ÖZET

Doktora Tezi

FİBONACCİ VE LUCAS MATRİS DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

HACI CİVCİV

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2009, 55 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK

Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Bu çalışmanın ilk adımında, Fibonacci ve Lucas matris dizileri tanımlanmıştır. Daha sonra, Fibonacci matris dizisinin genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi ile; Lucas matris dizisinin de genelleştirilmiş Lucas sayı dizisi ile olan ilişkileri elde edilmiştir.

Fibonacci ve Lucas matris dizileri için özdeşlik ve eşitsizlikler elde edilerek, matrislerin çarpımı ve eşitliği kullanılarak bu özdeşlik ve eşitsizliklerden hareketle genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için özdeşlik ve eşitsizlikler verilmiştir.

Ayrıca, Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin kombinatorik temsilleri oluşturulmuştur. Daha sonra, matris cebirini kullanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için kombinatorik temsiller sunulmuştur.

Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin kısmi ve sonsuz toplamları için formüller elde edilmiş ve bu formülleri kullanarak, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin kısmi ve sonsuz toplamları için formüller üretilmiştir.

Literatürde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için yer alan Binet formülleri ve kullanım alanlarına çok sık rastlanmaktadır. Bu formüller için değişik ispatlar verilmektedir. Bu çalışmada , Fibonacci ve Lucas matris dizileri için Binet formülleri elde edilmiştir. Buradan hareketle, başka bir yol olarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için Binet formülleri tekrar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal, Lucas-Jacobsthal, Pell-Jacobsthal, Mersenne ve Fermat say dizileri, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizileri.

ABSTRACT

PhD. Thesis

FIBONACCI VE LUCAS MATRIX SEQUENCES AND PROPERTIES

HACI CİVCİV

Selçuk University

Graduate School of Natural and

Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2009, 55 Pages

Juries: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK

Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

In the first step of this study, Fibonacci and Lucas matrix sequences have been defined. Then, the relations among Fibonacci and Lucas matrix sequences and the generalized Fibonacci and Lucas number sequences have been obtained.

Some identities and inequalities for Fibonacci and Lucas matrix sequences have beeen obtained. Using the product and equality of matrices, the identities and inequalities for the generalized Fibonacci and Lucas number sequences have been given from these identities and inequalities.

Also, the combinatorics representations of Fibonacci and Lucas matrix sequences have been established. Using elemantary matrix algebra, the combinatorics representations of the generalized Fibonacci and Lucas number sequences have been presented.

The formulas for the sums of Fibonacci and Lucas matrix sequences have been presented, then using these formulas, the formulas for the generalized Fibonacci and Lucas number sequences have been derived.

In literature, it has been encountered the Binet's fourmulas of the generalized Fibonacci and Lucas sequences and the applications of these fourmulas. Different proofs for these formulas have been given. In this study, the Binet's formulas of Fibonacci and Lucas matrix sequences have been obtained, and from this the Binet' s formulas of the generalized Fibonacci and Lucas number sequences have been given as a different way.

Keywords: Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal, Lucas-Jacobsthal, Pell-Jacobsthal, Mersenne ve Fermat number sequences, the generalized Fibonacci and Lucas number sequences.

ÖNSÖZ

Günümüzde Fibonacci sayı dizisi ve onun türevleri, sayılar teorisinde büyük öneme sahip olmasının yanı sıra, matematiğin diğer dallarında, fizik, mühendislik ve hatta sanat biliminin de bir çok dalında sıklıkla kullanılan ve uygulama alanı bulan dizilerdir.

Çalışmamızda, genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi ile ilişkili olan Fibonacci matris dizisi ve genelleştirilmiş Lucas sayı dizisi ile ilişkili olan Lucas matris dizisi tanımlanmış ve tanımlanan bu iki yeni dizinin özellikleri araştırılmıştır. Matris cebirini kullanarak, Fibonacci ve Lucas matrislerinden hareketle de genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının bir çok özelliği elde edilmiştir.

Çalışmamızda verilen yeni Fibonacci ve Lucas matris dizileri kavramları ilk defa, bu tezin parçalarından oluşan ve 2008 de SCI (Science Citation Index) kapsamındaki "Ars Combinatoria" isimli dergide yayınlanan iki ayrı makalemiz ile literatüre girmişlerdir.

Yaptığım bu çalışmada bana desteklerini esirgemeyen danışman Hocam Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN Bey'e, Prof. Dr. Durmuş BOZKURT Bey'e, Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN Hanım'a ve beni sabırla destekleyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Hacı CİVCİV

Şubat, 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET iii

ABSTRACT v

ÖNSÖZ vii

İÇİNDEKİLER viii

1. GİRİŞ 1

1. 1. Amaç ve Kapsam 2

1. 2. Kaynak Araştırması 2

1. 3. Temel Kavramlar 5

1. 3. 1. Bazı Sayı Dizileri 5

1. 3. 2. Üreteç Fonksiyonu 10

1. 3. 3. Matrislerde Spektral Ayrışım ve Schur Eşitsizliği 11

2. FİBONACCİ VE LUCAS MATRİS DİZİLERİ 12

2. 1. Fibonacci ve Lucas Matris Dizileri İçin Binet Formülleri 18

2. 2. Fibonacci ve Lucas Matris Dizilerinin Kombinatorik Temsilleri 22

2. 3. Fibonacci ve Lucas Matris Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları 27

2. 4. Fibonacci ve Lucas Matris Dizilerinin Kısmi Toplamları 31

2. 5. Üstel Fibonacci Matris Dizisi 40

3. SONUÇ VE ÖNERİLER 43

4. KAYNAKLAR 44

1. GİRİŞ

Sayılar teorisinin önemli bir kısmını oluşturan çalışma alanı, rekürans ilişkileri ile verilen sayı dizileridir. Bu şekildeki sayı dizilerini incelemek; bir karaağacın, ıhlamur, erik, badem ağacının dallarındaki yaprakların ya da bir ayçiçeğindeki taneciklerin şaşırtıcı ve görkemli düzenini ve bu düzenin salyangozun sarmal kabuğundaki kıvrımlarla, çiçeğin taçyapraklarının, soğan zarının, salatalık ya da çam yapraklarının düzeniyle gösterdiği inanılmaz benzerliği bir altın sayı ile ifade etmek gibi bazen bizleri çevremizi saran yalın şeylerin sayısız büyüleyici gizemlerine götürebilmektedir.

Ayrıca,

- rasyonel fonksiyonları temsil eden kuvvet serileri teorisi (van der Poorten 1989),
- pseudo-rastgele sayı üreteçleri (Niederreiter, 1991, 1992, 1995) ve (Tezuka, 1996),
- *k*- düzgün (Beker, 1994) ve otomatik diziler (Lipshitz ve van der Poorten, 1990),
- lineer rekürans dizilerinden oluşan Diophantine denklem sınıflarının çözüm dizileri (Shorey, 1986, 2000) ve (Tijdeman, 1998, 2002),
- sonlu cisim üzerinde cebirsel değişkenli zeta fonksiyonları (Lidl ve Niederreiter, 1983),
- dinamik zeta fonksiyonları (Bowen ve Landford, 1970), (Hinkkanen, 1994) ve (Manning, 1971),
- grup teoriden gelen üreteç fonksiyonları (du Sautoy, 1993, 1994),
- değişmeli cebirde Hilbert serileri (Matsumura, 1989),
- Poincare serileri (Borevich ve Shafarevich, 1966), (Denef, 1984) ve (du Sautoy, 1993),

gibi bilimin temel başlıklarını oluşturan bir çok alanın ilerlemesinde rekürans sayı dizilerinin önemi büyüktür. Bu şekildeki diziler nümerik analizin önemli alanı olan yaklaşım teoride, şifre biliminde, bilgisayar ile grafik çizimlerinde (Mcllroy, 1992) ve de zaman serileri analizinde (Box ve Jenkins, 1970) sıkça kullanılmaktadır. Günümüzde, lineer rekürans diziler için elde edilen bilgilerin bir araya getirildiği ve

sunulduğu bir çok kaynak vardır (Cerlienco, Mignotte ve Piras, 1987), (Lidl ve Niederreiter, 1983), (Mignotte, 1989), (Mikhalev ve Nechaev, 1996), (Myerson ve van der Poorten, 1995), (Necaev, 1971), (van der Poorten, 1989) ve (Shorey ve Tijdeman, 1986).

1. 1. Amaç ve Kapsam

Rekürans ilişkileri ile verilen matris dizileri tanımlamak ve tanımlanan matris dizilerinin özelliklerini araştırmak bu çalışmanın temel amacıdır. Tanımlanacak olan rekürans ilişkili matris dizileri ile Fibonacci sayı dizisi ve türevleri arasındaki bağlantının kurulması ve böylece sayılar teorisi ile matris teorisi arasında farklı bir köprü kurulacak olması, çalışmanın önemini kuvvetlendirmektedir. Kurulacak bu ilişki sayesinde, matris dizilerinin özellikleri araştırılırken aynı zamanda Fibonacci sayı dizileri ve türevlerinin de özellikleri hakkında bilgi sahibi olunacaktır.

1. 2. Kaynak Araştırması

Literatürde, matrisler ile rekürans ilişkili sayı dizileri arasındaki ilişkilerin kurulduğu ve bu ilişkilerin kullanılarak sayı dizilerinin incelendiği çalışmalar oldukça fazladır. Bu bölümde, bu tez çalışmasının hazırlanmasının gerekliliğine işaret eden çalışmalardan söz edilecektir.

King' in (1960) yüksek lisans tezinde; literatürde Fibonacci Q-matrisi veya "Altın Matris" olarak bilinen

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

matrisi ile klasik Fibonacci sayı dizisi $\{f_n\}_{n\geq 0}$ arasında

$$Q^n=\begin{pmatrix}f_{n+1} & f_n\\ f_n & f_{n-1}\end{pmatrix}$$

şeklinde bir ilişki sunulmakta ve daha sonra matris metodlarının kullanılması ile de Fibonacci sayıları için çeşitli özdeşlikler verilmektedir. Silvester (1979), King' in (1960) çalışmasına benzer olarak

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

matrisini tanımlayarak, A matrisi ile n-inci klasik Fibonacci sayısı f_n arasında

$$A^n\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_n\\ f_{n+1}\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

bağıntısını sundu. Aynı çalışmasında; (1.1) ilişkisinden hareketle, matris metodlarını kullanarak klasik Fibonacci sayıları için özdeşlikler verdi. Kalman (1982) klasik Fibonacci dizisinin bir genelleştirmesinin matris temsilini sunarak matris metodları ile bu dizinin herhangi bir terimini veren bir formül üretmiştir. Er (1984), k-mertebeli Fibonacci sayılarının k-dizilerini tanımlamış ve bu dizilerin matris temsillerinden hareketle, Fibonacci sayıları için toplam formülleri elde etmiştir. Karaduman (2004), k-mertebeli Fibonacci sayılarının k-dizileri ve matris temsilleri için yeni özellikler sundu. (2004)' te Taşçı ve Kılıç, genelleştirilmiş k-mertebeli Lucas sayılarının k-dizilerini tanımladılar, bu dizilerin matris temsillerini sunup matris metodları ile tanımlanan diziler ve temsil matrisleri için özellikler elde ettiler. Benzer olarak, Kılıç ve Taşçı (2006), genelleştirilmiş k-mertebeli Pell sayılarının k-dizilerini tanımladılar, tanımlanan dizilerin matris gösterimlerini sundular ve daha sonra matris metodları ile tanımlanan dizi ve temsil matrisi için özellikler elde ettiler. Nallı (2006), Q^n ve Q^{-n} matrislerinin Hadamard çarpım matrisi $Q^n \circ Q^{-n}$'i elde ederek, $Q^n \circ Q^{-n}$ matrisinin bazı özelliklerini sundu. (2004)' de Stakhov ve Rozin tarafından, simetrik hiperbolik Fibonacci sinüs ve kosinüs fonksiyonları tanımlandı, klasik Fibonacci sayıları ile olan bağıntıları açıklandı ve son olarakta tanımlanan fonksiyonların fizikteki uygulamalarına değinildi. "Altın matris" teorisinin gelişmesinde büyük rol oynayan ve de çalışmalarında, bu yapıdaki matrislerin fizikteki uygulamalarına yer veren Stakhov' un (2006)' daki çalışmasında, elemanları simetrik hiperbolik Fibonacci sinüs ve kosinüs fonksiyonları olan

