T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAZ DİNAMİK DENKLEMLERİNE YENİ BİR YAKLAŞIM: DİFERANSİYEL TRANSFORM METODUNUN BİR UYGULAMASI

HÜLYA ESER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Konya, 2008

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAZ DİNAMİK DENKLEMLERİNE YENİ BİR YAKLAŞIM: DİFERANSİYEL TRANSFORM METODUNUN BİR UYGULAMASI

HÜLYA ESER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 11/02 /2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Galip OTURANÇ

(Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ

(Üye)

Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GAZ DİNAMİK DENKLEMLERİNE YENİ BİR YAKLAŞIM:
DİFERANSİYEL TRANSFORM METODUNUN BİR UYGULAMASI

Hülya ESER

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Galip OTURANÇ

2008,46 Sayfa

Jüri: Doç. Dr. Galip OTURANÇ

Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ

Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Bu çalışmada diferansiyel dönüşüm yöntemi homojen gaz dinamik denklemlerini çözmek için kullanılmıştır. Denklemin benzer analitik çözümü, kolaylıkla hesaplanabilen bileşenleri olan bir formda hesaplanır. Bilinen diğer teknikler ile metodolojinin karşılaştırılması göstermiştir ki bu yaklaşım etkili ve güçlüdür. Matematiksel fizikten lineer ve lineer olmayan iki örnek problem önerilen yöntemin performansını ve etkisini göstermek için bu çalışmada araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Adomian Ayrışım Metodu, Gaz Dinamik Denklemleri

ABSTRACT
MS Thesis

A NEW APPROACH TO THE GAS DYNAMICS EQUATIONS: AN APPLICATION OF THE DIFFERANTIAL TRANSFORM METHOD

Hülya ESER
Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisior: Assoc. Prof. Dr. Galip OTURANÇ
2007,46 Page
Jury: Assoc. Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Asst. Prof. Dr. Aydın KURNAZ
Asst. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

In this study, the differential transformation method is used to implement the homogeneous gas dynamics equations. The approximate analytical solution of the equation is calculated in the form of a series with easily computable components. Comparing the methodology with some other known techniques shows that the present approach is effective and powerfull. Two test modeling problems from mathematical physics, both linear and nonlinear are discussed to illustrate the effectiveness and the performance of the proposed method.

Key Words: Differential Transform Method, Adomian Decomposition Method, Gas Dynamics Equations

ÖNSÖZ

Diferansiyel denklemler, özellikle birinci ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler, teorik ve pratik bakımdan büyük önem taşımakta ve bütün fen ve mühendislik bilim dallarında çok geniş bir uygulama yeri bulmaktadır.

Bu çalışmada, Gaz Dinamik denklemlerinin çözümünde diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Ve bu yöntemin kullanılmasıyla lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilmiş ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle çözülmüştür.

Tez konusunun seçimi ve yürütülmesi konusundaki yardımları ve yakın ilgisinden dolayı sayın hocam Doç. Dr. Galip OTURANÇ' a, Arş. Gör. Yıldıray KESKİN'e, Arş. Gör. Onur KARAOĞLU'na' ve Öğr. Gör. Sema SERVİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Hülya ESER

Konya, 2008

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Kütle korunumu, momentum korunumu, enerji korunumu v.b. gibi mühendislik uygulamalarında bulunan korunum kanunlarının matematiksel ifadeleri gaz dinamik denklemleri olarak bilinir. R. Courant ve K.O. Friedrichs'in çalışmasından, gaz dinamik denklemleri uzaysal bir düzlemde yalın haliyle

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=f(u,x,t) \tag{1.1}$$

şeklinde yazılabilir.

Sonlu fark teknikleri, kolokasyon yöntemleri, Adomian Ayrışım teknikleri gibi bir çok sayısal yöntem lineer olmayan bu tür kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için geliştirilmiştir. Bu çalışmada, diferansiyel dönüşüm yöntemi (1.1) türündeki denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmek için hızlı ve verimli bir yol olarak ortaya çıkarılmıştır.

Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin popülerliği son yıllarda artarak büyümüştür. Bu yöntemin genel yapısı ilk olarak 1980'lerin başlarında Zhou tarafından ortaya çıkarılmıştır. Fonksiyonel denklemin bu yöntemde çözümü, sonsuz bir Taylor serisinin toplamı gibi düşünülmekte ve bu paralelde çözüme ulaşılmaktadır. Bu çalışmanın yapısı aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

İkinci bölümde Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin temel tanımları, teoremleri ve (1.1) denklemi için önerilen yöntemin kullanımıyla başlayacağız.

Üçüncü bölümde ise Adomian Ayrışım Metodu hakkında bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin ne kadar etkili olduğunu göstermek için iki tane gaz dinamik denkleminde bu yöntemin uygulanması ve ayrıca Adomian Ayrışım Metodunun uygulanması ile bulunan sonuçların grafiksel olarak karşılaştırılması verilmiştir.

1.2. Literatür özeti

Kurnaz, A., Oturanç, G., Kiriş, M. E.; (2005). Bu çalışmada PDEs çözümleri için n boyutlu diferansiyel metodun genelleştirilmesi verilmiştir. Bu metodun diğerlerinden ayrı olarak özelliği özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmekte etkili olmasıdır.

Kurnaz, A., Oturanç, G.; (2005). Bu çalışmada adi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için diferansiyel dönüşüm metodunun bir genellemesi verilmiştir.

Chen, C. K, Ho, S. H.; (1999). Bu Çalışmada iki boyutlu diferansiyel dönüşüm teorisine giriş yapıldı.

Ayaz, F.; (2003). Bu çalışmada Kismi türevli diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerini iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu çözümü araştırıldı. Bu metot lineer ve lineer olmayan problemler için kolayca uygulanabilir.

Adomian, G., ve Rach, R**.**, (1996). Bu çalışmada homojen ve lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemlerinin ayrışım metoduyla çözümü araştırıldı.

Abbaoui, K. ve Cherruault, Y.; (1994). Bu çalışmada Adomian metodu kullanılarak lineer olamyan fonksiyonların bazı özellikleri ispat edilmiş ve bazı somut örneklere sonuçları uygulanmıştır.

Eser, H., Oturanç, G., Kurnaz, A., Keskin, Y., Servi, S., Çenesiz, Y. , (2006). Bu çalışma esas alınarak gaz dinamik denklemlerinin diferansiyel transform metodu ile çözümüne ek olarak bu denklemlerin Adomian ayrışım yöntemiyle bulunan sonuçları eklenmiştir.

2. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

2.1.TEMEL KAVRAMLAR

Mühendislikte, uygulamalı bilimlerde, sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim dalında çok sayıda problemi çözebilmek için önce bu problemleri matematiksel ifadelerle formüle etmek ve sonra da bunlarla ilgili bazı sınır şartları, başlangıç şartlarını kullanarak problemlerin çözümleri oluşturan fonksiyonları bulup ortaya koymak gerekir. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler bazen aranan fonksiyonun en azından birinci mertebeden veya daha yüksek mertebeden türevlerini içermektedir. İşte bu çeşit bir matematiksel ifadeye *diferansiyel denklem* denir.

2.1.1. Adi Türevli Diferansiyel Denklem

Adi diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})=0$$

şeklinde yazılır. Bu diferansiyel denklem *n. mertebeden adi diferansiyel denklem* olarak adlandırılır.

Bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken olmasına karşın eğer yalnız bir bağımsız değişken varsa bu denkleme *adi diferansiyel denklem* denir.

2.1.2. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklem, bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa bu denkleme *kısmi türevli diferansiyel denklem* denir

A, B, C, D, E, F ve *G, x* ve *y* bağımsız değişkenlerinin fonksiyonları olmak üzere, ikinci mertebeden doğrusal kısmi türevli diferansiyel denklem;

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G(x,y) \tag{2.1.1}$$

şeklindedir. $G(x,y)=0$ ise (2.1.1) denklemi

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0 \tag{2.1.2}$$

şekline indirgenir. (2.1.2) kısmi türevli diferansiyel denklemi parabolik eliptik ve hiperbolik olmak üzere 3 farklı tipi vardır.

A, B, C, D, E ve *F* katsayıları gerçel sabitler olmak üzere *x* ve *y* değişkenlerine göre

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{2.1.3}$$

şeklinde ikinci dereceden cebirsel denklemin "Δ" 'na bakılarak tipi belirlenebilir. Bu durumda;

$$\Delta = B^2-4AC\begin{cases}\Delta<0 & ise \quad eliptik \quad diferansiyel \quad denklem\\ \Delta=0 & ise \quad parabolik \quad diferansiyel \quad denklem\\ \Delta>0 & ise \quad hiperbolik \quad diferansiyel \quad denklem\end{cases}$$

gösterdiği bilinmektedir.

