T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİNİN PERİYODİKLİĞİ VE ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

İbrahim YEŞERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ORTAÖĞRETİM ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROĞRAMI
KONYA, 2008

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FARK DENKLEMLERİNİN PERİYODİKLİĞİ VE ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

İbrahim YEŞERİ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Cengiz ÇİNAR

2008, 27 Sayfa

Jüri: Doç.Dr. Cengiz ÇİNAR

Yrd. Doç.Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Yrd. Doç.Dr. Dağıstan ŞİMŞEK

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; fark denklemlerinin periyodikliği ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verdik.

İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramları verdik.

Üçüncü bölümde, $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(11k+10)}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{n-(k+1)i-k}}$ fark denklemini tanımladık, çözümlerini ve periyodikliğini inceledik.

Dördüncü bölümde ise, çalışmamız ile ilgili sonuç ve öneriler verildi.

Anahtar kelime: Fark denklemi, periyodiklik

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

A STUDY ON SOLUATIONS AND PERIODICITY OF DIFFERENCE EQUATIONS

Selcuk University

Graduate School of Naturel and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

2008, 27 Sayfa

Jury: Assoc.Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

Asist. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Asist. Prof. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK

This study consists of four sections. In the first section,we gave information about some difference equations studied before.

In the second section, it was given necessary concepts for our study.

In the third section, we defined the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(11k+10)}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{n-(k+1)i-k}}$ and investigated its solutions and periodicity.

In the fourh section, the results and suggestions about our study were given.

Key Words: Difference Equation , Periodicity.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. DR. Cengiz ÇİNAR yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten ve çalışmalarımda desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. DR Cengiz ÇİNAR'a ,Yrd. Doç. DR. Dağıstan ŞİMŞEK'e , Yrd. Doç. DR İbrahim YALÇINKAYA'ya arkadasım Nuriye ATASEVER' e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

İbrahim YEŞERİ

KONYA 2008

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

1.BÖLÜM

GİRİŞ…….. ……1

1.1. LİTERATÜR ÖZETİ ..……2

2.BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIMLAR…….3

3.BÖLÜM

$x_{n+1} = \frac{x_{n-(11k+10)}}{1 + \prod_{i=0}^{9} x_{n-(k+1)i-k}}$ RASYONEL FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ VE PERİYODİKLİĞİ….....4

4.BÖLÜM

SONUÇ ve ÖNERİLER ……...……....25

KAYNAKÇA……26

.

1.BÖLÜM

Giriş

Bu çalışmada $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(11k+10)}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{n-(k+1)i-k}}$ (n = 0, 1, 2, …) fark denkleminin $x_{-(11k+11)}, x_{(-11k+10)}, x_{-(11k+9)}, \ldots, x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ başlangıç şartları kullanılarak çözümleri ve periyodikliği incelenmiştir.

1.1. Literatür özeti:

Son zamanlarda lineer olmayan fark denklemlerin periyodikliği ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. [1, 2, 3, 4, 5,].[3] de Gibbons ve arkadaşları $x_{-1}x_0 \in (0,\infty)$, $\beta > 0$ ve $n \to \infty$ için $x_n \to 0$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1}}{\beta + x_n} (n = 0,1,2,3,...)$ açık problemi ortaya atmışlardır.

[6] da Stevic , [3] de ortaya atılan problemde $\beta = 1$ alarak denklemin periyodikliğini

incelemiştir.

[7] de Şimşek ve arkadaşları $x_{-5}x_{-4}x_{-3}x_{-2}x_{-1}x_0 \in (0,\infty)$ olmak üzere n = 0, 1, 2, … için $x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1 + x_{n-2}}$, [8] de ise $x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1 + x_{n-1}x_{n-3}}$ fark denkleminin periyodikliğini incelemişlerdir.

[9] da Şimşek ve arkadaşları $x_{-9}x_{-8}x_{-7}x_{-6}x_{-5}x_{-4}x_{-3}x_{-2}x_{-1}x_0 \in (0,\infty)$ başlangıç şartıyla

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-9}}{1 + x_{n-1}x_{n-3}x_{n-5}x_{n-7}} \text{ (n=0, 1, 2….)}$$

fark denkleminin çözümünü incelemiştir.

[10] da Şimşek ve arkadaşları $x_{-3}x_{-2}x_{-1}x_0 \in (0,\infty)$ başlangıç şartıyla

$x_{n+1} = \frac{x_{n-3}}{1 + x_{n-1}}$ (n=0, 1, 2….) fark denkleminin çözümünü incelemiştir.

Bu çalışmada [6] da Stevic tarafından yapılan çalışma esas alınmıştır.

2.BÖLÜM
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIMLAR

x bağımsız değişkeninin sürekli durumda, y(x) bağımlı değişkeninin değişimi y(x), $y'(x)$, ... $y^{(n)}(x)$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz.Bu bölümde x in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım:2.1. n bağımsız değişken ve buna bağılı değişkende y olmak üzere, bağımlı ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin E(y), $E^2(y),...,E^{(n)}(y),\ldots$ gibi farklarını içine alan bağıntılara Fark Denklemi denir. Dikkat edilir ise n'nin sürekli olduğu halde Diferansiyel Denklemleri ile arasında büyük benzerlikler vardır.