$$Q^{2x}=\begin{pmatrix} cFs(2x+1) & sFs(2x) \\ sFs(2x) & cFs(2x-1) \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Q^{2x+1}=\begin{pmatrix} sFs(2x+2) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & sFs(2x) \end{pmatrix}$$

matrisleri tanımlandı, Q^{2x} ve Q^{2x+1} matrisleri üzerine bazı matris metodları uygulanarak simetrik hiperbolik Fibonacci sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının bazı özellikleri sunuldu ve son olarak Q^{2x} ve Q^{2x+1} matrislerin şifre bilimindeki uygulamalarına yer verildi. Nallı (2007), Q^{2x} ve Q^{2x+1} matrislerinin Hadamard çarpımlarını inceledi. Falcon ve Plaza (2007), öncelikle geometrik bir yaklaşımla, $1 \le k$ tamsayısı için klasik Fibonacci dizisinin genelleştirilmesi olan *k*-Fibonacci sayı dizisi $\{F_{k,n}\}_{n\ge 0}$' ni;

$$F_{k,0}=0,\ F_{k,1}=1 \text{ ve } F_{k,n+1}=kF_{k,n}+F_{k,n-1}$$

şeklinde tanımladı ve daha sonra

$$\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} F_{k,n+1}-F_{k,n} & F_{k,n} \\ F_{k,n+1}-F_{k,n-1} & F_{k,n}+F_{k,n-1} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

bağıntısını sundular. Aynı çalışmanın kalan kısmında, (1.2) bağıntısını göz önüne alarak, matris metodları ile *k*-Fibonacci sayıları için özdeşlikler ve formüller sundular. (2008)' de Köken ve Bozkurt' un çalışmasında, Jacobsthal *F*-matrisi olarak isimlendirilen

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi tanımlanmakta, *F* matrisi ile *n*-inci Jacobsthal j_n ve Jacobsthal-Lucas c_n sayıları arasındaki

$$\begin{pmatrix} j_{n+1} \\ j_n \end{pmatrix}=F\begin{pmatrix} j_n \\ j_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix}=F\begin{pmatrix} c_n \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

bağıntılar sunulmakta ve bu bağıntılardan hareketle Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları için özdeşlikler üretilmektedir.

1. 3. Temel Kavramlar

Bu bölümde, çalışmanın temel sonuçlarının yer aldığı 2. bölümde adı geçecek temel kavramlar verilecektir.

1. 3. 1. Bazı sayı dizileri

Bu bölümde, bir çok matematikçinin çalışma konusu olmuş ve uygulama alanları geniş olan rekürans ilişkili sayı dizilerinden bahsedilecektir.

Tanım 1. 3. 1. 1. $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ve

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine *Fibonacci sayı dizisi* denir. Bu sayı dizisinin elemanlarına, *Fibonacci sayıları* denir.

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere *n*-inci Fibonacci sayısı,

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklinde bir formülle ifade edilmekte ve bu formüle Binet formülü denilmektedir. Binet' in formülünden hareketle,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \alpha$$

olduğu kolayca görülmektedir. Buradaki α sayısı "Altın Oran" olarak isimlendirilmektedir.

Fibonacci sayılarının kısmi toplamları için de,

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} f_{2k+1} = f_{2n+2},$$

$$\sum_{k=0}^{n} f_{2k} = f_{2n+1} - 1$$

formülleri mevcuttur.

Tanım 1. 3. 1. 2. $l_0 = 2$, $l_1 = 1$ ve

$$l_{n+1} = l_n + l_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{l_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine *Lucas sayı dizisi* denir. Bu sayı dizisinin elemanlarına, *Lucas sayıları* denir.

n-inci Lucas sayısının,

$$l_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde Binet formülü ile ifade edilmesi ve bu formülden hareketle de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = \alpha$$

bulunması, Lucas sayı dizisini de en az Fibonacci sayı dizileri kadar önemli hale getirmiştir. Fibonacci sayıları ile olan,

$$5 f_n = l_{n-1} + l_{n+1},$$

$$f_{2n} = f_n l_n,$$

$$l_n^2 - 5 f_n^2 = 4(-1)^n,$$

gibi bağıntıları ile de bu önem kuvvet kazanmıştır.

Fibonacci ve Lucas sayıları ve uygulamaları için, Koshy' nin (2001) kitabı değerli bir kaynaktır.

Tanım 1. 3. 1. 3. $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ ve

$$p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{p_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine *Pell sayı dizisi* denir. Bu sayı dizisinin elemanlarına, *Pell sayıları* denir.

n-inci Pell sayısı p_n için Binet formülü,

$$p_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

şeklindedir.

Tanım 1. 3. 1. 4. $q_0 = 2$, $q_1 = 2$ ve

$$q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{q_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine *Pell-Lucas sayı dizisi* denir. Bu sayı dizisinin elemanlarına, *Pell-Lucas sayıları* denir.

n-inci Pell-Lucas sayı dizisi q_n için Binet formülü

$$q_n = (1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n$$

şeklindedir.

Pell ve Pell-Lucas sayıları arasındaki bazı bağıntılar,

$$p_{m+n} = 2p_m q_n - (-1)^n p_{m-n},$$

$$q_m^2 = 2p_m^2 + (-1)^m,$$

$$q_{2m} = 2q_m^2 - 2(-1)^m,$$

şeklindedir.

Tanım 1. 3. 1. 5. $j_0 = 0$, $j_1 = 1$ ve

$$j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{j_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine *Jacobsthal sayı dizisi* denir. Bu sayı dizisinin elemanlarına, *Jacobsthal sayıları* denir (Horadam, 1996).

n-inci Jacobsthal sayısı j_n için Binet formülü,

$$j_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$$

olarak verilir. Jacobsthal sayı dizisinin terimleri için bir kısmi toplam

$$\sum_{k=2}^{n} j_k = \frac{1}{2}(j_{n+2} - 3)$$

şeklindedir.

Tanım 1. 3. 1. 6. $c_0 = 2$, $c_1 = 1$ ve

$$c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{c_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine *Jacobsthal-Lucas sayı dizisi* denir. Bu sayı dizisinin elemanlarına, *Jacobsthal-Lucas sayıları* denir (Horadam, 1996).

n-inci Jacobsthal-Lucas sayısı için Binet formülü,

$$c_n = 2^n + (-1)^n$$

olarak verilir. Jacobsthal-Lucas sayı dizisinin ilk *n* teriminin toplamı,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{1}{2}(c_{n+2} - 5)$$

dir.

Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizileri arasında,

$$c_n j_n = j_{2n},$$

$$c_n^2 - 9 j_n^2 = (-1)^n 2^{n+2},$$

$$c_n = j_{n+1} + 2 j_{n-1}$$

bağıntıları mevcuttur.

Tanım 1. 3. 1. 7. $m_0 = 0$, $m_1 = 1$ ve

$$m_{n+1} = 3m_n - 2m_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{m_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine *Mersenne sayı dizisi* denir. Bu sayı dizisinin elemanlarına, *Mersenne sayıları* denir (Robinson, 1954).

n-inci Mersenne sayısının Binet formülü,

$$m_n = 2^n - 1$$

dir.

Tanım 1. 3. 1. 8. $r_0 = 2$, $r_1 = 3$ ve

$$r_{n+1} = 3r_n - 2r_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{r_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine *Fermat sayı dizisi* denir. Bu sayı dizisinin elemanlarına, *Fermat sayıları* denir (Robinson, 1954).

n-inci Fermat sayısının Binet formülü,

$$r_n = 2^n + 1$$

dir.

Tanım 1. 3. 1. 9. $s > 0$, $t \neq 0$ ve $s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki *s* ve *t* reel sayıları için, $F_0(s,t) = 0$, $F_1(s,t) = 1$ ve

$$F_{n+1}(s,t) = sF_n(s,t) + tF_{n-1}(s,t), n \geq 1, \tag{1.3}$$

rekürans ilişkisi ile tanımlanan $\{F_n(s,t)\}_{n\geq 0}$ reel sayı dizisine $(s,t) - Fibonacci$ *sayı dizisi* veya *genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi* denir ve dizinin elemanlarına *genelleştirilmiş Fibonacci sayıları* denir (Koshy, 2001).

Tanım 1. 3. 1. 10. $s > 0$, $t \neq 0$ ve $s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki *s* ve *t* reel sayıları için, $L_0(s,t) = 2$, $L_1(s,t) = s$ ve

$$L_{n+1}(s,t) = sL_n(s,t) + tL_{n-1}(s,t), n \geq 1, \tag{1.4}$$

rekürans ilişkisi ile tanımlanan $\{L_n(s,t)\}_{n\geq 0}$ reel sayı dizisine $(s,t) - Lucas\ sayı$ *dizisi* veya *genelleştirilmiş Lucas sayı dizisi* denir ve dizinin elemanlarına *genelleştirilmiş Lucas sayıları* denir (Koshy, 2001).

Çalışma boyunca, gösterimde kolaylık olması için *n*-inci genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları sırasıyla F_n ve L_n sembolleri ile temsil edileceklerdir.

Aşağıdaki tablo; $(s,t)-$ Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile Tanım 1. 3. 1. 1-8' de tanımlanan sayı dizileri arasındaki geçişi göstermektedir.

(s,t)	F_n	L_n
(1,1)	Fibonacci sayı dizisi	Lucas sayı dizisi
(2,1)	Pell sayı dizisi	Pell-Lucas sayı dizisi
(1,2)	Jacobsthal sayı dizisi	Jacobsthal-Lucas sayı dizisi
(3,-2)	Mersenne sayı dizisi	Fermat sayı dizisi

Tablo 1. $(s,t)-$ Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile Tanım 1. 3. 1. 1-8' de tanımlanan sayı dizileri arasındaki ilişki.

1. 3. 2. Üreteç fonksiyonu

Üreteç fonksiyonu,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

şeklinde bir kuvvet serisidir ve $f(x)$' e (a_n) dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

Tanım 1. 3. 1. 1-8 arasında tanımlanan bazı sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} j_i x^{i-1} = (1-x-2x^2)^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{i-1} = (1+4x)(1-x-2x^2)^{-1}$$

dir.

1. 3. 3. Matrislerde spektral ayrışım ve Schur eşitsizliği

Tanım 1. 3. 3. 1. A herhangi $n \times n$ kompleks matris ve A' nın λ_i, $1 \le i \le n$, özdeğerleri birbirlerinden farklı olsun. Bu takdirde,

$$A = P \Lambda P^{-1} \tag{1.5}$$

olacak şekilde A' nın özvektörlerinden oluşan terslenebilir P matrisi ve A' nın özdeğerlerinden oluşan $\Lambda = \text{köş}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ köşegen matrisi vardır. A' nın (1.5) formundaki ifadesine, A' nın spektral ayrışımı veya özayrışımı denir.

Teorem 1. 3. 3. 2. (Schur Eşitsizliği) A herhangi $n \times n$ kompleks matris, A' nın özdeğerleri λ_i, $1 \le i \le n$, ve D, $D = \text{köş}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ olacak şekilde köşegen matris olsun. Bu takdirde $\|.\|_E$ sembolü ile matrislerdeki Euclidean norm gösterilmek üzere,

$$\|D\|_E \le \|A\|_E \tag{1.6}$$

dir. (1.6) eşitsizliği, A' nın normal matris olması ile eşitliğe dönüşür (Prasolov, 1994).