Örneğin;

a-)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.1.4}$$

ikinci dereceden kısmi türevli diferansiyel denklemi $C=1$ için $B^2-4AC=-4<0$ olduğundan eliptik tip diferansiyel denklemdir. (2.1.4) denklemi iki boyutlu Laplace denklemi olarak bilinir. Akışkanlar mekaniğinde sıkıştırılamayan ideal akışkanın akım fonksiyonu, dikdörtgen levhadaki kararlı sıcaklık fonksiyonu gibi fiziksel olaylar tarafından sağlanan denklemdir. (2.1.4) denkleminin çözümü;

$u=f(y+ix)+g(y-ix)$

olarak elde edilebilir.

b-)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=h(x,y) \tag{2.1.5}$$

denklemi eliptik tiptedir.

İki boyutlu Poisson denklemi olarak bilinir. Çevrintili ideal sıkıştırılamayan akışkanın akım fonksiyonu tarafından sağlanan denklemdir.

c-)

$$k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

(2.1.6)

denkleminde $B^2-4AC=0$ olduğundan parabolik denklemdir. Bir boyutlu ısı (difüzyon) denklemi olarak bilinir. Homojen bir çubuğun sıcaklığı (2.1.6) denklemi ile belirlenir.

d-)

$$k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1.7}$$

denkleminde $B^2-4AC>0$ olduğundan hiperbolik denklemdir. Bu denklem bir boyutlu dalga denklemi olarak bilinir. Titreşen bir telin üzerindeki tüm noktaların küçük yer değiştirmeleri, ideal akışkanın yüzey dalgalarındaki hızı (2.1.7) denklemi ile belirlenir.

Bu denklemin çözümü

$$U=f(y+\frac{c}{k}x)+g(y-\frac{c}{k}x) \qquad (2.1.8)$$

olarak yazılabilir.

2.1.3. Başlangıç Değer Problemi

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerle birlikte, *t* bağımsız değişkenin, *t=0* değeri için $u=u_0$ çözümü verilirse bu koşula başlangıç koşulu, bu koşul altındaki denklemi çözmeye "*Başlangıç Değer Problemi*" denir.

$$k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

$u(x,0)=f(x)$ Başlangıç koşulu

2.1.4. Sınır Değer Problemi

Diferansiyel denklemlerle birlikte, çözüm bölgesi sınırlarında, fizik problemi belirleyecek şekilde çözüm fonksiyonu veya türevlerinin değeri verilmişse, bu koşullara "*Sınır Koşulları*", bu koşullar altında denklemi çözmeye "*Sınır Değer Problemi*" denir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t)=0$$
$$u(L,t)=0$$ Sınır Koşulları

kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Değişkenlerine Ayırma Yöntemi, Laplace Dönüşümü, Fourier Dönüşümü, Henkel Dönüşümü, Mellin Dönüşümü yöntemlerinden biri yardımıyla bulunabilir. Bu çalışmada Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi kullanılmıştır

2.2. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

İlk olarak burada Diferensiyel Dönüşüm yönteminin tanımı ve genel özellikleri ifade edilecektir. Lineer, lineer olmayan, adi türevli ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan bu yöntemde diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir. Ayrıca diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürerek çözen, integral dönüşüm yöntemleri (Laplace ve Fourier dönüşümleri) gibi metotlarda vardır ama diferensiyel dönüşüm metodu bu metotlarla karşılaştırıldığında daha kolay çözüme ulaştırır çünkü integral yöntemleri kullanıldığında karmaşık ifadelerin integrallerinin alınması zor olabilir ve ters dönüşümlerinin alınmasında problemler ortaya çıkabilir. Sonuçta bu yöntem ile lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümünün yanı sıra, sürekli olmayan sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde de çalıştığını görülebilir.

2.2.1. Tek Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Bu yöntem tek değişken içerdiğinden adi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılır bu yönteme geçmeden önce diferansiyel operatörünün özelliklerin inceleyelim.

1. $\frac{d}{dx}\left(u(x) \pm \alpha\, v(x)\right) = \frac{d}{dx}u(x) \pm \alpha \frac{d}{dx}v(x)$ (α keyfi sabit)

2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}u(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}u(x)$

3. $\frac{d^n}{dx^n}\left(u(x)v(x)\right) = v(x)\frac{d^n}{dx^n}u(x) + \binom{n}{1}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u(x) + \ldots$

$$+ \binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}v(x)\frac{d}{dx}u(x) + u(x)\frac{d^n}{dx^n}u(x)$$

Tanım 2.2.1.1.[Chen, 1996]

Tek bileşenli *w(x)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *W(k)* olmak üzere, *w(x)*' nin tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k} w(x)\right]_{x=0} \qquad (2.2.1.1)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.1.2. [Chen, 1996]

W(k) dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k)x^k \qquad (2.2.1.2)$$

biçimde tanımlanır (2.2.1.1) ve (2.2.1.2) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (2.2.1.3) eşitliği elde edilir.

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k} w(x)\right]_{x=0} x^k \qquad (2.2.1.3)$$

(2.2.1.1) ve (2.2.1.2) denklemleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla tek boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 2.2.1.1. [Chen, 1996]

Tek bileşenli *w(x), u(x) ve v(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=u(x) \pm v(x)$$

ise sırasıyla *W(k), U(k) ve V(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=U(k) \pm V(k)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.2. [Chen, 1996]

Tek bileşenli *w(x) ve u(x)* fonksiyonlarını alalım. $c \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)= c.u(x)$$

ise sırasıyla *W(k)* ve *U(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=c\,U(k)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.3. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=\frac{d}{dx}u(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=(k+1)U(k+1)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.4.[Keskin, 2005]

Tek bileşenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. $r \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=\frac{d^r u(x)}{dx^r}$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=(k+1)(k+2)\ldots(k+r)\;U(k+r)=\frac{(k+r)!}{k!}U(k+r)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.5. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$, $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. $r \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=u(x)v(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$,$U(k)$ ve $V(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.6. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $m \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=x^m$$

ise sırasıyla *W(k)* verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & aksi\,halde\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

w(x) in bazı değerleri için elde edilen *W(k)* değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

w(x)	***W(k)***
$w(x)=16$	$W(k)=16\delta(k)$
$w(x)=8x$	$W(k)=8\delta(k-1)$
$w(x)=5x^2$	$W(k)=5\delta(k-2)$
$w(x)=7x^5$	$W(k)=7\delta(k-5)$
$w(x)=3x^8+4x^3-9$	$W(k)=3\delta(k-8)+4\delta(k-3)-9\delta(k)$

Teorem 2.2.1.7 [Keskin, 2005]

Tek bileşenli *w(x), u(x) ve v(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=u(x)\frac{d^2}{dx^2}v(x)$$

ise sırasıyla *W(k), U(k) ve V(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+2)(k-r+1)\,U(r)V(k-r+2)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.8.[Keskin, 2005]

Tek bileşenli *w(x), u(x) ve v(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=\frac{d}{\partial x}u(x)\frac{d}{\partial x}v(x)$$

ise sırasıyla *W(k), U(k) ve V(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.9.[Keskin, 2005]

Tek bileşenli *w(x), u(x), v(x) ve s(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=u(x)v(x)s(x)$$

ise sırasıyla *W(k), U(k), V(k) ve S(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=U(k)\otimes V(k)\otimes S(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}U(r)V(t)S(k-r-t)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.10.[Keskin, 2005]

Tek bileşenli *w(x), u(x), v(x) ve s(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)= u(x)v(x)\frac{d^2}{dx^2}s(x)$$

ise sırasıyla *W(k), U(k), V(k) ve S(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}(k-r-t+2)(k-r-t+2)\,U(r)V(t)S(k\text{-}r\text{-}t\text{+}2)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.11.[Keskin, 2005]

Tek bileşenli *w(x)* fonksiyonunu alalım. $\lambda\in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)=a^{\lambda x}$$

ise *W(k)* verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\frac{\lambda^k(\ln a)^k}{k!}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.12. [Abdel-Halim, 2004]

Tek bileşenli *w(x)* fonksiyonunu alalım. $\lambda \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)=e^{\lambda x}$$

ise *W(k)* verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\frac{\lambda^k}{k!}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.13.[Keskin, 2005]

Tek bileşenli *w(x)* fonksiyonunu alalım. $\lambda \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)=e^{\lambda x+b}$$

ise *W(k)* verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^b$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.14. [Keskin, 2005]

Tek bileşenli *w(x)* fonksiyonunu alalım. Eğer

$$w(x)=sh(\lambda x)$$

ise *W(k)* verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\begin{cases}\frac{\lambda^k}{k!} & k\ tek\ ise\\ 0 & k\ çift\ ise\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.15. [Keskin, 2005]

Tek bileşenli *w(x)* fonksiyonunu alalım. Eğer

$$w(x)=ch(\lambda x)$$

ise *W(k)* verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\begin{cases}0 & k\ tek\ ise\\ \frac{\lambda^k}{k!} & k\ çift\ ise\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.16. [Abdel-Halim, 2004]