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

Birinci dereceden fark denklemidir.

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

İkinci dereceden fark denklemidir. Denklemin mertebesinin belirlenmesinde, y'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan nokta sayısı göz önüne alınmaktadır.

y(n+2)-5y(n+1)+y(n)=n(2.mertebeden fark denklemidir.)
y(t+2)-2y(t+2)+2y(n+1)-3y(n)=0(3. mertebeden fark denklemidir.)

Tanım 2.2. I reel sayılarının bir alt aralığı olmak üzere ; $f : I * I \to I$ tanımlı sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O zaman $\forall x_{-1}, x_0 \in I$ için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \text{n=0,1,2,}\ldots \qquad (1.1)$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.3. Eğer $\bar{x}$ noktası için $f(\bar{x},\bar{x})=\bar{x}$ ise $\bar{x}$'e f'nin denge noktası denir.Eğer $\forall n \geq 0$ için $\bar{x}=x_n$ ise o zaman $\bar{x}$'e f'nin sabit noktası denir.

Tanın 2.4. $\bar{x}$, (1,1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

a) Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\left|x_0-\bar{x}\right|+\left|x_{-1}-\bar{x}\right|<\delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa; o zaman bütün $n \geq -1$ için $\left|x_0-\bar{x}\right|<\varepsilon$ olur. Bu halde $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

b) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\left|x_0-\bar{x}\right|+\left|x_{-1}-\bar{x}\right|<\sigma$ olacak şekilde $\sigma > 0$ varsa; o zaman $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ dir. Bu halde $\bar{x}$ denge noktası lokal olarak asimtotik kararlıdır denir.

c) Eğer $\forall x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise ; o zaman $\bar{x}$ denge noktasına global attractor denir.

d) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global attractor ise ; o zaman x'ye global asimtotik kararlı denir.

e) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise ; o zaman kararsızdır denir.

f) Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\left|x_0-\bar{x}\right|+\left|x_{-1}-\bar{x}\right|<r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa; o zaman $\bar{x}$'ye repeller denir ve $\left|x_N-\bar{x}\right| \geq r$ olacak şekilde $N \geq -1$ sayısı vardır.

***T*anım 2.5.** Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p}=x_n$ ise ;o zaman $\{x_n\}$ dizisine, periyotludur denir.

Tanım 2.6. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için, dizinin sonlu sayıdaki terimleri hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terimleri için $x_{n+p}=x_n$ ise; o zaman $\{x_n\}$ dizisine, ergeç p periyotludur denir.

3.BÖLÜM

Bu bölümde; $x_{-(11k+11)}, x_{(-11k+10)}, x_{-(11k+9)}, ..., x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ ve k = 0,1,2,…. olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-(11k+10)}}{1 + \prod_{i=0}^{9} x_{n-(k+1)i-k}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (3.1)$$

rasyonel fark denklemi için bir teorem ve ispatı verilmiştir.

Teorem: (3.1) rasyonel fark denklemi için aşağıdakiler doğrudur.

a) $(x_{(11k+11)n-(11k+10)}), (x_{(11k+11)n-(11k+9)}), (x_{(11k+11)n-(11k+8)}), \ldots (x_{(11k+11)n-3}), (x_{(11k+11)n-2}), (x_{(11k+11)n-1}), (x_{(11k+11)n})$ azalan diziler ve $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{(11k+9)}, a_{(11k+10)}, a_{(11k+11)} \geq 0$ olmak üzere;

$\lim_{n\to\infty}(x_{(11k+11)n-(11k+10)}) = a_1$, $\lim_{n\to\infty}(x_{(11k+11)n-(11k+9)}) = a_2$, $\lim_{n\to\infty}(x_{(11k+11)n-(11k+8)}) = a_3$, …

… $\lim_{n\to\infty}(x_{(11k+11)n-3}) = a_{11k+8}$, $\lim_{n\to\infty}(x_{(11k+11)n-2}) = a_{11k+9}$, $\lim_{n\to\infty}(x_{(11k+11)n-1}) = a_{11k+10}$,

$\lim_{n\to\infty}(x_{(11k+11)n}) = a_{11k+11}$ olur.

b) $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{(11k+8)}, a_{(11k+9)}, a_{(11k+10)}, a_{(11k+11)}, \ldots)$ (3.1) denkleminin çözümüdür ve (11k+11) periyotludur.

c) $a_1 a_{k+2} a_{2k+3} a_{3k+4} a_{4k+5} a_{5k+6} a_{6k+7} a_{7k+8} a_{8k+9} a_{9k+10} a_{10k+11} = 0$

$a_2 a_{k+3} a_{2k+4} a_{3k+5} a_{4k+6} a_{5k+7} a_{6k+8} a_{7k+9} a_{8k+10} a_{9k+11} a_{10k+12} = 0$

•
•
•

$a_k a_{2k+1} a_{3k+2} a_{4k+3} a_{5k+4} a_{6k+5} a_{7k+6} a_{8k+7} a_{9k+8} a_{10k+9} a_{11k+10} = 0$

