



T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

LİE CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dlara HAMA KARIM

Danışman
Doç Dr. Tufan Sait KUZPINARI
Ortak Danışman:
Prof.Dr. Durmuş BOZKURT

AKSARAY, 2016





T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

LİE CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dlara HAMA KARIM

Danışman
Doç Dr. Tufan Sait KUZPINARI
Ortak Danışman:
Prof.Dr. Durmuş BOZKURT

AKSARAY, 2016

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 142309803 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, "Dlara HAMA KARIM", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "**LİE CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ**" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI**

Aksaray Üniversitesi

Jüri Üyesi: **Doç. Dr. Hacı AKTAŞ**

Erciyes Üniversitesi

Jüri Üyesi: **Yrd. Dr. Ali AYTEKİN**

Aksaray Üniversitesi

Teslim Tarihi: 24 Mart 2016

Savunma Tarihi: 12 Mayıs 2016

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışımda alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Dlara HAMA KARIM

İmza



TEŞEKKÜR

Bana Türkiyede eğitim alma fırsatı veren Aksaray Üniversitesi yetkililerine ve eğitim süresince yardımlarını esirgemeyen Fen Bilimleri Enstitüsü idareci ve çalışanlarına en derin şükranlarımı sunarım.

Bu tezin çalışma ve hazırlık aşamalarında sürekli yardım ve desteğini gördüğüm, danışmanım Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI'na ve Prof. Dr. Durmuş BOZKURT'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen biricik ailem özellikle Annem Nizal Hama Rauf'a şükranlarımı sunuyorum, yine desteklerinden dolayı kuzenlerim Hiam ve Viyan'a da teşekkürlerimi sunarım.

Dlara HAMA KARIM

ÖNSÖZ

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller ilk olarak Whitehead [1] tarafından tanımlanmıştır. Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller Porter [2] tarafından verilmiştir. Lie cebirler için çaprazlanmış modüller Kassel ve Loday [3] tarafından tanımlanmıştır. k sıfırdan farklı birimi olan değişmeli bir halka olmak üzere, Lie k-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısı ile iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramlarını hatırlatarak bazı örnekler vereceğiz.

Grup teoride bir grubun diğeri üzerine etkisinin otomorfizm grubuyla belirlendiği iyi bilinir. G grubunun H grubuna etkisi $G \longrightarrow Aut(H)$ homomorfizmi ile verilir. G grubu ile H grubunun herhangi bir genişlemesi ile bir $G \longrightarrow Out(H)$ homomorfizmi ilgilidir. Cebir de ise bir cebirin diğeri üzerine etkisi aşağıda vereceğimiz çarpım cebiri ile verilir. Cebirsel genişlemede ise P_B dış çarpımı yer alır. Çarpım cebiri kavramı, S.Mac Lane tarafından [4] tanımlanmıştır. R. Lavenhomme ve Th. Lucas ise [5] çalışmalarında bu kavram ile çaprazlanmış modül yapısı arasındaki ilişkiden söz etmişlerdir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **i**
İÇİNDEKİLER ..... **ii**
ÖZET ..... **iii**
ABSTRACT ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **v**
1.GİRİŞ **1**
2. TANIM VE NOT ASYON **2**
2.1 Bazı Temel Tanımlar 2
2.2 İzomorfizm Teoremleri 5
3. GENEL BİLGİLER **12**
3.1 Cebir ve Simplisel Cebirler 12
3.2 Çaprazlanmış Modül 13
3.3 Lie Cebirler 13
4. LİE CEBİRLER VE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER **18**
4.1 Lie Cebirleri Üzerinde Çaprazlanmış Modüller 18
4.2 2-Lie Cebirleri Üzerinde Çaprazlanmış Modüller 20
KAYNAKLAR **23**
ÖZGEÇMİŞ **26**

ÖZET

LİE CEBİRLER ÜZERİNDE TANIMLANMIŞ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezde kullanacağımız cebirsel yapılar ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde cebir, modül çaprazlanmış modül ve Lie cebir yapıları ile ilgili kavramlar verilmiştir. Son bölümde ise Lie cebirler üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüller ve 2-Lie cebir üzerinde tanımlanmış çaprazlanmış modüller verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Modül, Çaprazlanmış Modül, Lie cebir, Lie 2-cebir,.

ABSTRACT

SOME ASPECTS OF CROSSED MODULES ON LIE ALGEBRAS

This thesis consist three chapters. At first chapter, some algebraic basic definitions and theorems that we used in this thesis are given. At chapter two, some concepts corcern with the algebraic structures such that algebra, crossed module and Lie algebra are given. At the last chapter, crossed modules on Lie algebra and crossed modules on 2-Lie algebras concepts are given.

Key words: Module, Crossed modules, Lie algebra, Lie 2-algebra.

SİMGELER DİZİNİ

$\wedge$: Ve

$\vee$: Veya

$\prod$: Çoklu Kartezyen Çarpımı

$\boldsymbol{\varepsilon}$: Epsilon

∞ : Sonsuz

$\cap$: Çoklu Kesişim

$\cup$: Çoklu Birleşim

$\forall$: Her

$\in$: Elemanıdır

$\emptyset$: Phi

$\boldsymbol{\Phi}$: Upsilon

$\boldsymbol{\alpha}$: Alfa

$\boldsymbol{\beta}$: Beta

$\sum$: Toplam

$\cup$: Birleşim

$\cap$: Kesişim

$\boldsymbol{\sigma}$: Sigma

$\boldsymbol{\psi}$: Psi

$\exists$: Vardır, en az bir

1.GİRİŞ

Lie cebirlerinin Çapraz modülleri, uzunluğu 1 olan Moore kompleks ile simplisel Lie cebirlerine denk olan ve Lie cebirleri üzerinde ideallerin ve modüllerin eş zamanlı genellemeleri olan cebirsel nesnelerdir (bakınız [6]). Bu yapı, Lie cebirlerinin üçüncü bağıl Chevalley-Eilenberg kohomolojisinin bir yorumunu vermek için, [3] da hesaplama araçları olarak kullanılmaktadır. Lie cebirlerin çaprazlanmış modüllerin iç (düşük boyutlu) homoloji teorisindeki ilk yaklaşımlar [7] da yapılmıştır.

Lie cebirlerin çaprazlanmış modülü ilk olarak Gerstenhaber [8]'in çalışmalarında, aşağıda verilen Lie cebirlerin üçüncü homoloji grubunun sınıflandırılmasında ortaya çıkmıştır. $\phi : m \to g$, Lie cebirlerin çaprazlanmış modülü için dört terimli bir tam dizi vardır.

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{i} m \xrightarrow{\varphi} g \xrightarrow{\pi} h \longrightarrow 0$$

Burada $\hbar$ eşçekirdeği bir Lie cebirdir ve Çek$V$ g nin m üzerine etkisiyle indirgenmiş bir $\hbar$-modüldür. $çpmod(h,V)$, belirli V çekirdeği, h eşçekirdeği ve etki olmak üzere çaprazlanmış modüllerin denklik sınıfının kümesini göstermektedir.

Gernsternhaber, $çpmod(h,V)$ ile $H^3(\hbar,V)$ arasında bir birebir eşleme olduğunu ispat etmiştir. Daha ayrıntılı bilgi için [9] ve diğer cebirsel yapılar için [10,11] bakılabilir.

Lie cebirleri, Lie 2-cebirlerine kategori edilebilir. Bu konu ile ilgili daha iyi bilgiler ve tanımlar [12,13,14] da bulunmaktadır. Bir Lie 2-cebir, skew simetrik bilineeer bir funktor ile birlikte doğal izomorfizmin

kontrolüyle Jacobi birimi gibi uyumluluk kuralını sağlayan bir 2-vektör uzayıdır. Lie 2-cebir ifadesi L_∞-cebirlerine denk olduğu ve sıkı Lie 2-cebirlerin kategorisinin Lie cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin kategorisine izomorf olduğu iyi bilinmektedir [12].

