T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERON ÜÇGENLERİ ÜRETME METODLARI

Hamza AKBULUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ORTAÖĞRETİM ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
KONYA – 2009

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HERON ÜÇGENLERİ ÜRETME METODLARI

Hamza AKBULUT

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Ortaöğretim Ana Bilim Dalı Matematik Öğretmenliği Programı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. A. Selçuk KURBANLI
2009, 40 sayfa

Jüri: Prof Dr. EŞREF HATIR

Jüri: Doç Dr. Cengiz ÇINAR

Bu çalışmada birinci bölümde, Heron ücgenleri tantılarak kısa bir tarihçeye yer verilmiştir.

İkinci bölümde,Heron üçgenlerinin alan formülünün farklı ispatlarına yer verildi. tanıtıldı ve Heron formülü ispatlandı.

Üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerde Heron üçgenlerinin farklı şekillerde elde edilişine yer verildi.

Yedinci bölümde, kenarlarının uzunlukları ardışık tamsayı olan *(4n-1, 4n, 4n+1), (4n-2, 4n, 4n+2), (4n-3, 4n, 4n+3),…… (4n-u, 4n, 4n+u)* üçgenlerin alanlarının lineer fark denklemi ile ilişkisi incelendi.

Anahtar Kelimeler: Heron Ücgeni, , Pisagor Üçgeni, Fark denklem

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

PRODUCTİONS METHOTS OF HERONİAN TRİANGLES

Hamza AKBULUT

Selcuk University Graduadate School of Natural and Applied Sciences

Department of Matheathics Education

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2009, 40 Pages

Jury: Prof Dr. Eşref HATIR

Jury: Asist Prof Dr Cengiz ÇINAR

In the first section of this study we gave a short account of Heronian Triangles with their presentation.

In section two different proofs of the area formula for Heronian Triangles are shown and formula of Heronian is demonstrated.

In section three, four, five, and six it is demonstrated how we can get Heronian triangles in different ways.

In section seven connection between the area of (4n-1, 4n, 4n+1), (4n-2, 4n, 4n+2), (4n-3, 4n, 4n+3),…… (4n-u, 4n, 4n+u) triangles with their lenght of edges successive integers and difference equation is studied.

KEY WORDS: Heronian Triangle, Pythagoras Triangle, Difference Equation.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, cebir ve sayılar teorisinde önemli olan “Heron Üçgenleri üretme metotları” üzerine yapılmıştır. Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

“HERON ÜÇGENLERİ ÜRETME METODLARI ” adlı tez konusunun tespitinde ve hazırlanması sırasında benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI hocama ayrıca eğitimimin her aşamasında maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan çok kıymetli aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Hamza AKBULUT

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
İÇİNDEKİLER iv
1. BÖLÜM: GİRİŞ 1
2. BÖLÜM : HERON ÜÇGENİ ALAN FORMULÜ VE ISPATI 3
3. BÖLÜM : BENZER HERON ÜÇGENİ ELDE ETME METODU 7
4. BÖLÜM : HERON UCGENLERVE YENİ ÖZELLİKLERİ 8
5.BÖLÜM : HERON ÜÇGENLERİ ELDE ETME METODLARI 16
6.BÖLÜM : KENARLARININ UZUNLUKLARI ARDIŞIK SAYI OLAN HERON ÜÇGENLERİNİ ELDE ETME METOTLARI 26
7.BÖLÜM : *(4n-u, 4n, 4n+u)* BİÇİMİNDEKİ HERON ÜÇGENLERİ İLE FARK DENKLEMLER ARASINDAKİ İLİŞKİ ÜZERİNE 31
8.BÖLÜM : SONUÇ 42
KAYNAKLAR 43

HERON ÜÇGENLERİ ÜRETME METODLARI

1. BÖLÜM: GİRİŞ

Heron Mısır'da doğan ünlü Yunan matematikçisidir. Bazı kaynaklar tarafından Heron'un M.Ö 150 senelerinde Mısır'a bağlı Ptalemaic'de doğduğu belirtilmektedir. Diğer taraftan bazı bilim adamları ise Roma İmparatorluğundan sonra miladi takvime göre 250 senelerinde doğduğunu tahmin etmektedirler. Ama her iki kanı hakkında da kesin bir resmi delil yoktur. Heron ilme 14 tane eser bırakmıştır. Heron buharla çalışan ilk motorları ve itfaiyede kullanılan basınçlı su pompasını yapmıştır.

Kenar uzunlukları verilen üçgenlerin ve dörtgenlerin alanını hesaplama formülü gibi geometriye çok büyük katkısı olmuştur.Ayrıca Heron'un Alexandiria üniversitesinde ders verdiği söyleniyor. Heron, üçgenlerde alanları hesaplamada kullanılan $\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ alan formülününde bulucusudur. Bu sebeple bu formüle Heron'un alan formülü denir.

Heron'un adını temsil eden ve onun sunduğu problem, kenarlarının uzunluğu ve alanı rasyonel sayılar olan olan üçgenleri tanımlamaktadır. Bu şekildeki üçgenlere Heron üçgenleri denir. Özel Heron üçgenleri olarak bilinen dik açılı üçgenler, Heron'dan uzun zaman önce Pisagor tarafından bulunmuştur. Ayrıca Lehmer ve Schubert özel Heron problemlerini çözmek ve onları genelleştirmek için Heron'un alan formülünü kullandı.

Sastry (1975-1976) Heron üçgenlerini elde etmek için Lagrange özdeşliğini ve alansız yaklaşımı kullanmıştır.

Sastry 1997 yılında iki rasyonel medyanlı heron üçgenlerini elde etti.

K.R.S. Sastry 1999 yılında ‘’Heron Triangles and new perspective’’ makalesinde (k,m)özel üçgen ailesini elde etmiştir.

Hasan ŞENAY ve Allaguli GURBANLIYEV 2003 yılında Pisagor sayıları ile Kongruent sayıların arasındaki bağıntıyı kurarak özel (m,n) Heron üçgen ailesinin bir sürekli kesre karşılık geldiğini ispatladılar.

Sahsa KURZ 2004 yılında genel Heron üçgen ailesini parametrik çözümü kullanarak buldu.

Heron üçgenlerini elde etmek için birçok farklı yöntem mevcuttur, ama yeni yollarla onları tanımlamak da mümkündür. Sastry'nın bir çok çalışması bazı problemlerin çözümünde kolaylık sağladığı gibi yeni problemleri de beraberinde getirdi. Örneğin çevre uzunluklarının oranı alanlarının oranına eşit olan Heron üçgenlerinin bulunması gibi.

Bu çalışmamda kenar uzunlukları ardışık sayılar olan Heron üçgenlerini kullanarak başka Heron üçgenlerini elde etme metodu üzerinde durdum.

2. BÖLÜM: HERON ÜÇGENİ ALAN FORMULÜ VE ISPATI

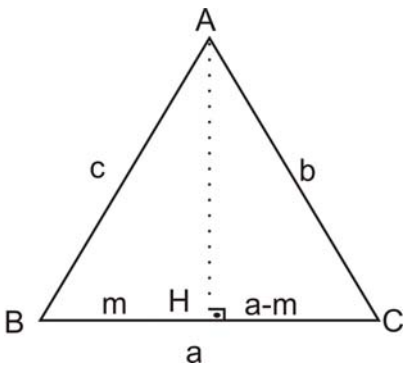
Tanım 2.1. Kenar uzunlukları ile alanı rasyonel olan üçgenlere Heron üçgeni denir.

Teorem 2.1. Heron formülü: Kenar uzunlukları *a, b,* c olan üçgenin alanı Δ olsun. $p = \frac{a+b+c}{2}$ olmak üzer

$\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ dir.

İspat: Bu teoremin ispatı farklı iki yolla yapılabilir.

(1. yol): A köşesinden [BC] ye bir yükseklik çizelim ve bu yüksekliğin uzunluğu *h* olsun. *h*'ın uzunluğunu ABH ve ACH üçgenlerinde Pisagor teoremlerini uygulayarak bulalım.



|BH| = *m* olsun. Şu halde |HC| = a - *m* olur.

$$(a-m)^2 + h^2 = b^2 \quad (1)$$
$$m^2 + h^2 = c^2 \quad (2)$$

taraf tarafa çıkartma yaparsak

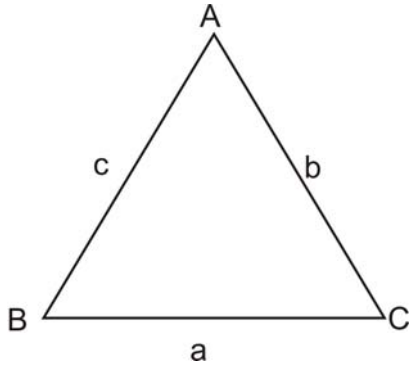
$$(a-m)^2 - m^2 = b^2 - c^2$$
$$a^2 - 2am + m^2 - m^2 = b^2 - c^2$$
$$a^2 - 2am = b^2 - c^2$$
$$m = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

Bulduğumuz *m* değerini (2) denkleminde yerine yazarsak

$$\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2 + h^2 = c^2$$
$$\Rightarrow h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2$$
$$\Rightarrow h^2 = \left[c - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)\right]\left[c + \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)\right]$$
$$\Rightarrow h^2 = \left[\frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right]\left[\frac{2ac + a^2 - b^2 + c}{2a}\right]$$
$$\Rightarrow h^2 = \left[\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right]\left[\frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right]$$
$$\Rightarrow h^2 = \left[\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right]\left[\frac{(a+c)^2 - b^2}{2a}\right]$$
$$\Rightarrow h^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)}{4a^2}$$
$$\Rightarrow 4a^2h^2 = (b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)$$
$$\Rightarrow 4a^2h^2 = 2(p-a)2(p-c)2(p-b)2u$$
$$\Rightarrow 4a^2h^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2h^2}{4} = p(p-a)(p-b)(p-c)$$
$$\Rightarrow \frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$\Rightarrow \Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ dir.