$a_{k+1} a_{2k+2} a_{3k+3} a_{4k+4} a_{5k+5} a_{6k+6} a_{7k+7} a_{8k+8} a_{9k+9} a_{10k+10} a_{11k+11} = 0$

dir.

d) Eğer $n_0 \in N$ iken bütün $n \geq n_0$ için $x_{n+1} \leq x_{n-(10k+9)}$ ise $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır.

e)Aşağıdaki ifadeler doğrudur;

$$x_{(11k+11)n+1} = x_{-(11k+10)}\left(1-\frac{\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}}\right)$$

$$x_{(11k+11)n+2} = x_{-(11k+9)}\left(1-\frac{\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k-1)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+k+1} = x_{-(10k+10)}\left(1-\frac{\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k+1)i}}\right)$$

$$x_{(11k+11)n+k+2} = x_{-(10k+9)}\left(1-\frac{x_{-(11k+10)}\prod_{i=0}^{8} x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+1}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$x_{(11k+11)n+k+3} = x_{-(10k+8)}\left(1-\frac{x_{-(11k+9)}\prod_{i=0}^{8} x_{1-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+1}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k-1)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+2k+3} = x_{-(9k+8)}\left(1-\frac{x_{-(11k+10)}x_{-(10k+9)}\prod_{i=0}^{7} x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+2}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$x_{(11k+11)n+2k+4} = x_{-(9k+7)}\left(1-\frac{x_{-(11k+9)}x_{-(10k+8)}\prod_{i=0}^{7} x_{1-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+2}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k-1)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+3k+4} = x_{-(8k+7)}\left(1-\frac{x_{-(11k+10)}x_{-(10k+9)}x_{-(9k+8)}\prod_{i=0}^{6}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+3}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+4k+5} = x_{-(7k+6)}\left(1-\frac{\prod_{i=7}^{10}x_{-(k+1)i-k}\prod_{i=0}^{5}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+4}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+5k+6} = x_{-(6k+5)}\left(1-\frac{\prod_{i=6}^{10}x_{-(k+1)i-k}\prod_{i=0}^{4}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+5}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+6k+7} = x_{-(5k+4)}\left(1-\frac{\prod_{i=5}^{10}x_{-(k+1)i-k}\prod_{i=0}^{3}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+6}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+7k+8} = x_{-(4k+3)}\left(1-\frac{\prod_{i=4}^{10}x_{-(k+1)i-k}\prod_{i=0}^{2}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+7}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+8k+9} = x_{-(3k+2)}\left(1-\frac{\prod_{i=3}^{10}x_{-(k+1)i-k}\prod_{i=0}^{1}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+8}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+9k+10} = x_{-(2k+1)}\left(1-\frac{\prod_{i=2}^{10} x_{-(k+1)i-k}\,x_{-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+9}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+11k+11} = x_{0}\left(1-\frac{\prod_{i=1}^{10} x_{-(k+1)i}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+11}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k+1)i}}\right)$$

İspat:

a] (3.1) denkleminden $x_{n+1}(1+\prod_{i=0}^{9} x_{n-(k+1)i-k}) = x_{n-(11k+10)}$ elde edilir.

Buradan $x_{n-(k+1)i-k} \in (0,\infty)$, $(i = 0,1,2,3,...,9)$ olduğu için $\prod_{i=0}^{9} x_{n-(k+1)-k} \in (0,\infty)$

olur. Böylece $1+\prod_{i=0}^{9} x_{n-(k+1)-k} \in (1,\infty)$ olduğundan $x_{n+1} \langle x_{n-(11k+10)}$ bulunur.

Şimdi bu ifadeyi n nin değerleri için irdeleyelim.

n = 0 için	$x_1 \langle x_{-(11k+10)}$
n = 1 için	$x_2 \langle x_{-(11k+9)}$
n = 2 için	$x_3 \langle x_{-(11k+8)}$
$\vdots$	$\vdots$
n = k-1 için	$x_k \langle x_{-(10k+11)}$
n = k için	$x_{k+1} < x_{-(10k+10)}$
n = k+1 için	$x_{k+2} < x_{-(10k+9)}$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

n = 11k+8 için	$x_{11k+9} < x_{-2}$
n = 11k+9 için	$x_{11k+10} < x_{-1}$
n = 11k+10 için	$x_{11k+11} < x_0$
n = 11k+11 için	$x_{11k+12} < x_1 < x_{-(11k+10)}$
n = 11k+12 için	$x_{11k+13} < x_2 < x_{-(11k+9)}$
n = 11k+13 için	$x_{11k+14} < x_3 < x_{-(11k+8)}$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

n = 22k+19 için	$x_{22k+20} < x_{11k+9} < x_{-2}$
n = 22k+20 için	$x_{22k+21} < x_{11k+10} < x_{-1}$
n = 22k+21için	$x_{22k+22} < x_{11k+8} < x_0$

olarak hesaplanır.