2. TANIM VE NOTASYON

2.1 Bazı Temel Tanımlar

Bu bölümde tezde verilen kavramların daha iyi anlaşılması için bilinen cebirsel yapılar ile tanım ve teoremlerin burada sadece ifadeleri verilecektir, ayrıntılı bilgi ve ispatlar için [15-24] e bakılabilir.

Tanım 2.1.1 G boştan farklı bir küme ve "$\cdot$" İkli işlemi ile birlikte $(G,.)$ ikilisi aşağıdaki şartları sağlarsa grup olarak adlandırılır.

G_1. Her $x, y \in G$ $için$ $x \cdot y \in G$

G_2. Her $x, y, z \in G$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

G_3. Her $x \in G$ için $x \cdot e = e \cdot x = x$ olacak şekilde $e \in G$ vardır

G_4. Her $x \in G$ için $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ olacak şekilde $x^{-1} \in G$ vardır

Tanım 2.1.2 Her $x, y \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise bu gruba Abelyan grup denir..

Tanım 2.1.3 Bir G grubunun eleman sayısı sonlu ise sonlu grup olarak adlandırılır. Bu durumda G nin eleman sayısı G nin meretebesi olarak adlandırılır ve $|G|$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 G bir grup ve $a \in G$ olsun. $a^n = e$ şartını sağlayan en küçük n pozitif tamsayısı varsa a elemanına sonlu mertebelidir denir ve en küçük pozitif tamsayısına a nın mertebesi denir ve $O(a)$ ile gösterilir. Eğer $a^n = e$, şartını sağlayan bir n pozitif tamsayısı yoksa a elemanı sonsuz mertebedendir denir.

Tanım 2.1.5 G bir grup ve H nin bir altkümesi olsun. Eğer H kümesi G deki işleme göre grup yapısı oluşturuyorsa H ya G nin altgrubu denir.

Tanım 2.1.6 G ve H iki grup olsun $\phi: G \rightarrow H$ dönüşümü her $g, h \in G$ için

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$$

şartını sağlıyorsa ϕ dönüşümü grup homomorfizmi olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.7 [15] G_1 ve G_2 iki grup ve $\theta: G_1 \to G_2$ fonksiyonu verilsin, bu durumda θ aşağıdakişartları sağlıyor ise bir grup izomorfizmi olarak adlandırılır.

1. θ birebir ve örtendir,
2. her $a, b \in G_1 \; için \; \theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$.

Bu durumda G_1 , G_2 izomorftur denir ve $G_1 \cong G_2$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.8 G bir grup ve a elemanı G nin herhangi bir elemanı olsun. $\langle a \rangle = \{x \in G | x = a^n$ ve $n \in Z\}$ kümesine a tarafından üretilen devirli grup denir. Eğer $G = \langle a \rangle$ olacak şekilde bir $a \in G$ varsa G devirli grup olarak adlandırılır. Burada a, G nin bir üretecidir.

Tanım 2.1.9 R boş kümeden farklı bir küme ve " $+$ " ve "." iki ikili işlem olsun. Eğer $(R, +)$ abel grup ve "." işlemi birleşmeli ve birinci işlem üzerine aşağıdaki her iki dağılma özelliğini sağlıyorsa

$$r(s + t) = rs + rt \;\; (r + s)t = rt + st$$

$(R, +, .)$ yapısına bir halka denir.

Eğer "." işlemi değişmeli ise halka değişmelidir denir. Eğer R halkası çarpma işlemine göre $1_R \in R$ birim elemanına sahipse birimli halka denir. R halkası 1_R birim elemanına sahip ise, bir $r \in R$ elemanının tersi elemanı $rr' = 1_R = r'r$ şartını sağlarsa $r' \in R$ ters elemanı denir.

Tanım 2.1.10 [15] R birimli, değişmeli halka ve $1_R \neq 0_R$ iken sıfır hariç tüm elemanların çarpımsal tersi olan halkaya cisim denir.

Tanım 2.1.11 [16] R ve S ve iki halka olsun. $f: R \to S$ fonksiyonu halkadaki aşağıda verildiği gibi toplama ve çarpma işlemlerini koruyorsa halka homomorfizmi olarak adlandırılır.

$$f(r + r') = f(r) + f(r')$$

$$f(rr') = f(r)f(r').$$

Eğer R ve S birimli ise ve f örten ise $f(1_R) = 1_S \; dir.$

Tanım 2.1.12 R bir halka ve S boştan farklı R nin bir altkümesi ve R deki toplama ve çarpma işlemleri S de kapalı olsun. Eğer S bu işlemlerle birlikte bir halka yapısı oluşturuyorsa *S ye R* nin alt halkası denir. R nin bir I alt halkası

$$r \in R \quad \text{ve} \quad x \in I \;\Rightarrow\; rx \in I;$$

şartını sağlıyor ise bir sol ideal

$$r \in R \quad \text{and } x \in I \;\Rightarrow\; xr \in I;$$

şartını sağlıyor ise sağ ideal olarak adlandırılır. I hem sol hem de sağ ideal ise bir ideal olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.13 a sıfırdan farklı R nin bir elemanı olsun $ab = 0$ şartını sağlayan sıfırdan farklı bir $b \in R$ varsa buna sıfır bölen denir.

Tanım 2.1.14 R birimli ve değişmeli bir halkasında hiçbir sıfır bölen yoksa bu halkaya tamlık bölgesi denir.

Tanım 2.1.15 R^* çarpma işlemi altında bir grup yapısı oluşturuyorsa buna bölüm halkası denir. Bu R nin birim elemanı ve tersi var ve hiçbir sıfır bölen içermediği anlamına gelir. Eğer sıfır bölen varsa $a, b \in R^*$ için $ab = 0 \notin R^*$olabilir.

Tanım 2.1.16 F kümesi E nin alt kümesi olsun eğer F, E deki işlemlere göre bir cisim yapısı oluşturuyorsa F'ye bir altcisimdir denir. E ye de F nin genişlemiş cismi denir.

Tanım 2.1.17 [19] V bir küme F bir cisim olsun. " $+$ " toplama ve "." skaler çarpım işlemleri üzerinde tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye bir vektör uzayı denir.

(i) (Kapalılık) her $a \in F$ ve her $u, v \in V$ için, $u + v$ toplamı ve $a \cdot v$ skaler çarpımı tek türlü tanımlıdır ve V nin elemanındır;

(ii) (Birleşme) Her $a, b \in F$ ve her $u, v, w \in V$ için

$$u + (v + w) = (u + v) + w \text{ ve } a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v;$$

(iii) (Toplamanın değişmesi) Her $u, v \in V$, $u + v = v + u$

(iv) (Dağılma özl.) Her $a, b \in F$ ve her $u, v \in V$ için,

$a \cdot (u + v) = (a \cdot u) + (a \cdot v)$ ve $(a + b) \cdot v = (a \cdot v) + (b \cdot v)$;

(v) (Toplamsal birimin varlığı) $0_V \in V$ elemanı $v + 0_V = v$ ve $0_V + v = v$ her $v \in V$ için vardır,

(vi) (Toplamsal tersin varlığı) Her bir $v \in V$ için, $v + x = 0_V$ ve $x + v = 0_V$ deklemlerinin $x \in V$ olacak şekilde bir çözümü vardır, ve $-v$ ile gösyterilir.

(vii) (Birim) Her $v \in V$, $1_V \cdot v = v$.

2.2 İzomorfizm Teoremleri

Teorem 2.2.1 R ve S iki halka ve $\varphi: R \rightarrow S$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda

1. φ nin çekirdeği R nin bir idealidir,
2. φ görüntüsü S nin bir althalkasıdır,
3. $\phi: R/\,çek\,\varphi \rightarrow gör\,\varphi \subset S,\ r + çek\,\varphi \mapsto \varphi(r)$ iyi tanımlı bir izomorfizmdir.