2. FİBONACCİ VE LUCAS MATRİS DİZİLERİ

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas matris dizileri tanımlanacak ve bu matris dizileri için elde edilen özellikler sunulacaktır.

Aşağıda tanımlanan Fibonacci matris dizisi kavramı ilk defa, bu tezin bir parçası olan ve 2008' de SCI (Science Citation Index) kapsamındaki "Ars Combinatoria" isimli dergide yayınlanan bir makalemiz ile literatüre girmiştir.

Tanım 2. 1. $s^2+4t>0$ olacak şekildeki $s>0$ ve $t\neq 0$ tamsayıları için; I_2, 2×2 tipinde birim matris olmak üzere, $\mathcal{F}_0(s,t)=I_2$, $\mathcal{F}_1(s,t)=\begin{pmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$ ve

$$\mathcal{F}_{n+1}(s,t)=s\mathcal{F}_n(s,t)+t\mathcal{F}_{n-1}(s,t),\quad n\geq 1, \tag{2.1}$$

ile tanımlanan $\{\mathcal{F}_n(s,t)\}_{n\in \mathrm{N}}$ matris dizisine $(s,t)-$*Fibonacci matris dizisi* veya *Fibonacci matris dizisi* denir ve *n*-inci Fibonacci matrisi $\mathcal{F}_n$ ile gösterilir.

Aşağıda verilen teorem, Fibonacci matris dizileri ile genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri arasındaki bağıntıyı sunmaktadır.

Teorem 2. 2. $0\leq n$ tamsayısı için,

$$\mathcal{F}_n=\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ tF_n & tF_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

dir.

İspat. İspat tümevarımla yapılacaktır. $F_{-1}=1$, $F_0=0$, $F_1=1$ ve $\mathcal{F}_0=I_2$ olduğundan $n=0$ için iddia doğrudur. $F_2=s$, $F_1=1$ ve $F_0=0$ olduğundan,

$$\mathcal{F}_1=\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ tF_1 & tF_0 \end{pmatrix}$$

olup, $n=1$ için de (2.2) bağıntısı doğrudur. Şimdi, $1\leq n\leq N$ olacak şekildeki, N tamsayısı için (2.2) bağıntısı doğru olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{N+1} &= s\mathcal{F}_N + t\mathcal{F}_{N-1} \\ &= s\begin{pmatrix} F_{N+1} & F_N \\ tF_N & tF_{N-1} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} F_N & F_{N-1} \\ tF_{N-1} & tF_{N-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{N+2} & F_{N+1} \\ tF_{N+1} & tF_N \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olup, $n \geq 1$ için teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem, Fibonacci matris dizisinin $m+n$-inci teriminin, m-inci terimi ile n-inci teriminin çarpımına eşit olduğunu söylemektedir.

Teorem 2. 3. $0 \leq m, n$ tamsayıları için, $\mathcal{F}_{m+n} = \mathcal{F}_m \mathcal{F}_n$ dir.

İspat. İspat, n üzerinden tümevarımla yapılacaktır. $\mathcal{F}_0 = I_2$ olduğundan, $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_m \mathcal{F}_0$ olup, $n = 0$ için iddia doğrudur. Şimdi, $0 \leq n \leq N$ olacak şekildeki N tamsayısı için teorem doğru olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{m+N+1} &= s\mathcal{F}_{m+N} + t\mathcal{F}_{m+N-1} \\ &= s\mathcal{F}_m \mathcal{F}_N + t\mathcal{F}_m \mathcal{F}_{N-1} \\ &= \mathcal{F}_m \left(s\mathcal{F}_N + t\mathcal{F}_{N-1} \right) \\ &= \mathcal{F}_m \mathcal{F}_{N+1}\end{aligned}$$

olup, $m, n \geq 0$ tamsayıları için teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Aşağıda tanımlanan Lucas matris dizisi kavramı ilk defa, 2008' de SCI (Science Citation Index) kapsamındaki "Ars Combinatoria" isimli dergide yayınlanan ve içeriği bu tezin parçalarından oluşan bir diğer makalemizde bir başka yeni dizi tanımı olarak literatüre girmiştir.

Tanım 2. 4. $s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki, $s > 0$ ve $t \neq 0$ tamsayıları için; $\mathcal{L}_0(s,t) = \begin{pmatrix} s & 2 \\ 2t & -s \end{pmatrix}$, $\mathcal{L}_1(s,t) = \begin{pmatrix} s^2 + 2t & s \\ st & 2t \end{pmatrix}$ ve

$$\mathcal{L}_{n+1}(s,t) = s\mathcal{L}_n(s,t) + t\mathcal{L}_{n-1}(s,t), \quad n \geq 1, \tag{2.3}$$

ile tanımlanan $\{\mathcal{L}_n(s,t)\}_{n\in\mathrm{N}}$ matris dizisine, $(s,t)-$*Lucas matris dizisi* veya *Lucas matris dizisi* denir ve *n*-inci terimi $\mathcal{L}_n$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem, Lucas matris dizisi ile genelleştirilmiş Lucas sayı dizisi arasındaki bağıntıyı sunmaktadır.

Teorem 2. 5. $0 \le n$ tamsayısı için,

$$\mathcal{L}_n = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ tL_n & tL_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

dir.

İspat. İspat tümevarımla yapılacaktır. $L_{-1} = -\frac{s}{t}$, $L_0 = 2$ ve $L_1 = s$ olduğundan,

$$\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} L_1 & L_0 \\ tL_0 & tL_{-1} \end{pmatrix}$$

olup, $n = 0$ için (2.4) bağıntısı doğrudur. Şimdi, $0 \le n \le N$ olacak şekildeki N tamsayısı için bağıntı doğru olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N+1} &= s\mathcal{L}_N + t\mathcal{L}_{N-1} \\ &= s\begin{pmatrix} L_{N+1} & L_N \\ tL_N & tL_{N-1} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} L_N & L_{N-1} \\ tL_{N-1} & tL_{N-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{N+2} & L_{N+1} \\ tL_{N+1} & tL_N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olup, $n \ge 0$ için, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem, Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin terimleri arasındaki bağıntıyı sunmaktadır.

Teorem 2. 6. $n \ge 0$ tamsayısı için, $\mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_1\mathcal{F}_n$ dir.

İspat. İspat, *n* üzerinden tümevarımla yapılacaktır. $\mathcal{F}_0 = I_2$ olduğundan $n = 0$ için teorem doğrudur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 &= \begin{pmatrix} s^2+2t & s \\ st & 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s^3+3st & s^2+2t \\ t(s^2+2t) & ts \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_3 & L_2 \\ tL_2 & tL_1 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{L}_2\end{aligned}$$

dir ki teorem, $n=1$ için de doğrudur. Şimdi, $1 \le n \le N$ olacak şekildeki N tamsayısı için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, Teorem 2. 3 ve varsayımımızdan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1\mathcal{F}_{N+1} &= \mathcal{L}_1\mathcal{F}_N\mathcal{F}_1 \\ &= \mathcal{L}_{N+1}\mathcal{F}_1\end{aligned} \tag{2.5}$$

yazılır. $(s,t)-$Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin tanımından, Teorem 2. 5 ve (2.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1\mathcal{F}_{N+1} &= \begin{pmatrix} L_{N+2} & L_{N+1} \\ tL_{N+1} & L_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{N+3} & L_{N+2} \\ tL_{N+2} & L_{N+1} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{L}_{N+2}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki, böylece $n \ge 0$ için iddianın doğruluğu ispatlanmış olur.

Aşağıdaki sonuç, bir önceki teoremden hareketle genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizileri arasında bir bağıntı vermektedir.

Sonuç 2. 7.

$$L_n = sF_n + 2tF_{n-1} \tag{2.6}$$

dir.

İspat. Teorem 2. 6' dan $n \geq 0$ için, $\mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_n$ dir. $\mathcal{L}_{n+1}$ ve $\mathcal{L}_1 \mathcal{F}_n$ matrislerinin eşitliğinden, bu matrislerin $(2,2)$-inci pozisyonundaki elemanları eşit olacağından (2.6) eşitliği elde edilir.

Aşağıdaki teorem, Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin terimlerinin matrislerdeki çarpım işlemine göre değişebilirliği hakkında bilgi vermektedir.

Teorem 2. 8. $0 \leq m, n$ tamsayıları için, $\mathcal{F}_m \mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_{n+1} \mathcal{F}_m$ dir.

İspat. $0 \leq m, n$ tamsayıları için,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m \mathcal{L}_{n+1} &= \mathcal{F}_m \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_n \\ &= \mathcal{F}_m \left(tI_2 + \mathcal{F}_2 \right) \mathcal{F}_n \\ &= t\mathcal{F}_{n+m} + \mathcal{F}_{n+m+2} \\ &= \left(tI_2 + \mathcal{F}_2 \right) \mathcal{F}_{n+m} \\ &= \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_n \mathcal{F}_m \\ &= \mathcal{L}_{n+1} \mathcal{F}_m \end{aligned}$$

olup Teorem 2. 8 ispatlanmış olur.

Aşağıdaki teorem, Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin terimleri arasındaki bazı bağıntıları sunmaktadır.

Teorem 2. 9. $n \geq 0$ için,

$$\mathcal{L}_{n+1}^2 = \mathcal{L}_1^2 \mathcal{F}_{2n} \tag{2.7}$$

$$\mathcal{L}_{n+1}^2 = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_{2n+1} \tag{2.8}$$

$$\mathcal{L}_{2n+1} = \mathcal{F}_n \mathcal{L}_{n+1} \tag{2.9}$$

dir.

İspat. Teorem 2. 6 ve Teorem 2. 8' den,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n+1}^2 &= \mathcal{L}_{n+1} \mathcal{L}_{n+1} \\ &= \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_n \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_n \\ &= \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_n \mathcal{F}_n \\ &= \mathcal{L}_1^2 \mathcal{F}_{2n} \end{aligned} \tag{2.10}$$

olarak (2.7) özdeşliği ispat edilmiş olur. Teorem 2. 6 ve (2.10) özdeşliğinden,

$$\mathcal{L}_{n+1}^2 = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_{2n+1}$$

şeklindeki (2.8) özdeşliğine ulaşılır. Ve son olarak Teorem 2. 6 ve Teorem 2. 8' den,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2n+1} &= \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_{2n} \\ &= \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_n \mathcal{F}_n \\ &= \mathcal{F}_n \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_n \\ &= \mathcal{F}_n \mathcal{L}_{n+1} \end{aligned}$$

şeklindeki (2.9) özdeşliği elde edilir.