Tek bileşenli *w(x)* fonksiyonunu alalım. $a,b \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)=sin(ax+b)$$

ise *W(k)* verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)= \frac{a^k}{k!} sin\left(\frac{\pi}{2}k+b\right)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.17. [Abdel-Halim, 2004]

Tek bileşenli *w(x)* fonksiyonunu alalım. $a,b \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)=\cos(ax+b)$$

ise *W(k)* verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)= \frac{a^k}{k!} cos\left(\frac{\pi}{2}k+b\right)$$

eşitliği sağlanır.,

Teorem 2.2.1.18. [Arikoglu, 2004]

Tek bileşenli *w(x)* ve *u(x)* fonksiyonlarını alalım. $k \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=\int_{x_0}^{x} u(t)dt$$

ise *W(k)* ve *U(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)= \frac{U(k-1)}{k}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.19. [Arikoglu, 2004]

Tek bileşenli *w(x), u(x)* ve *v(x)* fonksiyonlarını alalım.Eğer

$$w(x)= v(x) \int_{x_0}^{x} u(t)dt$$

ise *W(k), U(k)* ve *V(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)= V(k)\otimes \frac{U(k-1)}{k}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.20. [Arikoglu, 2004]

Tek bileşenli *w(x), u(x)* ve *v(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)= \int_{x_0}^{x} u(t)v(t)dt$$

ise *W(k), U(k)* ve *V(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)= \frac{U(k-1)\otimes V(k-1)}{k}$$

eşitliği sağlanır.

2.2.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tanım 2.2.2.1. [Zhou, 1986]

İki bileşenli *w(x,y)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *W(k,h)* olmak üzere, *w(x,y)*' nin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \qquad \textbf{(2.2.2.1)}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.2.2. [Zhou, 1986]

W(k,h) dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}W(k,h)x^k y^h \qquad (2.2.2.2)$$

biçimde tanımlanır. (2.2.2.1) ve (2.2.2.2) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (2.2.2.3) eşitliği elde edebiliriz.

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}x^k y^h \qquad (2.2.2.3)$$

(2.2.2.1) ve (2.2.2.2) denklemleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla iki boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

Teorem 2.2.2.1. [Zhou, 1986]

İki bileşenli *w(x,y), u(x,y) ve v(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y)\pm v(x,y)$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h) ve V(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.2.2. [Zhou, 1986]

İki bileşenli *w(x,y) ve u(x,y)* fonksiyonlarını alalım. $c\in R$ olmak üzere eğer

$$w(x,y)=c\,u(x,y)$$

ise sırasıyla *W(k,h)* ve *V(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=cU(k,h)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.2.3. [Zhou, 1986]

İki bileşenli *w(x,y)* ve *u(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

ise sırasıyla *W(k,h)* ve *U(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=(k+1)U(k+1,h)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.2.5. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli *w(x,y)* ve *u(x,y)* fonksiyonlarını alalım. $r,s \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial^{r+s}u(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}$$

ise sırasıyla *W(k,h)* ve *U(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=(k+1)(k+2)...(k+r)(h+1)(h+2)...(h+s)\ U(k+r,h+s)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.2.5. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli *w(x,y), u(x,y) ve v(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h) ve V(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V(r,h-s)U(k-r,s)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.1.6. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli *w(x)* fonksiyonunu alalım. $m \in Z$ olmak üzere eğer

$$w(x,y)=x^m y^n$$

ise sırasıyla *W(k)* verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k,h)=\delta(k-m,h-n)=\begin{cases}1, & k=m \text{ ve } h=n\\ 0, & \text{aksi halde}\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.2.7. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli *w(x,y), u(x,y) ve v(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)= u(x,y)\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h)* ve *V(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+2)(k-r+1)\,U(r,h-s)V(k-r+2,s)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.2.8. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli *w(x,y), u(x,y) ve v(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h)* ve *V(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)V(k-r+1,s)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.2.9. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli *w(x,y), u(x,y) ve v(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h)* ve *V(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(s+1)(h-s+1)U(r,h-s+1)V(k-r,s+1)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.2.10. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli *w(x,y), u(x,y) ve v(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h)* ve *V(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.2.11. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli *w(x,y), u(x,y), v(x,y)* ve *s(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)s(x,y)$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h), V(k,h)* ve *S(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}U(r,h-s-p)V(t,s)S(k-r-t,p)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.2.12. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli *w(x,y), u(x,y), v(x,y)* ve *s(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)= u(x,y)v(x,y)\frac{\partial^2 s(x,y)}{\partial x^2}$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h), V(k,h)* ve *S(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(k-r-t+2)(k-r-t+2)\,U(r,h\text{-}s\text{-}p)V(t,s)S(k\text{-}r\text{-}t+2,p)$$

eşitliği sağlanır.

2.2.3. Üç Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tanım 2.2.3.1. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli fonksiyon *w(x,y,t)* olmak üzere, *w(x,y,t)*'nin üç boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h,m)=\frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} w(x,y,t)\right]_{(0,0,0)} \qquad (2.2.3.1)$$

olarak tanımlanır. Burada daha öncede olduğu gibi, dikkat edilecek olursa dönüşüm fonksiyonunu temsil etmek için büyük harfler, orijinal fonksiyonu ifade etmek için de küçük harfler kullanılmıştır.

Tanım 2.2.3.2. [Ayaz, 2004]

W(k,h,m) dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} W(k,h,m)x^k y^h t^m \qquad (2.2.3.2)$$

olarak tanımlanır.

İki boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminde olduğu gibi (2.2.2.3) eşitliğine benzer şekilde (2.2.3.1), (2.2.3.2) denklemleri dikkate alınırsa,

$$w(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} w(x,y,t)\right]_{(0,0,0)} x^k y^h t^m \qquad (2.2.3.3)$$

yazabiliriz.

Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

Teorem 2.2.3.1. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli *w(x,y,t), u(x,y,t)* ve *v(x,y,t)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y,t)=u(x,y,t) \pm v(x,y,t)$$

ise sırasıyla $W(k,h,m)$, $U(k,h,m)$ ve $V(k,h,m)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=U(k,h,m) \pm V(k,h,m)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.3.2. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli $w(x,y,t)$ ve $u(x,y,t)$ fonksiyonlarını alalım. $c \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x,y,t)=c\,u(x,y,t)$$

ise sırasıyla $W(k,h,m)$ ve $U(k,h,m)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=c\,U(k,h,m)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.3.3. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli $w(x,y,t)$ ve $u(x,y,t)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}$$

ise sırasıyla $W(k,h,m)$ ve $U(k,h,m)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=(k+1)U(k+1,h,m)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.3.4. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli $w(x,y,t)$ ve $u(x,y,t)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}$$

ise sırasıyla $W(k,h,m)$ ve $U(k,h,m)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=(h+1)U(k,h+1,m)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.3.5. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli $w(x,y,t)$ ve $u(x,y,t)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y,t)=\frac{\partial^{r+s+p}u(x,y,t)}{\partial x^{r}\partial y^{s}\partial t^{p}}$$

ise sırasıyla *W(k,h,m)* ve *U(k,h,m)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=\frac{(k+r)!}{k!}\frac{(h+s)!}{h!}\frac{(m+p)!}{m!}U(k+r,h+s,m+p)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.3.6. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli *w(x,y,t), u(x,y,t)* ve *v(x,y,t)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y,t)v(x,y,t)$$

ise sırasıyla *W(k,h,m), U(k,h,m)* ve *V(k,h,m)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.3.7. [Keskin, 2005]

Üç bileşenli *w(x,y,t), u(x,y,t)* ve *v(x,y,t)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y}v(x,y,t)$$

ise sırasıyla *W(k,h,m), U(k,h,m)* ve *V(k,h,m)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}(k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s,p)V(r,h-s+1,m-p)$$

eşitliği sağlanır.

2.2.4. n Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tanım 2.2.4.1. [Kurnaz, 2005]

n bileşenli fonksiyon $w(x_1,x_2,...,x_n)$ olmak üzere, $w(x_1,x_2,...,x_n)$'nin n boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k_1,k_2,...,k_n)=\frac{1}{k_1!k_2!...k_n!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_n}w(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}\right]_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\x_n=0}} \tag{2.2.3.1}$$

olarak tanımlanır. Burada daha öncede olduğu gibi, dikkat edilecek olursa dönüşüm fonksiyonunu temsil etmek için büyük harfler, orijinal fonksiyonu ifade etmek için de küçük harfler kullanılmıştır.

Tanım 2.2.4.2. [Kurnaz, 2005]

$W(k_1,k_2,...,k_n)$ dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}W(k_1,k_2,...,k_n)\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n} \tag{2.2.3.2}$$

olarak tanımlanır.

Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminde olduğu gibi (2.2.2.3) eşitliğine benzer şekilde (2.2.3.1), (2.2.3.2) denklemleri dikkate alınırsa,

$$w(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!k_2!...k_n!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_n}w(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}\right]_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\x_n=0}}x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n} \tag{2.2.3.3}$$

yazabiliriz.

n boyutlu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

Teorem 2.2.4.1. [Kurnaz, 2005]

n bileşenli $w(x_1,x_2,...,x_n)$, $u(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $v(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x_1,x_2,...,x_n)= u(x_1,x_2,...,x_n)\pm v(x_1,x_2,...,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,...,k_n)$, $U(k_1,k_2,...,k_n)$ ve $V(k_1,k_2,...,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,...,k_n)= U(k_1,k_2,...,k_n)\pm V(k_1,k_2,...,k_n)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.4.2. [Kurnaz, 2005]

n bileşenli $w(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $u(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. $c\in R$ olmak üzere eğer

$$w(x_1,x_2,...,x_n)= c\, u(x_1,x_2,...,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,...,k_n)$ ve $U(k_1,k_2,...,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,...,k_n)= c\, U(k_1,k_2,...,k_n)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.4.3. [Kurnaz, 2005]

n bileşenli $w(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $u(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x_1,x_2,...,x_n)= \frac{\partial}{\partial x_1}\, u(x_1,x_2,...,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,...,k_n)$ ve $U(k_1,k_2,...,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,...,k_n)= (k+1)\, U(k_1+1,k_2,...,k_n)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.4.4. [Kurnaz, 2005]

n bileşenli $w(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $u(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x_1,x_2,...,x_n)= \frac{\partial^{r_1+r_2+...+r_n}}{\partial x_1^{\,r_1}\partial x_2^{\,r_2}...\partial x_n^{\,r_n}}\, u(x_1,x_2,...,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,...,k_n)$ ve $U(k_1,k_2,...,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,...,k_n)= \frac{(k_1+r_1)!}{k_1!}\frac{(k_2+r_2)!}{k_2!}...\frac{(k_n+r_n)!}{k_n!}\, U(k_1+r_1,\, k_2+r_2,\, ...,\, k_n+r_n)$$

eşitliği sağlanır.

3.ADOMİAN AYRIŞIM YÖNTEMİ

3.1.TEMEL KAVRAMLAR

1981'de G.A. Adomian tarafından ortaya konulan ve daha sonra Yves Cherruault ve ekibi tarafından geliştirilen ayrışım metodu, özel tip polinomların (Adomian polinomların) kullanılmasıyla terimleri indirgenerek belirlenen bir seri formunun bilinmeyen fonksiyonunun ayrıştırılmasına dayanır.Bu yöntem, fizik problemlerini gösteren dinamik sistemlerle ilgili geniş bir alanda analitik çözümü verir.Bu metodu lineer ve lineer olmayan diferansiyel, integral, fark denklemlerine, integro-diferansiyel denklemlere ve sistemlere uygulamak mümkündür.[Adomian ve Rach,1992; Wazwaz, 1997a]Ayrıca birçok metotla ortak yanları vardır. Ve lineer ve lineer olmayan fonksiyonel denklemleri (cebirsel, kısmi türevli, adi diferansiyel denklemler, integral denklemler, kısmi diferansiyel denklemleri, vs.) çözer.

Analitik bir metotla lineer olmayan denklemlerin çözülebilmesi önemlidir. Çünkü lineerleşme incelenecek problemi değiştirir ve bir kesikleme bizi zor kararlılık ve yakınsaklık problemlerine götürür.Bu durum, eğer lineer olmayan denklemlerle uğraşılıyorsa ortaya çıkar.Ayrıca bu son metotlarla(lineerizasyon ve kesikleme) sayısal hesapların yapılması zordur ve zaman alır.

Ayrışım metodunun temel prensibi çok basit olup orijinalliği öğeleri tekrarlanan bir şekilde hesaplanmış bir seri içinde lineer olmayan operatörün ayrışmasına dayanır. [İnç,M.]

Tanım 3.1.1. (Adomian, 1994)

Bir değişkenli skaler bir fonksiyon için Adomian polinomu aşağıdaki gibidir. f fonksiyonu n-defa türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere Adomian polinomları

$$A_n = \frac{1}{n!} f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i\right)\Big|_{\lambda=0}$$

formülü ile tanımlanır.

Tanım 3.1.2.(Kincaid ve Cheney, 1990) Eğer x_0 noktası $p(x)$ fonksiyonunun bir tekil noktası değilse, x_0 civarında $p(x)$ fonksiyonu

$$P(x) = p(x_0) + p'(x)\frac{x-x_0}{1!} + p''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + p'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} p^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k ,$$

şeklinde Taylor serisine açılabilir.

3.2. YÖNTEMİN SUNUMU

G.Adomian' ın yaptığı gibi önce yöntemi yapısal olarak tanıtalım. Bunun içinde

$$F[u(t)] = g(t) \tag{3.2.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $u(t)$ bilinmeyen fonksiyon ve $g(t)$ sürekli bir fonksiyon olup F ise lineer ve lineer olmayan terimleri içeren lineer olmayan bir diferansiyel operatörü göstersin. Lineer terim $L+R$ şeklinde ayrıştırılır, R lineer operatörün geri kalan kısmıdır. L yüksek mertebeden ve tersi alınabilen bir diferansiyel operatör olsun. O zaman (3.2.1) denklemini

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{3.2.2}$$

şeklinde verebiliriz. Burada N lineer olmayan operatör ve L'de tersi alınabilen bir operatör olduğundan, (3.2.2)'nin her iki tarafına L^{-1} invers operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}\mathrm{g} - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.2.3}$$

bulunur. Ayrışım metodu, $u(t)$'nin çözümünü

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{3.2.4}$$

şeklinde seri formunda hesaplar ve lineer olmayan Nu terimlerini de

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{3.2.5}$$

biçiminde ayrıştırır. Burada A_n' ler $u_0, u_1, \ldots, u_n$' lere bağlı olan ve Adomian polinomları olarak adlandırılan polinomlardır. *u ve Nu*'lar, sırası ile,

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \,,$$

$$N(u) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i \tag{3.2.6}$$

olarak elde edilir. Burada λ uygunluk için alınan bir parametredir. A_n' ler (3.2.6)'dan

$$n! A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n\right)\right]_{\lambda=0} \tag{3.2.7}$$

İfadesiyle bulunur. (3.2.4) ve (3.2.5) ifadelerini (3.2.2)'de yerine yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \theta + L^{-1} g - L^{-1} R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \tag{3.2.8}$$

elde ederiz. Burada $\theta = u(0)$ dır. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin terimleri indirgeme formülü ile

$$\begin{aligned} u_0 &= \theta + L^{-1} g \,, \\ u_1 &= -L^{-1} R\, u_0 - L^{-1} A_0 \,, \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1} R\, u_n - L^{-1} A_n \,, \; n \geq 0 \,. \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Böylece (3.2.1) ifadesinin doğru çözümü seri formunda belirtilmiş olur. Fakat uygulamada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin bütün terimlerini hesaplamak zordur. Bu nedenle kesme serisinden başlayarak yaklaşık çözümü;

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_n \tag{3.2.10}$$

veya

$$\begin{aligned}
&\phi_1 = u_0 \,, \\
&\phi_2 = u_0 + u_1 \,, \\
&\phi_3 = u_0 + u_1 + u_2 \,, \\
&\quad \vdots \\
&\phi_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \,, n \geq 0
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

şeklinde buluruz.

3.2.1. Adomian Polinomlarının Hesaplanması

A_n'lerin hesabında, Rach (1984), Adomian (1984,1994), Gabet(1992), Guellal ve Cherruault (1994) çeşitli metotlar geliştirmişlerdir. Ancak bu metotlar, karmaşık olmaları ve ortaya konmasının imkansızlığı nedeni ile pek kullanışlı değildirler. Wazwaz (2000) tarafından lineer olmayan operatörlerin Adomian polinomlarının hesaplanmasında çok daha kullanışlı bir yöntem geliştirildi. Wazwaz'ın metoduna göre A_n Adomian polinomlarının hesaplanması aşağıdaki yöntemle yapılır.

3.2.1.a. Lineer Olmayan Polinomlar

I. Durum :

Eğer $F(y) = y^2$ ise

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \tag{3.2.1.1}$$

olmak üzere lineer olmayan $F(y) = y^2$ terimi (3.2.1.1)'de yerine yazılırsa

$$F(y) = (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots)^2 \tag{3.2.1.2}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı açılırsa

$$F(y) = {y_0}^2 + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + {y_1}^2 + 2y_0y_3 + y_1y_2 + \cdots \tag{3.2.1.3}$$

elde edilir. (3.2.1.2)'deki açılımda indis toplamları aynı olan terimleri bir araya getirilirse

$$F(y) = {y_0}^2 + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + {y_1}^2 + 2y_0y_3 + y_1y_2 + 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y^2 + 2y_0y_5 + 2y_1y_4 + 2y_2y_3 + \cdots \quad (3.2.1.4)$$

olur. (3.2.1.4)'den $F(y) = y^2$ için Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= {y_0}^2, \\ A_1 &= 2y_0y_1, \\ A_2 &= {y_1}^2 + 2y_0y_2, \\ A_3 &= 2y_1y_2 + 2y_0y_3, \\ A_4 &= {y_2}^2 + 2y_1y_3 + 2y_0y_4, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.2.1.5)$$

formunda bulunur.

