275	1.5156834	1.5156834
				1.2	-2.2459407	-2.2224573	1.5311127	1.5311127
				1.8	-2.2550404	-2.2320164	1.5497626	1.5497626
5	0.5	0.2	3	0.01	-2.6466091	-2.6267128	1.8753997	1.8753997
				0.6	-2.6498037	-2.6302823	1.8860278	1.8860278
				1.2	-2.6552267	-2.6360718	1.8988667	1.8988667
				1.8	-2.6633282	-2.6445019	1.9144609	1.9144609

Sıcaklıkların dağılımları için ifadeler, (3.136) ve (3.137) benzerlik dönüşümleri ile verilmişti. Sıcaklıkların dağılımlarının parametrelerin çeşitli değerleri için elde edilen grafikleri Şekil 4.15 te verilmiştir.



Şekil 4.15: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde parametrelerin çeşitli değerleri için sıcaklık dağılımının (a) akışkan zerre etkileşim parametresi ile değişimi (b) manyetik parametre ile değişimi (c) Prandtl sayısı ile değişimi (d) akışkan / zerre özgül ısı oranı ile değişimi (e) ısı üretim parametresi ile değişimi.

Plaka üzerindeki ısı akısı (3.136) ile verilen sıcaklık fonksiyonu ve Fourier kanunu ile verilir

$$\frac{q_w}{k\sqrt{a/v}\,(T_w - T_\infty)}\Bigg|_{z=0} = -\theta'(0) \tag{4.13}$$

İlgili parametrelerin çeşitli değerleri için plaka üzerindeki sıcaklık gradyanının aldığı değerler Tablo 4-6 ile verilmiştir.

Tablo 4-6: Katı zerreler içeren silindirik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde β_v, Ha, λ, Q, c, ve Pr parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerinde sıcaklık gradyanının değerleri.

β_v	Ha	λ	Q	c	$-\theta'(0)$	
					$Pr = 0.7$	$Pr = 7$
0.01	1	0.5	0.2	3	0.6093042	1.2889581
0.6					0.6300509	1.2988541
1.2					0.6513192	1.3124532
1.8					0.6719734	1.3308775
1.2	0	0.5	0.2	3	0.6238466	1.2053103
	3				0.6852401	1.4473199
	5				0.7068257	1.5358242
1.2	1	0.05	0.2	3	0.6513192	1.3124532
		0.75			0.6513192	1.3124532
		1			0.6513192	1.3124532
1.2	1	0.5	0	3	0.7307333	1.6553305
			0.4		0.5660908	0.9230766
			0.6		0.4739124	0.4698889
1.2	1	0.5	0.2	0.01	0.6606317	1.3126659
				1	0.6572248	1.3125952
				2	0.6541224	1.3125240

4.4. KATI ZERRELER İÇEREN VE MANYETİK ALAN TESİRİNDEKİ PRİZMATİK BİR AKIŞKAN HÜZMESİNİN DÜŞEY KONUMLANDIRILMIŞ HAREKETLİ BİR PLAKAYA DOĞRU AKIŞI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bölüm 3 kısım 5 te elde edilen (3.201) - (3.210) adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü, ilgili sınır koşulları (3.211) uygulanarak, bvp4c algoritması kullanılarak elde edilmiştir. Çözüm aşamasında, durma noktasından yeterince uzak bölgenin sınır koşullarındaki sonsuzluk ifadesi uygun bir sonlu değer olan $\eta_\infty = 8$ olarak seçilmiştir, bağıl ve mutlak tolerans 10^{-7} olarak alınmıştır. Hız bileşenlerinin ve sıcaklık dağılımlarının grafikleri parametrelerin çeşitli değerleri için ayrı ayrı verilmiştir. Plaka üzerindeki kayma gerilmesi ve ısı akısı değerleri ilgili parametrelerin çeşitli değerleri için tablo olarak verilmiştir. Grafikler çizilirken, aksi belirtilmedikçe, parametrelerin değerleri; $Ha = 1$, $\beta_v = 1.2$, $Pr = 0.7$, $c = 3$, $\sqrt{\frac{\upsilon}{ax^2}} = 0.4$, $\lambda = 0.5$, $Q = 0.2$ olarak alınmıştır.

Hız bileşenlerinin boyutsuz ifadeleri, (3.176) ve (3.177) benzerlik dönüşümlerine (3.200) boyutsuzlaştırması uygulanarak aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\frac{u}{ax} = \sqrt{\frac{v}{ax^2}}\, m(\eta) + h'(\eta)$$

$$\frac{v}{V_0} = g(\eta)$$

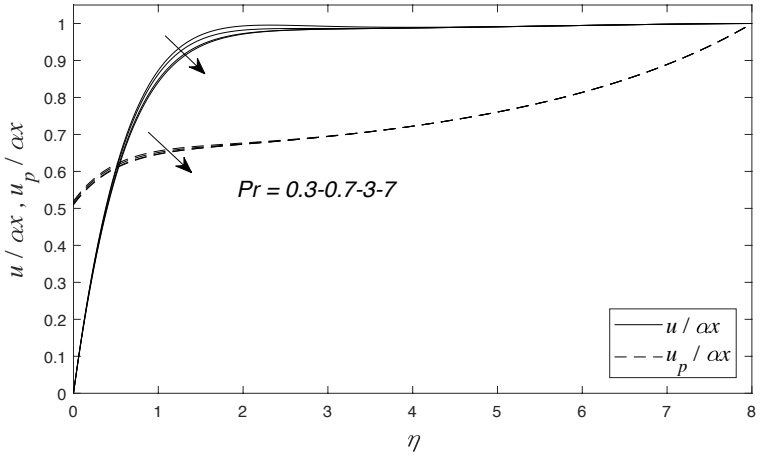
$$\frac{w}{\sqrt{av}} = -h(\eta) \tag{4.14}$$

$$\frac{u_p}{ax} = \sqrt{\frac{v}{ax^2}}\, M(\eta) + N(\eta)$$

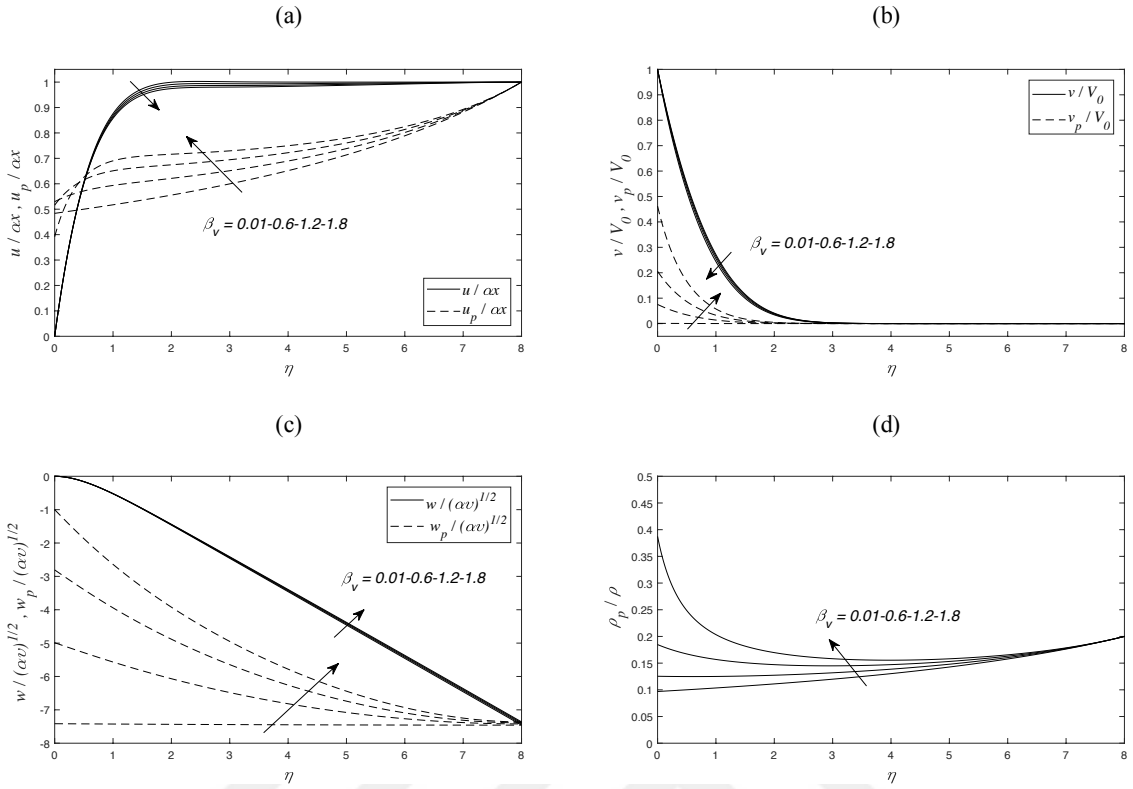
$$\frac{v_p}{V_0} = G(\eta)$$

$$\frac{w_p}{\sqrt{av}} = H(\eta)$$

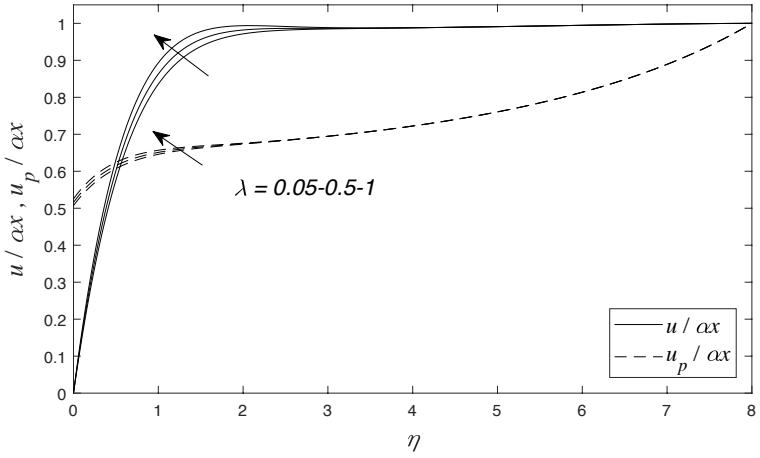
Akışkan ve katı faz için boyutsuz hız bileşenlerinin parametrelerin çeşitli değerlerinde elde edilen grafikleri Şekil 4.16, Şekil 4.17, Şekil 4.18, Şekil 4.19, Şekil 4.20 ile verilmiştir.



