



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI VE UYGULAMALARI

Hasan GÜNAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz - 2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI VE UYGULAMALARI

Hasan GÜNAY

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Necati TAŞKARA

2019, 60 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Yasin YAZLIK
Doç. Dr. Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Dr. Öğr. Üyesi Muhammed Talat SARIAYDIN

Bu çalışmada üçüncü mertebeden genelleştirilmiş kuaterniyonların alt dizisi olan yeni bir W_n kuaterniyonu alınarak bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu kuaterniyon kullanılarak Padovan, Perrin ve Van Der Laan kuaterniyonların özellikleri araştırılmıştır. Sonuç olarak bu kuaterniyonların üreteç fonksiyonları, Binet formülleri, toplamsal özellikleri ve aralarındaki bazı bağıntılar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Binet formülü, kuaterniyon, Padovan kuaterniyon, Perrin kuaterniyon, Van Der Laan kuaterniyon, üreteç fonksiyonu.

ABSTRACT

MS THESIS

QUATERNIONS AND APPLICATIONS OF SOME GENERALIZED THIRD ORDER SEQUENCES

Hasan GÜNAY

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

2019, 60 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Yasin YAZLIK
Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA
Asist. Prof. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

In this study, a new quaternion W_n which is a subseries of third order generalized quaternions is investigated and some of its basic properties are examined. The properties of Padovan, Perrin and Van Der Laan quaternions were also investigated by using this quaternion. As a result, generating functions, Binet formulas and additive properties of these quaternions and some relations between them are given.

Keywords: Binet formula, quaternion, Padovan quaternion, Perrin quaternion, Van Der Laan quaternion, generating function.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Necati TAŞKARA yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarımda bana vermiş olduğu destek ve yardımlardan dolayı değerli vakitlerini ve yardımlarını esirgemeyen, her safhasında bilgi ve tecrübelerine başvurduğum danışmanım Doç. Dr. Necati TAŞKARA'ya sonsuz saygılarımı sunarım. Ayrıca vermiş olduğu desteklerden dolayı eşim Ayşe GÜNAY'a teşekkür ederim.

Hasan GÜNAY
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Tezin Yapısı 3
1.2. Tezin Amacı ve Önemi 3

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **4**

3. TEMEL KAVRAMLAR **11**

3.1. Padovan, Perrin ve Van Der Laan Sayı Dizileri 11
3.2. Genelleştirilmiş Tribonacci Sayı Dizileri 15
3.3. Kuaterniyonlar 17
3.4. Padovan, Perrin ve Van Der Laan Kuaterniyonlar 20
3.5. Genelleştirilmiş Tribonacci Kuaterniyonlar 22

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ SAYI DİZİLERİNİN VE KUATERNİYONLARININ ÖZELLİKLERİ **24**

4.1. Üçüncü Mertebeden Genelleştirilmiş Sayı Dizisi 24
4.2. Üçüncü Mertebeden Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar 27
4.3. Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Toplamsal Özellikleri 36
4.4. Padovan, Perrin ve Van Der Laan Kuaterniyonlar Arasındaki İlişkiler 42

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **46**

5.1 Sonuçlar 46
5.2 Öneriler 46

KAYNAKLAR **47**

ÖZGEÇMİŞ **51**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar

$\mathbb{Z}^+$: Pozitif tam sayılar

$C(a)$: sirkülant matris

F_n : $n.$ Fibonacci sayısı

L_n : $n.$ Lucas sayısı

P_n : $n.$ Padovan sayısı

Q_n : $n.$ Perrin sayısı

R_n : $n.$ Van Der Laan sayısı

$F_{k,n}$: $n.k$ -Fibonacci sayısı

$L_{k,n}$: $n.k$ -Lucas sayısı

Pf_n : $n.$ genelleştirilmiş p -Fibonacci sayısı

Pl_n : $n.$ genelleştirilmiş p -Lucas sayısı

$G_{k,n}$: $n.$ genelleştirilmiş k -Fibonacci sayısı

J_n : $n.$ Jacobsthal sayısı

j_n : $n.$ Jacobsthal-Lucas sayısı

$J_n^{(3)}$: $n.$ üçüncü mertebeden Jacobsthal sayısı

$j_n^{(3)}$: $n.$ üçüncü mertebeden Jacobsthal- Lucas sayısı

$J_{k,n}$: $n.$ ikinci mertebeden genelleştirilmiş Jacobsthal sayısı

p_n : $n.$ Pell sayısı

l_n : $n.$ Pell-Lucas sayısı

q_n : $n.$ Modified Pell sayısı

$q_{k,n}$: $n.$ Modified k -Pell sayısı

T_n : $n.$ Tribonacci sayısı

TL_n : $n.$ Tribonacci-Lucas sayısı

V_n : $n.$ genelleştirilmiş Tribonacci sayısı

QW_n : $n.$ Horadam sayısı

$H_{k,n}$: $n.$ genelleştirilmiş k -Horadam sayısı

$\underline{Q_n}$: $n.$ Fibonacci kuaterniyon

K_n : $n.$ Lucas kuaterniyon

GQ_n : $n.$ genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyon

GK_n : $n.$ genelleştirilmiş Lucas kuaterniyon

$D_{k,n}$: $n.k$ -Fibonacci kuaterniyon

$P_{k,n}$: $n.k$ -Lucas kuaterniyon

QP_n : $n.$ Pell kuaterniyon

QPL_n : $n.$ Pell-Lucas kuaterniyon

$\mathcal{P}_n$: $n.$ Padovan kuaterniyon

$\mathcal{O}_n$: $n.$ Perrin kuaterniyon

$\mathcal{R}_n$: $n.$ Van Der Laan kuaterniyon

TQ_n : $n.$ Tribonacci kuaterniyon

TQ_n' : $n.$ Tribonacci-Lucas kuaterniyon

$JQ_n^{(3)}$: $n.$ üçüncü mertebeden Jacobsthal kuaterniyon

$jQ_n^{(3)}$: $n.$ üçüncü mertebeden Jacobsthal-Lucas kuaterniyon

BCV_n : $n.$ Bicomplex genelleştirilmiş kuaterniyon

$Q_{v,n}$: $n.$ genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyon

M_n : $n.$ üçüncü mertebeden genelleştirilmiş sayısı

W_n : $n.$ üçüncü mertebeden genelleştirilmiş kuaterniyon

1. GİRİŞ

İnsanlık tarihinin başlangıcından beri, evrendeki düzeni keşfetme güdüsü var olmuştur. Geçen on binlerce yıl içinde yapılan tüm çalışmalar evrenin insanın aklının alamayacağı kadar sistematik bir ölçü içerisinde yaratıldığını ortaya koymuştur. Evrenin bu sistemi, kuşkusuz sayılar üzerine oturtulmuştur. Var olan her şey, bir sayıya karşılık gelmektedir. Dil bilimi bile matematiksel kurallar sayesinde gelişim göstermektedir. Ve biz bu sayıları, daha çok gündelik matematik hesaplamalarında, ölçüp tartmada, mühendislikte ve bunun gibi basit konular üzerinde incelemeye çalışıyoruz. Felsefik boyutta düşünüldüğünde, varoluşun ve doğa yasalarının temelinde de bu sayılar bulunmaktadır. Bu anlamda evrene hâkim olan sayıların yasası matematiğin düzenini ortaya koyacaktır. İşte bu düzeni görmemizi sağlayacak anahtar, altın orandır.

Evrende görebileceğimiz tüm nesne ve varlıkların parçaları arasında bir uyumun olduğunu ve binlerce yıldır hiç değişmediği saptandığı için Yaratıcı'nın matematik sistemi olarak bilinen bağıntıya "altın oran" denilmektedir. Sanatta ve matematikte çok kez karşılaşabileceğimiz bu oran, aslında bir kural üzerine oturtulmuştur. Fakat gözlemleyebildiğimiz bütün varlık âleminde bu oranın geçerli ve tutarlı olarak göze çarpması, insanları şaşkına çevirecek kadar ciddi bir sistemi ortaya koyuyor. Evrenin var oluşundan bu yana tutarlı olarak bütün varlıklarda aşağıda açıklanacak olan 1,618'e karşılık gelen bir oranın bulunması, dünyaca ünlü matematikçilerin de hayranlıkla incelediği ve kendi çalışmalarında kullandıkları bir konu alanı olmuştur.

İlk olarak kimler tarafından keşfedildiği bilinmese de Mısırlıların ve Yunanlıların bu konu üzerinde yapmış oldukları bazı çalışmalar olduğu görülmektedir. Öklid, milattan önce 300'lü yıllarda yazdığı "elementler" adlı tezinde "ekstrem ve önemli oranda bölmek*"* olarak altın oranı ifade etmiştir. Mısırlıların keops piramidinde, Leonardo da Vinci'nin "İlahi Oran" adlı çalışmada sunduğu resimlerde ve birçok çalışmalarda kullanıldığı bilinen altın oran, "Fibonacci sayıları" olarak da bilinmektedir. Orta Çağ'ın en ünlü matematikçisi olan İtalyan kökenli Leonardo Fibonacci, birbiri arasında ardışık ilişki ve olağanüstü bir oran bulunduğunu iddia ettiği sayıları keşfetmiştir. Evrendeki muhteşem düzenle birebir örtüşen bu sayıları keşfetmesi nedeniyle, altın orana da adının ilk iki harfi olan **"**Fi**"** (Φ) sayısı denilmiştir (Altın Oran, http://www.bilgicik.com/yazi/altin-oran-evrenin-matematigi).

William Rowan Hamilton (İrlanda, 1805-1865) kraliyet ailesinin bir konsey toplantısına başkanlık yapmak için kraliyet kanalı boyunca eşiyle birlikte yürürken aklına bir fikir geldi. Brougham köprüsü'nün üzerindeydi kalemini çıkardı ve oradaki taşa kuaterniyonun temel formülünü çizdi. Hamilton birkaç hafta sonra 1843' te sunduğu teoride, kuaterniyon terimini belli bir dörtlüyü adlandırmak için kullandı. Hamilton komplex sayılarını genelleştirmiştir. Hamilton'un yaptığı keşif fizik, matematik, bilgisayar grafikleri, bilgisayar simülasyonları, tutum kontrolü, orbital ve yörünge mekaniği gibi birçok alanda kullanımlarını bulmak mümkündür. (Kuaterniyonlar, https://www.matematiksel.org/koprude-gelen-ilhamkuaterniyonlar/; Baek ve ark., 2017)

Cordonnier sayıları, çağdaş mimar Richard Padovan (1935-) onuruna Stewart (1996) tarafından tanımlanmıştır. Ama ilk bu sayıyı keşfeden kişi Fransız asıllı mimarlık öğrencisi Gerard Cordonnierdir. Fransız keşiş-mimar Dom Hans Van Der Laan (1904-1991) tarafından yeniden düzenlenmiştir. Cordonnier, Padovan, Van Der Laan ve Stewart ile tarihi ortaklık taşıyan sayıları Padovan sayıları Cordonnier sayıları olarakta bilinir.

Perrin sayıları ise 1876' da Lucas tarafından tanıtılmış ve ileride Steward tarafından Perrin dizisi olarak adlandırılmıştır. İşte bu sayılar sanat ve mimaride kullanılmaktadır. Bu sayı dizileride doğada örnekleri olan altın orana benzer bir orana sahiptirler. İki Padovan sayısının oranı, plastik sayı olarak bilinen $p \simeq 1,3247195...$ sayısına yakınsar (Shannon ve ark., 2006).

1.1. Tezin Yapısı

Bu tez; 1. Bölüm Giriş Bölümü, 2. Bölüm Kaynak Araştırması, 3. Bölüm Temel Kavramlar, 4. Bölüm tezin orijinal bölümü olup bu bölümde Genelleştirilmiş Sayı Dizilerin ve Kuaterniyonlarının Özellikleri incelenmiştir. 5. Bölüm Sonuçlar ve Öneriler olmak üzere toplam beş bölümden oluşmaktadır.

1.2. Tezin Amacı ve Önemi

Bu çalışmanın temel amacı literatürde yapılmış olan ikinci ve üçüncü mertebeden rekürans bağıntısına sahip sayı dizilerinden yararlanarak üçüncü mertebeden genelleştirilmiş kuaterniyonların toplamsal ve binomiyel özelliklerini araştırmaktır. Ayrıca Padovan, Perrin ve Van Der Laan kuaterniyonların bazı temel özellikleri ve aralarındaki bağıntıları elde etmektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde tezin oluşturulmasında yararlanılan ve sonuçlar çıkarılan çalışmalar verilecektir. İlk olarak ikinci ve üçüncü mertebeden sayı dizileriyle ilgili çalışmalar verilmiştir.

(Lucas, 1876) Bu çalışmada $\{Q_n\}$ Perrin dizileri tanıtılmıştır.

(Perrin, 1899) Bu çalışmada önceki yıllarda tanıtılmış $\{Q_n\}$ dizisine Perrin ismi verilerek bazı özellikleri incelenmiştir.

(Koshy, 2001) Kitabında Fibonacci, Lucas sayıları ve genellemeleriyle ilgili çok geniş bilgi vermiştir. Ayrıca sayı dizilerinin bir çok uygulaması ve kullanım alanları incelemiştir.

(Padovan, 2002) Bu makalede mimarlık öğrencisi Fransız Gerard Cordonnier tarafından 1924 yılında keşfedilen Cordonnier sayılarının özellikleri verilmiştir.

(Shannon ve ark., 2006) Bu çalışmada üçüncü mertebeden lineer sayı dizileri olan Cordonnier, Perrin ve Van Der Laan sayı dizilerinin tanımları ve bu sayıların Fibonacci sayı dizisine benzer özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca sayıların kombinatöriyel özellikleri incelenmiştir.

(Falcon ve Plaza, 2006) Bu çalışmada Fibonacci dizileri ve Pell dizilerini genelleyen k -Fibonacci dizisi tanımlamış ve özellikleri verilmiştir.

(Koçer ve Tuğlu, 2007) Bu makalede Pell ve Pell-Lucas p -sayıları tanımlanmıştır. Ayrıca bu sayıların analitik formülleri ve Binet formülü verilmiştir.

(Güleç ve Taşkara, 2009) Bu çalışmalarında Fibonacci sayılarının binom katsayılarıyla yeni özelliklerini ve bunlara bağlı sonuçları incelemişlerdir.

(Uslu ve ark., 2010) Bu makalede k - Fibonacci ve k - Lucas sayılarının yeni genelleştirilmesini vermişlerdir. Bu genelleme kullanılarak, bu sayılar üzerinde yeni cebirsel özellikleri elde edilmiştir.

(Bolat ve Köse, 2010) Bu çalışmada $\{F_{k,n}\}$ k-Fibonacci dizisinin bazı eşitlikleri, üreteç fonksiyonları, binomiyel toplamları ve bölünebirlik özellikleri araştırılmıştır.

(Falcon, 2011) Bu makalede k-Fibonacci sayı dizilerini özel bir durumundan yararlanılarak $L_{k,n}$ k-Lucas sayısı olmak üzere

$$L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1}, \quad L_{k,0} = 2,\ L_{k,1} = k,\ n \geq 1 \tag{2.1}$$

olarak tanımlanmıştır. k-Lucas dizisinin Binet formülü $\sigma_k = \dfrac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere

$$L_{k,n} = \sigma_k^n + \left(-\sigma_k\right)^{-n} \tag{2.2}$$

olarak elde edilmiştir. Ayrıca k-Fibonacci ve k-Lucas sayıları arasında ilişkiler verilmiştir.

(Solak ve Bahşi, 2011) Bu makalede Fibonacci ve Lucas sayılarını kapsayan Henkel matrislerin spektral normları için eşitlikler vermişlerdir.