(2. yol):



ABC üçgeninde Kosinüs teoremini uygularsak

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA$

$CosA = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ olur.

$Sin^2 A + Cos^2 A = 1$ olduğundan

$$Sin^2 A = 1 - Cos^2 A$$

$$SinA = \sqrt{1 - Cos^2 A}$$

$$SinA = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2}$$

$$SinA = \sqrt{1 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2c^2}}$$

$$SinA = \sqrt{\frac{4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2c^2}}$$

$$SinA = \sqrt{\frac{\left[2bc - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right]\left[2bc + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right]}{4b^2c^2}}$$

$$SinA = \sqrt{\frac{\left[a^2 - \left(b^2 + c^2 - 2bc\right)\right]\left[b^2 + c^2 + 2bc - a^2\right]}{4b^2c^2}}$$

$$SinA = \sqrt{\frac{\left[a^2 - \left(b - c\right)^2\right]\left[\left(b + c\right)^2 - a^2\right]}{4b^2c^2}}$$

$$SinA = \sqrt{\frac{[a - (b - c)][a + (b - c)][(b + c) - a][(b + c) + a]}{4b^2c^2}}$$

$$SinA = \sqrt{\frac{(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}{4b^2c^2}}$$

$$\Rightarrow p = \frac{a + b + c}{2}$$

olmak üzere

$$SinA = \sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)2(p-a)2p}{4b^2c^2}}$$
$$SinA = \sqrt{\frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2c^2}}$$
$$SinA = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

elde edilir.

Δ ABC üçgeninin alanı olmak üzere

$$\Delta = \frac{1}{2}bcSinA$$
$$\Delta = \frac{1}{2}bc\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

elde edilir ki istenendir.

3. BÖLÜM: BENZER HERON ÜÇGENİ ELDE ETME METODU

Teorem 5.1 . Kenar uzunlukları *a, b, c* olan üçgen bir Heron üçgeni ise Kenar uzunlukları $k \in Z^+$ olmak üzere k*a,* k*b,* k*c* olan üçgende bir Heron üçgenidir.

İspat: Kenar uzunlukları *a, b,* c olan üçgen Heron üçgeni olduğundan alanı da kenarları da rasyoneldir.

$\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $\mathrm{p} = \dfrac{a+b+c}{2}$ rasyoneldirler.

Kenar uzunlukları k*a* , k*b* , kc olan üçgenin yarı çevre uzunluğu

$$p = \frac{ka+kb+kc}{2} = k\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = ku \quad \text{olur.}$$

kenar uzunlukları k.a , k.b , k.c olan üçgenin alanı

$$\Delta_2 = \sqrt{kp\,(kp-pa)\,(pu-pb)\,(pu-pc)}$$

$$\Delta_2 = \sqrt{kpk\,(p-a)k\,(p-b)k\,(p-c)}$$

$$\Delta_2 = \sqrt{k^4 p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

$$\Delta_2 = k^2 \underbrace{\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}$$

$\Delta_2 = k^2\Delta_1$ elde edilir.

Δ_2 için, k^2 ve Δ rasyonel olduklarından dolayı $\Delta_2$de rasyoneldir. Dolayısıyla teorem ispatlanmış olur.

4. BÖLÜM: HERON ÜÇGENLERİ VE YENİ ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Heron üçgenlerine ait bulduğum yeni özellikleri teorem olarak vereceğim.

Şimdi herhangi bir (*a, b, c*) üçgeni verildiği zaman bu üçgenin yardımı ile nasıl Heron üçgeni elde edebiliriz sorusuna cevap vermeye çalışalım.

Teorem 3.1. (a, *b, c*) herhangi bir üçgen olsun. Üçgen olma özelliğini bozmamak şartıyla bir kenar uzunluğunu sabit tutarak diğer kenarlarına $(x \in Z)$ tamsayısını ekleyerek elde ettiğimiz

$$(a, b+x, c+x) = \left(a\left(v^2 - gtu^2\right), (b-d)v^2 + (f-b)gtu^2, (c-d)v^2 + (f-c)gtu^2\right)$$

üçgeni Heron üçgenidir.

İspat: (*a, b, c*) üçgeni verilmiş olsun. Bu üçgenin bir kenar uzunluğunu sabit tutarak diğer iki kenar uzunluğuna üçgen olma şartını bozmayacak şekilde bir $(x \in Z)$ tamsayısını ekleyelim. O zaman üçgenimiz $(a,\ b+x,\ c+x)$ biçiminde olur.

Bu üçgenin çevre uzunluğunun yarısı $p = \dfrac{a+b+c}{2} + x$ dir.

$\Delta = \sqrt{\mathrm{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ Heron formülünde $p = \dfrac{a+b+c}{2} + x$ yi yerine yazarsak.

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}+x\right)\left(\frac{a+b+c}{2}+x-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}+x-b-x\right)\left(\frac{a+b+c}{2}+x-c-x\right)}$$

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}+x\right)\left(\frac{b+c-a}{2}+x\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)} \qquad (1)$$

$$d = \frac{a+b+c}{2},\ f = \frac{b+c-a}{2},\quad g = \frac{a+c-b}{2}\ ,\quad t = \frac{a+b-c}{2}$$

değerlerini (1) denkleminde yerine yazarsak

$$\Delta = \sqrt{(d+x)(f+x)(g)(t)} \qquad (2)$$

$$\Delta^2 = (d+x)(f+x)gt \qquad (3)$$

elde edilir.

Şimdi Δ^2 nin bir Heron üçgenin alanını temsil etmesi için eşitliğin sağ tarafı rasyonel kare olmalıdır.

$$d+x = (f+x)\,gtm^2 \text{ olsun. } (m \in Z) \qquad (4)$$

Şu halde

$$\Delta = (f+x)\,gtm \qquad (5)$$

olur.

$$d+x = fgtm^2 + xgtm^2$$
$$x - xgtm^2 = fgtm^2 - d$$
$$x(1-gtm^2) = fgm^2 - d$$
$$x = \frac{fgtm^2 - d}{1-gtm^2}$$
$$x = \frac{fgtu^2 - dv^2}{v^2 - gtu^2}$$

m yi (u,v) = 1 olmak üzere $m = \frac{u}{v}$ şeklinde ele aldık. Bu durumda

$$x = \frac{fg + \left(\frac{u}{v}\right)^2 - d}{1 - gt\left(\frac{u}{v}\right)^2} = \frac{fgt\frac{u^2}{v^2} - d}{1 - gt\frac{u^2}{v^2}}$$

$$= \frac{\frac{fgtu^2 - dv^2}{v^2}}{\frac{v^2 - gtu^2}{v^2}} = \frac{fgtu^2 - dv^2}{v^2 - gtu^2}$$

(5) denkleminde x in değerini yerine yazarsak

$$\Delta = \left(f + \frac{fgtu^2 - dv^2}{v^2 - gtu^2}\right) gt\frac{u}{v}$$

$$\Delta = \left(\frac{fv^2 - fgtu^2 + fgtu^2 - dv^2}{v^2 - gtu^2}\right)\frac{gtu}{v}$$

$$\Delta = \frac{fv^2 - dv^2}{v^2 - gtu^2} \cdot \frac{gtu}{v}$$

$$\Delta = \frac{v\left(fv - dv\right)}{v^2 - gtu^2} \cdot \frac{gtu}{v} = \frac{\left(f - d\right)vgtu}{v^2 - gtu^2}$$

Burada $d>f$ olduğu için $(f–d)$ negatif olur. Δ'nın pozitif olması için

$$v^2 - gtu^2 > O$$

$$v^2 > gtu^2$$

$v > \sqrt{gt}.u$ olmalı .

Bulduğumuz x *değerini* $(a,b+x,c+x)$ de yerine yazarsak

$$\left(a, b + \frac{fgtu^2 - dv^2}{v^2 - gtu^2}, c + \frac{fgtu^2 - dv^2}{v^2 - gtu^2}\right)$$ olur.

Bu üçgen ailesinden de

$$\left(a\left(v^2 - gtu^2\right),\ \left(b - d\right)v^2 + \left(f - b\right)gtu^2,\ \left(c - d\right)v^2 + \left(f - c\right)gtu^2\right)$$

Heron üçgen ailesini elde etmiş oluruz. Böylece teorem ispat edilmiş olur.

Örnek 3.1. (7, 8, 9) üçlüsünü göz önüne alalım. Şimdi yukarıdaki teoreme göre bir x sayısını alalım. Bu x sayısını iki kenara eklediğimizde (7, 8+x, 9+x) üçlüsünü elde ederiz. Bu üçgene Heron üçgen olan formülünü uygularsak.

$p = \dfrac{7+8+x+9+x}{2} = 12+x$ yarı çevre uzunluğu olmak üzere

$$\Delta = \sqrt{(12+x)(12+x-7)(12+x-x-8)(12+x-9-x)}$$
$$\Delta = \sqrt{(12+x)(5+x)(4)(3)}$$
$$\Delta = \sqrt{(12+x)(5+x)12}$$
$$\Delta^2 = (12+x)(5+x)12$$

olduğunu görürüz.