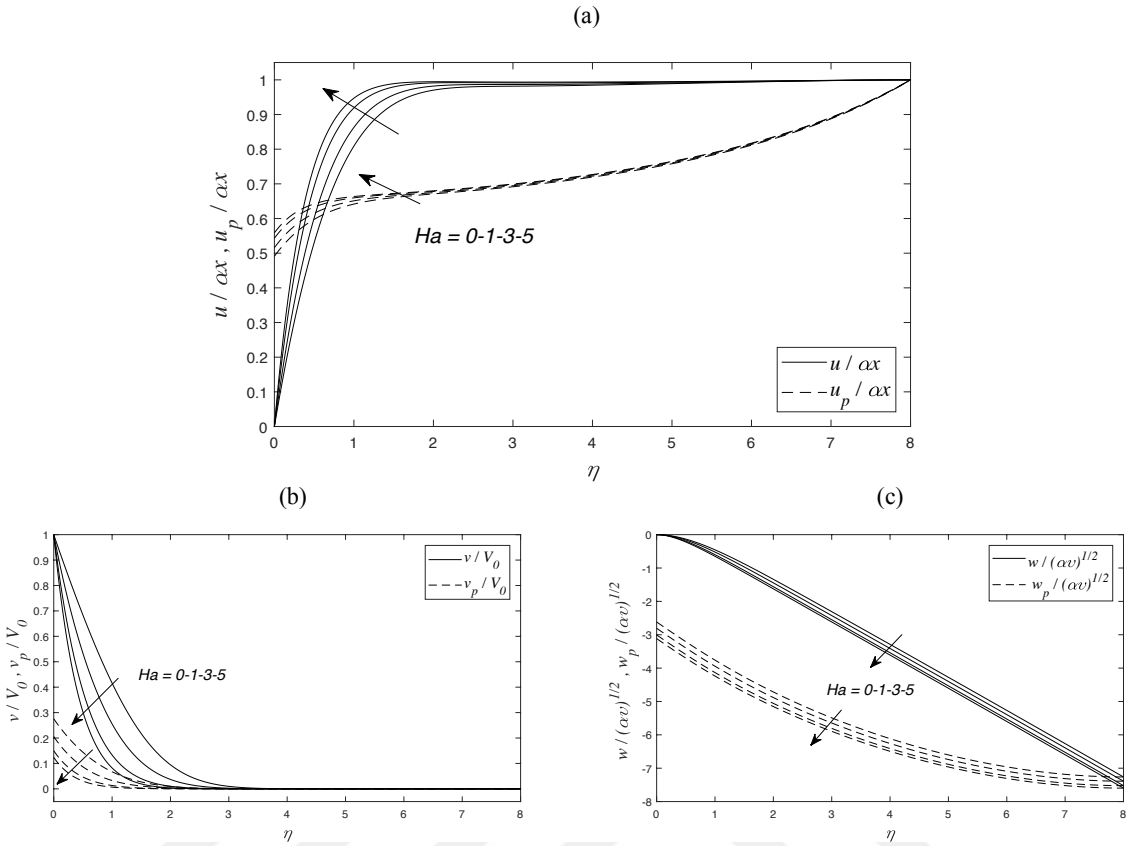
Şekil 4.16: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde Prandtl sayısının çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi.



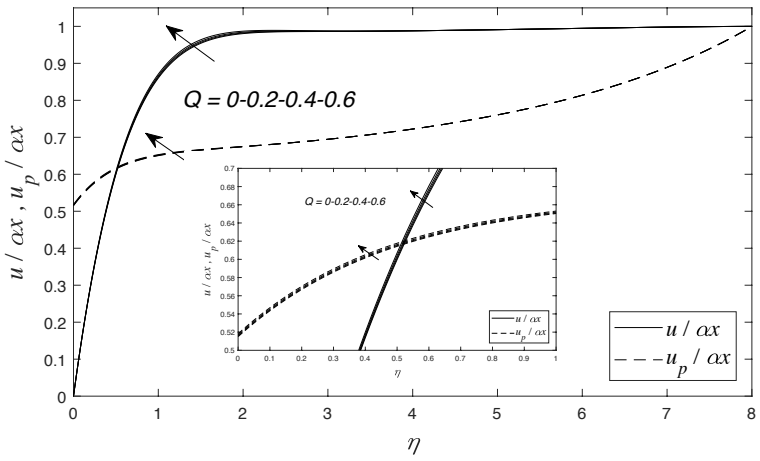
Şekil 4.17: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde akışkan zerre etkileşim parametresinin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri (d) zerre yoğunluk oranı fonksiyonu.



Şekil 4.18: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde taşınım parametresinin çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi.



Şekil 4.19: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde manyetik parametrenin çeşitli değerleri için boyutsuz hız bileşenleri (a) hızların x doğrultusundaki bileşenleri (b) hızların y doğrultusundaki bileşenleri (c) hızların z doğrultusundaki bileşenleri.



Şekil 4.20: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde ısı üretim parametresinin çeşitli değerleri için x doğrultusundaki boyutsuz hız bileşeninin değişimi.

Tablo 4-7: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde Ha, λ, Q, c, β_v ve Pr parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerindeki kayma gerilmesi değerleri.

Ha	λ	Q	c	β_v	τ_{wx}		τ_{wy}	
					$Pr = 0.7$	$Pr = 7$	$Pr = 0.7$	$Pr = 7$
0	0.5	0.2	3	0.01	-1.3629567	-1.3147246	0.5711106	0.5711106
				0.6	-1.3603109	-1.3147716	0.6147700	0.6147700
				1.2	-1.3677115	-1.3238335	0.6731437	0.6731437
				1.8	-1.3902506	-1.3456189	0.7521174	0.7521174
1	0.5	0.2	0.01	0.01	-1.6892148	-1.6541966	1.1127478	1.1127478
				0.6	-1.6881634	-1.6551611	1.1410525	1.1410525
				1.2	-1.6942583	-1.6636524	1.1815742	1.1815742
				1.8	-1.7107153	-1.6829146	1.2424703	1.2424703
1	0.5	0.2	1	0.01	-1.6892149	-1.6541965	1.1127478	1.1127478
				0.6	-1.6883007	-1.6551621	1.1410525	1.1410525
				1.2	-1.6950258	-1.6636605	1.1815742	1.1815742
				1.8	-1.7133818	-1.6829640	1.2424703	1.2424703
1	0.5	0.2	2	0.01	-1.6892149	-1.6541966	1.1127478	1.1127478
				0.6	-1.6884233	-1.6551631	1.1410525	1.1410525
				1.2	-1.6956051	-1.6636685	1.1815742	1.1815742
				1.8	-1.7149240	-1.6830118	1.2424703	1.2424703
1	0.5	0	3	0.01	-1.6843301	-1.6472185	1.1127478	1.1127478
				0.6	-1.6839397	-1.6482994	1.1410525	1.1410525
				1.2	-1.6916472	-1.6569969	1.1815742	1.1815742
				1.8	-1.7115081	-1.6766468	1.2424703	1.2424703
1	0.5	0.4	3	0.01	-1.6952887	-1.6644278	1.1127478	1.1127478
				0.6	-1.6941966	-1.6652114	1.1410525	1.1410525
				1.2	-1.7014496	-1.6734109	1.1815742	1.1815742
				1.8	-1.7212317	-1.6923297	1.2424703	1.2424703
1	0.5	0.6	3	0.01	-1.7031709	-1.6813692	1.1127478	1.1127478
				0.6	-1.7014671	-1.6818041	1.1410525	1.1410525
				1.2	-1.7083440	-1.6893782	1.1815742	1.1815742
				1.8	-1.7280643	-1.7073503	1.2424703	1.2424703
1	0.05	0.2	3	0.01	-1.5956907	-1.5866771	1.1127478	1.1127478
				0.6	-1.5970362	-1.5882358	1.1410525	1.1410525
				1.2	-1.6062789	-1.6030419	1.1815742	1.1815742
				1.8	-1.6268687	-1.6183009	1.2424703	1.2424703
1	0.75	0.2	3	0.01	-1.7411729	-1.6886453	1.1127478	1.1127478
				0.6	-1.7393633	-1.6893113	1.1410525	1.1410525
				1.2	-1.7459174	-1.6973623	1.1815742	1.1815742
				1.8	-1.7653199	-1.7160967	1.2424703	1.2424703
1	1	0.2	3	0.01	-1.7931308	-1.7230940	1.1127478	1.1127478
				0.6	-1.7901944	-1.7234584	1.1410525	1.1410525
				1.2	-1.7957882	-1.7310481	1.1815742	1.1815742
				1.8	-1.8147667	-1.7491358	1.2424703	1.2424703
1	0.5	0.2	3	0.01	-1.6892149	-1.6541966	1.1127478	1.1127478
				0.6	-1.6885322	-1.6551642	1.1410525	1.1410525
				1.2	-1.6960465	-1.6636764	1.1815742	1.1815742
				1.8	-1.7158730	-1.6830575	1.2424703	1.2424703
3	0.5	0.2	3	0.01	-2.2030615	-2.1794142	1.7888317	1.7888317
				0.6	-2.2035602	-2.1808254	1.8078472	1.8078471
				1.2	-2.2105463	-2.1883495	1.8364496	1.8364496
				1.8	-2.2274278	-2.2049718	1.8825012	1.8825012
5	0.5	0.2	3	0.01	-2.6182826	-2.6000229	2.2778133	2.2778133
				0.6	-2.6191172	-2.6014817	2.2930841	2.2930841
				1.2	-2.6255527	-2.6082787	2.3165381	2.3165381
				1.8	-2.6406637	-2.6232006	2.3553747	2.3553747

Plaka üzerindeki kayma gerilmesinin x ve y doğrultularındaki bileşenleri, sıkıştırılamayan Newtonian bir akışkan için gerilme tansörünün ilgili bileşenlerinden yazılır. (3.176) benzerlik dönüşümlerinin (4.2) ifadesinde yerine yazılması ve elde edilen eşitliğe (3.200) ün uygulanması ile bulunan plaka üzerindeki kayma gerilmelerinin boyutsuz ifadeleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$-\frac{t_{xz}}{a\mu x\sqrt{a/\upsilon}}\Big|_{z=0} = -\sqrt{\frac{\upsilon}{ax^2}}m'(0) - h''(0)$$
$$-\frac{t_{yz}}{\mu V_0\sqrt{a/\upsilon}}\Big|_{z=0} = -g'(0) \tag{4.15}$$

Kayma gerilmelerinin ilgili parametrelerin çeşitli büyüklüklerinde aldıkları değerleri Tablo 4-7 ile verilmiştir.

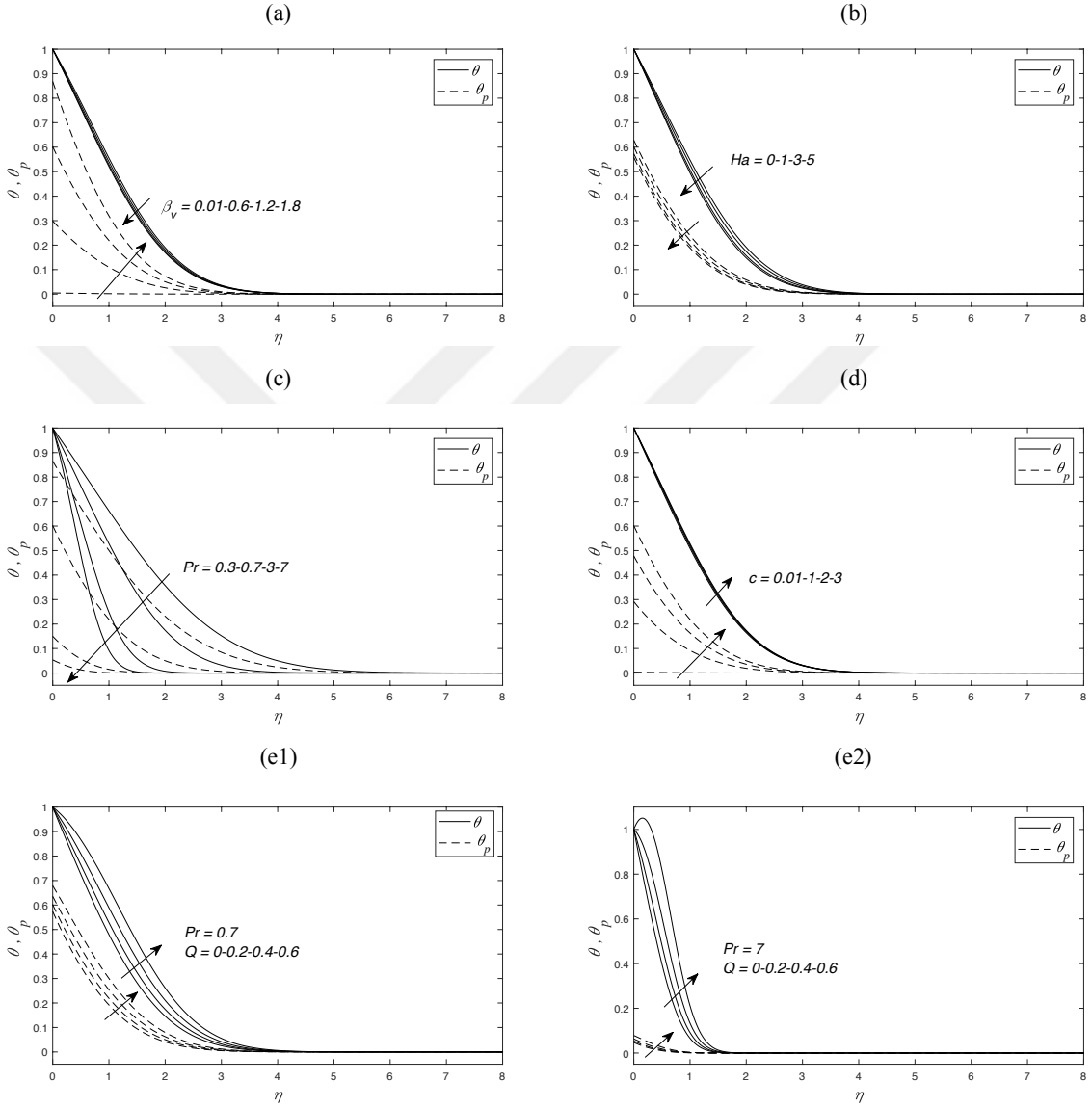
Plaka üzerindeki ısı akısı (3.176) ile verilen sıcaklık fonksiyonu ve Fourier kanunu ile verilir