II. Durum:

Polinom tipinde verilen lineer olmayan terimler için $n \in Z^+$ olmak üzere aşağıdaki genelleme yapılabilir:

$$\begin{aligned} A_0 &= {y_0}^n, \\ A_1 &= n\,{y_0}^{(n-1)}, \\ A_2 &= \frac{1}{2}n(n-1)\,{y_0}^{(n-2)}{y_1}^2 + n\,{y_0}^{(n-1)}y_2, \\ A_3 &= \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\,{y_0}^{(n-3)}{y_1}^3 + n(n-1)\,{y_0}^{(n-2)}y_1y_2 + n\,{y_0}^{(n-1)}y_3, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.2.1.6)$$

III. Durum :

Eğer $n \in Z^-$ ise bu takdirde Adomian polinomları

$$
\begin{aligned}
&A_0 = {y_0}^{-n}\,,\\
&A_1 = -n\,{y_0}^{-(n+1)}\,,\\
&A_2 = -\frac{1}{2}n\,(n+1)\,{y_0}^{-(n+2)}{y_1}^2 - n\,{y_0}^{-(n+1)}y_2\,,\\
&A_3 = -\frac{1}{6}n\,(n+1)(n+2)\,{y_0}^{-(n+3)}{y_1}^3 - n\,(n+1)\,{y_0}^{-(n+2)}y_1y_2 - n\,{y_0}^{-(n+1)}y_3\,,\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
\qquad (3.2.1.7)
$$

formülüyle bulunur.

IV. Durum :

Eğer *n* ondalıklı bir sayı ise bu takdirde Adomian polinomları

$$
\begin{aligned}
&A_0 = {y_0}^{n}\,,\\
&A_1 = n\,{y_0}^{(n-1)}\,y_1,\\
&A_2 = n{y_0}^{n-1}y_2 + \frac{1}{2}n(n-1)\,{y_0}^{n-2}{y_1}^2,\\
&A_3 = n\,{y_0}^{n-1}y_3 + n(n-1){y_0}^{n-2}y_1y_2 + \frac{1}{6}n\,(n-1)(n-2)\,{y_0}^{n-3}{y_1}^3\,,\\
&A_4 = n{y_0}^{n-1}y_4 + n(n-1){y_0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}{y_2}^2 + y_1y_3\right) + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)\\
&\qquad {y_0}^{n-3}y_1^2y_2 + \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3){y_0}^{n-4}{y_1}^4\,,\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
\qquad (3.2.1.8)
$$

olarak hesaplanır.

V. Durum :

Eğer lineer olmayan terim $F(y) = y\,y_x$ ise

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n\,,\\
y_x &= \sum_{n=0}^{\infty} y_{n_x}\,,
\end{aligned}
\qquad (3.2.1.9)
$$

olmak üzere (3.2.9) ifadesi $F(y) = y\,y_x$ 'de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
F(y) &= (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots) \times (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots)_x \\
&= y_0 y_{0_x} + y_{0_x} y_1 + y_0 y_{1_x} + y_{0_x} y_2 + y_{1_x} y_1 + y_{2_x} y_0 + y_{0_x} y_3 \\
&\quad + y_{1_x} y_2 + y_{2_x} y_1 + y_{3_x} y_0 + y_{0_x} y_4 + y_0 y_{4_x} + y_{1_x} y_3 + \cdots
\end{aligned} \tag{3.2.1.10}
$$

ve indis toplamları aynı olan ifadeler gruplandırılırsa

$$
\begin{aligned}
&A_0 = y_0 y_{0_x} \,, \\
&A_1 = y_{0_x} y_1 + y_0 y_{1_x} \,, \\
&A_2 = y_{0_x} y_2 + y_{1_x} y_1 + y_{2_x} y_0 \,, \\
&A_3 = y_{0_x} y_3 + y_{1_x} y_2 + y_{2_x} y_1 + y_{3_x} y_0 \,, \\
&A_{4=} y_{0_x} y_4 + y_0 y_{4_x} + y_{1_x} y_3 + y_{2_x} y_2 + y_{3_x} y_1 \,, \\
&\qquad \vdots
\end{aligned} \tag{3.2.1.11}
$$

bulunur.

3.2.1.b. Üstel Lineer Olmayanlık

I. Durum :

Eğer $F(y) = e^y$ ise bu takdirde $F(y_0) = e^{y_0}$ teriminin diğer terimlerden ayrılması gerekir. $F(y) = e^y$ ifadesi (3.2.1.1)'de yerine yazılırsa

$$F(y) = e^{(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots)} \tag{3.2.1.12}$$

veya

$$F(y) = e^{y_0} e^{y_1 + y_2 + y_3 \cdots} \tag{3.2.1.13}$$

elde edilir. Bu son ifade de $e^{y_1 + y_2 + y_3 \cdots}$ terimi Taylor serisine açılırsa

$$
\begin{aligned}
F(y) &= e^{y_0} \times \left[1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots) + \frac{1}{2!}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots)^2 + \cdots \right] \\
&= e^{y_0} + y_1 e^{y_0} + \left(y_2 + \frac{1}{2!} {y_1}^2 \right) e^{y_0} + \left(y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} {y_1}^3 \right) e^{y_0} \\
&\quad + \left(y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} {y_2}^2 + \frac{1}{2!} {y_1}^2 y_2 + \frac{1}{4!} {y_1}^4 \right) e^{y_0} + \cdots
\end{aligned} \tag{3.2.1.14}
$$

bulunur. Buradan da

$$
\begin{aligned}
&A_0 = e^{y_0}\ ,\\
&A_1 = y_1 e^{y_0}\ ,\\
&A_2 = \left(y_2 + \frac{1}{2!} {y_1}^2 \right) e^{y_0}\ ,\\
&A_3 = \left(y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} {y_1}^3 \right) e^{y_0}\ ,\\
&A_4 = \left(y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} {y_2}^2 + \frac{1}{2!} {y_1}^2 y_2 + \frac{1}{4!} {y_1}^4 \right) e^{y_0}\ ,\\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad (3.2.1.15)
$$

elde edilir.

II. Durum :

Eğer $F(y) = e^{-y}$ ise bu takdirde Adomian polinomları

$$
\begin{aligned}
&A_0 = e^{-y_0}\ ,\\
&A_1 = -y_1 e^{-y_0}\ ,\\
&A_2 = \left(-y_2 + \frac{1}{2!} {y_1}^2 \right) e^{-y_0}\ ,\\
&A_3 = \left(-y_3 + y_1 y_2 - \frac{1}{3!} {y_1}^3 \right) e^{-y_0}\ ,\\
&A_4 = \left(-y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} {y_2}^2 - \frac{1}{2!} {y_1}^2 y_2 + \frac{1}{4!} {y_1}^4 \right) e^{-y_0}\ ,\\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad (3.2.1.16)
$$

şeklinde olur.

3.2.c. Bileşke Fonksiyonları İçin Adomian Polinomları

Eğer $F(y) = e^{-y^2}$ ise bu takdirde $u = y^2$ diyelim, böylece $F(y) = e^{-u}$ olur. e^{-u} ve y^2 için Adomian polinomları, sırasıyla, (3.2.1.16) ve (3.2.1.5) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
&A_0 = e^{-u_0}\ ,\\
&A_1 = -u_1 e^{-u_0}\ ,\\
&A_2 = \frac{1}{2} e^{-u_0}({u_1}^2 - 2u_2)\ ,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&B_0 = {y_0}^2\ ,\\
&B_1 = 2y_0 y_1\ ,\\
&B_2 = {y_1}^2 + 2y_0 y_{2,}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$
\begin{aligned}
&A_0(u_0) = A_0\left[B_0\left(y_0\right)\right],\\
&A_1(u_0,u_1) = A_1\left[B_0\left(y_0\right), B_1\left(y_0,y_1\right)\right],\\
&A_2(u_0,u_1,u_2) = A_2\left[B_0(y_0), B_1(y_0,y_1), B_2(y_0,y_1,y_2)\right],\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
\qquad (3.2.2.17)
$$

elde edir. Buradan da $F(y) = e^{-y^2}$ fonksiyonu için Adomian polinomları

$$
\begin{aligned}
&A_0 = e^{-{y_0}^2}\ ,\\
&A_1 = -2y_0 y_1 e^{-{y_0}^2}\ ,\\
&A_2 = (2{y_0}^2{y_1}^2 - {y_1}^2 - 2y_0 y_2)e^{-{y_0}^2}\ ,\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
\qquad (3.2.2.18)
$$

formülüyle bulunur.

4. UYGULAMALAR

Bu bölümde lineer olmayan, başlangıç koşulları verilmiş iki tane gaz denkleminin çözümünde diferansiyel dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrışım yöntemi uygulanmıştır.Bu uygulamaların hesaplanmasında Maple 11 bilgisayar paket programından yararlanılmıştır.