Teorem 2.2.2 R bir halka, $S \subset R$ bir althalkası, ve I da R nin bir ideali olsun. Bu durumda:

1. $S + I := \{s + a : s \in S;\ a \in I\}$ kümesi Rnin bir althalkasıdır,
2. $S \cap I$ kesişimi Snin bir idealidir, ve
3. $\frac{S+I}{I}$ yapısı $\frac{S}{S\cap I}$ ye izomorftur.

Teorem 2.2.3 R bir halka ve $J \subset I$ R nin idealleri olsun.Bu durumda I/J , R/J nin bir idealidir ve

$$^{R/J}/_{I/J} \cong R/I\ .$$

Tanım 2.2.4 R bir birimli halka, M bir toplamsal abel grubu ve $f : R \times M \rightarrow M$, $f(r,m) = rm$ olarak tanımlanan bir dönüşüm olsun. Eğer f, aşağıdaki (1) - (4) koşullarını sağlar ise, M bir sol R-modül veya kısaca bir modül olarak adlandırılır:

1) $r(m + n) = rm + rn, \forall\ r \in R$ ve $m, n \in M$,

2) $(r + s)m = rm + sm,\ \forall\ r, s \in R$ ve $m \in M$,

3) $(rs)m = r(sm),\ \forall\ r, s \in R$ ve $m \in M$,

4) $1m = m, \forall\, m \in M, 1 \in R$

Eğer $f(m,r) = mr$ ile tanımlanan $f : M \times R \rightarrow M$ dönüşümü, aşağıda verilen (1) - (4) koşullarını sağlar ise,

1) $(m + n)r = mr + nr,\ \forall\ m, n \in M\ ve\ r \in R$,

2) $m(r + s) = mr + ms, \forall\, m \in M\ ve\ r, s \in R$,

3) $m(rs) = (mr)s,\ \forall\, m \in M\ ve\ r, s \in R$,

4) $m1 = m, \forall\, m \in M, 1 \in R$.

bu durumda M'ye bir sağ R-modül denir. Eğer her $r \in R, m \in M, s \in S$ için M bir sol R-modül, sağ S-modül ve $(rm)s = r(ms)$ ise, M bir R - S-modül veya bimodül olarak adlandırılır.

Örnek 2.2.5

1. $M = \mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Q}$-modüldür.

2. $M = \mathbb{Q}$ bir $\mathbb{R}$-modüldür.

3. $M = \mathbb{Z}_n$ bir $\mathbb{Z}$-modüldür, burada n bir tamsayıdır, $n \geq 2$.

Tanım 2.2.6. [16] Bir ***K*** kategorisi, nesne kümesi $Ob(K)$, morfizimlerinin kümesi Mor(K) , kaynak ve hedef dönüşümleri,

$$\alpha, \beta : Mor(K) \to Ob(K)$$

nesne dönüşümü,

$$\mathcal{E} : Ob(K) \to Mor(K)$$

$$x \to \varepsilon(x) = I_x$$

ve

$$Mor(K)_\alpha \times_\beta Mor(K) = \{(a,b) \in Mor(K) \times Mor(K) : \alpha(b) = \beta(a)\}$$

üzerinde tanımlı "." biçimindeki çarpma işlemi kısmi çarpma işlemi olarak adlandırılacaktır. Bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlarlar;

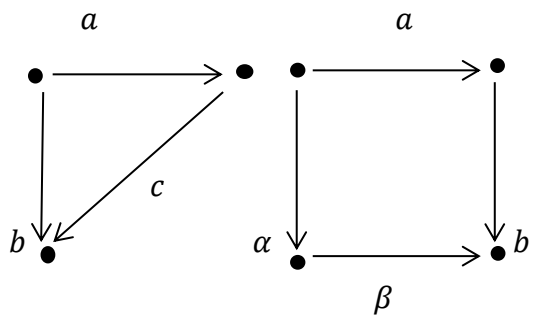
K$_1$) $\forall (a,b) \in Mor(K)_\alpha \times_\beta Mor(K)$ için $\alpha(b.a) = \alpha(a)$ ve $\beta(b.a) = \beta(b)$

K$_2$) $\forall a,b,c \in Mor(K)$ ile $\alpha(c) = \beta(b)$ ve $\alpha(b) = \beta(a)$ için $c.(b.a) = (c.b).a$

K$_3$) $\forall x \in Ob(K)$ için $\alpha(I_x) = x = \beta(I_x)$

K$_4$) $\forall a \in Mor(K)$ için $a.I_{\alpha(a)} = a$ ve $I_{\beta(a)}.a = a$ dır .

Tanım 2.2.7 Herhangi bir K kategorisinde nesneler ve morfizmlerin diyagramı için verilen bir kaynak adı verilen nesneden hedef nesnesine tüm bileşke morfizmler eşit ise bu kategori değişmelidir denir. Bu yapı geometrik olarak



biçiminde ifade edilir. Bu diyagramının değişmeli olması için gerek ve yeter şart

$$c = b \circ a \quad ve \quad \beta \circ \alpha = b \circ a$$

olmasıdır.

Tanım 2.2.8 K ve $\mathcal{D}$ iki kategori olmak üzere K nin her H nesnesini $\mathcal{D}$ nin bir $F(H)$ nesnesine, K nin her bir $f: H \to H'$ morfizmini ise $\mathcal{D}$ deki bir $F(f): F(H) \to F(H')$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir F dönüşümüne K den $\mathcal{D}$ ye bir *funktor* denir ve $F: K \to D$ biçiminde gösterilir.

i) K kategorisinde $g \circ f$ bileşkesi tanımlı olacak şekildeki f ve g morfizmleri için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dir. .

ii) $\forall\, H \in Ob(K)$ için $F(1_H) = 1_{F(H)}\ dır$

Tanım 2.2.9 $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)\ \forall\, x \in X$ şartları ile birlikte $F: X \times I \to Y$ sürekli dönüşümüne *homotopi* denir. Burada X, Y uzaylar olmak üzere $f_0, f_1 : X \to Y$ sürekli dönüşümlerdir ve f_0, f_1'e *homotopiktir* denir.

İki matematiksel yapının homotopik olması, birinin diğeri üzerine sürekli bir şekilde deforme edilebilmesi demektir. Örnek olarak Gerçel sayı doğrusu, tek bir noktaya homotopiktir fakat bir çember, tek bir nokta uzayına homotopik değildir.

Tanım 2.2.10 Nesneleri X topolojik uzayları, Hom kümeleri $Hom(X, Y) = [X, Y]$ ve birleşimleri $[h] \circ [f] = [h \circ f]$ biçimindeki bölüm kategorisine *homotopi kategorisi* denir ve $h\,Top$ ile ifade edilir.

Tanım 2.2.11 Nesneleri topolojik uzaylar olan , morfizmleri homotopi sınıfları ve kısmi çarpım işlemi homotopi sınıfları arasında tanımlı X işleminden oluşan kategoriye *homotopiler kategorisi* denir.

Tanım 2.2.12 $f: A \to B$ fonksiyonu sabit bir fonksiyona homotopik ise f'ye *null homotopik fonksiyon* denir.

Tanım 2.2.13 $A \subset X,\ f : X \to B\ ve\ g : X \to B$ sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer $a \epsilon A$ için f ve g arasında $t \epsilon I$ dan bağımsız $F(a,t)$ homotopisi varsa f ve g fonksiyonlarına A ya göre homotopiktirler denir. Diğer bir deyişle $\forall\ a \epsilon A\ ve\ \forall\ t \epsilon I$ için $F(a,t) = f(a) = g(a)$ olacak şekildeki F homotopisine A ya göre homotopi denir. Bu homotopi $f \simeq g$ veya $F: f \simeq g(relA)$ biçiminde gösterilir.