$$\frac{q_w}{k\sqrt{a/\upsilon}\,(T_w - T_\infty)}\Big|_{z=0} = -\theta'(0) \tag{4.16}$$

Tablo 4-8: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde β_v, Ha, λ, Q, c ve Pr parametrelerinin çeşitli değerleri için plaka üzerinde sıcaklık gradyanının değerleri.

β_v	Ha	λ	Q	c	$-\theta'(0)$	
					$Pr = 0.7$	$Pr = 7$
0.01	1	0.5	0.2	3	0.4013733	0.7748085
0.6					0.4324721	0.7910335
1.2					0.4567505	0.8223195
1.8					0.4679615	0.8921679
1.2	0	0.5	0.2	3	0.4328179	0.7203483
	3				0.4836698	0.9407030
	5				0.4996556	1.0141577
1.2	1	0.05	0.2	3	0.4567505	0.8223195
		0.75			0.4567505	0.8223195
		1			0.4567505	0.8223195
1.2	1.2	0.5	0	3	0.5663552	1.2904980
			0.4		0.3303584	0.2190237
			0.6		0.1795538	-0.6493403
1.2	1.2	1.2	0.2	0.01	0.5080073	0.82432888
				1	0.4851100	0.82365048
				2	0.4686928	0.82297848

Sıcaklıkların dağılımları için ifadeler (3.176) ve (3.177) benzerlik dönüşümlerinde verilmişti. Sıcaklıkların dağılımlarının parametrelerin çeşitli değerleri için elde edilen grafikleri Şekil 4.21 de verilmiştir.



Şekil 4.21: Katı zerreler içeren prizmatik Newtonian akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde parametrelerin çeşitli değerleri için sıcaklık dağılımının (a) akışkan zerre etkileşim parametresi ile değişimi (b) manyetik parametre ile değişimi (c) Prandtl sayısı ile değişimi (d) akışkan / zerre özgül ısı oranı ile değişimi (e) ısı üretim parametresi ile değişimi.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışması katı zerreler içeren Newtonian bir akışkanın durma noktası akışı ile ilgili dört farklı problemin teorik analizini içermektedir. İlk iki problemde sırasıyla sabit şiddetli manyetik alan tesiri altındaki silindirik (Şekil 3.1) ve prizmatik (Şekil 3.2) hüzmelerin yarı sonsuz hareketli yatay bir plakaya doğru akışı, enerji denkleminde viskoz disipasyon ve Joule ısınması terimleri hesaba katılarak incelenmiştir. Son iki problemde sırasıyla sabit şiddetli manyetik alan tesiri altındaki silindirik (Şekil 3.3) ve prizmatik (Şekil 3.4) hüzmelerin yarı sonsuz hareketli düşey bir plakaya doğru akışı, enerji denkleminde ısı kaynağı terimi hesaba katılarak incelenmiştir.

Tez çalışmasında incelenen problemleri yöneten diferansiyel denklem sistemlerinde görülen karakteristik parametrelere özel değerler vererek ve zerre fazına ait benzerlik fonksiyonlarını sıfıra eşit alarak literatürde daha önce yapılmış çalışmalara geçiş yapılabilmektedir. Parametrik limit haller olarak adlandıracağımız bu problemler aşağıda listelenmiştir.

1) Bölüm 3 kısım 2 ve kısım 3'te incelenen problemlerde
   $F(z) \equiv 0$, $N(z) \equiv 0$, $H(z) \equiv 0$, $K(z) \equiv 0$, $\theta_{p0}(z) \equiv 0$, $\theta_{p1}(z) \equiv 0$, $\theta_{p2}(z) \equiv 0$ alınarak;
   1a) $\theta_1(z) \equiv 0$, $\theta_2(z) \equiv 0$, $Ha = 0$, $Ec = 0$, $\beta_v = 0$ için Wang [70] tarafından incelenen probleme geçilir.
   1b) $Ha = 0$, $\beta_v = 0$ için Demir ve Barış [89] tarafından incelenen probleme geçilir.
   1c) $\theta_1(z) \equiv 0$, $\theta_2(z) \equiv 0$, $Ha = 0$, $Ec_1 = 0$, $Ec_2 = 0$, $\beta_v = 0$ için Wang [108] tarafından incelenen probleme geçilir.
2) Bölüm 3 kısım 4 ve kısım 5'te incelenen problemlerde
   $M(z) \equiv 0$, $N(z) \equiv 0$, $G(z) \equiv 0$, $H(z) \equiv 0$, $K(z) \equiv 0$, $\theta_p(z) \equiv 0$
   alınarak;
   2 a) Demir ve Barış [88] tarafından incelenen probleme geçilir.
   2 b) $g(z) \equiv 0$, $Ha = 0$, $Q = 0$, $\lambda = -1$ için Wang [72] tarafından incelenen probleme geçilir.

İçeriği oluşturan problemlerin ilgili alan denklemleri benzerlik dönüşümleri yardımıyla adi diferansiyel denklem takımlarına dönüştürülerek uygun boyutsuzlaştırmalar yapılmış ve tayin

edilen sınır şartları altında Matlab algoritması olan bvp4c kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiştir. Bölüm 3 kısım 2-3-4-5 te her bir problem için bu işlemler sırasıyla gösterilmiş, bölüm 4 kısım 1-2-3-4 te hız alanları ve sıcaklık dağılımlarının boyutsuz ifadeleri ve ilgili grafikler, plaka üzerindeki kayma gerilmesinin ve ısı akısının boyutsuz ifadeleri ve ilgili tablolar sunulmuştur. Problemlerde karışımı oluşturan akışkan faz için Wang [70], Libby [99], Demir ve Barış [88], [89] tarafından kullanılan benzerlik dönüşümleri uygulanmış, karışımdaki katı fazı oluşturan zerreler ile ilgili benzerlik dönüşümleri bölüm 3 kısım 1 de anlatılanlara bağlı kalarak ve literatürdeki çalışmalar ([92], [94], [95]) göz önünde bulundurularak önerilmiştir. Akışkan sıkıştırılamaz olmasına rağmen zerre fazı için böyle bir zorunluluk yoktur, aksine taşıyıcı akışkan sıkıştırılamaz olsa bile parçacık akışlarının sıkıştırabilir olduğu daha önceki çalışmalarda ([26], [27], [106]) gösterilmiştir. Akışkanın yavaşlamadığı daimi Poiseuille akışlarında ρ_p yi sabit almak doğru bir yaklaşımken, durma noktası akışlarında bu yaklaşım yalnızca belirli limit hallerde geçerli olabilmektedir. Zerre fazın sıkıştırılabilirliğinin hız alanı üzerinde en fazla sapmaya sebep olduğu durum, durma noktası civarındaki akışlardır [91]. Bu sebeple zerre fazın yoğunluk oranını tayin edecek bir benzerlik fonksiyonu kullanımı literatürde kabul gördüğü şekilde ([91], [92], [94], [95]) tercih edilmiştir. Sınır koşulları tayin edilirken; akışkan için $z \to \infty$ ve $z = 0$ da sınır şartları yazılması literatürden de bilindiği gibi gerekli ve uygundur, ancak $z = 0$ da şart yazmak zerre faz için uygun değildir. Zerre yoğunluğu alanı plakadan sonlu bir mesafede verilmelidir. Aynı şekilde zerre fazın hız bileşenleri için de plaka üzerinde şart yazılamaz [91]. Zerrelerin levha üzerindeki düşey hız bileşenini sıfır almak, yüzeyde yığılmaya sebep olacağından akışı durma noktası akışı olmaktan çıkaracak ve yığılma plakadan uzak bölgelere kadar uzanarak durma noktası akışını durduracak bir engele dönüşecektir. Bu sebeple zerre faz için yalnızca $z \to \infty$ da koşullar verilmiştir. Verilen koşullar diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için, ek şart yazmaya gerek kalmadan, yeterlidir. Zerre fazın plakaya dik doğrultudaki hız bileşeni için $z = 0$ da şart yazılamayacağı gerçeğinin yanında, $z = 0$ da bu hız bileşeninin sıfırdan farklı değerler alması beklenen ve literatürde görülen ([95]-Fig 9, [107]-Fig 5) bir durumdur. Burada bakılması gereken zerre fazın plakaya dik doğrultudaki hız bileşenin durma noktasının yakın civarında akışkanın aynı doğrultudaki hız bileşenine oldukça yakın değerler alması durumunda yani sıfıra yaklaşması durumunda yoğunluk oranı fonksiyonunun değerleridir. Şekil 4.5 (c) ile (d) ve Şekil 4.17 (c) ile (d) birlikte değerlendirildiğinde zerrelerin plakaya dik doğrultudaki hız bileşeni sıfıra yaklaştıkça yoğunluk oranı fonksiyonun plakanın çok yakın civarında ani artış gösterdiği görülmektedir. Bu durum

durma noktası akışı ile ilgili literatürde belirtilen durumlar ([91], [107]) ile uyumludur ve zerrelerin plakaya dik doğrultudaki hız bileşeninin sıfıra yaklaştıkça zerrelerin durma noktası civarında yığılmaya başlayacağının göstergesidir.

Katı zerreler içeren Newtonian bir akışkanın durma noktası civarındaki, tez çalışmasına konu olan akışlar için eğer akışkan zerre etkileşim parametresi (β_v) sıfır olarak alınırsa akışkanın, sanki hiç zerre içermiyormuş gibi, kendi tek fazlı akış alanı özelliklerini göstermesi gerekmektedir. Bu sebeple incelenen problemlere karşılık gelen Newtonian akışkanlar için daha önce yapılmış çalışmalar ile karşılaştırmalar yapılmış ve aşağıda tablolar halinde sunulmuştur.