Uygulama 1.

Aşağıdaki lineer olmayan gaz denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right)-(1+t)^2u^2=x^2 \qquad 0\le x\le 1,\ \ 0<t \tag{4.1.1}$$

başlangıç koşulları

$$u(x,0)=x,\ \ u(0,t)=0 \tag{4.1.2}$$

için düşünelim. Bu problemin kesin çözümü

$$u(x,t)=\frac{x}{1+t} \tag{4.1.3}$$

şeklindedir.

Bu problemi dönüşüm yöntemi ve Adomain ayrışım yöntemi ile çözerek sonuçları analitik çözümle karşılaştıracağız.

İlk olarak denklemimizi Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile çözelim.

(4.1.1) denkleminin diferansiyel dönüşümünü alırsak,

$$(h+1)U(k,h+1)+\sum_{r=0}^{h}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)U(k-r+1,s)U(r,h-s)+$$

$$2\sum_{r=0}^{k}\sum_{p=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{z=0}^{h-s}U(r,h-s-z)\delta(p,s-1)U(k-r-p,z)+\sum_{r=0}^{h}\sum_{s=0}^{h}U(k-r,s)U(r,h-s)$$

$$=\delta(k-2,h) \tag{4.1.4}$$

şeklinde elde edilir. Burada U(k,h), u(x,t)' nin dönüşmüş halidir. (4.1.2) başlangıç şartından

$$U(k,0)=\delta(k-1,h)=\begin{cases}1 & k=1 \\ 0 & aksi \text{ halde}\end{cases},h=0$$

ve

$$U(0,h)=0 \tag{4.1.5}$$

yazarız.

k ve h' nin farklı değerleri için geri kalan katsayılar (4.1.3)' ten sırasıyla

$$U(k,h)=\begin{cases}(-1)^h & k=1 \\ 0 & aksi \text{ halde}\end{cases} \tag{4.1.6}$$

U(0,1)=0

U(1,1)=-1

U(2,1)=0

U(3,1)=0

U(4,1)=0

şeklinde elde edilir. Buradan kısaca aşağıdaki formülü yazarız.

$$U(k,h)=\begin{cases}(-1)^h & k=1 \text{ için} \\ 0 & aksi \text{ halde}\end{cases} \tag{4.1.7}$$

(4.1.6)' yı

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k t^h$$

denkleminde yerine koyarak aşağıdaki gibi seri çözüme ulaşırız.

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k t^h$$

$$u(x,t)=x\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^k t^h$$

$$u(x,t)=x(1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+\ldots)=\frac{x}{1+t},$$

bulduğumuz bu sonuç aynı zamanda analitik çözümdeki sonuçla aynıdır.

Şimdi (4.1.1) denklemini Adomian ayrışım yöntemini kullanarak çözelim.

$L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $L_x = \frac{\partial}{\partial x}$ operatörleri yardımı ile (4.1.1) denklemini tekrar yazalım.

$$L_t\,(u(x,t)) = -\frac{1}{2} \qquad L_x(u^2(x,t)) + (1+t)^2 u^2 + x^2$$

(4.1.8)

L_t^{-1} invers operatörü (4.1.8) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa

$$u(x,t) = u(x,0) - \frac{1}{2} L_t^{-1}\,(L_x(u^2(x,t))) + L_t^{-1}(1+t)^2 \mathrm{A}_n + L_t^{-1}(x^2) \tag{4.1.9}$$

elde edilir.

Böylece (4.1.1) denkleminin yaklaşık çözümü;

$$\left.\begin{aligned} u_0(x,t) &= u(x,0) + L_t^{-1}(x^2) \\ u_{n+1}(x,t) &= -\frac{1}{2} L_t^{-1}\,(L_x(u_n^2(x,t))) + L_t^{-1}(1+t)^2 \mathrm{A}_n \end{aligned}\right\} \tag{4.1.10}$$

indirgeme formunda bulunur. $n = 1,2,...$ için

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{4.1.11}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi_0 &= u_0 \\ \phi_1 &= u_0 + u_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \phi_n &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

$n \geq 0$

ile $u(x,t) = \lim_{x\to\infty} \phi_n$

şeklindedir.

(4.1.10) indirgeme formunda geçen A_n, Adomian polinomları

$$A_0 = u_0^2$$

$$A_1 = 2u_0u_1$$

$$A_2 = u_1^2 + 2u_0u_2$$

…

şeklindedir. Şimdi iterasyona geçersek,

$$u_0 = u(x,0) + L_t^{-1}(x^2) = x + \int_0^t x^2 dt = x + x^2 t$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}(u_0^2(x,t))dt + \int_0^t (1+t)^2 u_0^2(x,t)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^t 2(x+x^2t).(1+2xt)dt + \int_0^t (1+t)^2 (x+x^2t)^2 dt$$

için

$$u_1 = \frac{2}{3}x^3t^3 - \frac{1}{2}x^2t^2 - xt + \frac{1}{5}x^4t^5 + \frac{1}{2}t^4x^4 + \frac{1}{2}t^4x^3 + \frac{1}{3}t^3x^4 + \frac{1}{3}t^3x^2 + t^2x^3 + x^2t$$

şeklinde bulunur. u_2, u_3,... sonuçlarını bilgisayar yardımı olmaksızın bulmak oldukça zordur.Bundan dolayı Maple 11 paket programında,

```
> restart:Digits:=3:
G:=y(t)^2:m:=11:
y[lambda]:=sum(y[b]*lambda^b,b=0..m):
G[lambda]:=subs(y(t)=y[lambda],G):
s:=expand(G[lambda],lambda):
ft:=unapply(s,lambda):
for i from 0 by 1 while i<=m do
a[i]:=((D@@i)(ft)(0)/i!):
print(A[i],a[i]);
od:
y[0]:=x+x^2*t:
for n from 0 to m do
y[n+1]:=simplify(-int(diff(a[n],x),t=0..t)/2.+int((1+t)^2*a[n],t=0..t));
od:
f:=0:
for k from 0 to m do
f:=f+y[k]:
od:
print(simplify(f)):
```

şeklinde yazılan kod ile çözümde yapılan bazı değişiklikler sonucu,

$$u_2 = 0.0277t^6x^4 + 0.958t^6x^5 + 1.13t^5x^5 + ... + 0.562x^5t^7 + 0.0444x^6t^9$$

Bulunur.Benzer şekilde u_3, u_4,... sonuçları bulunabilirken, yukarıdaki kod çalıştırıldığında

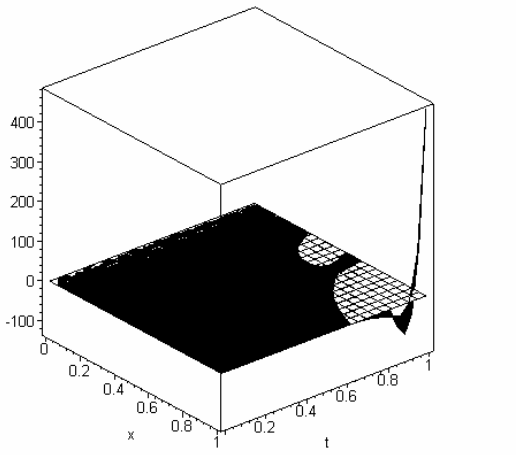
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$= 13600t^{21}x^{13} + 0.187t^{34}x^{15} - 11.3t^{4}x^{4} + .15t^{4}x^{3} + ... + 0.0741t^{27}x^{24} + 0.0000247x^{23}t^{43}$$

şeklinde direkt *u(x,t)* çözümüne ulaşılır.

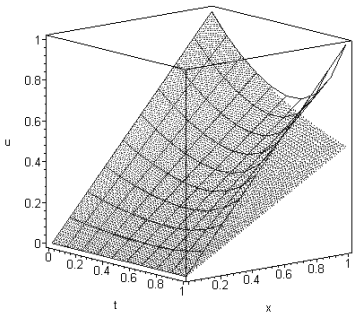
Adomian ayrışımı ve kesin çözümün $0 \le t \le 1$, $0 \le x \le 1$ için karşılaştırılması, aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.

```
> with(plots):
> plot3d([f,x/(1+t)],x=0..1,t=0..1,color=[black,white]);
```



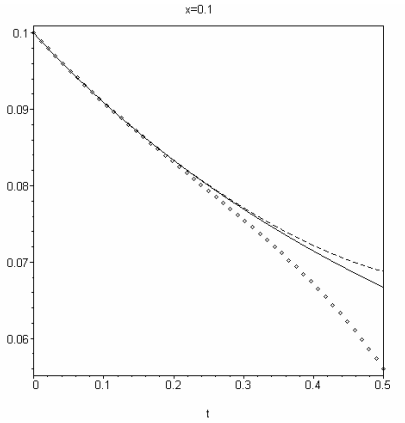
Grafik 1. $0 \le x \le 1$ *ve* $0 \le t \le 1$ *için*
Siyah – Adomian, Beyaz – Analitik

Aşağıdaki grafikte ise u(x,t)'nin $0 \le x \le 1$ ve $0 \le t \le 1$ için diferansiyel dönüşüm ve kesin çözümün üç boyutlu karşılaştırılması verilmiştir.