(Yazlık ve Taşkara, 2012) Bu makalede $\{H_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ genelleştirilmiş k-Horadam dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır. Bu dizi k pozitif reel sayı, $f(k)$ ve $g(k)$ skaler değerli polinomlar, $f^2 + 4g(k) > 0$ olmak üzere $n \geq 0$,

$$H_{k,n+2} = f(k)H_{n+1} + g(k)H_{k,n}, \quad H_{k,0} = a,\ H_{k,1} = b \tag{2.3}$$

şeklindedir. Daha sonra bu dizinin üreteç fonksiyonu, toplamsal eşitlikleri ve matrisler kullanılarak bazı özellikleri verilmiştir.

Horadam tarafından tanımlanan, özellikleri araştırılan ikinci mertebeden J_n Jacobsthal ve j_n Jacobsthal- Lucas sayıları genişletilerek üçüncü mertebeden $J_n^{(3)}$ Jacobsthal ve $j_n^{(3)}$ Jacobsthal- Lucas sayıları tanımlanmıştır. Daha sonra bu sayılar

arasındaki bağıntılar, üreteç fonksiyonları gibi temel eşitlikler verilmiştir **(Horadam, 1996; Cook ve Bacon, 2013).**

(Coşkun, 2013) Yüksek lisans tezinde Cordonnier, Perrin ve Van Der Laan sayı dizileri incelenerek, bu sayı dizileri için $a \in \mathbb{R}^n$, $a = \left(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} \right)^T$ olmak üzere

$$C(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}_{nxn} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanan $C(a)$ sirkülant matrisinin bazı özellikleri araştırılmıştır.

(Cerda-Morales, 2017) çalışmasında V_n genelleştirilmiş Tribonacci dizisini

$$V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} + tV_{n-3}, \quad V_0 = a, \; V_1 = b, \; V_2 = c \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada a, b, c tam sayı ve r, s, t reel sayılardır. Daha sonra genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyonları tanımlayarak özelliklerini incelemiştir.

(Frontczak, 2018) Bu makalede Feinberg tarafından araştırılmış olan $n \geq 2$ için $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Tribonacci sayı dizisi ve $\{TL_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Tribonacci-Lucas sayı dizisi

$$T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2}, \quad T_0 = 0, \; T_1 = T_2 = 1, \tag{2.6}$$

$$TL_{n+1} = TL_n + TL_{n-1} + TL_{n-2}, \quad TL_0 = 3, \; TL_1 = 1, \; TL_2 = 3 \tag{2.7}$$

olmak üzere; Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayılarının toplamsal özellikleri verilmiştir.

(Uygun ve Tümbaş, 2018) Bu makalede ikinci mertebeden yeni bir genelleştirilmiş Jacobsthal dizisi tanımlanmıştır. Daha sonra bu dizinin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı özellikleri verilmiştir.

(Yazlık ve ark., 2018) Bu çalışmasında yeni bir genelleştirilmiş Fibonacci p-sayıları ve Lucas p-sayıları tanımlamışlardır. Daha sonra bu dizilerin Binet formülü ve bazı eşitlikleri vermişlerdir.

Aşağıdaki sayı dizileri kullanılarak elde edilen kuaterniyonlarla ilgili çalışmalar verilmiştir.

(Iyer, 1969) Bu çalışmasında Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve bu sayıların kuaterniyonları arasında yeni bağıntılar elde etmiştir.

(**Iakin, 1977)** Bu çalışmasında başka araştırmacılar tarafından yapılmış olan genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları incelemiştir. Buradan yola çıkarak yeni genelleştirilmiş kuaterniyonları tanımlamıştır. Ayrıca bu kuaterniyonlar arasındaki bağıntıları araştırmıştır.

(Halıcı, 2012) Bu çalışmada, **(Horadam, 1963)** tarafından

$$\underline{Q_n} = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}, \tag{2.8}$$

$$K_n = L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + kL_{n+3} \tag{2.9}$$

olarak tanımlanan Fibonacci, Lucas kuaterniyonların Binet formülü ve üreteç fonksiyonunu

$$\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3,\ \underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3,\ \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{2.10}$$

olmak üzere

$$\underline{Q_n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n\right),\ K_n = \left(\underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n\right) \tag{2.11}$$

ve

$$G(x,t) = \frac{t + i + j(t+1) + k(t+2)}{1 - t - t^2} \tag{2.12}$$

olarak elde edilmiştir. Bu çalışmada ek olarak toplam formülleri de verilmiştir.

(Akyiğit ve ark., 2013) Bu çalışmada James Cockle tarafından tanımlanan split kuaterniyon kullanılarak Horadam'ın verdiği fikirlerinden yola çıkarak split Fibonacci kuaterniyon, split Lucas kuaterniyon ve split genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyon tanımlanmıştır. Ayrıca kuaterniyonlar arasındaki bazı bağıntılar elde edilmiştir. Bu kuaterniyonlar arasındaki bağıntılar Fibonacci ve Lucas sayıları kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca toplam formülleri, Binet formülü ve Cassini özdeşliği verilmiştir.

(Akyiğit ve ark., 2014) Bu çalışmada genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas kuaterniyonlar sırasıyla

$$GQ_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}, \tag{2.13}$$

$$GK_n = L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + kL_{n+3} \tag{2.14}$$

olarak tanımlanmış ve özellikleri araştırılmıştır.

(Ramirez, 2015) Bu makalede k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonları sırasıyla

$$D_{k,n} = F_{k,n} + iF_{k,n+1} + jF_{k,n+2} + kF_{k,n+3}, \quad n \geq 0, \tag{2.15}$$

$$P_{k,n} = L_{k,n} + iL_{k,n+1} + jL_{k,n+2} + kL_{k,n+3}, \quad n \geq 0 \tag{2.16}$$

tanımlanmıştır. Ayrıca k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonların üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ve Casssini özdeşliği verilmiştir.

(Polatlı, 2015) Bu çalışmada literatürde yapılmış çalışmalardan yararlanarak $\{GU_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyon ve $\{GV_n\}$ genelleştirilmiş Lucas kuaterniyon dizileri tanımlanmıştır. Daha sonra bu kuaterniyonların Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, Cassini özdeşliği ve bazı toplamsal eşitlikleri verilmiştir.

(Çimen ve İpek, 2016) Bu çalışmada p_n $n.$ Pell ve l_n $n.$ Pell- Lucas sayıları olmak üzere Pell, Pell Lucas kuaterniyonlar

$$QP_n = p_n e_0 + p_{n+1} e_1 + p_{n+2} e_2 + p_{n+3} e_3, \tag{2.17}$$

$$QPL_n = l_n e_0 + l_{n+1} e_1 + l_{n+2} e_2 + l_{n+3} e_3 \tag{2.18}$$

olarak tanımlanmıştır. Daha sonra bu kuaterniyonların binet formülleri, bazı toplamsal formülleri ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

(Catarino, 2016) Bu çalışmada $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Modified Pell dizisi ve $\{q_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ Modified k-Pell dizisi sırasıyla

$$q_0 = q_1 = 1, \quad q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{2.19}$$

$$q_{k,0} = q_{k,1} = 1, \quad q_{k,n+1} = 2q_{k,n} + kq_{k,n-1}, \quad n \geq 1 \tag{2.20}$$

gözönüne alınsın. n. Modified Pell, n. Modified k- Pell kuaterniyonları ve oktaniyonları tanımlanmıştır. Daha sonra kuaterniyonların, oktaniyonları bazı özelliklerini inceleyerek Binet tarzı formülleri ve üreteç fonksiyonları verilmiştir.

(Halıcı, 2017) Bu çalışmada daha önce tanımlanmış olan Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyon dizilerinin genellemesi tanımlanmıştır. **(Horadam, 1965)** tarafından tanımlanmış olan QW_n sayı dizisi; terimleri sıfırdan büyük tam sayılar için $QW_0 = a,\ QW_1 = b$ başlangıç şartları olmak üzere

$$QW_n = QW_n(a,b;p,q) = pQW_{n-1} + qQW_{n-2};\quad n \geq 2 \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada QW_n n. Horadam sayısıdır.

Bu çalışmada Horadam'ın tanımına benzer şekilde yeni bir kuaterniyon aşağıdaki şekilde

$$Q_{w,n+2} = QW_{n+2} + QW_{n+3}i + QW_{n+4}j + QW_{n+5}k,\quad n \geq 0 \tag{2.22}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada QW_n n. genelleştirilmiş Horadam sayısıdır. Bileşenleri nedeniyle bu kuaterniyona Horadam kuaterniyonu denilmiştir. Bu kuaterniyonlar arasındaki bağıntılar ve özellikleri incelenmiştir.

(Cerda-Morales, 2017) Bu makalede üçüncü mertebeden Jacobsthal kuaterniyonlar ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$JQ_n^{(3)} = J_n^{(3)} + iJ_{n+1}^{(3)} + jJ_{n+2}^{(3)} + kJ_{n+3}^{(3)},\quad J_0^{(3)} = 0,\ J_1^{(3)} = J_2^{(3)} = 1,\ n \geq 0, \tag{2.23}$$

$$jQ_n^{(3)} = j_n^{(3)} + ij_{n+1}^{(3)} + jj_{n+2}^{(3)} + kj_{n+3}^{(3)},\quad j_0^{(3)} = 2,\ j_1^{(3)} = 1,\ j_2^{(3)} = 5,\ n \geq 0 \tag{2.24}$$

dir. Burada $J_n^{(3)}$ üçüncü mertebeden Jacobsthal sayısı ve $j_n^{(3)}$ üçüncü mertebeden Jacobsthal-Lucas sayısıdır. Daha sonra bu sayılar ve kuaterniyonları arasındaki ilişkiler verilmiştir.

(Cerda-Morales, 2017) Bu makalede $Q_{v,n}$ genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyon aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$Q_{v,n} = V_n + V_{n+1}i + V_{n+2}j + V_{n+3}k,\quad V_0 = a,\ V_1 = b,\ V_2 = c,\ n \geq 0. \tag{2.25}$$

Burada V_n $n.$ genelleştirilmiş Tribonacci sayısı, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve i, j, k ortonormal bazlardır. Bu kuaterniyondan yararlanarak

$$Q_{v,n} = rQ_{v,n-1} + sQ_{v,n-2} + tQ_{v,n-3}, \quad n \geq 3 \tag{2.26}$$

dizisi elde edilmiştir. Daha sonra bu kuaterniyonun Binet benzeri formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı özellikleri verilmiştir.

(Taşçı, 2018) Bu makalede Padovan, Pell- Padovan kuaterniyonları tanımlanmıştır. Ayrıca bu kuaterniyonların Binet benzeri formülleri, üreteç fonksiyonları ve bazı toplamsal özellikleri verilmiştir.

(Akkus ve Kızılaslan, 2018) Tribonacci ve Tribonacci Lucas kuaterniyonların bazı temel özelliklerini vererek onlar için yeni eşitlikler elde etmişlerdir.

(Kızılateş ve ark., 2019) Yazarlar bu makalede $\{BCV_n\}_{n=0}^{\infty}$ Bicomplex genelleştirilmiş kuaterniyonları aşağıdaki şekilde tanımlamıştır. V_n $n.$ genelleştirilmiş Tribonacci sayısı olmak üzere

$$BCV_n = V_n + iV_{n+1} + jV_{n+2} + ijV_{n+3} \tag{2.27}$$

dir. $r, s, t \in \mathbb{R}$ ve $a, b, c, \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$BCV_{n+2} = rBCV_{n+1} + sBCV_n + tBCV_{n-1}, \quad n \geq 1 \tag{2.28}$$

ve

$$i^2 = -1, \; j^2 = -1, \; ij = ji \tag{2.29}$$

dir. Daha sonra bu kuaterniyonların Binet formülünü, üreteç fonksiyonu ve toplam formüllerini vermişlerdir. Ayrıca kuaterniyonlarla ilgili özel matrisin determinantını hesaplamışlardır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm beş alt başlık halinde toplanmaktadır. Birinci alt başlıkta Padovan, Perrin, Van Der Laan sayı dizilerinin tanımları ve bilinen özellikleri verilecektir. İkinci alt başlıkta genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizisinin tanımı ve Binet benzeri formülü verilecektir. Üçüncü alt başlıkta kuaterniyonların tanımları ve kuaterniyonlar arasındaki bağıntılar verilecektir. Dördüncü alt başlıkta Padovan, Perrin ve Van Der Laan kuaterniyonların tanımları ve bazı özellikleri verilecektir. Beşinci alt başlıkta genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyonun tanımı ve özellikleri hakkında bilgi verilecektir.

3.1. Padovan, Perrin ve Van Der Laan Sayı Dizileri

Tanım 3.1.1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için P_n Padovan sayı dizisi

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \quad n > 2 \tag{3.1}$$

rekürans bağıntısı ve $P_0 = 1,\ P_1 = 1,\ P_2 = 1$ başlangıç şartlarıyla tanımlıdır.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için Q_n Perrin sayı dizisi

$$Q_n = Q_{n-2} + Q_{n-3}, \quad n > 2 \tag{3.2}$$

rekürans bağıntısı ve $Q_0 = 3,\ Q_1 = 0,\ Q_2 = 2$ başlangıç şartlarıyla tanımlıdır.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için R_n Van der Laan sayı dizisi

$$R_n = R_{n-2} + R_{n-3}, \quad n > 2 \tag{3.3}$$

rekürans bağıntısı ve $R_0 = 0,\ R_1 = 1,\ R_2 = 0$ başlangıç şartlarıyla tanımlıdır. **(Shannon ve ark., 2006).**

Bazı Padovan, Perrin ve Van Der Laan sayı dizileri tablodaki gibidir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
P_n	1	1	1	2	2	3	4	5	7	…
Q_n	3	0	2	3	2	5	5	7	10	…
R_n	0	1	0	1	1	1	2	2	3	…

Tablo 3.1.