İşlemleri bu şekilde devam ettirirsek;

$$\lim_{n\to\infty} x_{(11n+11)n-(11k+10)} = a_1$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{(11n+11)n-(11k+9)} = a_2$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{(11n+11)n-(11k+8)} = a_3$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{(11n+11)n-2} = a_{(11k+9)}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{(11n+11)n-1} = a_{(11k+10)}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{(11n+11)n} = a_{(11k+11)}$$

elde edilir.

b) a) şıkkından (3.1) denkleminin çözümünün

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \quad \ldots \quad a_{(11k+8)}, a_{(11k+9)}, a_{(11k+10)}, a_{(11k+11)}, \ldots)$ ve bu çözümlerin 11k+11 periyotlu olduğu görülür.

c) (3.1) denkleminde

n =11k+11 alınırsa $x_{(11k+11)n+1} = \dfrac{x_{(11k+11)n-(11k+10)}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{(11k+11)n-(k+1)i-k}}$ elde edilir. Buradan her iki tarafın limiti alınırsa;

$$\lim_{x\to\infty} x_{(11k+11)n+1} = \frac{\lim_{x\to\infty} x_{(11k+11)n-(11k+10)}}{1+\lim_{x\to\infty}\prod_{i=0}^{9} x_{(11k+11)n-(k+1)i-k}}$$

$$a_1 = \frac{a_1}{1 + a_{10k+11}.a_{9k+10}.a_{8k+9}a_{7k+8}a_{6k+7}a_{5k+6}a_{4k+5}a_{3k+4}a_{2k+3}a_{k+2}}$$

$$\Rightarrow a_1(1 + a_{10k+11}.a_{9k+10}.a_{8k+9}a_{7k+8}a_{6k+7}a_{5k+6}a_{4k+5}a_{3k+4}a_{2k+3}a_{k+2}) = a_1$$
$$\Rightarrow a_1 a_{k+2}a_{2k+3}a_{3k+4}a_{4k+5}a_{5k+6}a_{6k+7}a_{7k+8}.a_{8k+9}a_{9k+10}a_{10k+11} = 0$$

elde edilir.

Benzer şekilde n = (11k+11)n+1 alınırsa;

$x_{(11k+11)n+2} = \dfrac{x_{(11k+11)n-(11k+9)}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{(11k+11)n-(k+1)i-(k-1)}}$ elde edilir. Buradan her iki tarafın limiti alınırsa;

$$\lim_{x\to\infty} x_{(11k+11)n+2} = \frac{\lim_{x\to\infty} x_{(11k+11)n-(11k+9)}}{1+\lim_{x\to\infty}\prod_{i=0}^{9} x_{(11k+11)n-(k+1)i-(k-1)}}$$

$$a_2 = \frac{a_2}{1 + a_{10k+12}.a_{9k+11}.a_{8k+10}a_{7k+9}a_{6k+8}a_{5k+7}a_{4k+6}a_{3k+5}a_{2k+4}a_{k+3}}$$

$$\Rightarrow a_2(1 + a_{10k+12}.a_{9k+11}.a_{8k+10}a_{7k+9}a_{6k+8}a_{5k+7}a_{4k+6}a_{3k+5}a_{2k+4}a_{k+3}) = a_2$$

$$\Rightarrow a_2a_{k+3}a_{2k+4}a_{3k+5}a_{4k+6}a_{5k+7}a_{6k+8}a_{7k+9}.a_{8k+10}a_{9k+11}a_{10k+12} = 0$$

elde edilir.

Bu şekilde limit almaya devam edilirse son olarak;

$$x_{(11k+11)n+k+1} = \frac{x_{(11k+11)n-(10k+10)}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{(11k+11)n-(k+1)i}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x_{(11k+11)n+k+1} = \frac{\lim_{x\to\infty} x_{(11k+11)n-(10k+10)}}{1+\lim_{x\to\infty}\prod_{i=0}^{9} x_{(11k+11)n-(k+1)i}}$$

$$a_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{1 + a_{11k+11}.a_{10k+10}.a_{9k+9}a_{8k+8}a_{7k+7}a_{6k+6}a_{5k+5}a_{4k+4}a_{3k+3}a_{2k+2}}$$

$$\Rightarrow a_{k+1}(1+a_{11k+11}.a_{10k+10}.a_{9k+9}a_{8k+8}a_{7k+7}a_{6k+6}a_{5k+5}a_{4k+4}a_{3k+3}a_{2k+2}) = a_{k+1}$$

$$\Rightarrow a_{k+1}a_{2k+2}a_{3k+3}a_{4k+4}a_{5k+5}a_{6k+6}a_{7k+7}a_{8k+8}.a_{9k+9}a_{10k+10}a_{11k+11} = 0$$

olur.