Katı zerreler içeren ve manyetik alan tesirindeki silindirik bir akışkan hüzmesinin yatay konumlandırılmış hareketli bir plakaya doğru akışı probleminde (Kısım 4.1) $\beta_v = 0$, $Ha = 0$, $Ec = 0$, $Pr = 0.7$, olarak alınır ise elde edilen kayıp türev değerleri ve plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı değerlerinin Wang [70] tarafından çözümü sunulan Newtonian bir akışkanın hareketli plakaya doğru eksenel simetrik durma noktası akışı probleminin çözümleri ile örtüşmesi gerekmektedir. Tablo 5-1 ile verilen değerlerde bu örtüşmenin sağlandığı görülmektedir.

Tablo 5-1: Wang [70] tarafından elde edilen değerlerin ve katı zerreler içeren silindirik bir akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı problemi için a) kayıp türev değerleri b) plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı değerlerinin karşılaştırılması.

(a)

	Wang [70]				Katı zerreler içeren silindirik bir akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı problemi (Kısım 4.1)			
η	h	h'	f	f'	h	h'	f	f'
0	0	0	1	-0.93873	0	0	1	-0.9387315
0.5	0.14321	0.53160	0.55535	-0.79599	0.1432124	0.5316003	0.5553591	-0.7959979
1	0.49241	0.82986	0.23345	-0.47968	0.4924144	0.8298680	0.2334503	-0.4796840
1.6	1.0402	0.96717	0.05237	-0.15451	1.0402509	0.9671738	0.0523711	-0.1545132
2	1.4330	0.99188	0.01411	-0.05098	1.4330334	0.9918921	0.0141169	-0.0509788
2.5	1.9312	0.99902	0.00187	-0.00838	1.9312933	0.9990251	0.0018693	-0.0083798
3	2.4311	0.99992	0.00016	-0.00085	2.4311112	0.9999239	0.0001586	-0.0008548
3.5	2.9310	0.99999	0.00001	-0.00005	2.9310987	0.9999962	0.0000085	-0.0000537
4	3.4310	0.99999	0.00000	-0.00000	3.4310982	0.9999998	0.0000002	-0.0000002

(b)

	Wang [70]	(Kısım 4.1)
Pr	$\theta'(0)$	$\theta'(0)$
0.2	-0.40384	-0.4038408
1	-0.76223	-0.7622313
5	-1.37221	-1.3722086
10	-1.75204	-1.7520578

Aynı problem için (Kısım 4.1) $\beta_v = 0, Ha = 0$, olarak alınır ise elde edilen kayma gerilmesi , plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı değerlerinin Demir ve Barış [89] tarafından çözümü sunulan viskoz disipasyon etkilerinin hesaba katıldığı Newtonian bir akışkanın hareketli plakaya doğru durma noktası akışı probleminin çözümleri ile örtüşmesi gerekmektedir. Tablo 5-2 ile verilen değerlerde bu örtüşmenin sağlandığı görülmektedir.

Tablo 5-2: Demir ve Barış [89] tarafından elde edilen değerlerin ve katı zerreler içeren silindirik bir akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı problemi için a) kayma gerilmesi değerleri b) plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı değerlerinin karşılaştırılması.

(a)

	Demir ve Barış [89]	(Kısım 4.1)
ax/U_0	τ_{wx}	τ_{wx}
0.01	0.925612	0.9256122
0.25	0.610747	0.6107471
0.5	0.282763	0.2827626

(b)

	Demir ve Barış [89]		(Kısım 4.1)	
	$-\theta_0'(0) - \bar{x}\theta_1'(0) - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\theta_2'(0)$			
Ec	$Pr = 0.7$	$Pr = 3$	$Pr = 0.7$	$Pr = 3$
0	0.665378	1.142812	0.6653776	1.1428123
0.25	0.544711	0.698235	0.5447115	0.6887944
0.5	0.424044	0.253658	0.4288525	0.2618490
0.75	0.303378	-0.190919	0.3105090	-0.1786327

Katı zerreler içeren ve manyetik alan tesirindeki a) silindirik b) prizmatik bir akışkan hüzmesinin düşey konumlandırılmış hareketli bir plakaya doğru akışı problemlerinde (Kısım 4.3 – 4.4) $\beta_v = 0, Ha = 0, Q = 0$, olarak alınır ise elde edilen kayıp türev değerlerinin Wang ve Ng [82] tarafından çözümü sunulan; ısı üretimi olmayan, dışarıdan manyetik alan uygulanmayan Newtonian bir akışkanın düşey plakaya doğru durma noktası akışı probleminin kayma katsayısı ve sıçrama katsayısı sıfır olan çözümleri ile örtüşmesi gerekmektedir. Tablo 5-3 ile verilen değerlerde bu örtüşmenin sağlandığı görülmektedir.

Tablo 5-3: Wang ve Ng [82] tarafından elde edilen değerlerin ve katı zerreler içeren a) silindirik b) prizmatik bir akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı problemi için kayıp türev değerleri karşılaştırılması.

(a)

	Wang ve Ng [82]		Kısım (4.3) $\lambda = 1$	
	$Pr = 0.7$	$Pr = 7$	$Pr = 0.7$	$Pr = 7$
$h''(0)$	1.31194	1.31194	1.3119377	1.3119377
$m'(0)$	0.4955	0.2849	0.4954405	0.2848829
$\theta'(0)$	-0.6654	-1.5458	-0.6653776	-1.5457794

(b)

	Wang ve Ng [82]		Kısım (4.4) $\lambda = 1$	
	$Pr = 0.7$	$Pr = 7$	$Pr = 0.7$	$Pr = 7$
$h''(0)$	1.23259	1.23259	1.23258765	1.23258765
$m'(0)$	0.6155	0.3619	0.6154665	0.3618589
$\theta'(0)$	-0.4959	-1.1784	-0.4958656	-1.1783750

Katı zerreler içeren ve manyetik alan tesirindeki a) silindirik b) prizmatik bir akışkan hüzmesinin düşey konumlandırılmış hareketli bir plakaya doğru akışı problemlerinde (Kısım 4.3 – 4.4) $\beta_v = 0$, olarak alınır ise elde edilen kayma gerilmesi ve plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı değerlerinin Demir ve Barış [88] tarafından çözümü sunulan a) silindirik b) prizmatik bir Newtonian bir akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru durma noktası akışı problemlerinin çözümleri ile örtüşmesi gerekmektedir. Tablo 5-4 ile verilen değerlerde bu örtüşmenin sağlandığı görülmektedir.

Tablo 5-4 (a) ile verilen kayma gerilmesi değerleri Demir ve Barış [88] nin makalesiyle karşılaştırma yapmak amacıyla makalede alındığı gibi;

$\tau_{wx} = m'(0) + \sqrt{x^2 a/\upsilon}\, f''(0)$, $\sqrt{x^2 a/\upsilon} = 0.4$, $\frac{ay}{V_0} = 0.4$ olacak şekilde hesaplanmıştır.

Tablo 5-4 (b) ile verilen kayma gerilmesi değerleri Demir ve Barış [88] nin makalesiyle karşılaştırma yapmak amacıyla makalede alındığı gibi;

$\tau_{wx} = m'(0) + \sqrt{x^2 a/\upsilon}\, f''(0)$, $\sqrt{x^2 a/\upsilon} = 0.4$ olacak şekilde hesaplanmıştır.

Tablo 5-4: Demir ve Barış [88] tarafından elde edilen değerlerin ve katı zerreler içeren a) silindirik b) prizmatik bir akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı problemi için kayma gerilmesi ve plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı değerlerinin karşılaştırılması.

(a)

				Demir ve Barış [88]			Kısım (4.3)		
Ha	λ	Q	Pr	τ_{wx}	τ_{wy}	$-\theta'(0)$	τ_{wx}	τ_{wy}	$-\theta'(0)$
0	0.5	0.4	0.7	0.789845	0.413956	0.489312	0.7898455	0.4139565	0.4893122
			7	0.690633	0.413956	0.757530	0.6906333	0.4139565	0.7575301
1	1	0.2	0.7	1.091617	0.685898	0.608957	1.0916172	0.6858978	0.6089572
			7	0.926398	0.685898	1.288815	0.9263980	0.6858978	1.2888152
3	0.05	0	0.7	0.883668	1.069392	0.722735	0.8836685	1.0693922	0.7227354
			7	0.877372	1.069392	1.748164	0.8773724	1.0693922	1.7481637

(b)

				Demir ve Barış [88]			Kısım (4.4)		
Ha	λ	Q	Pr	τ_{wx}	τ_{wy}	$-\theta'(0)$	τ_{wx}	τ_{wy}	$-\theta'(0)$
0	0.5	0.4	0.7	0.842702	0.570465	0.237625	0.8427015	0.5704652	0.2376247
			7	0.736714	0.570465	-0.017283	0.7367144	0.5704652	-0.0172833
1	1	0.2	0.7	1.153908	1.112340	0.400810	1.1539079	1.1123399	0.4008097
			7	0.978660	1.112340	0.774613	0.9786596	1.1123399	0.7746125
3	0.05	0	0.7	0.868517	1.788563	0.538476	0.8685173	1.7885629	0.5384761
			7	0.862178	1.788563	1.339427	0.8621781	1.7885629	1.3394265

Yukarıdaki tablolarda yapılan karşılaştırmalar sonucunda, bvp4c algoritmasının tez çalışmasına konu olan problemleri incelemek için güvenle kullanılabileceği sonucuna varılmıştır.

Şekil 4.1 katı zerreler içeren silindirik, Şekil 4.5 prizmatik akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışı probleminde, Şekil 4.9 katı zerreler içeren silindirik ve Şekil 4.17 prizmatik akışkan hüzmesinin düşey plakaya doğru akışı probleminde; akışkan zerre etkileşim parametresinin (β_v) farklı değerleri için boyutsuz hız profillerini göstermektedir. Her problem için ayrı ayrı çizilen grafiklerde açıkça görülmektedir ki, diğer parametreleri sabit tutulmak koşuluyla, β_v nin artması ile akışkanın x ve y doğrultularındaki hızları azalmakta buna karşılık zerre fazın aynı doğrultulardaki hızları artmaktadır. Zerre fazın hız bileşenlerinin β_v değişimine en hassas tepkiler verdiği bölge durma noktasının çok yakın civarıyken, akışkanın hız bileşenlerinin β_v değişimine daha hassas olduğu bölge akışkan fazın hız sınır tabakasının oluşmaya başladığı bölge olarak karşımıza çıkmaktadır. İncelenen bütün problemler için, zerre fazın $\eta \to \infty$ da akışkan ile aynı olan z doğrultusundaki hız bileşeni w_p, β_v nin büyük değerlerinde durma noktasına yaklaştıkça akışkanın hızına daha yakın değerler alma eğilimindeyken, akışkanın z doğrultusundaki hız bileşeni parametrenin değişiminden $\eta \to \infty$ civarında az miktarda etkilenmektedir. β_v parametresinin değişimine zerre fazın daha duyarlı olduğu açıkça görülmektedir. β_v değerinin arttırılması zerre fazın gevşeme süresini azalmak anlamına

geldiğinden, β_v nin büyük değerleri için akışkan fazın ve zerre fazın hızları neredeyse aynı olacaktır , $\tau_v \to 0$ durumunda eşitlenecektir. Plakanın hem yatay hem de düşey olduğu durumda, akışkanın prizmatik hüzme şeklinde plakaya çarpması halinde elde edilen hız grafikleri Şekil 4.5 (a)-(b) ve Şekil 4.17 (a)-(b) akışkanın silindirik hüzme şeklinde plaka çarpması halinde elde edilen hız grafikleri Şekil 4.1 (a)-(b) Şekil 4.9 (a)-(b) ile karşılaştırıldığında akışkanın prizmatik hüzme şeklinde aktığı durumunda hız bileşenlerinin β_v değişimine karşı daha hassas olduğu görülmüştür. Şekil 4.17 (b) incelendiğinde: akışkanın ve zerre fazın y doğrultularındaki hız bileşenleri plakadan yeterince uzak bölgede ($\eta \to \infty$) sıfır olduğundan akışın plaka hızından etkilendiği bölgeye kadar hızlar ayrışmamaktadır. Akışkan y doğrultusundaki hız bileşeni $\eta \sim 3$ civarında plaka hızından etkilenmesine rağmen bu etki zerre faz için $\eta \sim 2$ civarında görülmeye başlamaktadır. Aynı durum Şekil 4.5 (a) da x doğrultusundaki hızlar için görülmektedir. Şekil 4.1 (a)-(b), Şekil 4.5 (b), Şekil 4.9 (a)-(b), Şekil 4.17 (a) incelendiğinde: $\eta \to \infty$ da sıfırdan farklı bir hız bileşenine sahip olunması durumunda akışkan ve zerre fazı için hız profillerindeki ayrışma $\eta \sim \infty$ da görülmeye başlanır, ancak her durumda akışkanın hızının ani değişimlere maruz kaldığı durma noktası civarında, zerre fazın hız profilleri zerre gevşeme süresinin değişimlerine karşı daha hassastır.