Sonuç 2. 10.

$$L_{n+2}^2 + tL_{n+1}^2 = \left(s^2 + 4t\right) F_{2n+3} \tag{2.11}$$

$$L_{n+2}^2 + tL_{n+1}^2 = L_{2n+4} + tL_{2n+2} \tag{2.12}$$

$$L_{2n} = F_n L_{n+1} + tF_{n-1} L_n \tag{2.13}$$

İspat. (2.2), (2.4) ve (2.7)' den,

$$\begin{pmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ tL_{n+1} & tL_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} s^2 + 2t & s \\ st & 2t \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ tF_{2n} & tF_{2n-1} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

yazılır. (2.14) eşitliğinin sağ ve sol tarafındaki matrislerin (1,1)-pozisyonundaki elemanların eşitliğinden,

$$\begin{aligned} L_{n+2}^2 + tL_{n+1}^2 &= \left(s^4 + 5s^2 t + 4t^2\right) F_{2n+1} + t\left(s^3 + 4st\right) F_{2n} \\ &= s^3 \left(sF_{2n+1} + tF_{2n}\right) + 4st\left(sF_{2n+1} + tF_{2n}\right) \\ &\quad + s^2 tF_{2n+1} + 4t^2 F_{2n+1} \\ &= s^3 F_{2n+2} + 4stF_{2n+2} + s^2 tF_{2n+1} + 4t^2 F_{2n+1} \\ &= s^2 \left(sF_{2n+2} + tF_{2n+1}\right) + 4t\left(sF_{2n+2} + tF_{2n+1}\right) \\ &= \left(s^2 + 4t\right) F_{2n+3} \end{aligned}$$

şeklindeki (2.11) eşitliğine ulaşılır. Benzer olarak, (2.2), (2.4) ve (2.8) eşitliklerinden,

$$\begin{pmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ tL_{n+1} & tL_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} s^2+2t & s \\ st & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{2n+2} & L_{2n+1} \\ tL_{2n+1} & tL_{2n} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

yazılır. Böylece, (2.15) eşitliğinin sol ve sağ tarafındaki matrislerin (1,1)-pozisyonundaki elemanların eşitliğinden,

$$\begin{aligned} L_{n+2}^2 + tL_{n+1}^2 &= \left(s^2+2t\right)L_{2n+2} + stL_{2n+1} \\ &= s\left(sL_{2n+2} + tL_{2n+1}\right) + 2tL_{2n+2} \\ &= sL_{2n+3} + 2tL_{2n+2} \\ &= L_{2n+4} + tL_{2n+2} \end{aligned}$$

şeklindeki (2.12) eşitliği elde edilir. Son olarak, (2.2), (2.4) ve (2.9) eşitliklerinden,

$$\begin{pmatrix} L_{2n+2} & L_{2n+1} \\ tL_{2n+1} & tL_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ tF_n & tF_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ tL_{n+1} & tL_n \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

yazılır. Buradan, (2.16)' deki eşit olan iki matrisin (2,2)-pozisyonundaki elemanların eşitliğinden, (2.13) eşitliğine ulaşılır.

2. 1. Fibonacci ve Lucas Matris Dizileri İçin Binet Formülleri

Bu bölümde öncelikle, $s^2+4t>0$ olacak şekildeki, $s>0$ ve $t\neq 0$ tamsayıları için *n*-inci Fibonacci matris dizisinin,

$$x^2 - sx - t = 0$$

denkleminin kökleri ile olan ilişkisi ve daha sonra *n*-inci genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ve de *n*-inci Fibonacci ve Lucas matrisleri için Binet formülleri sunulacaktır.

Teorem 2. 1. 1. $\alpha = \dfrac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}$ olmak üzere, $n \geq 0$ için

$$\mathcal{F}_n = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \\ t\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} & t\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

dir.

İspat. $\mathcal{F}_0 = I_2$ olduğundan $n=0$ için (2.17) eşitliği doğrudur. $\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerleri $\alpha = \frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ ve $\beta = \frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}$ olup, α özdeğerine karşılık gelen özvektör $u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ ve β özdeğerine karşılık gelen özvektör $u_\beta = \begin{pmatrix} \beta \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $\mathcal{F}_1$ matrisinin spektral ayrışımı,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{t} & \frac{\beta}{t} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{t} & \frac{\beta}{t} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{t}{\alpha-\beta} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{t} & \frac{\beta}{t} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta}{t} \\ -1 & \frac{\alpha}{t} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.18}$$

dır. Böylece Teorem 2. 3 ve (2.18) den, (2.17) eşitliği eldedilir.

Aşağıdaki sonuç ile, literatürde yer alan *n*-inci genelleştirilmiş Fibonacci sayısının Binet formülü; *n*-inci Fibonacci matrisi ile genelleştirilmiş Fibonacci sayıları arasındaki bağıntı ve bir önceki teorem kullanılarak tekrar elde edilmiştir.

Sonuç 2. 1. 2. $n \geq 0$ için,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.19}$$

dir.

İspat. İspat, (2.2) ve (2.17) eşitliklerinden açıktır.

Aşağıdaki sonuç ile, literatürde yer alan *n*-inci genelleştirilmiş Lucas sayısının Binet formülü; Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin terimleri arasındaki bağıntı ve

n-inci genelleştirilmiş Fibonacci sayısının Binet formülü kullanılarak tekrar elde edilmiştir.

Sonuç 2. 1. 3. $n \geq 0$ tamsayısı için,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{2.20}$$

dir.

İspat. (2.6) eşitliği üzerine bazı cebirsel işlemler uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
L_n &= sF_n + 2tF_{n-1} \\
&= s\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + 2t\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right) \\
&= \frac{s\alpha^n - s\beta^n + 2t\alpha^{n-1} - 2t\beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{s\alpha^n + \frac{2t}{\alpha}\alpha^n - s\beta^n - \frac{2t}{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\left(s + \frac{2t}{\alpha}\right)\alpha^n - \left(s + \frac{2t}{\beta}\right)\beta^n}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\left(\frac{\alpha s + 2t}{\alpha}\right)\alpha^n - \left(\frac{\beta s + 2t}{\beta}\right)\beta^n}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\left(\frac{\alpha^2 + t}{\alpha}\right)\alpha^n - \left(\frac{\beta^2 + t}{\beta}\right)\beta^n}{\alpha - \beta}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte, $\alpha^2 + t = \alpha^2 - \alpha\beta$ and $\beta^2 + t = \beta^2 - \alpha\beta$ olduğu dikkate alınırsa *n*-inci (*s*,*t*)-Lucas sayısı için (2.20) ile verilen Binet formülü elde edilmiş olur.

Aşağıdaki sonuç ile, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları arasında bazı bağıntılar sunulmuştur.

Sonuç 2. 1. 4. $n \geq 0$ için,

$$F_{n+1}^2 + \left(1 + t^2\right)F_n^2 + t^2F_{n-1}^2 \geq L_{2n} \tag{2.21}$$

$$L_{n+2}^2 + \left(1 + t^2\right)L_{n+1}^2 + t^2L_n^2 \geq t^2L_{2n} + 2tL_{2n+2} + L_{2n+4} \tag{2.22}$$

İspat. $\mathcal{F}_1$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = \alpha$ ve $\lambda_2 = \beta$ olduğundan, Teorem 2. 3' den $\mathcal{F}_n$ matrisinin matrisinin özdeğerleri $\mu_1 = \alpha^n$ ve $\mu_2 = \beta^n$ olacaktır. Böylece Schur eşitsizliği gereği,

$$F_{n+1}^2 + \left(1+t^2\right)F_n^2 + t^2 F_{n-1}^2 \geq \alpha^{2n} + \beta^{2n} \tag{2.23}$$

yazılır. (2.20) ve (2.23)' den, (2.21) eşitsizliğine ulaşılır. Teorem 2. 6' dan,

$$\mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_1 \mathcal{F}_n = \left(tI_2 + \mathcal{F}_2\right)\mathcal{F}_n$$

yazılır. Buradan, $\mathcal{L}_{n+1}$ matrisinin özdeğerlerinin, $\delta_1 = t\alpha^n + \alpha^{n+2}$ ve $\delta_2 = t\beta^n + \beta^{n+2}$ olduğu görülür. Böylece, $\mathcal{L}_{n+1}$ matrisinin elemanları ve de özdeğerlerine için, Schur Teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} L_{n+2}^2 + \left(1+t^2\right)L_{n+1}^2 + t^2 L_n^2 &\geq \left(t\alpha^n + \alpha^{n+2}\right)^2 + \left(t\beta^n + \beta^{n+2}\right)^2 \\ &= t^2 L_{2n} + 2tL_{2n+2} + L_{2n+4} \end{aligned}$$

şeklinde (2.22) eşitliği elde edilir.

Aşağıdaki teorem ile, *n*-inci Fibonacci matrisi için Binet formülü verilmiştir.

Teorem 2. 1. 5. $n \geq 0$ için,

$$\mathcal{F}_n = \left(\frac{\mathcal{F}_1 - \beta\mathcal{F}_0}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n - \left(\frac{\mathcal{F}_1 - \alpha\mathcal{F}_0}{\alpha - \beta}\right)\beta^n,\ n \geq 0 \tag{2.24}$$

dir.

İspat. İspat, (*s*,*t*)-Fibonacci matris dizisinin tanımı ve (2.17) eşitliğinden açıktır.

Aşağıdaki sonuç ile, *n*-inci Lucas matrisinin Binet formülü sunulmuştur.

Teorem 2. 1. 6. $n \geq 0$ için,

$$\mathcal{L}_{n+1} = \left(\frac{\mathcal{L}_2 - \beta\mathcal{L}_1}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n - \left(\frac{\mathcal{L}_2 - \alpha\mathcal{L}_1}{\alpha - \beta}\right)\beta^n,\ n \geq 0 \tag{2.25}$$

dir.

İspat. İspat, Teorem 2. 1. 5 ve Teorem 2. 6' dan açıktır.

2. 2. Fibonacci ve Lucas Matris Dizilerinin Kombinatorik Temsilleri

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas matrisleri için kombinatorik temsiller sunulacak ve bu temsillerden hareketle genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının kombinatorik temsilleri verilecektir.

Yardımcı Teorem 2. 2. 1. *s* ve *t* kompleks sayıları için,

$$y_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} s^{n-2i} t^i, \; n \geq 0 \tag{2.26}$$

ve

$$z_0 = 0, \; z_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2m+1} s^{n-2m-1} \left(s^2 + 4t\right)^m, \; n \geq 1 \tag{2.27}$$

ile tanımlanan $\{y_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{z_n\}_{n\geq 0}$ dizileri

$$x_{n+1} = sx_n + tx_{n-1} \tag{2.28}$$

rekürans ilişkisini sağlarlar.

İspat. *s* ve *t* kompleks sayıları ve $0 \leq n$ tamsayısı için, (2.26) ile tanımlanan $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin, (2.28) ile verilen rekürans ilişkisini sağladığını gösterelim. $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin tanımından,

$$\begin{aligned} sy_k + ty_{k-1} &= \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-i}{i} s^{k+1-2i} t^i + \sum_{i=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-1-i}{i} s^{k-1-2i} t^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-i}{i} s^{k+1-2i} t^i + \sum_{i=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \binom{k-i}{i-1} s^{k+1-2i} t^i \end{aligned} \tag{2.29}$$

elde edilir. (2.29)' de *k* çift olması durumunda, $\lfloor k/2 \rfloor = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ olacağından, (2.29)' den,

$$sy_k + ty_{k-1} = \binom{k}{0} s^{k+1} + \sum_{i=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \left[\binom{k-i}{i} + \binom{k-i}{i-1} \right] s^{k+1-2i} t^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \binom{k+1-i}{i} s^{k+1-2i} t^i$$

$$= y_{k+1} \tag{2.30}$$

eşitliği elde edilir. Benzer olarak, (2.29)' de k tek olması durumunda, $\lfloor k/2 \rfloor = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$ olacağından, (2.29)' den,

$$sy_k + ty_{k-1} = \binom{k}{0} s^{k+1} + \sum_{i=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \left[\binom{k-i}{i} + \binom{k-i}{i-1} \right] s^{k+1-2i} t^i$$

$$+ \binom{k - \lfloor (k+1)/2 \rfloor}{\lfloor (k+1)/2 \rfloor - 1} s^{k+1-2\lfloor (k+1)/2 \rfloor} t^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \binom{k+1-i}{i} s^{k+1-2i} t^i$$

$$= y_{k+1} \tag{2.31}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, (2.30) ve (2.31)' den $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin (2.28) ile verilen rekürans ilişkisini sağladığı görülür. Benzer şekilde, $\{z_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin de (2.28) ile verilen rekürans ilişkisini sağladığı ispatlanır.

Aşağıdaki teorem, hem n-inci Fibonacci matrisinin bir kombinatorik temsilinin sunulduğu hem de $\{y_n\}$ dizisi ile olan ilişkisinin verildiği bir teoremdir.

Teorem 2. 2. 2. $n \geq 1$ için,

$$\mathcal{F}_n = y_n I_2 + y_{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & -s \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

dir.