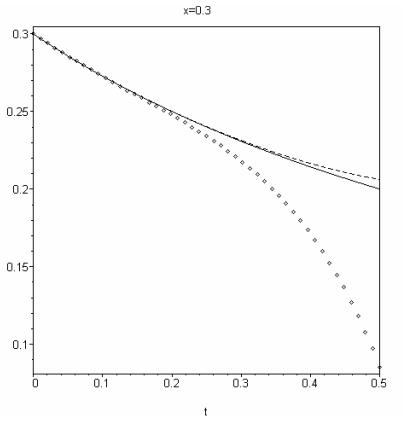


Grafik 2. *8.Dereceden Diferansiyel T.*
□ DT .:Analitik

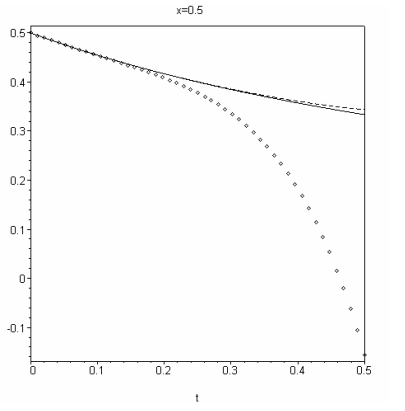
Aşağıdaki grafiklerde farklı x değerleri ve $0 \le t \le 0.5$ için kesin sonuçlar gösterilmiştir.



Grafik 3. *x=0.1 için karşılaştırma*
(--- DT , ◊◊◊ A.D, — Analitik)



Grafik 4.*x=0.3 için karşılaştırma*
(--- DT , ◊◊◊ A.D, — Analitik)



Grafik 5. *x=0.5 için karşılaştırma*
(--- DT , ◊◊◊ A.D, — Analitik)

Uygulama 2.

Aşağıdaki lineer olmayan gaz denklemini [Evans D. J., Bulut H.],

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right)-u(1-u)=f(x,t) \qquad 0\le x\le 1,\ \ 0<t \qquad (4.2.1)$$

başlangıç şartı

$$u(x,0)=a(1-e^x) \qquad (4.2.2)$$

için düşünelim.

Burada $u=u(x,t)$, x ve t değişkenli bir fonksiyondur. (4.2.1) denkleminin diferansiyel dönüşümünü alırsak, istenilen bağlantı elde edilebilir.

$$(h+1)U(k,h+1)+\sum_{r=0}^{h}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)U(k-r+1,s)U(r,h-s)-U(k,h)+$$

$$\sum_{r=0}^{h}\sum_{s=0}^{h}U(k-r,s)U(r,h-s)=0 \qquad (4.2.3)$$

(4.2.2) başlangıç koşulundan

$$U(k,0)=\begin{cases}0 & k=0\\ a\dfrac{(-1)^{k+1}}{k!} & k=1,2,...\end{cases} \qquad (4.2.4)$$

yazarız.

Geri kalan farklı k ve h katsayıları için (4.2.3)'ten sırasıyla

$k=0$ ve $h=0$ için $\quad U(0,1)=0$

$k=1$ ve $h=0$ için $\quad U(1,1)=a-a^2$

$k=2$ ve $h=0$ için $\quad U(2,1)=-\dfrac{(a-a^2)}{2!}$

$k=3$ ve $h=0$ için $\quad U(3,1)=-\dfrac{(a-a^2)}{3!}$

$k=4$ ve $h=0$ için $\quad U(4,1)=-\dfrac{(a-a^2)}{4!}$

... ...

$k=k$ ve $h=0$ için $\quad U(k,1)=(-1)^{k+1}\dfrac{(a-a^2)}{k!}$

k=0 ve h=1 için $U(0,2)=0$

k=1 ve h=1 için $U(1,2)=\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}a^2+a^3$

k=2 ve h=1için $U(2,2)=-\frac{1}{4}a-\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}a^3$

k=3 ve h=1 için $U(3,2)=\frac{1}{12}a-\frac{3}{12}a^2-\frac{1}{6}a^3$

k=4 ve h=1 için $U(4,2)=-\frac{1}{48}a+\frac{3}{48}a^2-\frac{1}{24}a^3$

... ...

k=k ve h=1 için $U(k,2)=\frac{(-1)^{k+1}}{2k!}a+\frac{3(-1)^{k+1}}{2k}a^2-\frac{(-1)^{k+1}}{k}a^3$

k=0 ve h=2 için $U(0,3)=0$

k=1 ve h=2 için $U(1,3)=\frac{1}{6}a-\frac{7}{6}a^2+2a^3-a^4$

k=2 ve h=2 için $U(2,3)=-\frac{1}{12}a+\frac{7}{12}a^2-a^3+\frac{1}{2}a^4$

k=3 ve h=2 için $U(3,3)=\frac{1}{36}a-\frac{7}{36}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{6}a^4$

k=4 ve h=2 için $U(4,3)=-\frac{1}{144}a+\frac{7}{144}a^2-\frac{1}{12}a^3+\frac{1}{24}a^4$

... ...

k=k ve h=2 için $U(k,3)=\frac{(-1)^{k+1}}{6k!}a-\frac{7(-1)^{k+1}}{6k!}a^2+\frac{2(-1)^{k+1}}{k!}a^3-\frac{4(-1)^{k+1}}{k!}a^4$

gibi elde edilir.

Bu sonuçla h=0,1,…,6 için 6 terimli u(x,t) için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}U(k,0)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}U(k,1)x^kt+\ldots+\sum_{k=0}^{\infty}U(k,6)x^kt^6 \qquad (4.2.5)$$

```
> restart:m:=7:
for k from 0 to m do
u[k,0]:=coeftayl(a*(1-exp(x)),x=0,k):
od:
for h from 0 to m do
for k from 0 to m do
```

```
u[k,h+1]:=(u[k,h]-sum(sum(u[k-r,s]*u[r,h-s],s=0..h),r=0..k)-sum(sum((k-r+1)*u[k-
r+1,s]*u[r,h-s],s=0..h),r=0..k))/(h+1)*1.:
od:od:
s:=0:
for k from 0 to m do
for h from 0 to m do
s:=s+u[k,h]*x^k*t^h:
od:od:
print(simplify(s)):
```

kodu yardımıyla

$$u(x,t) = -0.17361x^6ta^2 - 0.001389x^6ta + ... + 0.2755731923x^7t^6a \qquad (4.2.6)$$

çözümü bulunur.

(4.2.1) denklemini Adomian ayrışım yöntemiyle çözecek olursak,

$$L_t(u(x,t)) = -\frac{1}{2}L_x(u^2(x,t)) + u - u^2 + f(x,t) \qquad (4.2.7)$$

L_t^{-1} invers operatörü (4.2.7) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa,

$$u(x,t) = u(x,0) - \frac{1}{2}L_t^{-1}(L_x(u^2(x,t)) + L_t^{-1}(u) - L_t^{-1}(u^2) + L_t^{-1}(f(x,t)) \qquad (4.2.8)$$

elde edilir.

Böylece (4.2.1) denkleminin yaklaşık çözümü;

$$\left.\begin{aligned} u_0(x,t) &= u(x,0) + L_t^{-1}f(x,t) \\ u_{n+1}(x,t) &= -\frac{1}{2}L_t^{-1}(L_x(u_n^2(x,t))) + L_t^{-1}(u_n(x,t)) - L_t^{-1}(A_n) + L_t^{-1}(f(x,t)) \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.9)$$

indirgeme ilişkileriyle verilir. Buradan,

$$u_0 = u(x,0) + L_t^{-1}(f(x,t)) = a(1-e^x)$$

$$u_1 = a^2(1-e^x)e^xt + a(1-e^x)t - a^2(1-e^x)^2t$$

…

Çözümün tamamını,

```
> restart:Digits:=3:
G:=y(t)^2:m:=6:
y[lambda]:=sum(y[b]*lambda^b,b=0..m):
G[lambda]:=subs(y(t)=y[lambda],G):
s:=expand(G[lambda],lambda):
ft:=unapply(s,lambda):
for i from 0 by 1 while i<=m do
```

```
b[i]:=((D@@i)(ft)(0)/i!):
print(A[i],b[i]);
od:
y[0]:=a*(1-exp(x)):
for n from 0 to m do
y[n+1]:=simplify(-int(diff(b[n],x),t=0..t)/2.+int(y[n],t=0..t)-int(b[n],t=0..t));
od:
f2:=0:
for k from 0 to m do
f2:=f2+y[k]:
od:
print(simplify(f2)):
```

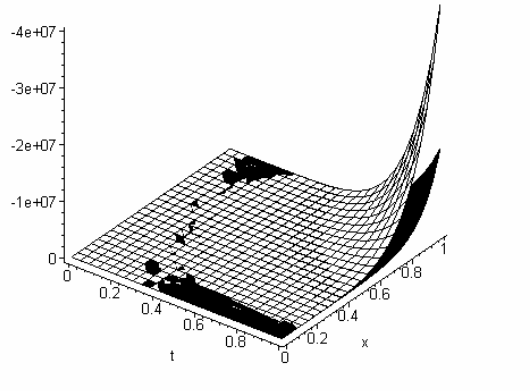
kodu yardımıyla

$$u(x,t) = at - 42t^4a^5e^{5x} + \ldots + t^6a^7 - 132t^5a^6e^{6x} \qquad (4.2.10)$$

şeklinde buluruz.

