T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY- STEKLOV OPERATÖRLERİ VE NORM EŞİTSİZLİKLERİ

Abdulkadir KARAKAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR
HAZİRAN-2008

AMAÇ ..... **i**

ÖZET ..... **ii**

ABSTRACT ..... **iii**

ÖN SÖZ ..... **iv**

BÖLÜM 1 ..... **1**

1.1.Temel Tanimlar ve Teoremler: 1
1.2.Vektör Uzayları 11
1.3.Normlu Vektör Uzayları 12
1.4.İç Çarpım ve Hilbert uzayları 15
1.5.Lineer Operatörler 20

BÖLÜM 2 ..... **31**

2.1 Küme sınıfları 31
2.2. Ölçüler 34
2.3 Ölçülebilir Fonksiyonlar 38

BÖLÜM 3 ..... **48**

3.1. L^p Uzayları 48
3.2. L^p Uzayında Yakınsaklık. 54

BÖLÜM 4 ..... **56**

4.1 $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev Uzayı ve Gömülme Teoremleri 56
4.2.Ağırlıklı Lebesque Uzayları 59

BÖLÜM 5 ..... **61**

5.1.Hardy Eşitsizlikleri 61
5.2.Hardy operatörleri ve Eşitsizlikleri 66

BÖLÜM 6 ..... **74**

6.1.Hardy-Steklov Operatörleri 74
6.2.Hardy-Steklov Operatörleri İçin C'nin Bulunması 77

KAYNAKLAR **85**

ÖZGEÇMİŞ **87**

AMAÇ

Bu çalışmada amaç; Hardy operatörlerini tanımlamak, bu operatörler üzerinde tanımlanan norm eşitsizlikleri niçin en küçük C sabitinin bulunması yöntemlerini tanımlamak, Ağırlıklı ve Ağırlıksız Hardy-Steklov operatörleri için üzerinde tanımlanan norm eşitsizlikleri için en küçük C sabitini bulmak.

ÖZET

Bu çalışmada Hardy tipi eşitsizlikler ve Hardy tipli operatörler hakkında bilgi verilmiş ve ağırlıklı Lebesque uzayları üzerinde tanımlanmış normlar ile Hardy operatörlerinin ve bunların conjugate fonksiyonları ile Riemann Liouville, Weyle, Kernel ve Hardy-Steklov operatörleri arasındaki bağlantı için tanımlanan norm eşitsizlikleriyle bu operatörlerin sınırlı oldukları gösterilmiştir. Ve ağırlıksız Hardy-Steklov operatörleri üzerinde tanımlanan norm eşitsizlikleri için en küçük C sabitinin bulunması araştırılmıştır.

Birinci bölümde diğer bölümlerde kullanılmak üzere bazı tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılmak üzere bazı özel eşitsizlikler ve Lebesgue ölçümü ve integrali verilmiştir.

Üçüncü bölümde Lebesgue uzayları ve Sobolev uzayları tanımlanarak aralarındaki eşitsizlikler tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde Sobolev gömülme teoremleri, ağırlıklı Lebesque uzayları norm eşitsizlikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde ağırlıklı ve ağırlıksız Hardy Eşitsizlikleri ile aralarındaki bağlantılar belirtilmiştir.

Altıncı bölümde esas kısmını oluşturan ağırlıklı, ağırlıksız Hardy-Steklov operatörleri üzerinde tanımlanan norm eşitsizlikleri için en küçük C sabitinin bulunması araştırılmıştır.

ABSTRACT

In this study, has given information about Hardy-type inequalities and Hardy-type operators; norms defined on weighted Lebesgue spaces and Hardy operators and conjugate of these functions and relation between normed inequalities defined with Riemann Liouville, Weyle, Kernel and Hardy-Steklov operators and showed these operators are bounded. And investigated smallest C constant for normed inequalities defined on nonweighted Hardy-Steklov operators.

In the first chapter, introduced some terms and notations for using following chapters.

In the second chapter, some special inequalities for using following chapters and Lebesgue measure and integral have given.

In the third chapter, Lebesgue and Sobolev spaces and inequalities between them defined.

In the fourth chapter, Sobolev embedding theorems and weighted-Lebesgue space with norm inequalities has given.

In the fifth chapter, weighted and non-weighted Hardy inequalities and relations between them defined.

In the final chapter, investigated to find smallest C constant for normed inequalities defined on weighted and nonweighted Hardy-Steklov operators.

ÖNSÖZ

G.H Hardy tarafından 1920 de $\alpha > 0$, $f(x) \geq 0, p > 1$ ve $\int_a^\infty f^p(x)dx < \infty$

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{x} \int_a^x f(t)dt \right) dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^\infty f^p(x)dx \qquad (5.1.1)$$

eşitsizliği elde edilmiştir. G.H. Hardy'nin aslında temel amacı $\{a_n\}$ negatif olmayan reel terimli bir dizi olmak üzere [10].

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m{}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n{}^2 \right)^{1/2}$$

şeklindeki Hilbert eşitsizliğinin yeni ve daha basit bir ispatını bulmaktı. 1925 yılındaki makalesinde p>1 ve $a_n \geq 0$ için [11].

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^p \qquad (5.1.2)$$

şeklindeki eşitsizliğini ortaya koymuştur. Aynı zamanda (5.1.1) eşitsizliğinin gerçekte f; herhangi sınırlı $(0,x)$ aralığında integrallenebilir p>1 ve f^p $(0,\infty)$ aralığında integrallenebilir ise;

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx \qquad (5.1.3)$$

şeklinde eşitsizliğinin sağlandığı ispatlanmıştır.

Bu eşitsizlik Hardy's eşitsizliği olarak bilinir ve bu belirttiğimiz eşitsizlik üzerinden daha genel integral eşitsizliklerinin incelenmesi için büyük bir model olmuştur. G.H Hardy (5.1.3) eşitsizliğinden sonraki ağırlık fonksiyonlarıyla ilk ünlü eşitsizliği;

$p > 1$, $\varepsilon < p-1$ ve f ölçülebilir negatif olmayan fonksiyonlar için $\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon} \right)^p$ mümkün olan en iyi sabit sayı olmak üzere;

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p x^\varepsilon dx \leq \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon} \right)^p \int_0^\infty f^p(x).x^\varepsilon dx \qquad (5.1.4)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Bu eşitsizliğin dual versiyonu (5.1.4) eşitsizliğinden $p > 1$, $\varepsilon > p-1$ olmak üzere;

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_x^{\infty} f(t)dt\right)^p x^{\varepsilon}dx \le \left(\frac{p}{\varepsilon+1-p}\right)^p \int_0^{\infty} f^p(x).x^{\varepsilon}dx \qquad (5.1.5)$$

şeklinde göstermiştir.

Daha sonraki yıllarda (5.1.5) eşitsizliği daha da genelleştirilerek $1 \le p \le q \le \infty$ ve **u** ile **v** negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere;

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^{x} f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \le c.\left(\int_0^{\infty}\left(f(x).v(x)\right)^p dx\right)^{1/p} \qquad (5.1.7)$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeterli koşul $0 < r < \infty$ için;

$$A := \sup_{r>0}\left(\int_r^{\infty} u^q(x)\,dx\right)^{1/q}.\left(\int_0^{r} v^{-p'}(x)\,dx\right)^{1/p'} < \infty \qquad (5.1.8)$$

Muckhenhoupt koşulunu sağlayan, Ağırlıklı Hardy eşitsizliği elde edilmiştir.

Bu bölümde çalışmamızın temeli olan Hardy - Steklov operatörlerini ve bu operatörler üzerinde tanımlı norm eşitsizliklerini elde edilmesi için;

$a = a(x), b = b(x), [0,\infty]$ aralığında $0 < x < \infty$, $a(0) = b(0) = 0$, $a(x) < b(x)$ ve $a(\infty) = b(\infty)$ şeklinde tanımlanan sürekli artan diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$0 < t < \infty \ , \ f = f(t) \ge 0 \ ;$$

$$(Tf)(x) : = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \qquad (6.1.2)$$

şeklindeki Hardy- Steklov operatörü için,

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_0^{\infty} f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p} \ , 0<p,q<\infty \ , \ f \ge 0 \quad (6.2.9)$$

eşitsizliğini u ve v ağırlıklı fonksiyonları için, öyle bir C sabiti vardır ki (6.2.9) denklemini sağlar ancak ve ancak $1 < p \le q < \infty$ için;

$$K : = \sup\left(\int_t^{x} u(s)\,ds\right)^{1/q}\left(\int_{a(x)}^{b(t)} v^{1-p'}(s)\,ds\right)^{1/p'} < \infty \qquad (6.2.11)$$

denklemini sağlaması gerekir. Burada supremum tüm x'ler için alınmıştır. Ve $t \le x$'dir. Ve $a(x) < b(t)$ dir. En iyi sabit;

$$K \le C \le 2p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}K \qquad [12].$$

olacak şekilde en iyi sabitlerin bulunması yöntemleri verilmiştir.

BÖLÜM 1

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel Tanım ve Teoremler verilecektir.

1.1.Temel Tanımlar ve Teoremler:

Tanım:1.1.1

$X \neq Ø$ küme olsun.

$d: XxX \to \mathbb{R}^+, \quad (x,y) \to d(x,y)$

fonksiyonu için

(d1) $\forall x,y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$

(d2) $\forall x,y \in X$ için $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x = y$

(d3) $\forall x,y \in X$ için $d(x,y)=d(y,x)$

(d4) $\forall x,y,z \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metriktir, ve (X,d) ikilisine bir metrik uzay denir. (d4) aksiyomunu tekrar kullanarak

$\forall x, y, z, z_1, ..., z_n \in X$ için

$d(x,y) \leq d(x,z_1) + d(z_2,y)$

$\leq d(x,z_1) + d(z_1,z_2) + d(z_2,y)$

$d(x,y) \leq d(x,z_1) + d(z_1,z_2) + d(z_2,z_3) + \ldots + d(z_n,y)$ yazılabilir.

Buna da genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği denir.

Önerme:1.1.2

(X,d) Bir metrik uzay ise; $\forall x \in X$ için;

$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ (ters üçgen eşitsizliği)

eşitsizliği doğrudur.

Örnek:1.1.3

$X = \mathbb{R}$ Olmak üzere;

$$\text{d:XxX} \to \mathbb{R}^+ \text{ , (x,y)} \to d(x,y) = |x-y|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümüne $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir, ve buna da $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği denir.

Örnek:1.1.4

$X = \mathbb{N}$ Ve $m,n \in \mathbb{N}$ ise;

$$d(m,n) = \begin{cases} o & \text{;eğer m = n} \\ \dfrac{1}{1+\min\{m,n\}} & \text{;eğer m} \neq \text{n} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir metriktir. (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Örnek:1.1.5

$\text{X} \neq \text{Ø}$ olmak üzere bir küme B(X)'de X'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı bütün sınırlı fonksiyonların uzayı olsun.

$$d : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}^+,$$

$$(f,g) \to d(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| \text{ :t} \in \text{X}\}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümüne B(X) üzerinde bir metriktir.

Örnek:1.1.6

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a,b \in \mathbb{R})$ üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların kümesi $C[a,b]$ olsun ve $f,g \in C[a,b]$ için;

$$d : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $C[a,b]$ üzerinde bir metriktir.

Örnek:1.1.7

$K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in K$ olan

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ \text{y=}(y_1, y_2, ..., y_n)$$

şeklindeki bütün dizilerin kümesi K^{∞} olsun. (X,d)

$$\ell_p = \left\{ x=(x_n)\in K:\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty \right\},\ 1\le p<\infty$$

dizi uzayı üzerinde tanımlanan $x=(x_n),\ y=(y_n)\in \ell_p,$ için

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad (1\le p<\infty)$$

dönüşümü ℓ_p uzayı üzerinde bir metriktir denir. Bu metrik $p=2$ için (ℓ_p,d) şeklindeki Hilbert uzayını oluşturur.

Tanım:1.1.8

(X,d) bir metrik uzay olsun. $x\in X$ Ve $r>0$ $(r\in R)$ sayısı verilsin.

$$B(x_0,r)=\{x\in X:\ d(x,x_o)<r\};\ \text{(açık yuvar)}$$

$$B(x_0,r)=\{x\in X:\ d(x,x_o)\le r\};\ \text{(kapalı yuvar)}$$

$$B(x_0,r)=\{x\in X:\ d(x,x_o)=r\};\ \text{(yuvar yüzeyi)}$$

kümelerine sırasıyla x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi denir.

$B(x_0,r)=\{x\in X:\ d(x,x_o)<r\};(r-\text{Komşuluğu}),\ B(x_o,r)/\{x_o\}$ kümesine de $x_o\in X$ noktasının delinmiş komşuluğu denir.

Tanım:1.1.9

(X,d) bir Metrik uzay olsun. $A\subset X$ alt kümesi ve $x\in X$ noktası verilsin. Eğer her $\varepsilon>0$ için $B(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$ ise x noktasına A'nın bir limit noktası denir.

Tanım:1.1.10

(X,d) bir metrik uzay $A\subset X$ alt kümesinin bütün limit noktalarının kümesi ile A'nın noktalarından oluşan kümeye A'nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Tanım:1.1.11

(X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $A = \overline{A}$ ise A kümesine X 'de kapalı bir küme denir.

Tanım:1.1.12

(X,d) bir metrik uzay olsun. $A \subset X$ olmak üzere ve $(x \in X)$, $B(x,\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı varsa x 'e A'nın bir iç noktası denir. ve A^0 ile gösterilir.

Tanım:1.1.13

(X,d) bir metrik uzay $A \subset X$ alt kümesi için $A = A^0$ ise A 'kümesine X 'de açık bir küme denir.

Teorem:1.1.14

(X,d) Bir metrik uzay olmak üzere;

1. X 'deki açık kümelerinin herhangi keyfi birleşimleri X 'te bir açık kümedir.

2. X 'deki açık kümelerinin herhangi sonlu kesişimi X 'de bir açık kümedir.

Teorem:1.1.15

(X,d) Bir metrik uzay olma üzere;

1. X 'deki kapalı kümelerin herhangi bileşimi X 'de bir kapalı kümedir;

2. X 'deki kapalı kümelerin herhangi bir sonlu bileşimi X 'te kapalı bir kümedir.

Tanım:1.1.16

(X,d) Bir metrik uzay olmak üzere

$f : \mathbb{N} \to X$ Fonksiyonuna X 'de bir dizi denilir. Ve $(f_n) = (x_n)$ ile gösterilir.

(n_k) ; N 'içinde $n_k < n_{k+1}, k = 1,2,3,...$ve $\lim_{x\to\infty} n_k = \infty$ koşullarını sağlayan her hangi bir dizi olmak üzere; $(x_n), k \in \mathbb{N}$ dizisine (x_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

Tanım:1.1.17

(X,d) metrik uzay içinde bir dizi (x_n) ve $x_o \in X$ olsun.

Eğer $\lim_{x\to\infty} d(x_n,x_0)=0$ ise ,veya başka bir deyişle Eğer $\forall\varepsilon$>0 için $\exists$ $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ə $\forall n > n_\varepsilon$ için $d(x_n,x_0)<\varepsilon$ oluyorsa, (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir, ve $\lim_{x\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım:1.1.18

(X,d) Bir metrik uzay ve A , X 'in boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$d(A)=\sup\{d(x,y): x,y\in A\}$$

sayısına A kümesinin çapı denir. $d(A)<\infty$ ise A' ya X' de sınırlı bir küme denir.

X içindeki (x_n) dizisinin terimlerinden oluşan küme X'de sınırlı ise (x_n) dizisine sınırlı bir dizi adı verilir.

Teorem:1.1.19

(X,d) Metrik uzayında bir dizi (x_n) ve $x_o \in X$ olsun.

Eğer $\lim_{x\to\infty} x_n = x_0$ ise

1. x_0 limiti tektir;

2. (x_n) dizisi sınırlıdır;

3. (x_n) dizisinin $\forall(x_{nk})$ alt dizisinin de limiti x_0 dır.

4. $y_n \to y_0$ $(y_n \in X, y_0 \in X)$ İse $d(x_n,y_n)\to d(x_0,y_0)$ dır.

Tanım:1.1.20

(X,d) bir metrik uzay ve X 'in içinde bir dizi (x_n) olsun. $\forall\varepsilon>0$ için m,n>n_ε olduğunda $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ olacak şekilde ε 'na bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine X'de bir **Cauchy** dizisi adı verilir. Veya başka farklı bir gösterim olarak;

$\forall\varepsilon$>0 için $\exists$ $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ə $\forall n,m > n_\varepsilon$ için $d(x_n,x_m)<\varepsilon \Leftrightarrow (x_n)$ dizisi X içinde bir Cauchy dizisidir.

Teorem:1.1.21

Aşağıdaki önermeler doğrudur;

1. Metrik uzay içindeki yakınsak her bir dizi bir cauchy dizidir;

2. Metrik uzay içerisindeki her cauchy dizisi sınırlıdır;

3. (X,d) bir metrik uzay olmak üzere (x_n) ve (y_n), X içinde bir Cauchy dizisi ise $(d(x_n,y_n))$ reel sayı dizisi yakınsaktır.

Tanım:1.1.22

Bir (X,d) metrik uzayındaki her cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu (X,d) metrik uzayına Tam uzay denir.

Teorem:1.1.23

Bir (X,d) metrik uzayı ve boş olmayan $A \subset X$ alt kümesi verisin. $x \in \overline{A}$ olması içi gerek ve yeter koşul A için de x'e yakınsayan bir (x_n) dizisinin var olmasıdır.

Tanım:1.1.24

(X,d) ve (X_1,d_1) metrik uzayları verilsin.

Eğer $X_1 \subset X$ ve $\forall \mathrm{a,b} \in X_1$ için $\mathrm{d}_1(a,b) = d(a,b)$ ise (X_1,d_1)'e (X,d)'nin bir alt uzayı denir.

Teorem:1.1.25

(X,d) tam metrik uzayının bir (Y,d) alt uzayı verilsin. (Y,d) nin tam olması için gerek ve yeter koşul $Y'nin$ X' de bir kapalı küme olmasıdır.

Örnek:1.1.26

$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ adi metriğe göre tam uzaydır.

Örnek:1.1.27

$\mathbb{R}^n$ kümesi $(1 \le \mathrm{p} < \infty)$ koşullarında;

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

metriğine göre tam uzaydır.

Örnek:1.1.28

(ℓ_∞, d_∞) uzayı aşağıdaki verilen;

$$d_\infty(x,y)=\sup\left\{|x_k-y_k|:k\in\mathbb{N}\right\}$$

metriğine göre tamdır.

Örnek:1.1.29

(X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar;

$f:X\to:Y$ bir dönüşüm ve $x_o\in X$ olsun.

Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ ə $\forall x\in X$ için $d(x,x_0)<\delta$ olduğunda $\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ oluyorsa f dönüşümü x_0 noktasında süreklidir denir, veya;

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

şeklindedir.

Tanım:1.1.30

$\forall\varepsilon>0$ verildiğinde (a,b) aralıklarının kapsadığı $i=1,2,3,...,n$ için (a_i,b_i) ayrık aralıkları için;

$$\forall A_i\cap A_j=\varnothing \text{ ,i}\neq j \text{ iken;}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa f fonksiyonu (a,b) aralığında mutlak süreklidir denir.

Tanım:1.1.31

$f:(a,b)\to\mathbb{R}\quad(-\infty<a<b<\infty)$; fonksiyonu verilsin.

Herhangi $t_1,t_2\in(a,b)$ için;

$$|f(t_1)-f(t_2)| \le A|t_1-t_2|^{\alpha}$$

olacak şekilde $A>0$ ve $\alpha \in (0,1)$ sayıları varsa f fonksiyonuna (a,b) üzerinde Hölder koşulunu sağlar denir. A ve α sayıları sırasıyla Hölder katsayısı ve Hölder üstü olarak adlandırılır. $\alpha = 1$ ise;

$$|f(t_1)-f(t_2)| \le L|t_1-t_2|$$

koşuluna Lipşizh koşulu denilir.