İspat. İspat tümevarımla yapılacaktır. $y_0 = 1$ ve $y_1 = s$ olduğundan,

$$y_1 I_2 + y_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{F}_1$$

olup, n=1 için (2.32) eşitliği doğrudur. Şimdi, $1 \le n \le k$ olacak şekildeki k doğal sayısı için (2.32) eşitliği doğru olsun. $n = k+1$ için (2.32) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. (s,t)-Fibonacci matris dizisinin tanımından ve Yardımcı Teorem 2. 2. 1' den

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k+1} &= s\mathcal{F}_k + t\mathcal{F}_{k-1} \\ &= s\left[y_k I_2 + y_{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & -s \end{pmatrix} \right] + t\left[y_{k-1} I_2 + y_{k-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & -s \end{pmatrix} \right] \\ &= y_{k+1} I_2 + y_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & -s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece teorem ispatlanır.

Sonuç 2. 2. 3. $n \ge 1$ için,

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} s^{n-2i} t^i \tag{2.33}$$

dir.

İspat. İspat, $\{y_n\}_{n \ge 0}$ dizisinin tanımı, (2.2) ve (2.32) eşitliklerinden açıktır.

Aşağıdaki teorem ile, (n+1)-inci Lucas matrisi için bir kombinatorik temsil sunulmakla birlikte $\{y_n\}$ dizisi ile olan ilişkisi de verilmektedir.

Teorem 2. 2. 4. $n \ge 1$ için,

$$\mathcal{L}_{n+1} = y_n \begin{pmatrix} s^2 + 2t & s \\ st & 2t \end{pmatrix} + y_{n-1} \begin{pmatrix} st & 2t \\ 2t^2 & -st \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

dir.

İspat. $\mathcal{L}_1(s,t)=\begin{pmatrix} s^2+2t & s \\ st & 2t \end{pmatrix}$ olduğundan, Teorem 2. 2. 4' nın ispatı; Teorem 2. 2 ve Teorem 2. 2. 2' den açıktır.

Sonuç 2. 2. 5. $n \geq 1$ için,

$$L_{n+1} = s^{n+1} + \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \left[\binom{n+1-i}{i} + \binom{n-i}{i-1} \right] s^{n+1-2i} t^i \tag{2.35}$$

dir.

İspat. Teorem 2. 5, Yardımcı Teorem 2. 2. 1 ve (2.34) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= sy_n + 2ty_{n-1} \\ &= y_{n+1} + ty_{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n+1-i}{i} s^{n+1-2i} t^i + \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-1-i}{i} s^{n-1-2i} t^{i+1} \\ &= \binom{n+1}{0} s^{n+1} + \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n+1-i}{i} s^{n+1-2i} t^i + \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n-i}{i-1} s^{n+1-2i} t^i \\ &= s^{n+1} + \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \left[\binom{n+1-i}{i} + \binom{n-i}{i-1} \right] s^{n+1-2i} t^i \end{aligned}$$

elde edilir ki, böylece (2.35) eşitliği ispatlanır.

n-inci Fibonacci matrisinin bir başka kombinatorik temsili ve $\{z_n\}$ dizisi ile ilişkisi aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2. 2. 6. $n \geq 1$ için,

$$\mathcal{F}_n = z_n \mathcal{F}_1 + t z_{n-1} I_2 \tag{2.36}$$

dir.

İspat. İspat, tümevarımla yapılacaktır. $\{z_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin tanımından, $z_0 = 0$ ve $z_1 = 1$ olduğundan, $n = 1$ için (2.36) eşitliği doğrudur. $1 < n \leq k$ olacak şekildeki *k* doğal sayısı için (2.36) eşitliği doğru olsun. Şimdi, $n = k+1$ için, (2.36) eşitliğinin doğru olduğu gösterilecektir. (*s*,*t*)-Fibonacci matris dizisinin tanımı ve Yardımcı Teorem 2. 2. 1' den,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{k+1} &= s\mathcal{F}_k + t\mathcal{F}_{k-1} \\ &= s\left(z_k\mathcal{F}_1 + tz_{k-1}I_2\right) + t\left(z_{k-1}\mathcal{F}_1 + tz_{k-2}I_2\right) \\ &= \left(sz_k + tz_{k-1}\right)\mathcal{F}_1 + t\left(sz_{k-1} + tz_{k-2}\right)I_2 \\ &= z_{k+1}\mathcal{F}_1 + tz_kI_2\end{aligned}$$

yazılır ki, teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 2. 2. 7. $n \geq 1$ için,

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\binom{n}{2m+1}s^{n-2m-1}\left(s^2+4t\right)^m \tag{2.37}$$

dir.

İspat. $\{z_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin tanımı, (2.2) ve (2.36) eşitlikleri göz önüne alınarak, matris eşitliği bilgisinden (2.37) eşitliği elde edilir.

Aşağıdaki teorem, (n+1)-inci Lucas matrisinin bir başka kombinatorik temsilini sunmakta ve $\{z_n\}$ ile olan ilişkisini vermektedir.

Teorem 2. 2. 8. $n \geq 1$ için,

$$\mathcal{L}_{n+1} = z_n\mathcal{L}_1\mathcal{F}_1 + tz_{n-1}\mathcal{L}_1 \tag{2.38}$$

dir.

İspat. İspat, Teorem 2. 2 ve Teorem 2. 2. 2' den açıktır.

Sonuç 2. 2. 9. $n \geq 0$ için,

$$L_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+1}}s^{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}\left[\binom{n+2}{2i+1} + 4t\binom{n}{2i-1}\right]s^{n+1-2i}\left(s^2+4t\right)^i \tag{2.39}$$

dir.

İspat. $\mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{L}_1$ matrislerinin tanımlarını göz önüne alarak, (2.38) eşitliğinden

$$\mathcal{L}_{n+1} = z_n\begin{pmatrix} s^3+3st & s^2+2t \\ s^2t+2t & st \end{pmatrix} + z_{n-1}\begin{pmatrix} s^2t+2t^2 & st \\ st^2 & 2t^2 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, Teorem 2. 5, Yardımcı Teorem 2. 2. 1 ve (2.40) eşitliğini dikkate alarak, (n+1)-inci (s,t)-Lucas sayısı için,

$$\begin{aligned}
L_{n+1} &= sz_{n+1} + 2tz_n \\
&= sz_{n+1} + tz_n + tz_n \\
&= z_{n+2} + tz_n \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n+2}{2i+1} s^{n+1-2i} \left(s^2+4t\right)^i + \frac{t}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1} s^{n-1-2i} \left(s^2+4t\right)^i \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n+2}{2i+1} s^{n+1-2i} \left(s^2+4t\right)^i + \frac{t}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{2i-1} s^{n+1-2i} \left(s^2+4t\right)^i \\
&= \frac{n+2}{2^{n+1}} s^{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \left[\binom{n+2}{2i+1} + 4t \binom{n}{2i-1} \right] s^{n+1-2i} \left(s^2+4t\right)^i
\end{aligned}$$

şeklinde (2.39) eşitliğine ulaşılır.

2. 3. Fibonacci ve Lucas Matris Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin üreteç fonksiyonları verilmiştir.

Aşağıdaki teorem, Fibonacci matris dizisinin terimlerini içeren toplam için bir formül sunmaktadır.

Teorem 2. 3. 1

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{\mathcal{F}}_k x^{-k} = -\frac{1}{x^n \left(x^2 - sx - t\right)} \left[x\boldsymbol{\mathcal{F}}_{n+1} + t\boldsymbol{\mathcal{F}}_n \right] + \frac{1}{x^2 - sx - t} \left[x\boldsymbol{\mathcal{F}}_1 + \left(x^2 - sx\right)\boldsymbol{\mathcal{F}}_0 \right] \quad (2.41)$$

dir.

İspat.

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

(β için de benzer formül yazılır) ve

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-sx-t$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathcal{F}_k}{x^k}&=\left(\frac{\mathcal{F}_1-\beta\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^k-\left(\frac{\mathcal{F}_1-\alpha\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\beta}{x}\right)^k\\&=\left(\frac{\mathcal{F}_1-\beta\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)}\right)-\left(\frac{\mathcal{F}_1-\alpha\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\beta}{x}\right)}\right)\\&=\frac{1}{x^n}\left\{\left(\frac{\mathcal{F}_1-\beta\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha}\right)\right.\\&\quad\left.-\left(\frac{\mathcal{F}_1-\alpha\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{x^{n+1}-\beta^{n+1}}{x-\beta}\right)\right\}\\&=\frac{1}{x^n\left(x^2-sx-t\right)}\left\{\left(\frac{\mathcal{F}_1-\beta\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\right)\left(x^{n+1}-\alpha^{n+1}\right)(x-\beta)\right.\\&\quad\left.-\left(\frac{\mathcal{F}_1-\alpha\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\right)\left(x^{n+1}-\beta^{n+1}\right)(x-\alpha)\right\}.\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte, bazı elemanter işlemlerle (2.41) formülüne ulaşılır.

Aşağıdaki teorem, Lucas matris dizisinin terimlerini içeren toplam için formül sunmaktadır.

Teorem 2. 3. 2.

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_{k+1}x^{-k}=-\frac{1}{x^n\left(x^2-sx-t\right)}\left[x\mathcal{L}_{n+2}+t\mathcal{L}_{n+1}\right]+\frac{1}{x^2-sx-t}\left[x\mathcal{L}_2+\left(x^2-sx\right)\mathcal{L}_1\right]$$

dir.

İspat. $\mathcal{L}_{n+1}=\mathcal{L}_1\mathcal{F}_n$ bağıntısı ve Teorem 2. 3. 1' den ispat açıktır.

Aşağıdaki sonuç ile, Fibonacci matris dizisinin üreteç fonksiyonu verilmektedir.

Sonuç 2. 3. 3. $x>\frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ olacak şekildeki x reel sayısı için,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_kx^{-k}=\frac{1}{x^2-sx-t}\left[x\mathcal{F}_1+\left(x^2-sx\right)\mathcal{F}_0\right]$$

dir.

Sonuç 2. 3. 4. $x > \frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ olacak şekildeki x reel sayısı için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_{k+1} x^{-k} = \frac{x}{x^2 - sx - t}$$

dir.

Aşağıdaki sonuç, Lucas matris dizisinin üreteç fonksiyonunu sunmaktadır.

Sonuç 2. 3. 5. $x > \frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ olacak şekildeki x reel sayısı için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{k+1} x^{-k} = \frac{1}{x^2 - sx - t}\left[x\mathcal{L}_2 + \left(x^2 - sx\right)\mathcal{L}_1 \right]$$

dir.

Aşağıdaki teorem ile, Fibonacci matris dizisinin terimlerinin r-inci kuvvetlerinden oluşan dizinin üreteç fonksiyonu verilmektedir.

Teorem 2. 3. 6. $X = \frac{\mathcal{F}_1 - \beta\mathcal{F}_0}{\alpha - \beta}$ ve $Y = \frac{\mathcal{F}_1 - \alpha\mathcal{F}_0}{\alpha - \beta}$ olmak üzere; r tek pozitif tamsayısı için

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i^r x^i = \sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}} \left\{ (-1)^k \binom{r}{k} X^k Y^k \times \right. \tag{2.42}$$
$$\left. \times \frac{X^{r-2k} - Y^{r-2k} + (-t)^k \left(Y^{r-2k}\alpha^{r-2k} - X^{r-2k}\beta^{r-2k} \right) x}{1 - (-t)^k L_{r-2k} x - t^r x^2} \right\}$$

ve r çift pozitif tamsayısı için

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i^r x^i = \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} \left\{ (-1)^k X^k Y^k \binom{r}{k} \times \right. \tag{2.43}$$
$$\left. \times \frac{X^{r-2k} + Y^{r-2k} - (-t)^k \left(Y^{r-2k}\alpha^{r-2k} + X^{r-2k}\beta^{r-2k} \right) x}{1 - (-t)^k L_{r-2k} x + t^r x^2} \right\} +$$
$$+ \binom{r}{r/2} \frac{X^{r/2} (-Y)^{r/2}}{1 - (-t)^{r/2} x}$$

dir.