Bulduklarımızı sırayla yazarsak;

$$a_1a_{k+2}a_{2k+3}a_{3k+4}a_{4k+5}a_{5k+6}a_{6k+7}a_{7k+8}.a_{8k+9}a_{9k+10}a_{10k+11} = 0$$

$$a_2a_{k+3}a_{2k+4}a_{3k+5}a_{4k+6}a_{5k+7}a_{6k+8}a_{7k+9}.a_{8k+10}a_{9k+11}a_{10k+12} = 0$$

$$\vdots \tag{3.2}$$

$$a_k a_{2k+1} a_{3k+2} a_{4k+3} a_{5k+4} a_{6k+5} a_{7k+6} a_{8k+7} . a_{9k+8} a_{10k+90} a_{11k+10} = 0$$

$$a_{k+1} a_{2k+2} a_{3k+3} a_{4k+4} a_{5k+5} a_{6k+6} a_{7k+7} a_{8k+8} . a_{9k+9} a_{10k+10} a_{11k+11} = 0$$

elde edilir

Böylece ispat tamamlanmış olur.

d) Eğer $x_0 \in \mathbb{N}$ iken bütün $x \geq n_0$ için

$$x_{n+1} \leq x_{n-(10k+9)} \tag{3.3}$$

(3.3) ifadesinde

n = (11k+11)n+1 alınırsa $x_{(11k+11)n+2} \leq x_{(11k+11)n-(10k+8)}$

n = (11k+11)n+2 alınırsa $x_{(11k+11)n+3} \leq x_{(11k+11)n-(10k+7)}$

n = (11k+11)n+3 alınırsa $x_{(11k+11)n+4} \leq x_{(11k+11)n-(10k+6)}$

$\vdots$ $\vdots$

n = (11k+11)n+10k+10 alınırsa $x_{(11k+11)n+10k+11} \leq x_{(11k+11)n+1}$

n = (11k+11)n+10k+11alınırsa $x_{(11k+11)n+10k+12} \leq x_{(11k+11)n+2} \leq x_{(11k+11)n-(10k+8)}$

n = (11k+11)n+10k+12 alınırsa $x_{(11k+11)n+10k+13} \leq x_{(11k+11)n+3} \leq x_{(11k+11)n-(10k+7)}$

$\vdots$ $\vdots$

n = (11k+11)n+20k+20 alınırsa $x_{(11k+11)+20k+21} \leq x_{(11k+11)n+10k+11} \leq x_{(11k+11)n+1}$

n = (11k+11)n+20k+21alınırsa . .

$$x_{(11k+11)+20k+22} \leq x_{(11k+11)n+10k+12} \leq x_{(11k+11)n+2} \leq x_{(11k+11)n-(10k+8)}$$

n = (11k+11)n+20k+22 alınırsa

$$x_{(11k+11)+20k+23} \le x_{(11k+11)n+10k+13} \le x_{(11k+11)n+3} \le x_{(11k+11)n-(10k+7)}$$

$$\vdots$$

elde edilir.

Bu şekilde incelemeye devam edip limit alırsak;

$a_1 \le a_{k+2} \le a_{2k+3} \le a_{3k+4} \le a_{4k+5} \le a_{5k+6} \le a_{6k+7} \le a_{7k+8} \le a_{8k+9} \le a_{9k+10} \le a_{10k+11} \le$
$\le a_1 \le a_{k+2} \ldots$
$a_2 \le a_{k+3} \le a_{2k+4} \le a_{3k+5} \le a_{4k+6} \le a_{5k+7} \le a_{6k+8} \le a_{7k+9} \le a_{8k+10} \le a_{9k+11} \le a_{10k+12} \le$
$\le a_2 \le a_{k+3} \ldots$
$a_3 \le a_{k+4} \le a_{2k+5} \le a_{3k+6} \le a_{4k+7} \le a_{5k+8} \le a_{6k+9} \le a_{7k+10} \le a_{8k+11} \le a_{9k+12} \le a_{10k+13} \le$
$\le a_3 \le a_{k+4} \ldots$

$$\vdots$$

$a_k \le a_{2k+1} \le a_{3k+2} \le a_{4k+3} \le a_{5k+4} \le a_{6k+5} \le a_{7k+6} \le a_{8k+7} \le a_{9k+8} \le a_{10k+9} \le a_{11k+10} \le$
$\le a_k \le a_{2k+1} \ldots$
$a_{k+1} \le a_{2k+2} \le a_{3k+3} \le a_{4k+4} \le a_{5k+5} \le a_{6k+6} \le a_{7k+7} \le a_{8k+8} \le a_{9k+9} \le a_{10k+10} \le a_{11k+11} \le$
$\le a_{k+1} \le a_{2k+2} \ldots$

olur.

Buradan

$$a_1 = a_{k+2} = a_{2k+3} = a_{3k+4} = a_{4k+5} = a_{5k+6} = a_{6k+7} = a_{7k+8} = a_{8k+9} = a_{9k+10} = a_{10k+11}$$

$$a_2 = a_{k+3} = a_{2k+4} = a_{3k+5} = a_{4k+6} = a_{5k+7} = a_{6k+8} = a_{7k+9} = a_{8k+10} = a_{9k+11} = a_{10k+12}$$

$$a_1 = a_{k+4} = a_{2k+5} = a_{3k+6} = a_{4k+7} = a_{5k+8} = a_{6k+9} = a_{7k+10} = a_{8k+11} = a_{9k+12} = a_{10k+13}$$

$$\vdots$$

$$a_{k+1} = a_{2k+2} = a_{3k+3} = a_{4k+4} = a_{5k+5} = a_{6k+6} = a_{7k+7} = a_{8k+8} = a_{9k+9} = a_{10k+10} = a_{11k+11} \quad (3.4)$$

olarak elde edilir.