P_n Padovan, Q_n Perrin ve R_n Van der Laan sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları

i) $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)y^{n-1} = \frac{(1+y)}{1-(y^2+y^3)}$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} Q_{n+1}(x)y^{n-1} = \frac{(3-y^2)}{1-(y^2+y^3)}$,

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} R_n(x)y^{n-1} = \frac{1}{1-(y^2+y^3)}$

olarak verilmiştir **(Shannon ve ark., 2006).**

P_n Padovan, Q_n Perrin ve R_n Van Der Laan sayı dizilerinin Binet formülleri aşağıda sırasıyla verilmiştir:

$$P_n = \frac{r_1^4}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}r_1^n + \frac{r_2^4}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}r_2^n + \frac{r_3^4}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}r_3^n, \tag{3.4}$$

$$Q_n = r_1^n + r_2^n + r_3^n, \tag{3.5}$$

$$R_n = \frac{1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}r_1^n + \frac{1}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}r_2^n + \frac{1}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}r_3^n. \tag{3.6}$$

Burada

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{23}{108}}}, \tag{3.7}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{23}{108}}}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{23}{108}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{23}{108}}}\right), \tag{3.8}$$

$$r_3 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{23}{108}}}\right) - \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{23}{108}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{23}{108}}}\right) \tag{3.9}$$

olup Padovan, Perrin ve Van Der Laan sayı dizilerinin rekürans bağıntılarının karakteristik denklemi olan $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleridir. Bu denklemde

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0,$$
$$r_1 . r_2 . r_3 = 1, \tag{3.10}$$
$$r_1 . r_2 + r_1 . r_3 + r_2 . r_3 = -1$$

dir **(Anonymous, 2012).**

Ayrıca (3.10) da eşitlikler gözönüne alınırsa aşağıdaki bağıntıların olduğu açıkça görülür.

$$\begin{aligned} 1+r_1 &= r_1^3, \\ 1+r_2 &= r_2^3, \\ 1+r_3 &= r_3^3, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3 &= -1 \\ r_1(r_2+r_3)+r_2r_3 &= -1 \\ r_1(-r_1)+r_2r_3 &= -1 \\ r_2r_3 &= r_1^2-1, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3 &= -1 \\ r_2(r_1+r_3)+r_1r_3 &= -1 \\ r_2(-r_2)+r_1r_3 &= -1 \\ r_1r_3 &= r_2^2-1, \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3 &= -1 \\ r_3(r_1+r_2)+r_1r_2 &= -1 \\ r_3(-r_3)+r_1r_2 &= -1 \\ r_1r_2 &= r_3^2-1, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} (1-r_1)(1-r_2) &= 1-(r_1+r_2)+r_1r_2 \\ &= 1-(-r_3)+r_3^2-1 \\ &= r_3^2+r_3 \\ &= r_3^4, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} (1-r_1)(1-r_3) &= 1-(r_1+r_3)+r_1r_3 \\ &= 1-(-r_2)+r_2^2-1 \\ &= r_2^2+r_2 \\ &= r_2^4, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} (1-r_2)(1-r_3) &= 1-(r_2+r_3)+r_2r_3 \\ &= 1-(-r_1)+r_1^2-1 \\ &= r_1^2+r_1 \\ &= r_1^4, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\left(1-r_1^2\right)\left(1-r_2^2\right) &= 1-\left(r_1^2+r_2^2\right)+r_1^2r_2^2 \\ &= 1-\left(2-r_3^2\right)+\left(r_3^2-1\right)^2 \\ &= r_3^2-1+r_3^4-2r_3^2+1 \\ &= r_3^4-r_3^2 \\ &= r_3,\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\left(1-r_1^2\right)\left(1-r_3^2\right) &= 1-\left(r_1^2+r_3^2\right)+r_1^2r_3^2 \\ &= 1-\left(2-r_2^2\right)+\left(r_2^2-1\right)^2 \\ &= r_2^2-1+r_2^4-2r_2^2+1 \\ &= r_2^4-r_2^2 \\ &= r_2,\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\left(1-r_2^2\right)\left(1-r_3^2\right) &= 1-\left(r_2^2+r_3^2\right)+r_2^2r_3^2 \\ &= 1-\left(2-r_1^2\right)+\left(r_1^2-1\right)^2 \\ &= r_1^2-1+r_1^4-2r_1^2+1 \\ &= r_1^4-r_1^2 \\ &= r_1,\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\left(1-r_1\right)\left(1-r_2\right)\left(1-r_3\right) &= \left[1-\left(r_1+r_2+r_3\right)+\left(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3\right)-\left(r_1r_2r_3\right)\right] \\ &= 1-1-1 \\ &= -1,\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\left(1-r_1^2\right)\left(1-r_2^2\right)\left(1-r_3^2\right) &= 1-\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)+r_1^2r_2^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_3^2-r_1^2r_2^2r_3^2 \\ &= 1-2+1-1 \\ &= -1.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Padovan sayılarının bazı toplamsal özellikleri aşağıdaki şekildedir **(Anonymous, 2012):**

i) $\sum_{i=0}^{n} P_i = P_{n+5} - 2,$

ii) $\sum_{i=0}^{n} P_{2i} = P_{2n+3} - 1,$

iii) $\sum_{i=0}^{n} P_{2i+1} = P_{2n+4} - 1,$

iv) $\sum_{i=0}^{n} P_{3i} = P_{3n+2},$

v) $\sum_{i=0}^{n} P_{3i+1} = P_{3n+3} - 1,$

vi) $\sum_{i=0}^{n} P_{3i+2} = P_{3n+4} - 1,$

vii) $\sum_{i=0}^{n} P_{5i} = P_{5n+1}.$

Q_n Perrin sayısı aşağıdaki toplamsal özellikleri sağlar **(Anonymous, 2012):**

i) $\sum_{i=0}^{n-1} Q_i = Q_{n+4} - 2,$

ii) $\sum_{i=0}^{n} Q_k^2 = Q_{n+2}^2 - Q_{n-1}^2 - Q_{n-3}^2 + 1.$

3.2. Genelleştirilmiş Tribonacci Sayı Dizileri

Tanım 3.2.1. V_n genelleştirilmiş Tribonacci dizisi

$$V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} + tV_{n-3}, \quad V_0 = a,\ V_1 = b,\ V_2 = c \tag{3.23}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada a, b, c tam sayı ve r, s, t reel sayılardır (**Cerda-Morales, 2017).**

Genelleştirilmiş bazı Tribonacci sayıları

$$\begin{aligned} V_0 &= a, \\ V_1 &= b, \\ V_2 &= c, \\ V_3 &= rc + sb + ta, \\ V_4 &= rV_3 + sc + tb, \\ V_5 &= rV_4 + sV_3 + tc, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.24}$$

dir.

Genelleştirilmiş Tribonacci dizisinin rekürans bağıntısına ait karakteristik denklemi $x^3 - rx^2 - sx - t = 0$ olup, denklemin kökleri $w_1,\ w_2,\ w_3$ olmak üzere

$$w_1 = w_1(r,s,t) = \frac{r}{3} + \left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{3.25}$$

$$w_2 = w_2(r,s,t) = \frac{r}{3} + \varepsilon\left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^2\left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{3.26}$$

$$w_3 = w_3(r,s,t) = \frac{r}{3} + \varepsilon^2\left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} + \varepsilon\left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{3.27}$$

dir. Burada $\Delta = \Delta(r,s,t) = \left(\frac{r^3t}{27} - \frac{r^2s^2}{108} + \frac{rst}{6} - \frac{s^3}{27} + \frac{t^2}{4}\right)$ ve $\varepsilon = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ dir **Cerda-Morales, 2017).**

Genelleştirilmiş Tribonacci dizisinin Binet formülü

$$V_n = \frac{Aw_1^{\,n}}{(w_1 - w_2)(w_1 - w_3)} - \frac{Bw_2^{\,n}}{(w_1 - w_2)(w_2 - w_3)} + \frac{Cw_3^{\,n}}{(w_1 - w_3)(w_2 - w_3)} \tag{3.28}$$

dir. Burada

$A = c - (w_2 + w_3)b + w_2w_3a,\ B = c - (w_1 + w_3)b + w_1w_3a,\ C = c - (w_1 + w_2)b + w_1w_2a$

dir (**Cerda-Morales, 2017).**

$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genelleştirilmiş Tribonacci dizisi olmak üzere r,s,t değerleri ve a,b,c başlangıç şartlarına göre aşağıdaki şekilde literatürdeki sayı dizileri elde edilir.

i) $r = s = t = 1$ ve $a = 0,\ b = c = 1$ alınırsa genelleştirilmiş Tribonacci dizisi $\{T_n\}$ Tribonacci dizisine indirgenir,

ii) $r = s = t = 1$ ve $a = 3,\ b = 1,\ c = 3$ alınırsa genelleştirilmiş Tribonacci dizisi $\{TL_n\}$ Tribonacci-Lucas dizisine indirgenir,

iii) $r = 0,\ s = t = 1$ ve $a = 3,\ b = 0,\ c = 2$ alınırsa genelleştirilmiş Tribonacci dizisi $\{Q_n\}$ Perrin dizisine indirgenir,

iv) $r = 0,\ s = t = 1$ ve $a = b = c = 1$ alınırsa genelleştirilmiş Tribonacci dizisi $\{P_n\}$ Padovan dizisine indirgenir,

v) $r = 0,\ s = t = 1$ ve $a = 1,\ b = 0,\ c = 1$ alınırsa genelleştirilmiş Tribonacci dizisi $\{R_n\}$ Van Der Laan dizisine indirgenir,

vi) $r = 1,\ s = 0,\ t = 1$ ve $a = 0,\ b = c = 1$ alınırsa genelleştirilmiş Tribonacci dizisi $\{B_n\}$ Narayana dizisine indirgenir,

vii) $r = s = 1,\ t = 2$ ve $a = 0,\ b = c = 1$ alınırsa genelleştirilmiş Tribonacci dizisi $\left\{J_n^{(3)}\right\}$ üçüncü mertebeden Jacobsthal dizisine indirgenir,

viii) $r=s=1,\ t=2$ ve $a=2,\ b=1,\ c=5$ için genelleştirilmiş Tribonacci dizisi $\left\{j_n^{(3)}\right\}$ üçüncü mertebeden Jacobsthal-Lucas dizisine indirgenir, **(Shannon ve Horadam, 1972; Yalavigi, 1972; Pethe, 1988; Feinberg, 1963).**

3.3. Kuaterniyonlar

William Rowen Hamilton (1805-1865) kuaterniyonları tanımlayarak iki vektörün çarpımları ve bölümlerinin mümkün olduğunu göstermiştir. Böylece üç boyutlu uzayda hareketlerin tetkikini kolaylaştırmıştır.

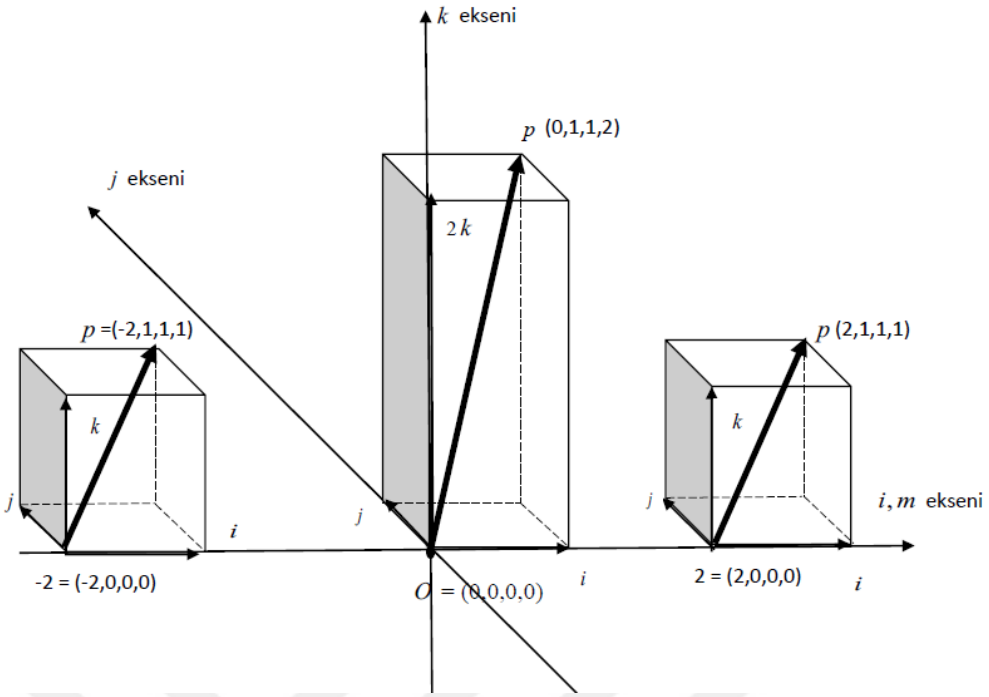
p kuaterniyonu bir hiper- komplex sayı ve $q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3$ reel sayıları olmak üzere,

$$p=q_0+iq_1+jq_2+kq_3=(q_0,q_1,q_2,q_3) \tag{3.29}$$

dir. Burada. $i,\ j,k$ 'lar R^3 'de ortonormal bazlardır. Ayrıca

$$p=S_p+\vec{V}_p \tag{3.30}$$

yazılabilir. Burada $\vec{V_p}$ 'ye vektörel kısım, S_p 'ye da skaler kısım denir. $q_0,\ q_1,\ q_2$ ve q_3 ; p kuaterniyonun bileşenleri denir. m ekseni üç boyutu döndürme eksenidir. Bazı $p(-2,1,1,1),\ p(0,1,1,2)$ ve $p(2,1,1,1)$ kuaterniyonları aşağıdaki şekildedir.



Şekil-1 **(Baek ve ark., 2017)**

Reel kuaterniyonlar cümlesi **K** ile gösterilsin. Bir reel kuaterniyonun dört biriminin özellikleri incelendiğinde **K** cümlesinin özel hali olan, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi, $\mathbb{C}$ komplex sayılar cümlesi ve üç boyutlu vektörler cümlesi elde edilebilir.

Kuaterniyonlarda toplama işlemi:

$$\oplus : \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$$

$$(p_1, p_2) \rightarrow p_1 \oplus p_2 = S_{p_1+p_2} + \vec{V}_{p_1 \oplus p_2}$$

işlemi

$$S_{p_1+p_2} = S_{p_1} + S_{p_2} \quad \text{ve} \quad \vec{V}_{p_1 \oplus p_2} = \vec{V}_{p_1} \oplus \vec{V}_{p_2}$$

olarak tanımlanır. Burada $S_{p_1}, S_{p_2} \in \mathbb{R}$ ve $+$ işlemi $\mathbb{R}$ deki toplama işlemidir; $\vec{V}_{p_1}, \vec{V}_{p_2}$ de bir reel vektör olup $\oplus$ işlemi reel vektör uzayındaki Abel grubu (vektörlerde toplama) işleminin aynısıdır. O halde $(\mathbf{K}, +)$ ikilisi bir Abel grubudur. Buradaki etkisiz eleman sıfır kuaterniyonu $(0,0,0,0)$ sıralı dörtlüsüdür.

Bir kuaterniyonu skaler ile çarpımı:

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$$

$$(\lambda, p) \rightarrow \lambda \odot p = \lambda S_p + \lambda \vec{V}_p$$

şeklinde tanımlanır.

i) $\lambda \odot (p_1 + p_2) = \lambda \odot p_1 + \lambda \odot p_2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},$

ii) $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot p = (\lambda_1 \odot p) \oplus (\lambda_2 \odot p),\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$

iii) $(\lambda_1 \lambda_2) \odot p = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot p),$

iv) $1 \odot p = p$

dir. O halde $\{\mathbf{K}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır.

Kuaterniyonların çarpımı:

$$*: \mathbf{K} \times \mathbf{K} \ \rightarrow \ \mathbf{K}$$

$$(p_1, p_2) \ \rightarrow \ p_1 * p_2$$

işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} &i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \\ &ij = k = -ji,\ \ jk = i = -kj,\ \ ki = j = -ik \end{aligned} \tag{3.31}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} p_1 * p_2 &= (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3) * (q_4 + iq_5 + jq_6 + kq_7) \\ &= q_0 q_4 - (q_1 q_5 + q_2 q_6 + q_3 q_7) + (q_0 q_5 + q_1 q_4 + q_2 q_7 - q_3 q_6) i \\ &\quad + (q_0 q_6 + q_2 q_4 + q_3 q_5 - q_1 q_7) j + (q_0 q_7 + q_4 q_3 + q_1 q_6 - q_2 q_5) k \end{aligned} \tag{3.32}$$

dir. Böylece kuaterniyon çarpımı şu özelliklere sahiptir:

i) İki kuaterniyon çarpımı bir kuaterniyondur,

ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir,

iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli değildir.

p kuaterniyonun eşleniği $\overline{p}$ ile gösterilirse ve $\overline{p} = S_p - \vec{V}_p$ dir. Buna göre

i) $\overline{(p_1\, p_2)} = \overline{p_2}\, \overline{p_1},$

ii) $\overline{(\overline{p_1}\, p_2)} = \overline{p_2}\, p_1.$

p kuaterniyonun normu

$$|p| = N(p) = \sqrt{\overline{p}\, p} \tag{3.33}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer kuaterniyonun normu 1 ’e eşitse birim kuaterniyon denir.

$$|p| = |\overline{p}| = 1,\ \ \overline{p}\, p = N^2(p) = 1 \tag{3.34}$$

dir. Kuaterniyonlar aşağıdaki bağıntıları sağlarlar.

i) $\overline{p}\, pp^{-1} = N^2(p)p^{-1} = \overline{p},$

ii) $p^{-1} = \dfrac{\overline{p}}{N^2(p)} = \dfrac{\overline{p}}{|p|^2}.$

Ayrıca kuaterniyonlar dönme, öteleme, kayma ve vida hareketleri gibi uygulamalarda kullanılmaktadır. **(Hamilton, 1866; Horadam, 1963; Hacısalihoğlu, 1983; Sangwine ve ark., 2011; Baek ve ark., 2017)**.