$\eta \to \infty$ dan $\eta = 0$ konuma bağlı değişim gösteren yoğunluk oranı grafikleri Şekil 4.1 (d) ve Şekil 4.9 (d) incelendiğinde β_v nin artan değerlerinde ρ_p/ρ oranının başlangıç değerine daha yakın değerler aldığı görülmektedir. Akışkanın prizmatik hüzme şeklinde hareket ettiği Şekil 4.5 (d) ve Şekil 4.17 (d) de ise β_v nin büyük değerlerinde durma noktasının çok yakın civarına kadar ρ_p/ρ oranının başlangıç değerinden az miktar değişime uğradığı ancak zerre fazın hız sınır tabaka yapısının gelişmeye başladığı $\eta \sim 1{,}5$ noktasından itibaren artış gösterdiği görülmektedir. Bu artış eğilimini akışkanın silindirik hüzme şeklinde hareket ettiği problemlerde de görmek mümkündür.

Manyetik parametrenin hızlar üzerindeki etkileri dört problem için ayrı ayrı Şekil 4.2, Şekil 4.7, Şekil 4.11, Şekil 4.19 de görülmektedir. Şekil 4.2 katı zerreler içeren silindirik bir akışkan hüzmesinin yatay plakaya doğru akışında manyetik parametrenin hız bileşenleri üzerindeki etkilerini göstermektedir. Hızları etkileyen diğer parametreler sabit tutulmak koşuluyla manyetik parametrenin arttırılması y ve z doğrultularındaki hız bileşenlerinin artmasına sebep olmaktadır ancak x doğrultusundaki hızlar azalmaktadır. Şekil 4.7 prizmatik hüzmenin yatay plakaya akışı probleminde manyetik parametrenin hız bileşenleri üzerindeki etkisini

göstermektedir. Manyetik parametrenin arttırılması x ve y doğrultularındaki hız bileşenlerinin azalmasına sebep olmaktadır ancak z doğrultusundaki hızlar artmaktadır. Şekil 4.11 silindirik ve Şekil 4.19 prizmatik hüzmelerin düşey plakaya doğru akışı problemlerinde manyetik parametrenin hızlar üzerindeki etkilerini göstermektedir. Hızları etkileyen diğer parametreler sabit tutulmak koşuluyla manyetik parametrenin arttırılması her iki problemde de x ve z doğrultularındaki hız bileşenlerinin artmasına sebep olmaktadır ancak y doğrultusundaki hızlar azalmaktadır. x, y, z doğrultularındaki hız değişimlerini ayrı ayrı değerlendirmek gerekirse; bu iki problem için x ve z doğrultularında akışkanın plakadan yeterince uzak bölgede sahip olduğu hız plaka üzerindeki hızından büyüktür, y doğrultusundaki hızlar için ise tersi geçerlidir. Benzer bir değerlendirme daha önce germe plakaları üzerinde durma noktası akışları için yapılan çalışmalarda ([92], [93], [94], [96]) serbest akış hızı parametresinin germe tabakası parametresine oranının birden küçük ve büyük değerleri için yapılmıştır. Bu oranın birden küçük olduğu durumda manyetik parametrenin arttırılması hızları azaltırken, birden büyük olması durumda manyetik parametrenin arttırılmasının hızları da arttırdığı görülmüştür. Ayrıca, problemlerin ele alınış şekli sebebiyle manyetik alanın yalnızca akışkan üzerinde etkili olduğu hatırlanırsa, zerre fazın hız bileşenlerinde meydana gelen değişimin akışkanın hızındaki değişim sebebiyle gerçekleştiği görülür. x ve y doğrultularında, parametrenin değişiminden zerre fazın hız bileşenleri akışkana oranla daha az etkilenmekteyken; z doğrultusunda bu etkinin iki fazın hızları üzerinde yaklaşık aynı oranda olduğu görülmektedir ancak akışkanın plaka üzerinde hızı sıfır iken Ha sayısının arttırılması ile zerre fazın $\eta \to 0$ da sahip olduğu hızın arttığı görülmektedir.

Şekil 4.3, Şekil 4.6, Şekil 4.12 sırasıyla silindirik hüzmenin yatay plakaya doğru akışında ax/U_0 oranının, prizmatik hüzmenin yatay plakaya doğru akışında ay/V_0 oranının ve silindirik hüzmenin düşey plakaya doğru akışında ay/V_0 oranının akışın ilgili doğrultudaki hız bileşenleri üzerindeki etkisini göstermektedir. Grafiklerde görülmektedir ki plakanın hızı arttıkça akışkan faz ve zerre fazın ilgili doğrultudaki hız profilleri arasındaki farklılaşma $\eta \to \infty$ dan $\eta = 0$ a gidildikçe artmakta ve zerre fazın hız sınır tabakası benzeri yapısı azalmaktadır. Plakanın hızını değiştirmek yalnızca plakanın hareketi doğrultusundaki hız bileşenlerini etkilemekte diğer doğrultudaki hız bileşenlerinde değişime sebep olmamaktadır, literatürden akışkan faz için bilinmekte olan bu durum, görüldüğü gibi zerre faz için de geçerlidir.

Diğer parametrelerin sabit tutularak Pr sayısının arttırılmasının; silindirik ve prizmatik hüzmelerin düşey plakaya doğru akışı problemlerinde hızların x doğrultusundaki bileşenlerini azalttığı Şekil 4.10 ve Şekil 4.16 da görülmektedir. Bu etki akışkan fazın hızında zerre faza oranla daha belirgindir. Şekil 4.13 ve Şekil 4.18 de sırasıyla silindirik ve prizmatik hüzmelerin düşey plakaya doğru akışı problemlerinde taşınım parametresinin (λ) hızların x doğrultusundaki bileşenleri üzerindeki etkisini göstermektedir. Taşınım parametresinin artması ile kaldırma kuvvetlerinin etkisinin artmasının bir sonucu olarak x doğrultusundaki hızların da arttığı görülmüştür. Etkinin en belirgin görüldüğü Şekil 4.18 de parametrenin değişiminin akışkan faz için $\eta \sim 0.5-3$ aralığında zerre faz için ise $\eta \sim 0-1.5$ aralığında hızları belirgin şekilde değiştirdiği görülmektedir. Şekil 4.14 ve Şekil 4.20 sırasıyla silindirik ve prizmatik hüzmelerin düşey plakaya doğru akışı problemlerinde ısı üretim parametresinin (Q) hızların x doğrultusundaki bileşenleri üzerindeki etkisini göstermektedir. Isı üretim parametresinin artması ile x doğrultusundaki hız bileşenlerinin de arttığı görülmüştür. Bu üç parametrenin değişiminden, beklendiği şekilde, akışkan fazın hız bileşenleri daha fazla etkilenmektedir.

Plaka üzerinde x ve y doğrultularındaki kayma gerilmesi değerlerinin Ha ve β_v parametreleri ile değişimi; silindirik hüzmenin yatay plakaya doğru akışı problemi için Tablo 4-1 de, prizmatik hüzmenin yatay plakaya doğru akışı problemi için Tablo 4-3 te verilmiştir. Her iki problem için de diğer parametrelerin sabit tutularak Ha sayısının arttırılması, hem x hem de y doğrultularındaki kayma gerilmesi değerlerini arttırmaktadır. Bu durumda manyetik alanın şiddetinin arttırılmasının sonucunda, plakayı hareket ettirmek için uygulanan kuvvetin de arttırılması gerekeceği söylenebilir. Diğer parametreler sabit tutularak β_v nin arttırılması da kayma gerilmesi değerlerinin artmasına sebep olmaktadır. Ha sayısının sabit 0-1-3-5 değerlerinin yanında β_v nin 0.01-0.6-1.2-1.8 e değişen değerlerinde elde edilen kayma gerilmesi büyüklükleri incelendiğinde; Ha sayısının artması ile β_v yi arttırmanın kayma gerilmelerinde daha az artışa sebep olduğu görülmektedir. Tablo 4-1 den görüleceği gibi $Ha = 0$ durumunda β_v nin 0.01 den 1.8 e değişimi τ_{wx} için %11.66 artışa τ_{wy} için %2.13 artışa sebep olurken $Ha = 5$ durumunda bu artış τ_{wx} için %2.13 τ_{wy} için ise %0.69 olmuştur. Ayrıca bu durum β_v nin τ_{wx} üzerinde daha etkili olduğunu da göstermektedir. Yukarıdaki değerlendirmeler biri hariç Tablo 4-3 için de geçerlidir. Ancak β_v değişiminin τ_{wx} ve τ_{wy} üzerindeki etkisi prizmatik hüzme probleminde neredeyse aynıdır ve $Ha = 0$ durumunda β_v nin 0.01 den 1.8 e değişimi τ_{wx} için %31.7 artışa τ_{wy} için %27.1 artışa sebep olurken

$Ha = 5$ durumunda bu artış τ_{wx} için %3.4 τ_{wy} için ise %3.9 olmuştur. Düşey palakaya doğru akış problemlerinde elde edilen, plaka üzerindeki kayma gerilmesi değerleri silindirik hüzme için Tablo 4-5 ve prizmatik hüzme için Tablo 4-7 ile verilmiştir. Her iki problem için de diğer parametrelerin sabit tutularak sırasıyla Ha ve β_v sayılarının arttırılması ile elde edilen değerlerin karşılaştırılması yukarıdaki paragrafta yapılan değerlendirmeler ile uyumludur. Silindirik hüzme probleminde $Ha = 0$ durumunda β_v nin 0.01 den 1.8 e değişimi τ_{wx} için %1.6 artışa τ_{wy} için %11.65 artışa sebep olurken $Ha = 5$ durumunda bu artış τ_{wx} için %0.63 τ_{wy} için ise %2.08 olmuştur. Prizmatik hüzme probleminde $Ha = 0$ durumunda β_v nin 0.01 den 1.8 e değişimi τ_{wx} için %2 artışa τ_{wy} için %31.7 artışa sebep olurken $Ha = 5$ durumunda bu artış τ_{wx} için %0.85 τ_{wy} için ise %3.4 olmuştur. Bu iki problemde plaka y doğrultusunda hareket etmekte ve β_v nin artşı τ_{wy} büyüklüklerini daha büyük yüzdede etkilemektedir. Görülmektedir ki akışkana zerre eklenmesi durumunda plaka üzerindeki kayma gerilmesi değerleri artmakta plakanın hareket ettiği doğrultuda bu artış daha fazla olmaktadır ve plakayı hareket ettirmek için daha büyük kuvvetlere gerek duyulmaktadır.