Şimdi m^2 rasyonel kare olmak üzere

$$(5+x) = (12+x)3m^2 \qquad (1)$$

yazabiliriz

Şu halde

$$\Delta^2 = (12+x)(12+x)3m^2 12$$
$$\Delta^2 = (12+x)^2 36m^2$$
$$\Delta = 6m(12+x) \qquad (2)$$

elde ederiz.

(1) denkleminden x'i bulursak

$$5 + x = 36m^2 + 3m^2.x$$
$$x - 3m^2.x = 36m^2 - 5$$
$$x = \frac{36m^2 - 5}{1 - 3m^2}$$ dir.

$u, v \in Z^+$ ve $(u,v)=1$ olmak üzere $m=\frac{u}{v}$ yazarsak x'in yukarıdaki ifadesinde

$$x=\frac{36\left(\frac{u}{v}\right)^2-5}{1-3\left(\frac{u}{v}^2\right)}=\frac{\frac{36u^2}{v^2}-5}{1-\frac{3u^2}{v^2}}=\frac{36u^2-5v^2}{v^2-3u^2}=\frac{5v^2-36u^2}{3u^2-v^2}$$

elde edilir.

Bulduğumuz $x=\frac{5v^2-36u^2}{3u^2-v^2}$ yi (2) denkleminde yerine yazarsak

$$\Delta=6\frac{u}{v}\left(12+\frac{5v^2-36u^2}{3u^2-v^2}\right)$$
$$\Delta=6\frac{u}{v}\left(\frac{36u^2-12v^2+v^2-36u^2}{3u^2-v^2}\right)$$
$$\Delta=6\frac{u}{v}\left(\frac{-7v^2}{3u^2-v^2}\right)=\frac{42uv}{v^2-3u^2}$$
$$\Delta=\frac{42uv}{v^2-3u^2}$$

elde ederiz.

Δ alan olduğundan ve alan negatif olamayacağından

$v^2-3u^2>0$ dır. Buradan $v>\sqrt{3}u$ olduğu görülür.

Şu halde $\Delta=\frac{42uv}{v^2-3u^2}$ rasyonel çıktı.

Dolayısıyla

$(7,\ 8+x,\ 9+x)$ üçlüsünde x yerine $x=\frac{5v^2-36u^2}{3u^2-v^2}$ yi yazarsak

$$\left(7, 8+\frac{5v^2-36u^2}{3u^2-v^2}, 9+\frac{5v^2-36u^2}{3u^2-v^2}\right)$$
$$=\left(7, \frac{24u^2-8v^2+5v^2-36u^2}{3u^2-v^2}, \frac{27u^2-9v^2+5v^2-36u^2}{3u^2-v^2}\right)$$
$$=\left(7, \frac{-12u^2-3v^2}{3u^2-v^2}, \frac{-9u^2-4v^2}{3u^2-v^2}\right)$$

Heron üçgen ailesini elde etmiş oluruz.

Şu halde

$$(a,b,c)=\left(7\left(v^2-3v^2\right), 12u^2+3v^2,\ 9u^2+4v^2\right)$$

şeklinde Heron üçgen ailesini elde ederiz ve burada Heron'un alan formülünü uygularsak

$\Delta = 42uv\left(v^2-3u^2\right)$ elde edilir. Bu ise bu üçgenin bir Heron üçgeni olduğunu gösterir.

Örnek 3.2. (4, 6, 8) üçlüsünü göz önüne alalım. Şu halde kenar uzunlukları 4, 6, 8 olan üçgenin alanı rasyonel olmadığından bu üçgen Heron üçgeni değildir. Biz bu üçgenin bir kenar uzunluğu sabit tutup diğer iki kenar uzunluğunu *x* kadar artırıp bu üçgeni Heron üçgenine dönüştüreceğiz.

$4, 6 + x, 8 + x$ yeni üçgenimizin kenar uzunlukları olsun.

$p=\frac{4+6+x+8+x}{2}$ olmak üzere Heron olan formülüne uygularsak

$$\Delta = \sqrt{(9+x)(9+x-4)(9+x-6-x)(9+x-8-x)}$$
$$\Delta = \sqrt{(9+x)(5+x)(3)(1)}$$
$$\Delta = \sqrt{(9+x)(5+x)3}$$ ise

$\Delta^2 = (9+x)(5+x)\,3$ olduğunu görürüz.

Şimdi m^2 rasyonel kare olmak üzere

$5+x = (9+x)\,3m^2$ olsun (1)

$(5+x)$' i Δ^2 de yerine yazarsak

$\Delta^2 = (9+x)(9+x)\,9m^2$ olur.

$\Delta = (9+x)\,3m$ elde edilir ki üçgenimizin alanı rasyonel olur.

(1) denkleminde *x'* i yalnız bırakırsak

$$5+x = (9+x)3m^2$$
$$5+x = 9.3m^2 + 3xm^2$$
$$x - 3m^2x = 27m^2 - 5$$
$$x = \frac{27m^2-5}{1-3m^2}$$ elde edilir.

$u, v \in Z^+$ ve (u,v) = 1 olmak üzere $m = \frac{u}{v}$ yazarsak *x'* in yukarıdaki ifadesinde

$$x = \frac{27\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5}{1-3\left(\frac{u}{v}\right)^2} = \frac{\frac{27u^2}{v^2} - 5}{1-\frac{3u^2}{v^2}} = \frac{27u^2-5v^2}{v^2-3u^2}$$ elde edilir.

Bulduğumuz $x=\frac{27u^2-5v^2}{v^2-3v^2}$ yi Δ'da yerine yazarsak

$$\Delta=(9+x)3m$$
$$\Delta=\left(9+\frac{27u^2-5v^2}{v^2-3u^2}\right)3\frac{u}{v}$$

$$\Delta=\frac{9v^2-27u^2+27u^2-5v^2}{v^2-3u^2}.3.\frac{u}{v}$$
$$\Delta=\frac{4v^2 3u}{(v^2-3u^2)v}=\frac{12uv}{v^2-3u^2}$$

rasyonel sayısı çıktı.

Δ alan olduğundan ve alan negatif olamayacağından

$v^2-3u^2>0$ dır. Buradan $v>\sqrt{3}u$ olduğu görülür.

$(4,6+x,8+x)\ (4,6+x,8+x)$ üçlüsünde x yerine $\frac{27u^2-5u^2}{v^2-3u^2}$ yi yerine yazarsak

$$\left(4,6+\frac{27u^2-5v^2}{v^2-3u^2},8+\frac{27u^2-5v^2}{v^2-3u^2}\right)$$
$$=\left(4,\frac{6v^2-18u^2+27u^2-5v^2}{v^2-3u^2},\frac{8v^2-24u^2+27u^2-5v^2}{v^2-3u^2}\right)$$
$$=\left(4,\frac{v^2+9u^2}{v^2-3u^2},\frac{3v^2+3u^2}{v^2-3u^2}\right)$$

Heron üçlüsü elde edilir.

Şu halde

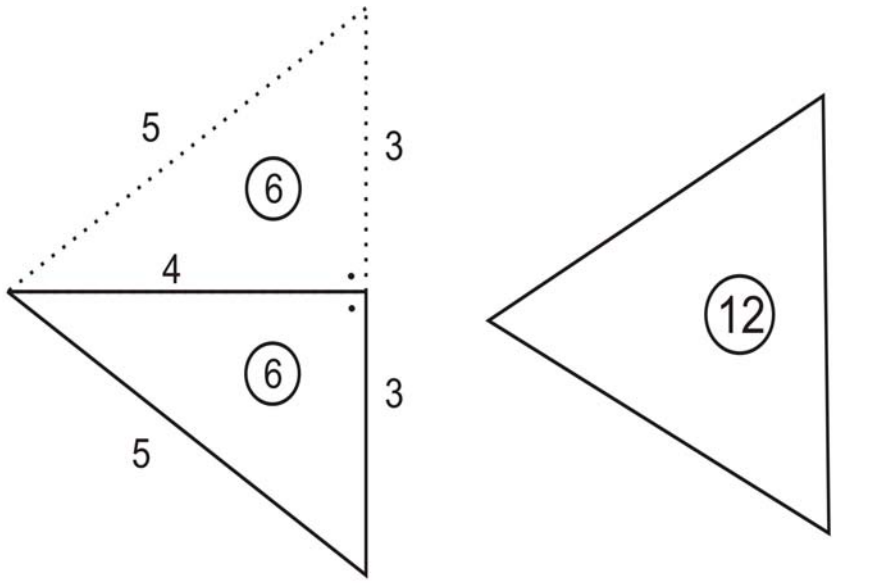
$$(a,b,c)=\left(4(v^2-3u^2),v^2+9u^2,3(v^2+u^2)\right)$$

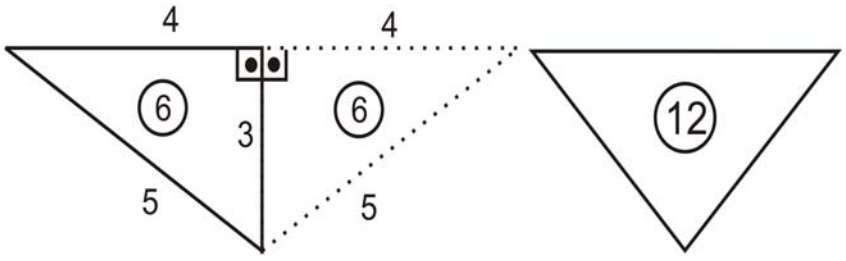
şeklinde Heron üçgen ailesini elde ederiz.