3.4. Padovan, Perrin ve Van Der Laan Kuaterniyonlar

Tanım 3.4.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{P}_n$ Padovan kuaterniyon,

$$\mathcal{P}_n = P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3}, \quad n \geq 0; \tag{3.35}$$

eşitliği P_n $n.$ Padovan sayısı olmak üzere $P_0 = 1,\ P_1 = 1,\ P_2 = 1,\ P_3 = 2$ başlangıç şartlarıyla tanımlıdır. i, j, k' lar (3.31) de gösterilen çarpım kurallarını sağlayan ortonormal bazlardır **(Taşçı, 2018).**

Bazı Padovan kuaterniyonlar,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0 &= 1 + 1i + 1j + 2k = (1,1,1,2),\\
\mathcal{P}_1 &= 1 + 1i + 2j + 2k = (1,1,2,2),\\
\mathcal{P}_2 &= 1 + 2i + 2j + 3k = (1,2,2,3),\\
\mathcal{P}_3 &= 2 + 2i + 3j + 4k = (2,2,3,4),\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.36}$$

dır. Padovan kuaterniyonlar

$$\mathcal{P}_{n+3} = \mathcal{P}_n + \mathcal{P}_{n+1} \tag{3.37}$$

rekürans bağıntısını sağlarlar. Rekürans bağıntısının denklemi $x^3 - x - 1 = 0$ dir. Bu denklemin kökleri $r_1,\ r_2$ *ve* r_3 dür.

$\mathcal{P}_n$ Padovan kuaterniyon dizisi için Binet benzeri formülü,

$$\mathcal{P}_n = a_1\alpha r_1^n + a_2\beta r_2^n + a_3\gamma r_3^n \tag{3.38}$$

dir. Burada

$$a_1 = \frac{(r_2-1)(r_3-1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)},\ a_2 = \frac{(r_1-1)(r_3-1)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)},\ a_3 = \frac{(r_1-1)(r_2-1)}{(r_1-r_3)(r_2-r_3)}, \tag{3.39}$$

$$\alpha = \left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right),\ \beta = \left(1 + ir_2 + jr_2^2 + kr_2^3\right),\ \gamma = \left(1 + ir_3 + jr_3^2 + kr_3^3\right) \tag{3.40}$$

(Taşçı, 2018).

$\mathcal{P}_n$ Padovan kuaterniyon dizisi için üreteç fonksiyonu

$$g(x)=\frac{(1+i+j+2k)+(1+i+2j+2k)x+(i+j+k)x^2}{1-x^2-x^3} \tag{3.41}$$

dir (**Taşçı, 2018).**

Tanım 3.4.2. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{Q}_n$ Perrin kuaterniyon,

$$\mathcal{Q}_n=Q_n+iQ_{n+1}+jQ_{n+2}+kQ_{n+3};\quad Q_0=3,\ Q_1=0,\ Q_2=2 \tag{3.42}$$

olup

$$\mathcal{Q}_{n+3}=\mathcal{Q}_n+\mathcal{Q}_{n+1} \tag{3.43}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlıdır. Burada Q_n n. Perrin sayısı ve i,j,k 'lar (3.31) de gösterilen çarpım kurallarını sağlayan ortonormal bazlardır **(Cerda-Morales, 2017).**

Bazı Perrin kuaterniyonlar,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_0&=3+0i+2j+3k=(3,0,2,3),\\
\mathcal{Q}_1&=0+2i+3j+2k=(0,2,3,2),\\
\mathcal{Q}_2&=2+3i+2j+5k=(2,3,2,5),\\
\mathcal{Q}_3&=3+2i+5j+5k=(3,2,5,5),\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.44}$$

dır. $\mathcal{Q}_n$ Perrin kuaterniyonu üçüncü mertebeden rekürans bağıntısına sahip olup $x^3-x-1=0$ dir. Bu denklemin kökleri r_1, r_2 ve r_3 dür.

Tanım 3.4.3. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{R}_n$ Van Der Laan kuaterniyon

$$\mathcal{R}_n=R_n+iR_{n+1}+jR_{n+2}+kR_{n+3};\quad R_0=0,\ R_1=1,\ R_2=0 \tag{3.45}$$

olarak tanımlıdır. Bu kuaterniyonun rekürans bağıntısı

$$\mathcal{R}_{n+3}=\mathcal{R}_n+\mathcal{R}_{n+1} \tag{3.46}$$

dır. Burada R_n n. Van Der Laan sayısı ve i,j,k 'lar (3.31) de gösterilen çarpım kurallarını sağlayan ortonormal bazlardır. Bazı Van der Laan kuaterniyonlar

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_0&=0+1i+0j+1k=(0,1,0,1),\\
\mathcal{R}_1&=1+0i+1j+1k=(1,0,1,1),\\
\mathcal{R}_2&=0+1i+1j+1k=(0,1,1,1),\\
\mathcal{R}_3&=1+1i+1j+2k=(1,1,1,2),\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.47}$$

dır. $\mathcal{R}_n$ Van Der Laan kuaterniyonu

$$\mathcal{R}_n=R_n+u_1;\ u_1=iR_{n+1}+jR_{n+2}+kR_{n+3} \tag{3.48}$$

yazılabilir. Burada R_n skaler kısım, u_1 vektörel kısımdır. $\mathcal{P}_n$ Van Der Laan kuaterniyonun üçüncü mertebeden rekürans bağıntısını denklemi $x^3 - x - 1 = 0$ dır. Bu denklemin kökleri r_1, r_2 ve r_3 dür.

3.5. Genelleştirilmiş Tribonacci Kuaterniyonlar

Tanım 3.5.1. $Q_{v,n}$ genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyon

$$Q_{v,n} = V_n + V_{n+1}i + V_{n+2}j + V_{n+3}k, \quad V_0 = a,\ V_1 = b,\ V_2 = c,\ n \geq 0 \tag{3.49}$$

dir. V_n, $n.$genelleştirilmiş Tribonacci sayısı, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve i, j, k ortonormal bazlardır. Bu kuaterniyonun rekürans bağıntısı

$$Q_{v,n} = rQ_{v,n-1} + sQ_{v,n-2} + tQ_{v,n-3}, \quad n \geq 3 \tag{3.50}$$

dir **(Cerda-Morales, 2017).** Bazı genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyonlar aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}
Q_{v,0} &= a + bi + cj + (rc + sb + ta)k, \\
Q_{v,1} &= b + ci + (rc + sb + ta)j + \left[(r^2 + s)c + (t + rs)b + rta\right]k, \\
Q_{v,2} &= c + (rc + sb + ta)i + \left[(r^2 + s)c + (t + rs)b + rta\right]j + V_5 k, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Burada $V_5 = (r^3 + 2rs + t)c + (r^2 s + s^2 + rt)b + (r^2 t + st)a$ dir.

$\left\{Q_{v,n} = Q_{v,n}\left(r,\ s\ ,\ t\ ;\ V_0\ ,\ V_1\ ,\ V_2\right)\right\}_{n \geq 0}$ genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyon r, s, t parametreleri ve V_n 'nin başlangıç değerlerine göre aşağıdaki şekilde sınıflandırılmıştır.

	(r, s, t) **değerleri**	(V_0, V_1, V_2) **başlangıç değerleri**	**Dizinin Adı**
1	$r=1,\ s=0,\ t=1$	$V_0=0,\ V_1=1,\ V_2=1$	Narayana kuaterniyon
2	$r=s=t=1$	$V_0=0,\ V_1=0,\ V_2=1$	Tribonacci kuaterniyon
3	$r=0,\ s=t=1$	$V_0=1,\ V_1=1,\ V_2=1$	Padovan kuaterniyon
4	$r=0,\ s=t=1$	$V_0=3,\ V_1=0,\ V_2=2$	Perrin kuaterniyon
5	$r=1,\ s=1,\ t=2$	$V_0=0,\ V_1=1,\ V_2=1$	Üçüncü mertebeden Jacobsthal kuaterniyon

Tablo 3.2.

$Q_{v,n}$ genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyon için Binet benzeri formülü

$$Q_{v,n}=\frac{Aw_1^{\,n}}{(w_1-w_2)(w_1-w_3)}\underline{w_1}+\frac{Bw_2^{\,n}}{(w_2-w_1)(w_2-w_3)}\underline{w_2}+\frac{Cw_3^{\,n}}{(w_3-w_1)(w_3-w_2)}\underline{w_3} \tag{3.52}$$

dir. Burada

$A=\left(c-(w_2+w_3)b+w_2w_3a\right),\ B=\left(c-(w_1+w_3)b+w_1w_3a\right),\ C=\left(c-(w_1+w_2)b+w_1w_2a\right);$

$\underline{w_1}=\left(1+iw_1+jw_1^{\,2}+kw_1^{\,3}\right),\ \underline{w_2}=\left(1+iw_2+jw_2^{\,2}+kw_2^{\,3}\right)$

ve $\underline{w_3}=\left(1+iw_3+jw_3^{\,2}+kw_3^{\,3}\right)$ (3.53)

dir **(Cerda-Morales, 2017).**

$Q_{v,n}$ genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyon için üreteç fonksiyonu

$$g(x)=\frac{Q_{v,0}+\left(Q_{v,1}-rQ_{v,0}\right)x+\left(Q_{v,2}-rQ_{v,1}-sQ_{v,0}\right)x^2}{1-rx-sx^2-tx^3} \tag{3.54}$$

dir **(Cerda-Morales, 2017).**

Ardışık genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyonların toplamsal formülü

$$\sum_{l=0}^{b}Q_{v,l}=\frac{1}{\delta(r,s,t)}\left[Q_{v,n+2}+(1-r)Q_{v,n+1}+tQ_{v,n}+w(r,s,t)\right] \tag{3.55}$$

dir. Burada $w(r,s,t)=\left(\lambda+i(\lambda-\delta a)+j\left[\lambda-\delta(a+b)\right]+k\left[\lambda-\delta(a+b+c)\right]\right),$

$\lambda=\lambda(r,s,t)=\left((r+s-1)a+(r-1)b-c\right)$ ve $\delta=\delta(r,s,t)=\left(r+s+t-1\right)$

dir **(Cerda-Morales, 2017).**

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ SAYI DİZİLERİNİN VE KUATERNİYONLARININ ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde literatürde bilinen ve üçüncü mertebeden fark denklemine sahip genelleştirilmiş Tribonacci dizisinden elde edilen ve Padovan, Perrin, Van Der Laan sayıların bir genellemesi olan sayı dizisinin temel özellikleri verilip, bu diziden yararlanarak elde edilen kuaterniyonun toplamsal, binomiyel özellikleri araştırılacak ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

4.1. Üçüncü Mertebeden Genelleştirilmiş Sayı Dizisi

Bu alt bölümde (3.23) denklemiyle verilen V_n genelleştirilmiş Tribonacci dizisinin özel bir hali olan M_n genelleştirilmiş sayı dizisi $a,b,c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$M_{n+3} = M_n + M_{n+1}, \quad M_0 = a,\ M_1 = b,\ M_2 = c,\ n \geq 0 \tag{4.1}$$

rekürans bağıntısıyla verilerek bu dizinin bazı özellikleri incelenecektir.

M_n genelleştirilmiş sayı dizisinin bazı elemanları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	...
a	b	c	$a+b$	$b+c$	$a+b+c$	$a+2b+c$	$a+2b+2c$	...

Tablo 4.1.

Bu dizinin karakteristik denklemi $x^3 - x - 1 = 0$ olup kökleri $r_1,\ r_2$ *ve* r_3 dür.

Genelleştirilmiş Tribonacci dizisi Binet formülü (3.28) de $r = 0,\ s = t = 1$ değerleri yazılırsa M_n genelleştirilmiş sayı dizisinin Binet benzeri fomülü

$$M_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n \tag{4.2}$$

elde edilir. Burada

$$C_1 = \frac{c - (r_2 + r_3)b + r_2 r_3 a}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)},\ C_2 = \frac{c - (r_1 + r_3)b + r_1 r_3 a}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)},\ C_3 = \frac{c - (r_1 + r_2)b + r_1 r_2 a}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} \tag{4.3}$$

dır.

Sonuç 4.1.1. (4.2) formülünde a, b *ve* c'ye özel değerler verilerek literatürdeki bazı sayı dizilerinin Binet benzeri formülleri elde edilir (**Anonymous, 2012):**

i) $a=1,\ b=1,\ c=1$ için P_n Padovan dizisi Binet benzeri formülü

$$P_n=\frac{r_1^4}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}r_1^n+\frac{r_2^4}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}r_2^n+\frac{r_3^4}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}r_3^n$$

elde edilir,

ii) $a=3,\ b=0,\ c=2$ için Q_n Perrin dizisi Binet benzeri formülü

$$Q_n=r_1^n+r_2^n+r_3^n$$

elde edilir,

iii) $a=0,\ b=1,\ c=0$ için R_n Van Der Laan dizisi Binet benzeri formülü

$$R_n=\frac{1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}r_1^n+\frac{1}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}r_2^n+\frac{1}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}r_3^n$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1. M_n genelleştirilmiş sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$M(t)=\frac{a+bt+(c-a)t^2}{1-t^2-t^3} \tag{4.4}$$

dür.