Böylece (3.2) ve (3.4) denklemlerinden

$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_k = a_{k+1} = \ldots = a_{11k+10} = a_{11k+11} = 0$ olduğu görülür. Buradan da

$\lim_{x \to \infty} x_n = 0$ olur.

e) (3.1) denkleminin her iki tarafından $x_{n-(11k+10)}$ çıkarılırsa;

$$x_{n+1} - x_{n-(11k+10)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{n-(k+1)i-k}}\right)(x_{n-k} - x_{n-12k-11})$$

elde edilir. n= 0,1,2,3, … ,k, … ,2k,2k+1, … ,11k+11 değerleri için aşağıdaki denklemler bulunur;

n = 0 için $$x_1 - x_{-(11k+10)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}\right)(x_{-k} - x_{-12k-11})$$

n = 1 için $$x_2 - x_{-(11k+9)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i-k}}\right)(x_{-k+1} - x_{-12k-10})$$

n = 2 için $$x_3 - x_{-(11k+8)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{2-(k+1)i-k}}\right)(x_{-k+2} - x_{-12k-9})$$

n = 3 için $$x_4 - x_{-(11k+7)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{3-(k+1)i-k}}\right)(x_{-k+3} - x_{-12k-8})$$

$$\vdots$$

n = k-1 için $$x_k - x_{-(10k+11)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-1-(k+1)i}}\right)(x_{-1} - x_{-11k-12})$$

n = k için $$x_{k+1} - x_{-(10k+10)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i}}\right)(x_0 - x_{-11k-11})$$

n = k+1 için $$x_{k+2} - x_{-(10k+9)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i}}\right)(x_1 - x_{-(11k+10)})$$

$$\vdots$$

n = 2k için $$x_{2k+1} - x_{-(9k+10)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{k-(k+1)i}}\right)(x_k - x_{-(10k+11)})$$

n = 2k+1 için

$$x_{2k+2} - x_{-(9k+9)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{k+1-(k+1)i}}\right)\left(x_{k+1} - x_{-(10k+10)}\right)$$

n = 2k+2 için

$$x_{2k+3} - x_{-(9k+8)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{k+2-(k+1)i}}\right)\left(x_{k+2} - x_{-(10k+9)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{k+2-(k+1)i}}\right)\left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i}}\right)\left(x_1 - x_{-(11k+10)}\right)$$

n = 2k+3 için

$$x_{2k+4} - x_{-(9k+7)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{k+3-(k+1)i}}\right)\left(x_{k+3} - x_{-(10k+8)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{k+3-(k+1)i}}\right)\left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{2-(k+1)i}}\right)\left(x_2 - x_{-(11k+9)}\right)$$

$$\vdots$$

n = 3k+2 için

$$x_{3k+3} - x_{-(8k+8)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{2k+2-(k+1)i}}\right)\left(x_{2k+2} - x_{-(9k+9)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{2k+2-(k+1)i}}\right)\left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{k+1-(k+1)i}}\right)\left(x_{k+1} - x_{-(10k+10)}\right)$$

n = 3k+3 için

$$x_{3k+4} - x_{-(8k+7)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{2k+3-(k+1)i}}\right)\left(x_{2k+3} - x_{-(9k+8)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{2k+3-(k+1)i}}\right)\left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{k+2-(k+1)i}}\right)\left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i}}\right)\left(x_1 - x_{-(11k+10)}\right)$$

n = 3k+4 için

$$x_{3k+5} - x_{-(8k+6)} = \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{2k+4-(k+1)i}}\right)\left(x_{2k+4} - x_{-(9k+7)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{2k+4-(k+1)i}}\right)\left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{k+3-(k+1)i}}\right)\left(\frac{1}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{2-(k+1)i}}\right)\left(x_2 - x_{-(11k+9)}\right)$$

$$\vdots$$

n = 11k+11 için

$$x_{11k+12} - x_1 = \left(x_1 - x_{-(11k+10)}\right)\prod_{s=1}^{11} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}}$$

elde edilen bu denklemlerin tamamına (3.5) diyelim. Böylece;

n = (k+1)n için

$$x_{(k+1)n+1} - x_{(k+1)n-(11k+10)} = \left(x_1 - x_{-(11k+10)}\right)\prod_{s=1}^{n} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}}$$

n = (k+1)n+1 için

$$x_{(k+1)n+2} - x_{(k+1)n-(11k+9)} = \left(x_2 - x_{-(11k+9)}\right)\prod_{s=1}^{n} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k-1)-(k+1)i}}$$

n = (k+1)n+2 için

$$x_{(k+1)n+3} - x_{(k+1)n-(11k+8)} = \left(x_3 - x_{-(11k+8)}\right)\prod_{s=1}^{n} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k-2)-(k+1)i}}$$

$$\vdots$$

n = (k+1)n +k için

$$x_{(k+1)n+k} - x_{(k+1)n-(10k+11)} = \left(x_k - x_{-(10k+11)}\right)\prod_{s=1}^{n} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-1-(k+1)i}}$$

n=(k+1)n+k+1için

$$x_{(k+1)n+k+1} - x_{(k+1)n-(10k+10)} = \left(x_{k+1} - x_{-(10k+10)}\right)\prod_{s=1}^{n} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k+1)i}}$$

elde ederiz. Bu denklemlerin tamamına da (3.6) diyelim.