Sorunun analitik çözümü olmadığından karşılaştırmayı iki yöntem üzerinden a=2 için yapalım. Adomian ayrışımı ve dönüşüm yöntemi arasındaki çözümün karşılaştırılması, $0 \le t \le 1$, $0 \le x \le 1$ için aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.

```
> a:=2;
with(plots):
> plot3d([f2,s],x=0..1,t=0..1,color=[black,white]);
```



Grafik 6. $0 \le x \le 1$ *ve* $0 \le t \le 1$ için

Siyah – Adomian, Beyaz – Dönüşüm

5. SONUÇ

Bu çalışmada diferansiyel dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrışım yöntemi ile başlangıç şartları verilen gaz denklemlerinin homojen olmayan durumları için sayısal çözümleri araştırılmıştır.

Diferansiyel dönüşüm yönteminin kullanım açısından ve bilgisayara uygulanabilirliği konusunda Laplace, Fourier, Mellin gibi diğer dönüşüm yöntemleriyle kıyaslaması yapıldığında söz konusu yöntemin daha kolay bir yöntem olduğunu söyleyebiliriz. Diğer yöntemlerde karşılaşılan karmaşık integrallerin yerini bu yöntemde cebirsel denklemler alır ve bu cebirsel denklemler ile problem kolayca bilgisayara tanıtılıp çözümler hesaplanabilir.

İlk uygulamada açık bir şekilde dönüşüm yönteminin analitik çözüme daha yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Bununla beraber Adomian ayrışım yönteminde problemde karşılaşılan lineer olmayan terimlere ilişkin Adomian polinomlarının belirlenmesinde yaşanan güçlükler göz önünde bulundurulmalıdır.

6. KAYNAKLAR

Abbaoui, K., Cherruault, Y., 1994, Convergence of Adomian's method applied to differential equations, Computers Math. Applic., 29(7), 103-109

Abbaoui, K., Cherruault, Y. Ve Ndour M., 1995, The decomposition method applied to differantial systems, Kybernetes, 24(8),32-40.

Abdel-Halim Hassan, I.H. 2002, Different applications for the differential transformation in the differential equations, Applied Mathematics and Computation; 129, 183-201.

Abdel-Halim Hassan, I.H. 2002, On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation, Applied Mathematics and Computation; 127, 1-22.

Abdel-Halim Hassan, I.H. 2004, Differential transformation technique for solving higher-orden initial value problems, Applied Mathematics and Computation; 154, 299-311.

Adomian, G., ve Rach, R., 1996, Modified Adomian polynomials, Math. Comput. Modelling, 24(11), 39-46.

A Smolier, 1983, Shock Wave and Reaction Diffusion Equation, SpringerVerlag, NewYork.

Arikoglu A., Özkol, I. 2005, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differantial transform method, Applied Mathematics and Computation, vol.168, pp. 1145

Ayaz, F. 2003, On the Two- dimensional differential transform method, Applied Mathematics and Computation;143, 361-374.

Ayaz, F., Oturanç, G., Kurnaz, A., Kiriş, E. M. 2003, Isı İletim Denkleminin Dönüşüm Yöntemiyle Çözümü, 14.Ulusal Isı Bilimi ve Tekniği Kongresi, Isparta,3-5 Eylül.

Ayaz, F. 2004. Solutions of the system of differential equations by differential transform method, Appl. Maths. Comput;147, 547-567.

Ayaz, F. 2004, Application of differential transform methods to differential-algebraic equations, Applied Mathematics and Computation;152, 649-657.

Ayaz, F., Oturanç, G., 2004, An Approximate Solution of burgers equation by Differential Transform Method, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 5-2, 15-24.

Ayaz, F. 2002, Solutions of partial differential equations by using two dimensional transform method, Third Intern., Symp. Math&Comput. Appl., September 4-6, Konya- Turkey.

Chen, C. K., Ho, **S. H.,** 1996, Application of Differential transformation to eigenvalue problems, Applied Mathematics and Computation; 79, 173-188.

Chen, C. L., Liu, Y. C., 1998, Differential transformation techniqeu for steady nonlinear heat conduction problems, Applied Mathematics and Computation; 95, 155-1164,

Chen, C.L., Ju S-P. ,2004, Application of differential transformation to transient adjective-dispersive transport equation, Applied Math. And Computation (155), 25-38.

Chen, C. K., Ho, S. H., 1999, Solving partial diferential equations by two-dimensional differential transform method, Applied Mathematics and Computation; 106, 171-179.

Debnath, L., 1998, Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser, Berlin.

Deeba, E. ve Khuri, S.A., 1996, A decomposition method for solving the nonlinear Klein-Gordon equation, J. Comput. Physics, 124, 442-448.

Eser, H., Oturanç, G., Kurnaz, A., Keskin, Y., Servi, S., Çenesiz, Y. , 2006, A New Approach To The Gas Dynamics Equation An Application Of Differential Transform Method, Proceedings of Internatıonal Conference on Modeling and Simulation,883-886

Evans D. J., Bulut H.;2002, Inter J. Computer Math, Vol:79(7), 817-822.

İnç, M, 2002, Ayrışım metodunun matematiksel temelleri ve bazı uygulamaları, Türkiye, Fırat Üniversitesi.

Jang, M. J., Chen, C. L., 1997, Analysis of the Response of a strongly Nonlinear Damped system using a differential transformation technique, Applied Mathematics and Computation; 88, 137-151.

Jang, M. J., Chen, C. L., Liu, Y. C. 2001, Two Dimensional differantial Transform for Partial Differential Equation, Appl. Maths. Comput.,106,171-179.

Jang, M. J., Chen, C. L., Liu, Y. C. 2000, On the initial-value problems using the differential transformation method, Applied Mathematics and Computation; 115, 145-160.

Kaya, D., Yokus, A. 2002, A numerical comparison of partial solutions in the decomposition method for linear and nonlinear partial differential equations, Maths. Comput. Simul., 60 507-512.

Kamel Al-Khaled, 2007, M. Naim Anwar, Numerical comparison of methods for solving second-order ordinary initial value problems, Appl. Math. Mod., 31, 292-301.

Keskin Y., 2005, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi,Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.

Kurnaz, A., Oturanç, G., Kiriş, M.E. 2005, *n* dimensional differential transformation method for solving PDEs, İnternational journal of Computer Mathematics vol.82., No.3,369-380

Kurnaz, A., Oturanç, G., 2005, The differential transform approximation for the system of ordinary differential equation, International Journal of Computer Mathematics

Maple V11 (c) Maplesoft, 2007, paket program.

R. Courant, K.O. Friedrichs, 1976, Super sonic Flows and Shork Waves, SpringerVerlag, NewYork.

Seng, v., Abbaoui, K. Ve Cherruault, Y., 1996, Adomian's polynomials for nonlinear operators, Math. Comput. Modelling, 24(1), 59-65.

Strauss, W. A., 1992, Partial differential Equations An introduction, John Willey & Sons, Singapore.

Özışık, M. N. 1980, Heat Condiction, John Willey & Sons, New York.

Wazwaz, A.M., 1995, A new approach to the nonlinear advection problem: An application of the decomposition method, Appl. Math. Comput., 72 175-181.

Wazwaz, A.M., 1998, A comparıson between Adomian decomposition method and Taylor series method in the series solition, Appl. Math. Comput., 97 37-44.

Wazwaz, A.M., 2000, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, Appl. Math. Comput., 111, 33-51.

Wazwaz. A.M., 2000b, Approximate solution to boundary value problems of higher-order by the modified decomposition method, Comput. Math. Applic., 40, 679-691.

Wazwaz, A.M., 2001 A reiable algorithm for obtaining positive solitions for nonlinear boundary value problems, Comput. Math. Applic., 41, 1237-1244

Wazwaz, A. M., 2001, Exact solutions to non linear diffusion equations abtained by the decomposition method, Applied Mathematics and Computation; 123, 109-122.

Yu L.T., Chen C.K., 1998, The solution of the Blasius equation by the differential transformation method, Math. Comput. Model., 28 , 101-111.

Zauderer, E. 1983, Partial Differential equations of applied mathematics, John Wiley&Sons, USA.

Zhou, J. K. 1986, Differential transformation and İts Aplications for Electical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan China.