Diğer taraftan; $[a,b]$ üzerinde α üstü ile Hölder koşulunu sağlayan bütün fonksiyonlar kümesi $H_{\alpha}[a,b]$ şeklinde gösterilir.

Teorem:1.1.32

(X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar olsun ve

$$f: X \to Y$$

bir dönüşüm olmak üzere eğer;

$\forall \varepsilon > 0$ için $d(x_1,x_2) < \delta$ iken , $\rho(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon$ Olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu X 'de düzgün yakınsaktır denir.

Düzgün yakınsak olan bir fonksiyon aynı zamanda yakınsaktır**;** ancak bunun tersi her zaman doğru değildir.

Teorem:1.1.33

(X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar ve $x_0 \in X$ olmak üzere;

$f: X \to Y$ fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir $\Leftrightarrow X'$ her (x_n) dizisi için $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ olmak üzere $f(x_n) \to f(x)$ dır.

Teorem:1.1.34

(X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar olmak üzere herhangi bir $f: X \to Y$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir;

1. f fonksiyonu X 'de süreklidir;

2. Eğer G kümesi Y 'de açık ise $f^{-1}(G)$, X 'de açıktır;

3. Eğer G kümesi Y 'de kapalı ise $f^{-1}(G)$, X 'de kapalıdır.

Teorem:1.1.35

(X,d) de bir metrik uzay olsun. Eğer $A \subseteq X$ açık alt kümesi için;

$G_1 \cap G_2 = \varnothing$ ve $G_1 \cup G_2 = A$ olacak şekilde boş kümeden farklı G_1 ve G_2 açık kümeleri yok ise A kümesine bağlantılıdır denir. Eğer bütün alt kümeleri için sağlıyorsa (X,d) metrik uzayına bağlantılı uzay denir.

Tanım:1.1.36

Bir metrik uzayın açık ve bağlantılı alt kümesine bölge denir.

Teorem:1.1.37

A, bir metrik uzaydaki bağlantılı kümelerin bir ailesi olsun.

Ayrıca $K = \bigcap_{A \in A} A$ boş kümeden farklı olsun.

Bu durumda $H = \bigcup_{A \in A} A$ bağlantılıdır.

Teorem:1.1.38

(X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar, X 'te bağlantılı bir küme ve $f : X \to Y$ fonksiyonu X 'te sürekli olsun. Bu durumda $f(x)$ bağlantılıdır denir.

Teorem:1.1.39

(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

1. Eğer A kümesi tam ise kapalıdır.

2. Eğer X kümesi tam ise ve A kümesi kapalı ise A kümesi tamdır.

Tanım:1.1.40

(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A 'daki her dizinin yakınsak bir alt dizisi var ve yakınsadığı nokta A kümesinde ise A kümesine Kompakt küme denir, ve eğer X kompakt ise (X,d) metrik uzayına kompakttır denir.

Tanım:1.1.41

(X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun.

Eğer; $\forall x,y\in X$ için $\rho(f(x),f(y))=d(x,y)$ oluyorsa f dönüşümüne izometrik dönüşüm ya da izometri denir. Eğer bu dönüşüm bire bir (veya 1-1) ve örten ise bu dönüşüme izometrik izomorfik, (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylarına da eş yapılı uzaylar adı verilir. Ve $X\cong Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım:1.1.42

(X,d) bir metrik uzay ve $A\subseteq X$ bir alt kümesi olsun $\overline{A}=X$ ise A' ya X 'de yoğun bir küme denir

Örnek:1.1.43

$\mathbb{Z}$ Tam sayılar kümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğun bir küme değildir.

Örnek:1.1.44

$\mathbb{Q}$ Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğun bir kümedir.

Tanım:1.1.45

(X,d) bir metrik uzay ve $(\hat{X},\hat{Y})$ ise bir tam metrik uzay olsun. X, $\hat{X}$ 'in bir alt kümesi ile izometrik ise; $(\hat{X},\hat{Y})$ uzayına (X,d) inin tamlanması denir.

Tanım:1.1.46

Bir (X,d) metrik uzayının sayılabilir yoğun alt kümesi varsa bu uzaya ayrılabilir bir metrik uzay denir. Bu tanımı başka bir biçimde ifade etmeye çalışırsak;

(X,d) ayrılabilir metrik uzaydır $\Leftrightarrow$ X içinde öyle $(x_1,x_{2,}x_3,...x_n,...)$ dizisi vardır ki;

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists n_0>0 \ni \forall x\in X \text{ için } d(x,x_{n_0})<\varepsilon \text{ dır.}$$

Örnek:1.1.47

$(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ $(1\le p<\infty)$ ayrılabilir bir metrik uzaydır.

Örnek:1.1.48

$(C[0,1], d_\infty)$ metrik uzayı ayrılabilirdir.

1.2.Vektör Uzayları

Tanım:1.2.1

$X \neq \varnothing$ bir küme ve K, reel veya karmaşık sayıların bir cismi olsun.

$\oplus : X \times X \to X, \quad (x,y) \to x + y$;

$\otimes : K \times X \to X \ , \quad (a,x) \to ax$;

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorlarsa X kümesine K cismi üzerinde bir vektör (veya lineer) uzay adı verilir.

Her $x, y, z \in X$,a,b $\in$ K için;

1. $x + y = y + x$;

2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3. $\forall x \in X$ için x+0=0+x=x olacak şekilde bir tek $0 \in X$ sayısı vardır;

4. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = 0$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in X$ vardır;

5. $\forall x \in X$ için $1.x = x$

6. $a(x + y) = ax + ay$;

7. $(a + b)x = ax + by$;

8. $(ab)x = a(bx)$;

Eğer özel olarak $X = \mathbb{R}$ alınırsa X'e reel vektör uzayı , $X = \mathbb{C}$ alınırsa X'e karmaşık vektör uzayı denir.

Tanım:1.2.2

X bir vektör uzayı ve Y, X'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $\forall x, y \in Y, \forall a, b \in K$ için ax+by $\in Y$ ise Y'ye X'in bir lineer alt uzayı denir.

Teorem:1.2.3

$\varnothing \neq Y \subset X$ kümesinin X'in bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\forall y_1, y_2 \in Y$ ve $\forall a_1, a_2 \in K$ için $a_1 y_1 + a_2 y_2 \in Y$ olmasıdır.

Tanım:1.2.4

X Bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ verilsin. $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ olmak üzere; $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ toplamına $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ 'in lineer kombinasyonu denir.

Tanım:1.2.5

X bir vektör uzayı ve $A = (x_1, x_2, ..., x_n) \subset X$ olsun. $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ olmak üzere $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ eşitliği ancak ve ancak $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ olması durumunda $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine lineer bağımsız, aksi halde lineer bağımlıdır denir.

Tanım:1.2.6

X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun.

$T : X \to Y$ operatörü, $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$; (a,b $\in$ K,x,y $\in$ X) koşulunu sağlıyorsa T 'ye lineer operatör denir.

1.3.Normlu Vektör Uzayları

Vektör uzayı açık bir cebirsel amaç olup, eğer bu amaç üzerinde analizle uğraşmak isteniyorsa onun üzerinde bir uzaklık ölçüm tarzının ima edilmesi gerekir. Bu, norm denilen bir kavramın tanımlanması yardımıyla yapılır.

Tanım:1.3.1

X bir K cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı olsun.

$\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$, x $\to \|x\|$; dönüşümü $\forall x, y \in X, \forall a \in K$;

(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(N_2) $\|ax\| = |a|\|x\|$;

(N_3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu vektör uzayı adı verilir. Aynı zamanda $\|x, X\|$ şeklinde de gösterilir. K cismine bağlı olarak, reel normlu uzay ve kompleks normlu uzay ifadeleri de kullanır.

Örnek:1.3.2

ℓ^∞ sınırlı yakınsak ve kompleks terimli dizilerin uzayı olmak üzere;

$$x=(x_1,x_2,...,x_n)\ ,\text{y}=(\text{y}_1,y_2,...,y_n)\in\ell^\infty\ ;\ x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$$

şeklindeki vektörel toplama ve $ax=(ax_1,ax_2,...,ax_n)$ şeklindeki skaler ile çarpma işlemlerine göre bir vektör uzaydır, ve $\|x\|_\infty=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|$ normu ile bir normlu uzaydır.

Tanım:1.3.3

$(X,\|.\|)$ normlu uzayından $x,y\in X$ olmak üzere $d(x,y)=\|x-y\|$ ve $a\in K$ olsun bu durumda;

$\forall x,y\in X$ için $d(x+z,y+z)=d(x,y)$ (d'*nin* öteleme özelliği);

$d(ax,ay)=|a|d(x,y)$ (d 'nin mutlak homojenlik özelliği);

özelliklerini sağlayacak şekilde normlu vektör uzayından bir metrik uzay elde edilir.

Tanım:1.3.4

K cismi üzerinde tanımlı bir X vektör uzayı üzerinde tanımlanan;

$\|.\|:X\to\mathbb{R}^+$ Norm X üzerinde süreklidir.

Teorem:1.3.5

X,K **c**ismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall\in x,$ için X üzerinde tanımlı $\|.\|_1,\|.\|_2$ normları denktir. $\Leftrightarrow c\|x\|_1\le\|x\|_2\le\frac{1}{c}\|x\|_1$ olacak şekilde $c\in\mathbb{R}^+$ sayısı vardır.

Teorem:1.3.6

$\{x_n\}$, $(X,\|.\|)$ norm uzayından $x_0\in X$ şeklinde bir noktaya yakınsak ise;

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0\ \text{dır.}$$

Tanım:1.3.7

$(X,\|.\|)$ normlu bir uzay ve bunun için bir dizi (x_n) olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için m,n>n_ε Olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'na bağlı n_ε doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım:1.3.8

Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi X içindeki bir limite yakınsıyorsa, bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına Tam Normlu Uzay veya Banach Uzayı adı verilir.

Örnek:1.3.9

$H_\alpha[a,b]$ Hölder koşulunu sağlayan (Tanım:1.1.29'da tanımlanan) vektör uzayı $f \in H_\alpha[a,b]$ için;

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_{C[a,b]} + H(f,\alpha)$$

normuna göre bir Banach uzaydır. Burada;

$$H(f,\alpha) = \sup\left\{|f(t_1) - f(t_2)|.|t_1 - t_2|^{-\alpha} : t_1, t_2 \in [a,b]\right\} \text{ dir.}$$

Tanım:1.3.10

$(X, \|.\|)$ normlu bir vektör uzay ve $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şeklindeki bir seri olsun. Bu durumda;

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bu serinin (S_n) kısmi toplamlar dizisinin bir cauchy dizisi olmasıdır;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi Mutlak yakınsaktır.

Tanım:1.3.11

$(X, \|.\|)$ normlu vektör uzayında her mutlak yakınsak seri yakınsak ise;

$(X, \|.\|)$ normlu vektör uzayı bir Banach uzayıdır.

Tanım:1.3.12

$(X,\|.\|)$ normlu uzayının $A \subset X$ alt kümesi için $\overline{A} = X$ oluyorsa A kümesine X içinde yoğun küme denir.

Teorem:1.3.13 (Weierstrass Teoremi)

Reel katsayılı $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ...a_n x_n,\ n = 0,1,2,...$ cebirsel polinomların kümesi $(C[a,b],\|.\|_{C[a,b]})$ uzayında yoğundur.

Tanım:1.3.14

$(X,\|.\|)$ normlu bir uzay olsun X sayılabilir yoğun bir alt küme kapsıyorsa $(X,\|.\|)$ normlu uzayına ayrılabilir normlu uzay adı verilir.

Tanım:1.3.15

$(X,\|.\|)$ bir normlu uzay Y 'de X 'in bir lineer alt uzayı ise $(Y,\|.\|)$ 'de bir normlu uzaydır. Bu normlu uzaya $(X,\|.\|)$ uzayının normlu alt uzayı denir. Eğer Y kapalı ise $(Y,\|.\|)$ alt uzayına $(X,\|.\|)$ normlu uzayının kapalı alt uzayı denir.

Teorem:1.3.16

Banach uzay uzayının her kapalı alt uzayı yine bir Banach uzayıdır.

Teorem:1.3.17

$(X,\|.\|)$ Bir Banach uzayı ve $Y'de$ X 'in bir lineer alt uzayı ise $(Y,\|.\|)$ 'nin bir Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul Y 'nin kapalı olmasıdır.

1.4.İç Çarpım ve Hilbert uzayları

Hilbert uzayları sonsuz boyutlu normlu uzayların en basit tipi olmak üzere Fonksiyonel Analizin teorik ve pratik uygulamalarında belli rol oynamaktadır. Normlu bir uzayda elemanter vektör cebirinde olduğu gibi vektörleri toplayabilir ve skalerle

çarpabiliriz. Ayrıca böyle bir uzay üzerinde norm bir vektörün elemanter uzunluk kavramını genelleştirir. Bununla birlikte genel bir normlu uzayda yinede eksik olan şey eğer mümkün ise skalerle çarpımını tanımlamaktır. Genel amaç iç çarpım uzayını bu işlemler üzerinde kurmak ve daha sonrada bunu genelleştirerek Hilbert uzayını kurmaktır.

Tanım:1.4.1

$K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X bir vektör uzay olsun;

$$\langle .,. \rangle : X \times X \to K$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $\langle .,. \rangle$'ye X üzerinde bir İç çarpım. $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de İç çarpım uzayı denir.

1. $\forall x \in X$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $\forall x, y \in X$ için $\langle x, y \rangle = \langle y, \overline{x} \rangle$ (kompleks eşlenik)

3. $\forall x, y \in X$ ve $a \in K$ için $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$;

4. $\forall x, y, z \in X$ için $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

Örnek:1.4.2

$f, g \in (C[a,b], K)$ için;

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g}(t)dt$$

tanımıyla $(C[a,b], K)$ bir iç çarpım uzayıdır. Bu uzayı ileride $L_2([a,b]; K)$ ile göstereceğiz.

Tanım:1.4.3 (Cauchy – Schwarz eitsizliği)

$(X, \langle .,. \rangle)$ Bir iç çarpım uzay olsun. $\forall x, y \in X$ için; $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ dır.

Aynı zamanda $x \in X$'in normu;

$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ (1.4.1) olarak tanımlanan norm altında bir normlu vektör uzay olup;

$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ normuyla aşağıdaki;

$\left|\langle x,y\rangle\right| \le \|x\|\|y\|$ (1.4.2) eşitsizliği elde edilir.

Tanım:1.4.4

$(X,\langle .,.\rangle)$ bir iç çarpım uzay ise $\forall x,y \in X$ için; $d(x,y)=\|x-y\|=\langle x-y,x-y\rangle^{\frac{1}{2}}$ tanımıyla bu iç çarpım uzayı bir normlu uzayı olup aynı zamanda metrik uzaydır.

Tanım:1.4.5

$(X,\langle .,.\rangle)$ iç çarpım uzay üzerindeki (1.4.1) norm üzerinde $\forall x,y \in X$;

$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$ (parelelkenar kuralı) (1.4.3)

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+y\|^2-i\|x-y\|^2\right\} \quad (1.4.4)$$

eşitliklerini sağlar. (1.4.2)'ye Paralel kuralı, (1.4.4)'e ise kutupsal özdeşlik özelliği denir.

Tanım:1.4.6

$X,\langle .,.\rangle$ normlu uzayının bir iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\forall x,y \in X$ vektörleri için (1.4.3) eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda iç çarpımın;

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+y\|^2-i\|x-y\|^2\right\}$$

tanımıyla X bir iç çarpım uzayıdır.

Örnek:1.4.7

$1 \le p < \infty$ ve $p \neq 2$ olmak üzere $(\mathbb{R}^n,\|.\|_p)$ normlu uzayı iç çarpım uzayı değildir. Gerçekten;

$x=(1,1,0,0,...,0)$, y=(1,-1,0,0,...,0) $\in \mathbb{R}^n$ vektörleri için;

$x+y=(2,0,0,0,...,0)$, x-y=(0,2,0,0...,0),

$\|x\|_p=\|y\|_p=2^{\frac{1}{p}}$, $\|x+y\|_p=\|x-y\|_p=2$

olduğundan bu vektörler için (1.4.3) eşitliği sağlanmaz, o halde yukarıdaki koşullarda $(\mathbb{R}^n,\|.\|_p)$ normlu uzayı bir iç çarpım uzayı değildir.

Tanım:1.4.8

Bir $(X,\langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı (1.4.1) normuna göre tam ise, yani $(X,\langle .,. \rangle)$ içindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Tanım:1.4.9

$(\mathbb{R}^n,\langle .,. \rangle)$ bir iç çarpım uzay ve $x=(x_1,x_2,.....x_n)$,y=$(y_1,y_2,.....,y_n)\in\mathbb{R}^n$ (veya $\mathbb{C}^n$) için;

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k$$ eşitliği üzerinde bir Hilbert uzayıdır.

O halde bu genel ifadelerden şu sonuç çıkarılabilir; Bir K cismi üzerinde tanımlı her Hilbert uzayı aynı K cismi üzerinde bir Banach uzayıdır. Ancak tersi doğru değildir.

Örnek:1.4.10

($C[a,b],\|.\|_{C[a,b]}$) Banach uzayı bir iç çarpım uzayı olmadığından dolayısıyla bir Hilbert uzayı değildir.

Tanım:1.4.11

$(X,\langle .,. \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve $x,y\in X$ olsun.$\langle x,y\rangle=0$ ise x vektörü y vektörüne diktir denir.(veya ortogonaldir) ve $x\perp y$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde $A,B\subset X$ alt kümeleri verildiğinde eğer $\forall a\in A$, $\forall b\in B$ için $a\perp b$ ise A ve B kümelerine ortogonal kümeler denir. Ve $A\perp B$ şeklinde gösterilir.

Tanım:1.4.12

$(X,\langle .,. \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin.$\{x\in X : A\perp X\}$ kümesinin ortogonal tümleyeni denir. Ve $A^{\perp}$ şeklinde gösterilir.

Önerme:1.4.13

$(X,\langle .,. \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve $x_1,x_2,...,x_n\in X$ olsun.

X vektörü $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine ortogonal ise $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerinin lineer bileşimleri de ortogonaldır.

Tanım:1.4.14

$(X, \langle ., . \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve L, X 'in bir alt kümesi olsun.

Her $x \neq y \in L$ için X $\perp y$ ise L kümesine ortogonal küme denir. O halde X içinde bir (x_n) dizisinin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $\forall m \neq n$ için $\langle x_n - x_m \rangle = 0$ olmasıdır.

Aynı zaman da L ortogonal kümesi için $\forall y \in L$, $\|y\| = 1$ ise L 'ye ortonormal bir küme denir. O halde X içinde ki bir (x_n) dizisinin ortonormal olması için gerek ve yeter koşul $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ ve $\forall$m $\neq$ n için $\langle x_n - x_m \rangle = 0$ olmasıdır.

Tanım:1.4.15

$(X, \langle ., . \rangle)$ iç çarpım uzayı ve (x_n), X içinde ortonormal bir dizi olsun;

$c_n = \langle x, x_n \rangle$, n=1,2,3,... sayılarına $x \in X$ vektörünün (x_n) dizisine göre Fourier katsayılar, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_n$ serisine x vektörünün (x_n) ortonormal dizisine Fourier dizisi denir.

Sonuç:1.4.16

Her $x \in X$ vektörünün $c_n = \langle x, x_n \rangle$ Fourier katsayıları $n \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

Tanım:1.4.17

Bir iç çarpım uzayındaki bir kümenin her vektörüne ortonogonal vektör, sadece sıfır vektörü ise kümeye tam küme denir.

Tanım:1.4.18

H bir hilbert uzayı ve (x_n), H içinde bir dizi olsun (x_n) ortonormal ve tam ise (x_n) dizisine H uzayının bir ortonormal tabanı adı verilir.