İspat. M_n genelleştirilmiş sayı dizisinin üreteç fonksiyonu $M(t)=\sum_{i=0}^{\infty}M_i t^i$ olsun. Binet benzeri formülü (4.2) üreteç fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
M(t)&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(C_1r_1^i+C_2r_2^i+C_3r_3^i\right)t^i\\
&=C_1\sum_{i=0}^{\infty}r_1^it^i+C_2\sum_{i=0}^{\infty}r_2^it^i+C_3\sum_{i=0}^{\infty}r_3^it^i\\
&=C_1\frac{1}{1-r_1t}+C_2\frac{1}{1-r_2t}+C_3\frac{1}{1-r_3t}\\
&=\frac{C_1(1-r_2t)(1-r_3t)+C_2(1-r_1t)(1-r_3t)+C_3(1-r_1t)(1-r_2t)}{(1-r_1t)(1-r_2t)(1-r_3t)}\\
&=\frac{C_1(1-r_3t-r_2t+r_2r_3t^2)+C_2(1-r_3t-r_1t+r_1r_3t^2)+C_3(1-r_2t-r_1t+r_1r_2t^2)}{(1-r_1t)(1-r_2t)(1-r_3t)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(C_1 + C_2 + C_3) + \left[C_1(-r_3 - r_2) + C_2(-r_3 - r_1) + C_3(-r_1 - r_2)\right]t + \left(C_1 r_2 r_3 + C_2 r_1 r_3 + C_3 r_1 r_2\right)t^2}{(1 - r_1 t)(1 - r_2 t)(1 - r_3 t)} \tag{4.5}$$

dir. Denklemin pay ve paydasında aşağıdaki şekilde düzenlemeler yapılırsa ve

$$C_1 + C_2 + C_3 = M_0, \tag{4.6}$$

$$C_1(-r_3 - r_2) + C_2(-r_3 - r_1) + C_3(-r_1 - r_2) = C_1 r_1 + C_2 r_2 + C_3 r_3 = M_1, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} C_1 r_2 r_3 + C_2 r_1 r_3 + C_3 r_1 r_2 &= C_1(r_1^2 - 1) + C_2(r_2^2 - 1) + C_3(r_3^2 - 1) \\ &= (C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 + C_3 r_3^2) - (C_1 + C_2 + C_3) \\ &= M_2 - M_0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - r_1 t\right)\left(1 - r_2 t\right)\left(1 - r_3 t\right) &= 1 - r_2 t - r_1 t + r_1 r_2 t^2 - r_3 t + r_2 r_3 t^2 + r_1 r_3 t^2 - r_1 r_2 r_3 t^3 \\ &= 1 - (r_1 + r_2 + r_3)t + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)t^2 - r_1 r_2 r_3 t^3 \\ &= 1 - 0 - t^2 - t^3 \\ &= 1 - t^2 - t^3 \end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunan değerler (4.5) de yerine yazılırsa

$$M(t) = \frac{M_0 + M_1 t + (M_2 - M_0)t^2}{1 - t^2 - t^3} = \frac{a + bt + \left(c - a\right)t^2}{1 - t^2 - t^3} \tag{4.10}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.1.2. Yukarıda verilen üçüncü mertebeden genelleştirilmiş sayı dizisinin üreteç fonksiyonunda a, b ve c' ye özel değerler verilerek literatürde bilinen birçok sayı dizisinin üreteç fonksiyonu elde edilir **(Shannon ve ark., 2006):**

i) $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$ için P_n Padovan dizisinin üreteç fonksiyonu

$$P(t) = \frac{1 + t}{1 - t^2 - t^3}$$

elde edilir,

ii) $a = 3,\ b = 0,\ c = 2$ için Q_n Perrin dizisinin üreteç fonksiyonu

$$Q(t) = \frac{3 - t^2}{1 - t^2 - t^3}$$

elde edilir,

iii) $a = 0, b = 1, c = 0$ için R_n Van Der Laan dizisinin üreteç fonksiyonu

$$R(t) = \frac{t}{1 - t^2 - t^3}$$

elde edilir.

4.2. Üçüncü Mertebeden Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar

$Q_{v,n}$ genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyonu (3.50) de $r=0,\ s=t=1$ alınırsa M_n genelleştirilmiş sayı dizisi için W_n genelleştirilmiş kuaterniyonu aşağıdaki şekilde verilebilir.

W_n üçüncü mertebeden genelleştirilmiş kuaterniyon

$$W_n = M_n + iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3};\quad M_0 = a,\ M_1 = b,\ M_2 = c,\ M_3 = a+b,\ n \geq 0 \qquad (4.11)$$

dir. Bu kuaterniyon aşağıdaki rekürans bağıntısını sağlar.

$$W_{n+3} = W_n + W_{n+1}. \qquad (4.12)$$

Burada M_n $n.$ genelleştirilmiş sayı dizisi ve i, j, k'lar R^3 'de (3.31) gösterilen çarpım kurallarını sağlayan ortonormal bazlardır. Bazı W_n genelleştirilmiş kuaterniyon sayıları

$$\begin{aligned}
W_0 &= a + ib + jc + k(a+b) = (a,\ b,\ c,\ a+b),\\
W_1 &= b + ic + j(a+b) + k(b+c) = (b,\ c,\ a+b,\ b+c),\\
W_2 &= c + i(a+b) + j(b+c) + k(a+b+c) = (c,\ a+b,\ b+c,\ a+b+c),\\
W_3 &= (a+b) + i(b+c) + j(a+b+c) + k(a+2b+c) = (a+b,\ b+c,\ a+b+c,\ a+2b+c),\\
&\vdots
\end{aligned} \qquad (4.13)$$

dır.

W_n genelleştirilmiş kuaterniyonunu

$$W_n = M_n + u_2;\quad u_2 = iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3} \qquad (4.14)$$

şeklinde de yazabiliriz. M_n skaler kısım, u_2 vektörel kısımdır.

W_n genelleştirilmiş kuaterniyonunun karakteristik denklemi $x^3 - x - 1 = 0$ olup kökleri benzer şekilde $r_1,\ r_2\ ve\ r_3$ dür.

Teorem 4.2.1. W_n genelleştirilmiş kuaterniyonun eşleniği $\overline{W_n}$ olmak üzere

i) $$W_n + \overline{W_n} = 2M_n, \qquad (4.15)$$

ii) $$W_n * \overline{W_n} = M_n^2 + M_{n+1}^2 + M_{n+2}^2 + M_{n+3}^2, \qquad (4.16)$$

iii) $$W_n - iW_{n+1} - jW_{n+2} - kW_{n+3} = M_{n+5} + M_{n+7}. \qquad (4.17)$$

İspat.

i) $W_n = M_n + iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3}$ kuaterniyonun eşleniği

$\overline{W_n} = M_n - iM_{n+1} - jM_{n+2} - kM_{n+3}$ olduğundan

$$W_n + \overline{W_n} = M_n + iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3} + M_n - iM_{n+1} - jM_{n+2} - kM_{n+3}$$
$$= 2M_n \tag{4.18}$$

elde edilir. □

ii) $W_n * \overline{W_n} = \left(M_n + iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3}\right) * \left(M_n - iM_{n+1} - jM_{n+1} - kM_{n+3}\right)$

$$\begin{aligned} &= {M_n}^2 + {M_{n+1}}^2 + {M_{n+2}}^2 + {M_{n+3}}^2 \\ &\quad + i\left(-M_nM_{n+1} + M_nM_{n+1} - M_{n+2}M_{n+3} + M_{n+2}M_{n+3}\right) \\ &\quad + j\left(-M_nM_{n+2} + M_{n+1}M_{n+3} + M_{n+2}M_n - M_{n+3}M_{n+1}\right) \\ &\quad + k\left(-M_nM_{n+3} - M_{n+1}M_{n+2} + M_{n+2}M_{n+1} + M_{n+3}M_n\right) \\ &= {M_n}^2 + {M_{n+1}}^2 + {M_{n+2}}^2 + {M_{n+3}}^2 . \square \end{aligned} \tag{4.19}$$

iii) $W_n - iW_{n+1} - jW_{n+2} - kW_{n+3} = \left(M_n + iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3}\right)$

$$\begin{aligned} &\quad - i\left(M_{n+1} + iM_{n+2} + jM_{n+3} + kM_{n+4}\right) \\ &\quad - j\left(M_{n+2} + iM_{n+3} + jM_{n+4} + kM_{n+5}\right) \\ &\quad - k\left(M_{n+3} + iM_{n+4} + jM_{n+5} + kM_{n+6}\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

olup birim kuaterniyonların çarpım kuralları (3.31) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} W_n - iW_{n+1} - jW_{n+2} - kW_{n+3} &= M_n + iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3} - iM_{n+1} + M_{n+2} - kM_{n+3} + jM_{n+4} \\ &\quad - jM_{n+2} + kM_{n+3} + M_{n+4} - iM_{n+5} \\ &\quad - kM_{n+3} - jM_{n+4} + iM_{n+5} + M_{n+6} \\ &= M_n + M_{n+2} + M_{n+4} + M_{n+6} \\ &= M_n + M_{n+2} + M_{n+1} + M_{n+2} + M_{n+3} + M_{n+4} \\ &= M_n + M_{n+1} + 2M_{n+2} + M_{n+3} + M_{n+4} \\ &= M_{n+3} + 2M_{n+2} + M_{n+3} + M_{n+4} \\ &= 2M_{n+2} + 2M_{n+3} + M_{n+4} \\ &= 2M_{n+5} + M_{n+4} \\ &= M_{n+5} + M_{n+5} + M_{n+4} \\ &= M_{n+5} + M_{n+7} \end{aligned} \tag{4.21}$$

bulunurki ispat tamamlanır. □

Teorem 4.2.2. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(W_n\right)^2 = 2M_n W_n - W_n * \overline{W_n}. \tag{4.22}$$

İspat. $W_n = M_n + iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3}$ kuaterniyonu (4.22) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(W_n\right)^2 = \left(M_n + iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3}\right) * \left(M_n + iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3}\right) \tag{4.23}$$

dir. Birim kuaterniyonların (3.31) çarpım kuralları ile işlem yapılırsa

$$\begin{aligned}\left(W_n\right)^2 &= {M_n}^2 - {M_{n+1}}^2 - {M_{n+2}}^2 - {M_{n+3}}^2 + 2M_n\left(iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3}\right) \\ &= 2{M_n}^2 - {M_n}^2 - {M_{n+1}}^2 - {M_{n+2}}^2 - {M_{n+3}}^2 + 2M_n\left(iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3}\right) \\ &= 2M_n\left(M_n + iM_{n+1} + jM_{n+2} + kM_{n+3}\right) - \left({M_n}^2 + {M_{n+1}}^2 + {M_{n+2}}^2 + {M_{n+3}}^2\right) \\ &= 2M_n W_n - W_n\overline{W_n}\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. □

Şimdide $Q_{v,n}$ genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyonun özel bir hali olan W_n genelleştirilmiş kuaterniyonu için (3.52) nin bir sonucu olarak Binet benzeri formülü yeni bir bakış açısıyla tekrar elde edilecektir.

Sonuç 4.2.1. W_n genelleştirilmiş kuaterniyonu için Binet benzeri formülü

$$W_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + A_3 r_3^n \tag{4.25}$$

dir. Burada

$$A_1 = \frac{\left(M_2 - \left(r_2 + r_3\right)M_1 + r_2 r_3 M_0\right)\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}, \tag{4.26}$$

$$A_2 = \frac{\left(M_2 - (r_1 + r_3)M_1 + r_1 r_3 M_0\right)\left(1 + ir_2 + jr_2^2 + kr_2^3\right)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)}, \tag{4.27}$$

$$A_3 = \frac{\left(M_3 - (r_1 + r_2)M_1 + r_1 r_2 M_0\right)\left(1 + ir_3 + jr_3^2 + kr_3^3\right)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)}. \tag{4.28}$$

İspat. W_n genelleştirilmiş kuaterniyonunda $n = 0,\ n = 1\ ve\ n = 2$ yerine yazılırsa sırasıyla

$$W_0 = A_1 r_1^0 + A_2 r_2^0 + A_3 r_3^0 \tag{4.29}$$

$$W_1 = A_1 r_1^1 + A_2 r_2^1 + A_3 r_3^1 \tag{4.30}$$

$$W_2 = A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2 + A_3 r_3^2 \tag{4.31}$$

elde edilir. Denklem sistemi matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

olur. Sistem eklemeli matris yöntemiyle çözülürse

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & W_0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & W_1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & W_2 \end{array}\right]. \tag{4.33}$$

Birinci satır $-r_2$ ile çarpılıp ikinci satıra ve $-r_2^2$ ile çarpılıp üçüncü satıra eklenirse

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & W_0 \\ r_1-r_2 & 0 & r_3-r_2 & W_1-r_2W_0 \\ r_1^2-r_2^2 & r_2^2-r_2^2 & r_3^2-r_2^2 & W_2-r_2^2W_0 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & W_0 \\ r_1-r_2 & 0 & r_3-r_2 & W_1-r_2W_0 \\ r_1^2-r_2^2 & 0 & r_3^2-r_2^2 & W_2-r_2^2W_0 \end{array}\right]. \tag{4.34}$$

İkinci satır $-(r_3+r_2)$ ile çarpılıp üçüncü satıra eklenir.

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & W_0 \\ r_1-r_2 & 0 & r_3-r_2 & W_1-r_2W_0 \\ r_1^2-r_2^2-(r_3+r_2)(r_1-r_2) & 0 & r_3^2-r_2^2-(r_3-r_2)(r_3+r_2) & -(r_3+r_2)(W_1-r_2W_0)+W_2-r_2^2W_0 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & W_0 \\ r_1-r_2 & 0 & r_3-r_2 & W_1-r_2W_0 \\ r_1^2-r_1r_3-r_1r_2+r_2r_3 & 0 & 0 & -r_3W_1-r_2W_1+r_2r_3W_0+W_2 \end{array}\right]. \tag{4.35}$$

Eklemeli matrisin üçüncü satırı r_1, r_2 *ve* r_3 kökleri aralarındaki bağıntılar dikkate alınarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} r_1^2-r_1r_3-r_1r_2+r_2r_3 &= r_1^2-(r_1r_3+r_1r_2)+r_2r_3 \\ &= (r_1-r_2)(r_1-r_3), \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned} -r_3W_1-r_2W_1+r_2r_3W_0+W_2 &= (-r_3-r_2)W_1+(r_1^2-1)W_0+W_2 \\ &= r_1W_1+(r_1^2-1)W_0+W_2 \\ &= r_1(M_1+iM_2+jM_3+kM_4)+(r_1^2-1)(M_0+iM_1+jM_2+kM_3) \\ &\quad +(M_2+iM_3+jM_4+kM_5), \end{aligned} \tag{4.37}$$

elde edilir. Son eşitlikte

$$M_3=M_0+M_1, \tag{4.38}$$

$$M_4=M_1+M_2, \tag{4.39}$$

$$M_5 = M_2 + M_3 = M_2 + M_0 + M_1 \tag{4.40}$$

değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
-r_3W_1 - r_2W_1 + r_2r_3W_0 + W_2 &= M_0\left(r_1^2 - 1 + i + jr_1 + kr_1^2\right) + M_1\left(r_1 + ir_1^2 + jr_1 + j + kr_1 + kr_1^2\right) \\
&\quad + M_2\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1 + k\right) \\
&= M_0\left(r_1r_2r_3\left(r_1^2 - 1 + i + jr_1 + kr_1^2\right)\right) \\
&\quad + M_1\left(r_1 + ir_1^2 + j\left(r_1^3 - 1\right) + j + k\left(r_1^3 - 1\right) + kr_1^2\right) \\
&\quad + M_2\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + k\left(r_1^3 - 1\right) + k\right) \\
&= M_0\left(r_2r_3\left(r_1^3 - r_1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right)\right) \\
&\quad + M_1\left(r_1 + ir_1^2 + jr_1^3 - j + j + kr_1^3 - k + kr_1^2\right) \\
&\quad + M_2\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right) \\
&= M_0\left(r_2r_3\left(r_1 + 1 - r_1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right)\right) \\
&\quad + M_1\left(r_1 + ir_1^2 + jr_1^3 + k\left(r_1 + 1\right) - k + kr_1^2\right) \\
&\quad + M_2\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right) \\
&= M_0r_2r_3\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right) + M_1r_1\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + k\left(1 + r_1\right)\right) \\
&\quad + M_2\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right) \\
&= M_0r_2r_3\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right) - M_1\left(r_2 + r_3\right)\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right) \\
&\quad + M_2\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right) \\
&= \left(M_2 - \left(r_2 + r_3\right)M_1 + r_2r_3M_0\right)\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right). \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bulunan eşitlikler (4.35) matris de yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)A_1 = \left(M_2 - \left(r_2 + r_3\right)M_1 + r_2r_3M_0\right)\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right)$$

$$A_1 = \frac{\left(M_2 - \left(r_2 + r_3\right)M_1 + r_2r_3M_0\right)\left(1 + ir_1 + jr_1^2 + kr_1^3\right)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} \tag{4.42}$$

dir. Benzer şekilde (4.27) ve (4.28) eşitlikleri elde edilir. □

$n \in \mathbb{N}$ için W_n genelleştirilmiş kuaterniyonun Binet benzeri formülü (4.25) de a, b *ve* c'ye uygun değerler verilirse $\mathcal{P}_n$ Padovan , $\mathcal{Q}_n$ Perrin ve $\mathcal{R}_n$ Van Der Laan kuaterniyonlar için Binet formülleri sırasıyla,

i) $a=1,\ b=1,\ c=1$ için $\mathcal{P}_n = a_1\alpha r_1^n + a_2\beta r_2^n + a_3\gamma r_3^n$ **(Taşçı, 2018),** (4.43)

ii) $a=3,\ b=0,\ c=2$ için $\mathcal{Q}_n = b_1\alpha r_1^n + b_2\beta r_2^n + b_3\gamma r_3^n$, (4.44)

iii) $a=0,\ b=1,\ c=0$ için $\mathcal{R}_n = c_1\alpha r_1^n + c_2\beta r_2^n + c_3\gamma r_3^n$ (4.45)

dir. Burada

$$a_1 = \frac{(r_2-1)(r_3-1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)},\ a_2 = \frac{(r_1-1)(r_3-1)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)},\ a_3 = \frac{(r_1-1)(r_2-1)}{(r_1-r_3)(r_2-r_3)}, \tag{4.46}$$

$$b_1 = \frac{(2+3r_2r_3)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)},\ b_2 = \frac{(2+3r_1r_3)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)},\ b_3 = \frac{(2+3r_1r_2)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}, \tag{4.47}$$

$$c_1 = \frac{r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)},\ c_2 = \frac{r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)},\ c_3 = \frac{r_3}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}, \tag{4.48}$$

$$\alpha = \left(1+ir_1+jr_1^2+kr_1^3\right),\ \beta = \left(1+ir_2+jr_2^2+kr_2^3\right),\ \gamma = \left(1+ir_3+jr_3^2+kr_3^3\right). \tag{4.49}$$

Teorem 4.2.3. W_{m+n} genelleştirilmiş kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$W_{m+n}(t) = \frac{W_m + W_{m+1}t + \left(W_{m+2} - W_m\right)t^2}{1-t^2-t^3} \tag{4.50}$$

dir.