İspat. $X=\dfrac{\mathcal{F}_1-\beta\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}$ ve $Y=\dfrac{\mathcal{F}_1-\alpha\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}$ olduğundan, (2.24) formülünden, *n*-inci (*s*,*t*)-Fibonacci matris dizisi $\mathcal{F}_n=X\alpha^n-Y\beta^n$ şeklinde yazılır. $U(r,x)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}_i^r x^i$ olsun. Bu takdirde $U(r,x)$ toplamı,

$$\begin{aligned}U(r,x)&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(X\alpha^i-Y\beta^i\right)^r x^i\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(X\alpha^i\right)^k\left(-Y\beta^i\right)^{r-k}\right)x^i\\&=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}X^k\left(-Y\right)^{r-k}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\alpha^k\beta^{r-k}x\right)^i\\&=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}X^k\left(-Y\right)^{r-k}\frac{1}{1-\alpha^k\beta^{r-k}x}\end{aligned}\qquad(2.44)$$

dir. $U(r,x)$ için elde edilen (2.44) formülünde *r* tek alınırsa,

$$\begin{aligned}U(r,x)&=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}\binom{r}{k}\left(\frac{X^k\left(-Y\right)^{r-k}}{1-\alpha^k\beta^{r-k}x}+\frac{X^{r-k}\left(-Y\right)^k}{1-\alpha^{r-k}\beta^k x}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\left(\frac{X^{r-k}Y^k}{1-\alpha^{r-k}\beta^k x}-\frac{X^kY^{r-k}}{1-\alpha^k\beta^{r-k}x}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\frac{X^{r-k}Y^k-X^kY^{r-k}+\left(X^kY^{r-k}\alpha^{r-k}\beta^k-X^{r-k}Y^k\alpha^k\beta^{r-k}\right)x}{1-\left(\alpha^k\beta^{r-k}+\alpha^{r-k}\beta^k\right)x+\alpha^r\beta^r x^2}\\&=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\frac{X^{r-k}Y^k-X^kY^{r-k}+\left(-t\right)^k\left(X^kY^{r-k}\alpha^{r-2k}-X^{r-k}Y^k\beta^{r-2k}\right)x}{1-\left(-t\right)^k\left(\beta^{r-2k}+\alpha^{r-2k}\right)x-t^r x^2}\\&=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\ X^kY^k\binom{r}{k}\frac{X^{r-2k}-Y^{r-2k}+\left(-t\right)^k\left(Y^{r-2k}\alpha^{r-2k}-X^{r-2k}\beta^{r-2k}\right)x}{1-\left(-t\right)^k L_{r-2k}x-t^r x^2}\end{aligned}$$

formülüne ulaşılır ki, böylece (2.42) formülü ispatlanmış olur. Benzer olarak, (2.43) formülünü ispat edelim. $U(r,x)$ için elde edilen (2.44) formülünde *r* çift alınırsa,

$$U(r,x)=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}\binom{r}{k}\left(\frac{X^k(-Y)^{r-k}}{1-\alpha^k\beta^{r-k}x}+\frac{X^{r-k}(-Y)^k}{1-\alpha^{r-k}\beta^k x}\right)+\binom{r}{r/2}\frac{X^{r/2}(-Y)^{r/2}}{1-(-t)^{r/2}x}$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\left(\frac{X^{r-k}Y^k}{1-\alpha^{r-k}\beta^k x}+\frac{X^kY^{r-k}}{1-\alpha^k\beta^{r-k}x}\right)+\binom{r}{r/2}\frac{X^{r/2}(-Y)^{r/2}}{1-(-t)^{r/2}x}$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\frac{X^kY^{r-k}+X^{r-k}Y^k-\left(X^kY^{r-k}\alpha^{r-k}\beta^k+X^{r-k}Y^k\alpha^k\beta^{r-k}\right)x}{1-\left(\alpha^k\beta^{r-k}+\alpha^{r-k}\beta^k\right)x+\alpha^r\beta^r x^2}$$

$$+\binom{r}{r/2}\frac{X^{r/2}(-Y)^{r/2}}{1-(-t)^{r/2}x}$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r}{k}\frac{X^kY^{r-k}+X^{r-k}Y^k-(-t)^k\left(X^kY^{r-k}\alpha^{r-2k}+X^{r-k}Y^k\beta^{r-2k}\right)x}{1-(-t)^k\left(\beta^{r-2k}+\alpha^{r-2k}\right)x+t^rx^2}$$

$$+\binom{r}{r/2}\frac{X^{r/2}(-Y)^{r/2}}{1-(-t)^{r/2}x}$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k X^kY^k\binom{r}{k}\frac{X^{r-2k}+Y^{r-2k}-(-t)^k\left(Y^{r-2k}\alpha^{r-2k}+X^{r-2k}\beta^{r-2k}\right)x}{1-(-t)^k L_{r-2k}x+t^rx^2}$$

$$+\binom{r}{r/2}\frac{X^{r/2}(-Y)^{r/2}}{1-(-t)^{r/2}x}$$

formülüne ulaşılır ki, buradan (2.43) formülü ispat edilmiş olur.

2. 4. Fibonacci ve Lucas Matris Dizilerinin Kısmi Toplamları

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas matrislerini içeren kısmi toplamlar için formüller sunulacaktır.

Teorem 2. 4. 1. $s+t\neq 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k=\frac{1}{s+t-1}\begin{pmatrix}F_{n+2}+tF_{n+1}-s-t & F_{n+1}+tF_n-1\\ tF_{n+1}+t^2F_n-t & tF_n+t^2F_{n-1}-t\end{pmatrix} \tag{2.45}$$

dir.

İspat. $s+t\neq 1$ ve $S_n=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$ olsun. Bu takdirde,

$$S_n\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2+\mathcal{F}_3+...+\mathcal{F}_{n+1} \tag{2.46}$$

dir. S_n kısmi toplamı ve (2.46) eşitliğinden,

$$S_n\left(\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0\right)=\mathcal{F}_{n+1}-\mathcal{F}_1 \tag{2.47}$$

elde edilir. $\det\left(\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0\right)=1-s-t\neq 0$ olduğundan, $\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0$ matrisi terslenebilirdir ve böylece (2.47) eşitliğinden,

$$S_n=\left(\mathcal{F}_{n+1}-\mathcal{F}_1\right)\left(\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0\right)^{-1} \tag{2.48}$$

yazılır.

$$\mathcal{F}_{n+1}-\mathcal{F}_1=\begin{pmatrix}F_{n+2}-s & F_{n+1}-1\\ tF_{n+1}-t & tF_n\end{pmatrix}$$

ve

$$\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0=\begin{pmatrix}s-1 & 1\\ t & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0\right)^{-1}=\frac{1}{s+t-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ t & 1-s\end{pmatrix}$$

olup, (2.48)' den,

$$S_n=\frac{1}{s+t-1}\begin{pmatrix}F_{n+2}+tF_{n+1}-s-t & F_{n+1}+tF_n-1\\ tF_{n+1}+t^2F_n-t & tF_n+t^2F_{n-1}-t\end{pmatrix}$$

elde edilir ki, bu (2.45) eşitliğidir.

Sonuç 2. 4. 2. $s+t\neq 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{n}F_{k+1}=\frac{F_{n+2}+tF_{n+1}-s-t}{s+t-1} \tag{2.49}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = \frac{F_{n+1} + tF_n - 1}{s + t - 1} \tag{2.50}$$

dir.

İspat. İspat, (2.2) eşitliği ve (2.45) formülünden açıktır.

Teorem 2. 4. 3. $s + t \neq 1$ için, $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_{k+1} = \left(a_{ij}\right)$ olmak üzere

$$a_1 = \frac{1}{s + t - 1}\left(F_{n+4} + tF_{n+3} + tF_{n+2} + t^2F_{n+1} - s^2(s+t) - t(3s+2t)\right),$$

$$a_{12} = \frac{1}{s + t - 1}\left(F_{n+3} + t\left(F_{n+2} + F_{n+1} + tF_n\right) - s^2 - 2t - st\right),$$

$$a_{21} = \frac{t}{s + t - 1}\left(F_{n+3} + tF_{n+2} + tF_{n+1} + t^2F_n - s^2 - st - 2t\right),$$

$$a_{22} = \frac{t}{s + t - 1}\left(F_{n+2} + tF_{n+1} + tF_n + t^2F_{n-1} - s - 2t\right),$$

dir.

İspat. $\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} s^2 + 2t & s \\ st & 2t \end{pmatrix}$ olup**,** Teorem 2. 6 ve (2.45) formülünden,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_{k+1} = \frac{1}{s + t - 1}\begin{pmatrix} s^2 + 2t & s \\ st & 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+2} + tF_{n+1} - s - t & F_{n+1} + tF_n - 1 \\ tF_{n+1} + t^2F_n - t & tF_n + t^2F_{n-1} - t \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

yazılır. (2.51) eşitliğinin sol tarafındaki matris çarpımı yapılır ve de (*s*,*t*)-Fibonacci dizilerinin tanımı göz önüne alınarak, $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_{k+1} = \left(a_{ij}\right)$ matrisinin elemanları,

$$a_{11}=\frac{1}{s+t-1}\left(s^2F_{n+2}+2tF_{n+2}+s^2tF_{n+1}+2t^2F_{n+1}+stF_{n+1}+st^2F_n-s^2\left(s+t\right)-t\left(3s+2t\right)\right)$$

$$=\frac{1}{s+t-1}\left(s\left(sF_{n+2}+tF_{n+1}\right)+st\left(sF_{n+1}+tF_n\right)+2tF_{n+2}+2t^2F_{n+1}-s^2\left(s+t\right)-t\left(3s+2t\right)\right)$$

$$=\frac{1}{s+t-1}\left(sF_{n+3}+stF_{n+2}+2tF_{n+2}+2t^2F_{n+1}-s^2\left(s+t\right)-t\left(3s+2t\right)\right)$$

$$=\frac{1}{s+t-1}\left(F_{n+4}+tF_{n+2}+stF_{n+2}+2t^2F_{n+1}-s^2\left(s+t\right)-t\left(3s+2t\right)\right)$$

$$=\frac{1}{s+t-1}\left(F_{n+4}+tF_{n+3}+tF_{n+2}+t^2F_{n+1}-s^2\left(s+t\right)-t\left(3s+2t\right)\right),$$

$$a_{12}=\frac{1}{s+t-1}\left(s^2F_{n+1}+s^2tF_n+2tF_{n+1}+2t^2F_n+stF_n+st^2F_{n-1}-s^2-2t-st\right)$$

$$=\frac{1}{s+t-1}\left(s\left(sF_{n+1}+tF_n\right)+st\left(sF_n+tF_{n-1}\right)+2tF_{n+1}+2t^2F_n-s^2-2t-st\right)$$

$$=\frac{1}{s+t-1}\left(sF_{n+2}+stF_{n+1}+2tF_{n+1}+2t^2F_n-s^2-2t-st\right)$$

$$=\frac{1}{s+t-1}\left(sF_{n+2}+tF_{n+1}+t\left(sF_{n+1}+tF_n\right)+tF_{n+1}+t^2F_n-s^2-2t-st\right)$$

$$=\frac{1}{s+t-1}\left(F_{n+3}+t\left(F_{n+2}+F_{n+1}+tF_n\right)-s^2-2t-st\right),$$

$$a_{21}=\frac{1}{s+t-1}\left(stF_{n+2}+st^2F_{n+1}+2t^2F_{n+1}+2t^3F_n-s^2t-st^2-2t^2\right)$$

$$=\frac{1}{s+t-1}\left(t\left(sF_{n+2}+tF_{n+1}\right)+t^2\left(sF_{n+1}+tF_n\right)+t^2F_{n+1}+t^3F_n-s^2t-st^2-2t^2\right)$$

$$=\frac{t}{s+t-1}\left(F_{n+3}+tF_{n+2}+tF_{n+1}+t^2F_n-s^2-st-2t\right),$$

$$a_{22}=\frac{1}{s+t-1}\left(stF_{n+1}+st^2F_n+2t^2F_n+2t^3F_{n-1}-st-2t^2\right)$$

$$=\frac{1}{s+t-1}\left(t\left(sF_{n+1}+tF_n\right)+t^2\left(sF_n+tF_{n-1}\right)+t^2F_n+t^3F_{n-1}-st-2t^2\right)$$

$$=\frac{t}{s+t-1}\left(F_{n+2}+tF_{n+1}+tF_n+t^2F_{n-1}-s-2t\right),$$

şeklinde elde edilir ki, böylece Teorem 2. 4. 3 ispatlanır.