5. BÖLÜM: HERON ÜÇGENİ ELDE ETME METODLARI

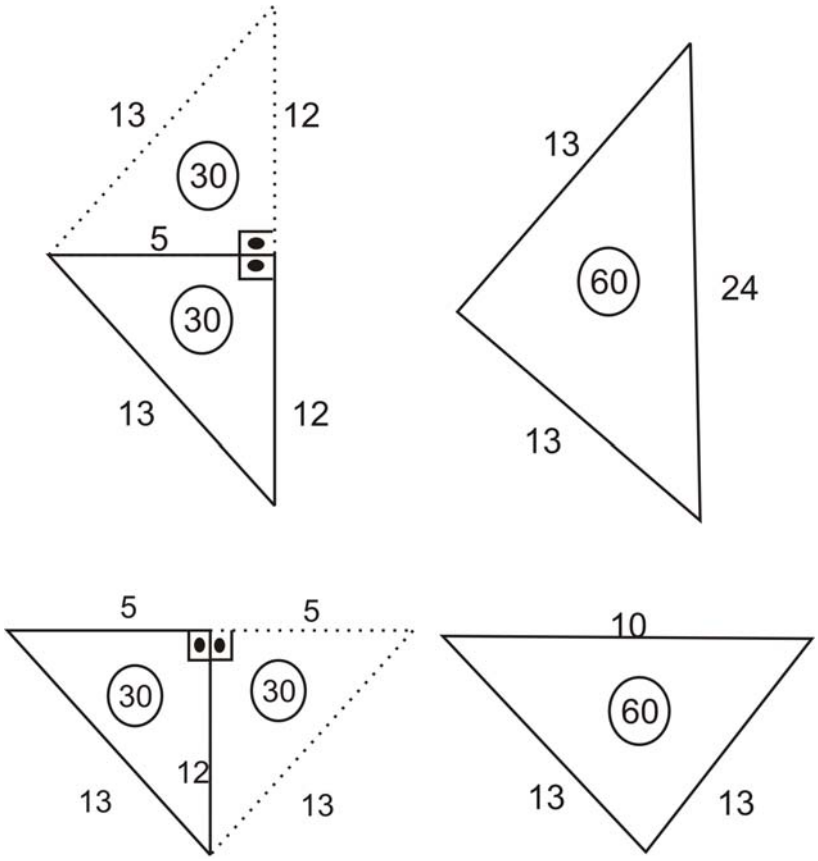
1.metod: Bir Pisagor üçgeni çizip dik kenarlarından birine göre simetriğini de çizersek bir Heron üçgeni elde ederiz.

Örnek 4.1. **(**3, 4, 5) üçgenini ele alalım.



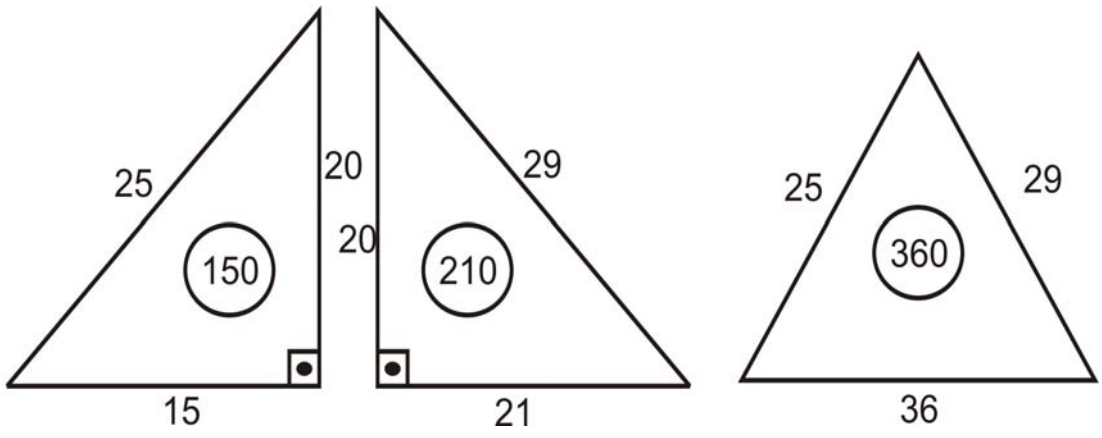


Örnek 4.2. (5, 12, 13) dik üçgenini göz önüne alalım.

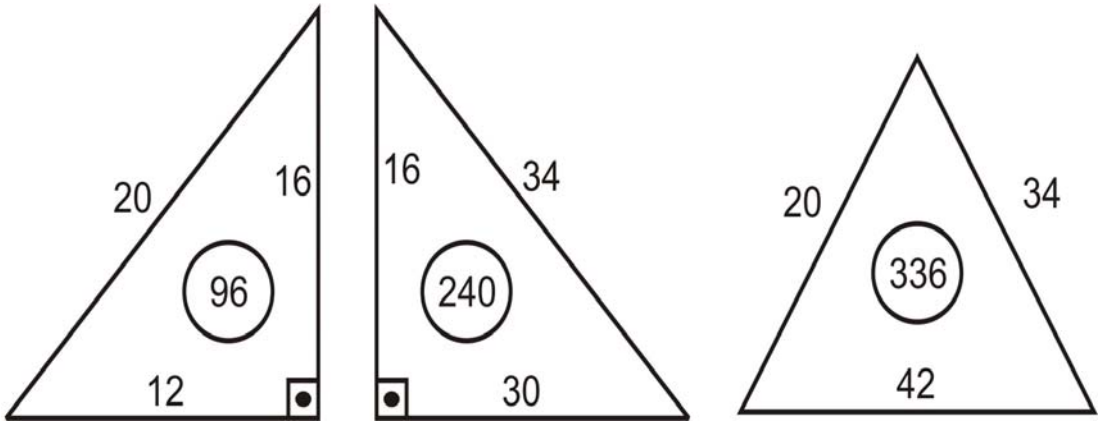


2.metod: Birer kenarları eş olan farklı iki Pisagor üçgenini ortak kenarlarından zıt yönlü olarak yapıştırırsak, elde edilen üçgen Heron üçgeni olur.

Örnek 4.3. (15, 20, 25) ve (20, 21, 29) dik üçgenlerini göz önüne alalım.

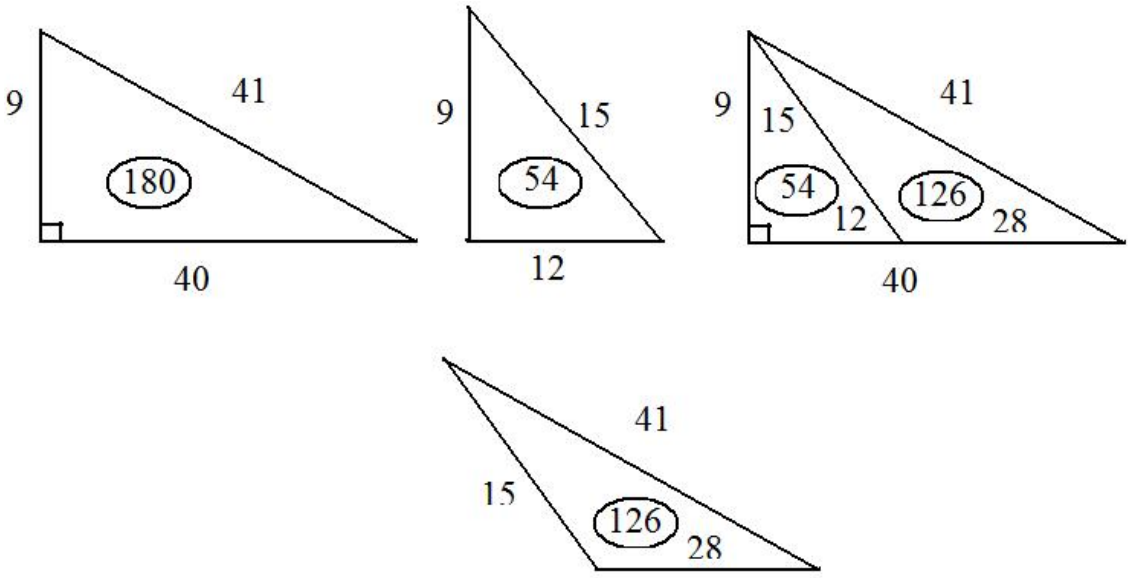


Örnek 4.4. **(**12,16,20)ve (16,30,34) dik üçgenlerini göz önüne alalım.