Tanım:1.4.19

(x_n) bir H Hilbert uzayında ortonormal bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1. (x_n) bir ortonormal tabanıdır.

2. Her $x \in X$ için parseval eşitliği denilen;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle x, x_k \rangle \right|^2 = \|x\|^2$$

eşitliği sağlanır.

3. Her $x \in H$ için $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle$

Tanım:1.4.20

K cismi üzerindeki bir X Hilbert uzayı, sayılabilir ortonormal bir tabana sahip ise bu X Hilbert uzayına ayrılabilir uzay denir.

Tanım:1.4.21

Ayrılabilir her Hilbert uzayı içinde ortonormal bir taban mevcuttur.

1.5.Lineer Operatörler

Tanım:1.5.1

X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $D_T \subset X$ olsun.

$T : D_T \subset X \to Y$ dönüşümü D_T alt uzayındaki her bir x elemanını Y uzayındaki bir tek elemana götüren T (veya $T(x) = y$) dönüşümüne operatör, D_T yede T operatörünün Tanım kümesi, $R_T = \{ y \in Y : y = T(x), x \in D_T \}$ şeklinde tanımladığımız kümeye ise T operatörünün değer (veya görüntü) kümesi denir.

Tanım:1.5.2

X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $T_1 : D_{T_1} \subset X \to Y$ ve $T_2 : D_{T_2} \subset X \to Y$ şeklinde operatörleri tanımlayalım. Eğer her $x \in X$ için $D_{T_1}(x) = D_{T_2}(x)$, $T_1(x) = T_2(x)$ ise T_1 ve T_2 operatörleri eşittir denir.

Eğer $D_{T_1}(x) \subset D_{T_2}(x)$ ve her $x \in D_{T_1}(x)$ için $T_1(x) = T_2(x)$ ise T_1 operatörüne T_2 operatörünün kısıtlaması (veya T_2 operatörünün T_1 operatörüne genişlemesi) denir.

Tanım:1.5.3

$T : X \to Y$ Bir operatör olsun. Her $x \in X$ için $T(x) = c$ olacak şekilde $c \in Y$ sayısı oluyorsa bu operatöre Sabit operatör denir.

Tanım:1.5.4

$T : X \to Y$ bir operatör olsun. Her $x \in X$ için $T(x) = x$ ise T operatörüne Birim veya Özdeşlik operatörü denir.

Tanım:1.5.5

$T : X \to Y$ bir operatör verilsin. Her $x \in X$ için $T(X) = Y$ oluyorsa, T operatörüne Örten veya Surjektif, aksi takdirde operatöre içine Operatör adı verilir.

Aynı zamanda $x_1, x_2 \in X$ için;

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow T(x_1) \neq T(x_2)$$

oluyorsa T operatörüne birebir veya İnjektif operatör denir.

Tanım:1.5.6

Birebir Örten operatörlere Bijektif operatör denir.

Tanım:1.5.7

X ve Y normlu uzayları ve $T : X \to Y$ operatörü verilsin. Aşağıdakiler sağladığında T operatörü $x_o \in D_T(X)$ noktasında süreklidir denir.

a-) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ ə $\forall x \in D_T(X)$, $\|x - x_o\| < \delta$ iken $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ dır;

b-) x_0 noktasına yakınsayan $\forall(x_n) \subset D_T(X)$ dizisi için ; $\lim_{x \to \infty} T(x) = T(x_0)$ dır.

Tanım:1.5.8

Eğer $T : X \to Y$ operatörü $D_T(X)$ 'nin her noktasında sürekli ise, T operatörü $D_T(X)$ üzerinde süreklidir denir.

Tanım:1.5.9

X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ operatörü verilsin. T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y uzayında açık (veya kapalı) $\forall G \subset T(X)$ kümesi için $T^{-1}(G) \subset D_T$ kümesinin X uzayında açık (veya kapalı) bir küme olmasıdır.

Tanım:1.5.10

$T : D_T \subset X \to Y$ Operatörüne belli bir $c \geq 0$ sayısı ve her $x \in D_T(X)$ için;

$\|T(x)\| \leq c\|x\|$ olacak şekilde bir $c \geq 0$ var ise T operatörüne sınırlı operatör denir.

$\|T(x)\| \leq c\|x\|$ ifadesini $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = c$ şeklinde de yazabiliriz ki bu da c sabitinin en az $D_T - \{0\}$ kümesi üzerinde alınan supremum kadar büyük olabileceğini gösterir. Daha açıkçası;

$$c = \sup_{x \in D_T(X)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

şeklindedir [1].

Tanım:1.5.11

X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay ve; $T : D_T \subset X \to Y$ verilsin. Eğer $D_T \subset X$, X 'in bir alt uzayı ve $\forall x, y \in D_T(X)$, $a, b \in K$ için; $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$ ise T operatörüne lineer operatör adı verilir.

Tanım:1.5.12

X bir vektör uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona fonksiyonel denir. Bir f fonksiyoneli

$$f : X \to K \ , \ f(ax + by) = af(x) + bf(y), \quad \text{x,y} \in \text{X}, \quad \text{a,b} \in \mathbb{C}$$

koşulu ile lineerdir. Bilindiği gibi $f : X \to K$ lineer fonksiyonelinin sınırlı olması (ya da buna denk olarak sürekli olması);

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in D_T(f), \|x\| \le 1\}$$

biçiminde tanımlanan normun sonlu olması gerekir. (Teorem:1.5.2.) Y, X yoğun bir uzay ve $f : Y \to K$ sınırlı lineer fonksiyonel ise tek bir biçimde tanımlı öyle $\tilde{f} : X \to K$ sınırlı lineer fonksiyoneli bulunabilir ki $\forall x \in Y$ için $\tilde{f}(x) = f(x)$ ve $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ sağlanır; yani $\tilde{f}$ fonksiyoneli f 'nin Y den X uzayına Genişlemesidir.

Tanım:1.5.13

X ve Y normlu iki uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|T(x); Y\| = \|x; X\|$$

özelliğine sahip X normlu uzayını Y normlu uzayı üzerine dönüştüren bire-bire bir lineer T operatörü varsa X ve Y normlu uzaylarına izometrik olarak izomorfizma ve T operatörüne de X ve Y normlu uzayları arasında izometrik izomorfizma denir. Ve $X \equiv Y$ ile gösterilir.[1]

Tanım:1.5.14

$T : D_T \subset X \to Y$ bir lineer operatör olsun. T tek bir noktada sürekli ise, her noktada süreklidir.

Tanım:1.5.15

$T : D_T \subset X \to Y$ lineer operatörünün $D_T(X)$ üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün $D_T(X)$ üzerinde sürekli olmasıdır.

Tanım:1.5.16

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine X de Kompakt küme denir. Eğer A kümesinin $\overline{A}$ kapanışı X de Kompakt ise A kümesine X de ön Kompakt küme denir. Ve $(X, \|.\|)$ uzayına Kompakt uzay denir.

Tanım:1.5.17

$(X,\|.\|)$ bir normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesindeki her dizinin A'da bir limit noktası varsa A kümesine X 'de dizisel Kompakt küme denir.

Teorem:1.5.18

$(X,\|.\|)$ bir Banach uzayı, $f : A \to \mathbb{C}$ şeklinde bir fonksiyonel olsun. f Banach uzayının kompakt $A \subset X$ alt kümesi sürekli bir fonksiyonel ise f 'ye düzgün süreklidir denir.

Tanım:1.5.19

X ve Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ lineer operatörü verilsin. Eğer T operatörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir Ön-Kompakt kümesine götürüyorsa, T operatörüne kompakt lineer operatör (sürekli lineer operatör) denir.

Teorem:1.5.20

X ve Y normlu vektör uzayları verilsin ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer D_T kümesi X normlu uzayının sınırlı bir alt kümesi iken $T(X)$ 'e Y normu üzerinde ön kompakt ise, bu durumda $T(X)$ operatörüne kompakt**,** Eğer T sürekli ve kompakt ise Tamamen sürekli operatör denir.

Teorem:1.5.21

G $\subset$ R^n ise G'nin kapanışı G ile gösterilir. Ω, R^n de bir bölge olmak üzere G $\subset \Omega$ ve G kümesi R^n'in bir kompakt (kapalı ve sınırlı) alt kümesi ise, bu durum G $\subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. u, G de tanımlı bir fonksiyon ise, u fonksiyonunun Support (desteği);

$$\text{Suppu} = (\overline{x \in G : u(x) \neq o})$$

şeklinde gösterilir. G'nin R^n deki sınırı bdryG ile gösterilir. Yani; bdry $G = G \bigcap G^c$ şeklinde yazılır. Burada;

$$G^c = R^n / G = (\, x \in R^n : \; x \notin G \,) \text{dır.}$$

$X \in R^n$ ve $G \subset R^n$ ise X'in G ye olan uzaklığı dist (x, G) = $\inf_{y \in G} d(x, y)$ ile gösterilir.

Eğer supu $\subset \subset \Omega$ ise, u fonksiyonu Ω da kompakt desteğe sahiptir denir [1].

Tanım:1.5.22

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ negatif olmayan α ; larin n- bileşenlisi ise α 'ya çoklu-indis denir. Ve x^α , $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, α ; mertebeye sahip olan $X_1^{\alpha_i}, \ldots, X_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi olarak tanımlanır.

Yani; $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots x_n^{\alpha_n}$ olur.

Benzer şekilde $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \frac{\partial_j}{\partial x_j}$ ise bu durum; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ şeklinde $|\alpha|$ mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. Özel olarak bir u fonksiyonunun gradientini;

$$\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2, \ldots, \partial_n u)$$

ile göstereceğiz.

Tanım:1.5.23

Ω , R^n de bir bölge olsun. m > o tamsayısı için Ω bölgesinde $|\alpha|$ mertebesine kadar tüm $D^\alpha = \theta$ kısmi türevleri sürekli olan θ fonksiyonlarından oluşan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir.

Bunun yanında $C^o(R^n) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=o}^{\infty} C^m(\Omega)$ ile gösterelim. $C_o(\Omega)$ ve $C_o^\infty(\Omega)$ alt uzayları arasında sırasıyla Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki bütün fonksiyonlarından oluşur. $C_o^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına test fonksiyonu adı verilir.

Tanım:1.5.24

X ve Y normlu uzaylar ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir operatör, eğer T kompakt operatör ise sınırlıdır.

Teorem:1.5.25

X ve Y normlu uzaylar ve $T : D_T \subset X \to Y$ şeklindeki her sınırlı operatör süreklidir. Böylece her kompakt lineer operatör tamamen süreklidir.

Tanım:1.5.26

X ve Y aynı K cismi üzerinde iki normlu vektör uzayları olsun. X 'den tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerden oluşan $T(X,Y)$ kümesi olsun. $A, B \in T(X,Y)$ Operatörleri ve $\alpha \in K$ için;

$$(A+B)(x) = Ax + Bx \quad ,\text{x} \in \text{X},$$

$$\alpha A(x) = (\alpha A)x \quad ,\text{x} \in \text{X}$$

işlemlerine göre $T(X,Y)$ kümesinin bir vektör uzayı olduğu kolayca görülebilir.

Teorem:1.5.27

X ve Y normlu vektör uzayları verilsin. $T(X,Y)$ Vektör uzayı operatörü normuna göre bir normlu vektör uzayıdır. Eğer Y bir Banach uzay uzayı ise $T(X,Y)$ 'de bir Banach uzayıdır.

Tanım:1.5.28

X, Y Banach uzayları (A_n), $T(X,Y)$ içinde bir operatör dizisi ve $A \in T(X,Y)$ olsun;

a-) (A_n) dizisi düzgün sınırlıdır $\Leftrightarrow \exists c > 0$ ə $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|(A_n)\| \le c$,

b-) (A_n) düzgün bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \text{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall m, n > n_\varepsilon$ için $\|A_n - A_m\| \le \varepsilon$,

c-) (A_n) dizisi A operatörüne düzgün yakınsaktır

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \text{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ə $\forall n > n_\varepsilon$ için $\|A_n - A\| \le \varepsilon$,

d-) (A_n) dizisi A operatörüne kuvvetli yakınsar. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ Ve $\forall x \in X$ için, $\exists n_0 = n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ ə $\forall \text{n} > \text{n}_0$ için $\|A_n x - Ax\| \le \varepsilon$.

Lineer operatörler dizisinin düzgün yakınsaklığı $T(X,Y)$ uzayı üzerindeki norma göre yakınsamadır. $(A_n) \subset T(X,Y)$ dizisinin $A \in T(X,Y)$ operatörüne kuvvetli yakınsaklığı $\forall x \in X$ için $(A_n x) \subset Y$ $Ax \in Y$ noktasına Y üzerindeki norma göre yakınsak olması demektir.

Önerme:1.5.29

Eğer $(A_n) \subset T(X,Y)$ dizisi $A \in T(X,Y)$ düzgün yakınsarsa (A_n) dizisi A operatörüne kuvvetli yakınsar.

Önerme:1.5.30

$(A_n) \subset T(X,Y)$ dizisinin $A \in T(X,Y)$ operatörüne düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\overline{S_1(\theta)} \subset X$ üzerinde $A_n x$ dizisinin Ax 'e düzgün yakınsak olmasıdır.

Teorem:1.5.31

$T(X,Y)$ bir Banach uzay olsun. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ serisi mutlak yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ serisi düzgün yakınsaktır.

Lemma:1.5.32

$(A_n) \subset T(X,Y)$ ve öyle $C > 0$ sayısı ve $\forall x \in \overline{S_r(x_o)} \subset X$ kapalı yuvarı olmak üzere $\|Ax\| \leq C$,yani $(A_n x)$ dizisi $\overline{S_r(x_o)}$ üzerinde düzgün sınırlı ise $(\|A_n\|)$ dizisi sınırlıdır.

Teorem:1.5.33

Eğer $\forall x \in X$ için $(A_n x)$ dizisi sınırlı ise $(\|A_n\|)$ dizisi de sınırlıdır.

Teorem:1.5.34 (Banach-Steinhaus)

$T(X,Y)$ içinde bir $(A_n x)$ dizisi X üzerinde $A \in T(X,Y)$ operatörüne kuvvetli yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $(\|A_n\|)$ dizisinin sınırlı ve X 'de yoğun olan $\forall X'$ alt uzayı üzerinde $(A_n x)$ dizisinin A operatörüne kuvvetli yakınsak olmasıdır.

Teorem:1.5.35 (Açık Dönüşüm Teoremi)

Eğer $A \in T(X,Y)$ $\Re(A) = Y$ ise X 'deki her açık kümenin A altındaki görüntüsü Y 'de açıktır.

Tanım:1.5.36

Tanım:kümesi D_T ve değer kümesi R_T olan $T : D_T \subset X \to Y$ lineer operatörü olsun.

$ÇekT = \{x \in D_T : T(x) = 0\}$; kümesine T operatörün sıfır uzayı denir.

Tanım:1.5.37

X ve Y aynı K cismi üzerinde birer vektör uzayı olsun. $T : D_T \subset X \to Y$ operatörü bire-bir ve örten ise;

$T^{-1} : R_T \to D_T(X)$; operatörüne T 'nin Ters operatörü denir.

Teorem:1.5.38

$T : D_T \subset X \to Y$ operatörünün bire-bir ve örten olması için $ÇekT = \{O\}$ olmasıdır.

Teorem:1.5.39

X, Y normlu uzaylar ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir lineer operatör olsun. $T^{-1} : R_T \to D_T(X)$ ters operatörünün var ve sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in D_T$ için ; $\|Tx\| \geq m\|x\|$ olacak şekilde $m > 0$ sayısının bulunmasıdır.

Teorem:1.5.40 (Ters Operatör Teoremi)

X, Y Banach uzayları $T: X \to Y$ operatörü lineer, birebir, örten ve sınırlı bir operatör olsun. Bu durumda $T^{-1}: Y \to X$ ters operatörü var ve sınırlı operatördür.

Lemma:1.5.41

$T_1 \in T(X,Y)$ ve $T_2 \in T(Y,Z)$ operatörlerinin sırasıyla T^{-1}_1 ve T^{-1}_2 sınırlı ters operatörleri olsun.

Bu durumda $T_2 T_1 \in T(X,Z)$ operatörünün $(T_2 T_1)^{-1} = T_1^{-1}.T_2^{-1} \in T(Z,X)$ tersi vardır.

Tanım:1.5.42

X bir K cismi ($K = R$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde bir normlu uzay olsun. X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $T(X,Y)$ Banach uzayına X in normlu duali denir. Ve X' ile gösterilir.

Örnek:1.5.43

ℓ_1 uzayının duali ℓ_∞ uzayıdır.

Tanım:1.5.44

X' Banach uzayının normlu dualı $X'' = (X')'$ uzayına X uzayının ikinci dualı denir. $X'' = T(X,K)$ ikinci dual uzayı da Banach uzayıdır.

Tanım:1.5.45

X ve Y, K cismi üzerinde birer Hilbert uzayı olsun $\forall T \in T(X,Y)$ lineer operatörü için;

$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$, $\forall x \in X$ ve $y \in Y$ olacak şekilde bir tek $T^* \in T(X,Y)$ lineer operatörü vardır.

Tanım:1.5.46

X ve Y, K cismi üzerinde birer Hilbert uzayı olsun. $T^* \in T(X,Y)$ lineer operatörüne $T \in T(X,Y)$ operatörünün Adjoint operatörü denir.

Tanım:1.5.47

X, K üzerinde birer Hilbert uzayı olsun. Eğer $T = T^*$ ise $T \in T(X,K)$ lineer operatörüne self-Adjoint Hermitan operatörü denir.

Tanım:1.5.48

H_1ve H_2 Hilbert uzayları ve $T \in T(H_1, \mathrm{H}_2)$ olsun. $\forall x \in H_1, y \in \mathrm{H}_2$ için, $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ şeklinde tanımlı sürekli lineer T^* operatörüne Hilbert – Adjoint operatörü denir.

BÖLÜM 2

Lebesgue Ölçümü ve İntegrali

Bu bölümde Lebesgue integralinin kurulduğu Ölçüm kavramını ve Lebesgue integralini tanımlamaya çalışacağız. Tabi uzunluk, hacim, vs., gibi kavramların genelleştirilmesi olan Ölçü kavramını vermeden önce, ölçü teorisinde kullanacağımız bazı kavramları açıklamaya çalışacağız.

2.1 Küme sınıfları

Bu kesimde bir X kümesinin alt kümelerinin meydan getirdiği kümeleri inceleyeceğiz.

Tanım:2.1.1

X kümesinin alt kümelerinin herhangi bir kümesine X alt kümelerinin kümesine bir sınıf adı verilir.

Tanım:2.1.2

X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir $A, B \in H$ sınıfı için,

Her $A, B \in H$ için $A / B \in H$

Her $A, B \in H$ için $A \cup B \in H$ (2.1.1)

özelliklerini sağlanırsa bu H sınıfına Halka denir. Ve (2.1.1) in yerine; her $\forall k \in \mathbb{N}$ için $A_k \in H \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in H$ şeklinde alınırsa bu durumda bu H sınıfına σ-halka denir. Bu tanımdan yararlanarak bir H halkası için şu özelliklerin sağlandığı kolayca gösterilebilir;

$\varnothing \in H$,

Her $A, B \in H$ için $A \cap B \in H$, $k = 1, 2...., n$ için $A_k \in H \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in H$ ayrıca bir σ-halka ise;

Her $k \in \mathbb{N}$ için $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k \in H$ olur.

Tanım:2.1.2

X bir küme olsun. X 'in Σ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu Σ sınıfına bir cebirdir denir.

1. $X \in \Sigma$

2. Her $A \in \Sigma$ için $A^c = \Sigma / A$ 'dır.

Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $A_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$ alırsak Σ cebirine bir σ-cebiri denir.