Diğer parametreler sabit tutularak λ veya Q veya Pr veya c sayısının arttırılması ile plaka üzerinde y doğrultusundaki kayma değerinde değişim görülmezken, λ veya Q veya c sayılarında artış ile x doğrultusundaki kayma gerilmesi değerlerinde artış görülmüştür. Pr sayısının arttırılması ise τ_{wx} in azalmasına sebep olmaktadır. λ veya Q sayısının değeri arttıkça β_v nin artışının τ_{wx} i arttırma yüzdesi azalmaktadır ancak Pr veya c sayısının değeri arttıkça β_v nin artışının τ_{wx} i arttırma yüzdesi de artmaktadır. Yine de bu dört parametrenin bu yöndeki etkisi Ha sayısının etkisine kıyasla küçük kalmaktadır.

İlgili parametrelerin sıcaklık dağılımları üzerindeki etkileri Şekil 4.4, Şekil 4.8, Şekil 4.15 ve Şekil 4.21de görülebilir. Akışkan zerre etkileşim parametresi β_v nin arttrılması disipasyon terimlerinin ihmal edildiği düşey plaka problemlerinde akışkan fazın sıcaklığında azalmaya ve zerre fazın sıcaklığında artmaya sebep olmaktadır. Beklendiği şekilde bu etki zerre faz üzerinde belirgin şekilde görülebiliyorken akışkan faz görece az etkilenmektedir. Ancak disipasyon etkilerinin hesaba katıldığı yatay plaka problemlerinde $Ec.\beta_v$ çarpımı içeren terimlerin (enerji denkleminde akışkan ve zerreler arasındaki bağıl hareket etkilerini temsil eden terimlerdir) etkisiyle akışkan sıcaklığında artışa sebep olabileceği Şekil 4.4 a1-a2 de görülmektedir.

Grafiklerde açıkça görülmektedir ki akışkan / zerre özgül ısı oranını arttırmak zerre sıcaklığı ve akışkan sıcaklığı arasındaki farklılaşmayı azaltmaktadır. Diğer parametreler sabit kalmak koşuluyla c_p/c_s oranını arttırmak için c_s daha küçük değerler almalıdır. Bu durumda grafik beklenen şekilde yorumlanabilir: $\eta \to \infty$ da akışkan ve zerre sıcaklığı aynıdır ve bu sıcaklık plaka sıcaklığından düşüktür, durma noktasına yaklaştıkça hızla değişmekte olan akışkan sıcaklığına özgül ısı değeri küçük zerreler daha hızlı uyum sağlamaktadır.

Dört problem için de görüldüğü gibi Prandtl sayısının sıcaklık dağılımları üzerindeki etkisi aynı yönlüdür ve diğer parametreler sabit tutulmak koşuluyla Pr sayısının arttırılmasının akışkan sıcaklığını ve zerre fazın sıcaklığını düşürdüğü görülmektedir.

Isı üretim parametresinin sıcaklıklar üzerindeki etkisi Şekil 4.15 (e) ve Şekil 4.21 (e) de görülmektedir, parametrenin arttırılması sıcaklıkların artmasına sebep olmaktadır ve ayrıca görülmektedir ki; Prandtl sayısının küçük değerlerinde zerre fazın sıcaklık dağılımı ısı üretim parametresinin artışından daha çok etkilenmektedir.

Şekil 4.4 ve Şekil 4.8 ile verilen; enerji denkleminde viskoz disipasyon, Joule ısınması ve bağıl hareket etkilerin hesaba katıldığı iki problem için sıcaklık dağılımı grafiklerinde Eckert sayısının etkilerini görmek mümkündür. Eckert sayısının genel etkisi iki problemde de aynı olup; artışı sıcaklıklarda yükselmeye sebep olmaktadır. Ancak Şekil 4.4 (c1) ve (c2) , Şekil 4.8 (c1) ve (c2) kendi aralarında karşılaştırıldığında, beklendiği şekilde, Prandtl sayısının küçük değerlerinde zerre fazın bu değişimden daha fazla etkilendiği görülür. Disipasyon etkilerinin ihmal edildiği iki problem için elde edilen Şekil 4.15 (c) ve Şekil 4.21 (c) de görüleceği gibi $(T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$ değeri biri geçmemektedir. Ancak Şekil 4.4 (c2) ve Şekil 4.8 (c2) de görüleceği gibi Prandtl ve Eckert sayılarının büyük değerleri bir araya geldiğinde $(T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$ değeri birden büyük değerler almaktadır. Prandtl sayısının artması ile kinematik viskozitenin arttığı ve Eckert sayısı yüksek olduğunda, akışkan partiküllerin enerji depolaması nedeniyle daha enerjik olduğu göz önünde bulundurularak bu durum fiziksel olarak bu şu şekilde açıklanmaktadır: Viskozite, sıvı akışına direnç gösterdiğinden, akışkan zorla hareket etme eğiliminde olduğunda, akışkanın kinetik enerjisi ısı enerjisine dönüşür ve dolayısıyla akışkanın sıcaklığı maksimum bir değere yükselir; daha sonra asimptotik olarak düşer (Demir ve Barış [89]).

Disipasyon terimlerinin ihmal edildiği iki problem için elde edilen sıcaklık grafikleri Şekil 4.15 (b) ve Şekil 4.21 (b) de görülmektedir ki manyetik parametre, akışkan ve zerre sıcaklıkları üzerinde aynı yönlü etki oluşturmakta ve artışı sıcaklıklarda azalmaya sebep olmaktadır. Bu durum disipasyon terimlerinin hesaba katıldığı iki problem için Eckert sayısının sıfır alınması halinde Şekil 4.4 (b1) ve Şekil 4.8 (b1) de aynı şekilde görülmektedir. Ancak Şekil 4.4 (b1) de verildiği şekilde Eckert sayısının büyük değerlerinde bu etki yön değiştirmekte ve artışı akışkan fazın ve zerre fazın sıcaklığında artışa sebep olmaktadır. Bu tez çalışmasında $Ec = 0 - 0.75$ aralığında değerler araştırılmış olup, manyetik parametrenin sıcaklıklar üzerindeki etkisine açıklık getirmek amacıyla $Ec = 1$ için de grafik verilmiştir. Şekil 4.4 (b2) ve Şekil 4.8 (b2) de görüldüğü gibi $Ec = 0.25$ olduğu durumda ($0.5 - 0.75$ değerlerinde de aynı durum gözlenmektedir) durma noktasının çok yakın civarında akışkan sıcaklığı manyetik parametrenin artması ile artmakta plakadan uzaklaştıkça etkinin görülemediği bir bölge oluşmakta ve ardından ters yönlü etki görülmektedir. Zerre fazın sıcaklığı için aynı yorumu yapmak mümkün değildir. Tez çalışmasında incelenen $\beta_v = 0.01 - 1.8$ ve $c = 0.01 - 3$ değerleri durma noktasının çok yakın civarında zerre fazın bu değişime adapta olabilmesi için yeterli büyüklükler değildir.

Düşey plakaya doğru akış problemlerinde elde edilen, plaka üzerindeki sıcaklık gradyanı değerleri silindirik hüzme için Tablo 4-6 ve prizmatik hüzme için Tablo 4-8 ile verilmiştir. Görülmektedir ki Ha sayısı büyüdükçe plaka yüzeyindeki sıcaklık gradyanı değerleri artmaktadır. Diğer parametreler sabit tutularak ısı üretim parametresi arttırıldığında, plaka yüzeyindeki ısı akısı değerleri azalmaktadır. Isı üretim parametresinin artması ile akışkan sıcaklığı artmakta ve plaka ile arasındaki sıcaklık farkı azalmaktadır, sonucunda da plakadan akışkana ısı transferi hızı azalmaktadır. Ayrıca, Pr sayısının büyüyen değerlerinde ısıl sınır tabaka kalınlığı azaldığından ısı transferi hızı artmaktadır. Ancak burada bir istisna görülür: ısı üretim parametresinin büyük değerlerinde Pr sayısının artması ile sıcaklık gradyanının azaldığı hatta işaret değiştirdiği görülmektedir. Bunun sebebi temas yüzeyinde akışkan sıcaklığının plaka sıcaklığını aşmasıdır (Şekil 4.21 (e2)). Diğer parametreler sabit tutularak akışkan zerre etkileşim parametresinin arttırılması ile ısı akısının arttığı görülmüştür. Parametrenin büyüyen değerlerinde akışkan sıcaklığında azalma olduğu ilgili şekillerde (Şekil 4.15 ve Şekil 4.21) görülmüştü. Dolayısıyla akışkan ve plaka arasındaki sıcaklık farkının artmasının bu duruma sebep olduğu söylenebilir. Buradan zerrelerin gevşeme süresi kısaldıkça yüzeydeki ısı akısı değerinin artacağı sonucuna ulaşılabilir. Doğrudan zerreler ile ilgili diğer parametre olan özgül

ısı oranı (c) arttırıldığında ısı akısının azaldığı görülmektedir. Yukarıda belirtilen şekillerde bu parametrenin etkisinin akışkan sıcaklığını arttırma yönünde olduğu görülmektedir. Artan c değerleri özgül ısı değeri daha küçük olan zerreler anlamına gelmektedir dolayısıyla zerreler akışkandan daha az ısı çekerek daha fazla sıcaklık artışı yaşar ve akışkan sıcaklığı ile plaka sıcaklığı arasındaki fark daha az olacaktır. Taşınım parametresini değiştirmenin ise plaka yüzeyindeki ısı akısı üzerinde gözlemlenebilir etkisi olmamıştır.

Yatay palakaya doğru akış problemlerinde elde edilen, plaka üzerindeki ısı akısı değerleri silindirik hüzme için Tablo 4-2 ve prizmatik hüzme için Tablo 4-4 ile verilmiştir. Görülmektedir ki Ec sayısının mevcudiyetinde Ha sayısının arttırılması plakadan akışkana ısı akış hızı yoğunluğunu azaltmakta ve Pr sayısının büyük değerlerinde sıcaklık gradyanı vektörünün yön değiştirmesine sebep olmaktadır. Diğer parametreler sabit kalmak koşuluyla Ec sayısının artması ısıl sınır tabaka kalınlığını arttırmaktadır (Şekil 4.4 (c1), Şekil 4.8 (c1)) ve plaka yüzeyindeki ısı akısını azaltmaktadır bu durum Tablo 4-2 de $Pr = 0.7$ değerleri için görülebilir. Ancak Pr sayısının büyük değerlerinde Ec sayısının arttırılması ile yüzeyde akışkan sıcaklığı plaka sıcaklığını aşmakta (Şekil 4.4 (c2), Şekil 4.8 (c2)) ve ısı akısı vektörü yön değiştirmektedir. Diğer parametreler sabit tutularak akışkan zerre etkileşim parametresinin arttırılması ile $Ec = 0$ durumunda sıcaklık gradyanının arttığı görülmüştür. Ancak Ec sayısının büyük değerlerinde akışkan zerre etkileşim parametresinin artması ile bağıl hareketin enerji denklemi üzerinde etkisi artmaktadır bu durum denklem (3.77), (3.79) ve denklem (3.124) - (3.126) da görülebilir. Sonucunda da β_v artışı ısı akısı değerlerinde azalmaya ve ısı akısı vektörünün yön değiştirmesine sebep olur. Diğer parametreler sabit tutularak özgül ısı oranı (c) arttırıldığında ise $Pr = 0.7$ durumunda ısı akısının azaldığı görülmektedir ancak $Pr = 7$ olduğunda yüzeyde akışkan sıcaklığı plaka sıcaklığını aştığından ısı akısı ters yönde artış eğilimindedir.