$F: f \simeq g(relA)$ ise $\forall\ x \epsilon X$ için $F(x,0) = f(x) ve\ F(x,1) = g(x)$ olup bu homotopiye null homotopi denir.

İki sürekli fonksiyonun homotopik iken denk oluğunu düşünmemiz için, homeomorfizm tanımındaki ' = ' işareti yerine homotopiyi koymalıyız. Butadan aşağı daki 'homotopi denkliği' kavramını elde ederiz:

Tanım 2.2.14 X ve Y iki topolojik uzay olsun. Eğer $g°f \simeq Ix : X \to X\ ve\ f°g \simeq Iy: Y \to Y$ olacak şekilde $f: X \to Y\ ve\ g : Y \to X$ sürekli fonksiyonları varsa, X ve Y uzaylarına aynı homotopi tipindendir ya da homotopik olarak denktir denir. f *ile* g fonksiyonlarına ise bir homotopi denkliği denir. Burada 'homotopi denkliği' kavramından çok iki uzayın homotopik olması kavramı daha çok kullanılmaktadır.

Tanım 2.2.15 M değişmeli grubu aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda bir sol R-modül denir. Her $k, l \in K\ ve\ x, y \in M$ için;

1. $kx \in M$
2. $(k + l)x = kx + lx$
3. $(kl)x = k(lx)$
4. $k(x + y) = kx + ky$
5. $1 \cdot x = x$

Tanım 2.2.16 A bir halka ve P, R iki $A-$ modül olsun. $T = P \otimes R$ ile gösterilen tensör çarpımı; T bir A – modül ve $g : P \times R \to T$ bilineer dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip bir (T, g) ikilisi şeklinde tanımlanır.

a) Her P, A – modülü ve her $f : M \times N \to P$ bilineer dönüşümü $f = f'o\ g$ olacak şekilde bir tek $f' = T \to P$ lineer dönüşümü vardır.

b) $(T, g)\ ve\ (T', g')\ (a)$ özelliğine sahip ise $j\ o\ g = g'$ olacak şekilde bir tek $j : T \to T'$ izomorfizmi vardır.

Tanım 2.2.17 A bir sol K-modül olsun. Eğer her $k \in K$ ve $x, y \in A$ için

$$k(xy) = (kx)y = x(ky)$$

ise A ya K cismi üzerinde bir cebir denir.

Tanım 2.2.18. R bir halka M ve N R-modül olsun. $f: M \to N$ toplamsal grup homomorfizmi her r ∈ R ve her $m \in M$ için

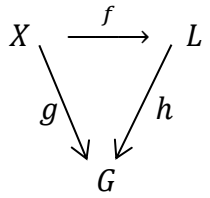
$$f(rm) = rf(m)$$

şartını sağlıyorsa bir R-modül homomorfizmidir. Bir R-modül homomorfizmi 1-1 ise monomorfizm, örten ise epimorfizm, hem $1-1$ hem örten ise izomorfizm olarak adlandırılır.

$M \to N$ tüm R-modüllerin kümesini $hom_R(M, N)$ ile göstereceğiz.

Eğer R bir cisim ise M ve N vektör uzayıdır, $f: M \to N$ bir R-modül homomorfizmi ise bir lineer transformasyondur.

Tanım 2.2.19 X bir küme L bir grup ve $f: X \to L$ fonksiyonu için $g: X \to G$ fonksiyonu ve L grubu için tek bir G bir grup olmak üzere $h: L \to G$ homomorfizmi varsa ve aşağıdaki üçgen değişmeli olmak üzere X grubu üzerinde tanımlı (L, f) ikilisine serbest grup denir.



Tanım 2.2.20 R bir halka ve M bir R-modül olsun. $N \subseteq M$ olmak üzere her $r \in R$ ve her $n \in N$ için $rn \in N$ oluyorsa N ye M nin bir R-altmodülü denir. Eğer K bir cisim ise M bir k-vektör uzayıdır ve M nin bir k-altmodülü bir k-altuzay olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.21 R bir halka, $\phi: M \to M'$ ve $\psi: N \to N'$ sol R-modül homomorfizmi olsun.

$$hom_R(M, \psi): hom_R(M, N) \to hom_R(M, N') \text{ ve } f \mapsto \psi \circ f.$$

$$hom_R(\phi, N): hom_R(M', N) \to hom_R(M, N') \text{ ve } g \mapsto g \circ \phi.$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar verilsin. $hom_R(M,\psi)$ için ortak bir gösterim ψ_* ve $hom_R(\phi,N)$ için ϕ^*dir. $hom_R(M,R)$ modül homomorfizmi bazen "M nin duali"olarak adlandırılır [16].

Tanım 2.2.22 R bir halka olsun. Sol R-modül homomorfizmlerin bir dizisi

$$M_2 \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0$$

verilsin eğer, $çek(f_1) = Gör(f_2)$ ise tamdır denir. Daha genel olarak sol R-modüllerin bir dizisi

$$\cdots \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots$$

verilsin eğer her i için $çek(f_i) = Gör(f_{i+1})$ ise tamdır denir. Bir kısa tam dizi aşağıdaki şekilde bir tam dizidir.

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Tanım 2.2.23 R bir halka ve G bir abelyan grup olsun. M bir sağ R-modül ve N de bir sol R-modül olmak üzere,

$$f(m+m',n) = f(m+n) + f(m',n)$$

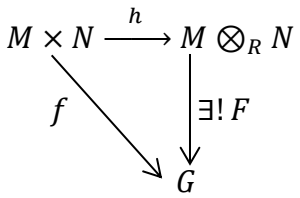
$$f(m,n+n') = f(m,n) + f(m,n')$$

$$f(mr,n) = f(m,rn)$$

$f: M \times N \to G$ fonksiyonuna R-biadditive denir.

Tanım 2.2.24 R bir halka olsun. M bir sağ R-modül ve N de bir sol R-modül olmak üzere, R üzerinde M ve N nin tensör çarpımı, $M \otimes_R N$ abelyan grup $h: M \times N \to M \otimes_R N$ R-biadditive fonksiyonu ile birlikte aşağıdaki evrensel özelliği sağlar:

Her G grubu ve her $f: M \times N \to G$ R-biadditive fonksiyonu için $F: M \otimes_R N$ olacak şekilde bir tek abelyan grup homomorfizmi vardır ve aşağıdaki şekil değişmelidir [16].



Teorem 2.2.25 $f : M \to M'$ bir modül homomorfizmi ve N homomorfizmin çekirdeği olsun. Bu durumda

$$f(M) \cong M/N.$$

$\{S, y \in T\}$ kümesi verilsin. Bu durumda $S + T$ ve $S \cap T$, M nin alt modülüdür. ve

$$(S + T)/T \cong S/(S \cap T).$$

Teorem 2.2.26 Eğer $N \leq L \leq M$ ise , bu durumda

$$M/L \cong (M/N)/(L/N).$$

Tanım 2.2.27 A ve B iki modül olsun bu durumda $A \oplus B = \{a \oplus b | a \in A, b \in B\}$ kümesine A ile B nin direkt toplamı denir. Özellikle A ve B nin sol R-modül olduğunu kabul edelim bu durumda $r \in R$ olmak üzere

$$a_1 \oplus b_1 + a_2 \oplus b_2 = (a_1 + a_2) \oplus (b_1 + b_2) \text{ ve } r(a \oplus b) = (ra \oplus rb)$$

şeklindedir.

3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezin son bölümünde ayrıntılı özelliklerini vereceğimiz çaprazlanmış modüller ve Lie cebir ile ilgili tanımları vereceğiz. Burada kullandığımız tanım ve teoremler ayrıntılı olarak [7],[9],[12],[13] ve [25-29] de bulunmaktadır.