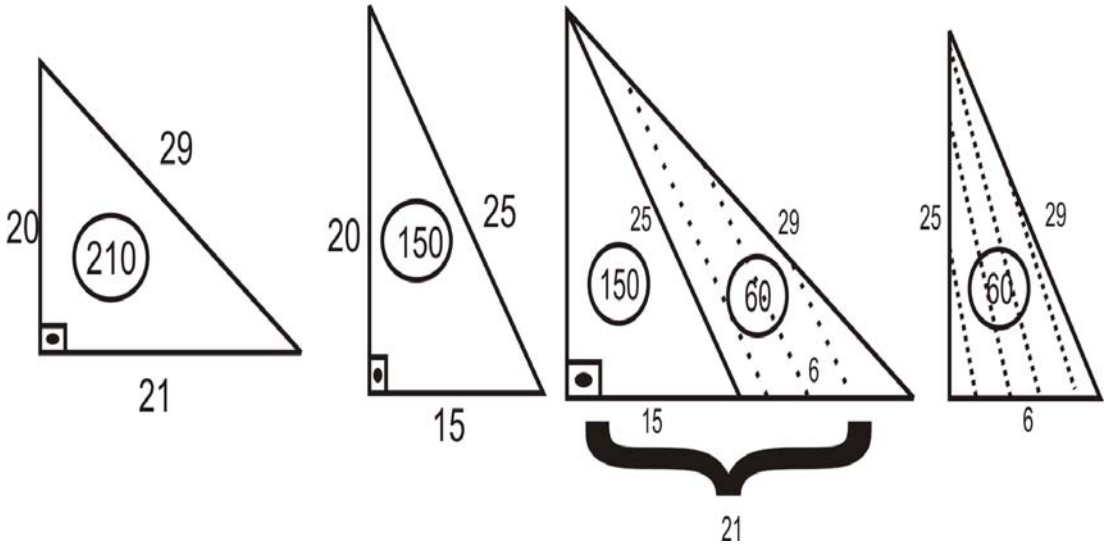


3.metod : Birer kenarları eş olan farklı iki Pisagor üçgenini ortak kenarlarından aynı yöne doğru yapıştırırsak yine bir Heron üçgeni elde ederiz.

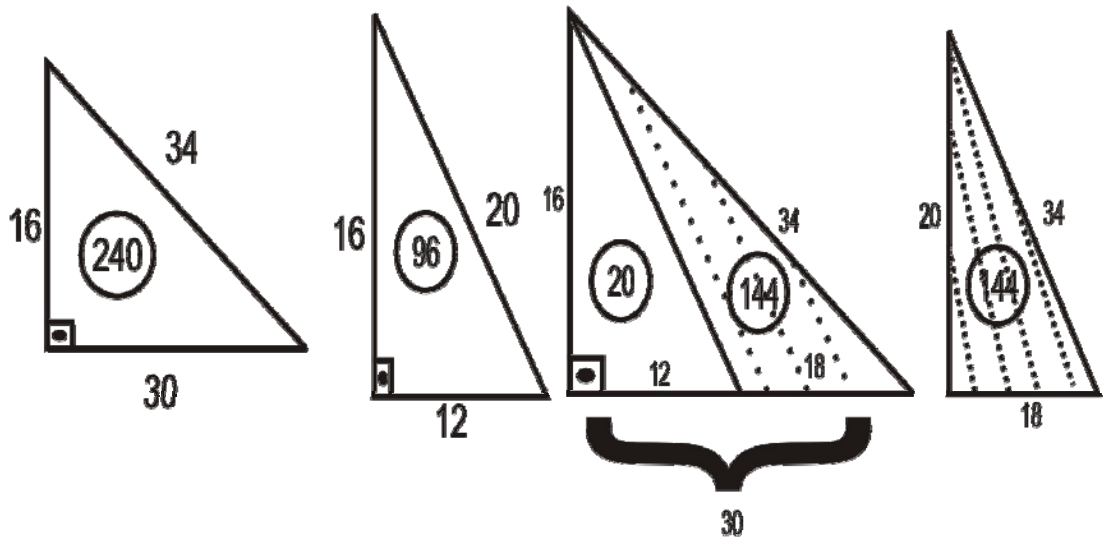
Örnek 4.5. (9, 40, 41) ve (9, 12, 15) dik üçgenlerini göz önüne alalım.



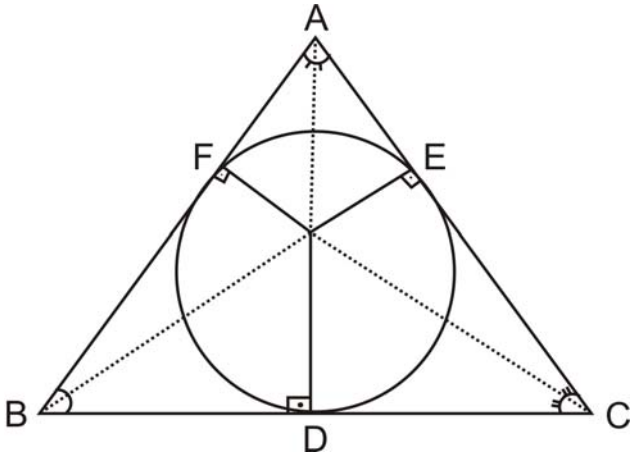
Örnek 4.6. (15, 20, 25) ve (20, 21, 29) dik üçgenlerini göz önüne alalım.



Örnek 4.7. (16, 30, 34) ve (12, 16,20) dik üçgenlerini göz önüne alalım.



4.metod :



Şekildeki ABC üçgeninde *a* ile *b* ve *c* ile *d* aralarında asal olmak üzere

$\tan\frac{A}{2}=\frac{a}{b}$ *ve* $\tan\frac{B}{2}=\frac{c}{d}$ olsun

O halde $Cot\frac{A}{2}=\frac{b}{a}$ *ve* $Cot\frac{B}{2}=\frac{d}{c}$

dir.

İşlem kolaylığı için paydaları eşitlersek

$$Cot\frac{A}{2}=\frac{b}{a}=\frac{bc}{ac}$$
$$Cot\frac{B}{2}=\frac{d}{c}=\frac{ad}{ac}$$ olur.

bc = p , ad = q , ac = r olsun.

Şu halde

$$Cot\frac{A}{2}=\frac{p}{r}$$
$$Cot\frac{B}{2}=\frac{q}{r} \quad \text{olur.}$$

$$Cot\left(\frac{C}{2}\right)=x \text{ dersek}$$

Hatırlatma:

$$Cot\left(\frac{A}{2}\right)+Cot\left(\frac{B}{2}\right)+Cot\left(\frac{C}{2}\right)=Cot\left(\frac{A}{2}\right).Cot\left(\frac{B}{2}\right).Cot\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\frac{p}{r}+\frac{q}{r}+x=\frac{p}{r}\frac{q}{r}x \text{ ise}$$

$$\Rightarrow \frac{p+q}{r}+x=\frac{pq}{r^2}.x$$
$$\Rightarrow \frac{p+q}{r}=\left(\frac{pq}{r^2}-1\right)x$$
$$\Rightarrow \frac{p+q}{r}=\left(\frac{pg-r^2}{r^2}\right).x$$
$$\Rightarrow \frac{p+p}{r}\frac{r^2}{\left(pq-r^2\right)}=x$$
$$\Rightarrow \frac{(p+q).r}{\left(pq-r^2\right)}=x=Cot\frac{c}{2}$$

elde edilir.

Şu halde

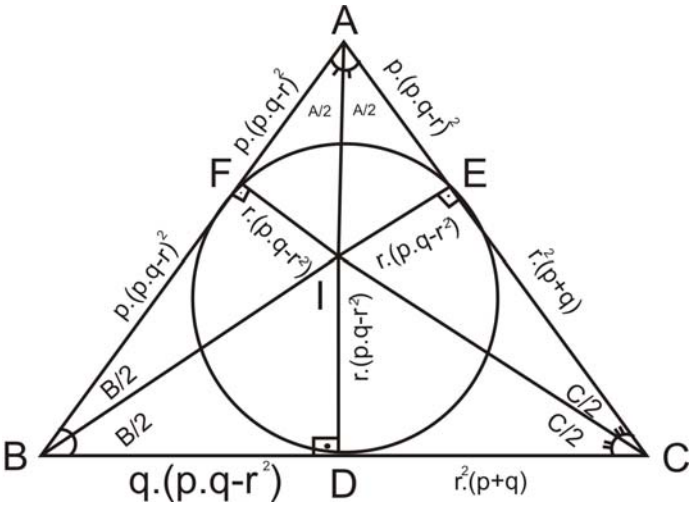
$$Cot\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{p}{r}\ ,\ Cot\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{q}{r}\ \ ,\ Cot\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{(p+q)r}{\left(pq-r^2\right)}$$

bu kotanjant değerinin paydalarını eşitlersek

$$Cot\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{p\left(pq-r^2\right)}{r\left(pq-r^2\right)}\ ,\ Cot\left(\frac{B}{2}=\frac{q\left(pq-r^2\right)}{r\left(pq-r^2\right)}\right.\ ,Cot\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{(p+q)r^2}{r\left(pq-r^2\right)}\Bigg)$$

değerlerini elde ederiz.

Bu bulduğumuz ifadeleri şekilde yerine yazdığımızda



$$BC = B.D + DC$$
$$= q\left(pq-r^2\right)+r^2\left(p+q\right)$$
$$= pq^2-qr^2+pr^2+qr^2 = pq^2+pr^2 = p\left(q^2+r^2\right)$$

$$AC = AE + EC$$
$$= p\left(pq-r^2\right)+r^2\left(p+q\right)$$
$$= p^2q-pr^2+pr^2+qr^2 = \mathrm{q}\left(p^2+r^2\right)$$

$$AB = AF + FB$$
$$= p\left(pq - r^2\right) + q\left(pq - r^2\right)$$
$$= p^2q - pr^2 + pq^2 - qr^2$$
$$= \left(p + q\right)\left(pq - r^2\right)$$

elde edilir.

Şu halde A(AFI), A(FBI), A(BDI), A(DCI), A(ECI), A(AEI) alanları rasyonel olduğundan bunların toplamları da rasyoneldir. Dolayısıyla ABC üçgeninin kenarları da alanları da rasyonel olduğundan bir Heron üçgeni olur.