Eğer Σ, X üzerinde bir σ- cebiri ise, yukarıdaki özelliklerden;

1. $\varnothing \in \Sigma$,

2. $k = 1, 2...., n$ için $A_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \Sigma$,

3. $k \in \mathbb{N}$ için $A_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$,

4. Her $A, B \in \Sigma$ için $A / B \in \Sigma$

önermelerinin doğruluğu kolayca gösterilebilir. Yukarıdaki koşul göz önüne alındığında σ- cebirin her zaman için bir halka olduğu görülmektedir.

Örnek:2.1.3

X Herhangi bir küme, $\Sigma = \{\varnothing, X\}$ olsun. Σ , X üzerinde bir σ- cebirdir.

Örnek:2.1.4

$X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \{\varnothing, \{1,3,5,...,2n-1,...\}, \{2,4,6,...,2n,...\}, \mathbb{N}\}$ alınırsa Σ, X üzerinde bir σ- cebirdir.

Örnek:2.1.5

X Bir sonsuz küme ve Σ da X 'in tüm sonlu alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Σ, X üzerinde bir σ- cebiri değildir. Çünkü $A \in \Sigma$ ise A sonludur $\Rightarrow$ A^c sonsuzdur. Aksi takdirde X sonlu olurdu. Şu halde $A^c \notin \Sigma$ dır.

Teorem:2.1.6

X bir küme ve Σ da X'de bir cebir olsun. Eğer aşağıdaki iki şarttan biri sağlanıyorsa Σ cebiri X üzerinde bir σ - cebiridir.

a-) Σ cebiri artan dizilerin birleşimi altında kapalıdır,

b-) Σ cebiri azalan dizilerin kesişimi altında kapalıdır.

Teorem:2.1.7

X Üzerindeki σ - cebirlerinin herhangi adetteki kesişimleri yine bir σ - cebiridir.

Teorem:2.1.8

X bir küme ve Σ da X in boş olmayan bir sınıfı osun. Σ Sınıfını kapsayan σ - cebirlerinin bir en küçüğü vardır.

Tanım:2.1.9

Bir Σ sınıfını kapsayan σ - cebirlerinin en küçüğüne Σ 'nın ürettiği σ - cebir denir.

Tanım:2.1.10

$\mathbb{R}^n$ deki açık (a,b) aralıklarının doğurduğu σ - cebirine Borel Cebiri denir. Borel Cebirinin her bir elemanına Borel kümesi denir.

Teorem:2.1.11

Borel Cebiri aşağıdaki sınıflar tarafından da üretilebilir;

1. $\mathbb{R}$ 'nin tüm kapalı alt kümelerin sınıfı,

2. $\mathbb{R}$ 'nin $(-\infty,b]$ biçimindeki alt aralıklarının,

3. $\mathbb{R}$ 'nin $(a,b]$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfı.

Tanım:2.1.12

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki borel cebiri aşağıdaki sınıflar tarafından da üretilebilir;

1. $\mathbb{R}^n$ inin bütün kapalı alt sınıfı;

2. $\mathbb{R}^n$ $\{x_1,x_2,...,x_n\}: x_i \le b, i=1,2,...,n$ biçimindeki alt aralıkların sınıfı,

3. $\mathbb{R}^n$ $\{x_1, x_2, ..., _n\}$: $a_i < x_i \leq b, i = 1, 2, ..., n$ biçimindeki alt kümelerinin sınıfı.

Tanım:2.1.13

X bir küme ve Σ'da X üzerinde bir σ- cebiri olsun. (X, Σ) ikilisine bir ölçülebilir uzay , Σ daki her bir kümeye de Σ - ölçülebilir küme adı verilir.

2.2. Ölçüler

Bir kümenin ölçümü kavramını çok değişik yollarla vermek mümkündür. Biz burada önce dikdörtgenlerin düzlemsel ölçümünden başlayıp ölçümü tanıtacağız. Daha sonra bu ölçümü soyutlaştırmaya çalışacağız. Bir A kümesinin $\mu(A)$ ile göstereceğimiz ölçüm kavramı bir d doğru parçasının uzunluğu, düzlemin alanı, hacim, yarı açık $[a,b)$ aralığında azalmayan $f(t)$ fonksiyonunun $f(b) - f(a)$ artması veya negatif olmayan bir fonksiyonun doğru, düzlem veya başka bir bölge üzerinde alınan integrali kavramlarının doğal bir genelleştirilmesidir.

Ölçüm kavramı, matematiğin birçok dalında kullanılır. Ölçüm ve integral kuramı, 20. yüzyılın hemen başlarında, Henry Lebesgue tarafından geliştirilmiştir.

Tanım:2.2.1

(X, Σ) bir ölçülebilir uzay olsun. Σ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu;

1. $\mu(\varnothing) = 0$,

2. Her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) \geq 0$,

3. Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonu veya kısaca ölçü denir.

$$\mu: \Sigma \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

şeklinde gösterilir.

Eğer her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye bir sonlu ölçü denir. Eğer X kümesi sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ye ölçüsü σ- sonludur denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye olasılık ölçüsü denilir.

Örnek:2.2.2

$X \neq \varnothing$ ve $\Sigma = \wp(X)$ olsun. Her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) = 0$ biçiminde tanımlanan μ fonksiyonu bir sonlu ölçü ve dolayısıyla bir σ - sonlu ölçüdür.

Tanım:2.2.3

Bir X kümesi, X 'in alt kümelerinin bir Σ σ - cebiri ve Σ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan (X, Σ, μ) üçlüsüne bir ölçü uzayı adı verilir.

Teorem:2.2.4

(X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. Eğer $A, B \in \Sigma$ ve A $\subset$ B ise $\mu(\mathrm{A}) \leq \mu(\mathrm{B})$ dir. Ayrıca $\mu(A) < \infty$ ise; $\mu(B / A) = \mu(B) - \mu(A)$ dır.

Teorem:2.2.5

(X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun.

a-) (A_n) Σ daki elemanların bir artan dizisi ise

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

b-) (A_n) Σ daki elemanlarının bir azalan dizisi ve $\mu(A_n) < \infty$ ise;

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

dır.

Sonuç:2.2.6

(X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun.

a-) (A_n) Σ daki elemanların bir artan dizisi ise;

$$\mu(\lim_{n \to \infty}(A_n)) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

b-) (A_n) Σ daki elemanlarının bir azalan dizisi ve $\mu(A_n) < \infty$ ise;

$$\mu(\lim_{n \to \infty}(A_n)) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

dır.

Tanım:2.2.7

(X,Σ,μ) bir ölçü uzayı tamdır $\Leftrightarrow$ X her bir μ - boş alt kümesi Σ σ - cebirine aittir.

Tanım:2.2.8

En az bir şekilde birbirlerinden ayrık ve sonlu sayıda dikdörtgenlerin bileşimi şeklinde gösterilebilen düzlemsel kümeye ilkel (veya basit) küme denir.

Tanım:2.2.9

X bir küme ve $\wp(X)$ de X 'in kuvvet kümesi olsun. $\wp(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu,

a-) $\mu^*(\varnothing)=0$

b-) Her $A\in\wp(X)$ için $\mu^*(A)\geq 0$

c-) Her $A\subset B\subset X$ için $\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$

d-) Her bir $n\in\mathbb{N}$ için $A_n\in\wp(X)$ ise $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$

şartlarını sağlıyorsa μ^* fonksiyonuna bir Dış ölçüm denir. Veya en büyük alt sınır A kümesinin sonlu veya sayılabilir sonuz dikdörtgenleri üzerinde alınan tüm örtüleri göstermek üzere;

$$\mu^*(A)=\inf\sum_{A\subseteq\wp(X)}\mu(A_n),$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım:2.2.10

$(X,\wp(X))$ ölçülebilir bir uzay ve $A\subset X$ alt kümesi olsun,

$$\mu_*=1-\mu^*(A^c);$$

şeklindeki ifadeye de A kümesinin İç ölçümü denir.

Aynı zamanda dış ölçümde olduğu gibi;

$$\mu_*(A)=\sup\sum_{A\supseteq\wp(X)}\mu(A_n)$$

şeklinde gösterilebilir.

Teorem:2.2.11

Bir kümenin iç ölçümü dış ölçümünden küçük veya eşittir ve

$$\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım:2.2.12

Bir A kümesinin için; $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ özelliğini sağlanıyorsa A kümesine Lebesgue anlamında ölçülebilirdir denir.

Teorem:2.2.13

$(X, \wp(X))$ Ölçülebilir bir uzay ve $A \subset X$ alt kümesi olsun; A kümesinin Lebesgue anlamında ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul;

$$\mu^*(A) + \mu^*(A^c) = 1$$

olmasıdır.

Tanım:2.2.14

$(X, \wp(X))$ Ölçülebilir bir uzay ve $A \subset X$ alt kümesi olsun; eğer A kümesi Lebesgue ölçülebilir ise A kümesinin tümleyeni olan A^c kümesi de Lebesgue ölçülebilirdir.

Tanım:2.2.15

$(X, \wp(X))$ Ölçülebilir bir uzay ve $A \subset X$ alt kümesi olsun. $\mu*(A) = 0$ ise A kümesi Lebesgue ölçülebilirdir.

Tanım:2.2.16

$(X, \wp(X))$ Ölçülebilir bir uzay ve $A \subset X$ alt kümesi olsun. Eğer (Lebesgue) ölçülebilir ise A 'nin Lebesgue ölçüsü,

$$\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$$

olarak gösterilir. Ve bundan sonra Lebesgue ölçümüne sadece ölçülebilirdir diye adlandıracağız.

Teorem:2.2.17

$(X,\wp(X))$ Ölçülebilir bir uzay ise $A_1, A_2 \subseteq X$ ' in ölçülebilir herhangi alt kümeleri olsun;

a-) $A_1 \cup A_2$ ve $A_1 \cap A_2$ kümeleri ölçülebilirdir.

b-) μ ötelemeye göre değişmez yani; $A \in \wp(X)$ ise $x + A = \{x + y : y \in A\} \in \wp(X)$

c-) $A \subseteq X$ sayılabilir bir küme ise ölçümü "0" dır. Aynı şekilde sayılabilir kümelerin sayılabilir sayıdasının bileşiminin ve kesişiminin ölçümü de "0" dır.

d-) $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \wp(X)$ ölçülebilir kümelerin sayılabilir sayıdasının bileşimi ve kesişimi de ölçülebilirdir.

Teorem:2.2.18

a-) Eğer $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ ölçüler kümelerin azalan bir dizisi ve $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ise;

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A)$$

dır.

b-) Eğer $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots\cdots$ ölçülebilir kümelerin artan bir dizisi ve $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ise;

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A)$$

dır.

Tanım:2.2.19

$\{A_n\}$ Ölçülebilir kümelerin birbirlerinden ayrık bir dizisi ve $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olduğunda;

$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ oluyorsa bu özelliğe σ-toplamsallık özelliği denir.

2.3 Ölçülebilir Fonksiyonlar

Bilindiği gibi fonksiyonların ölçümlerinin tanımı ve tanıtılması değişik yollardan yapılabilir. Bu bölümde önce reel değerli fonksiyonların ölçülebilirliği üzerinde durulacak; daha sonra genişletilmiş reel değerli fonksiyonlara genişletilerek bilinen klasik tanımı kullanacağız.

Tanım:2.3.1

E, ölçülebilir bir küme ve $f(x)$ de bu E kümesinde tanımlı ve gerçel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her K gerçel sayıları için, $f(x) > K$ olan $x \in X$ değerlerinin kümesi ölçülebilirse, f fonksiyonu E kümesinde Lebesgue anlamında ölçülebilirdir ve kısaca ölçülebilirdir denir. Bir fonksiyonun ölçülebilirliği kısaca;

$$\{x \in X : f(x) > K\} \text{ veya } E[f(x) > K]$$

şekillerinden biri ile ifade edilir.

Teorem:2.3.2

$(E, \wp(E))$ ölçülebilir bir uzay ve $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ şeklinde fonksiyonu tanımlansın. $f(x)$ fonksiyonunun bir E kümesinde ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul her K sayısı için;

a-) Her K sayısı için $E[f(x) < K]$;

b-) Her K sayısı için $E[f(x) \leq K]$;

c-) Her K sayısı için $E[f(x) \geq K]$;

kümelerinden herhangi birinin ölçülebilir olmasıdır.

Örnek:2.3.3

Bir kümesi için;

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{x} \in \text{E} \quad \text{ise} \\ 0 & \text{x} \notin \text{E} \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\chi_E(x)$ fonksiyonuna E kümesinin Karakteristik fonksiyonu denir. E ölçülebilir olduğundan $\chi_E(x)$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

Tanım:2.3.4

$\chi_E(x)$ fonksiyonu $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin karakteristik fonksiyonu olsun. Eğer her $x \in E$ için $s(x) \in \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ ise bu durumda $E_i = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = a_i\}$ olmak üzere;

$s=\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}$ olur ve her bir E kümesinin ölçülebilir olması, s fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeterlidir.

Tanım:2.3.5

$(E,\wp(E))$ Ölçülebilir bir uzay ve $f:E\to\mathbb{R}\cup\{\mp\infty\}$ şeklinde fonksiyonu tanımlansın. Eğer E ölçülebilir ise;

$$E\left[f(x)=\mp\infty\right]$$

kümeleri de ölçülebilirdir.

Tanım:2.3.6

$(E,\wp(E))$ Ölçülebilir bir uzay ve $f:E\to\mathbb{R}\cup\{\mp\infty\}$ şeklinde fonksiyonu tanımlansın. $f(x)$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli koşulun, herhangi $K_1<K_2$ gerçel sayıları için; $E\left[K_1<f(x)<K_2\right]$ kümesinin ölçülebilir olmasıdır.

Teorem:2.3.7

$(E,\wp(E))$ ölçülebilir bir uzay ve $f:E\to\mathbb{R}\cup\{\mp\infty\}$ şeklinde fonksiyonu tanımlansın. $f(x)$ fonksiyonu E kümesinde ölçülebilir ve $A\subset E$ ise, $f(x)$ fonksiyonu A kümesinde de ölçülebilirdir.

Teorem:2.3.8

$(E,\wp(E))$ ölçülebilir bir uzay ve $f_1(x),f_2(x)$ fonksiyonları E kümesinde ölçülen birer fonksiyon olsun;

a-) $f_1(x)f_2(x)$ fonksiyonu;

b-) $f_2(x)\neq 0$ ise $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ fonksiyonu da;

c-) $\max\left\{f_1(x),f_2(x)\right\}=\inf\left\{f_1(x),f_2(x)\right\}$ fonksiyonu da;

d-) $\min\left\{f_1(x),f_2(x)\right\}=\sup\left\{f_1(x),f_2(x)\right\}$ fonksiyonu da;

E kümesinde ölçülebilirlerdir.

Teorem:2.3.9

$(E,\wp(E))$ Ölçülebilir bir uzay, $\langle f_n(x)\rangle$, E kümesinde;

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise; $f(x)$ fonksiyonu da E kümesinde ölçülebilirdir.

Örnek:2.3.10

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \mathrm{x}\in\mathbb{Q}\ ,\mathrm{x}\in(0,1)\\ 0 & ; \mathrm{x}\in\mathbb{Q}^c,\mathrm{x}\notin(0,1)\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan Dirichlet fonksiyonu tanımlanan aralıkta ölçülebilirdir.

Teorem:2.3.11

Genişletilmiş reel-değerli bir f fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul;

$$A=\{x\in E: f(x)=+\infty\}\ \ ,\mathrm{B}=\{x\in E: f(x)=-\infty\}$$

kümelerinin ölçülebilir ve

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x) & ,\mathrm{x}\notin \mathrm{A}\cup\mathrm{B}\ \text{ise}\\ 0 & ,\mathrm{x}\in \mathrm{A}\cup\mathrm{B}\ \text{ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan reel değerli $f_1(x)$ fonksiyonunun ölçülebilir olmasıdır.

Tanım:2.3.12

Bir X kümesinde ölçülebilir ve en çok sayılabilir sayıda değerler alabilen fonksiyonlara Basit fonksiyon denir.

Teorem:2.3.13

$A\subset\mathbb{R}^n$ üzerinde değerli bir fonksiyonu olmak üzere A üzerinde f fonksiyonunun yakınsaklık noktasına yakınsayan bir basit fonksiyonlar dizisi (S_n) vardır. f sınırlı ise (S_n) dizisi düzgün yakınsak, f ölçülebilir ise (S_n) dizisi ölçülebilir olarak seçilebilir. f negatif olmayan reel değerli ise (S_n) dizisi her noktada monoton olarak artan alınabilir.

Teorem:2.3.14

$f(x)$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul bu fonksiyonların düzgün yakınsak bir dizisinin limiti olarak ifade edilebilmesidir.

Tanım:2.3.15

Aynı ölçülebilir bir E kümesinde tanımlanan f ve g fonksiyonları için;

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

oluyorsa o zaman f ve g fonksiyonları Eşdeğerdir denir. Ve $f \sim g$ şeklinde gösterilir. Eğer bir özellik bir E kümesinin sıfır ölçümlü bir küme oluşturan noktaların dışındaki tüm noktalar da bu özelliğe E kümesi üzerinde hemen hemen her yerde (h.h.h.) sağlanıyor denir.

Tanım:2.3.16

X ölçüm uzayı üzerinde tanımlı $f_n(x)$ fonksiyonlar dizisine, hemen hemen her yerde $x \in X$ öğesi için;

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

oluyorsa, yani bu eşitliğin sağlanmadığı noktaların kümesinin ölçümü sıfır ise, $f_n(x)$ fonksiyon dizisi hhh $f(x)$ fonksiyonuna yakınsıyor denilir

Tanım:2.3.17

$(E, \wp(E))$ Ölçülebilir bir uzay, $\langle f_n(x) \rangle$, E kümesinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi h.h.h. $f(x)$ fonksiyonuna yakınsıyorsa, $f(x)$ fonksiyonu da E kümesinde ölçülebilirdir.

Teorem:2.3.18

$(E, \wp(E))$ ölçülebilir bir uzay, $\langle f_n(x) \rangle$, E kümesinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi, ölçümü sonlu olan E kümesi üzerinde h.h.h. sonlu bir limit olan $f(x)$ fonksiyonuna yakınsasın. Her $\delta > 0$ sayısı için;

a-) $\mu(F) > \mu(E) - \delta$ ve

b-) F k.ümesi üzerinde $f_n(x)$ fonksiyon dizisi $f(x)$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsayacak şekilde, ölçülebilir bir $F \subset E$ kümesi vardır.

Tanım:2.3.19

$(X, \wp(X))$ Ölçülebilir bir uzay ve $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ f şekilde tanımlanan ölçülebilir ve reel değerli bir fonksiyon ise, f fonksiyonunu her ikisi de ölçülebilir ve negatif olmayan;

$$f^+ = \max(f, 0)$$
$$f^- = -\min(f, 0)$$

fonksiyonları cinsinden $f = f^+ - f^-$ şeklinde yazabiliriz. Ki burada f^+ fonksiyonuna f 'nin pozitif parçası, f^- fonksiyonuna f 'nin negatif parçası denir.

Tanım:2.3.20

$f(x)$, i ≠ j için $y_i \neq y_j$ olmak üzere,

$$y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$$

değerlerini alan bir fonksiyon olsun. Böylece , $f(x)$ fonksiyonu E kümesinde,

$$\int_E f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu\{x : x \in E, f(x) = y_n\}$$

eşitliğinin yanındaki seri mutlak değerce yakınsaksa, $f(x)$ basit fonksiyonu E kümesi üzerinde μ ölçümüne göre integrallenebilirdir denilir. Böylece, $f(x)$ fonksiyonu bir E kümesi üzerinde μ ölçümüne göre integrallenebiliyorsa,

$$\int_E f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu\{x : x \in E, f(x) = y_n\}$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun E kümesi üzerinde μ ölçümüne göre integrallenebilirdir denir.

Tanım:2.3.21

E kümesi üzerinde integrallenebilen $f_n(x)$ basit fonksiyonların dizisi düzgün olarak $f(x)$ fonksiyona yakınsıyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna E kümesi üzerinde μ ölçümüne göre integrallenebilirdir denir ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)d\mu = \int_E f(x)d\mu$$

şeklinde gösterilir.