3.1 Cebir ve Simplisel Cebirler

Tanım 3.1.1 M, k-modül olsun. Her $m_1, m_2, m_3 \in M$ *için*

$$M \times M \to M$$

$$(m_1, m_2) \mapsto m_1 m_2$$

şeklinde tanımlanan k-bilineer fonksiyonu

i) $m_1 m_2 = m_{2m_1}$

ii) $(m_1 m_2) m_3 = m_1 (m_2 m_3)$

koşullarını sağlıyorsa M ye bir değişmeli k-cebiri (ya da k üzerinde cebir) denir.

Tanım 3.1.2 $(E_n)_{n\in N}$cebirlerin bir ailesi olsun.

$$d_i^n : E_n \to E_{n-1} \qquad 0 \le i \le n \ne 0$$

$$s_i^n : E_n \to E_{n+1} \qquad 0 \le i \le n$$

k—cebir homomorfizmleri olmak üzere

$1.\ d_i^{n-1} d_j^n = d_{i-1}^{n-1} d_j^n \qquad 0 \le i \le j \le n \ \ ise$

$2.\ d_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n \qquad 0 \le i \le j \le n \ \ ise$

$3.\ d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n \qquad 0 \le i \le j \le n \ \ ise$

$4.\ d_i^{n+1} s_j^n = id \qquad i = j \ ya\ da\ i = j+1 \ \ ise$

$5.\ d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n \qquad 0 \le j \le i-1 \le n \ \ ise$

özdeşlikleri sağlanıyorsa $(E_n)_{n\in N}, d_i, s_i$ üçlüsüne bir **simplisel cebir** denir ve kısaca **E** ile gösterilir. d_i, s_i homomorfizmlerine sırasıyla **yüzey** ve **dejenere operatörleri** denir. Uygulamadaki kolaylığı acısından yukarıdaki aksiyonların gerektirdiği aşağıdaki eşitlikler daha sık kullanılır.

1. $d_i d_j = d_j d_{i+1} \quad 0 \leq j \leq i \leq n \ \ ise$
2. $s_i s_j = s_j s_{i+1} \quad 0 \leq j \leq i \leq n \ \ ise$
3. $s_i d_j = d_j s_{i+1} \quad j \leq i \ \ ise$
4. $s_i d_j = d_{j+1} s_i \quad i > j \ \ ise$

Bu eşitlikler standarttır ve [36] de bulunabilir.

3.2 Çaprazlanmış Modül

Tanım 3.2.1. [31,32] $\partial: K \to G$ $g$rup homomorfizmi ve

$$G \times K \to K$$

$$(g, k) \mapsto g_k$$

G nin K üzerine etkisi ile birlikte, $\forall \ k, k' \in K$ *ve* $g \in G$ için

ÇM1) $\partial(g_k) = g\partial(k)g^{-1}$

ÇM2) $\partial k_{k'} = kk'k^{-1}$

şartları sağlanıyor ise K ye bir çaprazlanmış modül denir ve (K, G, ∂) ile gösterilir

Tanım 3.2.2. V, bir F cismi üzerinde vektör uzayı olsun. V üzerindeki bir B bilineer formu $V \times V \to F$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar.

1. $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$
2. $B(fv, w) = fB(v, w)$
3. $B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2)$
4. $B(v, fw) = fB(v, w)$

eğer bir lineer dönüşüm ile çalışıyorsak bu lineer dönüşümü bir A kare matrisi ile gösteririz.

3.3 Lie Cebirler

Bu kısımda genel olarak cebirler, asosyatif cebirler ve Lie cebir ile ilgili sık kullanılan tanım ve teoremleri vereceğiz. Bu bölümde cebirlerin tamamını bir k cismi üzerinde tanımlı olduğunu kabul ederek devam edeceğiz.Ayrıntılı bilgi için [26] ya bakılabilir.

Tanım 3.3.1 L_n Lie cebirlerin bir ailesi olsun.

$d_i^n: E_n \to E_{n-1}$; $0 \le i \le n \ne 0$ ve $s_i^n: E_n \to E_{n+1}$; $0 \le i \le n$,

k-cebir homomorfizmleri olmak üzere

1. $d_i^{m-1} d_j^m = d_{j-1}^{m-1} d_i^n$ for $0 \le i \le j \le n$,

2. $s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n$ for $0 \le i \le j \le$ n,

3. $d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n$ for $0 \le i \le j \le$ n,

4. $d_i^{n+1} s_j^n = id$ for $i = j$ or $i = j + 1$

5. $d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n$ for $0 \le j \le i - 1 \le n$.

özdeşlikleri sağlanıyorsa L_n, d_i, s_iüçlüsüne bir **simplisel Lie cebir** denir ve kısaca **L** ile gösterilir d_i, s_i homomorfizmlerine sırasıyla **yüzey** ve **dejenere operatörleri** denir.

Tanım 3.3.2 L bir simplisel Lie cebir olsun, L nin Moore kompleksi (NL, ∂)

$$NL_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} Çekd_i^n \ ,$$

şeklde tanımlanan bir zincir kompleksidir. Burada $\partial_n: NL_n \to NL_{n-1}$ indirgenmiş morfizmdir. Simplisel Lie cebirlerin uzunluğu k olan NL Moore kompleksine eğer $n \ge k + 1$ için $NL_n = 0$ ise uzunluğu k olan Moore kompleks veya l olan $(l \ge k)$ Moore kompleks adı verilir.

Tanım 3.3.3 K bir halka olsun. Her $x, y, z \in K$ için

$$x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$$

ise K Jacobi özdeşliğini sağlar.

Tanım 3.3.4 [29] $gl = \{V, \oplus, R, +, \cdot, \otimes\}$ bir vektör uzayı olsun. $[\ ,\ ]: gl \times gl \to gl$ braket operatörü için

(i) Skew-simetrik: $[XX] = 0$,

(ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ özeliklerini sağlıyorsa , (gl , [,])

ikilisine bir Lie cebiri denir.

Tanım 3.3.5 ***K*** Jacobi özdeşliğini sağlayan halka ve her $a \in K$ için $[a,a]=0$ sağlansın, eğer K,k cismi üzerinde bir cebir ise K ye k cismi üzerinde bir Lie cebiri denir. K cebir çarpımı her $a,b \in K$ için $[a,b]$ ile gösterip bu çarpıma komütatör denir [29].

Eğer N,K nin bir k-alt modülü ve her $x,y \in N$ için $[x,y] \in N$ ise N ye K nin bir Lie alt cebiri denir ve $N \leq K$ ile gösterilir.

K, bir Lie cebiri ve P ve Q, K nin k-alt modülleri olsun. O zaman $p \in P$ ve $q \in Q$ olmak üzere $[P,Q],[p,q]$ ve $P+Q$ ise $p+q$ şeklindeki elemanlar tarafından üretilen k-alt modüldür. $P \leq K$ olması için gerek ve yeter koşul $[P,P] \subseteq P$ olmasıdır.

Tanım 3.3.6 P ve Q aynı k cismi üzerinde iki Lie cebiri olsun. Eğer

$\beta : P \rightarrow Q$ lineer dönüşümü her $x,y \in P$ için

$$\beta([x,y]) = [\beta(x),\beta(y)]$$

oluyorsa β ya bir Lie cebir morfizmi denir. Eğer β birebir ve örten ise β ya bir izomorfizm denir. Eğer $\beta : P \rightarrow P$ bir izomorfizm ise β ya otomorfizm denir.

Tanım 3.3.7 A herhangi bir küme, F bir Lie cebiri ve $f: A \rightarrow F$ bir morfizm olsun. Her B Lie cebiri ve her $\alpha : A \rightarrow B$ dönüşümü için $\alpha = \eta\, i$ olacak şekilde bir tek $\eta : F \rightarrow B$ Lie cebir morfizmi varsa (F,i) ikilisine A üzerinde serbest Lie cebiri denir.