Demek ki bir genelleme yaparsak

$p>r$, $q>r$ eşitsizliklerini sağlayan p, q, r tamsayıları için kenarları

$$\left(a,b,c\right) = \left(p\left(q^2 + r^2\right),\ q\left(p^2 + rh2\right),\ \left(p + q\right)\left(pq - r^2\right)\right)$$

olan üçgen Heron üçgenidir ve bu üçgenin alanı

$\Delta = rpq\left(p + q\right)\left(pq - r^2\right)$ rasyonel sayısıdır.

Örnek 4.8. Herhangi bir ABC üçgeni çizelim.

$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{3}, \tan\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{2}{5}$ olsun. Bu değerleri tesadüfen verdik.

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{3}\ ise\ Cot\left(\frac{A}{2}\right) = 3$$
$$\tan\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{2}{5} ise\ Cot\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{5}{2}\ \ olur$$

$$Cot\left(\frac{C}{2}\right) = x\ olsun$$

Şu halde

$$3+\frac{5}{2}+x=3\frac{5}{2}x \text{ ise}$$

$$\frac{11}{2}+x=\frac{15x}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{11}{2}=\frac{15x}{2}-x$$
$$\Rightarrow \frac{11}{2}=\frac{13x}{2}$$
$$\Rightarrow 11=13x$$
$$\Rightarrow x=\frac{11}{13}$$

elde edilir.

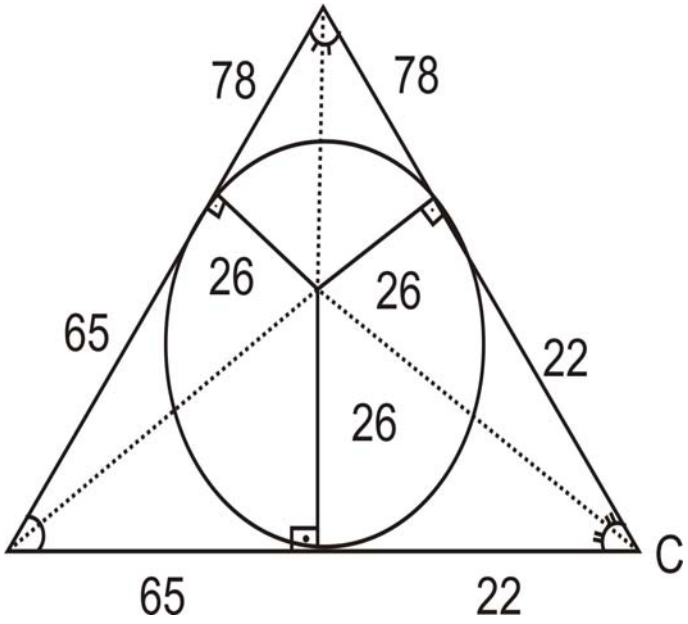
Şu halde

$$Cot\left(\frac{A}{2}\right)=3,\ \ Cot\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{5}{2},\ \ Cot\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{11}{13}$$ elde edildi.

Bu sayıların paydalarını eşit yapalım.

$$Cot\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{3}{1}=\frac{3.26}{26}=\frac{78}{26}$$
$$Cot\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{5}{2}=\frac{5.13}{26}=\frac{65}{26}$$
$$Cot\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{11}{13}=\frac{11.2}{26}=\frac{22}{26}$$ olur.

Bu ABC üçgenini çizip elde ettiğimiz değerleri yerlerine yazarsak



üçgenini elde ederiz ki bu üçgenin kenar uzunlukları da alanı da rasyonel olduklarından Heron üçgenidir.

6. BÖLÜM: KENARLARININ UZUNLUKLARI ARDIŞIK SAYI OLAN HERON ÜÇGENLERİNİ ELDE ETME METODLARI

x ve d tamsayıları için kenar uzunlukları kendi aralarında aritmetik dizi doluşturan $a=x-d$, $b=x$, c$= x+d$ kenarlı (a, *b,* c) üçgenini düşünelim.

Heron formülünü uygularsak

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{x-d+x+x+d}{2}=\frac{3x}{2}$$

Δ bu üçgenin alanı olmak üzere

$$\Delta=\sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{3x}{2}-(x-d)\right)\left(\frac{3\,x}{2}-x\right)\left(\frac{3x}{2}-(x+d)\right)}$$

$$\Delta=\sqrt{\frac{3x}{2}(3x-2x+2d)\left(\frac{3x-2x}{2}\right).\left(\frac{3x-2x-2d}{2}\right)}$$

$$\Delta=\sqrt{\frac{3x^2}{16}(x+2d)(x-2d)}$$

$$4\Delta=\sqrt{3.x^2\,(x+2d)(x-2d)}$$

$$(4\Delta)^2=3x^2(x+2d)(x-2d)\quad dir.$$

$16A^2=3x^2(x+2d)(x-2d)$ eşitliğinde eşitliğin sol tarafı çift olduğundan x de çift olmalıdır. Bu sebeple y tamsayı olmak üzere $x = 2y$ yazabiliriz.

$16A^2=3x^2(x+2d)(x-2d)$ eşitliğinde eşitliğin sol tarafı bir tam kare olduğundan sağ tarafı da bir tam kare olmalıdır. Şu halde m bir tamsayı olmak üzere

$(x+2d)(x-2d) = 3m^2$ olmalıdır. $x = 2y$ olduğundan

$(2y+2d)(2y-2d) = 3m^2$ ise eşitliğin sol tarafı çift sayı olduğundan sağ tarafında çift sayı olması gerekir. n bir tamsayı olmak üzere $m = 2n$ yazarsak

$$4y^2 - 4d^2 = 3(2n)^2$$
$$4y^2 - 4d^2 = 12n^2$$
$$y^2 - d^2 = 3n^2$$
$$y^2 = 3n^2 + d^2$$

ise diyafonten denkleminin çözümünden

$|d| = \frac{h^2 - 3q^2}{2}$, $|n| = hq$ $|y| = \frac{h^2 + 3q^2}{2}$ elde ederiz.

Eğer p ve q nun her ikisini tek veya her ikisini de çift aldığımızda $|y|$ ve $|d|$ tamsayı olduklarından a , b, c de rasyonel olurlar.

$$x = 2y = 2\left(\frac{h^2+q^2}{2}\right) = h^2 + 3q^2$$
$$d = \frac{h^2 - 3q^2}{2}$$

elde edilir.

Şu halde karşımıza kenar uzunlukları

$\frac{h^2+9q^2}{2}$, h^2+3q^2, $\frac{3h^2+3q^2}{2}$ olan ve alanı

$\Delta = 3hq\left(\frac{p^2+3q^2}{2}\right)$ rasyonel sayısı olan Heron üçgeni elde ederiz.

Eğer h ve q nun birisi tek, birisi çift olarak alınırsa d tamsayı olmayacağından

$$x = 2\left(h^2 + 3q^2\right)$$
$$d = h^2 - 3q^2$$

olarak alırız ki kenarları ardışık tamsayı olan üçgen elde edilir.

$$a = x - d = 2\left(h^2 + 3q^2\right) - \left(h^2 - 3q^2\right)$$
$$= 2h^2 + 6q^2 - h^2 + 3q^2$$
$$= h^2 + 9q^2$$
$$b = x = 2\left(h^2 + 3q^2\right) = 2h^2 + 6q^2$$
$$c = x + d = 2\left(h^2 + 3q^2\right) + \left(h^2 - 3q^2\right)$$
$$= 2h^2 + 6q^2 + h^2 - 3q^2$$
$$= 3h^2 + 3q^2$$

elde edilir.

Şu halde karşımıza kenar uzunlukları

$h^2 + 9q^2$, $2h^2 + 6q^2$, $3h^2 + 3q^2$ olan ve alanı

$\Delta = 6pq\left(p^2 + 3q^2\right)$ rasyonel sayısı olan Heron üçgeni çıkar.

Aşağıda h tek tamsayı, q çift tamsayı olmak üzere kenarları tamsayılı aritmetik dizi oluşturan ve çevrasi 1000 den küçük olan Heron üçgenlerinin listesi verilmiştir.

h	*q*	*çevre*	*a*	*b*	*c*	*alan*
2	1	42	13	14	15	84
1	2	78	37	26	15	156
4	1	114	25	38	51	456
2	3	186	85	62	39	1116
5	2	222	61	74	87	2220
4	3	258	97	86	75	3096
1	4	294	145	98	51	1176
7	2	366	85	122	159	5124
8	1	402	73	134	195	3216
5	4	438	169	146	123	8760
2	5	474	229	158	87	4760
8	3	546	145	182	219	13104
4	5	546	241	182	123	10920
7	4	582	193	194	195	16296
10	1	618	109	206	303	6180
1	6	654	325	218	111	3924
10	3	762	181	254	327	22860
11	2	798	157	266	375	17556
5	6	798	349	266	183	23940
8	5	834	289	278	267	33360
2	7	906	445	302	159	12684
7	6	942	373	314	255	39564
4	7	978	457	326	195	27384

Aşağıda h ve q tek tamsayılar olmak üzere kenarları tamsayılı aritmetik dizi oluşturan ve çevresi 1000 den küçük olan Heron üçgenlerinin listesi verilmiştir.

h	*q*	*çevre*	*a*	*b*	*c*	*alan*
1	1	12	5	4	3	6
1	3	84	41	28	15	126
5	-1	84	17	28	39	210
5	3	156	53	52	51	1170
7	1	156	29	52	75	546
-1	5	228	113	76	39	570
7	-3	228	65	76	87	2394
7	5	372	137	124	111	6510
11	1	372	65	124	183	2046
1	7	444	221	148	75	1554
11	-3	444	101	148	195	7326
5	7	516	233	172	111	9030
13	-1	516	89	172	255	3354
11	5	588	173	196	219	16170
13	3	588	125	196	267	11466
13	-5	732	197	244	291	23790
-1	9	732	365	244	123	3294
-5	9	804	377	268	159	18090
11	-7	804	281	268	255	30954
7	9	876	389	292	195	27594
17	-1	876	149	292	435	7446
13	7	948	305	316	327	43134
17	3	948	185	316	447	24174

7. BÖLÜM: $(4n-u, 4n, 4n+u)$ BİÇİMİNDEKİ HERON ÜÇGENLERİ İLE FARK DENKLEMLER ARASINDAKİ İLİŞKİ ÜZERİNE

Bu çalışmada önce $(4n-1, 4n, 4n+1)$ üçlüsünü göz önüne aldık ve alanın rasyonel olmasını sağlayan n rasyonel sayılarını bulduk. Daha sonra çözümü bu rasyonel sayıları verecek fark denklemini araştırdık.