Sonuç 2. 4. 4. $s+t\neq 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{n} L_{k+2} = \frac{1}{s+t-1}\left(F_{n+4}+tF_{n+3}+tF_{n+2}+t^2F_{n+1}-s^2\left(s+t\right)-t\left(3s+2t\right)\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n} L_{k+1} = \frac{1}{s+t-1}\left(F_{n+3}+t\left(F_{n+2}+F_{n+1}+tF_n\right)-s^2-2t-st\right),$$

dir.

İspat. İspat, (2.4) eşitliği ve Teorem 2. 4. 3' den açıktır.

Teorem 2. 4. 5. $s-t\neq -1$ ve $s+t\neq 1$ için, $\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{2k}=\left(a_{ij}\right)$ olmak üzere

$$a_{11}=\frac{1}{\left(s-t+1\right)\left(s+t-1\right)}\left(F_{2n+3}-t^2F_{2n+1}-s^2+t^2-t\right)$$

$$a_{12}=\frac{1}{\left(s-t+1\right)\left(s+t-1\right)}\left(\left(1-t\right)F_{2n+2}+stF_{2n+1}-s\right)$$

$$a_{21}=\frac{1}{\left(s-t+1\right)\left(s+t-1\right)}\left(tF_{2n+2}-t^3F_{2n}-st\right)$$

$$a_{22}=\frac{1}{\left(s-t+1\right)\left(s+t-1\right)}\left(\left(t-t^2\right)F_{2n+1}+st^2F_{2n}+t^2-t\right)$$

dir.

İspat. $S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{\mathcal{F}}_{2k}=\left(a_{ij}\right)$ olsun. Bu takdirde,

$$S_{2n}\left(\boldsymbol{\mathcal{F}}_2-\boldsymbol{\mathcal{F}}_0\right)=\boldsymbol{\mathcal{F}}_{2n+2}-\boldsymbol{\mathcal{F}}_2 \tag{2.52}$$

yazılır.

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_2-\boldsymbol{\mathcal{F}}_0=\begin{pmatrix} s^2+t-1 & s \\ st & t-1 \end{pmatrix}$$

olup, $\det(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1) = (t-s-1)(t+s-1)$ dir. Teoremdeki, $s-t \neq -1$ ve $s+t \neq 1$ kabulümüz gereği $\det(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1) \neq 0$ olup, $(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1)^{-1}$ matrisi vardır. Böylece, (2.52) eşitliğinden,

$$S_{2n} = (\mathcal{F}_{2n+2} - \mathcal{F}_2)(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_0)^{-1} \tag{2.53}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, $\mathcal{F}_{2n+2} - \mathcal{F}_2$ ve $(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_0)^{-1}$ matrislerinin açık bir şekilde yazıp, (2.53) eşitliğinin sağ tarafındaki matris çarpımını elde edelim. (2.2) eşitliği ve de (*s*,*t*)-Fibonacci matris dizisinin tanımından,

$$\mathcal{F}_{2n+2} - \mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} F_{2n+3} - s^2 - t & F_{2n+2} - s \\ tF_{2n+2} - st & tF_{2n+1} - t \end{pmatrix}$$

ve

$$(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_0)^{-1} = \frac{1}{(s-t+1)(s+t+1)} \begin{pmatrix} 1-t & s \\ st & 1-s^2-t \end{pmatrix}$$

dir. (2.53)' deki matris çarpımından, $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_{2k} = (a_{ij})$ matrisinin elemanları,

$$\begin{aligned} (s-t+1)(s+t+1)a_1 &= F_{2n+3} - tF_{2n+3} + stF_{2n+2} - s^2 - t + t^2 \\ &= F_{2n+3} - t(F_{2n+3} - sF_{2n+2}) - s^2 - t + t^2 \\ &= F_{2n+3} - t^2F_{2n+1} - s^2 - t + t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s-t+1)(s+t+1)a_1 &= sF_{2n+3} + F_{2n+2} - tF_{2n+2} - s^2F_{2n+2} - s \\ &= s(sF_{2n+2} + tF_{2n+1}) + F_{2n+2} - tF_{2n+2} - s^2F_{2n+2} - s \\ &= (1-t)F_{2n+2} + stF_{2n+1} - s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s-t+1)(s+t+1)a_2 &= tF_{2n+2} - t^2F_{2n+2} + st^2F_{2n+1} - st \\ &= tF_{2n+2} - t^2(sF_{2n+1} + tF_{2n}) + st^2F_{2n+1} - st \\ &= tF_{2n+2} - t^3F_{2n} - st, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s-t+1)(s+t+1)a_2 &= stF_{2n+2}+tF_{2n+1}-t^2F_{2n+1}-s^2tF_{2n+1}+t^2-t\\ &= st\left(sF_{2n+1}+tF_{2n}\right)+tF_{2n+1}-t^2F_{2n+1}-s^2tF_{2n+1}+t^2-t\\ &= \left(t-t^2\right)F_{2n+1}+st^2F_{2n}+t^2-t,\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2. 4. 6. $s-t\neq -1$ ve $s+t\neq 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{n}F_{2k+1}=\frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\left(F_{2n+3}-t^2F_{2n+1}-s^2+t^2-t\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}F_{2k}=\frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\left((1-t)F_{2n+2}+stF_{2n+1}-s\right)$$

dir.

İspat. İspat, Teorem 2. 4. 1 ve (2.2) eşitliğinden açıktır.

Teorem 2. 4. 7 $s-t\neq -1$ ve $s+t\neq 1$ için, $\sum_{k=1}^{n}\mathcal{L}_{2k+1}=\left(a_{ij}\right)$ olmak üzere

$$a_1 = \frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\left(F_{2n+5}+\left(t-t^2\right)F_{2n+3}-t^3F_{2n+1}-s^4+t^2\left(s^2-2t-2\right)-4s^2t\right),$$

$$a_1 = \frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\left(F_{2n+4}+\left(t-t^2\right)F_{2n+2}-t^3F_{2n}-s^3+st^2-3st\right),$$

$$a_{21} = = \frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\left(stF_{2n+3}+t^3F_{2n+2}-t^4F_{2n}\right),$$

$$a_{22}=\frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\left(stF_{2n+2}+2t(1-t)F_{2n+1}+st^3F_{2n}-s^2t+2t^3-2t^2\right),$$

dir.

İspat. $s-t\neq -1$ ve $s+t\neq 1$ olsun. $\mathcal{L}_1=\begin{pmatrix}s^2+2t & s\\ st & 2t\end{pmatrix}$ olup**,** Teorem 2. 6 ve Teorem 2. 4. 5' den $\sum_{k=1}^{n}\mathcal{L}_{2k+1}=\left(a_{ij}\right)$ matrisinin elemanları,

$$a_1 \overline{\overline{1}} \frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(s^2F_{2n+3}+2tF_{2n+3}+stF_{2n+2}-s^2t^2F_{2n+1}-2t^3F_{2n+1}-st^3F_{2n}$$

$$-s^4+t^2\left(s^2-2t-2\right)-4s^2t\Big)$$

$$=\frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(s\left(sF_{2n+3}+tF_{2n+2}\right)-st^2\left(sF_{2n+1}+tF_{2n}\right)+2tF_{2n+3}-2t^3F_{2n+1}$$

$$-s^4+t^2\left(s^2-2t-2\right)-4s^2t\Big)$$

$$=\frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(F_{2n+5}+\left(t-t^2\right)F_{2n+3}-t^3F_{2n+1}$$

$$-s^4+t^2\left(s^2-2t-2\right)-4s^2t\Big),$$

$$a_1 \overline{\overline{2}} \frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(s^2(1-t)F_{2n+2}+s^3tF_{2n+1}+2t(1-t)F_{2n+2}+2st^2F_{2n+1}$$

$$+s\left(t-t^2\right)F_{2n+1}+s^2t^2F_{2n}-s^3+st^2-3st\Big)$$

$$=\frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(s(1-t)\left(sF_{2n+2}+tF_{2n+1}\right)+s^2t\left(sF_{2n+1}+tF_{2n}\right)$$

$$2t(1-t)F_{2n+2}+2st^2F_{2n+1}-s^3+st^2-3st\Big)$$

$$=\frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(F_{2n+4}+\left(t-t^2\right)F_{2n+2}-t^3F_{2n}-s^3+st^2-3st\Big),$$

$$a_{21}=\frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(stF_{2n+3}-st^3F_{2n+1}+2t^3F_{2n+2}-2t^4F_{2n}$$

$$-s^3t+st^3-5st^2\Big)$$

$$=\frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(stF_{2n+3}+t^3F_{2n+2}+t^3\left(sF_{2n+1}+tF_{2n}\right)$$

$$-st^3F_{2n+1}-2t^4F_{2n}-s^3t+st^3-5st^2\Big)$$

$$=\frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(stF_{2n+3}+t^3F_{2n+2}-t^4F_{2n}\Big),$$

$$a_2 = \frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(st(1-t)F_{2n+2} + s^2t^2F_{2n+1} + 2t^2(1-t)F_{2n+1} + 2st^3F_{2n}$$

$$-s^2t + 2t^3 - 2t^2\Big)$$

$$= \frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(t(1-t)(sF_{2n+2} + tF_{2n+1}) + st^2(sF_{2n+1} + tF_{2n}) + t^2(1-t)F_{2n+1}$$

$$st^3F_{2n} - s^2t + 2t^3 - 2t^2\Big)$$

$$= \frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(stF_{2n+2} + 2t(1-t)F_{2n+1} + st^3F_{2n} - s^2t + 2t^3 - 2t^2\Big),$$

olarak elde edilir ki, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 2. 4. 8. $s-t \neq -1$ ve $s+t \neq 1$ için

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k+2} = \frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(F_{2n+5} + \left(t-t^2\right)F_{2n+3} - t^3F_{2n+1} - s^4 + t^2\left(s^2-2t-2\right) - 4s^2t\Big),$$

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k+1} = \frac{1}{(s-t+1)(s+t-1)}\Big(F_{2n+4} + \left(t-t^2\right)F_{2n+2} - t^3F_{2n} - s^3 + st^2 - 3st\Big),$$

dir.

İspat. İspat, (2.4) eşitliği ve Teorem 2. 4. 7' den açıktır.

Teorem 2. 4. 9. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{F}_i^r x^i = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}X^k(-Y)^{r-k}\left(1+\alpha^k\beta^{r-k}x\right)^n$ dir.

İspat.

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathcal{F}_i^r x^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(X\alpha^i - Y\beta^i\right)^r x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(X\alpha^i\right)^k\left(-Y\beta^i\right)^{r-k}x^i$$

$$= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}X^k(-Y)^{r-k}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\alpha^k\beta^{r-k}x\right)^i$$

$$= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}X^k(-Y)^{r-k}\left(1+\alpha^k\beta^{r-k}x\right)$$

2. 5. Fibonacci Matris Dizisinin Üstel Matris Dizisi

Bu bölümde, Fibonacci matris dizisi $\{\mathcal{F}_n\}$' nin, $\{e^{\mathcal{F}_n}\}$ üstel matris dizisinin *n*-inci terimi $e^{\mathcal{F}_n}$, formülüze edilmiş ve daha sonra bu formülden hareketle genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını içeren bir sonsuz toplam için formül sunulmuştur.