Tanım 3.3.8 L bir X kümesi tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri olsun.

a) Eğer $L \cong {}^{F}/_{F_n}$ olacak şekilde X üzerinde serbest bir F Lie cebiri varsa L ye n – yinci dereceden serbest nilpotent Lie cebiri denir. Eğer $L \cong {}^{F}/_{F_2}$ ise L ye serbest abelyen Lie cebiri denir.

b) Eğer $L \cong {}^{F}/_{F^m}$ olacak şekilde X üzerinde serbest bir F Lie cebiri varsa L ye m – yinci dereceden serbest çözülebilir Lie cebiri denir.

c) Eğer $L \cong {}^{F}/_{F_{n_{1,\dots,k}}}$ olacak şekilde X üzerinde serbest bir F

Lie cebiri varsa L ye $\{n_1, \dots, n_k\}$ dizisine göre serbest polinilpotent Lie cebiri denir.

Tanım 3.3.9 L bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlayan birimli ve birleşmeli $U(L)$ cebirine L nin evrensel enveloping cebiri adı verilir.

1. $\varepsilon : L \to [U(L)]$ kanonik homomorfizmi vardır.

2. k cismi üzerindeki birimli her A asosyatif cebiri ve her $\phi : L \to [A]$ homomorfizmi için $\psi\, \varepsilon = \phi$ olacak şekilde bir tek $\psi : [U(L)] \to A$ homomorfizmi vardır.

Tanım 3.3.10 M bir Lie cebiri olsun. Her $x, y \in M$ için $[x, y] = 0$ oluyorsa M ye değişmeli Lie cebiri denir.

Tanım 3.3.11 M_1 ve M_2 , A üzerinde iki Lie cebiri ve $\mu : M \to M$ bir A–modül homomorfizmi olsun. Her $x, y \in M_1$ için $\mu\,([x, y]) = [\mu\,(x), \mu\,(y)]$ ise μ ye bir Lie cebir homomorfizmi denir. Eger μ bir Lie cebir homomorfizmi, aynı zamanda birebir ve örtense μ ye bir Lie cebir izomorfizmi denir. Bu durumda M_1 ve M_2 izomorfiktirler denir.

Tanım 3.3.12 L, k üzerinde bir Lie cebiri olsun. Eğer N, L nin bir alt cebiri ve $[N, L] \subseteq N$ ise N ye L nin bir ideali denir ve $N \lhd L$ ile gösterilir.

Her $x, y \in L$ için $[x + y, x + y] = 0 \Rightarrow [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0$

$$\Rightarrow [x, y] = -[y, x]$$

Eğer $N \lhd L$ ise $[N, L] \subseteq N$ olup yukarıdaki eşitlikten $[L, N] \subseteq N$ elde edilir. O halde bir Lie cebirinde; bir sol ideal aynı zamanda bir sağ ideal yapısı oluşturur.

Tanım 3.3.13 L, k üzerinde bir Lie cebiri ve $N \Delta\, L$ olsun. L/N bölüm cebirini $L/N = \{x + N : x \in L\}$ şeklinde tanımlarız. L/N deki toplama ve çarpma işlemlerini ;

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$$

$$[x + N, y + N] = [x, y] + N$$

olarak tanımlayalım. Ancak N, L de bir ideal ise bu işlemler iyi tanımlıdır ve L/N, bu işlemler altında kapalıdır. $[x + N, x + N] = [x, x] + N = N$ olup N, L/N nin sıfır elemanıdır. Böylece L/N , bir Lie cebiridir.

Teorem 3.3.14 L ve N aynı k cismi üzerinde iki Lie cebiri ve $\alpha: L \to N$ bir homomorfizm olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur.

1) $\alpha\,(L) \leq N$, $çek(\alpha)\Delta L$ ve $L/_{çek(\alpha)} \cong \alpha\,(L)$

2) $H, K\Delta L$ ve $K\Delta H$ ise $(L/_K)\Big/_{(H/_K)} \cong L/_H$

3) $H\Delta K$, $K\Delta L$ ise $H\Delta(H + K), (H \cap K)\Delta K$ ve $(H+K)/_H \cong H/_{H \cap K}$

4) $H\Delta\, L$ ise $\phi: L \to L/_H$ doğal dönüşümü $L/_H$ nin idealleri (alt cebirleri) ile L nin idealleri arasında bijektif kurar.

4. LİE CEBİRLER VE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

4.1 Lie Cebirleri Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller ilk olarak Whitehead [1] tarafından tanımlanmıştır. Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller Porter [2] tarafından verilmiştir. Lie cebirler için çaprazlanmış modüller Kassel ve Loday [3] tarafından tanımlanmıştır. Simdi, k sıfırdan farklı birimi olan değişmeli bir halka olmak üzere, Lie k-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısı ile iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramlarını hatırlatarak bazı örneklere yer verelim. Bu bölümdeki tanım ve teoremler ile ayrıntılı bilgi ve ispatlar [30-35] da yera lmaktadır.

Tanım 4.1.1. M ve S iki Lie k -cebiri olmak üzere

$$S \times M \to M$$

$$(s, m) \mapsto s \cdot m$$

dönüşümü ve her $p \in \boldsymbol{k}$, $m, m' \in M, s, s' \in S$ için

i. $p\,(s \cdot m) = (ps) \cdot m = s \cdot (pm)$
ii. $s \cdot (m + m') = s \cdot m + s \cdot m'$
iii. $(s + s') \cdot m = s \cdot m + s' \cdot m$
iv. $[s, s'] \cdot m = s\,(s' \cdot m) - s'\,(s \cdot m)$
v. $s \cdot [m, m'] = [s \times m, m'] + [m, s \cdot m']$

özellikleri sağlıyor ise bu fonksiyona S nin M üzerine Lie etkisi denir ve $s \in S$ nin $m \in M$ üzerindeki etkisi $s \cdot m$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.2 (M, G, μ) ve (N, G, ϑ) çaprazlanmış iki Lie modül ve $\alpha: M \to N$ bir k-lineer dönüşüm olsun. Her $m, m' \in M$ için

$$\alpha[m, m'] = \mu(m) \cdot \alpha(m') - \mu(m') \cdot \alpha(m)$$

ise α ya M den N ye bir **derivasyon** denir. Bütün derivasyonlar kümesi $Der_G(M, N)$ şeklinde gösterilir.

$g \in G, \alpha \in Der_G(M,N)$ ve $ad_g: M \to G$ fonksiyonu $ad_g(m) = [g, \mu(m)]$ şeklinde tanımlanmak üzere $\vartheta(\alpha(m)) = ad_g(m)$ yani $\vartheta\alpha = ad_g$ ise (α, g) ikilisine $Der_G(M,N)$ nin konjuge elemanı denir**.** [35]

Tanım 4.1.3 Her $g, g' \in G$ için

$$\mu: G \to Der(G)$$

$$r \mapsto \mu(r) = \mu_r$$

olmak üzere $\mu(g)g' = gg'$ şeklinde tanımlı $\mu(g) = \mu_g: G \to G$ dönüşümüne iç derivasyon denir.

Tanım 4.1.4 *S* ve *M* iki Lie k-cebir olsun.

$$\partial: M \longrightarrow S$$

bir S-cebir morfizmi ve

$$S \times M \to M$$

$$(s, m) \mapsto [s \cdot m]$$

S nin M üzerine Lie etkisi ile birlikte, her $m, m' \in M \; ve \; s \in S$ için

ÇM1) $\partial(s \cdot m) \; = \; [s, \partial(m)]$

ÇM2) $\partial(m) \cdot m' = \; [m, m']$

şartları sağlanıyor ise (M, S, ∂) üçlüsüne Lie çaprazlanmış modül denir. Sadece ÇM1) aksiyomunu sağlayan (M, S, ∂) üçlüsüne Lie ön-çaprazlanmış *S*-modül denir. ÇM2) özelliğine de Peiffer özdeşliği denir.