Benzer şekilde, $(4n-2, 4n, 4n+2)$, $(4n-3, 4n, 4n+3)$,

$(4n-4, 4n, 4n+4)$, …, $(4n-u, 4n, 4n+u)$ üçlüleri için de benzer fark denklemin elde edilebileceğini görüldü.

Her bir üçgen Heron üçgeni değildir. Mesela (14, 18, 20) üçgeni Heron üçgeni değildir. Çünkü $p = 26 \in Q$ olmasına rağmen Δ alan rasyonel değildir. Heron üçgeni olmayan sonsuz sayıda üçgen vardır. Heron üçgenlerinin tüm özellikleri diğer üçgenlerin özellikleri ile aynıdır. Onun içindir ki bu güne kadar yapılmış olan çalışmaların hemen-hemen hepsi Heron üçgenlerinin elde edilişi ile ilgilidir.

Teorem 7. 1. $(4n-1, 4n, 4n+1)$ biçimindeki Heron üçgenleri başlangıç şartları $n_0 = \frac{1}{2}$ ve $n_1 = 1$ olan $n(k+2) - 4n(k+1) + n(k) = 0$ fark denkleminden elde edilir.

Bu üçgenlerin alanları $\Delta_k = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{2k}\right\}$, k = 0, 1, 2, 3, … dir.

İspat: $(4n-1, 4n, 4n+1)$ üçlüsünü göz önüne alalım. O zaman $p = 6n$ olur. Böylece, her *n* rasyonel sayı için *p* rasyoneldir. Şimdide üçgenin alanını araştıralım,

$\Delta = 2n\sqrt{3\left(4n^2-1\right)}$ elde edilir. $\Delta \in$Q olması için $4n^2 - 1 = 3m^2$ olmalıdır.

$n_0 = \frac{1}{2}$ için $m_0 = 0$ olur. Ancak bu üçlü bir doğru parçasını ifade eder.

$n_1 = 1$ için $m_1 = 1$,

$n_2 = \frac{7}{2}$ için $m_2 = 4$,

$n_3 = \frac{26}{2}$ için $m_3 = 15$,

$n_4 = \frac{97}{2}$ için $m_4 = 56$,

$n_5 = \frac{362}{2}$ için $m_5 = 209$, … şeklinde devam edilirse bu sayılar arasında, *k* = 2 den itibaren bütün terimler

$n_k = 4n_{k-1} - n_{k-2}$ için $m_k = 4m_{k-1} - m_{k-2}$ bağıntısından bulunur.

$n_k = 4n_{k-1} - n_{k-2}$ de $n_0 = \frac{1}{2}$ ve $n_1 = 1$ başlangıç şartları alınırsa

$n(k+2) - 4n(k+1) + n(k) = 0$, $n(0) = \frac{1}{2}$ ve $n(1) = 1$ fark denklemi yazılır. Bu denklem lineer denklem olup, karakteristik denklemi $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ olur. Buradan $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ bulunur. Böylece denklemin genel çözümü $n(k) = c_1\left(2+\sqrt{3}\right)^k + c_2\left(2-\sqrt{3}\right)^k$, k = 0, 1, 2, … olur.

Başlangıç şartlarını kullanırsak,

$$\begin{cases} n(0) = c_1 + c_2 = \dfrac{1}{2} \\ n(1) = c_1\left(2+\sqrt{3}\right) + c_2\left(2-\sqrt{3}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{4} \\ c_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$ elde edilir.

Buradan, $n(k) = \frac{1}{4}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ dır. Böylece, $\{n_k\}$ dizisinin her bir terimi $(4n-1, 4n, 4n+1)$ üçlüsünü Heron üçgenine dönüştürür. Yani, her bir k sayına verilecek değer n_k Heron üçlüsünü oluşturur. O zaman her bir k için $\left(4n_k - 1, 4n_k, 4n_k + 1\right)$ üçlüsü Heron üçgenleridir. Bu durumda $p_k = 6n_k$ den $p_k = \frac{3}{2}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ olur.

$$\Delta_k = \sqrt{p_k\left(p_k - \left(4n_k - 1\right)\right)\left(p_k - 4n_k\right)\left(p_k - \left(4n_k + 1\right)\right)}$$

$$= 2n_k\sqrt{3\left(4n_k^2 - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{3\left[\frac{1}{4}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}^2 - 1\right]}$$ bulunur.

Yani,

$$\Delta_k = \frac{1}{2}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{3\left[\frac{1}{4}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}^2 - 1\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{\frac{3}{4}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k - \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{2k}\right\},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$ elde edilir ki istenendir.

Bu üçgenleri ve alanlarını aşağıdaki tablodan görmek mümkündür.

k	n_k	$4n_k - 1$	$4n_k$	$4n_k + 1$	$p_k = 6n_k$	Δ_k
0	0,5	1	2	3	3	0
1	1	3	4	5	6	6
2	3,5	13	14	15	21	84
3	13	51	52	53	78	1170
4	48,5	193	194	195	291	16296
5	181	723	724	725	1086	226974
6	675,5	2701	2702	2703	4053	3161340
7	2521	10083	10084	10085	15126	44031786
8	9408,5	37633	37634	37635	56451	613283664
9	35113	140451	140452	140453	210678	8541939510
10	131043,5	524173	524174	524175	786261	1,18974E+11
11	489061	1956243	1956244	1956245	2934366	1,65709E+12
12	1825200,5	7300801	7300802	7300803	10951203	2,30803E+13
13	6811741	27246963	27246964	27246965	40870446	3,21467E+14
14	25421763,5	101687053	101687054	101687055	152530581	4,47746E+15
15	94875313	379501251	379501252	379501253	569251878	6,2363E+16

Teorem 7. 2. $(4n-2, 4n, 4n+2)$ biçimindeki Heron üçgenleri başlangıç şartları $n_0 = 1$ ve $n_1 = 2$ olan $n(k+2) - 4n(k+1) + n(k) = 0$ fark denkleminden elde edilir. Bu üçgenlerin alanları $\Delta_k = \sqrt{3}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{2k}\right\}$, k = 0, 1, 2, … dir.

İspat: $(4n-2, 4n, 4n+2)$ üçlüsünü göz önüne alalım. Burada $n \geq 1$ olmalıdır. O zaman $p = 6n$ olur. Böylece, her n rasyonel sayı için p rasyoneldir. Şimdide üçgenin alanını araştıralım,

$\Delta = 4n\sqrt{3\left(n^2-1\right)}$ elde edilir. $\Delta \in Q$ olması için $n^2 - 1 = 3m^2$ olmalıdır.

$n_0 = 1$ için $m_0 = 0$ olur. Ancak bu üçlü bir doğru parçasını ifade eder.

$n_1 = 2$ için $m_1 = 1$,

$n_2 = 7$ için $m_2 = 4$,

$n_3 = 26$ için $m_3 = 15$,

$n_4 = 97$ için $m_4 = 56$,

$n_5 = 362$ için $m_5 = 209$, … şeklinde devam edilirse bu sayılar arasında, k = 2 den itibaren bütün terimler

$n_k = 4n_{k-1} - n_{k-2}$ için $m_k = 4m_{k-1} - m_{k-2}$ bağıntısından bulunur.

$n_k = 4n_{k-1} - n_{k-2}$ de $n_0 = 1$ ve $n_1 = 2$ başlangıç şartları alınırsa $n(k+2) - 4n(k+1) + n(k) = 0$, $n(0) = 1$ ve $n(1) = 2$ fark denklemi yazılır. Bu denklem lineer denklem olup, karakteristik denklemi $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ olur. Buradan

$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ bulunur. Böylece denklemin genel çözümü $n(k) = c_1\left(2+\sqrt{3}\right)^k + c_2\left(2-\sqrt{3}\right)^k$, k = 0, 1, 2, 3,… olur.

Başlangıç şartlarını kullanırsak,

$$\begin{cases} n(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ n(1) = c_1\left(2+\sqrt{3}\right) + c_2\left(2-\sqrt{3}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2} \\ c_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ elde edilir.