İspat. W_{m+n} genelleştirilmiş kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu $\sum_{n=0}^{\infty} W_{m+n}t^n$ olsun.

W_n genelleştirilmiş kuaterniyonunun Binet benzeri formülü (4.25) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} W_{m+n}t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(A_1r_1^{m+n} + A_2r_2^{m+n} + A_3r_3^{m+n})t^n \\
&= A_1r_1^m\sum_{n=0}^{\infty} r_1^nt^n + A_2r_2^m\sum_{n=0}^{\infty} r_2^nt^n + A_3r_3^m\sum_{n=0}^{\infty} r_3^nt^n \\
&= A_1r_1^m\frac{1}{(1-r_1t)} + A_2r_2^m\frac{1}{(1-r_2t)} + A_3r_3^m\frac{1}{(1-r_3t)} \\
&= \frac{A_1r_1^m(1-r_2t)(1-r_3t) + A_2r_2^m(1-r_1t)(1-r_3t) + A_3r_3^m(1-r_1t)(1-r_2t)}{(1-r_1t)(1-r_2t)(1-r_3t)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{A_1 r_1^m (1 - r_3 t - r_2 t + r_2 r_3 t^2) + A_2 r_2^m (1 - r_3 t - r_1 t + r_1 r_3 t^2)}{(1 - r_1 t)(1 - r_2 t)(1 - r_3 t)}$$

$$+ \frac{A_3 r_3^m (1 - r_2 t - r_1 t + r_1 r_2 t^2)}{(1 - r_1 t)(1 - r_2 t)(1 - r_3 t)}$$

$$= \frac{\left(A_1 r_1^m + A_2 r_2^m + A_3 r_3^m\right) + \left[A_1 r_1^m (-r_3 - r_2) + A_2 r_2^m (-r_3 - r_1) + A_3 r_3^m (-r_1 - r_2)\right] t}{(1 - r_1 t)(1 - r_2 t)(1 - r_3 t)}$$

$$+ \frac{\left(A_1 r_1^m r_2 r_3 + A_2 r_2^m r_1 r_3 + A_3 r_3^m r_1 r_2\right) t^2}{(1 - r_1 t)(1 - r_2 t)(1 - r_3 t)} \tag{4.51}$$

elde edilir. r_1, r_2 *ve* r_3 kökler arasındaki bağıntılar kullanılırsa

$$\left(A_1 r_1^m + A_2 r_2^m + A_3 r_3^m\right) = W_m, \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}\left[A_1 r_1^m (-r_3 - r_2) + A_2 r_2^m (-r_3 - r_1) + A_3 r_3^m (-r_1 - r_2)\right] &= A_1 r_1^m r_1 + A_2 r_2^m r_2 + A_3 r_3^m r_3 \\ &= A_1 r_1^{m+1} + A_2 r_2^{m+1} + A_3 r_3^{m+1} \\ &= W_{m+1}\end{aligned} \tag{4.53}$$

elde edilir. (4.51) de pay kısımına (3.12), (3.13) ve (3.14) eşitlikleri yazılırsa

$$\begin{aligned}A_1 r_1^m r_2 r_3 + A_2 r_2^m r_1 r_3 + A_3 r_3^m r_1 r_2 &= A_1 r_1^m (r_1^2 - 1) + A_2 r_2^m (r_2^2 - 1) + A_3 r_3^m (r_3^2 - 1) \\ &= \left(A_1 r_1^{m+2} + A_2 r_2^{m+2} + A_3 r_3^{m+2}\right) - \left(A_1 r_1^m + A_2 r_2^m + A_3 r_3^m\right) \\ &= W_{m+2} - W_m\end{aligned} \tag{4.54}$$

elde edilir. (4.51) eşitliğin payda kısmı

$$\begin{aligned}(1 - r_1 t)(1 - r_2 t)(1 - r_3 t) &= 1 - r_2 t - r_1 t + r_1 r_2 t^2 - r_3 t + r_2 r_3 t^2 + r_1 r_3 t^2 - r_1 r_2 r_3 t^3 \\ &= 1 - (r_1 + r_2 + r_3) t + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) t^2 - r_1 r_2 r_3 t^3 \\ &= 1 - 0 - t^2 - t^3 \\ &= 1 - t^2 - t^3\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bulunan eşitlikler (4.51) de yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{m+n} t^n = \frac{W_m + W_{m+1} t + \left(W_{m+2} - W_m\right) t^2}{1 - t^2 - t^3} \tag{4.55}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.2.2. $n \in \mathbb{N}$ için W_{m+n} genelleştirilmiş kuaterniyonun üreteç fonksiyonu (4.50) de *m, a, b ve c*' ye uygun değerler verilirse $\mathcal{P}_n$ Padovan, $\mathcal{Q}_n$ Perrin ve $\mathcal{R}_n$ Van Der Laan kuaterniyonları için üreteç fonksiyonları sırasıyla

i) $a=1,\ b=1,\ c=1;\ m=0$ için

$$\mathscr{P}(t)=\frac{(1+i+j+2k)+(1+i+2j+2k)t+(i+j+k)t^2}{1-t^2-t^3}$$ **(Taşçı, 2018),**

ii) $a=3,\ b=0,\ c=2;\ m=0$ için

$$\mathscr{O}(t)=\frac{(3+2j+3k)+(2i+3j+2k)t+(-1+3i+2k)t^2}{1-t^2-t^3},$$

iii) $a=0,\ b=1,\ c=0;\ m=0$ için

$$\mathscr{P}(t)=\frac{(i+k)+(1+j+k)t+jt^2}{1-t^2-t^3}$$

dir.

Teorem 4.2.4. W_{2n+m} genelleştirilmiş kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$W_{2n+m}(t)=\frac{W_m+\left(W_{m+2}-2W_m\right)t+(W_{m+4}-2W_{m+2}+W_m)t^2}{1-2t+t^2-t^3} \tag{4.56}$$

dir.

İspat. W_{2n+m} genelleştirilmiş kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu $\sum_{n=0}^{\infty}W_{2n+m}t^n$ olsun.

W_n genelleştirilmiş kuaterniyonunun Binet benzeri formülü (4.25) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}W_{2n+m}t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(A_1r_1^{2n+m}+A_2r_2^{2n+m}+A_3r_3^{2n+m})t^n \\
&= A_1r_1^m\sum_{n=0}^{\infty}r_1^{2n}t^n+A_2r_2^m\sum_{n=0}^{\infty}r_2^{2n}t^n+A_3r_3^m\sum_{n=0}^{\infty}r_3^{2n}t^n \\
&= A_1r_1^m\frac{1}{\left(1-r_1^2t\right)}+A_2r_2^m\frac{1}{\left(1-r_2^2t\right)}+A_3r_3^m\frac{1}{\left(1-r_3^2t\right)} \\
&= \frac{A_1r_1^m(1-r_2^2t)(1-r_3^2t)+A_2r_2^m\left(1-r_1^2t\right)\left(1-r_3^2t\right)+A_3r_3^m\left(1-r_1^2t\right)\left(1-r_2^2t\right)}{\left(1-r_1^2t\right)\left(1-r_2^2t\right)\left(1-r_3^2t\right)} \\
&= \frac{A_1r_1^m(1-r_3^2t-r_2^2t+r_2^2r_3^2t^2)+A_2r_2^m(1-r_3^2t-r_1^2t+r_1^2r_3^2t^2)}{\left(1-r_1^2t\right)\left(1-r_2^2t\right)\left(1-r_3^2t\right)} \\
&\quad+\frac{A_3r_3^m(1-r_2^2t-r_1^2t+r_1^2r_2^2t^2)}{\left(1-r_1^2t\right)\left(1-r_2^2t\right)\left(1-r_3^2t\right)} \\
&= \frac{\left[A_1r_1^m+A_2r_2^m+A_3r_3^m\right]+\left[A_1r_1^m\left(-r_3^2-r_2^2\right)+A_2r_2^m\left(-r_3^2-r_1^2\right)+A_3r_3^m\left(-r_1^2-r_2^2\right)\right]t}{\left(1-r_1^2t\right)\left(1-r_2^2t\right)\left(1-r_3^2t\right)} \\
&\quad+\frac{\left[A_1r_1^mr_2^2r_3^2+A_2r_2^mr_1^2r_3^2+A_3r_3^mr_1^2r_2^2\right]t^2}{\left(1-r_1^2t\right)\left(1-r_2^2t\right)\left(1-r_3^2t\right)}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

elde edilir. Denklemin pay ve paydasındaki eşitlikler düzenlenirse

$$A_1 r_1^m + A_2 r_2^m + A_3 r_3^m = W_m, \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} A_1 r_1^m r_2^2 r_3^2 + A_2 r_2^m r_1^2 r_3^2 + A_3 r_3^m r_1^2 r_2^2 &= A_1 r_1^m (r_1^2 - 1)^2 + A_2 r_2^m (r_2^2 - 1)^2 + A_3 r_3^m (r_3^2 - 1)^2 \\ &= A_1 r_1^m (r_1^4 - 2r_1^2 + 1) + A_2 r_2^m (r_2^4 - 2r_2^2 + 1) + A_3 r_3^m (r_3^4 - 2r_3^2 + 1) \\ &= \left(A_1 r_1^{m+4} + A_2 r_2^{m+4} + A_3 r_3^{m+4}\right) - 2\left(A_1 r_1^{m+2} + A_2 r_2^{m+2} + A_3 r_3^{m+2}\right) \\ &\quad + \left(A_1 r_1^m + A_2 r_2^m + A_3 r_3^m\right) \\ &= W_{m+4} - 2W_{m+2} + W_m, \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned} A_1 r_1^m \left(-r_3^2 - r_2^2\right) + A_2 r_2^m \left(-r_3^2 - r_1^2\right) + A_3 r_3^m \left(-r_1^2 - r_2^2\right) &= A_1 r_1^m \left(r_1^2 - 2\right) + A_2 r_2^m \left(r_2^2 - 2\right) \\ &\quad + A_3 r_3^m \left(r_3^2 - 2\right) \\ &= \left(A_1 r_1^{m+2} + A_2 r_2^{m+2} + A_3 r_3^{m+2}\right) \\ &\quad - 2\left(A_1 r_1^m + A_2 r_2^m + A_3 r_3^m\right) \\ &= W_{m+2} - 2W_m, \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - r_1^2 t\right)\left(1 - r_2^2 t\right)\left(1 - r_3^2 t\right) &= 1 - r_1^2 t - r_1^2 t - r_3^2 t + r_1^2 r_2^2 t^2 + r_2^2 r_3^2 t^2 + r_1^2 r_3^2 t^2 - r_1^2 r_2^2 r_3^2 t^3 \\ &= 1 - \left(r_1^2 + r_1^2 + r_3^2\right) t + \left(r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_3^2\right) t^2 - r_1^2 r_2^2 r_3^2 t^3 \\ &= 1 - 2t + t^2 - t^3 \end{aligned} \tag{4.61}$$

elde edilir. Eşitlikler (4.57) de yerine yazılırsa,

$$M(t) = \frac{W_m + \left(W_{m+2} - 2W_m\right) t + (W_{m+4} - 2W_{m+2} + W_m) t^2}{1 - 2t + t^2 - t^3} \tag{4.62}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.2.3. Teorem 4.2.4' de *m, a, b ve c* 'ye uygun değerler yazılarak $n \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{P}_{2n}$ Padovan, $\mathscr{Q}_{2n}$ Perrin ve $\mathscr{R}_{2n}$ Van Der Laan kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

i) $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$ ve $m = 0$ için

$$\mathscr{P}_{2n}(t) = \frac{(1 + i + j + 2k) + (-1 - k)t + (1 + j + k)t^2}{1 - 2t + t^2 - t^3},$$

ii) $a = 3,\ b = 0,\ c = 2$ ve $m = 0$ için

$$\mathscr{Q}_{2n}(t) = \frac{\left(3 + 2j + 3k\right) + \left(-4 + 3i - 2j - k\right)t + \left(1 - i + 3j\right)t^2}{1 - 2t + t^2 - t^3},$$

iii) $a=0,\ b=1,\ c=0$ ve $m=0$ için

$$\mathscr{P}_{2n}(t)=\frac{(i+k)+(-i+j-k)t+(1+k)t^2}{1-2t+t^2-t^3}$$

elde edilir.

4.3. Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Toplamsal Özellikleri

Bu alt bölümde W_n genelleştirilmiş kuaterniyonunun; $\mathscr{P}_n$ Padovan, $\mathscr{E}_n$ Perrin ve $\mathscr{R}_n$ Van der Laan kuaterniyonlarınının bazı toplamsal özellikleri verilecektir.