Teorem 4.1.5 Lie çaprazlanmış modül morfizmi; her $m \in M \; ve \; s \in S$ için

$$\alpha, : M \longrightarrow M' \;\; ve \;\; \beta: (S \xrightarrow{\partial'} S')$$

Lie homomorfizmi ve

$$\partial'\alpha = \beta\partial \text{ ve } \alpha[s, m] = [\beta(s), \alpha(m)]$$

olmak üzere

$$\alpha, \beta: (M \xrightarrow{\partial} S) \longrightarrow (M' \xrightarrow{\partial'} S')$$

şeklindedir. Lie çaprazlanmış modüllerin kategorisi X lie ile gösterilmiştir.

4.2 2-Lie Cebirleri Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Tanım 4.2.1 Bir L_∞-cebiri; derecesi $der(l_k) = k - 2$ olan $l_k{:}\wedge^k m \to m$ lineer dönüşümlerin $\{l_k{:}\, 1 \le k < \infty\}$ ailesinin $m = m_0 \oplus m_1 \oplus \ldots$ şeklindeki derecelendirilmiş bir vektör uzayıdır. Bu uzay $n \ge 0$ için Koszul işareti $Ksgn$ ile aşağıdaki bağıntıyı sağlar;

$$\sum_{i+j=n+1} (-1)^{i(j-1)} \sum_{\sigma} sgn(\sigma) Ksgn\,(\sigma) l_j(l_i(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(i)}), x_{\sigma(i+1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = 0$$

Genellikle bir *n*-terimli L_∞-cebiri, bir Lie *n*-cebiri olarak adlandırılır. Özellikle $(l_{n+1}) = 0$, ise sıkı Lie *n*-cebiri olarak adalandırılır.

Tanım 4.2.2 (m, d, l_2, l_3) ve (m', d', l'_2, l'_3) Lie 2-cebir olsun. $\delta{:}\, m \to m'$ dönüşümü

- $\delta_0{:}\, m_0 \to m'_0$ ve $\delta_1{:}\, m_1 \to m'_1$ iki lineer dönüşümü
- $\delta_2{:}\, m_0 \wedge m_0 \to m'_1$ bilineer dönüşümü

içeren ve her $a, b, c \in m_0$, $\alpha \in m_1$olmak üzere

- $d' \circ \delta_1 = \delta_0 \circ d$,
- $\delta_0 l_2(a, b) - l'_2(\delta_0(a), \delta_0(b)) = d'\delta_2(a, b)$
- $\delta_1 l_2(a, \alpha) - l'_2(\delta_0(a), \delta_1(\alpha)) = \delta_2(a, d\alpha)$
- $l'_2(\delta_0(a), \delta_2(b, c)) + d.p. + l'_3(\delta_0(a), \delta_0(b), \delta_0(c)) = \delta_2((l_2(a, b), c) + d.p. + \delta_1(l_3(a, b, c))$

dönüşüme bir Lie 2-cebir homomorfizmi denir.

Teorem 4.2.3 (m, d, l_2, l_3) bir Lie 2-cebir ve $n \subset m$ bir 2-vektör uzayı olsun. Bu durumda m/n nin bölüm Lie 2-cebir olamsı için gerek ve yeter şart

$$l_2(n \wedge m) \subset n, \quad \text{ve} \quad l_3(n_0 \wedge m_0 \wedge m_0) \subset n_1$$

olmasıdır. Bu şartı sağlayan *n* ye *m* nin bir ideali denir.

Şimdi Lie 2-cebirler için cebirin temel teoreminin benzerini verelim.

Teorem 4.2.4 $\delta: m \to m'$ bir Lie 2-cebir homomorfizmi olsun. Bu durumda

i. Eğer $Gor\delta_2 \subset Gor\delta_1$ ise $Gor\delta = Gor\delta_0 \oplus Gor\delta_1$ bir m' Lie $2-$altcebirdir;

ii. Eğer $\delta_2(Çek\delta_0 \wedge m_0) = 0$ ise $Çek\delta = Çek\delta_0 \oplus Çek\delta_1$ m nin bir idealidir.

Üstelik $m/_{çek\delta}$ ve $Gör\delta$ Lie 2-cebirleri yukarıdaki iki şartı sağlara izomorfiktirler.

Tanım 4.2.5 $(p: p_1 \xrightarrow{\tilde{d}} p_0, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3)$ ve $(m: m_1 \xrightarrow{d} m_0, l_2, l_3)$ iki Lie 2-cebir olsun. Eğer $\varphi: m \to \mathrm{End}(p)$ şeklinde bir Lie 2-cebir homomorfizmi varsa g, p üzerine derivasyonlarla etki eder ve $\varphi_0(x) + l_{\phi 0}(x) \in Der_0(p)$ olacak şekilde bir $l_{\phi 0}(x): \wedge^2 p_0 \to p_1$ lineer dönüşüm

$$(\varphi_0 + l_{\phi 0}, \varphi_1, \varphi_2): m \to Der(p)$$

dönüşümü bir Lie 2-cebir homomorfizmasıdır. İşaretlerin yanlış anlaşılıp karıştırılmaması için φ ile hem etkiyi hemde derivasyon etkisini gösterceğiz. Böylece $m \rhd_\phi p$ ile gösterdiğimiz m ve p nin çapraz çarpımı tanımlanmıştır.

Lemma 4.2.6 m nin p üzerine derivasyonlarla etkisi φ olsun, bu durumda, m bir Lie 2-altcebir ve p ideal olmak üzere $\rhd_\phi p \triangleq (m \oplus p, L_1, [\cdot,\cdot], L_3)$ bir Lie 2-cebirdir, burada $L_1 = d + \tilde{d}$ ve

$$\begin{cases} [x + \alpha, y + \beta] = l_2(x,y) + \tilde{l}_2(\alpha,\beta) + x \lhd \beta - y \lhd \alpha, \\ \qquad \forall x, y \in m, \forall \alpha, \beta \in p, \\ L_3(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) = l_3(x,y,z) + \tilde{l}_3(\alpha,\beta,\gamma) - (x,y) \rhd \gamma - (y,z) \rhd \alpha \\ \quad -(z,x) \rhd \beta + l_{\phi 0}(x)(\beta,\gamma) + l_{\phi 0}(y)(\gamma,\alpha) + l_{\phi 0}(\alpha,\beta), \\ \qquad \forall x, y, z \in m_0, \forall \alpha, \beta, \gamma \in p_0. \end{cases}$$

Tersine, (θ, L_1, L_2, L_3) ifadesi m Lie 2-altcebir ve p idealin doğrudan toplamının ayrılabilir bir Lie 2-cebir olsun, bu durumda, m nin p üzerine derivasyonlarla etkisi ϕ ise;

$\theta = m \rhd_\phi p$, ve $\phi: m \to \mathrm{Der}(p)$ olmak üzere

$$\begin{cases} \phi_0(x) + l_{\phi 0}(x) = L_2(x,\cdot) + L_3(x,\cdot,\cdot), & \forall x \in m_0, \\ \phi_1(a) = L_2(a,\cdot), & \forall a \in m_1, \\ \phi_2(x,y) = -L_3(x,y,\cdot), & \forall x, y \in m_0. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.2.7 [30]: (p, m, φ, Π) dörtlüsü, p, m iki Lie 2-cebir ve m nin p üzerine derivasyonlarla bir etkisi ϕ ve $\Pi: m \rhd_{\phi} p \to m$ bir Lie 2-cebir homomorfizmi, $\Pi|m = Id = (id, id, 0)$ olmak üzere

i. $\tilde{l}_2(\alpha, \beta) = \Pi(\alpha) \rhd \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in p,$

ii. $\tilde{l}_3(\alpha, \beta, \gamma) = -(\Pi_0\alpha, \Pi_0\beta) \rhd \gamma - \Pi_2(\Pi_0\alpha, \beta) \rhd \gamma, \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in p_0,$

iii. $l_{\phi 0}(x)(\beta, \gamma) = -(x, \Pi_0\beta) \rhd \gamma - \Pi_2(x, \beta) \rhd \gamma, \qquad \forall \beta, \gamma \in p_0, x \in m_0,$

iv. $\Pi_2(\alpha, \beta) = \Pi_2(\Pi_0\alpha, \beta) = \Pi_2(\alpha, \Pi_0\beta), \qquad \forall \alpha, \beta \in p_0.$

şartları ile birlikte bir Lie 2-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Özellikle, $\Pi_2 = 0$ ise güçlü bir Lie 2-cebirlerin güçlü çaprazlanmış modülü denir.