Bu çalışmada elde edilen sayısal sonuçlar, katı zerreler içeren Newtonian bir akışkanın, iki fazlı akış olarak tepki özelliklerini anlamaya yönelik bir görünüm verir. Ha, Pr, λ, Q ve Ec parametrelerinin akışkan faz üzerindeki etkileri literatürdeki çalışmalar ile uyumludur ve bu parametrelerin zerre faz üzerindeki etkileri aynı yönlü ancak göreceli olarak daha azdır. Akışkan zerre etkileşim parametresi β_v ile ilgili bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi genellebilir.

-Tez çalışmasında incelenen tüm problemlerde zerre fazın hız bilşenlerinin β_v parametresinin değişimine daha duyarlıdır ve β_v parametresinin arttırılmasının akışkan ve zerre fazın hız bileşenlerinin değerlerini birbirine yaklaştırdığı görülmüştür. Akışkanın hız sınır tabakası kalınlığı zerrelerin hız sınır tabakası kalınlığından her zaman büyüktür. Akışkana zerre eklenmesi durumunda plaka üzerindeki kayma gerilmesi değerleri artmaktadır. Bu durum daha önce yapılan çalışmaların sonuçları ile uyumludur ([92], [93], [95], [96]).

-Akışkan zerre etkileşim parametresi β_v nin arttrılması akışkan fazın sıcaklığında azalmaya ve zerre fazın sıcaklığında artmaya sebep olmaktadır, ancak enerji denkleminde viskoz disipasyon ve bağıl hareket sebebiyle yapılan iş hesaba katılırsa durma noktasının çok yakın civarında akışkan sıcaklığında artışa sebep olabileceği de görülmüştür. Benzer durum sıcaklık gradyanları için de geçerli olup Ec sayısının küçük değerlerinde β_v nin arttrılması ile sıcaklık gradyanı artmaktayken, Ec sayısının büyük değerlerinde sıcaklık gradyanın azaldığı ve akışkan sıcaklığının plaka sıcaklığını aşması durumunda ters yönlü artışa sebep olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] Saffman, P.G., 1962, On the stability of laminar flow of a dusty gas, *J. Fluid Mech.*, 13 (1), 120–128.

[2] Marble, F.E., 1962, Dynamics of a gas containing small solid particles, *Proc. 5th AGARD Colloq. Combust. Propuls.*, 175–213.

[3] Marble, F.E., 1970, Dynamics of dusty gases, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2, 397–446.

[4] Chakrabarti, K.M., 1974, Note on boundary layer in a dusty gas, *AIAA J.*, 12, (8), 1136–1137.

[5] Datta N. and Mishra, S.K., 1982, Boundary layer flow of a dusty fluid over a semi-infinite flat plate, *Acta Mech.*, 42 (1–2), 71–83.

[6] Einstein, A., 1905, *Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen*, Thesis (PhD), Universitat Zürich.

[7] Jeffery, G.B., 1922, The motion o f ellipsoidal particles immersed a viscous fluid, *R. Soc.*, 102 (715), 161–179.

[8] Stokes, G.G., 1851, On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 9, 8–106.

[9] Saffman, P.G., 1956, On the motion of small spheroidal particles in a viscous liquid, *J. Fluid Mech.*, 1 (5), 540–553.

[10] Torobin, L.B. and Gauvin, W.H., 1959, Fundamnetal aspects of solid-gas flow part:I Introductory concepts and idelized sphere motion in viscous regime, *Can. J. Chem. Eng.*, 37 (4), 129–141.

[11] Torobin, L.B. and Gauvin, W.H., 1959, Fundametal aspects of solid-gas flow part: II the sphere wake in steady laminar fluids, *Can. J. Chem. Eng.*, 37 (5), 167–176.

[12] Torobin, L.B. and Gauvin, W.H., 1959, Fundamental aspects of solid-gas flow part: III Accelerated motion of a particle in a fluid, *Can. J. Chem. Eng.*, 37 (6), 224–236.

[13] Torobin, L.B. and Gauvin, W.H., 1960, Fundamental aspects of solids-gas flow part:IV The effects of particle rotation, roughness and shape, *Can. J. Chem. Eng.*, 38 (5), 142–153.

[14] Torobin, L.B. and Gauvin, W.H., 1960, Fundametal aspects of solid-gas flow part :V The effects of fluid turbulence on the particle drag coefficient, *Can. J. Chem. Eng.*, 38 (6), 189–200.

[15] Torobin, L.B. and Gauvin, W.H., 1961, Fundamental aspects of solids-gas flow part:VI Multiparticle behavior in turbulent fluids, *Can. J. Chem. Eng.*, 39 (3), 113–120.

[16] Robinson, A., 1956, On the motion of small particles in a potential field of flow, *Commun. pure Appl. Math.*, 9, 69–84.

[17] Kliegel, R.J., 1959, One dimensional flow of a gas particle system, *TRW Space Technology Labs*,.

[18] Soo, S.L., 1961 Gas dynamic processes involving suspended solids, *AIChE J.*, 7 (3), 384–391.

[19] Sproull, D.W., 1961, Viscosity of dusty gases, *Nature*, 190 (4780), 976–978.

[20] Marble, F.E., 1964, Mechanism of particle collision in the one-dimensional dynamics of gas-particle mixtures, *Phys. fluids*, 7 (8), 1270–1282.

[21] Singleton, R.E., 1964, *Fluid mechanics of gas-solid particle flow in boundary layers*, Thesis (PhD), California Institute Technology.

[22] Singleton, R.E., 1965, The compressible gas-solid particle flow over a semi-infinite flat plate, *Zeitschrift für Angew. Math. und Phys. ZAMP*, 16 (4), 421–449.

[23] Michael, D.H., 1964, The stability of plane poiseuille flow of a dusty gas, *J. Fluid Mech.*, 18 (1), 19–32.

[24] Michael, D.H., 1965, Kelvin-Helmholtz instability of a dusty gas, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 61 (2), 569–571.

[25] Michael, D.H. and Miller, D.A., 1966, Plane parallel flow of a dusty gas, *Mathematika*, 13 (1), 97–109.

[26] Michael, D.H., 1968, The steady motion of a sphere in a dusty gas, *J. Fluid Mech.*, 31 (1), 175.

[27] Michael, D.H. and Norey, P.W., 1970, Slow motion of a sphere in a two-phase medium, *Can. J. Phys.*, 48 (13), 1607–1616.

[28] Michael, D.H. and Norey, P.W., 1968, The laminar flow of a dusty gas between two rotating cylinders, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 21 (3), 375–388.

[29] Miller, D.A., 1969, Dusty fluid round a cylinder in oscillatory rotation, *Appl. Sci. Res.*, 20, 81–97.

[30] Liu, J.T.C., 1965, On the hydrodynamic stability of parallel dusty gas flows, *Phys. fluids*, 8 (11), 1939–1945.

[31] Liu, J.T.C., 1966, Flow induced by an oscillating infinite flat plate in a dusty gas, *Phys. fluids*, 9 (9), 1716–1720.

[32] Liu, J.T.C., 1967, Flow induced by the impulsive motion of an infinite flat plate in a dusty gas, *Astronaut. Acta*, 13, 369–377.

[33] Baral, M.C., 1968, Plane parallel flow of a conducting dusty gas, *J. Phys. Soc. japan*, 25 (6), 1701–1702.

[34] Otterman, B. and Lee, S.L., 1969, Particle migrations in laminar mixing of a suspension with a clean fluid, *Zeitschrift für Angew. Math. und Phys. ZAMP*, 21 (4), 680–681.

[35] Zung, L. B., 1969, Flow induced in fluid-particle suspension by an infinite rotating disk, *Phys. Fluids*, 12 (1), 18–23.

[36] Dube, S.N., and Sharma, C.L., 1975, Unsteady flow of a dusty viscous liquid in a rotating channel, *Acta Phys. Acad. Sci. hungaricae*, 39 (1), 23–32.

[37] Gupta, R.K. and Gupta, S.C., 1976, Flow of a dustry gas through a channel with arbitrary time varying pressure gradient, *J. Appl. Math. Phys.*, 27 (1), 119–125.

[38] Singh, K.K., 1976, Unsteady flow of an conducting dusty fluid through a rectangular channel with time dependent pressure gradient, *Indian J. pure Appl. Math.*, 8 (9), 1124–1131.

[39] Nag, S.K., Jana, R.N. and Datta, N., 1979, Couette flow of a dusty gas, *Acta Mech.*, 33 (3), 179–187.

[40] Kulshrestha, P.K. and Puri, P., 1983, Wave structure in oscillatory couette flow of a dusty gas, *Acta Mech.*, 46, 127–135.

[41] Vidya S., and Harinath, K.S., 1983, A note on a couette flow of a dusty fluid, *Nuovo Cim. B*, 73 (1), 57–62.

[42] Attia, H.A., 2006, Unsteady MHD couette flow and heat transfer of dusty fluid with variable physical properties, *Appl. Math. Comput.*, 177 (1), 308–318.

[43] Attia, H.A., 2008, Unsteady hydromagnetic Couette flow of dusty fluid with temperature dependent viscosity and thermal conductivity under exponential decaying pressure gradient, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 13 (6), 1077–1088.

[44] Attia, H.A., Al-kaisy, A.M.A. and Ewis, K.M., 2011, MHD Couette flow and heat transfer of a dusty fluid with exponential decaying pressure gradient, *Tamkang J. Sci. Eng.*, 14 (2), 91–96.

[45] Govindarajan, A., Ramamurthy, V. and Sundarammal, K., 2007, 3D couette flow of dusty fluid with transpiration cooling, *J. Zhejiang Univ. Sci. A*, 8 (2), 313–322.

[46] Sivaraj R. and Kumar, B.R., 2012, Unsteady MHD dusty viscoelastic fluid Couette flow in an irregular channel with varying mass diffusion, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 55 (11–12), 3076–3089.

[47] Vishalakshi, C.S., Gireesha, B.J. and Bagewadi, C.S., 2012, Three dimensional Couette flow of a dusty fluid through a porous medium with heat transfer, *Eur. J. Sci. Rsearch*, 68 (1), 127–146.

[48] Gayathri, R., Govindarajan, A. and Sasikala, R., 2018, Three-dimensional couette flow of dusty fluid with heat transfer in the presence of magnetic field, *Journal of Physics: Conf. Series,* 1000, 012147.

[49] Tabakoff, W. and Hameed, A., 1972, Analysis of cascade particle-gas boundary layer flows with pressure gradient, *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. 10th Aerosp. Sci. Meet.San Diago,C.S*, U.S.A.

[50] Xie, M.L., Lin, J.Z. and Xing, F.T., 2007, On the hydrodynamic stability of a particle-laden flow in growing flat plate boundary layer, *J. Zhejiang Univ. Sci. A*, 8 (2), 275–284.