Teorem 2. 5. 1. $n \geq 0$ için, $e^{\mathcal{F}_n} = \left(F_n + t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{nk}}{k!} \right) I_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{nk}}{k!} \mathcal{F}_n$ dir.

İspat. $n \geq 0$ için $\mathcal{F}_n$ matrisinin özdeğerleri, α^n ve β^n olup, $\alpha^n \neq \beta^n$ dir. Böylece,

$$\mathcal{F}_n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} \tag{2.54}$$

olacak şekilde terslenebilir *P* matrisi vardır. (2.54) eşitliği ve matris fonksiyonları bilgisinden hareketle,

$$e^{\mathcal{F}_n} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha^n} & 0 \\ 0 & e^{\beta^n} \end{pmatrix} P^{-1} \tag{2.55}$$

yazılır. Ayrıca $\begin{pmatrix} e^{\alpha^n} & 0 \\ 0 & e^{\beta^n} \end{pmatrix}$ matrisi

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha^n} & 0 \\ 0 & e^{\beta^n} \end{pmatrix} = \frac{\alpha^n e^{\beta^n} - \beta^n e^{\alpha^n}}{\alpha^n - \beta^n} I_2 - \frac{e^{\alpha^n} - e^{\beta^n}}{\alpha^n - \beta^n} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

şeklinde bir ayrışıma sahiptir. $f(x) = e^x$ fonksiyonunun Maclaurin serisine açılımı olan,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, \infty) \tag{2.57}$$

formülünden hareketle,

$$\begin{aligned}\frac{e^{\alpha^n}-e^{\beta^n}}{\alpha-\beta}&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^{nk}-\beta^{nk}}{\alpha-\beta}\right)\frac{1}{k!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_{nk}}{k!}\end{aligned}\tag{2.58}$$

yazılır. $\alpha\beta=-t$ olduğundan (2.57) formülünden,

$$\begin{aligned}\alpha^n e^{\beta^n}&=\alpha^n\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{nk}\frac{1}{k!},\\&=\alpha^n+\alpha^n\beta^n+\alpha^n\beta^{2n}+\ldots\\&=\alpha^n+(-t)^n\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{nk}\frac{1}{k!}\end{aligned}\tag{2.59}$$

elde edilir. Benzer düşünce ile,

$$\beta^n e^{\alpha^n}=\beta^n+(-t)^n\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{nk}\frac{1}{k!}\tag{2.60}$$

eşitliği yazılır. (2.59) ve (2.60) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^n e^{\beta^n}-\beta^n e^{\alpha^n}}{\alpha-\beta}&=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}+t^n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^{nk}-\beta^{nk}}{\alpha-\beta}\right)\frac{1}{k!}\\&=F_n+t^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_{nk}}{k!}\end{aligned}\tag{2.61}$$

eşitliğine ulaşılır. (2.54), (2.56), (2.58) ve (2.61) eşitliklerinden, teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 2. 5. 2. $n\geq 0$ için,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_{nk+1}}{k!}=F_n+\left(t^n-F_{n+1}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_{nk}}{k!}\tag{2.62}$$

dir.

İspat. Teorem 2. 2 ve Teorem 2. 5. 1' den,

$$\left(F_n + t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{nk}}{k!}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{nk}}{k!}\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ tF_n & tF_{n-1}\end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}F_{nk+1} & F_{nk}\\ tF_{nk} & tF_{nk-1}\end{pmatrix}\frac{1}{k!}$$

yazılır ki, buradan

$$F_n + t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{nk}}{k!} - F_{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{nk}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{nk+1}}{k!}$$

elde edilir ki, ispat tamamlanmış olur.

3. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmada, yeni Fibonacci ve Lucas matris dizileri kavramları tanımlanmıştır. Bu tanımlar ve buna bağlı bazı sonuçlar iki makale şeklinde, SCI (Science Citation Index) kapsamındaki bir dergide yayınlanarak, literatüre yeni kavramlar ve sonuçlar kazandırılmıştır.

Çalışmanın içeriğinden de görülmektedir ki, Fibonacci matris dizileri, genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri ile ve Lucas matris dizileri de genelleştirilmiş Lucas sayı dizileri ile ilişkilidir. Çalışmamızı, araştırıcılara iki öneri sunarak sonlandırmak istiyoruz. İlki; genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin her ikisi ile de ilişkili olan bir matris dizisi tanımlamak ve sonuçlar elde etmek için araştırma yapılabilir. İkincisi; çalışmada tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin başlangıç değerlerinin herhangi iki reel sayı alınması ile elde edilen yeni Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile ilişkili olan Fibonacci ve Lucas matris dizileri tanımlamak ve sonuçlar elde etmek için araştırma yapılabilir.

4. KAYNAKLAR

[1] Becker, P. G., *k-regular power series and Mahler-type functional equations*, J. Number Theory, *49* (3) (1994), 269-286.

[2] Borevich, A. I. and Shafarevich, I. R. 1966. Number theory, Academic Press, New York.

[3] Bowen, R. and Landford, O. E., *Zeta functions of restrictions of the shift transformation*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc, Providence, R.I., 1970, 43-49.

[4] Box, G. E. and Jenkins, G. M. 1970. Times series analysis, Forecasting and control, Holden-Day, San Francisco.

[5] Cerlienco, L., Mignotte, M., and Piras, F., *Suites recurrentes linearies: proprietes algebriques et aritmetiques*, Enseign Math. 33(2) (1987), 67-108.

[6] Civciv, H. and Türkmen, R., *Notes on the (s,t)-Lucas and Lucas matrix sequences*, Ars Comb., 89 (2008), 271-285.

[7] Civciv, H. and Türkmen, R., *On the (s,t)-Fibonacci and Fibonacci matrix sequences*, Ars Comb., 87 (2008), 161-173.

[8] Denef, J., *The rationality of the Poincare series associated to the p-adic points on a variety*, Invent. Math. 77 (1) (1984), 1-23.

[9] Er, M. C., *Sums of Fibonacci numbers by matrix method*, Fibonacci Quarterly , 22 (3) (1984), 204-207.

[10] Falcon, S. and Plaza, A., *On the Fibonacci k-numbers*, Chaos, Solitons and Fractals , 32 (2007), 1615-1624.

[11] Hinkkanen, A., *Zeta functions of rational functions are rational*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 19(1) (1994), 3-10.

[12] Horadam, A. F., Jacobsthal representation numbers, Fib. Quart., 34 (1996), 40-54.

[13] Kalman, D., *Generalized Fibonacci numbers by matrix method*, Fibonacci Quarterly , 20 (1) (1982), 73-76.

[14] Karaduman, E., *An application of Fibonacci numbers in matrices*, Applied Mathematics and Computation , 147 (2004), 903-908.

[15] Kılıç, E. and Taşçı, D., *The generalized Binet formula, representation and sum of the generalized order-k Pell numbers,* Taiwanese J. Math. , 10 (6) (2006), 1661-1670.

[16] King, C. H. 1960. Some Further Properties of the Fibonacci Numbers. San Jose: CA: San Jose State.

[17] Kolman, B. and Hill, D. R. 2000. Elementary Linear Algebra, Prentice Hall.

[18] Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas numbers with applications, Wiley-Interscience Publ, Canada.

[19] Köken, F. and Bozkurt, D., *On the Jacobsthal numbers by matrix methods*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 3(13) (2008), 605-614.

[20] Lidl, R. and Niederreiter, H. 1983. Finite Fields, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Reading, MA, 1983.

[21] Lipshitz, L. and Poorten, A. J. 1990. Rational functions, diagonals, automata and arithmetic, Number theory (Banff, AB, 1988), de Gruyter, Berlin, pp. 339-358.

[22] Manning, A., *Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions*, Bull. London Math. Soc. 3 (1971), 215-220.

[23] Matsumura, H. 1989. Commutative ring theory, second ed., Cambridge University Press, Cambridge.

[24] Mcllroy, M. D. 1992. Number theory in computer graphics, the unreasonable effectiveness of number theory (Orono, ME, 1991), Amer. Math. Soc, Providence. RI, pp. 105-121.

[25] Mignotte, M. 1989. Proprietes arithmetiques des suites recurrentes lineaires, Theorie des nombres, Annee 1988/89, Fasc. 1, Univ. Franche-Comte. Besancon, pp. 30.

[26] Mikhalev, A. V. and Nechaev, A. A., *Linear recurring sequences over modules*, Acta Appl. Math. 42(2) (1996), 161-202.

[27] Myerson, G. and Poorten, A. J., *Some problems concerning recurrence sequences*, Amer. Math. Monthly 102(8) (1995), 698-705.

[28] Nallı, A., *On the Hadamard product of Fibonacci* Q^n *matrix and Fibonacci* Q^{-n} *matrix,* Int. J. Contemp. Math. Sciences , 1(16) (2006), 753-761.

[29] Nallı, A., *On the Hadamard product of Golden Matrices,* Int. J. Contemp. Math. Sci. , 2 (11) (2007), 537-544.

[30] Narkiewicz, W., *Recurrent sequences, Algebra and number theory*, Moskov. Gos. Ped, Inst. Ucen. Zap. 375 (1971), 103-123.

[31] Niederreiter, H. 1995. New developments in uniform pseudorandom number and vector generation, Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods in scientific computing (Las Vegas, NV, 1994), Springer, New York, pp. 87-120.

[32] Niederreiter, H. 1992. Random number generation and quasi-Monte Carlo methods, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA.

[33] Niederreiter, H., *Recent trends in random number and random vector generation*, Ann. Oper. Res., 31(1-4) (1991), 323-345.

[34] Poorten, A. J. 1989. Some facts that should be better known, especially about rational functions, Number theory and applications (Banff, AB, 1988), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, pp. 497-528.

[35] Prasolov V. V. 1994. Problems and Theorems in Linear Algebra, American Mathematical Society.

[36] Robinson, R. M., *Mersenne and Fermat Numbers*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954), 842-846.

[37] Du Sautoy, N. P. F., *Finitely generated groups, p-adic analytic groups and Poincare series*, Ann. of Math. 137(2) (1993), 639-670.

[38] Du Sautoy, N. P. F., *Counting congruence subgroups in arithmetic subgroups*, Bull. London Math. Soc. 26(3) (1994), 255-262.

[39] Shipsey, R. 2000. Exponential Diophantine equations involving products of consecutive integers and related equations, Number Theory , pp. 463-495.

[40] Shorey, T. N. 2000. Exponential Diophantine equations involving products of consecutive integers and related equations, Number theory, Birkhauser, Basel, pp. 463-495.

[41] Shorey, T. N. and Tijdeman, R. 1986. Exponential Diophantine equations, Cambridge University Press, Cambridge.

[42] Shparlinski, I. E. 1999. Finite fields: Theory and computation, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[43] Silvester, J. R., *Fibonacci properties by matrix method*, Mathematical Gazette , 63 (1979), 188-191.

[44] Stakhov, A. and Rozin, B., *On a new class of Hyperbolic function*, Chaos, Solitons and Fractals , 23 (2004), 379-389.

[45] Stewart, C. L., *On the greatest prime factor of terms of a linear recurrence sequence*, Rocky Mountain J. Math. 15(2) (1985), 599-608.

[46] Taşçı, D. and Kılıç, E., *On the k-generalized Lucas numbers*, Applied Mathematics and Computation , 155 (2004), 637-641.

[47] Tezuka, S. 1996. Uniform random numbers, Kluwer, Dordrecht.

[48] Tijdeman, R. 1998. Exponential Diophantine equations 1986-1996, Number theory (Eger, 1996), de Gruyter, Berlin, pp. 523-539.

[49] Tijdeman, R. 2002. Some applications of Diophantine approximation, Number Theory for the Millennium, Vol.III, A. K. Peters, Natick. MA, pp. 261-284.