Tanım:2.3.22

$(E,\wp(E),\mu)$ Ölçülebilir bir uzay, f fonksiyonu negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon ve $\int_E f^+(x)d\mu$ integrallerden en az biri sonlu olmak üzere

$$\int_E f(x)d\mu = \int_E f^+(x)d\mu - \int_E f^-(x)d\mu$$

şeklinde olsun. Eğer her iki integral sonlu ise, f fonksiyonu E bölgesinde μ ölçüsüne göre Lebesque integrallenebilir denir. Ve E bölgesinde integrallenebilir fonksiyonların sınıfı $L^1(E)$ ile gösterilir [16].

Şimdide çok defa Lebesgue integralinin mutlak integrallenebilme özelliği diye de bilinen aşağıdaki özelliği verelim.

Tanım:2.3.23

$(E,\wp(E),\mu)$ ölçülebilir bir uzay $f:E\to\mathbb{R}$, $f\in L^1(E)$ olsun. Bu takdirde $f\in L^1(E)\Leftrightarrow |f|\in L^1(E)$ dır ve bunların biri geçekliğinde

$$\left|\int_E fd\mu\right| \le \int_E |f|d\mu$$

olur [16]. Unutulmamalıdır ki, ölçülemeyen ve dolayısıyla integrallenemeyen fonksiyonlar vardır ki bunların mutlak değerleri bir integrale sahiptir. Dolayısıyla yukarıdaki Teoremden f nin öçülebilir olma şartı kaldırılamaz. Şimdide Lebesgue interallenebilmenin diğer tanımını verelim.

Tanım:2.3.24

$(E,\wp(E),\mu)$ ölçülebilir bir uzay ve $f:E\to\mathbb{R}$ fonksiyonu μ - ölçülebilir olsun. Eğer $\int_E |f|d\mu<\infty$ ise **f** fonksiyonuna E bölgesinde Lebesgue integrallenebilir denir.

Teorem:2.3.25 (Çebysev's Eşitsizliği)

$(E,\wp(E),\mu)$ Ölçülebilir bir uzay $f:E\to[0,+\infty]$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. $\alpha>0$ için $A_\alpha=\{x\in E:f(x)\geq\alpha\}$ denirse,

$$\mu(A_n)\leq\frac{1}{\alpha}\int_{A_n}fd\mu\leq\frac{1}{\alpha}\int_{E}fd\mu$$

dır [16].

Sonuç:2.3.26

$(E,\wp(E),\mu)$ ölçülebilir bir uzay ve $f\in L^1(E)$ olsun. Bu takdirde $\{x\in E:f(x)\neq 0\}$ kümesi μ altında σ - sonludur.

Tanım:2.3.27

$(E,\wp(E),\mu)$ ölçülebilir bir uzay ve $f:E\to\mathbb{R}$ fonksiyonu μ - ölçülebilir olsun.

$$\int_E|f|d\mu=0\Leftrightarrow\text{Hemen hemen her yerde } f=0$$

dır.

Sonuç:2.3.28

$(E,\wp(E),\mu)$ Ölçülebilir bir uzayı ve $f:E\to[-\infty,+\infty]$

fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir olsun. Bu takdirde h.h.h her $x\in E$ için $|f(x)|<\infty$ dur.

Tanım:2.3.29

$(E,\wp(E),\mu)$ Ölçülebilir bir uzayı ve $f\in L^1(E)$ ve $g\in(E,\wp(E))$ olsun.

$|g|\leq|f|\Rightarrow g$ integrallenebilirdir ve

$$\int_E|g|d\mu\leq\int_E|f|d\mu$$

dır.

Tanım:2.3.30

$(E,\wp(E),\mu)$ Ölçülebilir uzayı ve $f:E\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\int_E |f|\,d\mu<\infty$ şeklinde olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur:

1. Eğer her $x\in E$ için $f(x)=g(x)$ ise $\int_E f d\mu$ ve $\int_E g d\mu$ integrallerinden biri mevcut olması durumunda diğeri de mevcuttur. Ve

$$\int_E f d\mu=\int_E g d\mu$$

şeklinde gösterilir.

2. Her $\alpha\in\mathbb{R}$ için $\int_E \alpha f d\mu=\alpha\int_E f d\mu$,

3. Her $\alpha\in\mathbb{R}$ her $\int_E (f+g)d\mu=\int_E f d\mu+\int_E g d\mu$,

4. $f(x),g(x)$ fonksiyonları E kümesinde integrallenebilir ise

$$\int_E (f(x)g(x)d\mu<\infty$$

şeklindedir.

Gerçel analizde olduğu gibi, integral altında limit ele alınacaktır.

Teorem:2.3.31

$(E,\wp(E),\mu)$ Ölçülebilir bir uzayı, $g:E\to[0,1]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve $f_1,f_2,...,$ *de* E üzerinde ölçülebilir $[-\infty,+\infty]$ değerli fonksiyon olsun. Eğer h.h.h her x için

1. $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$

2. Her $n\in\mathbb{N}$ için $|f_n(x)|\le g(x)$

ise f ve f_n fonksiyonları integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\int_E f d\mu$$

şeklindedir.

Sonuç:2.3.32 (Sınırlı Yakınsaklık Teoremi)

$(E,\wp(E),\mu)$ ölçülebilir bir uzayı her bir $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in L^1$ olsun. (f_n) dizisi bir f fonksiyonuna hemen hemen yakınsak hemen hemen her yerde $|f_n| \le K$ ve μ sonlu ise f integrallenebilir ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

dır.

Teorem:2.3.33 (Fatou's Teoremi)

Negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların $(f_n(x))$ dizisi, bir E ölçülebilir kümesi üzerinde h.h.h $f(x)$ fonksiyonuna yakınsıyor ve $\int_E f_n(x)d\mu \le K$ oluyorsa E, $f(x)$ fonksiyonu E kümesinde integrallenebilir ve $\int_E f(x)d\mu \le K$ eşitsizliği sağlanır.

Yada $\int_E (\liminf_{n\to\infty} f_n(x)d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu$ şeklinde de düşünülebilir [16].

BÖLÜM 3

LEBESGUE VE SOBOLEV UZAYLARI

Bu bölümde, Lebesgue uzayı, Lebesgue uzayının özel bir durumu olan Hilbert uzayını, bu uzayların daha genellemesi olan Sobolev uzayı ve gömme Teoremlerini ile bu uzaylarda kullanılan eşitsizlikler ve notasyonlar hakkında genel bilgiler verilecektir.

3.1. L^p Uzayları

$\mathbb{R}^n$, n- boyutlu Euclidean ve bunun sınırlı olmayan ölçülebilir bir Ω alt uzayı üzerinde işlemler yapılacaktır. Ω da tanımlanan reel f(x) fonksiyonlarının yardımıyla $L^p(\Omega)$ ve $W_p^m(\Omega)$ uzayı incelenecektir.

Ω, R^n de bir bölge ve p>0 olmak üzere Ω bölgesinde tanımlı;

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

özelliğine sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $L^P(\Omega)$ uzayı denir ve

$$L^p(\Omega) = \{\text{f:f ölçülebilir fonksiyon, } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \}$$

şeklindeki kümeye $p-$ninci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir.

Yukarıdaki tanıma göre $L^1 = L$ dir. Zira f nin integrallenebilir olması ile $|f|$ nin integrallenebilir olması ile aynı şeydir. $f \in L^p$ olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $\alpha f \in L^p$ dir. Çünkü $|f|^p$ integrallenebilir olduğunda $|\alpha^p|.|f|^p$ de integrallenebilirdir. Dolayısıyla $|\alpha f|^p$ integrallenebilir. Ayrıca $f, g \in L^p$ ise

$$|f+g|^p \le (|f|+|g|)^p \le (2.\max\{|f|,|g|\})^p \le 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

olacağından $|f+g|^p$ integrallenebilir ve dolayısıyla $f+g \in L^p$ olur. Şu halde $L^p(\Omega)$ kümesi bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde $p \ge 1$ olmak üzere,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{P,\Omega} = (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

şeklindeki norma $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ f fonksiyonunun L^p-normu denir [17]. Ve bu norm ile bir Banach uzayıdır.

Aynı zamanda $\|.\|: L^p \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonunu göz önüne aldığımız da bu fonksiyon $L^p(\Omega)$ üzerinde yarı normdur.

Ω bölgesinde ölçülebilir bir f fonksiyonu için hhh yerde $|f(x)| \le K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa f fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Böyle K sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nın Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu denir. Ki buda esasında P= ∞ olduğunda $L^\infty(\Omega)$ uzayı elde edilir. Bu uzayın elemanları $f \in L^\infty(\Omega)$ ölçülebilir ve özellikle sınırlı fonksiyonlardan oluşur. Bu uzay altında tanımlanan norm;

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega}|f(x)| = \inf\{c>0; |f(x)| \le c\} \quad (3.1.1)$$

ile gösterilir. Ω uzayı sınırlı bir bölge ise bu norm;

$$\|f\|_{\infty,\Omega} = \lim_{p\to\infty}\|f\|_{p,\Omega}$$

Aynı zamanda $L^\infty(\Omega)$ uzayı (3.1.1) normu ile bir Banach uzayıdır.

Eğer $1 < p < \infty,\ 1 < p' < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olacak şekilde $p' = \frac{p}{p-1}$ sayısına p'nin eşleniği denir. Şimdide matematiğin birçok dalında kullandığımız ve aynı zamanda çalışmamızda sıkça kullanacağımız bazı önemli eşitsizlikleri teorem halinde vereceğiz.

Teorem:3.1.1 (Young Eşitsizliği)

$\varphi: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, sürekli, kesin olarak artan, $\varphi(0) = 0$ ve $\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = +\infty$, özelliklerine sahip bir fonksiyon ve $\varphi^{-1}(x) = \psi$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için;

$$\varnothing(x) = \int_0^x \varphi(u)du,\ \Psi(x) = \int_0^x \psi(u)du \qquad (3.1.2)$$

denirse, her $a,b \in [0,+\infty)$ için $a.b \le \varnothing(a) + \Psi(b)$ dır. Eşitlik sadece $b = \varphi(a)$ olması durumunda geçerlidir [5].

Teorem:3.1.2 (Hölder eşitsizliği)

p ve p', $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ koşullarını sağlayan iki sayı olsun.

$f(x) \in L^p(\Omega)$, $g(x) \in L^{p'}(\Omega)$ ise $f(x)g(x) \in L^1(\Omega)$ olur.

Yani;

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| d\mu \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (3.1.3)$$

veya

$$\int_E |f(x)g(x)| dx \le \|f(x)\|_p \|g(x)\|_{p'}$$

şeklinde tanımlanır [5].

İspat: $|g(x)| \le |f(x)|^{p-1}$ ise $|f(x)g(x)| \le |f|^p$ olur. Bu $f(x)g(x) \in L$ olduğunu gösterir. Aksi takdirde, yani;

$|g(x)| > |f|^{p-1}$ ise $|g(x)|^{\frac{1}{p-1}+1} > |f(x)| \Rightarrow |g(x)|^{\frac{1}{p-1}+1} > |f(x)g(x)| \Rightarrow |g(x)|^{p'} > |f(x)g(x)| \Rightarrow |f(x)g(x)| \in L$

olur.

Young eşitsizliğinde $\varphi(u) = u^{p-1}$ alınırsa $\Psi(u) = u^{\frac{1}{p-1}}$, $\varnothing(x) = \frac{a^p}{p}$, $\Psi(b) = \frac{b^{p'}}{p'}$ bulunur.

Buna göre (3.1.2)'den $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ yazılabilir.

(3.1.4) $\|f(x)\|_p = 0$ veya $\|g(x)\|_{p'} = 0$ ise (3.1.3) 'ün her iki tarafı sıfır olacağından eşitsizlik sağlanır.

$\|f(x)\|_p \neq 0$ ve $\|g(x)\|_{p'} \neq 0$ olsun. $a = \frac{|f(x)|}{\|f(X)\|_p}$ ve $b = \frac{|g(x)|}{\|g(x)\|_{p'}}$ alınırsa,

$$\frac{|f(x)|.|g(x)|}{\|f(x)\|_p . \|g(x)\|_{p'}} \le \frac{|f(x)|^p}{p\|f(x)\|_p^p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\|g(x)\|_{p'}^{p'}}$$

bulunur.

İki tarafın integrali alınırsa;

$$\frac{1}{\|f(x)\|_p . \|g(x)\|_{p'}} \int_\Omega |f(x).g(x) dx| \le \frac{1}{p\|f(x)\|_p^p} \int_\Omega |f(x)|^p dx + \frac{1}{p'\|g(x)\|_{p'}^{p'}} \int_\Omega |g(x)|^{p'} dx$$

Burada da

$$\int_\Omega |f(x).g(x)| dx \le \|f(x)\|_p . \|g(x)\|_{p'}$$

şeklindeki Hölder eşitsizliği elde edilir.

Özel olarak $p = 2$ için;

$\int_{\Omega} |f(x).g(x)|\,dx \le \|f(x)\|_2 . \|g(x)\|_2$ şekindeki Schwarz eşitsizliği elde edilir.

Teorem:3.1.3 (Ters Hölder Eşitsizliği)

0 <p < 1 için $p' = \frac{p}{p-1} < 0$ ve ($f \in L^p(\Omega)$) olmak üzere

$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\,dx \ge (\int_{\Omega} |f(x)|^P dx)^{\frac{1}{p}} (\int_{\Omega} |g(x)|^{P'} dx)^{\frac{1}{p'}}$ (2.1.5) olur.

Teorem:3.1.4 (İkiden Fazla Fonksiyon İçin Hölder Eşitsizliği)

İ=1,2,….m için $1 \le P_i \le \infty$ ve $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + ... \frac{1}{P_m} = 1$ olmak üzere $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ ise

$$f_1(x), ..., f_m(x) \in L^{p_i}(\Omega) \text{ olur.}$$

Bu durum;

$$\int_{\Omega} |f_1(x).f_2(x)....f_m(x)|\,d\mu \le \left(\int_{\Omega} |f_1(x)|^{p_2}\, d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_{\Omega} |f_2(x)|^{p_2}\, d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} ... \left(\int_{\Omega} |f_m(x)|^{p_m}\, d\mu \right)^{\frac{1}{p_m}}$$

ya da;

$$\left\| \prod_{i=1}^{m} f_i \right\| \le \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{p_i}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem:3.1.5 (Toplam İçin Hölder Eşitsizliği)

$f(x)$ ve $g(x)$ sonlu değerli fonksiyonlar olarak alınırsa integral yerine toplam sembolü kullanılır. Toplam için Hölder Eşitsizliği;

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i.y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} . \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'} \right)^{1/p'}, \qquad (1 \le p < \infty)$$

Teorem:3.1.6 (Minkowski Eşitsizliği)

Eğer $p \geq 1, f(x), g(x) \in L^p$ ise $f(x)+g(x) \in L^p$ dir, ve

$$\|f(x)+g(x)\|_p \leq \|f(x)\|_p + \|g(x)\|_p \quad (3.1.5)$$

olur [5].

İspat: $f(x)+g(x) \in L^p$ olduğunu göstermiştik. Eğer $p=1$ ise aşikârdır. $p>1$ olsun;

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)|.|f(x)+g(x)|^{p-1} \leq |f(x)|.|f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}$$

her iki tarafın integralini alırsak;

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p d\mu \leq \int_\Omega |f(x)|.|f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu + \int_\Omega |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu$$

olur. $f(x), g(x) \in L^p$ olduğundan $|f(x)+g(x)|^p \in L^1$ dir. $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ olacak şekilde bir p' sayısı seçelim. $p=(p-1)p'$ olacağından $|f(x)+g(x)|^{p-1} \in L^p$ dur. Hölder eşitsizliğinden;

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p d\mu \leq \|f(x)\|_p \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$+ \|g(x)\|_{p'} \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\|f(x)+g(x)\|_p{}^p \leq \left(\|f(x)\|_p + \|g(x)\|_p \right) \|f(x)+g(x)\|_p{}^{\frac{p}{p'}}$$

elde edilir. Her iki tarafı $\|f(x)+g(x)\|_p{}^p$ ile bölündüğünde ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ için;

$$\|f(x)+g(x)\|_p \leq \|f(x)\|_p + \|g(x)\|_p$$

şeklindeki eşitsizliği elde edilir.

Teorem:3.1.7 (Ters Minkowski's Eşitsizliği)

$0<p<1$ İçin $f(x), g(x) \in L^p(\Omega)$ olduğundan;

$$\| |f| + |g| \|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (3.1.6)$$

şeklinde olur.

İspat: $L^p(\Omega)$ de $f(x)=g(x)=0$ olursa aşikâr çözüm elde edilir. Aksi takdirde sol taraftaki ifade sıfırdan daha büyük olur. (3.1.6) ifadesine Ters Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$\left\| |f|+|g| \right\|_p^p = \int_\Omega \left(|f(x)+g(x)|\right)^{p-1}\left(|f(x)+g(x)|\right)dx$$

$$\geq \left(\int_\Omega |f(x)|+|g(x)|^{(p-1)p'} dx \right)^{1/p'} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right), ((p-1)p'=p)$$

$$= \left(\int_\Omega |f(x)|+|g(x)|^{p} dx \right)^{1/p'} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right)$$

$$= \left\| |f|+|g| \right\|^{p/p'} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right)$$

$$\left\| |f|+|g| \right\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Teorem:3.1.8

Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir. Ve $C_0(\Omega), C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayları $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olur. Bunun yanında, $L^p(\Omega)$ uzayı ancak ve ancak $1 < p < \infty$ ise yansımalıdır.

Teorem:3.1.9 (Riesz –Fischer Teoremi)

$(\Omega, \wp(\Omega), \mu)$ Bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $L^p(\Omega, \wp(\Omega), \mu)$ uzayı

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu altında tamdır ve Banach uzayıdır [1].

Teorem:3.1.10

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf\{c>0; |f(x)| \leq c\}$ fonksiyonu L^∞ uzayı üzerinde bir normdur. Ve L^∞ uzayı bu norma göre tamdır [1].

3.2. L^p Uzayında Yakınsaklık.

Teorem:3.2.1

f_n f fonksiyonları L^p uzayının elemanları olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna p-'inci mertebeden ortalama yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ə $\forall n \geq n_o$ için $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$

Bu yakınsaklık çeşidine L^p uzayında yakınsaklık denir. Burada $p \geq 1$ olup

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

veya (f_n) dizisi f fonksiyonuna L^p uzayında yakınsaktır $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$

Teorem:3.2.2

$(\Omega, \wp(\Omega), \mu)$ bir sonlu ölçü uzayı ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in L^p$ olsun. Ω üzerinde (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise $f \in L^p$ olup (f_n) dizisi f fonksiyonuna L^p de yakınsaktır.

Teorem:3.2.3

L^p 'deki fonksiyonların (f_n) dizisi ölçülebilir bir f fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsak, her $x \in \Omega$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq K$ olacak şekilde K sabiti varsa, ayrıca sonlu μ ise $f \in L^p$ olup (f_n) dizisi f ye p-'inci mertebeden ortalama yakınsaktır.

Teorem:3.2.4 (Ölçüsel Yakınsaklık)

$(\Omega, \wp(\Omega), \mu)$ bir ölçü uzayı, f ve f_n 'ler Ω üzerinde tanımlı, reel değerli ve ölçülebilir fonksiyonlar olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna ölçüsel yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için;

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{ x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \} \right) = 0$$

Bu tanıma göre, verilen bir dizinin yakınsaklığı tanımlanan ölçüye bağlıdır [1].

Teorem:3.2.5

(f_n) dizisi f fonksiyonuna p-ninci mertebeden ortalama yakınsak ise ölçüsel yakınsaktır.