Buradan, $n(k) = \frac{1}{2}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}$, k = 0, 1, 2, … dır. Böylece, $\{n_k\}$ dizisinin her bir terimi $(4n-2, 4n, 4n+2)$ üçlüsünü Heron üçgenine dönüştürür. Yani, her bir k sayına verilecek değer n_k Heron üçlüsünü oluşturur. O zaman her bir k için $(4n_k - 2, 4n_k, 4n_k + 2)$ üçlüsü Heron üçgenleridir. Bu durumda $p_k = 6n_k$ den $p_k = 3\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}$, k = 0, 1, 2, … olur.

$$\Delta_k = \sqrt{p_k\left(p_k - (4n_k - 2)\right)\left(p_k - 4n_k\right)\left(p_k - (4n_k + 2)\right)} =$$

$$= 4n_k\sqrt{3\left(n_k{}^2 - 1\right)} =$$

$$= 2\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{3\left[\frac{1}{4}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}^2 - 1\right]}$$ bulunur.

Yani,

$$\Delta_k = 2\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{3\left[\frac{1}{4}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}^2 - 1\right]}$$

$$= 2\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{3\left[\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2k} - 1\right]}$$

$$= 2\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{3\left[\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k} - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2k}\right]}$$

$$= 2\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{\frac{3}{4}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k - \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]^2}$$

$$= \left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k - \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{3}$$

$= \sqrt{3}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{2k}\right\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ elde edilir ki istenendir.

Bu üçgenleri ve alanlarını aşağıdaki tablodan görmek mümkündür.

k	n_k	$4n_k - 2$	$4n_k$	$4n_k + 2$	$p_k = 6n_k$	Δ_k
0	1	2	4	6	6	0
1	2	6	8	10	12	24
2	7	26	28	30	42	336
3	26	102	104	106	156	4680
4	97	386	388	390	582	65184
5	362	1446	1448	1450	2172	907896
6	1351	5402	5404	5406	8106	12645360
7	5042	20166	20168	20170	30252	176127144
8	18817	75266	75268	75270	112902	2453134656
9	70226	280902	280904	280906	421356	34167758040
10	262087	1048346	1048348	1048350	1572522	4,75895E+11
11	978122	3912486	3912488	3912490	5868732	6,62837E+12
12	3650401	14601602	14601604	14601606	21902406	9,23213E+13
13	13623482	54493926	54493928	54493930	81740892	1,28587E+15
14	50843527	203374106	203374108	203374110	305061162	1,79099E+16
15	189750626	759002502	759002504	759002506	1138503756	2,49452E+17

Benzer işlemler yapışarak bu Teoremler genelleştirilebilir.

Teorem 7. 3. $(4n-u, 4n, 4n+u)$ biçimindeki Heron üçgenleri başlangıç şartları $n_0 = u$ ve $n_1 = 2u$ olan $n(k+2) - 4n(k+1) + n(k) = 0$ fark denkleminden elde edilir. Bu üçgenlerin alanları $\Delta_k = \frac{\sqrt{3}}{4} u^2 \left\{ \left(2+\sqrt{3}\right)^{2k} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{2k} \right\}$ k = 0, 1, 2, 3, … dir.

İspat: $(4n-u, 4n, 4n+u)$ üçlüsünü göz önüne alalım. O zaman $p = 6n$ olur. Böylece, her *n* rasyonel sayı için *p* rasyoneldir. Şimdi-de üçgenin alanını araştıralım,

$\Delta = 2n\sqrt{3\left(4n^2 - u^2\right)}$ elde edilir. $\Delta \in$Q olması için $4n^2 - u^2 = 3m^2$ olmalıdır.

$n = \frac{u}{2}$ için $m = 0$ olur. Ancak bu üçlü bir doğru parçasını ifade eder.

$n = \frac{2u}{2}$ için $m = u$ olur.

$n = \frac{3u}{2}$, $n = \frac{4u}{2}$, $n = \frac{5u}{2}$, $n = \frac{6u}{2}$ için $4n^2 - u^2 = 3m^2$ rasyonel değildir. Yani $(5u, 6u, 7u)$, …, $(11u, 12u, 13u)$ üçlüleri birer üçgen olur. Ancak bu üçgenlerin alanları rasyonel değildir.

$n = \frac{7u}{2}$ için $m = 4u$, $n = \frac{26u}{2}$ için $m = 15u$, $n = \frac{97u}{2}$ için $m = 56u$, $n = \frac{362u}{2}$ için $m = 209u$ olur.

….

….

Şimdi *n* ve *m* leri, n_i ve m_i, *i* = 0, 1, 2, … olarak sıralarsak;

$n_0 = \frac{u}{2}$ için $m_0 = 0$,

$n_1 = \frac{2u}{2}$ için $m_1 = u$,

$n_2 = \frac{7u}{2}$ için $m_2 = 4u$,

$n_3 = \frac{26u}{2}$ için $m_3 = 15u$,

$n_4 = \frac{97u}{2}$ için $m_4 = 56u$,

$n_5 = \frac{362u}{2}$ için $m_5 = 209u$, … şeklinde devam edilirse bu sayılar arasında, $k = 2$ den itibaren bütün terimler

$n_k = 4n_{k-1} - n_{k-2}$ için $m_k = 4m_{k-1} - m_{k-2}$ bağıntısından bulunur.

$n_k = 4n_{k-1} - n_{k-2}$ de $n_0 = \frac{u}{2}$ ve $n_1 = u$ başlangıç şartları alınırsa $n(k+2) - 4.n(k+1) + n(k) = 0$, $n(0) = \frac{u}{2}$ ve $n(1) = u$ fark denklemi yazılır. Bu denklem lineer denklem olup, karakteristik denklemi $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ olur. Buradan $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ bulunur. Böylece denklemin genel çözümü $n(k) = c_1\left(2+\sqrt{3}\right)^k + c_2\left(2-\sqrt{3}\right)^k$, k = 0, 1, 2, 3,… olur.

Başlangıç şartlarını kullanırsak,

$$\begin{cases} n(0) = c_1 + c_2 = \dfrac{u}{2} \\ n(1) = c_1\left(2+\sqrt{3}\right) + c_2\left(2-\sqrt{3}\right) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{4}u \\ c_2 = \dfrac{1}{4}u \end{cases}$$ elde edilir.

Buradan, $n(k) = \frac{1}{4}u\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}$, k = 0, 1, 2, … dır. Böylece, $\{n_k\}$ dizisinin her bir terimi $(4n-u, 4n, 4n+u)$ üçlüsünü Heron üçgenine dönüştürür. Yani, her bir k sayına verilecek değer n_k Heron üçlüsünü oluşturur. O zaman her bir k için $(4n_k-u, 4n_k, 4n_k+u)$ üçlüsü Heron üçgenleridir. Bu durumda $p_k = 6n_k$ den $p_k = \frac{3}{2}u\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ olur.

$$\Delta_k = \sqrt{p_k\left(p_k-(4n_k-u)\right)\left(p_k-4n_k\right)\left(p_k-(4n_k+u)\right)}$$

$$= 2n_k\sqrt{3\left(4n_k^2-u^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2}u\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{3\left[4\left\{\frac{1}{4}u\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \frac{1}{4}u\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}^2 - u^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2}u\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{3u^2\left[\frac{1}{4}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}^2 - 1\right]}$$

$$= \frac{1}{2}u^2\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{3\left[\frac{1}{4}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k} + 2\left(2+\sqrt{3}\right)^k\left(2-\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2k}\right\} - 1\right]}$$

$$= \frac{1}{2}u^2\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right\}\sqrt{3\left\{\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k} - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2k}\right\}}$$

$$= \frac{1}{4}u^2 \left\{ \left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k \right\} \sqrt{3\left\{ \left(2+\sqrt{3}\right)^k - \left(2-\sqrt{3}\right)^k \right\}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 \left\{ \left(2+\sqrt{3}\right)^{2k} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{2k} \right\}, \ k = 0, 1, 2, \ldots \text{ elde edilir ki istenendir.}$$

8. BÖLÜM: SONUÇ

Biz bu tezimizde, ardışık kenarlı Heron üçgeninin nasıl elde edildiğini ve bu elde edilen Heron üçgenlerini kullanarak ardışık kenarlı daha başka nasıl Heron üçgenleri elde edilebileceğini göstermiş olduk ve bunu genelleştirdik.

KAYNAKLAR

Mohanty S. and Mohanty S. P., "Pythagorean Numbers", Fibonacci Quarterly, Vol. 28 No l, pp 31-42, (Feb. 1990).

Beauregard R. A. and Suryanarayana E. R., "Arithmetic Triangles", Mathematics Magazine, Vol. 70, pp 105-115, (1997)

Raumond A. Beauregard and Suryanaryan E. R., "Integral Triangles", Mathematics Magazine, Vol. 72, No4, (Oktober 1999)

Sastry K. R. S., "Heron Triangles: A New Perspective", Australian Mathematical Society Gazette, Vol 26, Number 4, pp 161-168, (1999)

Sastry K. R. S., "Heron Triangles: A Gergonne Cevian and Median Perspective ” , Forum Geometricorum Vol l, 17-24 (2001),

Brisse Edward, "Perspective Poristic Triangles", Forum

Geometricorum, Vol l, pp 9-16, (2001)

Bier Sabrına, "Equilateral Triangles İntercepted by Oriented Parallelians", Forum Geometricorum, Vol l, pp 25-32, (2001)

Gurbanlıyev Allagulı, “ Heron Üçgenleri Üzerine” ,(Doktora Tezi), Konya,(2003)

Darıyeri Mehmet, “ Heron Üçgenlerinin Bazı Özellikleri Üzerine Bir Araştırma “ (Yüksek Lisans Tezi), Konya, (2005)

Gurbanlıyev A., Kızıl d., and Şenay H., “Paralelogram and Heronıan Triangles " Dergi(Math. Ser.) Vol. 19, No. 2, 183-185, (2006)