Tanım 4.2.8 Let $(p, m, \phi, \varphi, \sigma)$ ve $(p', m', \phi', \varphi', \sigma')$ çaprazlanmış modül olsun, iki Lie 2-cebir homomorfizmi aşağıdaki şekilde verilsin

$$F: p \to p', G: m \to m'$$

ve $\tau: m_0 \wedge p_0 \to {p'}_1$ lineer dönüşümü $\varphi' \circ F = G \circ \varphi$ olacak şekilde

$$((G_0, F_0), (G_1, F_1), (G_2, \tau, F_2)): m \rhd p \to m' \rhd_{\phi'} p'$$

çaprazlanmış modül morfizmi bir Lie 2-cebir homomorfizmidir.

Burada Lie cebirler ve Lie 2-cebirler üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüller verilmiş oldu. Bunların kategoriksel olarak denklikleri ve diğer uygulamalar ve örnekler için Lang ve Liu'nun [31] makalesi referans alınabilir.

KAYNAKLAR

1. Whitehead, J. H. 1949. Combinatorial homotopy II. Bull. Amer. Math. Soc,55,213-245, 453-496..

2. Porter, T. 1987. Some categorical results in the theory of crossed modules in commutative algebras. Journal of Algebra, 109,2, 415-429.

3. Kassel, C, ve Loday, J. L. 1982. Extensions centrales d'algebres de Lie. InAnnales de l'institut Fourier (Vol. 32, No. 4, pp. 119-142).

4. Mac Lane,S. 1996. Extensions ve Obstructions for Rings,Illinois J. Math. 121,316-345.

5. Lavendhomme,R, ve Lucas, T.H. 1958. On modules ve crossed modules, Journal of Algebra,179,936-963.

6. Ellis, G. 1984. Crossed modules and their higher dimensional analogues. University of Wales.

7. Casas, J. M, ve Ladra, M. 1993. Homology of crossed modules in Lie algebras. Bull. Soc. Math. Belgique Ser. A, 45, 59-84

8. M. Gerstenhaber. 1964. A uniform cohomology theory for algebras, Pros. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 51: 626-629

9. Wagemann, F. 2006. On Lie algebra crossed modules. Communications in Algebra®, 34,5, 1699-1722.

10. Baues, H. J, ve Minian, E. G. 2002. Crossed extensions of algebras and Hochschild cohomology. Homology, homotopy and applications, 4(2), 63-82.

11. Casas, J. M. Khmaladze, E, ve Ladra, M. 2008. Crossed modules for Leibniz n-algebras. In Forum Mathematicum (Vol. 20, No. 5, pp. 841-858).

12. Baez, J. C, ve Crans, A. S. 2004. Higher-dimensional algebra VI: Lie 2-algebras. Theory Appl. Categ, 12,15, 492-528.

13. Lada, T, ve Markl, M. 1995. Strongly homotopy Lie algebras.Communications in algebra, 23,6, 2147-2161..

14. Chen, Z. Stiénon, M, ve Xu, P. 2013. Weak Lie 2-bialgebras. Journal of Geometry and Physics, 68, 59-68.

15. M. Aubry, 1995. Homotopy Theory and Models, DMV Seminar, vol. 24, Birkhauser.

16. Sather-Wagstaff, S. 2011. Rings Module ve Linear Algebra.arXiv preprint arXiv:1201.003

17. Hungerford, T. W. 1980. Algebra, volume 73 of Graduate Texts in Mathematics.

18. Grove, L. C, ve Cohn, P. M. 2003. Basic Algebra: Groups, Rings, and Fields.

19. Beachy, J. A. 1999. Introductory lectures on rings and modules (Vol. 47). Cambridge University Press.

20. Mucuk, O. 2010. Topoloji ve kategori. Nobel Yayın Dağıtım.

21. Wisbauer, R. 1991. Foundations of module and ring theory (Vol. 3). CRC Press.

22. Aceff-Sánchez, F. Agustín-Aquino, O. A, du Plessis, J. Lluis-Puebla, E, ve Montiel, M. 2012. An Introduction to Group Theory with applications to Mathematical Music Theory.

23. Ash, R. B. 2013. Basic Abstract Algebra: For Graduate Students and Advanced Undergraduates. Courier Corporation.

24. Rowland, Todd and Weisstein, ve EricW. "Module Direct Sum." From MathWorld-AwolframWebResource.http://mathworld.wolfram.com /ModuleDirectSum.html

25. Hazewinkel, M. Gubareni, N. M, ve Kirichenko, V. V. 2004. Algebras, rings and modules (Vol. 1). Springer Science ve Business Media.

26. Mathai, A. M. Provost, S. B, ve Hayakawa, T. 2012. Bilinear forms and zonal polynomials (Vol. 102). Springer Science ve Business Media.

27. André, M. 2013. Homologie des algebres commutatives (Vol. 206). Springer.

28. Sternberg, S. 2004. Lie algebras. Book online: www. math. harvard. edu/~ shlomo.

29. Samelson, H. 2012. Notes on Lie algebras. Springer Science ve Business Media.

30. Lang, H, ve Liu, Z. 2016. Crossed modules for Lie 2-algebras. Applied Categorical Structures, 24,1, 53-78.

31. Ellis, G. J. 1988. Higher dimensional crossed modules of algebras. Journal of Pure and Applied Algebra, 52,3, 277-282.

32. Casas, J. M, ve Ladra, M. 1998. The actor of a crossed module in Lie algebras. Communications in Algebra, 26,7, 2065-2089.

33. Casas, J. M. Casado, R. F., Khmaladze, E., ve Ladra, M. 2014. Universal enveloping crossed module of a Lie crossed module. Homology, Homotopy ve Applications, 16,2, 143-158..

34. Miras, J. M. C. 1991. Invariantes de módulos cruzados en álgebras de Lie (doktora tezi, Universidade de Santiago de Compostela).

35. Schlessinger, M, ve Stasheff, J. 1985. The Lie algebra structure of tangent cohomology ve deformation theory. Journal of Pure and Applied Algebra,38,2-3, 313-322.

37. Carrasco, M. P. C. 1986. Complejos hipercruzados: cohomologia y extensiones (Doktora tezi, Universidad de Granada).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :	**DLARA HAMA ALI HAMA KARIM**
Birth date ve place :	**20.08.1988 Erbil / Irak**
E-posta adresi :	**dlara.math@gmail.com**
Eğitim :	**Lisans. Erbil Koya Üniversitesi Fen ve Sağlık Fakültesi Matematik Bölümü, 2007-2010, Erbil, IRAK.**
Yüksek Lisans :	**Aksaray Üniversitesi fen Bilimleri Enstitüsü**
	Matematik Anabilim Dalı 2014-2016, Aksaray, TÜRKİYE.