Tanım:3.2.6

(f_n) dizisi ölçüsel cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in \Omega : \left|f_m(x) - f(x)_n\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

Teorem:3.3.7

(f_n), L^p deki fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer (f_n) bir f fonksiyonuna ölçüsel yakınsak ise ve hhh her $x \in \Omega$ için $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ olacak şekilde L^p de bir $g(x)$ fonksiyonu varsa $f \in L^p$ olup (f_n) dizisi f ye L^p de yakınsaktır.

BÖLÜM 4

4.1 $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev Uzayı ve Gömülme Teoremleri

P. mertebeden integrallenebilen ve m. mertebeden genelleştirilmiş türeve sahip olan fonksiyonların uzayına sobolev uzayı adı verilir ve; W_p^m ($veya\ W^{p,m}$) şeklinde gösterilir. Bu uzayın elemanları normlardır.

$$W_{p\to\text{integralin toplam mertebesi}}^{m\to\text{m. mertebeden genelleştirilmiş türev}} = W^{m,p}(\Omega) \ \to \text{ sobolev uzayı}$$

$\Omega \subset R^n$ sınırlı bölge olmak üzere;

$$W_p^m(\Omega) = \left\{ f : f(x) \in L^p(\Omega), D^\alpha f(x) \in L^p(\Omega) \ ve\ 1 \le |\alpha| \le m \right\} \qquad (4.1.1)$$

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{1\le|\alpha|\le m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \qquad 1 \le p < \infty$$

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \qquad \left(|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\right)$$

$p = \infty$ ise;

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} = \max_{0\le|\alpha|\le m} \|D^\alpha f\|_{L^\infty}$$

şeklindeki normları ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Teorem:4.1.1

$1 \le p < \infty$ İçin $W_p^m(\Omega)$ uzayı Banach uzayıdır [1].

Teorem:4.1.2

$1 \le p < \infty$ için $W_p^m(\Omega)$ uzayı ayrılabilir uzaydır [1].

Sobolev'in kendi adıyla tanınan bazı eşitsizlikleri ve Sobolev gömme teoremleri hakkında bazı genel bilgileri tanımlayalım.

Tanım:4.1.3.

X ve Y iki normlu fonksiyon uzayı olmak üzere;

1. X 'in tüm elemanları, Y de olacak,

2. f 'den bağımsız bir c sabiti,

$\forall f \in X$ *için* $\|f\|_y \le c\|f\|_x$ koşulunu sağlarsa X , Y 'ye gömülür ve $X \to Y$ şeklinde gösterilir.

Teorem:4.1.4 (Sobolev Eşitsizliği)

Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. Eğer $1 \le p < \infty, mp < n$ ve $f \in W_0^{\,p}(\Omega)$ (veya $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının kapanışı) ise, bu durumda;

$$\|f\|_p \le C\|f\|_{m,p}$$

eşitsizliğini sağlayan $C(n,m,p)$ sabiti vardır [1].

Açık olarak $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan , $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ yazılabilir. Bunun yanında herhangi bir $m \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$W_0^{0,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

gömmeleri geçerli olur.

Bir Ω bölgesinde tanımlı Sobolev uzaylarının birçok özelliği ve özellikle bu uzayların en önemli karakteristiklerinden birisi olan gömülme özelliği, Ω bölgesinin düzgünlüğüne bağlıdır.

$\mathbb{R}^n$ de $B_{r_1}(x)$ ve x noktasını içermeyen $B_{r_2}(y)$ açık yuvarlarını göz önüne alalım. $K_x = B_{r_1} \cap \{x + \lambda(z-x) : z \in B_{r_2}(y), \lambda > 0\}$ kümesi, tepe noktası x olan bir sonlu Koni adını alır. Bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinin her x noktası için $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün K_x konileri bir K sonlu konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde edilebiliyorsa, buna Ω bölgesinin koni özelliği vardır denir.

Ω koni özelliğine sahip bir bölge ve X uzayı da Ω üzerinde tanımlı fonksiyonların uzayı bir Banach uzay olsun bu durumda;

$$W^{m,p}(\Omega) \to X$$

gömmesi her $f \in W^{m,p}(\Omega)$ için

$$\|f\|_X \le C\|f\|_{m,p,\Omega}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde Ω, n ve K konisinin çeşitli parametrelerine bağlı bir $C>0$ sayısının varlığını gösterir [2].

Teorem:4.1.5 (Sobolev Gömme Teoremi)

Ω, R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge $m \ge 1$ ve $i \ge 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \le p < \infty$ olsun. Bu durumda;

Eğer;

i-) mp<n ise;

$$W^{i+m,p}(\Omega) \to W^{i,q}(\Omega), \quad p \le q \le q^* = \frac{np}{n - mp}$$

yada özel olarak

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega), \quad p \le q \le q^* = \frac{np}{n - mp}$$

elde edilir.

ii-) mp = n ise;

$$W^{i+p,m}(\Omega) \to W^{i,q}(\Omega), \quad p \le q < \infty$$

iii-) mp > n ise;

$$W^{i+m,p}(\Omega) \to C_B^i(\Omega)$$

gömmesi yazılabilir [2].

Diğer taraftan eğer $W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ gömmesi $1 \le q < p$ için var ise bu durum da Ω bölgesi sınırlıdır [2].

Teorem:4.1.6

$|\Omega| = \int_\Omega dx < \infty$ ve $1 \le p \le q \le \infty$ olsun. Eğer $f \in L^q(\Omega)$ ise $f \in L^p(\Omega)$ olur.

Yani;

$$\|f(x)\|_p \le |\Omega|^{(\frac{1}{p})-(\frac{1}{q})} \|f(x)\|_q$$

eşitsizliği yazılabilir. Ki buradan da;

$$L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

gömmesi geçerlidir [1].

Teorem:4.1.7

Ω, R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge , $\Omega_0 \subset (\Omega)$ bölgesinin sınırlı bir alt bölgesi, $m \ge 1$ ve j ≥ 0 şeklindeki tamsayılar ve $1 \le p < \infty$ olsun.

Bu durumda;

1. $mp < n$ ise;

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_0), \quad 1 \le q \le q^*$$

2. $mp = n$ ise;

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_0), \quad 1 \le q \le \infty$$

3. $mp > n$ ise;

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C_B{}^j(\Omega_0)$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_0), \quad 1 \le q \le \infty$$

gömmeleri kompakttır [2].

4.2.Ağırlıklı Lebesgue Uzayları

W fonksiyonu hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $W(x) > 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de yerel integrallenebilir olsun. Bu durumda W fonksiyonuna bir ağırlık fonksiyonu denir.

Özel olarak, $x \in \Omega \subset \Re^n$ için;

$d(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$ ve α reel bir sayı olmak üzere;

$$W(x) = (d(x))^\alpha$$

şeklindeki ağırlık fonksiyonuna kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu denir. W bir ağırlık fonksiyonu ve $\Omega, \Re^n$ de açık bir bölge olsun. Bu halde Ω bölgesinde;

$$\left(\int_\Omega |u|^p \, w \right) < \infty$$

olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların kümesine ağırlıklı Lebesgue uzayı denir ve $L_w^p(\Omega)$ ile gösterilir. Ağırlıklı Lebesgue uzayı;

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \, w \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

normu ile Banach uzayıdır, ve bu uzayda iç çarpım;

$$< g, f >= \int_{\Omega} g(x).f(x)\,dx \quad ; \quad f \in L_w^p(\Omega)$$

şeklinde yazılır [1].

BÖLÜM 5

5.1.Hardy Eşitsizlikleri

1920 de G.H Hardy tarafından (ispatı verilmeksizin) $a>0$, $f(x)\geq 0, p>1$ ve $\int_a^{\infty} f^p(x)dx<\infty$ (yakınsak) iken;

$$\int_a^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_a^{x} f(t)\,dt\right)^p dx\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_a^{\infty} f^p(x)\,dx \qquad (5.1.1)$$

eşitsizliği elde edilmiştir. G.H. Hardy'nin aslında temel amacı $\{a_n\}$ negatif olmayan reel terimli bir dizi olmak üzere [10];

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\leq\left(\sum_{m=1}^{\infty}{a_m}^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2\right)^{1/2}$$

şeklindeki Hilbert eşitsizliğinin yeni ve daha basit bir ispatını bulmaktı. 1925 yılındaki makalesinde p>1 ve $a_n\geq 0$ için [11].

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^p \qquad (5.1.2)$$

şeklindeki eşitsizliğini ortaya koymuştur. Aynı zamanda (5.1.1) eşitsizliğinin gerçekte f; herhangi sınırlı $(0,x)$ aralığında integrallenebilir p>1 ve f^p $(0,\infty)$ aralığında integrallenebilir ise;

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt\right)^p dx\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{\infty} f^p(x)dx \qquad (5.1.3)$$

şeklinde eşitsizliğinin sağlandığı ispatlanmıştır.

Bu eşitsizlik Hardy's eşitsizliği olarak bilinir ve bu belirttiğimiz eşitsizlik üzerinden daha genel integral eşitsizliklerinin incelenmesi için büyük bir model olmuştur. G.H Hardy (5.1.3) eşitsizliğinden sonraki ağırlık fonksiyonlarıyla ilk ünlü eşitsizliği;

$p>1$, $\varepsilon<p-1$ ve f ölçülebilir negatif olmayan fonksiyonlar için $\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p$ mümkün olan en iyi sabit sayı olmak üzere;

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt\right)^{p} x^{\varepsilon}dx \le \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^{p}\int_0^{\infty} f^{p}(x).x^{\varepsilon}dx \qquad (5.1.4)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Bu eşitsizliğin dual versiyonu (5.1.4) eşitsizliğinden $p>1$, $\varepsilon > p-1$ olmak üzere;

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_x^{\infty} f(t)dt\right)^{p} x^{\varepsilon}dx \le \left(\frac{p}{\varepsilon+1-p}\right)^{p}\int_0^{\infty} f^{p}(x).x^{\varepsilon}dx \qquad (5.1.5)$$

şeklinde göstermiştir.

Tanım:5.1.1 (Ağırlıklı Hardy Eşitsizlikleri)

Son on yıla kadar (5.1.4) ile verilen eşitsizlik $-\infty < a < b < \infty$, u,v ,(a,b) aralığında tanımlı ölçülebilir pozitif ağırlık fonksiyonlar p ve q ; $0 < p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ eşitsizlikleriyle uygun parametreler olsun.

$$\sup_{a<x<b}\left(\int_x^{b} u(t)\,dt\right)^{1/q}.\left(\int_a^{x} v^{1-p'}(t)\,dt\right)^{1/p-1} <\infty \quad \left(\frac{p}{p-1}=p'\right)$$

koşuluyla;

$$\left(\int_a^{b}\left(\int_a^{x} f(t)dt\right)^{q} u(x)dx\right)^{1/q} \le c.\left(\int_a^{b} f^{p}(x).v(x)dx\right)^{1/p} \qquad (5.1.6)$$

şeklinde eşitsizliği elde edilmiştir. Diğer taraftan (5.1.5) dual eşitsizliğinin genişlemesi olan $f \ge 0$ $1 < p \le q < \infty$ durumunda;

$$\tilde{A} := \sup_{a<x<b}\left(\int_a^{x} u(t)\,dt\right)^{1/q}.\left(\int_x^{b} v^{1-p'}(t)\,dt\right)^{1/p'} < \infty$$

koşuluyla;

$$\left(\int_a^{b}\left(\int_x^{b} f(t)\,dt\right)^{q} u(x)dx\right)^{1/q} \le c.\left(\int_a^{b} f^{p}(x).v(x)\,dx\right)^{1/p}$$

şeklinde dual eşitsizliği tanımlanır [15].

Örnek:

$0 < b < \infty$, $1 < p \le q < \infty$ olmak üzere;

$$\left(\int_0^b\left(\int_0^x f(t)dt\right)^q x^\alpha dx\right)^{1/q} \le c.\left(\int_0^b f^p(x).x^\beta dx\right)^{1/p}$$

eşitsizliğinin elde edilmesi için $\beta < p-1$, $\alpha \ge p\frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1$ şartının olması gerekir.

Gerçekten;

$$A := \sup_{0<x<b}\left(\int_0^b t^\alpha dt\right)^{1/q}.\left(\int_0^x t^{\beta(1-p')}dt\right)^{1/p'} \Rightarrow x^{\frac{\alpha+1}{q}+\frac{\beta(1-p')+1}{p'}}$$

şeklinde olur.

Yukarıdaki ifade ancak $\frac{\alpha+1}{q} + \frac{\beta(1-p')+1}{p'} \le 0$ koşuluyla olur, ki buda;

$$\beta < p-1 \quad , \quad \alpha \ge \beta\frac{q}{p} - \frac{q}{p'} = 1$$

şartıyla olur [15].

Teorem:5.1.2

$1 \le p \le q \le \infty$ ve u ile v negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere;

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \le c.\left(\int_0^\infty (f(x).v(x))^p dx\right)^{1/p} \qquad (5.1.7)$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeterli koşul $0 < r < \infty$ için;

$$A := \sup_{r>0}\left(\int_r^\infty u^q(x)dx\right)^{1/q}.\left(\int_0^r v^{-p'}(x)dx\right)^{1/p'} < \infty \qquad (5.1.8)$$

olması gerekir [6].

İspat:

$\Rightarrow$) $1 < p \le q < \infty$ olmak üzere (5.1.7) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. İntegral sınırlarında kısaltma yapılırsa;

$$\left(\int_r^\infty u^q(x)dx\right)^{1/q}.\left(\int_0^r f(x)dx\right) \le c\left(\int_0^r [f(x)v(x)]^p dx\right)^{1/p} \quad \text{yazılabilir.}$$

Bu eşitsizlikte $f(x) = v^{-p'}(x)$ dönüşümüyle;

$$\left(\int_r^{\infty} u^q(x)\,dx\right)^{1/q}.\left(\int_0^r v^{-p}(x)dx\right)\le c\left(\int_0^r\left[v^{-p'}(x)v(x)\right]^p dx\right)^{1/\mathrm{p}}$$ elde edilir.

Devam edersek;

$$\left(\int_r^{\infty} u^q(x)dx\right)^{1/q}.\left(\int_0^r v^{-p}(x)dx\right)\le c\left(\int_0^r v^{p-pp'}dx\right)^{1/\mathrm{p}}$$

$$\mathrm{p}'=\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}\text{-}1}\Rightarrow p-pp'=-p'$$

$$\left(\int_r^{\infty} u^q(x)dx\right)^{1/q}.\left(\int_0^r v^{-p'}(x)dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\le c$$

$$\left(\int_r^{\infty} u^q(x)dx\right)^{1/q}.\left(\int_0^r v^{-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}\le c$$

şeklinde elde edilir.

$\Leftarrow$: $0<r<\infty$ İçin (5.1.8) eşitsizliği sağlansın ve;

$$h(t)_{\{0\le t\le x\}}(x,t)=\left(\int_0^t v^{-p'}(s)ds\right)^{1/pp'}$$

olarak alınsın. Aşağıdaki I ile göstereceğimiz **I** integraline önce Hölder eşitsizliği ve sonrada Minkowsky integral eşitsizliği uygulanırsa;

$$I\equiv\int_0^{\infty}\left(u(x)\int_0^x f(t)\,dt\right)^q dx$$

integralini;

$$I\equiv\int_0^{\infty}\left(u(x)\int_0^x\left[f(t)v(t)h(t)\right].\left[v(t)h(t)\right]^{-1}dt\right)^q dx$$

$u(x)$ fonksiyonunu dışarıya aldığımızda;

$$I\equiv\int_0^{\infty}\left(u^q(x)\int_0^x\left[f(t)v(t)h(t)\right].\left[v(t)h(t)\right]^{-1}dt\right)^q dx$$

burada da Hölder eşitsizliği kullanıldığında;

$$I\le\int_0^{\infty}u^q(x)\left(\int_0^{\infty}\left[f(t)v(t)h(t)\right]^p dt\right)^{q/p}.\left(\int_0^x\left[v(s)h(s)\right]^{-p'}ds\right)^{q/p'}dx$$

$$B(t)=f(t).v(t).h(t) \quad , \quad A(x)=.\left(\int_0^x [v(s)h(s)]^{-p'}\,ds\right)^{q/p'}$$

şeklinde alındığında;

$$\int_0^\infty u^q(x)A(x)\left(\int_0^\infty B^p(t)dt\right)^{q/p'} dx$$

olur.

Bu son eşitsizlikte önce q/p kuvveti alınır ve sonra aşağıdaki Minkowski eşitsizliği kullanıldığında;

$$\left(\int_a^b f(x)\left(\int_a^x f(y)dy\right)^r dx\right)^{1/r} \le \int_r^b f(y)\left(\int_y^b f(x)dx\right)^{1/r} dy$$

$$I \le \left(\left[\int_0^\infty u^q(x)A(x)\left(\int_0^\infty B^p(t)dt\right)^{q/p'} dx\right]^{p/q}\right)^{q/p}$$

$$I \le \left(\int_0^\infty u^q(x).A(x)\left(\int_0^\infty B^p(t)dt\right)^{q/p'} dx\right)^{p/q} \le \int_0^\infty B^p(t)\left(\int_t^\infty u^q(x)A(x)dx\right)^{p/q} dt$$

$$I \le \left(\int_0^\infty [f(t)v(t)h(t)]^p .\left(\int_t^\infty u^q(x)\left(\int_0^x [v(s).h(s)]^{-p'}\,ds\right)^{q/p'} dx\right)^{p/q} dt\right)^{q/p}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra;

$$\left(\int_0^x [v(s).h(s)]^{-p'}\,ds\right)^{q/p'} = (p')^{q/p'}\left[\left(\int_0^x v(u)^{-p'}\,du\right)^{1/p'}\right]^{q/p'}$$

eşitliğinden yukarıdaki eşitsizlikte;

$\left(\int_0^x v(u)^{-p'}\,du\right)^{1/p'}$ yerine (5.1.8) den $A^{q/p'}(p')^{q/p'}\left(\int_x^\infty u^q(s)ds\right)^{-1/q}$ yazılırsa;

$$I \le (Ap')^{q/p'}\left(\int_0^\infty [f(t)v(t)h(t)]^p .\left(\int_t^\infty u^q(x)\left(\int_x^\infty u^q(s)ds\right)^{-1/p'} dx\right)^{p/q} dt\right)^{q/p}$$

elde edilir.

Yukarıdaki işlemler benzer olarak aşağıdaki eşitlik içinde uygulanırsa;

$$\left(\int_t^\infty u^q(x)\left(\int_x^\infty u^q(s)ds\right)^{-1/p'}dx\right)^{p/q} = p^{p/q}\left(\int_t^\infty u^q(s)ds\right)^{1/q}$$

$$\le Ap^{p/q}\left(\int_0^t v^{-p'}(s)ds\right)^{-1/p'} h'(t)Ap^{p/q}h(t)^{-p}$$

Bunu da;

$$I \le (Ap')^{q/p'}\left(\int_0^\infty [f(t)v(t)h(t)]^p .Ap^{p/q}h(t)^{-p}\,dt\right)^{q/p}$$

$$I \le (Kp')^{q/p'}K^{q/p}.p\left(\int_0^\infty [f(t)v(t)]^p\,dt\right)^{q/p}$$

Bunu da;

$$\int_0^\infty \left(u(x)\int_0^x f(t)dt\right)^q dx \le A^q p(p')^{q/p'}\left(\int_0^\infty (f(t)v(t))^p\,dt\right)^{q/p}$$

şeklinde elde ederiz. Bu eşitsizlikte her iki tarafın 1/q. kuvveti alınıp $c \le A(p)^{1/q}(p')^{1/p'}$ olduğu göz önüne alındığında;

$$\left(\int_0^\infty \left(u(x)\int_0^x f(t)dt\right)^q dx\right)^{1/q} \le c\left(\int_0^\infty (f(t)v(t))^p\,dt\right)^{1/p}$$

olur [6].