Teorem 4.3.1. $m,n\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=0}^{n}W_{m+i}=W_{m+n+5}-W_{m+4}. \tag{4.63}$$

İspat. W_n genelleştirilmiş kuaterniyonun Binet benzeri formülü (4.25), (4.63) de yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}W_{m+i}&=\sum_{i=0}^{n}A_1r_1^{m+i}+A_2r_2^{m+i}+A_3r_3^{m+i}\\&=A_1r_1^m\left(\frac{1-r_1^{n+1}}{1-r_1}\right)+A_2r_2^m\left(\frac{1-r_2^{n+1}}{1-r_2}\right)+A_3r_3^m\left(\frac{1-r_3^{n+1}}{1-r_3}\right)\\&=\frac{A_1r_1^m(1-r_2)(1-r_3)\left(1-r_1^{n+1}\right)+A_2r_2^m(1-r_1)(1-r_3)\left(1-r_2^{n+1}\right)}{(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)}\\&\quad+\frac{A_3r_3^m(1-r_1)(1-r_2)\left(1-r_3^{n+1}\right)}{(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)}\end{aligned} \tag{4.64}$$

elde edilir. (4.64) eşitliğin pay ve paydasına (3.15), (3.16), (3.17) ve (3.21) değerleri yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}W_{m+i}&=\frac{A_1r_1^mr_1^4\left(1-r_1^{n+1}\right)+A_2r_2^mr_2^4\left(1-r_2^{n+1}\right)+A_3r_3^mr_3^4\left(1-r_3^{n+1}\right)}{-1}\\&=\left(A_1r_1^{m+n+5}+A_2r_2^{m+n+5}+A_3r_3^{m+n+5}\right)-\left(A_1r_1^{m+4}+A_2r_2^{m+4}+A_3r_3^{m+4}\right)\\&=W_{m+n+5}-W_{m+4}\end{aligned} \tag{4.65}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.3.1. W_n genelleştirilmiş kuaterniyonun toplamsal formülü (4.63) de m, a, b *ve* c*'* ye uygun değerler yazılırsa $\mathcal{P}_n$ Padovan, $\mathcal{Q}_n$ Perrin ve $\mathcal{R}_n$ Van Der Laan kuaterniyonları için aşağıdaki toplamsal eşitlikler elde edilir:

i) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{n+5} - (2+3i+4j+5k)$ **(Taşçı, 2018),**

ii) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_{i+1} = \mathcal{P}_{n+6} - (3+4i+5j+7k)$,

iii) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_{i+2} = \mathcal{P}_{n+7} - (4+5i+7j+9k)$,

iv) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{n+5} - (2+5i+5j+7k)$ **(Cerda-Morales, 2017),**

v) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{Q}_{i+1} = \mathcal{Q}_{n+6} - (5+5i+7j+10k)$,

vi) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{Q}_{i+2} = \mathcal{Q}_{n+7} - (5+7i+10j+12k)$,

vii) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}_i = \mathcal{R}_{n+5} - (1+1i+2j+2k)$,

viii) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_{n+6} - (1+2i+2j+3k)$,

ix) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}_{i+2} = \mathcal{R}_{n+7} - (2+2i+3j+4k)$.

Teorem 4.3.2. $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=0}^{n} W_{m+2i} = W_{m+2n+3} - W_{m+1}. \tag{4.66}$$

İspat. W_n genelleştirilmiş kuaterniyonunun Binet benzeri formülü (4.25) toplamsal eşitlikte yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{n} W_{m+2i} = \sum_{i=0}^{n} A_1 r_1^{m+2i} + A_2 r_2^{m+2i} + A_3 r_3^{m+2i}$$

$$= A_1 r_1^m \left(\frac{1-r_1^{2n+2}}{1-r_1^2} \right) + A_2 r_2^m \left(\frac{1-r_2^{2n+2}}{1-r_2^2} \right) + A_3 r_3^m \left(\frac{1-r_3^{2n+2}}{1-r_3^2} \right)$$

$$= \frac{A_1 r_1^m \left(1-r_1^{2n+2}\right)\left(1-r_2^2\right)\left(1-r_3^2\right) + A_2 r_2^m \left(1-r_2^{2n+2}\right)\left(1-r_1^2\right)\left(1-r_3^2\right)}{\left(1-r_1^2\right)\left(1-r_2^2\right)\left(1-r_3^2\right)}$$

$$+\frac{A_3 r_3^m\left(1-r_3^{2n+2}\right)\left(1-r_1^2\right)\left(1-r_2^2\right)}{\left(1-r_1^2\right)\left(1-r_2^2\right)\left(1-r_3^2\right)} \tag{4.67}$$

dir. (4.67) de (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.22) değerleri yazılıp düzenlenirse

$$\sum_{i=0}^{n} W_{m+2i} = \frac{A_1 r_1^m\left(1-r_1^{2n+2}\right)r_1 + A_2 r_2^m\left(1-r_2^{2n+2}\right)r_2 + A_3 r_3^m\left(1-r_3^{2n+2}\right)r_3}{(-1)}$$

$$= \left(A_1 r_1^{m+2n+3} + A_2 r_2^{m+2n+3} + A_3 r_3^{m+2n+3}\right) - \left(A_1 r_1^{m+1} + A_2 r_2^{m+1} + A_3 r_3^{m+1}\right)$$

$$= W_{m+2n+3} - W_{m+1} \tag{4.68}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.3.2. Teorem 4.3.2. de *m, a, b ve c'* ye uygun değerler yazılırsa $\mathcal{P}_n$ Padovan, $\mathcal{Q}_n$ Perrin ve $\mathcal{R}_n$ Van Der Laan kuaterniyonları için aşağıdaki toplamsal eşitlikler elde edilir:

i) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_{2i} = \mathcal{P}_{2n+3} - (1+i+2j+2k)$ **(Taşçı, 2018),**

ii) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_{2i+1} = \mathcal{P}_{2n+4} - (1+2i+2j+3k)$ **(Taşçı, 2018),**

iii) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{Q}_{2i} = \mathcal{Q}_{2n+3} - (2i+3j+2k)$,

iv) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{Q}_{2i+1} = \mathcal{Q}_{2n+4} - (2+3i+2j+5k)$,

v) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}_{2i} = \mathcal{R}_{2n+3} - (1+j+k)$,

vi) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}_{2i+1} = \mathcal{R}_{2n+4} - (i+j+k)$.

Teorem 4.3.3. $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=0}^{n} W_{m+3i} = W_{m+3n+2} - \left(W_{m+2} - W_m\right). \tag{4.69}$$

İspat. Burada tümevarım yöntemi ile ispat yapılacaktır.

$n=0$ için

$$W_m = W_{m+2} - \left(W_{m+2} - W_m\right) = W_m \tag{4.70}$$

ve $n=1$ için

$$\begin{aligned} W_m + W_{m+3} &= W_{m+5} - \left(W_{m+2} - W_m\right) \\ &= W_{m+2} + W_{m+3} - W_{m+2} + W_m \\ &= W_{m+3} + W_m \end{aligned} \tag{4.71}$$

denklem doğrudur.

$\forall n = k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{i=0}^{k} W_{m+3i} = W_{m+3k+2} - \left(W_{m+2} - W_m\right) \tag{4.72}$$

doğru olsun. Böylece

$\forall n = k+1 \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{i=0}^{k+1} W_{m+3i} = W_{m+3k+5} - \left(W_{m+2} - W_m\right) \tag{4.73}$$

denkleminin doğru olduğunu göstermek için (4.73) denklemi yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} W_{m+3i} &= \sum_{i=0}^{k} W_{m+3i} + W_{m+3k+3} \\ &= W_{m+3k+2} - \left(W_{m+2} - W_m\right) + W_{m+3k+3} \\ &= W_{m+3k+2} + W_{m+3k+3} - \left(W_{m+2} - W_m\right) \\ &= W_{m+3k+5} - \left(W_{m+2} - W_m\right) \end{aligned} \tag{4.74}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.3.3. (4.69) toplamsal eşitlikte *m, a, b ve c*' ye uygun değerler yazılırsa $\mathcal{P}_n$ Padovan , $\mathcal{Q}_n$ Perrin ve $\mathcal{R}_n$ Van Der Laan kuaterniyonlarının bazı toplamsal eşitlikleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

i) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_{3i} = \mathcal{P}_{3n+2} - (i + j + k)$ **(Günay ve Taşkara, 2018),**

ii) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_{3i+1} = \mathcal{P}_{3n+3} - (1 + i + j + 2k)$ **(Günay ve Taşkara, 2018),**

iii) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_{3i+2} = \mathcal{P}_{3n+4} - (1 + i + 2j + 2k)$ **(Günay ve Taşkara, 2018),**

iv) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{Q}_{3i} = \mathcal{Q}_{3n+2} - (-1 + 3i + 2k)$,

v) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{Q}_{3i+1} = \mathcal{Q}_{3n+3} - (3 + 2j + 3k)$,

vi) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}_{3i} = \mathcal{R}_{3n+2} - j,$

vii) $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}_{3i+1} = \mathcal{R}_{3n+3} - (i+k).$

Teorem 4.3.4. $\forall\ m,n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=0}^{n} W_{m+5i} = W_{m+5n+1} - \left(W_{m+1} - W_m\right). \tag{4.75}$$

İspat. Burada tümevarım yöntemi ile ispat yapılacaktır.

$n = 0$ için

$$\begin{aligned} W_m &= W_{m+1} - \left(W_{m+1} - W_m\right) \\ &= W_m \end{aligned} \tag{4.76}$$

ve $n = 1$ için

$$\begin{aligned} W_m + W_{m+5} &= W_{m+6} - \left(W_{m+1} - W_m\right) \\ &= W_{m+3} + W_{m+4} - W_{m+1} + W_m \\ &= W_{m+3} + W_{m+1} + W_{m+2} - W_{m+1} + W_m \\ &= W_{m+5} + W_m \end{aligned} \tag{4.77}$$

denklem doğrudur.

$\forall n = k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{i=0}^{k} W_{m+5i} = W_{m+5k+1} - \left(W_{m+1} - W_m\right) \tag{4.78}$$

doğru olsun. Böylece

$\forall n = k+1 \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{i=0}^{k+1} W_{m+5i} = W_{m+5k+6} - \left(W_{m+1} - W_m\right) \tag{4.79}$$

denkleminin doğru olduğu gösterilecektir. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} W_{m+5i} &= \sum_{i=0}^{k} W_{m+5i} + W_{m+5k+5} \\ &= W_{m+5k+1} - \left(W_{m+1} - W_m\right) + W_{m+5k+5} \\ &= W_{m+5k+1} + W_{m+5k+5} - \left(W_{m+1} - W_m\right) \end{aligned} \tag{4.80}$$

dir.

$$W_{m+5k+5} = W_{m+5k+2} + W_{m+5k+3} \tag{4.81}$$

eşitliği (4.80) denkleminde yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{k+1} W_{m+5i} = W_{m+5k+1} + W_{m+5k+2} + W_{m+5k+3} - \left(W_{m+1} - W_m\right)$$
$$= W_{m+5k+4} + W_{m+5k+3} - \left(W_{m+1} - W_m\right)$$
$$= W_{m+5k+6} - \left(W_{m+1} - W_m\right) \tag{4.82}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.3.4. Teorem 4.3.4. 'te *m, a, b ve c* 'ye uygun değerler yazılırsa $\mathscr{P}_n$ Padovan, $\mathscr{Q}_n$ Perrin ve $\mathscr{R}_n$ Van der Laan kuaterniyonlarının bazı toplamsal eşitlikleri elde edilir:

i) $\sum_{i=0}^{n} \mathscr{P}_{5i} = \mathscr{P}_{5n+1} - j$ **(Günay ve Taşkara, 2018),**

ii) $\sum_{i=0}^{n} \mathscr{P}_{5i+1} = \mathscr{P}_{5n+2} - (i+k)$,

iii) $\sum_{i=0}^{n} \mathscr{Q}_{5i} = \mathscr{Q}_{5n+1} - (-3+2i+j-k)$,

iv) $\sum_{i=0}^{n} \mathscr{Q}_{5i+1} = \mathscr{Q}_{5n+2} - (2+i-j+3k)$,

v) $\sum_{i=0}^{n} \mathscr{R}_{5i} = \mathscr{R}_{5n+1} - (1-i+j)$,

vi) $\sum_{i=0}^{n} \mathscr{R}_{5i+1} = \mathscr{R}_{5n+2} - (-1+i)$

dir.

Teorem 4.3.5. $\forall\, m,n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} W_{m+i} = W_{m+3n}. \tag{4.83}$$

İspat. W_n genelleştirilmiş kuaterniyonunun Binet benzeri formülü (4.25) eşitliği, (4.83) de yerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} W_{m+i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(A_1 r_1^{m+i} + A_2 r_2^{m+i} + A_3 r_3^{m+i}\right)$$
$$= A_1 r_1^{m} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} r_1^{i} + A_2 r_2^{m} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} r_2^{i} + A_3 r_3^{m} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} r_3^{i}$$
$$= A_1 r_1^{m} (1+r_1)^{n} + A_2 r_2^{m} (1+r_2)^{n} + A_3 r_3^{m} (1+r_3)^{n} \tag{4.84}$$

dir. (3.11) eşitliği (4.84) de yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}W_{m+i} = A_1 r_1^{m} r_1^{3n} + A_2 r_2^{m} r_2^{3n} + A_3 r_3^{m} r_3^{3n}$$
$$= A_1 r_1^{m+3n} + A_2 r_2^{m+3n} + A_3 r_3^{m+3n}$$
$$= W_{m+3n} \tag{4.85}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.3.5. Teorem 4.3.5.' de *m, a, b ve c* ' ye uygun değerler yerine yazılırsa $\mathcal{P}_n$ Padovan, Perrin ve $\mathcal{R}_n$ Van der Laan kuaterniyonlarının binomiyel toplamları aşağıdaki şekilde elde edilir:

i) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{3n}$ **(Günay ve Taşkara, 2018),**

ii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{3n}$,

iii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_{3n}$.

4.4. Padovan, Perrin ve Van Der Laan Kuaterniyonlar Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde $\mathcal{P}_n$ Padovan, $\mathcal{Q}_n$ Perrin ve $\mathcal{R}_n$ Van der Laan kuaterniyonları arasındaki bağıntıları verilecektir.

Teorem 4.4.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{Q}_{n+1} = 3\mathcal{R}_{n+2} - \mathcal{R}_n. \tag{4.86}$$

İspat. $\mathcal{Q}_n$ Perrin kuaterniyonun (4.44) Binet benzeri formülünden

$$\mathcal{Q}_{n+1} = b_1\alpha r_1^{n+1} + b_2\beta r_2^{n+1} + b_3\gamma r_3^{n+1} \tag{4.87}$$

dir. Burada

$$b_1 = \frac{(2+3r_2r_3)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)},\quad b_2 = \frac{(2+3r_1r_3)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)},\quad b_3 = \frac{(2+3r_1r_2)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}, \tag{4.88}$$

$$\alpha = 1+ir_1+jr_1^{2}+kr_1^{3},\ \beta = 1+ir_2+jr_2^{2}+kr_2^{3},\ \gamma = 1+ir_3+jr_3^{2}+kr_3^{3} \tag{4.89}$$

dir. r_1, r_2 *ve* r_3 kökleri arasındaki (3.12), (3.13) ve (3.14) eşitlikleri (4.87) denklemine yazılırsa

$$\mathcal{Q}_{n+1} = \frac{\left(2+3(r_1^2-1)\right)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\alpha r_1^{n+1} + \frac{\left(2+3(r_2^2-1)\right)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\beta r_2^{n+1} + \frac{\left(2+3(r_3^2-1)\right)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\gamma r_3^{n+1}$$

$$= 3\left(\frac{r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\alpha r_1^{n+2} + \frac{r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\beta r_2^{n+2} + \frac{r_3}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\gamma r_3^{n+2}\right)$$

$$-\left(\frac{r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\alpha r_1^{n} + \frac{r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\beta r_2^{n} + \frac{r_3}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\gamma r_3^{n}\right)$$

$$= 3\mathcal{P}_{n+2} - \mathcal{P}_n \tag{4.90}$$

elde edilir. □

Teorem 4.4.2. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{P}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+1} = 4\mathcal{P}_{n+2} + \mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_n. \tag{4.91}$$

İspat. $\mathcal{P}_n$ Padovan ve $\mathcal{Q}_n$ Perrin kuaterniyonların (4.44), (4.45) Binet benzeri formülleri (4.91) de yerine yazılırsa

$$\mathcal{P}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+1} = \left(\frac{(r_2-1)(r_3-1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\alpha r_1^{n+1} + \frac{(r_1-1)(r_3-1)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\beta r_2^{n+1} + \frac{(r_1-1)(r_2-1)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\gamma r_3^{n+1}\right)$$

$$+\left(\frac{(2+3r_2r_3)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\alpha r_1^{n+1} + \frac{(2+3r_1r_3)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\beta r_2^{n+1} + \frac{(2+3r_1r_2)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\gamma r_3^{n+1}\right) \tag{4.92}$$

dir. Yukarıdaki eşitliğin pay ve paydasına (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16) ve (3.17) eşitlikleri yazılırsa

$$\mathcal{P}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+1} = \left(\frac{(r_1^2+r_1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\alpha r_1^{n+1} + \frac{(r_2^2+r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\beta r_2^{n+1} + \frac{(r_3^2+r_3)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\gamma r_3^{n+1}\right)$$

$$+\left(\frac{(2+3(r_1^2-1))}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\alpha r_1^{n+1} + \frac{(2+3(r_2^2-1))}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\beta r_2^{n+1} + \frac{(2+3(r_3^2-1))}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\gamma r_3^{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{(4r_1^2+r_1-1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\alpha r_1^{n+1} + \frac{(4r_2^2+r_2-1)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\beta r_2^{n+1} + \frac{(4r_3^2+r_3-1)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\gamma r_3^{n+1}\right)$$

$$= 4\left(\frac{r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\alpha r_1^{n+2} + \frac{r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\beta r_2^{n+2} + \frac{r_3}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\gamma r_3^{n+2}\right)$$

$$+\left(\frac{r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\alpha r_1^{n+1} + \frac{r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\beta r_2^{n+1} + \frac{r_3}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\gamma r_3^{n+1}\right)$$

$$-\left(\frac{r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\alpha r_1^{n} + \frac{r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\beta r_2^{n} + \frac{r_3}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\gamma r_3^{n}\right)$$

$$= 4\mathcal{P}_{n+2} + \mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_n \tag{4.93}$$

elde edilir. □

Teorem 4.4.3. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{3}\left(\mathcal{Q}_n + \mathcal{R}_{n+2} + 2\mathcal{R}_n\right). \tag{4.94}$$

İspat. Burada tümevarım yöntemiyle ispat yapılacaktır.