Şimdi (3.6) denklemlerinden,

$x_{(k+1)n+1} - x_{(k+1)n-(11k+10)} = (x_1 - x_{-(11k+10)}) \prod_{s=1}^{n} \frac{1}{1 + \prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}}$ ele alalım. Böylece;

n = 0 için $x_1 - x_{-(11k+10)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})$

ve

n = 11 için $x_{11k+12} - x_1 = (x_1 - x_{-(11k+10)}) \prod_{s=1}^{11} \frac{1}{1 + \prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}}$

elde ederiz. Bunları taraf tarafa toplarsak;

$x_{11k+12} - x_{-(11k+10)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(1 + \prod_{s=1}^{11} \frac{1}{1 + \prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$ olur. Benzer olarak

n = 22 için $x_{22k+23} - x_{11k+12} = (x_1 - x_{-(11k+10)}) \prod_{s=1}^{22} \frac{1}{1 + \prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}}$

yazılabilir.

Son iki denklemi taraf tarafa toplarsak;

$x_{22k+23} - x_{-(11k+10)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(1 + \prod_{s=1}^{11} \frac{1}{1 + \prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}} + \prod_{s=1}^{22} \frac{1}{1 + \prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$

elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse

$x_{(11k+11)n+11} - x_{-(11k+10)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j} \frac{1}{1 + \prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$ olur.

n yerine değerler yazılarak benzer işlemler yapmaya devam edersek;

$$x_{(11k+11)n+1} - x_{-(11k+10)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+k+2} - x_{-(10k+9)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+1} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+2k+3} - x_{-(9k+8)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+2} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+3k+4} - x_{-(8k+7)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+3} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+4k+5} - x_{-(7k+6)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+4} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+5k+6} - x_{-(6k+5)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+5} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+6k+7} - x_{-(5k+4)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+6} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+7k+8} - x_{-(4k+3)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+7} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+8k+9} - x_{-(3k+2)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+8} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+9k+10} - x_{-(2k+1)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+9} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+10k+11} - x_{-k} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+10} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

denklemleri bulunur. Benzer işlemler (3.6) denkleminin her biri için ayrı ayrı uygulanırsa;

$$x_{(11k+11)n+1} - x_{-(11k+10)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+2} - x_{-(11k+9)} = (x_2 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k-1)-(k+1)i}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+k+1} - x_{-(10k+10)} = (x_{k+1} - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+k+2} - x_{-(10k+9)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+1} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+k+3} - x_{-(10k+8)} = (x_2 - x_{-(11k+9)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+1} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k-1)-(k+1)i}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+2k+3} - x_{-(9k+8)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+2} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$x_{(11k+11)n+2k+4} - x_{-(9k+7)} = (x_2 - x_{-(11k+9)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+2} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k-1)-(k+1)i}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+3k+4} - x_{-(8k+7)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+3} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+4k+5} - x_{-(7k+6)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+4} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+5k+6} - x_{-(6k+5)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+5} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+6k+7} - x_{-(5k+4)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+6} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+7k+8} - x_{-(4k+3)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+7} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+8k+9} - x_{-(3k+2)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+8} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+9k+10} - x_{-(2k+1)} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+9} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+10k+11} - x_{-k} = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+10} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+11k+11} - x_0 = (x_1 - x_{-(11k+10)})(\sum_{j=0}^{n} \prod_{s=1}^{11j+11} \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}})$$

bulunur. Bu denklemlerin tamamına (3.7) diyelim.

(3.7) denkleminde kullanacağımız bazı eşitlikleri

$$x_1 - x_{-(11k+10)} = \frac{x_{-(11k+10)}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}} - x_{-(11k+10)}$$

$$= -\frac{x_{-(11k+10)} \prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}$$

$$x_2 - x_{-(11k+9)} = \frac{x_{-(11k+9)}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}} - x_{-(11k+9)}$$

$$= -\frac{x_{-(11k+9)} \prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i-k}}$$

$$\vdots$$

$$x_{k+1} - x_{-(10k+10)} = \frac{x_{-(10k+10)}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}} - x_{-(10k+10)}$$

$$= -\frac{x_{-(10k+10)} \prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i}}$$

biçiminde elde edelim. Bu eşitlikleri (3.7) denklemlerinde yerlerine yazarsak

$$x_{(11k+11)n+1} = x_{-(11k+10)}\left(1-\frac{\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-k-(k+1)i}}\right)$$

$$x_{(11k+11)n+2} = x_{-(11k+9)}\left(1-\frac{\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k-1)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+k+1} = x_{-(10k+10)}\left(1-\frac{\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k+1)i}}\right)$$