[51] Agranat, V.M., 1988, Effect of pressure gradient of friction and heat transfer in a dusty boundary layer, *Fluid Dyn.*, 23 (5), 729–732.

[52] Asmolov, E.S. and Manuilovich, S.V., 1998, Stability of a dusty-gas laminar boundary layer on a flat plate, *J. Fluid Mech.*, 365, 137–170.

[53] Gireesha, B.J., Ramesh, G.K., Subhas Abel, S. and Bagewadi, C.S., 2011, Boundary layer flow and heat transfer of a dusty fluid flow over a stretching sheet with non-uniform heat source/sink, *Int. J. Multiph. Flow*, 37 (8), 977–982.

[54] Gireesha, B.J., Ramesh, G.K., Lokesh, H.J. and Bagewadi, C.S., 2011, Boundary layer flow and heat transfer of a dusty fluid over a stretching vertical surface, *Appl. Math.*, 2 (4), 475–481.

[55] Gireesha, B.J., Pavithra, G.M. and Bagewadi, C.S., 2012, Boundary layer flow and heat transfer of a dusty fluid over an exponentially stretching sheet, *Br. J. Math. Comput. Sci.*, 2 (4), 187–197.

[56] Manjunatha, S., Gireesha, B.J. and Bagewadi, C.S., 2013, Effect of thermal radiation on boundary layer flow and heat transfer of dusty fluid over an unsteady stretching sheet, *Int. J. Eng. Sci. Technol.*, 4 (4), 36–48.

[57] Ghadikolaei, S.S., Hosseinzadeh, K., Hatami, M. and Ganji, D.D., 2018, MHD boundary layer analysis for micropolar dusty fluid containing Hybrid nanoparticles (Cu-Al2O3) over a porous medium, *J. Mol. Liq.*, 268, 813–823.

[58] Ghadikolaei, S.S., Hosseinzadeh, K. and Ganji, D.D., 2018, Numerical study on magnetohydrodynic CNTs-water nanofluids as a micropolar dusty fluid influenced by non-linear thermal radiation and joule heating effect, *Powder Technol.*, 340, 389–399.

[59] Silu, S.M., Wainaina, M. and Kimathi, M., 2018, Effects of magnetic induction on MHD boundary layer flow of dusty fluid over a stretching sheet, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*,14 (9),1197-1215.

[60] Hiemenz, K., 1911, Die grenzschicht an einem in den gleichformigen flussigkeitsstrom eingetauchten geraden kreiszylinder, *Dinglers Polytech. J.*, 326, 321–324.

[61] Homann, F., 1936, Der einfluss grosser zahigkeit bei der strömung um den zylinder und um die kugel, *J. Appl. Math. Mech. (ZAMM)*, 16 (3), 153–164.

[62] Howarth, L., 1951, The boundary layer in three dimensional flow. Part II: The flow near a stagnation point, *Philos. Mag. J. Sci.*, 42 (335), 1433–1440.

[63] Davey, A., 1961, Boundary-layer flow at a saddle point of attachment, *J. Fluid Mech.*, 10 (4), 593–610.

[64] Sibulkin, M., 1952, Heat transfer near the forward stagnation point of a body of revolution, *J. Aeronaut. Sci.*, 19 (8), 570–571.

[65] Stuart, J.T., 1955, A solution of the Navier-Stokes and energy equations illustrating the response of skin friction and temperature of an infinite plate thermometer to fluctuations in the stream velocity, *Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.*, 231 (1184), 116–130.

[66] Rott, N., 1956, Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point, *Q. Appl. Math.*, 13 (4), 444–451.

[67] Glauert, M.B., 1956, The laminar boundary layer on oscillating plates and cylinders, *J. Fluid Mech.*, 1 (1), 97–110.

[68] Neuringer, J.L. and Mcilroy, W., 1958, Incompressible two-dimensional stagnation-point flow of an electrically conducting viscous fluid in the presence of a magnetic field, *J. Aerosp. Sci.*, 25 (3), 194–198.

[69] Neuringer, J.L. and Mcllroy, W., 1958, Hydromagnetic effects on stagnation-point heat transfer, *J. Aerosp. Sci.*, 25 (5), 332–334.

[70] Wang, C.Y., 1973, Axisymmetric stagnation flow towards a moving plate, *AIChE J.*, 19 (5), 1080–1081.

[71] Sparrow, E.M., Eichhorn, R. and Gregg, J.L., 1959, Combined forced and free convection in a boundary layer flow, *Phys. Fluids*, 2 (3) 319–328.

[72] Wang, C.Y., 1987, Effect of natural convection on the axisymmetric stagnation flow on a vertical plate, *J. Appl. Mech.*, 54 (3), 724–725.

[73] Wang, C. Y., 1988, The effects of buoyancy on the stagnation flow on a heated vertical plate, *Chem. Eng. Commun.*, 68 (1), 237–243.

[74] Ramachandran, N., Chen, T.S. and Armaly, B.F., 1988, Mixed convection in stagnation flows adjacent to vertical surfaces, *J. Heat Transfer*, 110 (2), 373–377.

[75] Lin H.T. and Chen, C.C., 1988, Mixed convection on vertical plate for fluids of any prandtl number, *Wärme und Stoffübertragung*, 22 (3–4), 159–168.

[76] Chamkha, A.J., 1998, Mixed convection flow along a vertical permeable plate embedded in a porous medium in the presence of a transverse magnetic field, *Numer. Heat Transf. Part A Appl.*, 34 (1), 93–103.

[77] Chamkha, A.J., 1998, Hydromagnetic plane and axisymmetric flow near a stagnation point with heat generation, *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, 25 (2), 269–278.

[78] Ariel, P.D., 1994, Hiemenz flow in hydromagnetics, *Acta Mech.*, 103 (1–4), 31–43.

[79] Na, T.Y., 1979, Computational methods in engineering boundary value problems, *New York Acad. Press*, ISBN: 0125126506.

[80] Attia, H.A., 2007, Axisymmetric stagnation point flow towards a stretching surface in the presence of a uniform magnetic field with heat generation, *Tamkang J. Sci. Eng.*, 10 (1), 11–16.

[81] Wang, C.Y., 2008, Similarity stagnation point solutions of the Navier-Stokes equations - review and extension, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 27 (6), 678–683.

[82] Wang, C.Y. and Ng, C.O., 2013, Stagnation flow on a heated vertical plate with surface slip, *J. Heat Transfer*, 135 (7), 1–8.

[83] Ishak, A., Jafar, K., Nazar, R. and Pop, I., 2009, MHD stagnation point flow towards a stretching sheet, *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, 388 (17), 3377–3383.

[84] Bhattacharyya, S. and Gupta, A.S., 1998, MHD flow and heat transfer at a general three-dimensional stagnation point, *Int. J. Non. Linear. Mech.*, 33 (1), 125–134.

[85] Borrelli, A., Giantesio, G. and Patria, M.C., 2013, On the numerical solutions of three-dimensional MHD stagnation-point flow of a newtonian fluid, *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 86 (2),425-442.

[86] Abbassi, A.S. and Rahimi, A.B., 2009, Nonaxisymmetric three-dimensional stagnation-point flow and heat transfer on a flat plate, *J. Fluids Eng.*, 131 (7), 074501–5.

[87] Pal, D., 2009, Heat and mass transfer in stagnation-point flow towards a stretching surface in the presence of buoyancy force and thermal radiation, *Meccanica*, 44 (2), 145–158.

[88] Demir, M.Ş. and Barış, S., 2016, MHD stagnation flow of a Newtonian fluid towards a uniformly heated and moving vertical plate, *J. Appl. Fluid Mech.*, 9 (3), 1735–3645.

[89] Demir, M.Ş. and Barış, S., 2016, Homann flow and heat transfer of a Newtonian fluid over a translating plate with viscous dissipation and heat generation, *J. Mech.*, 32 (6), 759–766.

[90] Datta, N. and Mishra, S.K., 1980, Two-dimensional stagnation point flow of a dusty fluid near an oscillating plate, *Acta Mech.*, 36 (1–2), 71–78.

[91] Fernandez de la Mora, J., 1982, Two dimensional stagnation point flow of a dusty gas near an oscillating plate, *Acta Mech.*, 43 (3–4), 261–265.

[92] Ramesh, G.K., Gireesha, B.J. and Bagewadi, C.S., 2012, MHD flow of a dusty fluid near the stagnation point over a permeable stretching sheet with non-uniform source/sink, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 15 (17–18), 4900–4907.

[93] Ramesh, G.K., Gireesha, B.J. and Bagewadi, C.S., 2014, Stagnation point flow of a MHD dusty fluid towards a stretching sheet with radiation, *Afrika Mat.*, 25 (1), 237–249.

[94] Prasannakumara, B.C., Gireesha, B.J. and Manjunatha, P.T., 2015, Melting phenomenon in MHD stagnation point flow of dusty fluid over a stretching sheet in the presence of thermal radiation and non-uniform heat source/sink, *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.*, 16 (5), 265–274.

[95] Mohaghegh, M. R. and Rahimi, A.B., 2016, Three -dimensional stagnation-point flow and heat transfer of a dusty fluid toward a stretching sheet, *J. Heat Transfer*, 138 (11).

[96] Mohamad Isa, S., Ali, A. and Shafie, S., 2016, Stagnation point flow of MHD dusty fluid toward stretching sheet with convective surface, *J. Teknol.*, 78 (3–2), 95–100.

[97] Animasaun, I.L., Prakash, J., Vijayaragavan, R. and Sandeep, N., 2017, Stagnation flow of nanofluid embedded with dust particles over an inclined stretching sheet with induced magnetic field and suction, *J. Nanofluids*, 6 (1), 1–10.

[98] Muthtamilselvan, M., 2019, Stagnation point flow of dusty casson fluid with thermal radiation and buoyancy effects, *J. Appl. Anal. Comput.*, 9 (2), 615–627.

[99] Libby, P.A., 1974, Wall shear at a three-dimensional stagnation point with a moving wall, *AIAA J.*, 12 (3), 408–409.

[100] Demir, M.Ş. and Barış, S., 2016, MHD Three dimensional stagnation-point flow of a Newtonian fluid towards a uniformly heated and moving permeable vertical plate, *Int. J. Sci. Tech. Innov. Ind. Mach. Technol. Mater.*, 1, 43–46.

[101] Shercliff, J.A., 1965, *A textbook of magnetohydrodynamics*, Pergamon Press, ISBN: 0082016984, 9780082016984.

[102] Rossow, V.J., 1958, On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field, *Nasa Technical Reports* NACA-TR-1358.

[103] Rubinow, S.I. and Keller, J.B., 1961, The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid, *J. Fluid Mech.*, 11 (3), 447–459.

[104] Demir, M. Ş., 2014, *Mikropolar bir akışkanın hareketli bir plaka üzerindeki akışı*, Thesis (PhD), İstanbul University.

[105] Kierzenka, J. and Shampine, L.F., 2001, A BVP solver based on residual control and the MATLAB PSE, *ACM Trans. Math. Softw.*, 27 (3), 299–316.

[106] Fernandez de la Mora, J., and Rosner, D. E., 1981, Inertial deposition of particles revisited and extended: Eulorian approach to a traditionallay Lagrangian Problem, *Physicochemical Hydrodynamics,* 2 (1),1-21.

[107] Vajrevalu, K. And Nayfeh, J., 1992, Hydromagnetic flow of a dusty fluid over a stretching sheet, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 27 (6), 937-945.

[108] C.Y. Wang, 2006, Stagnation slip flow and heat transfer on a moving plate, *Chem. Eng. Sci.*, 61, 7668-7672.