$n = 0$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0 &= \frac{1}{3}\left(\mathcal{Q}_0 + \mathcal{R}_2 + 2\mathcal{R}_0\right)\\ &= \frac{1}{3}\left[(3,0,2,3) + (0,1,1,1) + 2(0,1,0,1)\right]\\ &= (1,1,1,2)\end{aligned} \tag{4.95}$$

ve $n = 1$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \frac{1}{3}\left(\mathcal{Q}_1 + \mathcal{R}_3 + 2\mathcal{R}_1\right)\\ &= \frac{1}{3}\left[(0,2,3,2) + (1,1,1,2) + 2(1,0,1,1)\right]\\ &= (1,1,2,2)\end{aligned} \tag{4.96}$$

denklem doğrudur. $n = k$ için

$$\mathcal{P}_k = \frac{1}{3}\left(\mathcal{Q}_k + \mathcal{R}_{k+2} + 2\mathcal{R}_k\right) \tag{4.97}$$

denklem doğru olsun. $n = k+1$ doğru olduğu gösterilecektir. Böylece

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{k+1} &= \mathcal{P}_{k+3} - \mathcal{P}_k\\ &= \frac{1}{3}\left(\mathcal{Q}_{k+3} + \mathcal{R}_{k+5} + 2\mathcal{R}_{k+3}\right) - \frac{1}{3}\left(\mathcal{Q}_k + \mathcal{R}_{k+2} + 2\mathcal{R}_k\right)\\ &= \frac{1}{3}\left[\left(\mathcal{Q}_{k+3} - \mathcal{Q}_k\right) + \left(\mathcal{R}_{k+5} - \mathcal{R}_{k+2}\right) + 2\left(\mathcal{R}_{k+3} - \mathcal{R}_k\right)\right]\\ &= \frac{1}{3}\left(\mathcal{Q}_{k+1} + \mathcal{R}_{k+3} + 2\mathcal{R}_{k+1}\right)\end{aligned} \tag{4.98}$$

dir. □

Teorem 4.4.4. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}_i = \mathcal{P}_{n+2} - \mathcal{P}_1. \tag{4.99}$$

İspat. Van Der Laan kuaterniyonun Binet benzeri formülü (4.45) göz önüne alınırsa,

$$\sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}_i = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{r_1 \alpha r_1^i}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} + \frac{r_2 \beta r_2^i}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} + \frac{r_3 \gamma r_3^i}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{r_1\alpha r_1^i}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\right)+\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{r_2\beta r_2^i}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\right)+\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{r_3\gamma r_3^i}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\right)$$

$$= \frac{r_1\alpha\left(1-r_1^{n+1}\right)}{(1-r_1)(r_1-r_2)(r_1-r_3)}+\frac{r_2\beta\left(1-r_2^{n+1}\right)}{(1-r_2)(r_2-r_1)(r_2-r_3)}+\frac{r_3\gamma\left(1-r_3^{n+1}\right)}{(1-r_3)(r_3-r_1)(r_3-r_2)}$$

$$= \frac{(1-r_2)(1-r_3)r_1\alpha\left(1-r_1^{n+1}\right)}{(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)(r_1-r_2)(r_1-r_3)}+\frac{(1-r_1)(1-r_3)r_2\beta\left(1-r_2^{n+1}\right)}{(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)(r_2-r_1)(r_2-r_3)}$$

$$+\frac{(1-r_1)(1-r_2)r_3\gamma\left(1-r_3^{n+1}\right)}{(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)(r_3-r_1)(r_3-r_2)} \qquad (4.100)$$

dir. (4.100) eşitliğinin paydasına (3.21) değeri yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\sum_{i=0}^{n}\mathscr{P}_i=\left[\frac{(r_2-1)(r_3-1)\alpha r_1^{n+2}}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}+\frac{(r_1-1)(r_3-1)\beta r_2^{n+2}}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}+\frac{(r_1-1)(r_2-1)\gamma r_3^{n+2}}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\right]$$

$$-\left[\frac{(r_2-1)(r_3-1)\alpha r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}+\frac{(r_1-1)(r_3-1)\beta r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}+\frac{(r_1-1)(r_2-1)\gamma r_3}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}\right]$$

$$=\mathscr{P}_{n+2}-\mathscr{P}_1 \qquad (4.101)$$

elde edilir. □

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada genelleştirilmiş Tribonacci sayı dizilerinden yola çıkarak, bu sayı dizilerinin özel bir sınıfı olan üçüncü mertebeden genelleştirilmiş M_n sayı dizisini tanımlayıp üreteç fonksiyonu ve Binet benzeri formülü verilmiştir. Daha sonra bu sayı dizilerinden yararlanarak üçüncü mertebeden W_n genelleştirilmiş kuaterniyon tanımlanıp, bu kuaterniyonun özellikleri incelenmiştir. Sonuç olarak W_n kuaterniyonu literatürde bilinen üçüncü mertebeden sayı dizisinden elde edilen Padovan, Perrin ve Van Der Laan kuaterniyonlarının yeni bir genellemesi olarak elde edilmiştir. Ayrıca bu kuaterniyonlar, arasındaki bazı ilişkiler de incelenmiştir.

5.2 Öneriler

W_n genelleştirilmiş kuaterniyonların matris temsilleri tanımlanarak yeni sonuçlar elde etmek için araştırma yapılabilir. Ayrıca bu sayı dizilerinin Sedeniyon ve Oktaniyonları da incelenebilir.

KAYNAKLAR

Altın Oran, 2011, Evrenin Matematiği, http://www.bilgicik.com/yazi/altin-oran-evrenin-matematigi [Ziyaret Tarihi: 25 Nisan 2019].

Akkuş, İ. ve Kızılaslan, G., 2018, On Some Properties of Tribonacci Quaternions, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta,* 26 (3), 5–20.

Akyiğit, M., Kösal, H. H. ve Tosun, M., 2013, Split Fibonacci Quaternions, *Advances İn Applied Clifford Algebras*, 23, 535-545.

Akyiğit, M., Kösal, H. H. ve Tosun, M., 2014, Fibonacci Generalized Quaternions, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 24, 631-641.

Baek, J., Jeon, H., Kım, G. ve Han S., 2017, Visualizing Quaternion Multiplication, *IEEE Access*, 5, 8948-8955.

Bolat, C. ve Köse, H., 2010, On the Properties of k-Fibonacci Numbers, *Int. J. Contemp. Math Science,* 5 (22), 1097-1105.

Catalani, M., 2002, Identities for Tribonacci-Related Sequences, *Cornell University Library*, http://arxiv.org/abs/math/0209179v1.

Catarino, P., 2016, The Modified Pell and The Modified k- Pell Quaternions and Octonions*, Adv. Appl. Clifford Algebras*, 26, 577-590.

Cerda-Morales, G., 2017, On a Generalization for Tribonacci Quaternions, *Mediterr. J. Math.*,14, 239.

Cerda-Morales, G., 2017, Identities for Third Order Jacobsthal Quaternions, *Adv. App. Clifford Algebras*, 27, 1043-1053.

Cook, C.K. ve Bacon, M. R., 2013, Some İdentities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers Satisfying Higher Order Recurrence Relations, *Annales Mathematicae et Informaticae,* 41, 27-39.

Coşkun, A., 2013, Cordonnier, Perrin ve Lan Der Laan Sayıları ile Tanımlı Circulant Matrisler, Yüksek Lisans Tezi, *Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı*, Konya, 6-52.

Çimen, C. B. ve İpek, A., 2016, On Pell Quaternions and Pell- Lucas Quaternions, *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 26, 39-51.

Falcon, S. ve Plaza, A., 2006, On The Fibonacci k-Numbers, *Chaos Solitons and Fractals*, 32, 1615-1624.

Falcon, S., 2011, On The k-Lucas Numbers, *Int. J. Contemp. Math. Sciences,* 6 (21), 1039-1050.

Feinberg, M., 1963, Fibonacci-Tribonacci, *The Fibonacci Quarterly*, 1, 71-74.

Frontczak, R., 2018, Sums of Tribonacci and Tribonacci-Lucas Numbers, *International Journal of Mathematical Analysis*, 12 (1), 19-24.

Güleç, H. H. ve Taşkara, N., 2009, On The Properties of Fibonacci Numbers with Binomial Coefficients, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4 (25), 1251-1256.

Günay, H. ve Taşkara, N., 2018, On The Properties of Padovan Quaternion, *International Conference on Mathematical Studies and Appl, (ICMSA)*, Karaman.

Hacısalihoğlu, H. H., 1983, Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, *Gazi Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Yayınları*, Ankara, 78-138.

Halıcı, S., 2012, On Fibonacci Quaternions, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 22, 321-327.

Halıcı, S., 2017, On a Generalization for Fibonacci Quaternions, *Chaos, Solitons and Fractals*, 98, 178-182.

Hamilton, W., 1866, Elements of Quaternions, *U.K: Cambridge Univ. Press*, Cambridge.

Horadam, A. F., 1963, Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions, *Amer. Math. Monthly*, 70, 289-291.

Horadam, A. F., 1965, Generating Functions for Powers of a Certain Generalized Sequence of Numbers, *Duke Math. J.*, 32 (3), 437-446.

Horadam A. F., 1996, Jacobsthal Representation Numbers, *Fibonacci Quarterly*, 34 (1), 40–54.

Iakin, A. L., 1977, Generalized Quaternions with Quaternion Components, *Fibonacci Q.*, 15, 225-230.

Iyer, M. R., 1969, Some Results on Fibonacci Quaternions, *Fibonacci Q.*, 7, 201-210.

Kızılateş, C., Catarino, P. ve Tuğlu, N., 2019, On The Bicomplax Generalized Tribonacci Quaternions, *Mathematics*, 7 (1), 80.

Koçer, E. G. ve Tuğlu, N., 2007, The Binet Formulas for the Pell and Pell-Lucas p-Numbers, *Ars Combınatoria*, 85, 3-17.

Koshy, T., 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, *A Wiley-Interscience Publication*, U.S.A.

Kuaterniyonlar, Köprüde Gelen İlham, https://www.matematiksel.org/koprude-gelen-ilham-kuaterniyonlar/ [Ziyaret Tarihi 25 Nisan 2019].

Lucas, E., 1876, Sur La Recherche De Grands Nombres Premiers, *A. F. Congre`s Du Clerment-Ferrand*, 61–68.

Padovan, R., 2002, Private Correspondence with A.F. Horadam, *et seq.*

Perrin, R., 1899, Query 1484. *L'Interme´diaire des Math*, 6, 76–77.

Pethe, S., 1988, Some İdentities for Tribonacci Sequences. *Fibonacci Q.,* 26 (2), 144-151.

Polatlı, E., 2015, A Generalization of Fibonacci and Lucas Quaternions, *Adv.Appl. Clifford Algebras*, 26, 719-730.

Ramirez, J., 2015, Some Combinatorial Properties of the k-Fibonacci and the k-Lucas Quaternions, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta*, 23 (2), 201–212.

Sangwine, Stephen J., Ell, Todd A. ve Le Bihan, N., 2011, Fundamental Represantations and Algebraic Properties of Biquaternions or Complexified Quaternions, *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 21, 607 - 636.

Shannon, A.G. ve Horadam, A. F., 1971, Generating Functions for Powers of Third Order Recurrence Sequences, *Duke Math. J*., 38 (4), 791-794.

Shannon, A.G. ve Horadam. A.F., 1972, Some Properties Of Third- Order Recurrence Relations. *Fibonacci Q.* 10 (2), 135-146.

Shannon, A. G., Anderson, P. G. ve Horadam, A. F., 2006, Properties of Cordonnier, Perrin and Van Der Laan Numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37 (7), 825-831.

Solak, S. ve Bahşi, M., 2011, On the Spectral Norms of Hankel Matrices with Fibonacci and Lucas Numbers, *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 12 (1), 71-76.

Szynal-Liana, A. ve Wloch, I., 2016, The Pell Quaternions and the Pell Octonions, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 26, 435-440.

Taşcı, D., 2018, Padovan ve Pell-Padovan Quaternions, *Journal of Science and Arts,* 1 (42), 125-132.

Uslu, K., Taskara, N. ve Köse, H., 2010, The Generalized k-Fibonacci and k-Lucas Numbers, *Ars Combınatorıa*, 99, 25-32.

Uygun, Ş. ve Tümbaş, A., 2018, Generalized k-Jacobsthal Sequence, *Asıan Journal of Mathematics and Physics*, 2 (2), 45-50.

Yalavigi, C.C., 1972, Properties of Tribonacci Numbers, *Fibonacci Q*., 10 (3), 231-246.

Yazlık, Y. ve Taşkara, N., 2012, A Note on Generalized k-Horadam Sequence, *Computers and Mathematics with Applications*, 63, 36-41.

Yazlık, Y., Köme, C. ve Madhusudanan, V., 2018, A New Generalization of Fibonacci and Lucas p-Numbers, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 25 (4), 657-669.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hasan GÜNAY
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Konya 1.03.1989
Telefon : 535 979 6671
e-mail : hasangunay1840@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Karatay Lisesi, Karatay, Konya	2006
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2013
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2019

YABANCI DİLLER

İngilizce

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2017	Gençlik ve Spor Bakanlığı	Memur

YAYINLAR

Hasan GUNAY and Necati TASKARA, 2018, On the Some Propertıes of Padovan Quaternion, International Conference on Mathematical Studies and Applications, Karaman Turkey.