$$x_{(11k+11)n+k+2} = x_{-(10k+9)}\left(1-\frac{x_{-(11k+10)}\prod_{i=0}^{8} x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+1}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$x_{(11k+11)n+k+3} = x_{-(10k+8)}\left(1-\frac{x_{-(11k+9)}\prod_{i=0}^{8} x_{1-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+1}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k-1)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+2k+3} = x_{-(9k+8)}\left(1-\frac{x_{-(11k+10)}x_{-(10k+9)}\prod_{i=0}^{7} x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+2}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$x_{(11k+11)n+2k+4} = x_{-(9k+7)}\left(1-\frac{x_{-(11k+9)}x_{-(10k+8)}\prod_{i=0}^{7} x_{1-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{1-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+2}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k-1)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+3k+4} = x_{-(8k+7)}\left(1-\frac{x_{-(11k+10)}x_{-(10k+9)}x_{-(9k+8)}\prod_{i=0}^{6}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+3}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+4k+5} = x_{-(7k+6)}\left(1-\frac{\prod_{i=7}^{10}x_{-(k+1)i-k}\prod_{i=0}^{5}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+4}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+5k+6} = x_{-(6k+5)}\left(1-\frac{\prod_{i=6}^{10}x_{-(k+1)i-k}\prod_{i=0}^{4}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+5}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+6k+7} = x_{-(5k+4)}\left(1-\frac{\prod_{i=5}^{10}x_{-(k+1)i-k}\prod_{i=0}^{3}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+6}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+7k+8} = x_{-(4k+3)}\left(1-\frac{\prod_{i=4}^{10}x_{-(k+1)i-k}\prod_{i=0}^{2}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+7}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+8k+9} = x_{-(3k+2)}\left(1-\frac{\prod_{i=3}^{10}x_{-(k+1)i-k}\prod_{i=0}^{1}x_{-(k+1)i-k}}{1+\prod_{i=0}^{9}x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+8}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9}x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+9k+10} = x_{-(2k+1)}\left(1-\frac{\prod_{i=2}^{10} x_{-(k+1)i-k}\,x_{-k}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+9}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k)-(k+1)i}}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{(11k+11)n+11k+11} = x_{0}\left(1-\frac{\prod_{i=1}^{10} x_{-(k+1)i}}{1+\prod_{i=0}^{9} x_{-(k+1)i}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{s=1}^{11j+11}\frac{1}{1+\prod_{i=1}^{9} x_{(k+1)s-(k+1)i}}\right)$$

elde edilir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(11k+10)}}{1 + \prod_{i=0}^{9} x_{n-(k+1)i-k}}$ (n = 0, 1, 2, …) fark denkleminin $x_{-(11k+11)}, x_{(-11k+10)}, x_{-(11k+9)}, \ldots, x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ başlangıç şartları kullanılarak, periyodikliği ve çözümleri gösterilmiştir. Bu fark denkleminde i>9 değerleri için yeni elde edilecek denklemin periyodikliği ve çözümleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Amleh A. M. , Grove E. A. , Ladas G. and Georgiou, d. A. (1999), "On The Recursive Sequence $y_{n+1} = \alpha + \frac{y_{n-1}}{y_n}$ ", J.Math .Anal.Appl., 233, 790-798.

[2] De Vault R., Ladas G. and Schultz, S. W. (1998), "On The Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}}$ ", Proc.Amer.Math. Soc., 126, 3257-61.

[3] Gibbons C. H., Kulenovic M. R. S. and Ladas, G.(2000), "On The Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_{n-1}}{\delta + x_n}$ ", Math.Sci.Res., 4, 11.

[4]Kulenovic M. R. S, Ladas G. and Sizer, W. (1996), "On The Recursive Sequence $y_{n+1} = \frac{\alpha y_n + \beta y_{n-1}}{\lambda y_n + \sigma y_{n-1}}$ " , Math.Sci.Res., 2, 1-16.

[5]Stevic, S. (2002) "On The Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{g(x_n, x_{n-1})}{A + x_n}$ ", Appl. Math.Lett (15), 3 , 305-308

[6] Stevic, S. (2002) "On The Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{g(x_n)}$ ", Taiwanese J. Math, 6, 405-414.

[7] Simsek D., Cınar C. , Karatas R., Yalcınkaya İ., (2006), "On The Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1 + x_{n-2}}$ ", Int.J.of Pure and Appl.Math.27, 501-507.

[8] Simsek D., Cınar C. , Karatas R.,Yalcınkaya İ., (2006), "On The Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1 + x_{n-1} x_{n-3}}$ ", Int.J.of Pure and Appl.Math.28, 117-124.

[9] Simsek D., Cınar, C. , Karatas R., Yalcınkaya, İ., (2006), " $x_{n+1} = \frac{x_{n-9}}{1 + x_{n-1} x_{n-3} x_{n-5}}$ Fark Denkleminin Çözümü" , XIX.Ulusal Matematik Senpozyumu , Dumlupınar Üniversitesi , Kütahya.

[10] Simsek D., Cınar C. , Karatas R.,Yalcınkaya İ., (2006), "On The Recursive Sequence $x_{n+1} = \frac{x_{n-3}}{1+x_{n-1}}$ ", Int.Journal of Contemporary Math.Sciences, 1 , (10) , 481-487