5.2.Hardy operatörleri ve Eşitsizlikleri

$f(x)$ ve (a,b) aralığında tanımlanan pozitif tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $L^s(a,b,w) = L^s(w)$ şeklindeki ağırlıklı Lebesque uzayındaki norm;

$$\|f\|_{s,w} = \left(\int_a^b |f(x)|^s\, w(x)\,dx\right)^{1/s} < \infty \quad , \quad 0 < s < \infty$$

şeklindedir.

Tanım:5.2.1

$f,(a,b)$ aralığında tanımlanan pozitif tanımlı fonksiyon ölçülebilir bir olmak üzere;

$$(Hf)(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (5.2.1)$$

şeklindeki operatöre bir Hardy operatörü denir. (5.2.1) operatörü ağırlıklı Lebesque uzayında tanımlanan norm ve (5.1.6) eşitsizliğini $f \geq 0$ için;

$$\left(\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq c\left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p}$$

$$A = A(a,b,u,v) = \sup_{a<x<b}\left(\int_x^b u(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x v(t)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

koşuluyla;

$$\|Hf\|_{q,u} \leq c\|f\|_{p,v} \qquad (5.2.2)$$

şeklinde ifade edebiliriz [13].

Tanım:5.2.2

$f,(a,b)$ aralığında tanımlanan pozitif tanımlı fonksiyon ölçülebilir bir olmak üzere;

$$(H\tilde{f})(x) := \int_x^b f(t)dt \qquad (5.2.3)$$

şeklindeki operatöre (5.2.1) operatörünün Conjugate'i denir ve bu operatörün yardımıyla $f \geq 0$ ve $\tilde{A} < \infty$ gerek ve yeterli koşuluyla;

$$\|H\tilde{f}\|_{q,u} \leq c\|f\|_{p,v} \qquad (5.2.4)$$

Hardy norm eşitsizliği elde edilir.

Tanım:5.2.3

$f,(-\infty,+\infty)$ üzerinde $f(x) \geq 0$, u ve v,$-\infty < a < b < +\infty$ aralığında tanımlı ağırlık fonksiyonları; $(Hf)(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$ şeklindeki Hardy operatörü için;

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq c\left(\int_{-\infty}^b f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p}$$

eşitsizliği her $f(x) \geq 0$ fonksiyonu için sağlanır ancak ve ancak

$$A = A(a,b,u,v) = \sup_{-\infty<x<+\infty} \left(\int_x^{\infty} u(t)dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{-\infty}^{x} v(t)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

[13] olması durumunda gerçekleşir.

Tanım:5.2.4

$f(x) \geq 0$, u ve v ağırlık fonksiyonları ve $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ Hardy operatörüyle, $g'(x) = \frac{dg}{dx}$ olmak üzere;

$$\left(\int_a^b |g(x)|^q u(x)dx \right)^{1/q} \leq c \left(\int_a^b |g'(x)|^p v(x)dx \right)^{1/p}$$

$$\|g(x)\|_{q,u} \leq c \|g'(x)\|_{p,v}$$

$$A = \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b u^q(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_a^x v^{-p'}(t)dt \right)^{1/p'} < \infty$$

gerek ve yeter koşuluyla sürekli türev fonksiyonu şeklinde diferansiyel Hardy eşitsizliği elde edilir.

Tanım:5.2.5

$f(x) \geq 0$ için;

$$(Hf)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \qquad (5.2.5)$$

şeklindeki operatöre ortalama Hardy operatörü denir.

Tanım:5.2.6

$f(x) \geq 0$ için;

$$(Gf)(x) := \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln f(t)\, dt \right) \qquad (5.2.6)$$

şeklinde gösterilen G operatörüne Geometrik ortalama operatörü denir. Bu fonksiyonun ağırlık integral eşitsizliği; $u(x)\geq 0, v(x)\geq 0$ ve $0<p$, $q<\infty$ için**;**

$$\left(\int_0^{\infty}(Gf)^q(x)u(x)dx\right)^{1/q}\leq c\left(\int_0^{\infty}f^p(x)v(x)dx\right)^{1/q} \qquad (5.2.7)$$

şeklindedir.

Tanım:5.2.7

$f(x)\geq 0$, u,v $(0,\infty)\times(0,\infty)$ bölgesinde ağırlık fonksiyonları ve $1<p\leq q<\infty$ için;

$$(H_2f)(x,y)=\int_0^x\int_0^x f(s,t)\,dtds \qquad (5.2.8)$$

operatörüne iki boyutlu Hardy operatörü denir. Buna bağlı olarak;

$$\left(\int_0^x\int_0^x(H_2f)^q(x,y)u(x,y)\,dxdy\right)^{1/q}\leq c\left(\int_0^x\int_0^x f^p(x,y)v(x,y)\,dxdy\right)^{1/p} \qquad (5.2.9)$$

$$A:=\sup_{x>0,y>0}\left(\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}H(s,t)\,dtds\right)^{1/q}\times\left(\int_0^x\int_0^y w^{1-p'}(s,t)\,dtds\right)^{1/p'}<\infty$$

gerek ve yeter koşul eşitsizlik elde edilir [14].

Tanım:5.2.8 Yüksek Mertebeden Hardy Eşitsizliği

$k>1$, $\mathrm{AC}^{k-1}(0,\infty)$ $k\in\mathbb{N}$**,** $(0,\infty)$ üzerinde tanımlı $(k-1)$. mertebeye kadar mutlak sürekli türeve sahip fonksiyonların sınıfı $g\in\mathrm{AC}^{k-1}(0,\infty)$ olmak üzere k. mertebeden Hardy eşitsizliği; u,v ağırlık fonksiyonları olmak üzere;

$$\left(\int_0^{\infty}|g(x)|^p u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\left(\int_0^{\infty}\left|g^{(k)}(x)\right|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (5.2.10)$$

şeklindedir [13].

Tanım:5.2.9

$k>1$, $\mathrm{AC}^{k-1}(0,\infty)$ $k\in\mathbb{N}$, $g\in \mathrm{AC}^{k-1}(0,\infty), u, v$ ağırlık fonksiyonları için (5.2.10) eşitsizliğini $g(\infty)=g'(\infty)=...=g^{(k-1)}(\infty)=0$ olacak şekilde her g fonksiyonu sağlar ancak ve ancak;

$$A := \max(A_{k,0}, A_{k,1}) < \infty \text{ ve } \frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p} \text{ olmak üzere}$$

$$A_{k,0} := \begin{cases} \sup\limits_{t>o}\left(\int\limits_0^t (t-x)^{(k-1)q}\, u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_t^\infty v(x)^{1-p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}, & p\le q \\ \left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^t (t-x)^{(k-1)q}\, u(x)dx\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\limits_t^\infty v(x)^{1-p'}dx\right)^{\frac{r}{q'}} v(t)^{1-p'}dt\right)^{\frac{1}{r}}, & p>q \end{cases}$$

$$A_{k,1} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0}\left(\int\limits_0^t u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^\infty (x-t)^{(k-1)p'} v(x)^{1-p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}} & \text{,p} \le \text{q} \\ \left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^t u(x)dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int\limits_t^\infty (x-t)^{(k-1)p'} v(x)^{1-p'}dx\right)^{\frac{r}{p'}} u(x)dx\right)^{\frac{1}{r}} & \text{,p>q} \end{cases} \qquad (5.2.11)$$

ki bu da şunu gösterir ki $A\approx C$ dir [13].

Tanım:5.2.10

Ağırlıklı $L^p(0,1)$ uzayında tanımlı $0<\alpha\le 1$, $x>0$ için;

$$(R_\alpha f)(x)=\int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)dy \qquad (5.2.8)$$

operatörüne Riemann-Liouville operatörü denir [8].

Tanım:5.2.11

Ağırlıklı $L^p(0,1)$ uzayında tanımlı $0<\alpha\le 1$, $x>0$ için;

$$(W_\alpha f)(x)=\int_x^\infty (y-x)^{\alpha-1} f(y)dy \qquad (5.2.9)$$

operatörüne Weyl operatörü denir [8]. Bu operatör Riemann-Liouville operatörü nün eşleniğidir.

Tanım:5.2.12 (Kernel Fonksiyonu)

$K(x,t)$, $R^+ \times R^+$ da tanımlanmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan ifadeye kernel (veya çekirdek) fonksiyonu denir.

1-) $x > t$ için $k(x,t) > 0$

2-) $k(x,t)$ x 'de azalmayan, y 'de artmayan

3-) $0 \le t \le z \le x$ Olmak üzere $k(x,t) \approx k(x,z) + k(z,t)$ [13].

Bu tanımdan hareketle;

$$(Kf)(x) := \int_a^x k(x,t) f(t) dt \ , \ x \in (a,b) \qquad (5.2.10)$$

şeklindeki operatör genel Hardy operatörlerinden biri olur.

Özel olarak $(a,b) = (0,\infty)$ alınırsa;

$$(Kf)(x) := \int_a^x k(x,t) f(t) dt \ , \ x > 0 \qquad (5.2.11)$$

şeklinde bir operatör olur [13].

Tanım:5.2.13

$k(x,t)$ kernel fonksiyon olmak üzere (5.2.11) operatörünün conjugate'i;

$$(K\tilde{f})(x) := \int_x^\infty k(t,x) f(t) dt \ , \ x > 0 \qquad (5.2.12)$$

şeklinde olur.

Tanım:5.2.14

$k(x,t)$ çekirdek fonksiyonu, $-\infty \le a < b \le +\infty$ ve u, v ağırlık fonksiyonları ve $(Tf)(x) = \int_a^b k(x,t) f(t) dt$ şeklindeki operatörü için;

$$\left(\int_a^b |Tf(x)|^q u(x) dx \right)^{1/q} \le c \left(\int_a^b |f^p(x)| v(x) dx \right)^{1/p} \qquad (5.2.13)$$

veya

$$\|Tf\|_{q,u} \le c \|f\|_{p,v}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu eşitsizliğe Genel ağırlıklı norm eşitsizliği denir [13].

Tanım:5.2.15

$1 < p$, $q < \infty$, $0 \le f \downarrow$ (veya artan fonksiyon), $\widetilde{T}$ ve g T'nin conjugate'i olan keyfi negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere;

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \left(\tilde{T}g \right)(t)dt \right)^{p'} \left(\int_0^x v(t)dt \right)^{-p'} v(x)dx \right)^{1/p'} \le c \left(\int_0^\infty g^{q'}(x) u^{1-q'}(x)dx \right)^{1/q'} \qquad (5.2.14)$$

eşitsizliği vardır.

Teorem:5.2.16

$1 < p,q < \infty$ **ve** $V(\infty) = \infty$ için $V(x) = \int_0^x v(t)dt$ olacak şekilde u, v ağırlık fonksiyonları olsun.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p'} \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\left(\int_0^\infty u(x) \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^q dx \right)^{1/q} \le c. \left(\int_0^\infty v(x) f^p(x)dx \right)^{1/p}$$

denklemin eşitsizliği;

1-) $1 < p \le q < \infty$ için;

$$A_0 : = \sup_{r>0} \left(\int_0^r v(x)dx \right)^{1/p} \left(\int_0^r u(x)dx \right)^{-1/q} < \infty$$

$$A_1 : = \sup_{r>0} \left(\int_0^r x^{p'} v^{-p'}(x) v(x)dx \right)^{1/p'} \times \left(\int_r^\infty x^{-q} u(x)dx \right)^{1/q} < \infty$$

şeklinde olmak üzere $\max\left(A_0, A_1 \right) < \infty$.

2-) $1 < p < q < \infty$ için;

$$B_0 = \left(\int_0^{\infty} \left(\int_0^x t^{p'} v^{-p'}(t) v(t) dt \right)^{-r/p} \right) \times \left(\left(\int_x^{\infty} t^{-q} u(t) dt \right)^{r/p} x^{-q} u(x) dx \right)^{1/r} < \infty$$

$$B_1 = \left(\int_0^{\infty} \left(\int_0^x v(t) dt \right)^{-r/p} \times \left(\int_0^x u(t) dt \right)^{r/p} u(x) dx \right)^{1/r} < \infty$$

olmak üzere; $\max(B_0, B_1) < \infty$ gerek ve yeter koşul ile tüm negatif olmayan azalmayan fonksiyonları için sağlanır [13].

BÖLÜM 6

6.1.Hardy-Steklov Operatörleri

Bu bölümde çalışmamızın temeli olan Hardy - Steklov operatörlerini ve bu operatörler üzerinde tanımlı norm eşitsizliklerini elde etmeye çalışacağız. Şimdide;

$$t \in (0,\infty) \ , \ f = f(t) \geq 0 \text{ Olmak üzere; } (Hf)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

şeklindeki klasik Hardy operatörünü ele alalım. Bu operatörün genişlemesi olan $[0,\infty]$ aralığında;

$$b(x) = \begin{cases} 0 & ; \ \mathrm{x} = 0 \\ \\ \infty & ; \ \mathrm{x} = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan kesin olarak artan diferansiyellenebilir $b(x)$ fonksiyonu ile

$$(Tf)(x) = \int_0^{b(x)} f(t)dt \qquad 0 < \mathrm{x} < \infty \qquad (6.1.1)$$

operatörünü elde edebiliriz ve aynı zamanda ağırlıklı Hardy eşitsizliğiyle;

$$\|Tf\|_{q,u} \leq c\|f\|_{p,u} \qquad (6.1.1)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu eşitsizlik $u(x) = u\left(b^{-1}(x)\left(b^{-1}\right)'(x)\right)$ ağırlık fonksiyonuyla;

$$\int_0^\infty (Tf)^q(x)u(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_0^{b(x)} f(t)dt\right)^q u(x)dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^y f(t)dt\right)^q u\left(b^{-1}(y)\right)\left(b^{-1}\right)'(y)dy$$

$$= \int_0^\infty (Hf)^q(y)u(y)dy$$

elde edilir.

$y = b(x) \Leftrightarrow x = b^{-1}(y)$ olacak şekilde $1 < p \leq q < \infty$ için;

$$\|Hf\|_{q,u} \leq c\|f\|_{p,v}$$

$$A=\sup_{y>0}\left(\int_{y}^{\infty}u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_{0}^{y}v^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'}<\infty$$

gerek ve yeter koşul ile eşitsizliği elde edilir [13].

Tanım:6.1.1

$a=a(x),b=b(x),[0,\infty]$ aralığında $0<x<\infty$, $a(0)=b(0)=0$, $a(x)<b(x)$ ve $a(\infty)=b(\infty)$ şeklinde tanımlanan sürekli artan diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $0<t<\infty$, $f=f(t)\geq 0$ için;

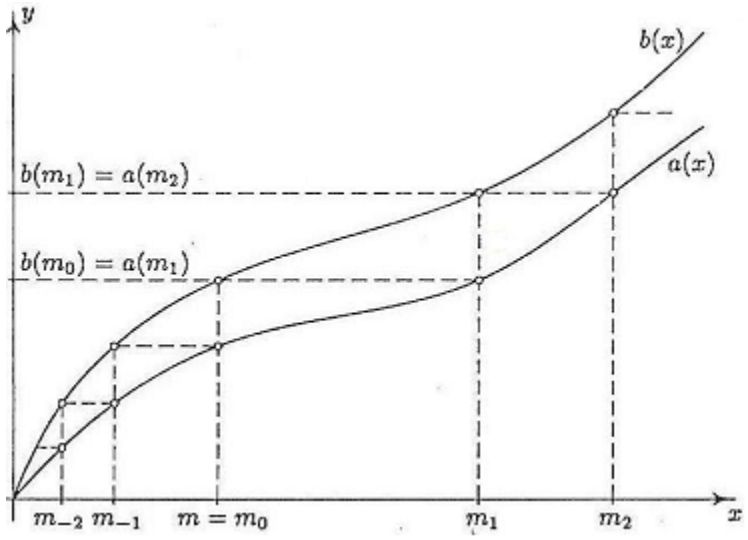
$$(Tf)(x):=\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)dt \qquad (6.1.2)$$

operatörüne Hardy- Steklov operatörü denir.buradaki $a(x)$ ve $b(x)$ fonksiyonları aralarında $a(0)=b(0)=0, x>0$ için a(x)<b(x) , ve $a(\infty)=b(\infty)=\infty$ koşulları sağlasınlar. a^{-1} ve b^{-1} var olduğunda ve artan olduğunda $\{m_k\}$ $k\in\mathbb{Z}$ dizi aşağıdaki koşullarını

$$m>0,\ m_0=m,\ m_{k+1}=a^{-1}(b(m_k)),\ k\geq 0$$

$$m_k=b^{-1}(a(m_{k+1})),\ k<0$$

Sağlayan Açıkça her $k\in\mathbb{Z}$ için $a(m_{k+1})=b(m_k)$ şeklinde bir dizi tanımlanmalıdır. Ve geometrik olarak ta;



şeklindedir.

Teorem:6.1.2

$0 < t < x < \infty$, $a(x) < b(x)$, u, v ağırlık fonksiyonları ve $T : L^p(v) \to L^q(v)$ sınırlı dönüşümüyle; $(0 < p \le q < \infty)$ için;

$$\left(\int_0^{\infty} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \le c \left(\int_0^{\infty} f^p(x)v(x)dx \right)^{1/p}$$

$A := \sup \left(\int_t^x u(s)ds \right)^{1/q} \left(\int_{a(x)}^{b(t)} v^{1-p'}(s)ds \right)^{1/p'} < \infty$ gerek ve yeter koşul eşitsizliği elde edilir.

Teorem:6.1.3

f, $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $\gamma > 0$ için

$$(S_\gamma f)(x) = \int_{x-\gamma}^{x+\gamma} f(t)dt$$

operatörüne Steklov operatörü denir. Bu operatörler için;

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{x-\gamma}^{x+\gamma} f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \le c \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x)v(x)dx \right)^{1/p}$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım:6.1.4

$(Tf)(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ olmak üzere;

$$(T\tilde{f})(x) = \int_{b^{-1}(x)}^{a^{-1}(x)} f(t)dt$$

şeklindeki operatöre T'nin Conjugate denir [13].

Tanım:6.1.5

$x, y \in R^n$, $a(|x|) < |y| b(|x|)$ olsun;

$$(H_n f)(x) = \int_{a([x])<|y|<b(|x|)} f(y)dy$$

operatörüne n-boyutlu Hardy-Steklov operatörü denir. Aynı zamanda $f \geq 0$, $u(x), v(x), R^n$ de ağırlık fonksiyonları olmak üzere;

$\left(\int_{R^n} (H_n f)^q (x) u(x) dx \right)^{1/q} \leq c \left(\int_{R^n} f^p (x) v(x) dx \right)^{1/p}$ eşitsizliği yazılabilir [13].

6.2.Hardy-Steklov Operatörleri İçin C'nin Bulunması

Tanım:6.2.1

u ve v ağırlıklı fonksiyonların karekterasyonu $(Tf)(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ operatörü ile elde edilmiştir. Burda a ve b negatif olmayan fonksiyonlar ve $L^p{}_u(0,\infty)$ den $L^q{}_v(0,\infty)$ $o < p,q < \infty, p \geq 1$, aralığında sınırlıdır. T İçin gerek ve yeterli koşul monoton fonksiyonların konileri ile sınırlandırılmıştır. Uygulanmasıyla fonksiyonların karşılaştırılması bir ağırlık eşitsizliği verir ve türev ile Steklov operatörü için ağırlık karakterizasyonudur. Burada;

$$(Tf)(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \qquad (6.2.1)$$

dönüşümleri incelendi. Burada a ve b artan diferansiyellenebilir fonksiyonlar öyle ki; $a(0) = b(0) = 0$, her $x \in (0,\infty)$ ve $a(\infty) = b(\infty) = \infty$ için $a(x) < b(x)$ şeklindedir.

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty f^p (x) v(x) dx \right)^{1/p} \text{ , 0<p,q<}\infty \qquad (6.2.2)$$

özel olarak u ve v ağırlık fonksiyonları üzerindeki koşullarla (6.2.1) denklemine denktir. Örneğin; (Teorem:6.2.3) eğer $1 < p \leq q < \infty$ ise (6.2.2) denklemini sağlar ancak ve ancak ;

$$K: = \sup \left(\int_t^x u(s)\,ds \right)^{1/q} \left(\int_{a(x)}^{b(t)} v^{1-p'}(s)\,ds \right)^{1/p'} < \infty \qquad (6.2.3)$$

(6.2.3) eşitsizliği olursa sağlar.

Buradaki supremum tüm x'ler için alınmıştır. $t < x$ ve a(x)<b(t)'dir. Ayrıca (6.2.2) deki en küçük C sabiti K ile karşılaştırılabilir $K \le C \le 2 p^{\frac{1}{p}} (p')^{\frac{1}{p'}} K$ şeklinde olur [10].

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^{b(x)} f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \le C \left(\int_0^\infty f^p(x) v(x) dx \right)^{1/p} \text{, } 0<p,q<\infty \qquad (6.2.4)$$

(6.2.4) hardy eşitsizliğine karşılık gelen ağırlık karekterizasyonu şeklindedir.

Tabi (6.2.4) eşitsizliği eğer $1 < p \le q < \infty$ için sağlar ancak ve ancak;

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^{b(t)} v^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_t^\infty u \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \qquad (6.2.5)$$

şelindeki (6.2.5) sağlanması ile gerçekleşir.

Fakat bu biraz daha kısıtlayıcıdır.

Örneğin; $b(x) = 2a(x) = x$, v(x)=x^β, ve u(x)=x^α ise bu durumda (6.2.3) sağlar ancak ve ancak $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta+1}{q} + \frac{1}{p'}$, sağlanması durumunda olur. Diğer taraftan (6.2.5) sağlar ancak ve ancak $\beta < -1$ için sağlar.

Bir başka değişle $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^+)$, $f(0) = f(\infty) = 0$ olsun. Bu durumda Grisvard, [6] ve Jakovlev [8] tarafından; $1 < p < \infty$, $\lambda \ne \frac{1}{p}$ için;

$$\int_0^\infty |f(x)|^p x^{-\lambda p} dx \le C \int_o^\infty |f'(x)|^p x^{(1-\lambda)p} dx$$

$$\int_0^\infty |f(x)|^p x^{-\lambda p} dx \le C \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+\lambda p}} dxdy \qquad (6.2.6)$$

eşitsizliği bulunmuştur [12].

Doğal olarak (6.2.6) denklemindeki hangi sağ tarafın daha büyük olduğunu sormamız gerekir. Bir taraf f 'nin türevini içerirken diğeri f 'yi içermektedir.

$(Tf)(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ operatörüne ağırlık karekterizasyonunun uygulanması ile bu soruya şöyle bir cevap verebiliriz ki $C^{(1)}$ fonksiyonları için;

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+\lambda p}} dxdy \le C \int_0^\infty |f'(x)|^p x^{(1-\lambda)p} dx, \quad 1<p<\infty \qquad (6.2.7)$$

eşitsizliği $0<\lambda<1$ için sağlanır.

Son zamanlarda monoton fonksiyonların konileri üzerinde tanımlanmış olan Hardy operatörlerle dönüşüm özellikleri üzerinde dikkate değer bir ilgi vardır.

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, ve $0.\infty$ açılımlarıda "0" alınmıştır. $A \approx B$ demek $\frac{A}{B}$ 'nin alttan ve üstten bir sabit ile sınırlı olduğunu göstermektedir.

$C^n(E)$ n. dereceden türevi olan fonksiyonların uzayıdır. $\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli artan diferansiyellenebilir a ve b fonksiyonları alalım. Öyle ki; $a(0)=b(0)=0, x>0$ için a(x)<b(x) , ve $a(\infty)=b(\infty)=\infty$ koşulları sağlasınlar. a^{-1} ve b^{-1} var olduğunda ve artan olduğunda $\{m_k\}$ $k \in \mathbb{Z}$ dizi aşağıdaki koşulları

$$m>0,\ m_0 = m,\ m_{k+1} = a^{-1}(b(m_k)),\ k \ge 0$$
$$m_k = b^{-1}(a(m_{k+1})),\ k<0 \qquad (6.2.8)$$

sağlasın. Açıkça her $k \in \mathbb{Z}$ için $a(m_{k+1}) = b(m_k)$ şeklindedir [12].

Lemma:6.2.2

m sabit bir sayı $\{m_k\}$ $k \in \mathbb{Z}$ (6.2.8)

ile tanımlanmış bir dizi olsun. Bu durumda $m_k < m_{k+1}$ olmak üzere;

$$\lim_{k\to\infty} m_k = \infty$$
$$ve$$
$$\lim_{k\to-\infty} m_k = 0$$

dır [12].

İspat:

$a(m_k) < b(m_k)$, a^{-1} olduğunda her $k \in \mathbb{Z}$ İçin $m_k < m_{k+1}$ dir. $\{m_k\}$ monotonluğunu $M^- \in [0,\infty)$ varlığı sağlar ve $M^+ \in (0,\infty]$ dır. Öyle ki;

$$k \to -\infty \text{ İken } m_k \to M^- \text{ ve } k \to +\infty \text{ iken } m_k \to M^+ \text{ gider.}$$

a ve b ürekli olduğundan;

$$b(M^-) = \lim_{k\to\infty} b(m_k) = \lim_{k\to\infty} a(m_{k+1}) = a(M^+)$$

şeklinde olur.

Benzer şekilde $b(m^+) = a(m^+)$ dır. Ancak her $x \in (0,\infty)$ için $a(x) < b(x)$ olur.

Böylece $M^- = 0$ ve $M^+ = \infty$ istenildiği gibi sağlanır. (6.2.1) deki T operatörünün ağırlıklı norm eşitsizliklerini çalışmak için yani;

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \le C \left(\int_0^\infty f^p(x)v(x)dx \right)^{1/p} \text{ , } 0<p,q<\infty \text{ , } f \ge 0 \quad (6.2.9)$$

durumu için;

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\omega\, dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \le C \left(\int_0^\infty f^p(x)\omega\, dx \right)^{1/p} \text{ , } 0<p,q<\infty, \text{ } f \ge 0 \qquad (6.2.10)$$

$\omega = u^{1-p'}$ için eşitsizliğini ele almak daha uygundur. Ayrıca;

$v_a(y) = v(a^{-1}(y))(a^{-1})'(y)$ yazabiliriz, ki eğer $y = a(x)$ ise yani $v_a(y)dy = v(x)dx$ benzer şekilde v_b de tanımlanır.

Teorem:6.2.3

u ve v ağırlıklı fonksiyonları olsun. Bu durumda öyle bir C sabiti vardır ki (6.2.9) denklemini sağlar ancak ve ancak $1 < p \le q < \infty$ için;

$$K := \sup \left(\int_t^x u(s)ds \right)^{1/q} \left(\int_{a(x)}^{b(t)} v^{1-p'}(s)ds \right)^{1/p'} < \infty \quad (6.2.11)$$

denklemini sağlaması gerekir. Burada supremum tüm x'ler için alınmıştır. Ve $t \le x$'dir. Ve $a(x) < b(t)$ dir. Ayrıca (1) deki en iyi sabit;

$$K \le C \le 2p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}K$$

şeklindedir [12].

Tanım:6.2.4

(u,v) ağırlıklı çiftler $Tf(x)=g(x)\int_{s(x)}^{h(x)} f$, $f\geq 0$ operatörü için karakterize edilmesini sağlayacağız. Burada s ve h artan ve sürekli fonksiyonlardır. Öyle ki $0<q<p$ için (p,q) güçlü tiptendir ve $1<p<\infty$ için (p,q) zayıf tiptendir.

Zayıf tipi için elde edilen sonuçlar yeni iken güçlü tipi için elde edilen karakterizasyonlar Heinig ve Sinnamon (1997) tarafından ispatlanmıştır. Ki bizde s ve h nın diferansiyellenebilirlik özelliklerini göz ardı ettik. Ve;

$$\Phi(x)=\sup\left(\int_c^d g^q w\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{s(d)}^{h(c)} v^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

ile verilen karekterize edilen güçlü (p,q), $p<q$ eşitsizliği elde edilmiştir.

Burada; $\Phi(x)$;, $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ için $L^r(g^q w)$'ye aittir, ve supremum tüm c ve d'ler için alınmıştır. Öyle ki; $c\leq x\leq d$ ve $s(d)\leq h(c)$'dir.

$Tf(x)=g(x)\int_{s(x)}^{h(x)} f$, $f\geq 0$ şeklinde verilen Hardy-Steklov operatörünü ele alalım. Burada g ölçülebilir pozitif bir fonksiyon ve s ve h fonksiyonlarıda (a,b) aralığında tanımlanmıştır. Her $x\in(a,b)$ için $s(x)\leq h(x)$ dir.

Özel durumlar için Hardy operatörü $(Tf)(x):=\int_0^x f(t)dt$, Hardy ortalama operatörü $(Tf)(x):=x^n\int_0^x f(t)dt$ ve Steklov operatörü $(Tf)(x):=\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$ çok geniş bir şekilde referanslarla belirttiği gibi çalışılmıştır. T operatörü için ağırlıklı zayıf ve güçlü (p,q) eşitsizlikleri birçok araştırmaçı tarafından çalışılmıştır. $1<p\leq q<\infty$ durumu için kesinlikle artan ve diferansiyellenebilir h fonksiyonları için Heinig ve Sinnamon (1997);

$$\left(\int_a^b \left(|Tf|\right)^q w dx\right)^{1/q}\leq C\left(\int_{s(a)}^{h(b)} f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p},\ f\geq 0 \quad (6.2.12)$$

şeklindeki ağırlıklı güçlü tip eşitsizliğini karakterize etmişlerdir.

Burada $s(a)=\lim_{x\to a^+} s(x)$ ve $h(b)=\lim_{x\to b^-} h(x)$ olmak üzere (6.2.12) sağlanabilmesi için ancak ve ancak;

$$\sup\left(\int_t^x g^q w\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{s(x)}^{h(t)} v^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty \qquad (6.2.13)$$

olması gerekir.

Bilindiği gibi $0<q<p$ ve $1<p<\infty$ durumları farklıdır. O halde bu durumlar için aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir [3].

Teorem:6.2.5

$(0,\infty)$ aralığında tanımlanan kesin artan her $x\in(0,\infty)$ için $s(0)=h(0)=0,\ \mathrm{s(x)}\le\mathrm{h(x)}$ koşulları ile diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $s(\infty)=h(\infty)=\infty$ olsun. g bir pozitif ölçülebilir fonksiyon olsun.

$$0<q<p,\ 1<p<\infty,\ \frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p},\ \text{ve } w \text{ ve } v\ (0,\infty)$$

aralığında tanımlı negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. $(h^{-1}\circ s)^k$ k. kez tekrarlı bileşke fonksiyon olsun. Ve $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$; $M_o=h^{-1}(1), M_{k+1}=s^{-1}(h(M_k))$, k>0 için tanımlanan bir dizi ve $k<0$ için $M_k=h^{-1}(s(M_{k+1}))$, olsun. Bu durumda öyle bir C sabiti vardır ki (6.2.12) denklemini sağlar ancak ve ancak aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar;

$$\left(\int_0^{\infty}\int_{h^{-1}(s(t))}^{t}\left(\int_{s(t)}^{h(x)} v^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_x^t g^q w\right)^{\frac{r}{q}} g^q(x)w(x)dx\sigma(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}<\infty$$

ve

$$\left(\int_0^{\infty}\int_{t}^{s^{-1}(h(t))}\left(\int_{s(x)}^{h(t)} v^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_t^x g^q w\right)^{\frac{r}{q}} g^q(x)w(x)dx\sigma(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}<\infty$$

şeklinde elde edilir [3].

Burada σ

$$\sigma(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\chi_{(M_k,M_{k+1})}(t)\frac{d}{dt}(h^{-1}\circ s)^k(t)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **Normalleştirici fonksiyon** denir.

Reel sayı doğrusu üzerinde bulunan bir ξ ölçümü s ve h için bir normalleştirme ölçüsü olarak adlandırılır. Şayet C_1 ve C_2 şeklindeki iki pozitif sabiti için;

$$C_1 \le \xi\left[s(t), h(t)\right] \le C_2$$

tüm pozitifler için sağlanır. Eğer ξ reel sayı doğrusunun bir alt kümesi üzerinde tanımlı bir sayma ölçüsü ise bu durumda ξ normalleştirme ölçüsüdür.

Ayrık normalleştirme ölçüsünün varlığı bir hipotez olarak s ve h fonksiyonların monotonluğundan daha zayıftır. Bununla birlikte, $0 < q < p$, $1 < p < \infty$ durumları için normalleştirme ölçüsü Teorem:6.2.5'deki şartlarda σ 'nın oynadığı rolden daha açık bir şekilde olduğu görülür. Ayrıca bir ayrık normalleşme ölçüsünün oluşumu birazda komplikedir. Bundaki amaç bir normalleştirme ölçüsü iki katlı integral içeren veya içermeyen yeni bir karekterizasyon şartını sağlayan Teorem:6.2.5'tekini sağlamaktır [3].

Farzedelim ki s ve h fonksiyonları artan ve sürekli olsun ve bunun için uygun bir $\Omega = \{x \in (a,b) : s(x) < h(x)\}$ bölgesi ele alınmıştır.

Lemma:6.2.6

$s, h : (a,b) \to \mathbb{R}$ tanımlı her $x \in (a,b)$ için $s(x) \le h(x)$ olacak şekilde sürekli artan fonksiyonlar olsunlar. $\{(a_j, b_j)\}$ dizisi de Ω açık bölgesine bağlı bileşenler olsun. Bu durumda;

a-) $(s(a_j), h(b_j)) \cap (s(a_i), h(b_i)) = \varnothing$, $j \ne i$ için

b-) Her j için ; $\{m_k{}^j\}$, aşağıdaki şartları sağlayan bir dizi vardır.

i-) $a_j \le m_k{}^j \le m_{k+1} \le b_j$

ii-) $(a_j, b_j) = \bigcup_k (m_k{}^j, m_{k+1}{}^j)$

iii-). $s(m_k{}^j) \le h(m_k{}^j)$ k ve j için ve eğer $a_j < m_k{}^j < m_{k+1} < b_j$ ise

şeklindeki koşulları sağlar [3].

Teorem:6.2.7

s ve h (a,b) aralığında tanımlı her $x \in (a,b)$ için $s(x) \le h(x)$ şartlarını sağlayan artan ve sürekli fonksiyonlar olsun g 'de, (a,b) aralığı üzerinde tanımlı pozitif tanımlı bir

ölçülebilir fonksiyon olsun. w (a,b) aralığında ve v 'de $(s(a),h(b))$ aralıklarında tanımlı ölçülebilir negatif olmayan fonksiyon olsunlar. q,p ve r'de $0<q<p$, $1<p<\infty$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir;

i-) $\left(\int_a^b \left(|Tf|\right)^q w dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_{s(a)}^{h(b)} f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p}$, f ≥ 0

ii-) (a,b) aralığında $s(d_i)\le h(c_i)$ olacak şekilde ayrık aralıklarının her $\{(c_i,d_i)\}$ dizisi için $\sum_i \left(\int_{c_i}^{d_i} g^q w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{s(d_i)}^{h(c_i)} v^{1-p'}\right)^{\frac{r}{p'}} \le C$ olacak şekilde C pozitif sayısı vardır.

iii-) $\Omega=\{x\in(a,b): s(x)<h(x)\}$ bölgesinin her bağlı (a_j,b_j) bileşimlerinin Lemma:6.2.6 **b'yi** sağlayan $\{m_k{}^j\}$ olacak şekilde;

$$\psi_1=\sum_i \left(\int_{m_k{}^j}^{x} g^q w\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{s(x)}^{h(m_k{}^j)} v^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \chi_{(m_k{}^j, m_{k+1}{}^J)}(x)$$

ve

$$\psi_2=\sum_{j,k} \left(\int_{x}^{m_{k+1}{}^J} g^q w\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{s(m_{k+1}{}^J)}^{h(x)} v^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \chi_{(m_k{}^j, m_{k+1}{}^J)}(x)$$

$L^r(g^q w)$ aittir.

iv-) $\Phi(x)=\sup\left(\int_c^d g^q w\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{s(d)}^{h(c)} v^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$ fonksiyonu $L^r(g^q w)$ aittir. Ki burada supremum bütün c ve d 'ler için $a<c\le x\le d<b$ ve $s(d)<h(c)$ ise sağlar.

Dikkat ettiğimizde iv) şartı (6.2.11) şartıyla karşılaştırıldığımızda doğal olarak aynıdır. Gerçektende eğer $p=q$ alınırsa (6.2.11) eşitsizliği L^∞ ait $\Phi(x)$ olarak yazılabilir. Eğer $p=q$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ alınırsa $r=\infty$ olduğu gözlemlenir.ayrıca dikkat edilirse iv) şartı W kümesi üzerindeki $\{m_k{}^j\}$ dizisinin ayrışımından bağımsızdır [3].

KAYNAKLAR

[1]. ADAMS, R.A. (1975). Sobolev spaces. Academic Press, New York.

[2]. ADAMS, R.A. and FOURNIER, J.J. (2003). Sobolev Space. Elsevier Science.

[3]. BERNARDIS, A.L., MARTIN-REYES, F.J, and SALVADOR, P.O. (2000). Weighted Inequalities for Hardy–Steklov Operators, Canadian Journal of Mathematics, Vol 59(2): 276-295.

[4]. AGARWAL, R.P. (1992). Difference inequalities. Marcel Dekker, Inc. New York.

[5]. BAINAV, D. and SIMENOV, P., (1988). Integral lnequalities and Applications. Kluwer Academic Publishers, Tokyo.

[6]. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikolskii, (1978). Integral Representations of Functions and imbeddings theorems. 1, J. Wiley, New York,

[7]. BRADLEY, J.S. (1978). Hardy inequalities with mixed norms. Canada Math Bull. 21(4); 405-408.

[8]. HARDY, G.H., (1920). Note on a theorem of Hilbert, Math. Z. 6, 314-317.

[9]. HARDY, G.H., LITTLEWOOD, J.E. and POLYA, G. (1952). (1^{st}.ed. in 1934). Inequalities, 2^{nd} ed., Cambridge Univ. Press.

[10]. HEINING, H.P. and SINNAMON, G. (1998). Mapping properties of Integral averaging operators. Studia Math. 129:157-177.

[11]. KUFNER, A., PERSSON, L.E., (2003). Weighted Inequalities of Hardy Type. World Scientific, New Jersey/London/Singarpore/Hong Kong.

[12]. MUCKHENHOUPT, B. (1979). Weighted norm inequalities for classical operators, in: Harmonic Analysis in Euclidean Spaces, Proc. Sympos. Pure Math. 35, Amer. Math. Soc, Providence, R.I., 69-83.

[13]. OPIC, B. and KUFNER, A. (1990). Hardy-type Inequalities. Pitman Research Notes in Press. San Diego.

[14]. RUDIN, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis. Mc. Graw-Hill 3^{rd} edition. Singapore.

[15]. RUDIN, W. (1987). Real and Complex Analysis. Mc Graw-Hill third edition. USA.

[16]. STEPANOV, V., NASSYROVA, M. and PERSSON, E. (2002) On Weighted Inequalities with Geometric Mean Operator Generated by the Hardy-type Integral Transform, Volume 3, Issue 4, Article 48, (084-01).

[17]. WALTER, W. (1970). Differential and Integral Inequalities. Springer-Verlag. Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

25-05-1980 yılında Diyarbakır'da doğdum. İlköğretimimi 1987 – 1991 yılları arasında Diyarbakır Cumhuriyet ilkokulunda, orta ve Lise öğretimimi 1991–1997 yılları arasında Diyarbakır Atatürk Lisesinde tamamladım. Lisans öğrenimimi 2000-2004 yılları arasında, Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamlayarak mezun oldum. Aynı yıl Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Uygulamalı Matematik Biriminde, **Prof. Dr. Rabil MAŞİYEV** danışmanlığında Yüksek Lisans Eğitimime başladım.

Abdulkadir KARAKAŞ